SOMMAIRE DU N° 102

SMF

Mot de la Présidente

À la suite du mouvement Sauvons la Recherche, 1 000 postes dits « postes Fillon » ont été obtenus. Ils ont été répartis en 700 postes de maîtres de conférences, 150 postes d'ATER et 150 postes d'administratifs, et seront publiés dans les prochaines semaines. Selon les informations non définitives dont je dispose, 33 postes de maîtres de conférences et 5 postes d'ATER reviendraient aux mathématiques, soit 38 postes qui se répartiraient en 23 postes pour la 26^{e} section et 15 postes pour la 25^{e} section. Comme les mathématiciens représentent environ 7% des effectifs des enseignants chercheurs, ce chiffre n'est pas enthousiasmant. Il est cependant encourageant dans un contexte de redéploiement défavorable à notre discipline. Ce résultat honorable dans un contexte difficile est dû à l'acharnement des mathématiciens à défendre leurs projets, à la bonne écoute qu'ils obtiennent dans un certain nombre d'universités et au soutien que les personnes en charge des mathématiques dans les instances nationales leur accordent.

Les rôles respectifs des universités et du CNRS et des autres organismes de recherche dans l'organisation de la recherche française sont en débat, et la notion de campus de recherche semble être une des propositions qui se dégage à l'heure actuelle. Si les grands laboratoires de mathématiques situés dans les universités dont les capacités de recherche sont reconnues n'auront sans doute aucun problème à s'insérer dans un tel système, les petits centres, qui comportent souvent en mathématiques des équipes de tout premier plan auront plus de mal à se faire reconnaître dans ces nouvelles structures.

Un des rôles de la SMF est de donner un cadre pour les débats, de proposer des synthèses, de faire circuler les informations en utilisant notamment son réseau de correspondants et de défendre en tout lieu les intérêts de la communauté mathématique. La SMF a été par exemple à l'initiative d'une prise de position commune SMF-SMAI-SFDS qu'on peut trouver sur `http://smf.emath.fr/VieSociete/JourneeAnnuelle/2004/SauvonslaRecherche.html`.

Avec les autres sociétés savantes de mathématiques, elle va rencontrer les responsables de la recherche pour attirer leur attention sur nos problèmes spécifiques et les solutions que nous préconisons.

Même si nous avons trop souvent l'impression de prêcher dans le désert, il arrive parfois que nos interventions aient une influence positive chez les décideurs. C'est ainsi que la réglementation qui empêchait les étudiants titulaires d'une agrégation qui souhaitaient ensuite préparer un DEA de se voir attribuer une bourse a été modifiée à notre demande. Il est donc désormais possible à un étudiant boursier de préparer l'agrégation après un DEA, un DESS ou un master, et inversement de préparer un DEA, DESS ou master après l'agrégation. Les détails se trouvent sur le site de la SMF à l'adresse `http://smf.emath.fr/Enseignement/`.

Autre exemple, le projet du président de l'université de Nantes de supprimer l'IREM des Pays de Loire n'a pas été approuvé par le CA de l'université, à la suite de protestations multiples dont celles de l'APMEP, de la SMF, de la SMAI et du comité scientifique des IREM.

Une SMF active, alertée par ses adhérents dès qu'un problème se pose, joue donc un rôle non négligeable dans la défense de la communauté mathématique. Pensez à le faire savoir autour de vous, de manière à ce que de plus nombreux collègues nous rejoignent.

à Rennes, le 29 septembre 2004
Marie-Françoise Roy

Vie de la société

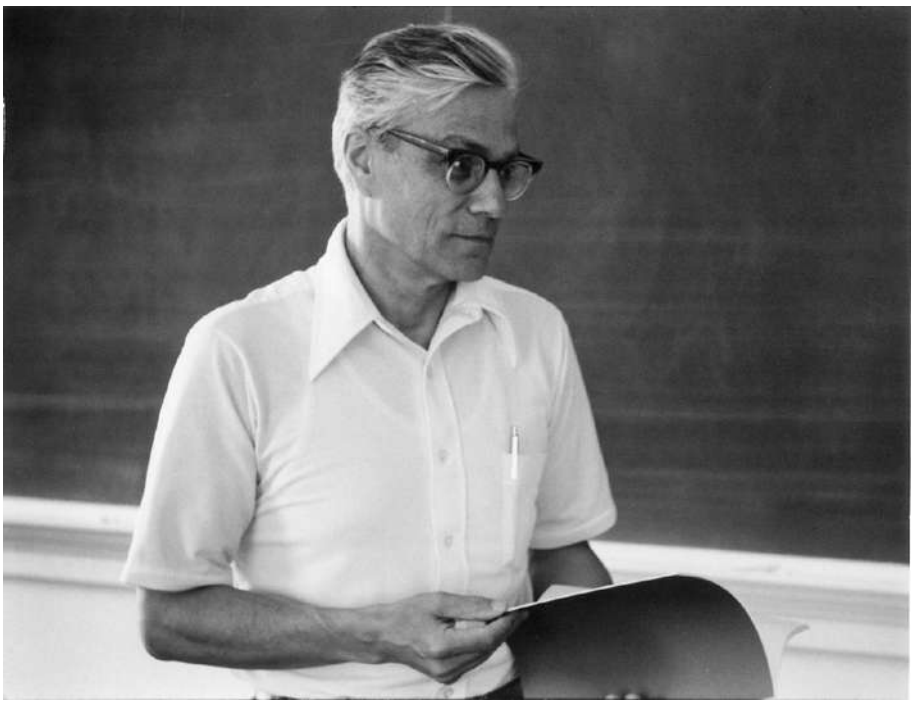
L'été 2004 a été marqué par une série de rencontres nationales ou internationales.

La Société Mathématique Européenne a tenu une rencontre à Stockholm, en marge du congrès européen. Les initiatives pour la mise en place d'un conseil européen de la recherche se poursuivent.

La journée organisée par l'ENS et la SMF pour le centenaire d'Henri Cartan qui a eu lieu le 28 juin (`http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/AnniCartan.html`) a été un grand succès.

Du 12 au 15 juillet le premier colloque Canada-France des Sciences Mathématiques dont la SMF était coorganisatrice s'est tenu à Toulouse (`http://smc.math.ca/Reunions/Toulouse2004/`). Il a regroupé plus de 400 personnes. Une rencontre similaire est prévue au Canada en 2008.

Début septembre le 7^{e} congrès panafricain de mathématiques s'est déroulé à Tunis. Le congrès a regroupé des participants de près de 50 pays, et a accueilli des invités venus de tous les continents, dont les représentants de la SMF. Les débats ont porté entre autres sur l'accès des mathématiciens africains à la documentation électronique en ligne.



A. Borel, IAS 1980

MATHÉMATIQUES

Hommage à Armand Borel

Armand Borel (1923-2003)

André Haefliger

Armand Borel est décédé le 11 août 2003 à Princeton à l'âge de 80 ans après une courte maladie, alors qu'il était encore en pleine activité. Son œuvre mathématique est considérable et présente une remarquable cohérence. Ses travaux, hormis une douzaine de livres ou de notes de cours et ses articles publiés après 1999, ont été publiés par Springer Verlag dans quatre gros volumes réunissant plus de 150 articles (cités ci-après sous [Oe]). Plus de 50 d'entre eux sont écrits en collaboration avec plus de 30 coauteurs différents (notamment dix travaux communs avec J-P. Serre, cinq avec J. Tits). Ils sont centrés sur les groupes de Lie et leurs actions, ainsi que sur les groupes algébriques et arithmétiques, et abordent des questions centrales concernant une multitude de domaines : topologie algébrique, géométrie différentielle, analytique et algébrique, théorie des nombres, etc. Ils ont joué un rôle fondamental dans le développement des mathématiques de la seconde moitié du 20^{e} siècle.

Armand Borel est né à la Chaux-de-Fonds en Suisse le 21 mai 1923. Après des études secondaires faites à Genève, puis dans des institutions privées, il entre en 1942 à l'École polytechnique fédérale (EPF) de Zurich dans la section mathématiques et physique, tout en accomplissant son service militaire obligatoire, et obtient son diplôme en mathématiques au printemps 1947 (son travail de diplôme lui avait été proposé par E. Stiefel). Il sera assistant à l'EPF pendant deux ans. Pendant cette période il publie deux travaux, l'un sur la caractérisation des sous-groupes connexes de rang maximum des groupes de Lie compacts (en collaboration avec J. de Siebenthal), et l'autre sur les groupes de Lie compacts opérant transitivement sur des sphères ou des tores. Ils témoignent déjà de ses solides connaissances sur les groupes de Lie compacts et les systèmes de racines, ainsi qu'en topologie algébrique, sujets auxquels il s'est initié en suivant les cours de E. Stiefel et de H. Hopf (tous deux des pédagogues exceptionnels). Ces premiers travaux montrent qu'il a parfaitement assimilé le papier [St] de Stiefel et les deux travaux fondamentaux [H1] et [H2] de Heinz Hopf.

Il désirait préparer une thèse sur les groupes de Lie mais Stiefel s'était déjà résolument tourné vers les mathématiques appliquées. Grâce à une bourse d'échange entre l'EPF et le CNRS, il passe l'année académique 1949-1950 à Paris. Il s'intègre immédiatement à la vie mathématique parisienne bouillonnante de cette époque. Il participe activement au séminaire de H. Cartan à l'École normale supérieure consacré cette année là à la topologie des espaces fibrés ; il y fait deux

exposés où il donne un tableau complet de ce qui est connu à cette époque sur les groupes d'homotopie des groupes de Lie compacts. Au Collège de France, J. Leray expose ses conceptions révolutionnaires en topologie algébrique, la théorie des faisceaux et la suite spectrale ; parmi les rares auditeurs figurent Borel et Serre ; ce dernier, découragé, finit par abandonner, mais Borel tenace s'accroche jusqu'au bout (il complète même la théorie et la simplifie dans [Oe, I, 10]). Voici comment Serre évoque dans son entretien avec Marian Schmidt [Sc] le rôle joué par Borel dans les débuts de sa vie de chercheur, alors qu'il était à la recherche d'un sujet de thèse : « *J'ai fini, deux ans après ma sortie de l'École normale, par démarrer. Ce démarrage, je le dois en grande partie au mathématicien suisse Armand Borel ; venu de Zurich, où il avait été l'élève de H. Hopf, il était arrivé à Paris à l'automne 1949 et il y est resté deux ans*[1]*. Nous avons fait connaissance au séminaire Cartan et nous avons immédiatement sympathisé. Un peu plus âgé que moi, il avait déjà plusieurs publications à son actif et il m'a beaucoup appris sur la technique de la recherche. De plus, ce qui a été capital, il avait réussi à comprendre la mystérieuse théorie de Leray, suites spectrales incluses, et il me l'a expliquée. Un certain dimanche de juin 1950 (le jour où a commencé la guerre de Corée), nous avons trouvé une application de cette théorie qui, sans être difficile, était d'un genre nouveau : nous avons démontré qu'il n'existe pas de fibration d'un espace euclidien dont les fibres soient compactes et non réduites à des points. Nous avons rédigé là-dessus une note pour les Comptes rendus de l'Académie des sciences ; présentée le lendemain à l'Académie par Elie Cartan, elle est parue deux semaines plus tard. Mis en confiance par ce succès, j'ai entrepris d'explorer la théorie de Leray pour voir quelles autres applications on pouvait en tirer* ». Et un peu plus loin, à la question : quelles sont les principales influences que vous avez subies ? Serre répond : « Celles d'Henri Cartan et d'Armand Borel ont été décisives pour ma formation. Ensuite celle d'André Weil ». Ce premier travail commun avec Serre évoqué ci-dessus a joué un rôle de déclic pour l'un comme pour l'autre, car ils ont réalisé le parti que l'on pouvait tirer de l'étude de la suite spectrale d'une fibration pour établir des relations entre les cohomologies de l'espace total, de la fibre et de la base.

Borel donne aussi un rapport au séminaire Bourbaki sur les travaux d'Iwasawa et Gleason, en relation avec le 5^{e} problème de Hilbert. Peu après il fera d'autres exposés au séminaire Bourbaki et deviendra bientôt un membre actif de Bourbaki, qu'il quittera à l'âge réglementaire de 50 ans. Durant son séjour parisien, Borel assimile aussi les nouvelles idées développées par A. Weil, H. Cartan, C. Chevalley et J.-L. Koszul (exposées par H. Cartan au Colloque de Topologie de Bruxelles [Ca]) sur la transgression dans la cohomologie réelle des espaces fibrés et l'homomorphisme de Chern-Weil. Le but de sa thèse (dont le directeur fut J. Leray) sera de réinterpréter ces résultats dans leur cadre géométrique et de les étendre en cohomologie entière et modulo p, en utilisant la suite spectrale de Leray d'une fibration.

De 1950 à 1952, il remplace le professeur d'algèbre à l'université de Genève tout en faisant des séjours fréquents à Paris et à Zurich, où il donne au semestre d'été 1951 un cours sur la *Cohomologie des espaces localement compacts, d'après J. Leray*. Les notes polycopiées de ce cours, publiées plus tard dans les Springer

[1] en fait Borel n'est resté à Paris qu'une année.

Lecture Notes in Mathematics, vol 2, ont circulé partout et ont été très utiles car elles constituaient le premier exposé systématique et détaillé abordable des théories de Leray. C'est pendant cette période qu'il rédige sa thèse, soutenue à Paris au printemps 52 (le jury était composé de J. Leray, président, H. Cartan et A. Lichnerowitz). Ce travail monumental intitulé « Sur la cohomologie des fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts » sera publié dans les *Annals of Math* [Oe, I, 23]. Sa seconde thèse sur les fonctions automorphes de plusieurs variables complexes (un sujet qui lui tiendra à cœur tout au long de sa carrière) fera l'objet d'un article d'exposition dans le *Bulletin de la Société Mathématique de France* [Oe, I, 22].

C'est aussi cette année qu'il épouse Gaby Pittet qui est restée sa compagne dévouée jusqu'au bout. En automne 1952, le jeune couple s'embarque pour les États-Unis, Armand étant invité à Princeton, comme membre visiteur de l'Institute for Advanced Study (IAS). Ce séjour de deux ans à Princeton sera crucial pour l'élargissement de son champ mathématique, tout autant que son séjour parisien en 1949-1950. Dans son rapport intitulé *The School of Mathematics of the Institute for Advanced Study* [Oe, IV, 138], il décrit avec enthousiasme l'ambiance mathématique exaltante de cette époque (voir pages 212-215). Il retrouve F. Hirzebruch qu'il avait déjà rencontré à Zurich en 1949 et qui comme lui est visiteur à l'IAS ; ensemble ils commencent leur grand travail *Characteristic classes and homogeneous spaces*. Il évoque la genèse du théorème de Riemann-Roch, ses contacts avec D. Montgomery, H. Samelson, J. Moore, et bien d'autres, qui conduisirent à des publications et des collaborations. Après avoir participé à une école d'été sur les groupes et algèbres de Lie organisée par l'AMS où il expose les résultats de sa thèse et où Chevalley donne un cours sur les groupes algébriques, il retourne en automne 53 à l'Institut pour une seconde année et y poursuit sa collaboration avec Hirzebruch. Influencé par les nouveaux développements de la géométrie analytique et algébrique dus à H. Cartan, J-P. Serre, C. Chevalley, F. Hirzebruch, K. Kodaira, D. Spencer et A. Weil, il commence à s'intéresser à l'aspect analytique complexe et algébrique des groupes de Lie. Ainsi le théorème de Borel-Weil est issu d'une conversation avec Weil à Chicago à la fin de 1953. Il est amené à penser aux groupes algébriques linéaires globalement, plutôt qu'en terme d'algèbres de Lie. Il développera ce point de vue plus profondément pendant l'année académique suivante 1954-1955 qu'il passera à Chicago comme professeur invité, bénéficiant des contacts avec André Weil. De là sortira son travail fondateur monumental *Groupes algébriques linéaires* [Oe, I, 39] qui marque un tournant décisif dans le sujet.

En cet automne 1955, il a publié plus de vingt travaux qui représentent déjà une œuvre mathématique importante. Il est nommé professeur à l'école polytechnique fédérale de Zurich (Heinz Hopf avait toujours été soucieux de le voir revenir en Suisse). Parmi ses obligations, il doit enseigner la géométrie descriptive en français ; il donne également un cours avancé sur le théorie des groupes de Lie. L'année suivante il reçoit une offre prestigieuse : un poste de professeur permanent à l'Institute for Advanced Study (IAS) de Princeton. Après quelques hésitations (voir [Oe, IV, p. 215]), il accepte ; il quitte Zurich au printemps 1957 et arrive à Princeton. Dès lors c'est là qu'il effectuera toute sa carrière, qu'il s'épanouira pleinement, élargissant encore ses domaines de recherches dans de multiples directions, et qu'il consacrera toute son énergie pour animer les activités mathématiques de

l'Institut et défendre inlassablement avec André Weil, qui le rejoindra une année plus tard, le niveau d'excellence de cette institution (cf. [Oe, IV, 138]). Il organisera des séminaires sur des sujets d'actualité qui connaîtront un grand succès en y faisant participer de nombreux collaborateurs. La maison de Gaby et d'Armand à Princeton deviendra aussi un lieu d'accueil chaleureux et privilégié pour tant de visiteurs.

Armand Borel a reçu plusieurs distinctions, telles un doctorat *honoris causa* de l'université de Genève en 1972, la médaille Brouwer en 1978, le Steele Prize de l'American Mathematical Society en 1991 et le prix Balzan en 1992. Il a été nommé membre de plusieurs institutions, en particulier de l'American Academy of Arts and Sciences en 1976, de la National Academy of Sciences, USA, en 1987, associé étranger à l'Académie des Sciences de Paris en 1981, etc.

Quelques résultats mathématiques d'Armand Borel

L'œuvre mathématique d'Armand Borel est considérable et touche à tant de domaines différents qu'une analyse détaillée de ses travaux exigerait le concours de plusieurs spécialistes. Je renvoie à l'article de Serre pour une vue générale de son œuvre, et à celui de Gopal Prasad pour ses contributions aux groupes arithmétiques. Je me bornerai ici à n'évoquer que très brièvement quelques spécimens de ses résultats, ne donnant hélas qu'une vue très limitée de la richesse de son œuvre.

Un des buts de la thèse de Borel [Oe, I, 23] est de calculer la cohomologie entière ou modulo p, pour p premier, des groupes de Lie compacts connexes G, ainsi que la cohomologie de l'espace B_G classifiant pour les espaces fibrés principaux de groupe G (les éléments de cette cohomologie sont par définition les classes caractéristiques universelles pour ces fibrés). Un des résultats typiques est que si l'algèbre de cohomologie entière (resp. modulo p) de G est une algèbre extérieure dans des générateurs $x_1, \dots, x_r$ de degrés impairs $2m_i - 1$, alors la cohomologie de B_G entière (resp. mod p) est une algèbre de polynômes dans des générateurs $y_1, \dots, y_r$, les y_i étant de degrés pairs $2m_i$. L'hypothèse est vérifiée si la cohomologie enière de G est sans torsion (resp. sans p-torsion). Plus précisément si $\pi : E_G \to B_G$ est un espace fibré principal universel de groupe G, on peut choisir les générateurs x_i et y_i de sorte que y_i soit obtenu par restriction à la fibre G d'une cochaine x_i' de E_G dont le cobord est $\pi^*(y_i)$. On dit alors que les éléments x_i sont transgressifs et que y_i est l'image de x_i par la transgression. Ce résultat est obtenu à l'aide de la suite spectrale de Leray. Un autre résultat important est le suivant. Si T est un tore maximal dans G, on a une application $B_T \to B_G$ induite par l'inclusion. Sous l'hypothèse précédente, l'application induite en cohomologie est injective et applique isomorphiquement la cohomologie de B_G sur I_G, le sous-espace de la cohomologie de B_T (qui est une algèbre de polynômes dans des variables de degré 2) formé des éléments invariants par l'action du groupe de Weyl. Ainsi par exemple pour $G = U(n)$, la cohomologie entière de B_T est une algèbre de polynômes dans n générateurs $t_1, \dots, t_n$ de degré 2 , la cohomologie entière de $BU(n)$ est l'algèbre des polynômes dans les classes de Chern qui apparaissent comme les fonctions symétriques élémentaires dans les t_i. Borel a obtenu un peu plus tard un résultat analogue pour la cohomologie modulo 2 de $O(n)$ (cf. [Oe, I, 25]). Dans ce cas T est remplacé par le sous-groupe $Q(n)$ des matrices diagonales. La cohomologie modulo 2 de $BQ(n)$ est l'algèbre des polynômes dans n générateurs v_i de degré 1 et

les classes de Stiefel-Whitney s'identifient aux fonctions symétriques élémentaires dans les $v_1, \ldots, v_n$.

Auparavant, dans le chapitre II de sa thèse, il extrait du travail fondamental [H1] de Hopf la condition algébrique que Hopf avait mise en évidence pour l'algèbre de cohomologie d'un espace muni d'un produit et qu'il appelle algèbre de Hopf. Il détermine la structure de telles algèbres sur un corps parfait, en particulier il montre que c'est un produit tensoriel d'algèbres de Hopf avec un seul générateur. Le survol *Topology of Lie groups and characteristic classes* [Oe, I, 33] paru en 1955 dans le Bulletin de l'AMS, qui fait suite à un rapport de Samelson sur le même sujet publié dans le même journal trois ans auparavant, montre combien les méthodes topologiques développées dans la thèse de Borel ont supplanté les techniques précédentes et ont permis d'unifier et de faire progresser la théorie.

Signalons une application intéressante d'un travail commun avec Serre [Oe, I, 16], à savoir que, parmi les sphères, seules celles de dimension 2 et 6 admettent des structures presque-complexes.

Issue d'une collaboration avec F. Hirzebruch commencée en automne 1952 (cf. [Oe, IV, p. 212-214]) la série des trois articles *Characteristic classes and homogeneous spaces* [Oe, I, 43 et II, 45 et 47], a eu une influence considérable à l'époque, même avant sa publication (1958-1961), en particulier dans la genèse des théorèmes de périodicité de R. Bott, comme en témoigne son long rapport dans les *Math. Reviews* et ses remarques dans l'annonce de ses résultats (cf. R. Bott, « The stable homotopy of the classical groups », *Proc. Nat. Acad. of Sci.*, 43 (1957) p. 934). Le but initial de ce travail est de déterminer les classes caractéristiques d'un espace homogène G/U, où U est un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie compact G, à partir de certaines racines de G. Les auteurs obtiennent une foule de résultats concrets, en particulier un théorème de divisibilité de la classe de Chern d'un fibré vectoriel sur une sphère de dimension paire qui fournit une information sur certains groupes d'homotopie des groupes de Lie, et qui contredisait un résultat erroné de Toda, en désaccord avec la périodicité (cf. [Oe, I, p. 706]).

Borel a écrit une série de papiers ([Oe, I, 24 avec Serre, 28, 29, 35 avec Chevalley, 37, II, 51, 52]) dont le but est de calculer la p-torsion de l'algèbre de cohomologie entière des groupes de Lie compacts connexes G et d'établir des relations avec les sous-groupes commutatifs de G. Par exemple il montre que $H^*(G, \mathbb{Z})$ n'a pas de p-torsion si et seulement si tout sous-groupe abélien produit de groupes cycliques d'ordre p est contenu dans un tore maximal. Ou encore si G a de la p-torsion, alors p divise l'ordre du groupe de Weyl de G (supposé simplement connexe). L'article récent [B4] s'inscrit dans la lignée de ces travaux.

C'est dans le séminaire que Borel avait organisé à Princeton en 1958-1959 sur les groupes de transformations (« Seminar on transformations groups », *Ann. Math. Studies*, 46, 1960) qu'il a défini et exploité systématiquement la cohomologie équivariante : si X est un espace sur lequel opère continûment un groupe topologique G, la cohomologie équivariante du G-espace X est la cohomologie de l'espace X_G, quotient de $EG \times X$ par l'action diagonale de G (c'est ce qu'on appelle maintenant la *construction de Borel*).

Je voudrais mentionner aussi la conjecture que Borel avait énoncée oralement en 1953 dans une conversation informelle, à savoir qu'une variété compacte sans bord dont le revêtement universel est contractible est déterminée à homéomorphisme

près par son groupe fondamental. Cette conjecture, appelée maintenant *conjecture de Borel* et probablement motivée par le résultat de Mostow sur les quotients des groupes de Lie connexes résolubles par des sous-groupes discrets cocompacts, est l'objet d'intenses recherches.

Ce qu'on appelle le théorème de Borel-Weil, qui date de la fin de 1953 et dont le manuscrit ne fut pas publié à l'époque (voir [Oe,I, 30 et son commentaire p. 704, ainsi que IV, p. 214]), est le résultat suivant. Le quotient G/T d'un groupe de Lie simple compact G par un tore maximal T est muni d'une structure complexe invariante. Ainsi G opère sur les espaces de sections holomorphes des fibrés homogènes holomorphes de rang 1 sur G/T. Un tel fibré est déterminé par un caractère χ de T. Le théorème montre en particulier qu'une représentation de G ainsi obtenue est irréductible de poids dominant χ.

Le travail fondamental de Borel *Groupes algébriques linéaires*, achevé en 1955 ([Oe, I, 39]), marque un tournant décisif dans sa carrière et aussi dans l'évolution de la théorie. Borel considère des groupes linéaires algébriques définis sur un corps algébriquement clos K de caractéristique quelconque ; il doit éviter toute allusion aux algèbres de Lie puisque l'application exponentielle ne peut plus être définie en caractéristique p, et comme il le dit, il s'est inspiré des méthodes globales développées dans les années quarante par Hopf [H1 et H2], Samelson et Stiefel [St] (cf. [B2, p. 124 et p. 158] pour la genèse de ce travail). Un résultat de base est l'existence et l'unicité à conjugaison près d'un sous-groupe résoluble fermé connexe maximal, conséquence immédiate d'un théorème d'existence de point fixe démontré géométriquement de manière très directe en quelques lignes (voir [B2, p. 124]). Un tel sous-groupe résoluble connexe maximal sera appelé *sous-groupe de Borel* par Chevalley. Borel développe aussi la théorie des tores maximaux et des éléments réguliers et singuliers (un tore étant défini comme un produit de K^*). Chevalley qui avait lu le manuscrit a immédiatement vu le parti que l'on pouvait en tirer et dès l'année suivante il obtenait la classification des groupes algébriques simples sur un corps algébriquement clos quelconque. L'étude des groupes algébriques sur un corps quelconque fera l'objet à partir de 1965 d'une série impressionnante de cinq travaux en commun avec J. Tits et conduira à la théorie de Borel-Tits.

Un résultat utile est le théorème de densité de Borel [Oe, II, 50]. Soit G un groupe algébrique connexe défini sur $\mathbb{R}$, sans composantes compactes. Soit $\Gamma \subset G$ un sous-groupe topologique fermé tel que G/Γ ait une mesure finie G-invariante. Alors Γ est Zariski dense dans G.

Une autre étape très importante est bien sûr le travail *Arithmetic subgroups of algebraic group* avec Harish-Chandra [Oe, II, 54], suivi d'une série d'autres sur les groupes arithmétiques, pour lesquels je renvoie à l'article de Gopal Prasad.

Je voudrais pourtant signaler le beau théorème d'existence de réseaux cocompacts [Oev II, 62] : Un groupe de Lie G semi-simple algébrique connexe possède toujours un sous-groupe discret Γ sans torsion tel que G/Γ soit compact.

Un autre résultat frappant est le suivant (cf. [Oe IV, 129]). Soit G un groupe de Lie connexe linéaire semi-simple, K un compact maximal. Alors si le rang de G est égal au rang de K, la cohomologie L^2 de l'espace symétrique $X = G/K$ est nulle en dimension différente de $\dim X/2$.

Enfin un des résultats les plus remarquables de Borel, une belle incarnation de sa foi dans l'unité des mathématiques, est le calcul de la cohomologie réelle stable

des groupes arithmétiques, de ses applications à la K-théorie et ses relations avec les valeurs de la fonction ζ d'un corps de nombres aux points entiers (cf. [Oe III, 93, 100, 101, 108, 116, 118 et le survol dans IV, 157]). Il montre par exemple que $H^*(\lim_{n\to\infty} Sl_n(\mathbb{Z}); \mathbb{R})$ est une algèbre extérieure dans une infinité de générateurs x_i de degré $4i+1$. Il en résulte que les groupes de K-théorie $K_n(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ sont de dimension 1 pour $n \equiv 1 \bmod 4$ et sont nuls autrement ($n > 1$).

Un homme de communication et de culture

Le quatrième volume de ses œuvres complètes, fort de 700 pages, contient l'ensemble des articles qu'il a publiés jusqu'en 1999 alors qu'il avait plus de 60 ans. À part de nombreux travaux de recherche, il contient une quinzaine d'articles destinés à un public plus large et qui sont passionnants à lire. Dans certains (cf. [Oe III, 119, IV, 149, 150, 153]) il dévoile sa conception personnelle des mathématiques ou encore ses expériences vécues au sein de la communauté mathématique, à l'IAS de Princeton ([Oe IV, 138]) ou chez Bourbaki [Oe IV, 165]. Dans d'autres, à caractère historique, il analyse avec une rigueur, une compétence et une objectivité rares, les travaux scientifiques de ses prédécesseurs (E. Cartan, H. Weyl), ou de ses aînés qu'il a côtoyés de près, J. Leray, A. Weil, C. Chevalley, E. Kolchin, D. Montgomery, ou encore Harish-Chandra. Il met en évidence les motivations, la genèse des idées, les influences réciproques, le tout émaillé de souvenirs personnels précieux, lui qui a été un acteur et un témoin privilégié de grands moments de l'évolution des mathématiques de son temps. Son analyse de la part de Poincaré à la relativité restreinte (voir [Oe IV, 173] et son commentaire aux pages 709-710), ainsi que son analyse de la controverse entre H. Weyl et E. Cartan sur les connexions projectives [B3] sont des modèles d'impartialité et sont fascinantes à suivre dans leurs tenants et aboutissants.

Comme le relèvent à la fois les citations du Steele Prize et du prix Balzan, Armand Borel a aussi joué un rôle essentiel comme organisateur et animateur de multiples activités mathématiques (séminaires, écoles d'été aux États-Unis, en Chine, en Inde, etc) et comme propagateur enthousiaste d'idés nouvelles. Il en est résulté de nombreux livres qui sont devenus des ouvrages de référence.

Je me bornerai à citer un seul exemple. Alors qu'il était retourné en Suisse comme professeur à l'EPF de Zurich de 1983 à 1986, il a organisé pendant les semestres d'été un séminaire qui a réuni des étudiants et des professeurs de toutes les universités suisses ainsi que des invités. Les réunions avaient lieu un jour par semaine à l'Institut mathématique de Berne situé à deux pas de la gare. Leur but était d'étudier en commun un sujet d'actualité (tel que l'homologie d'intersection ou les D-modules) et de faire participer activement à la fois des spécialistes et des non-spécialistes qui s'y préparaient durant le semestre d'hiver. Il en résultait des discussions animées et fructueuses pendant la pose de midi et les trajets en train. La tradition du séminaire suisse de Berne (qui porte aujourd'hui son nom) s'est poursuivie après son départ et a grandement contribué à développer les contacts entre les mathématiciens suisses et donné lieu à plusieurs publications de grande valeur.

D'une très grande force de caractère, encore plus exigeant pour lui que pour les autres, d'une honnêteté jamais mise en défaut et d'une prodigieuse puissance de travail, il était un homme de grande culture. Il était aussi passionné dans ses

loisirs que dans son travail. Très sportif, il pratiquait la natation avec une stricte discipline et il aimait beaucoup faire des excursions en montagne. Grand amateur avec Gaby de voyages, il les préparait soigneusement pour pouvoir visiter des sites archéologiques ou des trésors architecturaux et découvrir des paysages nouveaux (en Inde, au Mexique, en Chine, etc). Il était aussi un grand connaisseur de peinture et un passionné de musique, d'abord de jazz (il adorait fréquenter les boîtes de Chicago et de New-York dans les annés cinquante), puis de musique contemporaine (Bartok en particulier) et enfin de musique classique indienne dont il était devenu un réel expert. Pendant plusieurs années il a organisé à l'Institut de Princeton une série de concerts, proposant des programmes originaux en dehors des chemins battus.

Armand Borel était resté très attaché à la Suisse et à Genève, la ville de son enfance et de son adolescence. Chaque année il passait l'été à la Conversion dans la maison familiale de Gaby qui domine le lac Léman. Il en profitait pour revoir ses amis (par exemple G. de Rham quand il était encore en vie), nager dans le lac et faire des balades en montagne. Fidèle dans ses amitiés, il ne manquait jamais de nous contacter et nous nous retrouvions chaque été en famille avec grand bonheur.

Avec son épouse Gaby et ses deux filles Dominique et Anne, nous partageons le sentiment d'avoir perdu un être d'exception.

Références

[Oe] A. Borel – *Œuvres-Collected Papers*, vol. I, II, III et IV, Springer-Verlag, 1983 et 1999.
[H1] H. Hopf – « Ueber die Topologie der Gruppen-Manigfaltigkeirten und ihrer Verallgemeinerungen », *Ann. Math.* **42** (1941), p. 22–52.
[H2] H. Hopf – « Ueber den Rang geschlossener Liescher Gruppen », *Comm. Math. Helv.* **13** (1940-1941), p. 119–143.
[St] E. Stiefel – « Ueber eine Beziehung zwieschen geschlossenen Lieschen Gruppen und diskontinuerlichen Bewegungsgruppen, etc. », *Comm. Math. Helv.* **14** (1941-1942), p. 350–380.
[Ca] H. Cartan – « La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal », *Colloque de Topologie, Bruxelles* (1950), p. 57–71.
[Sc] M. Schmidt – *Hommes de Sciences (28 portraits)*, Paris, Hermann, 1990.

Travaux de A. Borel publiés après 1999

[B1] A. Borel, G. Henkin & P. Lax – « Jean Leray (1906-1998) », *Notices A.M.S.* **47** (2000), p. 350–359.
[B2] A. Borel – *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, Amer. Math. Soc., Providence, RI ; London Math. Soc., Cambridge, 2000.
[B3] A. Borel – « Élie Cartan, Hermann Weyl et les connexions projectives », Essays on Geometry and Related Topics, Monographies de l'Enseignement Mathématique N°. 38, 2001, pp. 43–58.
[B4] A. Borel, R. Friedman & J. Morgan – « Almost commuting elements in compact Lie groups », *Mem. Amer. Math. Soc.* **157** (2002).
[B5] A. Borel & L. Ji – « Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces », *Math. Res. Lett.* **9** (2002).
[B6] A. Borel & L. Ji – « Compactifications of symmetric and locally symmetric spaces », Livre à paraître chez Birkhäuser.

Borel's contributions to arithmetic groups and their cohomology

Gopal Prasad[1]

Armand Borel made profound contributions to the study of arithmetic groups and their cohomology. The general theory of reductive groups over arbitrary fields, which he developed with Jacques Tits, played a fundamental role in this and several other areas.

The purpose of this article is to give a glimpse of Borel's work on arithmetic groups. We will only consider reductive algebraic groups defined over $\mathbb{Q}$, since using the Levi decomposition one can easily reduce to the case where the group is reductive, and given a reductive group over a number field, by restriction of scalars we obtain a reductive group over $\mathbb{Q}$. So let us assume that G is a connected reductive algebraic group defined over $\mathbb{Q}$. We realize G as a subgroup of GL_n, for some n, in terms of a fixed $\mathbb{Q}$-embedding of G in GL_n. Let $G_{\mathbb{Z}} := G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. A subgroup Γ of $G(\mathbb{Q})$ is said to be an *arithmetic subgroup* of G if it is commensurable with $G_{\mathbb{Z}}$, i. e., if $\Gamma \cap G_{\mathbb{Z}}$ is of finite index in both Γ and $G_{\mathbb{Z}}$. It is easy to see that the notion of arithmetic subgroups is independent of the specific embedding of G in GL_n. It was observed by Minkowski that the *principal congruence subgroup* of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ of level m, i. e., the subgroup of matrices congruent to the identity matrix modulo an integer m, is torsion-free provided $m \geqslant 3$. Thus, any arithmetic subgroup contains a torsion-free subgroup of finite index.

An arithmetic subgroup is obviously a discrete subgroup of $G(\mathbb{R})$, and it is usually a rather "large" subgroup; in fact, as Borel showed in (70), if G is semi-simple and does not contain a nontrivial connected normal $\mathbb{Q}$-subgroup N such that $N(\mathbb{R})$ is compact, then Γ is dense in G in the Zariski-topology. These subgroups arise in several different contexts, for example, in the special orthogonal, symplectic or unitary group of a rational quadratic, alternating or hermitian form, or as the fundamental group of locally symmetric spaces of finite volume. Their study is an integral part of the general theory of automorphic forms, Shimura varieties, and the Langlands program.

The origins of the theory of arithmetic groups can be traced back to the work of Lagrange, and later Gauss, on the reduction theory of binary quadratic forms (this work provided the reduction theory for the arithmetic subgroup $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$). Generalizing Lagrange's approach, Hermite studied positive-definite, as well as indefinite, quadratic forms in several variables. Minkowski then developed a reduction theory for positive definite quadratic forms giving a fundamental domain, for the action of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ on the space of $n \times n$-positive symmetric matrices, which is a convex polyhedral cone. (For a nice account of all this, see [SO].) After this, Siegel developed the reduction theory for the arithmetic subgroups Γ of the automorphism group G of a semi-simple $\mathbb{Q}$-algebra with involution. He showed that the

[1] Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor MI 48109-1109 USA
e-mail:gprasad@umich.edu

"fundamental set" he constructed has the following three properties, and moreover it is of finite volume with respect to any Haar measure on $G(\mathbb{R})$ (which implies that $G(\mathbb{R})/\Gamma$ is of finite volume) if the central torus of G is anisotropic (over $\mathbb{Q}$).

(i) For some maximal compact subgroup K of $G(\mathbb{R})$, $K \cdot \Omega = \Omega$,

(ii) $\Omega \cdot \Gamma = G(\mathbb{R})$;

and furthermore the following property, known as the *Siegel property*,

(iii) for any $g \in G(\mathbb{Q})$, the set $\{ \gamma \in \Gamma \,|\, \Omega g \cap \Omega\gamma \neq \varnothing \}$ is finite.

A subset Ω of $G(\mathbb{R})$ is said to be a *fundamental set* for Γ if it has the above three properties. The goal of the reduction theory is to construct a "nice" fundamental set for any arithmetic subgroup.

In the 1950's, Weil gave a classification of classical semi-simple groups. He showed that up to isogeny these groups are the automorphism groups of semi-simple algebras with involutions. Thus Siegel's reduction theory covered most of the classical groups. Weil taught a course on Siegel's reduction theory at the University of Chicago (mimeographed notes of his course were prepared and distributed in 1958). In this course, he also proved the following compactness criterion for several of the classical groups : $G(\mathbb{R})/\Gamma$ is compact if and only if G is of $\mathbb{Q}$-rank zero, or, equivalently, either Γ, or the Lie algebra $\mathfrak{g}(\mathbb{Q})$ of G, consists entirely of semi-simple elements. (Based on the evidence provided by this result, and the classical results on the orthogonal groups, it was later conjectured by Godement that this compactness criterion holds for all semi-simple groups.) Subsequently Weil gave some lectures on this topic at Paris.

Harish-Chandra attended these lectures in Paris and found the situation – where results were known only for certain reductive groups, and where an explicit description of these groups was required for the study of their arithmetic subgroups – to be quite unsatisfactory, so he determined to find a general theory. This turned out to be very fortuitous, both for the subject and for his own later work on the general theory of automorphic forms where reduction theory of arithmetic subgroups plays an absolutely crucial role. He was able to quickly prove important results on arithmetic groups in a general set-up. The famous paper (58) of Borel and Harish-Chandra was an outgrowth of these results.

In the Borel and Harish-Chandra paper, a nice fundamental set for any arithmetic subgroup is constructed using the Minkowski-Siegel fundamental set for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, and the Godement compactness criterion is proved in full generality (an independent and more popular proof of this criterion was given by Mostow and Tamagawa). I will now describe the fundamental set constructed by Borel and Harish-Chandra, and a more usable variant given by Borel (for a different approach to reduction theory due to Godement and Weil which leads to a similar fundamental set, see [G]).

Standard Siegel sets in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$: Let K be the orthogonal group $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, which is known to be a maximal compact subgroup of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Let A be the subgroup of diagonal matrices with strictly positive entries, and N be the subgroup of upper triangular unipotent matrices. For positive real numbers c and t, let

$$A_t = \{\, a \in A \,|\;\; a_{i,i} \leqslant t a_{i+1,i+1} \,\},$$

and

$$N_c = \{\, x \in N \,|\;\; |x_{i,j}| \leqslant c, \;\; 1 \leqslant i < j \leqslant n \,\}.$$

The subset $\mathfrak{S}_{t,c} = KA_tN_c$ is called a standard Siegel set (in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). It is known that if $t \geqslant 2/\sqrt{3}$ and $c \geqslant 1/2$, then $\mathfrak{S}_{t,c}$ is a fundamental set for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$; that it has the Siegel property was shown by Siegel.

The fundamental set constructed by Borel and Harish-Chandra is given in terms of an embedding of the underlying reductive group in GL_n. So now let G be a connected reductive $\mathbb{Q}$-subgroup of GL_n. It is known that we can find an element $a \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ such that $aG(\mathbb{R})a^{-1}$ is self-adjoint. We fix such an a. Then given an arithmetic subgroup Γ of $G(\mathbb{Q})$, and a standard Siegel set $\mathfrak{S}$ in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ which is a fundamental set for $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, there exist finitely many elements $x_i \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ such that $\Omega = G(\mathbb{R}) \cap \bigcup a^{-1}\mathfrak{S}x_i$ is a fundamental set for Γ in $G(\mathbb{R})$. The main ingredient in the proof of this assertion is the important "finiteness lemma" which appears in §6 of Borel's book [B]. This book gives an excellent exposition of the general theory of arithmetic groups and it contains complete proofs of the main results. In this book, Borel used the above fundamental set to construct an intrinsically described fundamental set as follows. Let K be a maximal compact subgroup of $G(\mathbb{R})$. Let P be a minimal parabolic $\mathbb{Q}$-subgroup of G and let U be the unipotent radical of P. Let S be a maximal $\mathbb{Q}$-split torus of G contained in P. The centralizer M of S in G is actually contained in P and is a Levi-subgroup of P, i. e., it is a connected reductive subgroup and $P = M \cdot U$ (a semi-direct product). Let Δ be the basis of the root system of G, with respect to S, determined by P. Given a positive real number t and a relatively compact subset ω of $P(\mathbb{R})$, the subset $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{t,\omega} = K \cdot A_t \cdot \omega$, where

$$A_t = \{\, x \in A := S(\mathbb{R})^\circ \mid \ \alpha(x) \leqslant t \ \text{ for all } \alpha \in \Delta \,\},$$

is called a *Siegel set* of $G(\mathbb{R})$ (with respect to K, P and S). In §13 of [B], Borel showed that there exists a Siegel set $\mathfrak{S}$ ($= \mathfrak{S}_{t,\omega}$, for some t and ω), and a finite subset C of $G(\mathbb{Q})$ such that $\Omega \subset \mathfrak{S} \cdot C$; where Ω is the fundamental set for the arithmetic subgroup Γ given above. Then $G(\mathbb{R}) = \mathfrak{S} \cdot C \cdot \Gamma$. Making a clever use of the Bruhat and Iwasawa decompositions, Harish-Chandra showed that any Siegel set $\mathfrak{S}$ has the Siegel property, see [B : §15]. Consequently, the set $\mathfrak{S} \cdot C$ also has the Siegel property and so it is a fundamental set for Γ .

The existence of a fundamental set (recall that such a set has the Siegel property by definition) implies (see §5 of (61)) that Γ has a finite presentation, and its finite subgroups form finitely many conjugacy classes. It is not difficult to see that if G is semi-simple, or, more generally, if G does not admit a nontrivial character defined over $\mathbb{Q}$, then the volume of any Siegel set $\mathfrak{S}$, with respect to a Haar measure on $G(\mathbb{R})$, is finite, and hence, $G(\mathbb{R})/\Gamma$ carries a finite $G(\mathbb{R})$-invariant Borel measure, i. e., Γ is a lattice in $G(\mathbb{R})$.

Borel (and independently, Godement and Weil, see [G]) showed that $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})/\Gamma$ is finite (or, equivalently, there are only finitely many Γ-conjugacy classes of parabolic $\mathbb{Q}$-subgroups of G), and for a finite subset C of $G(\mathbb{Q})$, $P(\mathbb{Q}) \cdot C \cdot \Gamma = G(\mathbb{Q})$ if and only if there is a Siegel set $\mathfrak{S}$, with respect to K, P, and S, such that $G(\mathbb{R}) = \mathfrak{S} \cdot C \cdot \Gamma$. The finiteness of the set of Γ-conjugacy classes of parabolic $\mathbb{Q}$-subgroups is a very useful result.

In (60), Borel employed the ideas and results of his joint paper (58) with Harish-Chandra to construct a fundamental set for the discrete subgroup $G(k)$ of the adele group $G(A)$, where G is a connected reductive algebraic group defined over a

number field k, and A is the k-algebra of adeles of k. As a consequence, he deduced that $G(k)$ is a lattice in $G(A)$ if G does not admit a nontrivial character defined over k. He also proved the finiteness of the "class number", and the finiteness of the subset of the Galois cohomology set $H^1(k, G)$ consisting of cohomology-classes which are trivial at every place of k, using an adelic analogue of the "finiteness lemma" mentioned above.

Existence of cocompact discrete subgroups. Borel used the Godement compactness criterion to show that any connected semi-simple real Lie group $\mathcal{G}$ contains a cocompact discrete subgroup (62). It would clearly suffice to prove the existence of such a discrete subgroup assuming that $\mathcal{G}$ is an adjoint group. In this case Borel proved, by showing that the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of $\mathcal{G}$ has a form defined over a totally real extension of $\mathbb{Q}$ of degree > 1, all but one of whose conjugates are compact, that there exists a connected semi-simple algebraic group G, which is defined and anisotropic over $\mathbb{Q}$, such that $G(\mathbb{R})^\circ$ is isomorphic to the direct product of $\mathcal{G}$ and a compact group. Now, in view of the Godement compactness criterion, the projection into $\mathcal{G}$ of any arithmetic subgroup of $G(\mathbb{Q})$ would be a discrete cocompact subgroup of $\mathcal{G}$.

In a latter joint work (109) of Borel with Harder, it is shown that given a number field k and a finite set S of places of k, and an absolutely simple algebraic k-group G, the natural map

$$H^1(k, \text{Aut } G) \to \prod_{v \in S} H^1(k_v, \text{Aut } G)$$

is surjective. This theorem provides, in particular, S-arithmetic cocompact subgroups in a finite product of simple real and p-adic groups of the same type.

Some finiteness results. In the joint work (139) of Borel with the present author, a natural Haar measure on any semi-simple group over a local (i. e., locally compact nondiscrete) field is given and it is shown that, up to natural equivalence, there are only finitely many S-arithmetic subgroups whose covolume with respect to this Haar measure is less than a given positive number c. Here the underlying global field k, the semi-simple k-group, and the finite set S of places of k, are all allowed to vary arbitrarily. This paper also provides new, more geometric proofs of several other finiteness assertions, including the finiteness of class numbers. It uses a formula for the covolume of *principal* S-arithmetic subgroups given in [P].

Compactifications of locally symmetric spaces and cohomology of arithmetic groups. I will next describe Borel's two important contributions to compactifications of locally symmetric spaces $V = X/\Gamma$, where G is a connected reductive group defined over $\mathbb{Q}$, Γ is a torsion-free arithmetic subgroup of $G(\mathbb{Q})$, and X is the symmetric space $K\backslash G(\mathbb{R})$ of $G(\mathbb{R})$, K being a maximal compact subgroup of the latter. The first one (69) is a joint paper with Baily which was inspired, in part, by an earlier work on compactifications by Satake [S]. In this, X is assumed to be hermitian (i. e., it carries a $G(\mathbb{R})$-invariant complex structure). Baily and Borel used Harish-Chandra's realization of X as a bounded symmetric domain to give a compactification V^* of X/Γ. On V^* they introduced a natural structure of an irreducible normal analytic variety and provided an embedding of V^* into a complex projective space, both by means of the Poincaré-Eisenstein series. The main

results of (95) imply that there is, in fact, a unique structure of algebraic variety on X/Γ compatible with the complex analytic structure on it. It turns out that, if Γ is a congruence subgroup, the projective variety V^* is definable over an explicit number field (Shimura) and it has much arithmetic significance.

Zucker conjectured that the L^2-cohomolgoy of V $(= X/\Gamma)$ (see below) is isomorphic to the middle intersection cohomology of V^*. This conjecture was proved by Borel (122) for groups G of $\mathbb{Q}$-rank 1, and Borel and Casselman (131) for groups of $\mathbb{Q}$-rank 2. Looijenga, and Saper and Stern, proved it in general independently and by entirely different arguments.

Borel's second important contribution to compactification was his joint paper (98) with Serre. To describe it, let us assume that G is a connected semi-simple $\mathbb{Q}$-group, Γ is a torsion-free arithmetic subgroup, and X is the symmetric space of $G(\mathbb{R})$. Using the reduction theory, Raghunathan [R] constructed a proper Morse function on X/Γ, with finitely many critical values. Existence of such a Morse function implies that X/Γ is diffeomorphic to the interior of a compact manifold with boundary, which in turn implies that the trivial $\mathbb{Z}[\Gamma]$-module $\mathbb{Z}$ admits a finite free resolution in which each term is of finite rank. This gives several finiteness results on the Eilenberg-MacLane cohomology of Γ. To obtain more precise results about the cohomology of Γ, we need to know the boundary of a nice compactification of X/Γ. This information is not available for the compactification of X/Γ given by Raghunathan's Morse function. A different, and more canonical, construction of a compactification of X/Γ was given by Borel and Serre in (98). They used the "geodesic action" of the identity component of the center of the group of $\mathbb{R}$-points of a Levi subgroup of any parabolic $\mathbb{Q}$-subgroup P of G on X to construct a boundary face $e(P)$ associated with P; $e(P)$ is diffeomorphic to a Euclidean space and $e(G) = X$. The corner $X(P)$ associated with P is, by definition, the disjoint union of boundary faces $e(Q)$, $Q \supset P$; $\bar{X}$ is the union of all the $X(P)$'s, so it is the disjoint union of all the $e(P)$'s. Borel and Serre introduced a Hausdorff topology on $\bar{X}$ under which it becomes a manifold with corners (topologically a manifold with boundary) whose interior is X. It is obvious from the construction of $\bar{X}$ that $G(\mathbb{Q})$ operates on it; the Siegel property of Siegel sets is used to show that Γ operates properly on $\bar{X}$. The fact that there exists a Siegel set $\mathfrak{S}$, and a finite subset C of $G(\mathbb{Q})$, such that $G(\mathbb{R}) = \mathfrak{S} \cdot C \cdot \Gamma$ quickly implies that $\bar{X}/\Gamma$ is compact. Thus $\bar{X}/\Gamma$ is a compact manifold with corners whose interior is X/Γ.

The boundary $\partial\bar{X}$ of $\bar{X}$ has the homotopy type of the Tits building of $G(\mathbb{Q})$; so, according to a theorem of Solomon and Tits, it has the homotopy type of an (infinite) bouquet of spheres of dimension $\ell - 1$, where $\ell = \mathbb{Q}$-rank G. Thus the reduced homology $\widetilde{H}_i(\partial\bar{X})$ of $\partial\bar{X}$, with coefficients in $\mathbb{Z}$, vanishes except in dimension $\ell - 1$, and $\widetilde{H}_{\ell-1}(\partial\bar{X}) =: I$ is the Steinberg module of $G(\mathbb{Q})$. From Poincaré-duality for manifolds with boundary we get an isomorphism $H^i_c(\bar{X}) \simeq H_{d-i}(\bar{X}, \partial\bar{X})$, where d is the dimension of X. Hence, the cohomology group $H^i_c(\bar{X})$ is trivial unless $i = d - \ell$ in which case it is I. The fact that $\bar{X}/\Gamma$ is compact implies that $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}[\Gamma]) \simeq H^i_c(\bar{X})$, and we conclude that $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}[\Gamma])$ vanishes for all i except $i = d - \ell$ and $H^{d-\ell}(\Gamma, \mathbb{Z}[\Gamma]) = I$. Thus Γ is a generalized Poincaré-duality group, in the sense of Bieri and Eckmann, with dualizing module I, and its cohomological dimension is $d - \ell$.

A nice and comprehensive treatment of various compactifications of symmetric and locally symmetric spaces is given in a forthcoming book by Borel and Lizhen Ji.

L^2-cohomology. Let M be a Riemannian manifold. The Riemannian metric defines a positive definite scalar product $(\ ,\ )_x$ on the exterior algebra of the cotangent space at each point x of M, and hence a scalar product, which may possibly be infinite, on $\Omega^p(M)$, the space of real-valued smooth p-forms on M, given by

$$(\omega, \omega') = \int_M (\omega_x, \omega'_x)_x \, dv,$$

where dv is the Riemannian volume-form on M. An exterior p-form ω is said to be *square-integrable* if (ω, ω) is finite. Let $\Omega^*_{(2)}(M)$ be the subcomplex of the de Rham complex $\Omega^*(M)$ of M consisting of square-integrable forms ω such that $d\omega$ is also square-integrable. The p-th cohomology, denoted $H^p_{(2)}(M, \mathbb{R})$, of this subcomplex is called the p-th L^2-cohomology group of M, with coefficients in $\mathbb{R}$. There is a boundary operator $\partial : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ which is formally adjoint to d. A square-integrable form ω is said to be *harmonic* if $d\omega = 0 = \partial\omega$. Let $\mathcal{H}^*_{(2)}(M, \mathbb{R})$ be the graded group of harmonic forms. Then there is a homomorphism $\mathcal{H}^*_{(2)}(M, \mathbb{R}) \to H^*_{(2)}(M, \mathbb{R})$, which is injective if M is complete, and the cokernel is known to be either trivial or infinite-dimensional. According to a result of Kodaira, if a de Rham cohomology class is represented by a square-integrable form then it is also represented by a L^2-harmonic form.

Now let G be a connected semi-simple group defined over $\mathbb{Q}$ and let $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ be an arithmetic subgroup. As before, let X be the symmetric space of $G(\mathbb{R})$. Borel and Casselman showed in (126) that the L^2-cohomology of X/Γ is finite dimensional if the absolute rank of G equals the rank of a maximal compact subgroup of $G(\mathbb{R})$.

Stable cohomology of arithmetic groups. I shall now describe Borel's results on "stable" cohomology of arithmetic groups (100). Let G and Γ be as above and X be the symmetric space of $G(\mathbb{R})$ Let I_G be the space of smooth differential forms on the symmetric space X which are invariant under $G(\mathbb{R})^\circ$. Such forms are known to be harmonic and, as was shown by E. Cartan, I_G is the cohomology, with real coefficients, of the "compact dual" X_u of X. The inclusion of I_G^Γ in the de Rham complex of X/Γ induces a natural homomorphism $j^*_\Gamma : I_G^\Gamma \to H^*(X/\Gamma, \mathbb{R})$. As X is contractible, $H^*(X/\Gamma, \mathbb{R})$ is, in fact, the Eilenberg-MacLane cohomology $H^*(\Gamma, \mathbb{R})$, of Γ, with coefficients in $\mathbb{R}$. The main result of (100) gives a range in which j^p_Γ is an isomorphism. (For $\mathbb{Q}$-isotropic groups, this range is roughly $\frac{1}{4}(\mathbb{Q}\text{-rank } G)$.) If $G(\mathbb{R})/\Gamma$ is compact, then by Hodge theory j^*_Γ is injective, and Matsushima showed that there exists a positive constant $m(G(\mathbb{R}))$ such that j^p_Γ is surjective for all $p \leqslant m(G(\mathbb{R}))$. Garland observed that even when X/Γ is noncompact, Matsushima's argument can be used to show that j^p_Γ is surjective for a positive integer $p \leqslant m(G(\mathbb{R}))$, provided every cohomology class of X/Γ of dimension p is represented by a square-integrable exterior p-form. Together with Hsiang, Garland also gave a "square-integrabilty criterion" which gave a range up to which this condition is satisfied. (The work of Garland and Hsiang was inspired by a paper of Raghunathan on the first cohomology of an arithmetic subgroup of a connected

semi-simple $\mathbb{Q}$-group G of $\mathbb{Q}$-rank 1, with coefficients in a rational G-module, in which he showed that any cohomology class is represented by a square-integrable 1-form.)

Now to find a range in which j_Γ^p is an isomorphism, Borel worked with the subcomplex C^*, of the de Rham complex $\Omega^*(X/\Gamma)$, consisting of forms which together with their exterior derivative have "logarithmic growth" near the boundary $\partial(\bar{X}/\Gamma)$ of X/Γ. He showed that (i) the inclusion $C \to \Omega^*(X/\Gamma)$ induces an isomorphism in the cohomology, (ii) there is a positive constant $c(G)$ such that for all $p \leqslant c(G)$, C^p consists of square-integrable forms, and (iii) $I_G^\Gamma \subset C^*$. From this it follows that j_Γ^p is injective for $p \leqslant c(G)$, and an isomorphism for $p \leqslant \min(c(G), m(G(\mathbb{R})))$. By explicitly computing $c(G)$ and $m(G(\mathbb{R}))$, Borel showed that j_Γ^p is an isomorphism for $p < \frac{1}{4}(\mathbb{Q}\text{-rank}\, G)$. Therefore, for p in this range, $H^p(\Gamma, \mathbb{R})$ coincides with the p-th cohomology group $H^p(X_u, \mathbb{R})$ of the compact dual X_u.

If we consider a sequence (H_n, f_n) of classical simple algebraic $\mathbb{Q}$-groups, where $f_n : H_n \to H_{n+1}$ is the natural inclusion, for example, $H_n = \mathrm{SL}_n$, then $\varprojlim I_{H_n}$ is known. In a given dimension p, the sequence $I_{H_n}^p$ is stationary, i. e., there is an integer $n(p)$ such that $I_{H_m}^p = \varprojlim I_{H_n}^p$ for $m \geqslant n(p)$. One can use this to compute, for example, the cohomology of $\mathrm{SL}(\mathfrak{o}) = \bigcup_n \mathrm{SL}_n(\mathfrak{o})$ and $\mathrm{Sp}(\mathfrak{o}) = \bigcup_n \mathrm{Sp}_{2n}(\mathfrak{o})$, where $\mathfrak{o}$ is the ring of integers of a number field k.

Applications to K-theory of number fields. Quillen has shown that the groups $K_i(\mathfrak{o})$ are finitely generated abelian groups, and the rank of $K_i(\mathfrak{o})$ is equal to the dimension of the space of indecomposable elements (in the sense of Hopf algebras) in $H^*(\mathrm{SL}(\mathfrak{o}), \mathbb{R})$ of degree i. Using his results on cohomology of $\mathrm{SL}(\mathfrak{o})$, described above, in (100) Borel was able to determine the rank of $K_i(\mathfrak{o})$. He was able to similarly determine the ranks of Karoubi's L-groups of $\mathfrak{o}$. Borel's computation shows that the rank s_i of $K_i(\mathfrak{o})$ is zero if i is even and it is $r_1 + r_2$ or r_2, according as i is congruent to 1 or 3 modulo 4, where, as usual, r_1 is the number of real places of k and r_2 is the number of complex places. In an interesting work (108), Borel showed further that for odd i, say $i = 2m - 1$, there is a natural map (called these days the "Borel regulator map") from $K_i(\mathfrak{o})$ into the space of indecomposable elements of $H^*(\mathrm{SL}(\mathfrak{o}), \mathbb{R})$ of degree i (note that this vector space has a natural $\mathbb{Q}$-structure given by $H^*(\mathrm{SL}(\mathfrak{o}), \mathbb{Q})$) whose image is a lattice of covolume a rational multiple of ${D_k}^{1/2}\zeta_k(m)\pi^{-d(m+1)}$, where ζ_k is the Dedekind ζ-function of k, $d = [k : \mathbb{Q}]$, and D_k is the absolute value of the discriminant of k.

A vanishing theorem. Using Langlands' classification of irreducible admissible representations of real reductive groups, Borel and Wallach [BW], and independently, Zuckerman [Z], proved the following important vanishing theorem. Let G be a connected semi-simple algebraic group defined over $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}$ be the Lie algebra of $G(\mathbb{R})$ and K be a maximal compact subgroup. Let H be an infinite dimensional irreducible unitary $(\mathfrak{g}, K)$-module and F be a finite dimensional $(\mathfrak{g}, K)$-module, then $H^p(\mathfrak{g}, K, H \otimes F)$ *vanishes for all* $p < \mathbb{R}\text{-rank}\, G$. For a cocompact discrete subgroup Γ of $G(\mathbb{R})$, this vanishing theorem is known to imply that $H^p(\Gamma, \mathbb{R}) \simeq H^p(\mathfrak{g}, K, \mathbb{R})$ for $p < \mathbb{R}\text{-rank}\, G$. As $H^p(\mathfrak{g}, K, \mathbb{R})$ is isomorphic to the p-th cohomology of the compact dual X_u of the symmetric space associated with $G(\mathbb{R})$, we conclude that $j_\Gamma^p : I_G^\Gamma \to H^p(\Gamma, \mathbb{R})$ is an isomorphism for $p < \mathbb{R}\text{-rank}\, G$. This strengthens a

result of Matsushima mentioned above. Kumaresan [K], using an idea of Parthasarathy, gave an elegant proof of a vanishing theorem which subsumes the vanishing theorems of Borel, Wallach and Zuckerman.

Most of the results mentioned above have analogues for S-arithmetic groups, and there are also results on cohomology of arithmetic and S-arithmetic groups with nontrivial coefficients, but describing them would have made this article too long.

The author would like to thank Jeffrey Adler, Brian Conrad, Stephen DeBacker, Ila Fiete, Lizhen Ji, Dipendra Prasad, Yoav Segev and Jean-Pierre Serre for carefully reading an earlier version of this article and for their helpful comments. He was supported by the NSF.

References

A number in round brackets in this article refers to the paper with that number in Armand Borel's Collected papers published by Springer-Verlag in four volumes.

[B] A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris (1969).

[BW] A. Borel and N. Wallach, *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, 2nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[G] R. Godement, *Domaines fondamentaux des groupes arithmétiques*, Séminaire Bourbaki No. 257 (1962/63).

[K] S. Kumaresan, *On the canonical k-types in the unitary g-modules with non-zero relative cohomology*, Invent. Math., **59**(1980), 1–11.

[P] G. Prasad, *Volumes of S-arithmetic quotients of semi-simple groups*, Publ. Math. I.H.E.S., **69**(1989), 91–117.

[R] M.S. Raghunathan, *A note on quotients of real algebraic groups by arithmetic subgroups*, Invent. Math. **4**(1968), 318–335.

[S] I. Satake, *On compactifications of the quotient spaces for arithmetically defined discontinuous groups*, Annals of Math. **72**(1960), 555–580.

[SO] W. Scharlau and H. Opolka, *From Fermat to Minkowski*, Springer-Verlag, New York (1985).

[Z] Zuckerman, *Continuous cohomology and unitary representations of real reductive groups*, Annals of Math., **107**(1978), 495–516.

Armand et son épouse Gaby, 1953

Armand Borel et Alexandre Grothendieck

André Weil, Armand Borel et Jean-Pierre Serre au congrès Bourbaki de juin-juillet 1951 à Pelvout-le-Poët. Considéré comme « visiteur » par « LaTribu » de ce congrès, Borel n'en était pas à son premier contact avec son groupe. Il livra un historique précis et critique des années de sa collaboration au collectif dans « Twenty-five years with Nicolas Bourbaki (1949-1973) », Notices of the American Mathematical Society, *1998,* **45***(3), pages 373-380.*

Discours prononcé en séance publique le 30 septembre 2003 en hommage à Armand Borel (1923-2003)[1]

Jean-Pierre Serre

Le mathématicien suisse Armand Borel est mort le 11 août 2003, à Princeton, des suites d'un cancer à évolution rapide. Il était membre de notre compagnie depuis 1981.

Peu de mathématiciens étrangers ont eu autant de relations avec la France. Il a été élève de Leray, il a pris part au séminaire Cartan et il a publié de nombreux articles (plus de vingt) en collaboration avec nos confrères Lichnerowicz et Tits, ainsi qu'avec moi-même. Il a été membre de Bourbaki pendant plus de vingt ans. Les mathématiciens français ont le sentiment que c'est l'un des leurs qui disparaît.

Armand Borel était né à La Chaux-de-Fonds en 1923, et avait fait ses études universitaires à l'École polytechnique fédérale (le « Poly ») de Zurich. C'est là qu'il rencontre H. Hopf qui lui donne le goût de la Topologie et E. Stiefel qui l'initie aux groupes de Lie et à leurs systèmes de racines. Il passe l'année 1949-1950 à Paris comme boursier du CNRS. Un très bon choix (pour nous, comme pour lui) : Paris était l'endroit même où se créait ce que les américains ont appelé la *French Topology*, avec les cours de Leray au Collège de France et le séminaire Cartan à l'École Normale. Borel participe activement au séminaire Cartan, tout en suivant les cours de Leray. Il parvient à comprendre la fameuse « suite spectrale » – ce qui n'était pas facile – et il me l'explique si bien que je n'ai pas cessé de m'en servir pendant les quelques 50 années suivantes... Il commence à l'appliquer aux groupes de Lie et à la détermination de leur cohomologie à coefficients entiers. Cela fera une thèse, soutenue en Sorbonne (sous la présidence de Leray) en 1952 ; cette thèse sera tout de suite publiée dans le grand périodique américain « *Annals of Mathematics* ». Entre-temps, Borel est revenu en Suisse (à Genève). Il n'y reste pas longtemps. Il fait un séjour de deux ans (1952-1954) à l'Institute for Advanced Study de Princeton et passe les années 1954-1955 à Chicago, où il profite de la présence d'André Weil pour se familiariser avec la géométrie algébrique et la théorie des nombres. Il retourne en Suisse (Zurich), et c'est en 1957 que « l'Institute » lui offre un poste de professeur permanent, poste qu'il occupera jusqu'à sa mort (il était devenu professeur honoraire en 1993).

Armand Borel était membre des Académies des sciences des États-Unis et de Finlande. Il avait reçu la médaille Brouwer en 1978, le prix Steele (Amer. Math. Soc.) en 1991 et le prix Balzan en 1992. Ses Œuvres ont été réunies en 4 volumes, publiés par Springer-Verlag en 1983 (vol. I, II, III) et en 2001 (vol. IV).

Les travaux de Borel ont une profonde unité : ils se rapportent presque tous *à la théorie des groupes*, et plus particulièrement aux groupes de Lie et aux groupes

[1] Publié dans :« Discours et notices biographiques », tome IV, Académie des sciences de l'Institut de France, 2003, avec l'aimable autorisation de J. Dercourt, Secrétaire perpétuel.

algébriques. Le caractère central de la théorie des groupes est connu depuis longtemps. Dans [Oe IV, p.381], Borel se plait à citer une phrase de Poincaré, datant de 1912, qui dit ceci :
« *La théorie des groupes est, pour ainsi dire, la mathématique entière, dépouillée de sa matière et réduite à une forme pure* ».
Nous n'emploierions plus aujourd'hui des termes aussi extrêmes : « *mathématique entière* » nous paraît exagéré, et « *dépouillée de sa matière* » nous paraît injuste. Il n'empêche que l'importance de la théorie des groupes est de nos jours bien plus évidente qu'à l'époque de Poincaré et cela dans des domaines aussi différents que la géométrie, la théorie des nombres et la physique théorique. Il semble que, dès sa jeunesse, Borel ait pris consciemment la décision d'explorer et d'approfondir tout ce qui touche de près ou de loin à cette théorie ; et c'est ce qu'il a fait, pendant près de soixante ans.

Je ne vais pas tenter de faire une liste exhaustive des résultats qu'il a obtenus. Je vais me borner à ceux que je connais le mieux :

Topologie des groupes de Lie et de leurs espaces classifiants

Comme je l'ai dit plus haut, c'est le sujet de sa thèse ([Oe 23]).

L'objectif est la détermination de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (torsion comprise) des groupes de Lie compacts et de leurs espaces classifiants. Borel utilise la théorie de Leray et la complète en prouvant un résultat technique difficile du style :

« algèbre extérieure (fibre) $\Longrightarrow$algèbre de polynômes (base) ».

(La démonstration en est si difficile que, d'après Borel lui-même, elle n'aurait été vérifiée que par trois personnes : lui-même, J. Leray, et E. Dynkin...).

Cela l'amène à introduire les « nombres premiers de torsion » pour un groupe de Lie compact G donné (par exemple, 2, 3 et 5 pour G de type E8). Il montre que ces nombres jouent aussi un rôle particulier dans la structure des sous-groupes finis commutatifs de G ([Oe 24, 51, 53]). On s'est aperçu depuis qu'ils interviennent aussi dans la cohomologie galoisienne de G et en particulier dans la théorie de la « dimension essentielle ».

Groupes algébriques linéaires

Son article sur ce sujet [Oe 39] a joué un rôle fondamental (il a en particulier servi de point de départ à la classification par Chevalley [Che] des groupes réductifs en termes de systèmes de racines). Borel y établit les principales propriétés des sous-groupes résolubles connexes maximaux (appelés depuis « sous-groupes de Borel ») et des tores maximaux. Les démonstrations sont étonnamment simples ; elles reposent en grande partie sur le lemme disant que tout groupe linéaire résoluble connexe qui opère (algébriquement) sur une variété projective non vide a un point fixe.

Le point de vue de [Oe 39] est « géométrique » : le groupe G considéré est défini sur un corps de base k qui est supposé algébriquement clos. Il en est de même dans [Che]. Le cas d'un corps non algébriquement clos est cependant d'un grand intérêt, tant pour les géomètres (E. Cartan, pour $k = \mathbb{R}$) que pour les arithméticiens ($k =$ corps de nombres, ou corps p-adique). Borel (et, indépendamment, Tits)

construit une théorie « relative », basée sur les k-tores déployés maximaux, et les systèmes de racines correspondants.

Borel et Tits publient ensemble leurs résultats ([Oe 66, 94]) ; la théorie ainsi obtenue porte aujourd'hui leur nom. Elle est d'un usage précieux dès que le groupe (supposé simple) est isotrope, c'est-à-dire contient des éléments unipotents non triviaux. (Le cas anisotrope est du domaine de la « cohomologie galoisienne », et n'est toujours pas entièrement compris.) Borel et Tits complètent leurs résultats en décrivant les homomorphismes non nécessairement algébriques (appelés, curieusement, « abstraits ») entre groupes du type $G(k)$, cf. [Oe 82, 97].

Groupes arithmétiques, stabilité, représentations ...

C'est à Borel et à Harish-Chandra que nous devons les résultats de base sur les *sous-groupes arithmétiques* des groupes réductifs sur les corps de nombres : génération finie, cocompacité (dans le cas anisotrope), covolume fini (dans le cas semi-simple), cf. [Oe 54, 58]. Ces résultats ont une grande importance pour les applications à la théorie des nombres. Borel les complète dans une série d'articles ([Oe 59, 61, 70, 74, 88, 99]) ainsi que dans [2]. Plusieurs thèmes s'entrecroisent :

- compactifications des quotients : celle de Baily-Borel ([Oe 63,69]) dans le cas analytique complexe ; celle de [Oe 90, 98] dans le cas réel, utilisant des variétés à coins. Dans les deux cas, c'est l'immeuble de Tits du groupe considéré qui dicte ce qu'il faut ajouter « à l'infini ».
- généralisation aux groupes S-arithmétiques et aux groupes adéliques ([Oe 60, 91, 105]) ; ici, l'emploi de l'immeuble de Tits doit être complété par celui des immeubles de Bruhat-Tits des places non-archimédiennes.
- représentations de dimension infinie, et programme de Langlands : [4], [6], et [Oe 103, 106, 112].
- relations entre la cohomologie des groupes arithmétiques et celle des espaces symétriques.

Ce dernier thème conduit Borel à l'un de ses plus beaux résultats : un théorème de stabilité ([Oe 93, 100, 118]) qui donne la détermination du rang des groupes de $\mathbb{K}$-théorie de $\mathbb{Z}$ (et, plus généralement, des anneaux d'entiers d'un corps de nombres). Cela le conduit à la définition d'un régulateur, qu'il montre être essentiellement une valeur de fonction zêta en un point entier ([Oe 108]).

Histoire des Mathématiques

Dans les dix dernières années de sa vie, Borel a publié une série de textes de nature à la fois historique et mathématique sur les sujets suivants :

- Topologie : travaux de D. Montgomery ([Oe 357]), J. Leray ([Oe 164]) et A. Weil ([Oe 168]) ;
- Théorie des Groupes : travaux de H. Weyl ([Oe 132]), C. Chevalley ([Oe 143]) et E. Kolchin ([Oe 171]) ;
- Relativité restreinte ([Oe 173]).

Certains de ces textes ont été repris et complétés dans le dernier ouvrage qu'il ait publié, ses « Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups » ([8]). Un livre passionnant, qui nous promène à travers un siècle de théorie des groupes,

de Sophus Lie à Chevalley, en passant par Elie Cartan et H. Weyl. Une « visite guidée », avec un pareil guide, quel plaisir !

L'œuvre de Borel ne se limite pas aux textes que je viens d'invoquer, tant s'en faut. C'était un animateur enthousiaste. On lui doit plusieurs Séminaires ou « Summer Schools » particulièrement réussis, notamment sur les actions de groupes ([1]), les groupes algébriques ([4], [Bou]), la cohomologie continue ([5]), les formes modulaires ([Cor]) et les D-Modules ([6]). Je désire mentionner aussi sa contribution à Bourbaki (de 1950 à sa retraite en 1973, cf. [Oe 165]), à qui il apportait à la fois bon sens et expertise.
Les chapitres sur les groupes de Lie ([Lie]) lui doivent beaucoup.

Borel a reçu le prix Balzan en 1992, avec la citation suivante : « *Pour ses contributions fondamentales à la théorie des groupes de Lie, des groupes algébriques et des groupes arithmétiques, et pour son action inlassable en faveur de la recherche mathématique et de la propagation des idées nouvelles.* »

On ne saurait mieux dire.

Références

Articles

Ils sont reproduits, avec commentaires, dans :

[Oe] A. Borel – *Œuvres – Collected Papers (1948-1999)*, 4 volumes, Springer-Verlag, (1983 et 2001).

Ouvrages

[1] A. Borel, *Seminar on Transformation Group*, Ann. Math. Stud. 46, Princeton, 1960.
[2] ———, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Hermann, Paris, 1969.
[3] ———, *Linear Algebraic Groups*, Benjamin, New York, 1969, 2nd enlarged edition, GTM 126, Springer-Verlag (1991).
[4] A. Borel, R. Carter, C.W. Curtis, N. Iwahori, T.A. Springer & R. Steinberg – *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, L.N. 131, Springer-Verlag, 1970.
[5] A. Borel & N. Wallach – *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, Ann. Math. Stud. 94, Princeton, 1980, 2nd enlarged edition, A.M.S. (1999).
[6] (en collaboration) – « Algebraic D-Modules », Acad. Press, Boston (1987).
[7] A. Borel, *Automorphic Forms on* $\mathrm{SL}(2, R)$, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.
[8] ———, *Essays in the History of Lie Groups and Algebraic Groups*, A.M.S., 2001.

Autres textes cités

[Lie] N. Bourbaki – « Éléments de mathématique », Groupes et algèbres de Lie chap. I à IX, Paris, Hermann et Masson, 1960–1982.
[Che] Secr. Math. IHP, Paris – *Séminaire Chevalley : Classification des groupes de Lie algébriques, Fasc. 1 et 2*, École norm. Sup., 1956–1958. 2ème édit. Springer-Verlag (à paraître prochainement).
[Bou] A. Borel & G.D. Mostow (édit.) – « Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups », in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. IX, Amer. Math. Soc., 1966.
[Cor] A. Borel & W. Casselman (édit.) – « Automorphic Forms, Representations and L-Functions », in *Proc. Symp.Pure Math. XXXIII*, Amer. Math. Soc., 1979.

MATHÉMATIQUES

La quête des décimales de π

Boris Gourévitch[1]

Introduction

Le nombre π occupe une place très particulière dans le monde mathématique, et sans cesse réaffirmée. Il peut se targuer d'avoir occupé l'esprit des mathématiciens dès l'Antiquité, et comme le disent Bergrenn et les frères Borwein [6], le calcul de ses décimales est probablement le seul problème apparu dès les prémices des mathématiques, et qui soit encore d'actualité dans la recherche moderne. Pourtant, les motivations associées ont sensiblement évolué au cours des siècles.

D'abord liées aux besoins pratiques et quotidiens des anciens, les évaluations toujours plus précises du nombre π ont ensuite découlé, presque comme un jeu, des découvertes successives et foisonnantes de formules d'analyse toujours plus efficaces de la Renaissance jusqu'au XIX^{e} siècle.

La révolution des ordinateurs au XX^{e} siècle changea ensuite complètement la donne : l'attrait du calcul ne venait plus du résultat en lui-même, mais de la manière de l'obtenir, du point de vue des techniques mathématiques et algorithmiques. Un nouveau changement de cap a fait son apparition depuis 1996, qui tente de mettre en relation les expressions analytiques de π et la structure profonde de ses décimales. De ce champ d'explorations à la frontière de la théorie de la complexité ont éclos quelques conjectures encore ouvertes sur la nature « aléatoire » de nombreuses constantes mathématiques (π, $\ln(2)$, etc). D'autres conséquences jusqu'ici insoupçonnées, comme la possibilité d'atteindre dans certaines bases le n-ième chiffre de π sans connaître les précédents avec peu de mémoire et de temps, ont renouvelé l'attrait du calcul des chiffres ou décimales du nombre π.

Cet article se propose de revenir sur ces quatre périodes charnières (Antiquité, XVIII^{e}/XIX^{e} siècle, XX^{e} siècle, et depuis 1996) en expliquant les cheminements de pensée et les méthodes de calcul qui ont conduit à connaître plus de 1241.10^{9} décimales de π en ce début de troisième millénaire ! Nous laisserons de côté les algorithmes et séries liées à π n'ayant pas servi au calcul de ses décimales, vu l'imagination foisonnante des mathématiciens dans ce domaine. Nous achèverons cette synthèse par un petit état des lieux des motivations actuelles de calcul des décimales de π.

[1] LTSI de l'université de Rennes I. Mél : boris@pi314.net

π dans l'Antiquité

Même si les symboles des mathématiques modernes ($=$, ^{2}, $\sqrt{}$, ...) n'ont fait leur apparition qu'à la Renaissance, il nous sera plus facile de les manipuler pour traduire les idées des anciens, qui décrivaient la plupart de leurs opérations avec des mots !

Des motivations pratiques

Les anciens avaient essentiellement besoin de la géométrie pour les mesures de surface de terre, ou dans l'architecture, par exemple pour évaluer la taille et la proportion des bâtiments. Selon l'historien grec Hérodote, on pouvait trouver de nombreuses relations géométriques dans les pyramides de Gizeh, à qui il rendit visite vers 450 av. J.C. (soit plus de 2000 ans après leur construction tout de même !). Par exemple, un principe de construction voulait que l'aire de chaque surface latérale soit égale à l'aire d'un carré de côté égal à la hauteur de la pyramide (ce qui est vrai à 0,7% près pour la pyramide de Kheops !). De nombreuses constantes apparaissent ainsi de manière quasi-magique, puisque le rapport de la hauteur sur le côté de la base de la pyramide vaut $\frac{\pi}{2}$ à 1,7% près. Ces coïncidences remarquables sont parfois contestées mais restent fascinantes.

Le plus ancien objet où π intervient plus ou moins implicitement est une tablette babylonienne en écriture cunéiforme, découverte en 1936 et qui remonte à la période 1900-1600 avant J.C. Elle évalue le périmètre d'un hexagone à $\frac{24}{25}$ fois celui du cercle circonscrit (soit $[0, 57, 36]$ dans leur base 60 dont il nous reste le décompte des secondes/minutes), ce qui revient à estimer $\pi_{Babylone} = 3\frac{1}{8} = 3.125$. C'est officiellement la plus vieille approximation connue de π !

De même, pour revenir aux Égyptiens, le célèbre papyrus de Rhind rédigé en écriture hiératique et découvert en 1855 par A. H. Rhind à Louxor relate une série de problèmes anciens recopiés par le scribe Ahmes. Le n° 50 affirme que l'aire d'un disque de diamètre 9 est égale à 64, soit le carré du diamètre auquel on a retiré $\frac{1}{9}$ de sa longueur$\big(9 - \frac{1}{9}.9\big)$. Ceci revient à estimer $\pi_{\text{Égypte}} = \big(\frac{16}{9}\big)^2 = 3.1604....$ Ils sont probablement parvenus à cette idée en approchant l'aire de ce disque par celle d'un octogone partitionné en carrés et triangles de côté 1, et qui donne alors une aire de 63 (problème n° 48). Notons que les Égyptiens ne travaillaient qu'avec des fractions de la forme $\frac{1}{n}$ et qu'ils avaient donc opté pour la meilleure des approximations de ce genre puisque la diminution du $\frac{1}{9}$ est meilleure que la diminition du $\frac{1}{8}$. Nous savons par ailleurs que les Égyptiens avaient compris que le rapport lié au périmètre d'un cercle et celui lié à l'aire du cercle étaient les mêmes.

Nous ne savons pas si c'était le cas des Babyloniens, ni même si ces civilisations avaient conscience de n'avoir obtenu qu'une valeur approchée de π. Les méthodes en Inde ancienne (600 avant J.C.) et Chine (150 après J.C.) semblent avoir été identiques. Il faut noter que la diffusion des connaissances étant plutôt réduite à cette époque, de nombreuses autres approximations, parfois bien plus mauvaises ($\pi = 3$ dans la Bible par exemple !) ont éclos même après la découverte de ces premières valeurs.

Le principe d'exhaustion chez les Grecs

Les mathématiciens grecs de l'Antiquité sont souvent considérés comme les premiers à réellement se soucier des démonstrations. Les problèmes qui les occupaient restaient cependant majoritairement géométriques. Parmi eux, le problème

de construire un carré de même aire qu'un cercle (la célèbre quadrature du cercle) fut initié, au moins historiquement, par Anaxagore (500-428 avant J.C.) pendant un séjour en prison pour impiété (il osait soutenir en particulier que la lune ne faisait que refléter la lumière du soleil !). Si de nombreuses solutions furent alors proposées, le problème devint insoluble pendant 23 siècles quand Euclide ajouta comme conditions de le résoudre uniquement :

(1) à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas,
(2) en un nombre fini d'étapes (implicitement).

En fait, la règle n'est pas nécessaire dès que l'on dispose d'un compas (Mohr, 1762).

Le lien entre ces conditions et les propriétés algébriques des nombres qui en découlent ne fut proprement énoncé qu'en 1832 par Pierre Laurent Wantzel :

Théorème. — *L'ensemble des nombres constructibles au compas est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ stable par conjugaison et racine carrée.*

Bien que ces nombres soient algébriques (racines de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$), Abel montra en 1824 que tous les nombres algébriques ne sont pas toujours exprimables par radicaux – donc a *fortiori* constructibles au compas – dès que le degré du polynôme atteint 5, et Liouville démontra en 1851 l'existence de nombres non algébriques, *i.e.* transcendants. Le problème de la quadrature du cercle se ramena donc rapidement au milieu du XX$^{\text{e}}$ siècle à celui de la transcendance de π.

La distance qui séparait les conceptions géométriques grecques de l'expression formelle du problème de la quadrature du cercle explique la lente maturation des mathématiciens vers la démonstration finale et rigoureuse de la transcendance de π en 1882 par Lindemann, qui clôtura ce débat vieux de plus de 23 siècles !

Avec les outils dont disposaient les Grecs, les solutions proposées à la quadrature du cercle faisaient la plupart du temps appel à un nombre infini d'étapes comme la quadratrice de Dinostrate, construite initialement par Hippias d'Elis vers 430 avant J.C., ou encore la méthode d'exhaustion.

Cette dernière est généralement attribuée à Antiphon (vers 430 avant J.C.) ou Eudoxe de Cnide (408-355 avant J.C.), et consiste à construire un polygone dont le nombre de côtés augmenterait jusqu'à ce qu'il devienne indiscernable du cercle. Cette brillante idée se heurte néanmoins au manque de notion de limite à l'époque. Même si un polygone à n côtés est quarrable, cela ne signifie pas que sa limite – le cercle – le soit aussi, contrairement à l'idée d'Antiphon. Le brillant Euclide (330-275 avant J.C.) écrit néanmoins qu'en considérant un polygone avec un grand nombre de côtés, on peut « rendre la différence entre l'aire à calculer et l'aire des polygones qu'on construit plus petite que toute quantité positive pré-assignée, aussi petite soit-elle » (d'après [12]), ce qui est une conception étonnamment proche de la formalisation des limites dans les mathématiques du XX$^{\text{e}}$ siècle. Il en déduisit d'ailleurs que l'aire du cercle était proportionnelle au carré de son diamètre (Éléments 12.2).

Il faut cependant attendre Archimède (287-212 avant J.C.) et son traité *De la mesure du cercle* pour que cette idée soit efficacement appliquée à l'évaluation de π. Le premier de ses trois théorèmes énonce que le rapport de l'aire d'un disque

au carré de son rayon est égal au rapport du périmètre à son diamètre. Le troisième énonce explicitement que

$$3+\frac{1}{7}<\pi<3+\frac{10}{71}. \tag{1}$$

Reprenant le principe d'exhaustion, il exhibe une relation formelle entre le périmètre du polygone à n côtés et celui à $2n$ côtés. Partant de deux hexagones respectivement inscrit et circonscrit, il obtient l'approximation (1) avec deux polygones à 96 côtés ! Ce calcul absolument sidérant fut mené sans aucune notation algébrique, numération cohérente (les Grecs utilisaient une numération additive comme les Romains), ni connaissance de la trigonométrie, et avec la seule géométrie d'Euclide. Il se formalise aujourd'hui comme suit : soient a_n et b_n les demi-périmètres des polygones à 3.2^n côtés respectivement circonscrit et inscrit à un cercle de rayon 1. L'hexagone fournit $a_1 = 2\sqrt{3}$ et $b_1 = 3$. On a ensuite les formules de récurrence

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \qquad , \qquad b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$$

qui donnent $\pi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Archimède poussa ses calculs jusqu'à $n = 5$. Les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont illustrés sur la figure 1. La démonstration de la

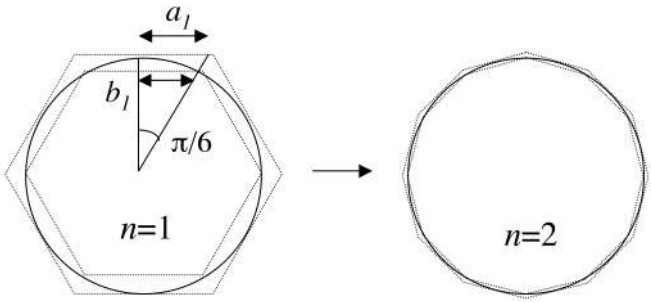


Fig. 1 Approximation du cercle par des polygones inscrit et circonscrit. Cas $n = 1$ et $n = 2$ de l'itération d'Archimède.

convergence et de l'adjacence des deux suites est immédiate si l'on remarque que $a_n = 3.2^n \tan\left(\frac{\pi}{3.2^n}\right)$ et $b_n = 3.2^n \sin\left(\frac{\pi}{3.2^n}\right)$. On obtient alors

$$a_n-b_n=3.2^n\tan\left(\frac{\pi}{3.2^n}\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{3.2^n}\right)\right)=\frac{\pi^3}{18.4^n}+o\left(\frac{1}{4^n}\right)$$

ce qui assure $\frac{3n}{5}$ décimales correctes en n itérations environ (3 décimales en 5 étapes). On qualifiera cette convergence de linéaire. Le rayonnement d'Archimède était déjà tel pour l'époque, que Tropfke [25] affirme que la valeur $\pi_{Grecs} = 3\frac{1}{7}$ remplaça rapidement à Alexandrie la vieille valeur $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2$, d'usage aussi aisé mais moins précise, et se répandit jusqu'en Inde et même en Chine au V$^{\text{e}}$ siècle après J.C.

Deux millénaires d'attente

Après Archimède, les mathématiciens occidentaux mais aussi asiatiques, arabes ou indiens, se contenteront d'appliquer la même méthode ou une variante légère pendant près de 20 siècles. Descartes (1596-1650) propose sa méthode des isopérimètres qui fait non plus évoluer le périmètre des polygones mais bien le diamètre de ces polygones, dont le périmètre est alors fixé. Viète dérive tout de même un premier produit infini en 1593 en se penchant sur l'aire et non plus le périmètre.

Poussant le calcul plus loin qu'Archimède, le record en la matière appartient à Ludolph Van Ceulen, qui exhiba 20 décimales en 1596 à l'aide de polygones à $60.2^{33} = 480$ milliards de côtés, puis 32 décimales à l'aide de polygones à 2^{62} côtés dans une publication posthume de 1615, pour enfin se voir attribuer et graver sur sa pierre tombale 35 décimales en 1621. Autant dire qu'il passa sa vie à cet exercice !

En fait il n'y eut guère de progrès réel pendant cette période essentiellement à cause de l'utilisation exclusive de l'approche géométrique, qui trouvait là ses limites dans le calcul des décimales de π.

L'apport des séries à la Renaissance

Le grand tournant eut lieu avec la manipulation de plus en plus courante de sommes et de produits infinis dans le monde mathématique de la fin du Moyen-Âge. Bien avant les européens, on attribue aux indiens les premières expressions de π sous forme de série puisque l'on trouve déjà dans les écrits en sanscrit des disciples de Nilakantha Somayaji (1444-1545 !) la formule

$$\pi = \sqrt{12}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} \tag{2}$$

parmi huit autres. Sa simplicité et sa rapidité de convergence (environ $\frac{n}{2}$ décimales correctes pour n termes) aurait déjà pu mener les mathématiciens de cette époque à connaître des dizaines de décimales de π ! Pourtant, à cette époque, c'est Al-Kashi de Samarkande qui vient de réussir le tour de force de calculer 14 décimales de π en 1429 à l'aide d'une variante de la méthode d'Archimède et en système sexagésimal. Plus fort encore, alors que James Gregory (1638-1675) fait enfin profiter l'Europe de la découverte du développement en série entière de la fonction arctan

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} \tag{3}$$

en 1671, c'est Abraham Sharp (1651-1742) qui utilise le cas particulier $\frac{\pi}{6} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, autrement dit l'équation (2), pour obtenir 71 décimales correctes de π en 1699, près de 200 ans après Nilakantha ! Le développement d'arcsin fut obtenu par Newton vers 1665-1666, qui en profita pour calculer 15 décimales de π, n'ayant « *rien d'autre à faire* » comme il l'affirma lui-même.

La fonction arctan est un bon candidat pour le calcul des décimales de π à la main car si l'on s'y prend bien, on n'utilise que des termes rationnels ou au plus

une racine comme dans (2). Ainsi John Machin (1680-1752) parvient aisément à 100 décimales en 1706 en proposant la désormais célèbre formule

$$\frac{\pi}{4} = 4.\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right). \tag{4}$$

La démonstration ou la recherche de ce type de formules (dont quatre autres exemples sont donnés plus loin par les équations (6), (7), (23) et (24) s'obtient grâce à la règle suivante

Théorème. — *Soient $a_1, a_2, ..., a_p$ et $b_1, b_2, ..., b_p$ des entiers, les a_j étant non nuls.*
$\sum_{j=1}^{p} \arctan\left(\frac{b_j}{a_j}\right) = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si et seulement si $\Im m\left(\prod_{j=1}^{p}(a_j + i \cdot b_j)\right) = 0$.

Démonstration. Si $c_j = a_j + i.b_j \in \mathbb{C}^*$, $\sum_{j=1}^{p} \arctan\left(\frac{b_j}{a_j}\right)$ est un argument de $\prod_{j=1}^{p} c_j$. □

La rapidité de convergence de ces formules est contrainte par le plus grand terme $\frac{b_j}{a_j}$ et d'après l'équation (3), on obtient une convergence linéaire en utilisant n termes du développement de Taylor de la fonction arctan. Désormais, les combinaisons d'arctan vont servir de base à la course aux décimales jusqu'en 1985 ! Il faut cependant remarquer qu'à partir de Newton, ce sont – sans leur faire injure – plutôt des mathématiciens de second plan qui se battront pour le record. D'ailleurs, le nombre de décimales déjà calculé en ces temps est bien supérieur aux véritables besoins des mathématiciens et des physiciens. On estime en effet que pour calculer la circonférence de l'univers avec la précision d'un atome d'hydrogène, seules 39 décimales de π sont requises ! [1] Les motivations sont donc plutôt tournées vers la recherche de périodicités ou motifs dans les décimales de π. Sachant que la périodicité des décimales d'un nombre en fait un rationnel (fraction de deux entiers), cette première question est tranchée en 1761 avec la démonstration de l'irrationnalité de π par Johann Lambert (1728-1777). Sa démonstration plutôt lourde s'appuie sur un développement en fraction continue de la fonction tan. Les limites « humaines » de calcul des décimales à la main semblent atteintes en 1874 avec l'obtention de 707 décimales par Shanks, qui sont d'ailleurs fausses à partir de la 528^{e}. Ferguson le remarquera près de 70 ans plus tard en les comparant aux 808 qu'il obtint en 1948, avec les premières machines à calculer (des additionneurs en fait, hérités du principe de celle mécanique construite par Leibniz dès 1694).

L'ordinateur prend le relais

Le souffle indien

Durant la première moitié du XX^{e} siècle, les préoccupations mathématiques sont ailleurs. Les théories élaborées par Cantor, Gödel, Kolmogorov, la topologie et la liste des 23 problèmes de Hilbert ouvrent tout-à-coup des horizons qui donnent un coup de vieux à l'analyse classique. Celle-ci semblait pourtant avoir trouvé son évolution naturelle dans l'étude des intégrales elliptiques menées par Legendre, puis Gauss, Abel et Jacobi durant la première moitié du XIX^{e} siècle.

Fig. 2 Srinivasa Ramanujan (1887-1920)

Heureusement un génie né au fin fond de l'Inde en 1887, Srinivasa Ramanujan (fig. 2), va se charger de donner un souffle nouveau aux recherches menées autour de π. Lui-même passionné par cette constante, c'est un autodidacte complet qui passa les 25 premières années de sa vie à reconstruire les mathématiques à partir d'un unique ouvrage de 6165 théorèmes sans démonstration ("Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics" de G.S.Carr). Cet état d'esprit le conduisit à énoncer la plupart de ses résultats sans démonstration (ce qui ne signifie pas qu'il ne comprenait pas d'où ils venaient !). Doté d'une intuition exceptionnelle qui lui permit de progresser à pas de géants dans la théorie des nombres et des équations modulaires, il découvrit des formules venues d'ailleurs comme celle-ci publiée en 1914

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}. \tag{5}$$

Il existe une anecdote célèbre à propos de cette formule : sa démonstration presque entière fut achevée au début des années quatre-vingt par les frères Borwein [7]. Il restait le coefficient 1 103 à justifier, il devait être entier, mais la longueur des calculs et équations requises était épouvantable. Gosper effectua alors en 1985 un calcul « à l'aveugle » de 17 millions de décimales de π à l'aide de cette formule. Aussi vrai que deux entiers proches de moins d'une unité sont égaux, la concordance des résultats du calcul de Gosper avec les 10 millions de décimales déjà connues à l'époque constitua une démonstration finale de la formule de Ramanujan ! On suppose que Ramanujan avait dû procéder de même sur quelques décimales.

Les Borwein tireront des travaux de Ramanujan une ribambelle d'algorithmes remarquables assez largement utilisés de nos jours dans le calcul des décimales de π (voir paragraphe page 45). La complexité de la démonstration d'une telle formule est telle que malheureusement même un survol des résultats, sans démonstration des intermédiaires, occupe au minimum une dizaine de pages dans le remarquable ouvrage [13]. Le lecteur intéressé par une plongée dans l'univers passionnant des équations modulaires, corps quadratiques, et autres intégrales elliptiques pourra se référer à la « Bible » [7], d'une pédagogie remarquable.

Ramanujan fut repéré par le mathématicien anglais Hardy auquel il avait écrit une lettre en 1913, s'embarqua pour l'Angleterre en 1914 et leur collaboration

fructueuse dura jusqu'en 1919. Il repartit alors en Inde où il mourut l'année suivante, probablement de carences en vitamines. Considéré comme un des plus grands génies du XX^{e} siècle, Ramanujan a laissé des carnets remplis de formules en notations non-standards, dont le déchiffrage s'est poursuivi jusqu'à nos jours (!), d'abord assuré par Bruce Berndt, puis par les frères Borwein.

La course aux décimales reprend

Après la guerre, l'avènement des machines à calculer fait progresser la course aux décimales à pas de géants ! Ferguson ouvre le bal en 1946 en obtenant 620 décimales à l'aide d'un calculateur de bureau. Le premier calcul sur ordinateur est confié au fameux ENIAC en 1949 qui rend 2037 décimales en 70 heures à l'aide de la formule de Machin (4). En 1973, Guilloud et Bouyer atteignent le premier million de décimales sur CDC 7600 à l'aide de deux formules d'arctan célèbres, celles de Gauss (6) et de Störmer (7).

$$\frac{\pi}{4} = 12.\arctan\left(\frac{1}{18}\right) + 8.\arctan\left(\frac{1}{57}\right) - 5.\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \tag{6}$$

$$\frac{\pi}{4} = 6.\arctan\left(\frac{1}{8}\right) + 2.\arctan\left(\frac{1}{57}\right) + \arctan\left(\frac{1}{239}\right) \tag{7}$$

Le calcul en binaire prit respectivement 22h11 et 13h40, et la conversion en base décimale 1h07. Un livre de 415 pages de décimales tiré de ce calcul fut qualifié à l'époque de « livre le plus ennuyeux du monde » !

Il faut noter que le processus attaché à la course aux décimales est toujours le même jusqu'à aujourd'hui : les calculs sont effectués avec deux formules distinctes puis comparés pour validation du record. Les figures 3 et 4 montrent l'évolution des records de calcul de décimales de π au cours des siècles.

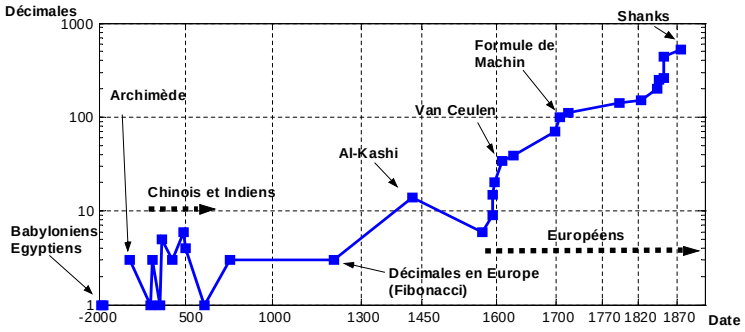


Fig. 3 Nombre de décimales calculées à la main dans l'histoire. Les échelles sont logarithmiques.

Améliorations algorithmiques

Dans les années cinquante à soixante-dix, le manque d'algorithme de multiplication efficace oblige à segmenter chaque nombre en tranches, par exemple $B = B_2 10^{20} + B_1 10^{10} + B_0$. La multiplication de nombres de taille n nécessite alors un temps (ou nombre d'opérations) proportionnel à n^2 sans compter l'utilisation mémoire proportionnelle à n. Sans des améliorations théoriques et algorithmiques,

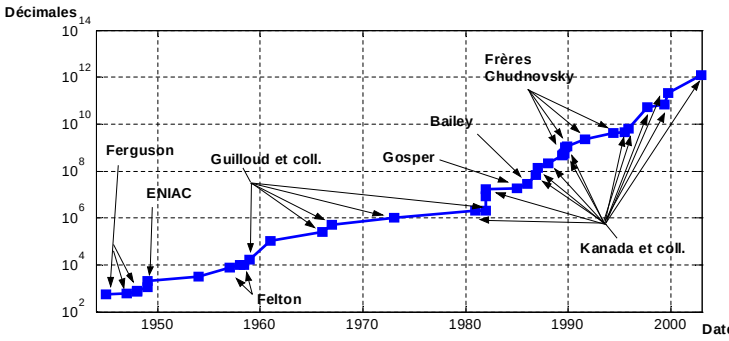


Fig. 4 Nombre de décimales obtenues à l'aide de calculateurs ou d'ordinateurs au XX^{e} siècle. L'échelle des décimales est logarithmique.

la progression du record de décimales aurait donc été très lente. C'est alors à cette époque que les choses s'accélèrent.

En 1965, Cooley et Tukey introduisent sous sa forme moderne une méthode de réduction de la complexité du calcul des séries de Fourier connue aujourd'hui sous le nom de Transformée de Fourier Rapide [11]. Schönhage et Strassen en tirent en 1971 un algorithme de multiplication de grands entiers en complexité $O\left(n.log(n).log(log(n))\right)$ ce qui est considérablement mieux que $O\left(n^2\right)$ [24] !

En 1976, Salamin et Brent parviennent indépendamment au même algorithme ([23, 8])

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\
U_n &= \frac{2a_n^2}{1 - \sum_{k=0}^{n} 2^k \left(a_k^2 - b_k^2\right)}, \quad \pi = \lim_{n\to\infty} U_n
\end{aligned}
\tag{8}
$$

qui a une propriété extraordinaire de convergence quadratique, autrement dit le nombre de décimales exactes double à chaque itération.

Ajoutons enfin que l'algorithme de Newton, proposé vers 1669 (!), ramène la division et l'extraction de racines carrées à des multiplications et propose une convergence elle aussi quadratique. Autant dire que tous les ingrédients sont réunis pour faire exploser les records !

La compétition reprend en effet en 1981 avec Myioshi et Kanada (2 000 036 décimales) et dès la fin de 1982, on en connaît 16 777 206 (Kanada, Yochino et Tamura). La lutte concernera ensuite principalement Kanada et, entre 1991 et 1994, les deux frères David et Gregory Chudnovsky qui utiliseront une série de leur cru de type Ramanujan et un ordinateur dont ils ont eux-mêmes conçu l'architecture. Selon la légende, leur appartement new-yorkais contient des montagnes de papiers en désordre et est chauffé aux microprocesseurs ! Ces mathématiciens isolés mais au talent reconnu (Gregory est considéré comme un génie exceptionnel mais il est atteint d'une maladie l'empêchant de travailler en université) montrent au moins que des scientifiques de tout premier plan s'intéressent au calcul des décimales de π [12].

Arrêtons-nous maintenant sur les justifications des trois algorithmes de FFT, de Newton et de Brent-Salamin qui sont à la base des records de calcul successifs depuis le début des années quatre-vingt.

L'algorithme de multiplication rapide de deux grands entiers par FFT

Soient X et Y deux grands entiers de taille n en base $B = 10$ usuellement (ou une puissance de 10).

Décomposition polynomiale

On écrit X et Y sous forme polynomiale en les décomposant (de manière unique) dans la base B

$$X = P(B), \quad P(z) = \sum_{j=0}^{n-1} x_j z^j \tag{9}$$

$$Y = Q(B), \quad Q(z) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j z^j$$

où x_j et y_j sont donc respectivement les j-ième chiffres en base B de X et Y ($0 \leqslant x_j, y_j \leqslant B-1$). Cette opération est de complexité à peu près proportionnelle à n. On cherche maintenant à effectuer « rapidement » la multiplication $R(z) = P(z) \times Q(z)$ puis à évaluer à la fin $R(B)$. $R(z)$ est un polynôme de degré $< 2n$ et peut être retrouvé par interpolation à partir de son évaluation en $2n$ points, autrement dit par l'évaluation de P et Q en ces mêmes $2n$ points. Le choix des points, c'est la finesse de l'algorithme ! On utilise les racines primitives $2n$-ièmes de l'unité, *i.e.* les

$$e^{\frac{2ik\pi}{2n}} = \omega^k, \qquad \omega = e^{\frac{i\pi}{n}}$$

car cette évaluation (qui n'est alors rien d'autre que le calcul d'une série de Fourier) peut être réalisée en complexité $O(n.\log n)$ si n est une puissance de 2 et avec un peu d'astuce. C'est la Transformée de Fourier Rapide ou FFT en anglais.

Transformée de Fourier rapide

En conservant les notations précédentes, évaluons le polynôme $P\left(\omega^k\right)$ et $Q\left(\omega^k\right)$ en se plaçant sous l'hypothèse que $n = 2^d$. Posons

$$P_1\left(z^2\right) = x_0 + x_2 z^2 + x_4 z^4 + \ldots + x_{n-2} z^{n-2}$$
$$P_2\left(z^2\right) = x_1 + x_3 z^2 + x_5 z^4 + \ldots + x_{n-1} z^{n-2}$$

et $y = z^2$. On obtient alors

$$P(z) = P_1(y) + z.P_2(y). \tag{10}$$

Maintenant, il faut se rappeler que puisque ω est une racine $2n$-ième de l'unité, alors pour $k \in \{1, \ldots, 2n\}$,

$$\left(\omega^k\right)^2 = \left(\omega^{n+k}\right)^2.$$

En conséquence, évaluer P aux racines $2n$-ièmes de l'unité revient à évaluer P_1 et P_2 chacun aux n points $\left(\omega^2\right)^1, \left(\omega^2\right)^2, \ldots, \left(\omega^2\right)^n$ et à reporter les résultats dans P à l'aide de l'équation (10). Si $F(2n)$ est le nombre d'opérations élémentaires

(addition, multiplication) requises pour évaluer P en $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{2n}$ alors en vertu du principe précédent et de (10), on a

$$F(2n) = 2F(n) + 2 \times 2n, \quad F(1) = 0$$

où le terme $2 \times 2n$ provient des dernières addition et multiplication requises pour obtenir P à partir de P_1 et P_2 dans (10).

Comme ω^2 est une racine primitive n-ième de l'unité, on peut réappliquer le même procédé pour chaque polynôme P_1 et P_2. Par suite, comme $n = 2^d$ est une puissance de 2, le processus (et donc (10) s'itère encore d fois. On obtient finalement un nombre d'opérations

$$F(2n) = 2 \times 2n \times (d+1) = 4n\left(\frac{\log n}{\log 2} + 1\right)$$

d'où la complexité en $O(n.\log n)$ de la FFT. De même pour la FFT inverse, qui utilise ω^{-k} au lieu de ω^k.

Interpolation

Nous avons maintenant calculé nos $P\left(\omega^k\right)$ et $Q\left(\omega^k\right)$ pour $k = 0, \ldots, 2n-1$. On forme les $2n$ produits $R\left(\omega^k\right) = P\left(\omega^k\right) Q\left(\omega^k\right)$ qui reviennent à des multiplications élémentaires puisque $P\left(\omega^k\right)$ est forcément de module inférieur à $\sum_{j=0}^{n-1} x_j \leqslant n(B-1)$ d'après (9), de même pour Q. Comme l'on cherche à retrouver $R(z) = \sum_{j=0}^{2n-1} r_j z^j$, il faut l'interpoler à partir des $2n$ valeurs $\alpha_k = R\left(\omega^k\right)$. Autrement dit, on cherche à résoudre le système

$$W\left(r_0, r_1, \ldots, r_{2n-1}\right) = \left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}\right)$$

où

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & & \omega^{2n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & & \omega^{4n-2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \omega^{2n-1} & \omega^{4n-2} & & \omega^{2n^2-n} \end{pmatrix}$$

ce qui est équivalent à

$$\left(r_0, r_1, \ldots, r_{2n-1}\right) = W^{-1}\left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}\right)$$

où W^{-1} a la bonne idée d'être simple

$$W^{-1} = \frac{1}{2n}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega^{-1} & \omega^{-2} & & \omega^{-2n+1} \\ 1 & \omega^{-2} & \omega^{-4} & & \omega^{-4n+2} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \omega^{-2n+1} & \omega^{-4n+2} & & \omega^{-2n^2+n} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de $(r_0, r_1, \ldots, r_{2n-1})$ n'est donc rien d'autre que le conjugué de la transformée de Fourier de $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1})$, autrement dit sa transformée de Fourier inverse, dont on a vu qu'elle est en $O(n.\log n)$ comme la FFT. On obtient alors

$R(z)$ d'où l'on tire $R(B) = XY$. Cette dernière opération est à peu près en complexité $O(n)$ car les $r_0, r_1, \ldots, r_{2n-1}$ sont déjà proches des décimales de XY, aux retenues près (dès que $r_j \geqslant B$). Toutes les retenues sont en fait calculées simultanément, puis reportées, puis on recalcule les éventuelles nouvelles retenues créées, etc. (opération appelée vectorisation).

La combinaison de tous ces algorithmes et quelques menus raffinements selon les programmeurs permettent d'atteindre à peu près la borne optimale théorique de Schönhage et Strassen pour la FFT en $O\left(n.log(n).log(log(n))\right)$.

L'algorithme de Newton

Énoncé

L'algorithme de Newton, vieux de plus de trois siècles, est à l'origine utilisé pour approcher numériquement une racine a de l'équation $f(x) = 0$. Il permet en fait de montrer l'équivalence de la multiplication, la division et l'extraction de racines carrées d'un point de vue complexité.

Newton avait proposé dès 1669 un processus itératif pour trouver les racines d'équations polynomiales et Raphson le mit sous forme plus algorithmique en 1690. Simpson, Mourraille, Cauchy et Kantorovich ajoutèrent des raffinements et proposèrent des généralisations pour arriver à l'énoncé moderne suivant

Théorème. — *Soit f analytique dans un voisinage complexe de z. Supposons que $f(z) = 0$ et $f'(z) \neq 0$. Alors l'itération*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f\left(x_k\right)}{f'\left(x_k\right)}$$

converge uniformément et quadratiquement vers z pour une valeur initiale x_0 prise dans un voisinage de z.

Cet algorithme s'accompagne d'une propriété étonnante d'auto-compensation des erreurs : si x_k est perturbé et ne compte plus que M décimales justes par rapport à z alors le terme x_{k+1} contiendra tout de même $2M$ décimales exactes s'il a été calculé avec suffisamment de décimales, autrement dit la convergence quadratique sera préservée.

Une conséquence directe est que pour calculer z avec n décimales, il suffit d'initier l'algorithme avec quelques décimales au début et doubler la précision prise en compte à chaque itération jusqu'à atteindre une précision supérieure à n. Ceci simplifie considérablement la complexité de l'opération et permet de montrer que la multiplication, la division et l'extraction de racines carrées sont équivalentes en complexité.

Inverse d'un nombre

Prenons l'exemple d'un nombre $|y| \leqslant 1$ dont on souhaite calculer l'inverse avec $n = 2^d$ décimales exactes. En utilisant la fonction $f(x) = 1/x - y$, l'itération associée est

$$x_{k+1} = 2x_k - x_k^2 y \tag{11}$$

qui utilise uniquement des multiplications et additions. L'expression

$$x_{k+1} - \frac{1}{y} = -y\left(x_k - \frac{1}{y}\right)^2$$

illustre la convergence quadratique de l'algorithme. Initions maintenant l'itération avec une décimale exacte, soit

$$\left| x_0 - \frac{1}{y} \right| < \frac{1}{10}.$$

Grâce à la propriété d'auto-correction de la méthode de Newton, à l'itération k, on n'utilise que 2^k décimales pour les calculs. Et d'après (11), pour obtenir x_k, on a uniquement besoin de 2 multiplications ($x_{k-1} \times x_{k-1}$ et $x_{k-1}^2 y$) et 2 additions ($x_{k-1} + x_{k-1}$ et $2x_{k-1} - x_{k-1}^2 y$). En raison de la convergence quadratique, il suffira d'environ $log_2(n) = d$ itérations de (11) pour parvenir à n décimales exactes de $\frac{1}{y}$. Si on note $M(n)$ la complexité d'une méthode de multiplication pour n décimales, sachant que la complexité d'une addition sera n, on obtient alors une complexité finale de

$$\sum_{k=1}^{\log_2(n)} \left(2M\left(2^k\right) + 2.2^k\right) \leqslant 4M(n) + 4n \leqslant 8M(n). \tag{12}$$

Il est en effet raisonnable d'envisager $2M(p) \leqslant M(2p)$ autrement dit que la complexité de 2 multiplications de nombres à p décimales requiert un peu moins de complexité que la multiplication de deux nombres à $2p$ décimales. Ceci induit $2M\left(2^k\right) \leqslant M\left(2^{k+1}\right) \leqslant ... \leqslant \frac{1}{2^{d-k-1}} M(n)$ dans (12). L'inversion n'est donc guère plus compliquée que la multiplication (c'est un $O\left(M(n)\right)$ et comme $a.b = a.\frac{1}{b}$, la division est elle aussi un $O\left(M(n)\right)$.

Extraction de racines carrées

Les choses se passent aussi bien. On peut utiliser la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2} - y$ qui conduit à l'approximation de $\frac{1}{\sqrt{y}}$ puis on fait $\sqrt{y} = y.\frac{1}{\sqrt{y}}$. L'itération associée est

$$x_{k+1} = x_k + x_k \frac{1 - y.x_k^2}{2}$$

ce qui conduit en pratique à une complexité finale d'environ $4M(n)$.

Une alternative plus naturelle est d'utiliser directement la fonction $f(x) = y - x^2$, mais cela conduit à une itération comprenant une division disqualifiante

$$x_{k+1} = x_k + \frac{y - x_k^2}{2x_k}.$$

Cependant, Schönhage, qui ne manquait pas d'idées, a proposé en 1971 de remplacer $\frac{1}{2x_k}$ par une approximation tirée d'une itération couplée et a obtenu

$$\begin{aligned} x_0 \approx \sqrt{y}, \qquad & v_0 = \frac{1}{2x_0} \\ v_{k+1} &= v_k + \left(1 - 2x_k v_k\right) v_k \\ x_{k+1} &= x_k + \left(y - x_k^2\right) v_{k+1}. \end{aligned}$$

Ce processus, où v_{k+1} estime $\frac{1}{2\sqrt{y}}$, est appelé « itération couplée de Newton » ([24], p. 257) et requiert en pratique une complexité d'environ $3M(n)$.

On trouvera de nombreux raffinements de la méthode de Newton dans [16, 1] et l'équivalence de la complexité de la multiplication, la division et l'extraction de racines est abordée dans [10, 8].

L'algorithme de Brent-Salamin

La moyenne arithmético-géométrique (AGM en anglais)

L'algorithme de Brent Salamin a une histoire extraordinaire. Il repose sur l'itération

$$a_0 = a \qquad b_0 = b$$
$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k}. \tag{13}$$

avec $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^{+*}$.

Les suites a_k et b_k sont adjacentes et convergent quadratiquement vers une valeur $M(a,b)$ appelée moyenne arithmético-géométrique et qui est encadrée par la moyenne arithmétique $\frac{a+b}{2}$ et la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$.

Lagrange (1736-1813) fut le premier à utiliser l'itération pour l'approximation de certaines intégrales elliptiques, mais il n'en saisit visiblement pas la portée. Gauss découvrit l'AGM vers 1791 (à 14 ans !) et, fasciné, passa les dix années suivantes à défricher la théorie qui s'était ouverte devant lui. En 1797, il commença à travailler sur la courbe de la Lemniscate (d'équation polaire $r^2 = \cos 2\theta$) et remarqua numériquement le 30 mai 1799 que son demi-périmètre (noté usuellement ϖ et prononcé « pi script ») vérifiait sur 11 décimales la relation

$$\frac{\pi}{\varpi} = M(\sqrt{2}, 1).$$

Cette connexion improbable le rendit enthousiaste et lui permit de faire explicitement le lien avec les intégrales elliptiques. Il trouva enfin une expression générale de l'AGM sous forme intégrale à la fin de 1799 (deux preuves) et publia en 1818 une troisième preuve élégante, ici relatée, de la relation suivante :

Théorème. — *Notons* $I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$ *l'intégrale elliptique complète de première espèce. On a*

$$M(a,b) = \frac{\pi}{2I(a,b)} \tag{14}$$

et $\varpi = 2I(\sqrt{2}, 1)$.

Démonstration. La substitution $t = b\tan\theta$ dans I induit que

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}$$

puis le changement de variable $u = \frac{1}{2}(t - \frac{ab}{t})$ (et un peu de travail) conduisent à

$$I(a,b) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(ab+u^2)\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)}}$$

donc $I(a,b) = I\left(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}\right)$ et il s'ensuit que d'après l'expression de l'AGM, $I(a,b) = I(a_1,b_1) = ... = I(a_n,b_n)$. Comme $\left(a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta\right)^{-\frac{1}{2}}$ converge uniformément vers $M(a,b)^{-1}$ si $n \to \infty$, on peut intervertir limite et intégrale dans $I(a,b)$ et obtenir

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{M(a,b)} = \frac{\pi}{2M(a,b)}. \tag{15}$$

□

Bien que (14) fournisse une manière rapide d'évaluer $I(a,b)$ (moyennant la connaissance de π), on cherche surtout à éliminer $I(a,b)$ pour en tirer un algorithme convergeant vers π.

La relation de Legendre

On se sert pour cela de la fameuse relation de Legendre (1752-1833) :

Théorème. — *Introduisons l'intégrale elliptique complète de seconde espèce*

$$J(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}d\theta \tag{16}$$

qui représente la longueur du quart d'une ellipse d'axe majeur a et d'axe mineur b. Si le couple (b,b') est lié par la relation $b^2 + b'^2 = 1$, alors on a

$$L(b) = I(1,b)J(1,b') + I(1,b')J(1,b) - I(1,b)I(1,b') = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Legendre a montré que la dérivée de $L(b)$ par rapport à b était nulle. La valeur constante de la fonction est ensuite obtenue en faisant tendre b vers 0. □

L'algorithme pour π

L'idée est maintenant de trouver un lien entre $I(a,b)$ et $J(a,b)$ pour éliminer J dans la relation de Legendre. Fort opportunément, on a

Théorème. —

$$J(a,b) = \left(a^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\left(a_k^2 - b_k^2\right)\right) I(a,b) \tag{17}$$

en reprenant les notations de (13).

Démonstration. De la même manière que pour I, on montre que

$$J(a,b) = 2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - a.b.I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$$

ce qui donne, en utilisant l'itération de l'AGM et en gardant à l'esprit que $I(a_n,b_n) = I(a_0,b_0) = I(a,b)$, la relation

$$J(a_n,b_n) = 2J(a_{n+1},b_{n+1}) - a_nb_nI(a_{n+1},b_{n+1}) = 2J(a_{n+1},b_{n+1}) - a_nb_nI(a,b).$$

On obtient donc

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad & 2^{n+1}\left[J(a_{n+1},b_{n+1})-a_{n+1}^2 I(a,b)\right]-2^n\left[J(a_n,b_n)-a_n^2 I(a,b)\right] \\
& = 2^{n-1}\left(-4a_{n+1}^2+2a_n^2+2a_nb_n\right)I(a,b) \\
& = 2^{n-1}\left(a_n^2-b_n^2\right)I(a,b).
\end{aligned}
$$

Sachant maintenant qu'en utilisant le deuxième membre de (16), on trouve

$$
\begin{aligned}
\Delta_n &= 2^n\left[a_n^2 I(a_n,b_n)-J(a_n,b_n)\right] \\
&= 2^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(a_n^2-b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta+b_n^2\sin^2\theta}}d\theta \leqslant 2^n(a_n^2-b_n^2)I(a_n,b_n)
\end{aligned}
$$

on a forcément $\Delta_n \to 0$ si $n \to \infty$ puisque $(a_n^2-b_n^2)\to 0$ quadratiquement. Il reste donc à sommer (18) sur $n\in\mathbb{N}$ pour obtenir (17). □

L'injection de (17) dans la relation de Legendre (17) pour $b=b'=\frac{1}{\sqrt{2}}$ donne donc

$$
I\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\left(2\left(1^2-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}2^k\left(a_k^2-b_k^2\right)\right)-1\right)=\frac{\pi}{2}
$$

et enfin la relation de Gauss (15) permet alors d'obtenir la remarquable formule

$$
\pi=\frac{2M\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1-\sum_{k=0}^{\infty}2^k\left(a_k^2-b_k^2\right)}
$$

dont l'algorithme de Brent-Salamin (8) est l'application directe.

Le peu de travail requis pour arriver à cet algorithme a longtemps fasciné les mathématiciens comme Salamin lui-même après sa découverte (qui date précisément de décembre 1973). Il semble que Gauss soit en fait parvenu à cette formule d'après son essai « Courts essais dans divers champs des mathématiques », commencé en mai 1809 [1]. Mais la complexité de sa mise en œuvre, sans algorithme efficace de multiplication et d'extraction de racines, explique sans doute que Gauss n'ait pas mesuré l'utilité de sa découverte pour le calcul des décimales de π.

Performances

Salamin montre dans [23] que si π_n est l'approximation de π après n itérations de l'algorithme (8), on a

$$
(19) \qquad |\pi-\pi_n|<\frac{\pi^2 2^{n+4}}{M\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}e^{-\pi 2^{n+1}}.
$$

Cette majoration montre que le nombre de décimales correctes de π obtenues à partir de π_n est strictement supérieur à $\left(\frac{\pi}{\log 10}\right)2^{n+1}-n\log_{10}2-2\log_{10}\left(\frac{4\pi}{M(1,1/\sqrt{2})}\right)$.

L'équipe de Kanada fut probablement la première à appliquer ce cocktail d'algorithmes (FFT, Newton, Brent-Salamin) en 1982 et en tira un peu plus de 10 millions de décimales de π.

D'autres algorithmes

À partir d'équations modulaires impliquant les fonctions thêta (dont l'algorithme de Brent-Salamin est un cas particulier), les frères Borwein ont montré que l'on pouvait construire des algorithmes convergeant à n'importe quelle vitesse (quadratique, quartique, quintique...) vers π même si la complexité des calculs augmente en conséquence. Un bon compromis semble être la formule suivante, à convergence quartique [7] :

$$\alpha_0 = 6 - 4\sqrt{2}, \qquad y_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$y_{k+1} = \frac{1 - \sqrt[4]{1 - y_k^4}}{1 + \sqrt[4]{1 - y_k^4}}$$

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k(1 + y_{k+1}^4) - 2^{2k+3} y_{k+1}(1 + y_{k+1} + y_{k+1}^2) \qquad \frac{1}{\alpha_k} \to \pi \tag{20}$$

Elle fut utilisée pour la première fois par Bailey puis Kanada en 1986. Bailey utilisa 12 itérations sur un *CRAY-2* pour calculer 29 360 000 décimales de π (en fait 45 millions sont possibles à cette étape). Il est amusant de constater qu'il suffit alors de moins de 100 multiplications, divisions et extractions de racines pour y parvenir !

De 1982 à 2002, ce sont toujours des formules de Ramanujan comme (5), l'algorithme de Brent-Salamin (8) ou une variante, ainsi que l'algorithme quartique des Borwein (20) qui ont été utilisés dans la course au record de calcul de décimales de π.

L'approche BBP, encore du nouveau sur π

Comment progresser ?

La multiplication, la division et l'extraction de racine s'effectuant désormais dans un temps quasi-linéaire, et sachant que l'on ne peut pas descendre en dessous d'une complexité $O(n)$, il ne faut plus guère attendre d'avancées significatives de ce côté. Nous avons vu d'autre part que des algorithmes extrêmement efficaces existaient désormais pour le calcul des décimales de π. Alors est-on condamné à voir les records tomber en fonction de la progression des performances des ordinateurs ? Oui et non !

Les mathématiques surprennent souvent là où on ne les attend plus. C'est ainsi que le 19 septembre 1995 à 0h29 (!), après des mois de recherches à tâtons, Simon Plouffe, David Bailey et Peter Borwein de Vancouver découvrent la formule apparemment simple et anodine

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \tag{21}$$

appelée depuis formule BBP. La démonstration en est presque immédiate en remarquant que $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k(8k+p)} = \sqrt{2}^p \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{p-1+8k} dx = \sqrt{2}^p \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{p-1}}{1-x^8} dx$ puis en calculant l'intégrale équivalente à (21). Euler aurait lui-même pu la découvrir. En fait, c'est à ce jour un des plus célèbres exemples de mathématiques expérimentales puisque cette formule fut découverte par l'algorithme PSLQ de

recherche de relations linéaires entre nombres. Ceci encouragea nombre d'amateurs en mathématiques à se lancer dans la recherche de telles formules grâce à PSLQ ou LLL, un algorithme similaire implémenté dans le logiciel *Pari-GP*.

Mais nos trois mathématiciens canadiens remarquent surtout que cette expression est très proche d'une décomposition en base 16 de π. Dans l'article [3] de 1996 devenu célèbre, ils montrent que l'on peut se servir de (21) pour atteindre le n-ième chiffre de π en base 2^p (*a fortiori* en base 16) sans avoir calculé les précédents, ceci en temps presque linéaire $O(n.\log^3 n)$ et en espace $O(\log n)$! ! L'espace requis étant minime, ils appliquent immédiatement ce résultat en calculant le 40 milliardième chiffre de π en base 2. La révolution est en marche.

Plouffe étend ce résultat à toutes les bases b en octobre 1996 [22] au prix d'un temps $O(n^3 \log^2 n)$ et de l'utilisation astucieuse de la série

$$\pi + 3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k.2^k (k!)^2}{(2k)!}.$$

Des améliorations en $O(n^2)$ puis en $O(n^2 \log\log n/\log^2 n)$ sont successivement proposées par Bellard en 1997 [5] puis Gourdon en 2003 [14]. De nombreuses autres formules type BBP (avec des puissances de 2 ou 3) ont depuis vu le jour pour les logarithmes d'entiers, $\zeta(3)$, $\zeta(5)$, la constante de Catalan G, et de manière générale les constantes polylogarithmiques [9, 17]. Par contre, il n'existe probablement pas de formule pour π avec une puissance de 10, autrement dit en base 10. La formule $\ln\left(\frac{9}{10}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k.k}$ montre cependant que l'on peut calculer isolément les chiffres décimaux de certaines constantes.

Ces résultats fondamentaux montrent en particulier que π appartient à la classe de complexité de Steven SC_b, regroupant les constantes dont on peut calculer les chiffres en base b en temps polynomial et espace *log*-polynomial, ce qui était auparavant jugé improbable du point de vue mémoire.

Depuis lors, Colin Percival a atteint le 10^{15}-ième chiffre binaire de π (un 0 !) au moyen d'un calcul collaboratif extravagant sur internet de 1,2 millions d'heures CPU partagées entre 1734 ordinateurs répartis dans 56 pays entre le 5 septembre 1998 et le 11 septembre 2000 !

Arrêtons-nous maintenant sur le principe de ce calcul du n-ième chiffre de π.

Atteindre le N-ième chiffre d'un nombre α sans connaître les précédents

Nous suivons ici à quelques adaptations près l'exposé remarquablement clair de Xavier Gourdon et Pascal Sebah sur le sujet [15] qui simplifiait déjà l'article original [3]. X. Gourdon est un grand connaisseur des algorithmes de calcul puisqu'il détient depuis plusieurs années le record de vitesse du calcul des décimales de π avec le programme *PiFast* (plus rapide même que le programme de l'équipe de Kanada).

Pour simplifier le propos, on se restreint à la base 2, et le N-ième bit de α désigne le N-ième bit de la partie fractionnaire de α, c'est-à-dire après la virgule. La partie fractionnaire d'un nombre x sera notée $\{x\} = x - [x]$.

Décalage

La première idée repose sur le théorème suivant

Théorème. — *Le $N+n$-ième bit de α s'obtient en calculant le n-ième bit de $2^N\alpha$ i.e. le n-ième bit de $\{2^N\alpha\}$.*

Démonstration. La décomposition en base 2 de α s'écrit

$$\alpha = [\alpha] + \{\alpha\} = \sum_{k\leqslant 0} \frac{\alpha_k}{2^k} + \sum_{k>0} \frac{\alpha_k}{2^k}, \qquad (\alpha_k \in \{0,1\})$$

d'où $\{2^N\alpha\} = \sum_{k>N} \frac{\alpha_k}{2^{k-N}} = \sum_{k>0} \frac{\alpha_{N+k}}{2^k}$. Le n-ième bit de $\{2^N\alpha\}$ est donc α_{N+n} qui est bien le $N+n$-ième bit de α. □

Exemple. — Cherchons le 13ième bit de π. Comme on a $2^{12}\pi = 12867.9635...$, en particulier, $\{2^{12}\pi\} = 0.9635....$ Il reste donc à calculer le 1^{er} bit de 0.9635. En passant en binaire, on a

$$0.9635... = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^7} + ... = [0.1111011...]_{base\ 2}$$

donc le 13ième bit de π est 1, et le $17^{ème}$ bit est 0.

Chercher le $N+1$-ième bit de π correspond donc à trouver le premier bit de $\{2^N\pi\}$. D'après la formule BBP (21), cela correspond au premier bit de la série

$$\pi_N = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left\{ \frac{4.2^{N-4n}}{8n+1} \right\} - \left\{ \frac{2.2^{N-4n}}{8n+4} \right\} - \left\{ \frac{2^{N-4n}}{8n+5} \right\} - \left\{ \frac{2^{N-4n}}{8n+6} \right\} \right) = A_N + B_N$$

où A_N et B_N sont les sommes

$$A_N = \sum_{0\leqslant n\leqslant N/4}, \qquad B_N = \sum_{n>N/4}. \tag{22}$$

Compte tenu de la décroissance rapide de 2^{N-4n} pour $n > \frac{N}{4}$, il suffit d'évaluer seulement les premiers termes de B_N (en virgule flottante !), plus exactement suffisamment pour que le reste de la somme soit inférieur à la précision requise (ici 1 bit après la virgule).

Concernant A_N, on peut mettre son terme général sous la forme

$$\left\{ \frac{p.2^n}{m} \right\}$$

avec p, n et m dans $\mathbb{N}$. En écrivant $p.2^n = qm + r$ la division euclidienne de $p.2^n$ par m, on voit que comme $r < m$, $\left\{ \frac{p.2^n}{m} \right\} = \frac{r}{m}$. Ceci s'écrit encore

$$\left\{ \frac{p.2^n}{m} \right\} = \frac{p.2^n \pmod m}{m}.$$

Exponentiation

Imaginons ainsi que l'on veuille calculer le $1000^{ème}$ bit de $\frac{1}{2^{35}49}$. Grâce aux principes précédents, cela revient à calculer le $965^{ème}$ bit de $\frac{1}{49}$ et donc le 1^{er} bit de $\frac{2^{964}}{49}$. En vertu de (23), il faut alors trouver r tel que $2^{964} = 49q + r$ donc évaluer $2^{964} \pmod{49}$.

Le calcul de $2^{964} \pmod{49}$ s'effectue au moyen de la méthode appelée exponentiation binaire ("binary powering" ou "binary exponentiation"), dont l'idée semble avoir été utilisée dès 200 avant J.C [18], et même envisagée par les Égyptiens pour effectuer la multiplication ! Cela revient simplement à utiliser l'arithmétique modulo 49, autrement dit à se placer dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$, en trois étapes.

(1) On décompose 964 en puissances de 2 : $989 = 512 + 256 + 128 + 64 + 4$.
(2) On calcule de proche en proche chaque puissance de 2 jusqu'à 512 :

$$2^2 = 4; \qquad 2^4 = \left(2^2\right)^2 = 4 * 4 = 16;$$
$$2^8 = 16^2 = 256 = 49 * 5 + 11 = 11; \qquad 2^{16} = 11^2 = 121 = 23;$$
$$2^{32} = 23^2 = 529 = 39; \qquad 2^{64} = 39^2 = 1521 = 2;$$
$$2^{128} = 2^2 = 4; \qquad 2^{256} = 16;$$
$$2^{512} = 16^2 = 11.$$

(3) On utilise les étapes 1 et 2 :

$$2^{964} = 2^{512+256+128+64+4} = 11 \times 16 \times 4 \times 2 \times 4 = 5632 = 46.$$

Pour obtenir plus généralement $r = p.2^n \pmod{m}$, on initialise r à 1 et on prend t la plus grande puissance de 2 inférieure à n. Puis on applique l'algorithme suivant équivalent à notre exemple :

(1) si $n \geqslant t$, alors $r = 2.r \pmod{m}$; $n = n - t$; FinSi
(2) $t = t/2$;
(3) si $t \geqslant 1$ alors $r = r^2 \pmod{m}$; aller à l'étape 1 ; FinSi.

Enfin on termine par $r = p.r \pmod{m}$; pour prendre en compte p. En raison de la décomposition de n en puissance de 2, on utilise $O(\log n) \pmod{m}$ opérations pour ce calcul, ce qui est très faible !

Étapes finales

Il reste à obtenir $\frac{r}{m} = \frac{p.2^n \pmod{m}}{m}$ et à sommer le tout sur $0 \leqslant n \leqslant \frac{N}{4}$ pour obtenir A_N dans (22). Il faut ici remarquer que si le calcul de chaque terme de A_N est effectué en virgule flottante et que, disons, le dernier bit est erroné, alors au pire la propagation des retenues sur toute la somme produira une erreur sur $1 + \log_2 \frac{N}{4}$ bits. Pour des valeurs de N non extravagantes, on pourra donc mener les calculs de $\frac{r}{m}$ en toute sérénité avec une précision arithmétique de 64 bits seulement.

Pour cette raison et en remarquant que pour A_N, on somme $O(N)$ termes nécessitant chacun $O(\log N)$ opérations grâce à l'exponentiation, l'algorithme requiert $O(N.\log N.M(\log N))$ opérations et $O(\log N)$ en espace, où $j < M(j) \leqslant j^2$ est la complexité de la multiplication de deux entiers de taille j bits.

Une formule pleine de ressources

L'accès presque direct aux chiffres de ces constantes a fait naître chez les mathématiciens l'idée que l'on pourrait trouver des propriétés de répartition de ces digits, et que l'on était peut-être proche d'une preuve de la normalité de π (et donc de l'irrationnalité de la constante de Catalan G ou des ζ impairs). La normalité d'un nombre requiert que chaque n-uplet possible apparaisse avec la probabilité $\frac{1}{b^n}$ dans les digits en base b de ce nombre. En octobre 2000, Bailey et Crandall ont réduit cette condition de normalité à la vérification de l'hypothèse suivante :

Conjecture. — *Soit $r_n = \frac{p(n)}{q(n)} \in \mathbb{Q}(n)$, $n > 0$, avec $\deg p < \deg q$ et r_n sans pôles sur $\mathbb{N}$ (c'est la partie polynomiale des formules BBP). Soit une base $b \geqslant 2$ et $x_0 = 0$. Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$x_n = (b.x_{n-1} + r_n) \pmod 1$$

n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence ou bien est équidistribuée sur $[0, 1]$.

Cette forme de suite est équivalente à la représentation BBP d'une constante puisque si $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k} r(k)$, alors $\{b^n\alpha\} = (x_n + t_n) \mod 1$ où

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^k} r(k+n)$$

tend vers 0 si $n \to \infty$ puisque $\deg p < \deg q$.

En outre, la suite $(\{b^n\alpha\})$ a un nombre fini de valeurs d'adhérence uniquement si α est rationnel [4].

La notion d'équidistribution est vérifiée si la proportion d'apparition d'une séquence à valeurs dans $[0, 1]$ dans un intervalle donné $[c, d]$ est justement la longueur de cet intervalle, bref si les valeurs prises sont distribuées uniformément dans $[0, 1]$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équidistribuée si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Card\,\{x_j \in [c, d],\ j < n\}}{n} = d - c.$$

L'équidistribution pour ce type de suites implique la normalité [19]. Compte tenu de la variété des constantes impliquées dans des représentations BBP, on touche là à des avancées importantes, notamment pour les ζ impairs. Il est amusant de voir la simplicité de la formule BBP dont sont tirées toutes ces conséquences. On consultera [4, 20] pour approfondir ces questions ouvertes.

Une quête sans fin ?

Record en date

Le 6 décembre 2002, Kanada, compétiteur infatigable qui détient ou reprend le record de calcul de décimales de π depuis plus de 20 ans, a calculé 1 241 100 000 000 décimales de π. La surprise est venue du fait qu'il a utilisé cette fois deux formules de type Machin comme l'eq. (4).

Ce retour à des formules étonnament simples après l'utilisation pendant une quinzaine d'années des algorithmes de Brent-Salamin, des Borwein ou des séries de Ramanujan et Chudnovsky était vraiment inattendu. Il semble que l'utilisation perpétuelle de racines, multiplications et divisions nécessitait l'utilisation de

la transformée de Fourier rapide (FFT) à très grande échelle. Cette dernière requiert énormément de mémoire pour fonctionner. Kanada est donc revenu à des méthodes plus sages comme les formules type Machin, qui nécessitent sensiblement plus d'opérations arithmétiques mais moins de FFT et donc beaucoup moins de mémoire. Kanada estime que son implémentation est environ deux fois plus plus rapide que la précédente qui utilisait l'algorithme (8) de Brent-Salamin et celui d'ordre quartique des Borwein (éq. 20). Les calculs ont été effectués en base hexadécimale, soit 1 030 700 000 000 digits. Les formules employées sont :

$$\pi = 48 \arctan \frac{1}{49} + 128 \arctan \frac{1}{57} - 20 \arctan \frac{1}{239} + 48 \arctan \frac{1}{110443} \tag{23}$$

$$\pi = 176 \arctan \frac{1}{57} + 28 \arctan \frac{1}{239} - 48 \arctan \frac{1}{682} + 96 \arctan \frac{1}{12943}. \tag{24}$$

La première a été trouvée en 1982 par un professeur de mathématiques et compositeur, Takano, et la seconde est une découverte de Störmer en 1896.

Ce calcul de Kanada recèle une seconde originalité : comme le résultat avait été obtenu en base 16, après avoir vérifié l'adéquation entre les deux calculs, il a effectué une vérification supplémentaire en calculant directement les 20 digits hexadécimaux à la position 1 000 000 000 001 à l'aide de l'approche par formules BBP présentée précédemment. Le résultat B4466E8D21 5388C4E014, qui a requis 21 heures de travail, a parfaitement correspondu aux calculs effectués à l'aide des formules d'arctan. Les digits hexadécimaux ont alors été convertis en base dix, une opération peu triviale d'ailleurs, reconvertis en hexadecimal pour vérification, puis le record a été officialisé [2].

Les calculs (tout compris) ont duré près de 600 heures sur un HITACHI SR8000/MP doté de 1TB de stockage (1024Go), soit la même mémoire que pour son précédent record de 1999, alors que 6 fois plus de décimales ont été calculées !

Perspectives et motivations

Comment expliquer que la course aux décimales reste d'actualité ? Les motivations pour battre le record de décimales de π n'ont en fait jamais manquées, confinant même parfois à un soupçon de mauvaise foi. On citera pêle-mêle le test des ordinateurs (un bug aurait été découvert par Bailey lors de son record de calcul en 1986 sur des *Cray-2*), l'hypothétique apparition d'irrégularités dans la répartition des décimales calculées (chou blanc de ce côté pour l'instant) ou la mise au point de techniques toujours plus efficaces d'implémentation de calcul des décimales (la compétition fait actuellement rage sur l'internet entre plusieurs mathématiciens informaticiens pour le titre de programme le plus rapide du monde).

Chacune de ces raisons prise séparément n'est pas suffisante. Il serait probablement plus honnête de dire que c'est la conjonction de toutes ces raisons, sans compter la passion engendrée par la « personnalité » de π, qui alimente et renouvelle la compétition. Il est vrai que l'implémentation moderne des librairies d'arithmétiques sur grands nombres (reposant sur les techniques de FFT, de Newton vues précédemment) doit beaucoup à la course aux décimales de π. Il est vrai également que la mise au point de programmes efficaces n'est pas à la portée de n'importe qui et qu'il faut soigneusement connaître l'architecture de son calculateur pour espérer obtenir une performance intéressante. C'est un challenge pour de

nombreux informaticiens doués en maths (ou l'inverse !). Nous avons vu aussi que la découverte récente de la formule BBP (21) avait ouvert un champ d'investigations théorique immense.

J'ajouterai que la popularité de π joue un rôle primordial : il est ainsi une justification peut-être rarement avancée mais qui prend tout son sens auprès des simples amateurs de mathématiques membres de la secte des adorateurs de π, ou même visible en écumant les forums de mathématiques de par le monde : la théorie des nombres, l'analyse classique et les constantes ont une base accessible, au moins en apparence, pour les non-mathématiciens et restent les plus grands fournisseurs de petits exercices et de propriétés amusantes des nombres. C'est par ce biais que naissent beaucoup de vocations de mathématiciens, et il suffit de consulter les pages web de mathématiciens comme Bailey, Plouffe, Kanada ou des frères Borwein pour se convaincre qu'ils gardent à cinquante ans passés une passion rafraîchissante pour les constantes, parties visibles de l'iceberg mathématique. La difficulté d'abstraction de certains autres domaines des mathématiques comme la géométrie algébrique les confine probablement à un public davantage connaisseur et ils ne bénéficient donc pas d'autant d'ambassadeurs comme π ou les nombres premiers peuvent l'être en théorie des nombres. Il faut ainsi noter que la quête du plus grand nombre de Mersenne premier est un exercice très à la mode actuellement.

Mais laissons le mot de la fin à Genuys à qui on demandait, après son record à 10 000 décimales en 1958, pourquoi il avait choisi π et qui répondit tout simplement : « C'était pour moi un exercice de programmation, j'aurais pu choisir un autre nombre mais e c'était trop facile et c (la constante d'Euler) trop difficile ! Et puis il y avait le record ! » [21].

Références

[1] J. Arndt, C. Haenel, "π Unleashed", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001.

[2] D. H. Bailey, « Some Background on Kanada's Recent Pi Calculation", may 2003, preprint, http ://www.nersc.gov/~dhbailey/dhbpapers/dhb-kanada.pdf.

[3] D.H. Bailey, P.B. Borwein, S. Plouffe, « On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants", Mathematics of Computation, 1997, vol. 66, pp. 903-913.

[4] D. H. Bailey, R. E. Crandall, "On the Random Character of Fundamental Constant Expansions", Experimental Mathematics, 2001, vol. 10, n° 2, pp. 175-190.

[5] F. Bellard, "Computation of the n'th digit of pi in any base in $O(n^2)$, unpublished, 1997, http ://fabrice.bellard.free.fr/pi/pi_n2.ps.

[6] L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein, "Pi : A Source Book", Springer-Verlag, 2nd ed., 1997.

[7] J. Borwein, P. Borwein, "PI and the AGM : A Study in Analytic Number Theory and Computational Complexity", Wiley, 1987.

[8] R. Brent, "Fast multiple-precision evaluation of elementary fonctions", Journal of the Association of Computing Machinery, 1976, pp.242-251.

[9] D. J. Broadhurst, "Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of z(3) and z(5)", 1998, preprint.

[10] S. A. Cook, S. O. Aanderaa, "On the minimum computation of functions", Trans. AMS, 1969, vol. 142, pp291-314.

[11] J. W. Cooley, J. W. Tukey, "An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series", Math. Comp. 1965, vol 19, pp. 297-301.

[12] J.-P. Delahaye, "Le Fascinant Nombre π", Bibliothèque Pour La Science, Belin, 1997.

[13] P. Eymard, J.-P. Lafon, "Autour du Nombre π", Hermann, Paris, 1999.

[14] X. Gourdon, "Computation of the n-th decimal digit of π with low memory", preprint, 2003, http ://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/nthdecimaldigit.pdf.

[15] X. Gourdon, P. Sebah, "N-th digit computation", preprint, 2003, http ://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/nthdigit.pdf.

[16] M. D. Householder, "The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation", 1970, MacGraw-Hill, New-York.
[17] G. Huvent, "Formules BBP", 2001, Preprint. `http://ano.univ-lille1.fr/seminaries/expo\_huvent01.pdf`.
[18] D. E. Knuth, "The Art of Computer Programming. Vol. 2 : Seminumerical Algorithms", Addison-Wesley, Reading, MA, 1981.
[19] L. Kuipers and H.Niederreiter, "Uniform distribution of sequences", Wiley-Interscience, New York, 1974.
[20] J. C. Lagarias, "On the normality of fundamental constants", Experiment. Math., 2001, vol. 10, n° 2.
[21] "Le nombre π", Le Petit Archimède, Association pour le Dévelopement de la Culture Scientifique, Amiens, 1980.
[22] S. Plouffe, "On the computation of the n-th decimal digit of various transcendental numbers", unpublished, 11/1996.
[23] E. Salamin, "Computation of π using arithmetic-geometric mean", Mathematics of computation, 1976, vol. 30, pp. 565-570.
[24] A. Schönhage, V. Strassen, "Schennelle Multiplikation grosser Zahlen", Computing, 1971, vol. 7, pp. 281-292.
[25] J. Tropfke, "Geschichte der Elementarmathematik", Vierter Band, Ebene Geometrie, Dritte Auflage, Walter De Gruyter & Co, 1940.

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

Algorithmes d'approximation : un petit tour en compagnie d'un voyageur de commerce

Marc Demange[1]

Résumé

Cet article est une introduction à l'approximation polynomiale de problèmes NP-difficiles. Il présente une sélection de résultats récents dans le domaine et représentatifs d'une large gamme de techniques, de résultats et de problématiques de l'approximation. L'objectif est de présenter ce domaine au lecteur non spécialiste d'optimisation combinatoire. Pour cela, ont été sélectionnés des résultats simples ou présentés de manière simplifiée afin de pouvoir présenter la preuve de la plupart d'entre eux. Entrer dans ces preuves est en effet la meilleure façon de s'imprégner du domaine. Toujours par souci de simplicité et d'unité, tous les résultats développés dans cet article concernent le même problème, à savoir, le problème de voyageur de commerce, sous différentes variantes bien entendu. Il ne s'agit nullement d'un survey, les résultats proposés n'ayant aucun caractère exhaustif.

Sont présentées essentiellement des analyses d'algorithmes d'approximation sous deux points de vue complémentaires associés à deux mesures d'approximation. Toutefois, ces résultats seront l'occasion d'esquisser les facettes du domaine qui ne sont pas traitées ainsi que ses enjeux.

Enfin, j'espère, à titre personnel, vous faire partager par ces quelques pages un domaine que je trouve fascinant.

Dans le texte qui suit, le terme *voyageur de commerce* est pris dans son sens mathématique. N'y voyez donc aucune persécution d'une corporation que je respecte pleinement.

1. Introduction

L'*approximation polynomiale* puise ses fondements dans la découverte que certains problèmes d'optimisation combinatoire – pourtant d'expression très simple puisqu'ils consistent à optimiser une fonction $f : 2^{\{1,\ldots,n\}} \rightarrow \mathbb{N}$ évaluable en temps polynomial – pourraient ne pas admettre d'algorithme de résolution polynomial[2]. L'optimiseur devrait alors se contenter d'un algorithme décrivant, plus ou moins

[1] ESSEC, Cergy Pontoise – également membre du CERMSEM, université Paris I. (demange@essec.fr)

[2] dont l'exécution nécessite au plus un nombre d'opérations élémentaires polynomiale par rapport à la taille n des données.

complètement, l'ensemble $2^{\{1,\ldots,n\}}$ de toutes les solutions possibles afin de comparer les valeurs correspondantes de f. Le conditionnel correspond ici à la fameuse conjecture P$\neq$NP dont les origines remontent environ au début des années 1960 [19] et qui a pris son plein envol avec la « découverte » du premier problème NP-complet par Cook en 1971 [13]. Au sein de la classe des problèmes de NP (nous aurons l'occasion d'y revenir dans la partie 2), les problèmes *NP-complets* sont vite devenus le symbole d'une difficulté intrinsèque les rendant impropres à la « computation ». Face à ce phénomène, l'approximation polynomiale étudie des algorithmes polynomiaux permettant de déterminer, pour des problèmes *NP-difficiles* (en fait version optimisation de problèmes NP-complets) de bonnes solutions, c'est-à-dire des solutions garantissant, quoi qu'il advienne, un certain niveau de qualité.

L'objectif de cet article est de montrer au lecteur non familier de l'approximation polynomiale quelques exemples suffisamment simples (ou simplifiés) mais néanmoins significatifs des différentes facettes de ce domaine. En guise de premier contact avec le domaine, nous aborderons surtout l'analyse d'algorithmes d'approximation et de leurs garanties de performances, pour deux mesures de qualité. Nous évoquerons également, dans un cas très simple, un résultat de difficulté d'approximation pour dégager les différents enjeux de ce domaine. Nous ne pourrons alors évoquer que très brièvement les autres aspects de l'approximation, à savoir notamment l'étude des *réductions en approximation* et la structure de la classe NP en fonction des propriétés d'approximation.

Cet article est une promenade en approximation... en compagnie d'un voyageur de commerce. En effet, pour ce travail d'initiation, j'ai choisi un problème particulier, le *voyageur de commerce*, qui nous accompagnera sous ses différentes versions tout au long de cette étude. La motivation principale est bien entendu de ne pas ajouter de difficulté par une multiplication des problèmes abordés. Dans le même esprit, j'ai sélectionné quelques résultats significatifs et accessibles sans grande difficulté. Vous êtes donc invités à aborder cet article crayon et brouillon à la main !

Comme il se doit, avant une promenade entre amis, laissez-moi vous présenter rapidement le nouvel arrivant : le problème du voyageur de commerce[3].

1.1 TSP : une histoire déjà longue

À la base du problème se situe la question suivante : *étant données n villes et leurs distances mutuelles, comment les parcourir de sorte que la distance totale parcourue soit minimale ?* Si toutes les connexions entre villes sont possibles, il est évident qu'il existe des solutions réalisables ($(n-1)!$ pour être précis). Par contre, si seulement certaines connexions sont possibles et si on impose de ne passer qu'une fois et une seule dans chaque ville, l'existence même d'une solution réalisable pose problème : il s'agit du problème d'hamiltonicité[4] connu pour être NP-complet [25].

La théorie des graphes (cf. par exemple [9]) apparaît comme le cadre naturel pour étudier ce problème. Dans ce travail, le terme de *graphe* désigne un *graphe simple non-orienté* [9] défini comme une relation binaire symétrique antiréflexive sur un ensemble fini V. Plus précisément, un graphe $G = (V, E)$ est décrit par

[3] TSP pour les intimes par référence à la terminologie anglophone *Traveling Salesman Problem*.
[4] Consiste à décider si un graphe contient un cycle hamiltonien, *i.e.* visitant une fois et une seule chaque sommet.

son ensemble (fini) de sommets V et son ensemble d'arêtes E, une arête étant un couple de sommets (distincts) en relation.

Le problème de voyageur de commerce est donc intimement lié au problème de recherche d'un cycle hamiltonien dans un graphe, les sommets du graphe représentant les villes et les arêtes les liens entre les villes, *i.e.* la possibilité d'un passage direct de l'une à l'autre.

W. R. Hamilton a donné son nom à de tels cycles pour avoir étudié ce problème au milieu du XIX^{e} siècle, notamment dans le cas de 20 villes situées aux sommets d'un dodécaèdre régulier : le « voyage autour du monde » et le « jeu icosien » (bien que posé sur un dodécaèdre) commercialisé vers 1859, sont différentes représentations de ce problème.

Jeu icosien (source [40])

Mais l'origine du problème hamiltonien remonterait à un siècle auparavant lorsqu'Euler et Vandermonde se sont demandé comment un cavalier pourrait visiter toutes les cases d'un échiquier. Pour plus de détails sur ces deux exemples, on pourra se reporter notamment à [9], ch. 10 et [28], ch. 1.

Quant au problème du voyageur de commerce, dans sa version pondérée, sa première mention remonterait à un livre allemand (1832), avec un exemple sur 45 villes. Toutefois, la première formulation mathématique du problème est attribuée à Menger, vers 1930.

Le lecteur intéressé par la fascinante histoire de ce voyageur pourra se reporter notamment à [28], ch. 1 et à [39].

1.2 TSP : séquence fascination

Le succès de ce problème, qui a suscité et suscite encore de très nombreux travaux, tient d'abord à sa formulation simple, en forme de défi. Bien d'autres problèmes combinatoires, non moins populaires, comme le problème de coloration minimum par exemple, inspirent la même fascination de la complexité derrière un visage d'enfant. Mais TSP a quelque chose de particulier au point, notamment, d'inspirer depuis de nombreuses années des concours internationaux, une sorte de course sans fin à qui résoudra des instances de plus en plus volumineuses [40].

Toutefois, comme pour la plupart des problèmes combinatoires, derrière des formulations en forme de jeux mathématiques se cachent de nombreuses applications potentielles. TSP n'y échappe pas. On pense évidemment à des problèmes de tournées qui ne sont pas si éloignés du personnage mythique qui part sillonner les routes son attaché-case à la main. Mais le problème a de nombreuses autres applications plus inattendues telle que la fabrication de circuits intégrés, des problèmes de découpe, d'ordonnancement ou encore d'arrangement des lignes et colonnes de

tableaux, des applications en génomique, pour la conception de réseaux de fibre optiques, ... (pour plus de détails, se reporter à [28], ch. 2 ou également [40]).

1.3 TSP : la famille

Pour conclure cette présentation, voici la famille TSP. Ce problème est défini usuellement comme un problème de minimisation, c'est d'ailleurs ainsi que nous l'avons entendu jusqu'ici. Toutefois, on peut aussi bien définir une version maximisation. Pour permettre cette distinction dans la suite de l'article, chaque nom de problème est complété par le préfixe Min ou Max. Ainsi, le terme TSP utilisé jusqu'ici est à comprendre comme Min TSP – son sens le plus courant – dont nous définissons plusieurs versions ci-dessous. À chacune correspond son homologue sous forme maximisation dont nous parlerons de manière plus marginale.

Une instance du problème général de minimisation se formule ainsi :

Min TSP : On se donne un graphe complet (toutes les arêtes existent),non orienté pour le cas qui nous intéresse, à n sommets (K_n) et arêtes-valué. L'ensemble des sommets est noté $\{1, \ldots, n\}$. Pour chaque arête e, on note $c(e)$ sa valeur (en fait un coût). Un cycle hamiltonien (ou tour lorsqu'aucune confusion n'est possible) est un ordre de visite des sommets $T = (v_1, v_2, \ldots v_n)$ et sa valeur est $c(T) = \sum_{i=1}^{n-1} c(v_i v_{i+1}) + c(v_n v_1)$. Le problème consiste alors à déterminer un tour de valeur minimum.

De nombreuses variantes existent en fonction du système de coûts adopté. Dans le cas général, c est une fonction $c : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Q}$ avec comme simple restriction de pouvoir être évaluée en temps polynomial. Une restriction naturelle consiste à imposer à c de vérifier les inégalités triangulaires. Le problème de *voyageur de commerce métrique*, noté $\Delta - Min\ TSP$, correspond au cas où c est une distance. Un cas particulier de $\Delta - Min\ TSP$ consiste à restreindre les valeurs d'arêtes à 1 ou 2 : on le note $Min\ TSP_{1,2}$. Enfin, une autre restriction, qui correspond au cadre des formulations d'origine, concerne le cas où c est une distance euclidienne, les villes étant des points de $\mathbb{R}^p$. Nous appelons ce cas *voyageur de commerce euclidien* et le notons $\ell_2 - Min\ TSP$. Dans cet article, nous envisageons ces différentes versions et mettons en évidence combien le système de valuation conditionne les possibilités de résolution efficace.

Il existe évidemment de très nombreux cousins qui sont définis en modifiant légèrement les contraintes et l'objectif : en particulier tous les problèmes évoqués ont leur version maximisation ; dans certains cas le voyageur ne rentre pas chez lui ou encore doit se répartir les villes avec des confrères (très utile dans les modèles de tournées). Plusieurs généralisations imposent également des contraintes temporelles sur les sommets qui sont vus alors comme des requêtes à servir : à chacune est associée une fenêtre de temps au cours de laquelle elle peut être servie avec, éventuellement, une durée pour servir une requête. Mentionnons enfin la version dans laquelle le voyageur se fixe un objectif de p villes parmi n et s'en contente. Je laisse le soin à chacun d'imaginer d'autres versions et/ou de se plonger dans la littérature très fournie autour de ce problème. Le site internet [40] permet de trouver une première base de références bibliographiques.

2. Voyageur de commerce : un métier difficile

Min TSP figure sans doute parmi les plus célèbres problèmes de la (désormais très vaste) classe des problèmes *NP-difficiles*. L'une des conséquences intuitives les plus populaires est que, jusqu'à preuve du contraire (*i.e.* si P$\neq$NP), aucun algorithme polynomial ne peut résoudre ce problème. Ainsi, le paradigme « poétiquonaïf » dont (entre autres) la recherche opérationnelle est particulièrement friande place le métier de voyageur de commerce au rang des activités les plus difficiles au même titre que proviseur de lycée la veille de la rentrée (ordonnancement), postier en milieu rural ou s'il est chinois et à moitié désorienté (chinese postman in mixed graphs [19]), campeur (problème de sac à dos), ...

2.1 La classe NP-complet (NP-C) : un bref aperçu

Pour caractériser la difficulté de ce problème, la démarche la plus usuelle est d'abord de le lier à la classe des problèmes *NP-complets*. Si on modélise un problème de décision (réponse oui ou non) comme « décider si un mot donné (instance) appartient à un langage (problème) », alors NP désigne la classe des problèmes de décision qui peuvent être résolus par un algorithme (machine de Turing) non-déterministe polynomial. La classe NP-complet contient les problèmes les plus difficiles de NP en ce sens que la résolution de l'un d'entre eux par un algorithme (déterministe) polynomial entraînerait la possibilité de résoudre en temps polynomial tout problème de NP, rendant ainsi une machine de Turing non déterministe *polynomialement* équivalente à une machine déterministe. La notion de réduction polynomiale entre deux problèmes de décision permet d'exprimer cette difficulté de manière plus précise : une réduction polynomiale $\propto$ de Π_1 à Π_2 permet de construire en temps polynomial, pour toute instance I_1 de Π_1 de taille n_1 une instance $\propto (I_1) = I_2$ de Π_2 de taille n_2 qui est une instance positive (réponse oui) si et seulement si I_1 est positive. Le caractère polynomial de la réduction permet en particulier de déduire qu'il existe un polynôme P indépendant de I_1 tel que $n_2 \leqslant P(n_1)$. Par conséquent un algorithme polynomial pour Π_2 peut immédiatement être transformé via la réduction en un algorithme polynomial pour Π_1 ; c'est en ce sens que Π_2 peut alors être considéré comme au moins aussi difficile que Π_1. Un problème *NP-complet* est alors un problème de NP auquel se réduit polynomialement tout problème de NP. Le problème de satisfiabilité fut le premier problème NP-complet mis en évidence par Cook en 1971 [13]. Pour chaque instance de ce problème, on se donne *n variables booléennes* définissant $2n$ littéraux (une variable ou sa négation) ainsi qu'un ensemble de *m clauses*, chacune définie par une disjonction de certains littéraux. L'instance est alors la conjonction de ces *m* clauses : il s'agit de décider s'il existe une affectation de vérité aux variables de sorte que chaque clause contienne au moins un littéral de valeur « vrai ». Depuis ce « premier problème NP-complet », de très nombreux problèmes ont été identifiés comme tels. Dans la quasi totalité des cas, l'appartenance à la classe NP-complet est prouvée par réduction : un problème de NP auquel se réduit polynomialement un problème NP-complet est lui-même dans cette classe. Pour de plus amples informations sur le sujet, on pourra se référer notamment à [19, 33].

2.2 Min TSP et NP-C

Parmi les 21 problèmes NP-complets mis en évidence par Karp dans [25] en 1972 figure le problème du *Cycle hamiltonien*, noté HC.

HC : étant donné un graphe, déterminer s'il existe un cycle hamiltonien, c'est-à-dire passant une fois et une seule en chaque sommet.

La difficulté du problème *Min TSP* s'en déduit immédiatement. Pour se ramener à un problème de décision, on définit la version décisionnelle *Min TSP*^{d} de *Min TSP* :

Min TSP^d : étant donnés un graphe complet (non orienté pour le cas étudié ici) arêtes-valué et une constante K, existe-t-il un cycle hamiltonien de valeur au plus K, la valeur d'un cycle correspondant à la somme des valeurs de ses arêtes ?

On définit de la même manière une version décisionnelle pour tout problème d'optimisation en associant à chaque instance une famille de questions paramétrée par K, le seuil à atteindre. Pour un problème de maximisation, on remplace juste « au plus K » par « au moins K ».

Théorème 2.1 [19]**.** — *Min TSP*^{d} *est NP-complet.*

Preuve : cette preuve de NP-complétude compte parmi les plus simples mais permettra au lecteur non familier de ces notions de comprendre les principes d'une telle démonstration.

L'appartenance de *Min TSP*^{d} à la classe NP est très simple à établir. Il suffit, étant donné une instance, de générer de manière non-déterministe un ordre (avec une complexité linéaire) sur les sommets puis de tester en temps polynomial si cet ordre correspond à un cycle hamiltonien de valeur au plus K. Un tel processus définit une machine de Turing non-déterministe polynomiale. L'instance est positive si et seulement si il est possible de générer une solution dans la phase non-déterministe pour laquelle la phase déterministe reconnaît qu'il s'agit d'un cycle hamiltonien répondant à la question. Ceci correspond exactement ([19]) à la définition de *l'acceptation* dans le modèle des machines de Turing non-déterministe et donc au caractère NP du problème considéré. Intuitivement, un problème de NP s'apparente à une situation de ce type pour laquelle on peut, en temps polynomial, tester si un candidat solution (test) de taille polynomiale répond à la question ; une instance est positive s'il existe une telle solution qui peut alors être générée par la phase non déterministe (dès lors qu'elle peut être représentée en temps polynomial).

Pour montrer l'appartenance à NP-C, on réduit polynomialement *HC* à *Min TSP*^{d} : étant donné un graphe $G = (V, E)$ d'ordre[5] n, instance de *HC*, on définit le graphe complet sur V et on affecte à l'arête uv le coût 1 si $uv \in E$ et 2 sinon. En posant $K = n$, il est clair que G est hamiltonien si et seulement si il existe dans le graphe complet un cycle hamiltonien de valeur $K = n$ (*i.e.* ne comprenant que des arêtes de coût 1). □

La preuve montre en fait que *Min TSP*$^d_{1,2}$, le problème *Min TSP*^{d} restreint au cas où les valeurs des arêtes sont dans $\{1, 2\}$, est NP-complet. En particulier, le cas métrique $\Delta - $ *Min TSP*^{d} est NP-complet. Ceci montre aussi que les restrictions de *Min TSP*^{d}, et $\Delta - $ *Min TSP*^{d} au cas de poids bornés par un polynôme (ou même

[5] Le nombre de sommets.

borné par une constante) sont dans NP-C. En d'autres termes, ces problèmes sont *NP-complets au sens fort* : leur difficulté ne provient pas (seulement) de la taille des pondérations. Le cas euclidien est aussi connu comme NP-difficile au sens fort ([19]), mais la réduction, à partir du couplage de dimension 3, est différente. Par contre, une particularité de cette version est que la forme de l'objectif ne permet pas de statuer sur son appartenance à NP. En échangeant dans la preuve le rôle des valeurs 1 et 2, on montre de même que *Max* $TSP^d_{1,2}$ est NP-complet.

2.3 NPO : problèmes d'optimisation de NP

Usuellement, la complexité de problèmes d'optimisation est étudiée au travers de la version décisionnelle du problème (*Min* TSP^d dans le cas présent). Ceci n'est pas toujours satisfaisant dès lors qu'on s'intéresse à la résolution de problèmes d'optimisation combinatoire. En effet, la version décisionnelle d'un problème d'optimisation est plutôt liée à la détermination de la valeur optimale et non à la recherche d'une solution optimale. Plus précisément, *Min* TSP^d correspond, pour chaque valeur de K, à comparer K et la valeur optimale de l'instance. Le problème d'optimisation *Min TSP* consistant à déterminer une solution optimale (voire dans certains cas juste sa valeur) est au moins aussi difficile puisqu'il permet immédiatement de résoudre *Min* TSP^d ; le problème est alors qualifié de *NP-difficile* que nous entendons dans ce qui suit comme « à version décision NP-complète » (l'emploi de ce terme est parfois plus étendu).

Tant que les valeurs réalisables sont des entiers bornés par $2^{p(n)}$ où p est un polynôme en la taille n du problème (ce qui recouvre la quasi totalité des problèmes usuels), il est simple de montrer comment une recherche dichotomique permet d'établir l'équivalence (du point de vue d'une résolution polynomiale) entre la version décisionnelle et le problème d'évaluation consistant à déterminer la valeur optimale. Par contre, l'équivalence algorithmique entre la version évaluation (déterminer la valeur optimale) et la recherche d'une solution optimale est beaucoup moins claire. Elle a été établie ([38], cf. également [7]) lorsque la version décisionnelle est NP-complète mais la preuve n'est pas exploitable du point de vue opérationnel.

Dès lors qu'on s'intéresse à la résolution effective de problèmes d'optimisation, c'est la recherche de solutions qui prend le dessus sur la version décisionnelle. La classe NPO a pour vocation de traiter des problèmes d'optimisation sans référence au problème décisionnel associé. Il s'agit du cadre usuellement adopté pour traiter l'approximation à garanties de performances de problèmes NP-difficiles. La définition explicite de cette classe n'apporterait rien dans cet article, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [7]. Intuitivement, un problème d'optimisation de NPO comprend une notion de *solutions réalisables* (avec un test de « réalisabilité » polynomial) et une *valeur objective* calculable en temps polynomial.

3. L'approximation : une alternative pour la résolution efficace de problèmes difficiles

3.1 Le périmètre de l'approximation polynomiale

La difficulté intrinsèque d'un problème se traduit la plupart du temps par une limitation très forte de la taille des instances pouvant être résolues complètement.

Dans le cas de l'optimisation auquel nous nous restreignons, plusieurs attitudes sont alors envisageables.

Les *méthodes exactes* recouvrent l'ensemble des stratégies visant la recherche de solution(s) optimale(s). De telles méthodes ne seront évidemment pas polynomiales pour des problèmes NP-difficiles. L'objectif des recherches dans cette voie est de tenter de rendre accessible à la résolution le plus d'instances possibles, c'est-à-dire en règle générale, des instances de taille la plus grande qui soit. Dans le cadre de l'optimisation combinatoire, les méthodes exactes consistent essentiellement en des techniques arborescentes (de type Branch&Bound, Branch&Cut, ...) pour lesquelles on cherche à limiter au maximum l'espace de recherche par l'utilisation fine de bornes, ou des méthodes de coupe exploitant la structure du polyèdre associé à une formulation du problème comme programme linéaire en nombres entiers.

Une autre attitude possible consiste à accepter de ne pas accéder à une solution optimale (mais seulement à une « bonne » solution) au profit d'un temps de calcul meilleur. Et même, dans certains cas où les méthodes exactes sont de toute façon mises en défaut, il s'agit d'accepter une solution non optimale dans une situation où aucune solution optimale ne peut être obtenue (en tout cas garantie). On se donne alors la possibilité de rechercher un compromis acceptable entre la qualité des solutions et le temps de calcul nécessaire à leur obtention.

Il faut bien être conscient qu'une telle démarche ne peut être envisagée que pour certains types de problèmes pour lesquels une notion de « bonne solution » peut être définie. Le cadre de l'optimisation présente à ce titre l'avantage de distinguer un ensemble de solutions réalisables qui sont ordonnées en fonction de leur valeur objective. La valeur objective permet alors de représenter la qualité d'une solution au regard du problème considéré.

Les méthodes approchées recouvrent des situations très variées, tant au niveau des techniques développées qu'au niveau de leur usage et des garanties qu'elles offrent. On y distingue notamment les méthodes heuristiques (ou Méta heuristiques) et, parmi les méthodes à garanties de performance, l'approximation polynomiale. Même si cette terminologie n'est pas unanimement utilisée, elle permet de désigner deux domaines complémentaires dans leurs objectifs et leurs enjeux.

Les heuristiques correspondent de loin aux méthodes les plus employées en pratique et s'avèrent particulièrement efficaces dans certaines circonstances. Les techniques sous-jacentes sont extrêmement variées, elles marient des algorithmes combinatoires, des méthodes statistiques, des méthodes « évolutionnaires » ou encore des méthodes de recherche locale. Elles s'inspirent parfois de paradigmes de phénomènes naturels (colonies de fourmis, recuit simulé, algorithmes génétiques, ...). Ce domaine et ses différentes branches se définissent essentiellement par une liste de méthodes avec, presque toujours en toile de fond, l'objectif de résoudre de manière effective des problèmes réels de grande taille. Les critères de validation et d'évaluation de ces méthodes sont également très variés, ils vont d'études de convergence à des évaluations par plan d'expériences sur des jeux d'instances aléatoires, sur des instances réelles ou encore sur des jeux d'instances de benchmark reconnues comme particulièrement difficiles ou en tout cas mal résolues.

L'approximation polynomiale quant à elle se définit par ses objectifs : elle limite son champs d'investigation à des méthodes polynomiales offrant des garanties au

pire cas sur la valeur des solutions obtenues. Ce domaine se définit donc au sein des méthodes approchées par un choix restrictif du compromis complexité/qualité sur lequel il s'appuie. Il s'agit en quelque sorte d'étudier les meilleures solutions qui peuvent être obtenues en temps polynomial.

La garantie au pire cas qu'un algorithme d'approximation doit satisfaire s'exprime au moyen d'un *rapport* ou *mesure d'approximation* qui compare la valeur objective de la solution approchée à la valeur optimale de l'instance et éventuellement à d'autres paramètres de l'instance. Différentes mesures peuvent être envisagées mais le schéma général reste le même :

- un algorithme d'approximation détermine, avec une complexité polynomiale, une solution réalisable pour chaque instance ;
- pour chaque instance, la performance de l'algorithme est définie par une mesure d'approximation fonction de la valeur objective de la solution approchée et de différents autres paramètres de l'instance ;
- une analyse au pire cas permet d'établir un encadrement de la mesure d'approximation qui est valide pour toute instance : cet encadrement définit la performance de l'algorithme pour le problème.

Ce schéma peut sembler très restrictif (il l'est), mais nous verrons que ce cadre figé par lequel l'approximation polynomiale se définit détermine ses enjeux, en particulier la possibilité d'établir des résultats de difficulté d'approximation et de mettre en évidence une hiérarchie des problèmes de NPO en fonction de leurs propriétés d'approximation. Ces enjeux sont discutés dans la section 8. Bien entendu, le cadre des méthodes approchées à garanties de performance dépasse celui de l'approximation polynomiale, le schéma ci-dessus pouvant être décliné avec d'autres types de garanties, notamment en moyenne. Pour chaque classe de garanties visée, une structuration des résultats peut être développée sur le même schéma que l'approximation, définissant ainsi un périmètre au sein des méthodes approchées.

Pour le problème du voyageur de commerce, le lecteur intéressé trouvera dans le chapitre [37] des exemples de différentes méthodes de résolution, exactes ou approchées.

3.2 Approximation : mesures, résultats et classes

Pour une instance I d'un problème de NPO, nous désignerons respectivement par $\lambda(I)$ et $\beta(I)$ sa valeur approchée et sa valeur optimale. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, la dépendance par rapport à I ne sera pas spécifiée. Nous utiliserons également une notion de pire valeur de l'instance, notée $\omega(I)$ qui est définie comme la valeur optimale de l'instance obtenue en inversant le sens de l'optimisation.

Dans le cas de problèmes à objectif positif, la mesure d'approximation la plus couramment utilisée est le rapport entre la valeur approchée et la valeur optimale ; nous l'appelons *rapport standard*. Un résultat d'approximation caractérise alors la proportion de la valeur optimale qui est garantie par l'algorithme. Nous éludons ici les éventuels problèmes de définition lorsque la valeur optimale est nulle car le cœur de la problématique ne se situe pas là.

Le rapport $\lambda(I)/\beta(I)$ est compris entre 0 et 1 pour un problème de maximisation et est supérieur à 1 pour un problème de minimisation ; il est d'autant plus proche de 1 que l'instance est bien résolue. Ainsi, une garantie d'approximation correspondra

à minorer le rapport d'approximation pour un problème de maximisation et à le majorer pour un problème de minimisation :

Définition 3.1. — *Approximation standard*

Soit Π un problème de NPO, $\mathcal{A}$ un algorithme approché polynomial pour Π ($\mathcal{A}$ calcule une solution réalisable pour toute instance), soit ρ une fonction attribuant à toute instance I un réel $\rho(I)$. On dit que $\mathcal{A}$ garantit le rapport standard ρ si :

$$\forall I,\ \lambda(I)/\beta(I) \leqslant \rho(I) \ \text{ si } \Pi \text{ est un problème de minimisation,}$$

$$\forall I,\ \lambda(I)/\beta(I) \geqslant \rho(I) \ \text{ si } \Pi \text{ est un problème de maximisation.}$$

Une autre mesure d'approximation peut être envisagée. Il s'agit du *rapport d'approximation différentiel* qui, pour chaque instance, compare $\lambda(I)$ à la meilleure valeur $\beta(I)$ et à la pire valeur $\omega(I)$. Le rapport associé à l'instance est $(\omega(I) - \lambda(I))/(\omega(I) - \beta(I))$, il correspond à la position de la valeur approchée entre les deux valeurs extrêmes de l'instance. On a alors une définition identique à la précédente en tenant compte du fait que le rapport se situe toujours entre 0 et 1 sans distinction du sens de l'optimisation (maximisation ou minimisation) :

Définition 3.2 . — *Approximation différentielle*

Soit Π, $\mathcal{A}$ et ρ définis comme dans la définition précédente (ici ρ est à valeurs entre 0 et 1). On dit que $\mathcal{A}$ garantit le rapport différentiel ρ si :

$$\forall I,\ \big(\omega(I) - \lambda(I)\big)/\big(\omega(I) - \beta(I)\big) \geqslant \rho(I).$$

Ce rapport d'approximation a été utilisé depuis longtemps pour des problèmes spécifiques ([5, 42]). Une discussion sur les mesures d'approximation à utiliser est proposée dans [17] ; en particulier le rapport différentiel y est introduit en partie par une approche axiomatique. Depuis, son emploi systématique a été étudié pour différents problèmes (cf. par exemple [15, 16, 21, 31, 32]).

À l'origine, le rapport différentiel a été proposé comme réponse à certains biais de la mesure standard qui reste la plus employée. Cette dernière crée en particulier une dissymétrie profonde entre les problèmes de maximisation et les problèmes de minimisation qui, du point de vue de l'optimisation, peuvent être rendus équivalents par simple composition de l'objectif par une fonction décroissante. L'exemple le plus significatif concerne les problèmes de stable maximum et de couverture minimum de sommets. Un stable est un ensemble de sommets deux à deux non liés par une arête. Une couverture de sommets est un ensemble de sommets touchant toutes les arêtes ; il s'agit exactement du complémentaire d'un stable. Ces deux problèmes sont donc équivalents du point de vue de l'optimisation (maximiser la taille d'un ensemble ou minimiser celle de son complément), mais le rapport d'approximation standard ne respecte pas cette équivalence. D'ailleurs comme nous le verrons dans la partie 8, ces deux problèmes ont des comportements radicalement opposés du point de vue de l'approximation standard. Au contraire, l'approximation différentielle les rend équivalents (par axiome). Nous évoquerons dans la partie 7 une situation analogue entre les versions minimisation et maximisation de TSP. Un autre biais est la sensibilité par rapport aux translations, pourtant très naturelles. Dans le cas du voyageur de commerce par exemple, il suffit d'augmenter les coûts de chaque arête d'une même constante pour rendre artificiellement le

rapport standard proche de 1 alors qu'il semblerait plus naturel qu'une telle transformation n'affecte pas la difficulté du problème. Plus généralement, la définition de cette mesure repose ([17]) sur la transformation d'un problème d'optimisation consistant simplement à composer l'objectif par une fonction affine (changement d'origine et/ou d'unité). La mesure différentielle est alors conçue pour rester insensible à cette transformation (volontairement très restrictive pour rendre cet axiome le plus naturel).

Utiliser une notion de pire valeur pour mesurer la qualité d'un algorithme peut sembler troublant. La première justification provient du constat très simple qu'une mesure dépendant juste des paramètres λ et β (qui semblent incontournables) ne peut respecter l'insensibilité par rapport aux transformations affines ; dans la recherche d'un troisième paramètre, plusieurs exemples très simples permettent de justifier que modifier la pire valeur d'un problème (*i.e.*, dans le cas de la maximisation, contraindre les solutions réalisables à dépasser une certaine valeur) modifie la difficulté du problème, pouvant même conduire à rendre difficile la recherche de solutions réalisables.

Cette approche ne prétend pas être plus pertinente et n'entend nullement remplacer la mesure standard. Elle a principalement deux atouts. Le premier est d'avoir engagé une discussion sur la mesure à utiliser en mettant en évidence combien la mesure conditionne les résultats. Son second et principal atout est de conduire à une analyse différente de la difficulté des problèmes en fonction de leur approximation. Les études systématiques menées dans ce cadre ont permis a posteriori de montrer que les résultats que l'on peut obtenir sous cet angle mettent en évidence une structure des problèmes du point de vue de l'approximation radicalement différente mais aussi riche que la structure induite par la mesure standard, rendant ces deux approches complémentaires et justifiant de mener de front des études sous chaque mesure.

Pour chacune des deux mesures, standard ou différentielle, on différentie les résultats d'approximation en fonction de la forme de la fonction ρ. On parle notamment de rapport d'approximation constant, logarithmique, polynomial, ... Un schéma d'approximation est un cas d'approximation très favorable puisqu'il correspond à la possibilité d'obtenir tout rapport constant différent de 1 :

Définition 3.3. — *Schéma d'approximation polynomiale*

(i) *Un schéma d'approximation polynomiale (PTAS) est une suite $\mathcal{A}_p$ d'algorithmes polynomiaux garantissant le rapport (standard) $1 - 1/p$ pour un problème de maximisation et $1 + 1/p$ pour un problème de minimisation.*

(ii) *Un schéma différentiel d'approximation polynomiale (DPTAS) est une suite $\mathcal{A}_p$ d'algorithmes polynomiaux garantissant le rapport (différentiel) $1 - 1/p$.*

(iii) *Lorsque la complexité de $\mathcal{A}_p$ est polynomiale par rapport à n (taille de l'instance) et à p, on parle de schéma complet (FPTAS ou FDPTAS).*

4. Approche difficile : un problème sauvage

Afin d'ouvrir le débat sur l'approximation de *Min TSP*, nous montrons dans cette section combien il est difficile d'approcher le problème général. Plus précisément, nous montrons :

Théorème 4.1. — *Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une fonction numérique telle que $f(n) \leqslant 2^{p(n)}$ pour un polynôme p, alors si P≠NP, il n'existe pas d'algorithme polynomial garantissant le rapport (standard) $f(n)$.*

Preuve : pour cela, nous revenons à la réduction du problème de cycle hamiltonien *HC*. Considérons un graphe $G = (V, E)$ d'ordre $n \geqslant 2$, instance de *HC*. Construisons le graphe complet K_n sur E en attribuant les coûts suivants :

$$\begin{cases} c(i,j) = 1 \text{ si } (i,j) \in E \\ c(i,j) = nf(n) \text{ sinon} \end{cases}$$

Suivons exactement le même raisonnement que dans la preuve du théorème 2.1 : si G est hamiltonien, alors un tour optimal a pour valeur n et dans ce cas un algorithme à rapport $f(n)$ permettrait de construire un tour de K_n de valeur au plus $nf(n)$. Par contre, si G n'est pas hamiltonien, alors tout cycle hamiltonien de K_n a pour valeur au moins $1+nf(n)$. Par conséquent, un tel algorithme permettrait de séparer les graphes hamiltoniens des graphes non-hamiltoniens. Si P≠NP, ceci ne peut être fait en temps polynomial. □

Ce résultat signifie en particulier que le rapport d'approximation 2^n ne peut être garanti, ce qui correspond quasiment au pire cas envisageable pour l'approximation. À titre de comparaison, des problèmes réputés très difficiles à approcher tels que le stable maximum ou la coloration minimale admettent trivialement des algorithmes garantissant le rapport n valant la taille de l'instance.

Par contre, il ne faudrait pas en déduire qu'aucun rapport ne peut être garanti pour *Min TSP*. En fait, ce résultat signifie essentiellement qu'aucun rapport d'approximation indépendant des poids ne peut être garanti, la restriction sur f permettant juste d'en assurer une représentation en temps polynomial. Par contre, comme tous les tours ont le même nombre d'arêtes, il est évident que tout algorithme construisant un tour réalisable (un ordre sur les sommets) garantit le rapport d'approximation w_{max}/w_{min} où w_{max} et w_{min} désignent respectivement le poids maximum et le poids minimum des arêtes de G. En particulier, la restriction du problème au cas où les poids sont bornés par une constante admet très simplement un algorithme à rapport constant. Ceci permet d'établir que la difficulté du point de vue de l'approximation est, pour une bonne partie, attribuable aux poids. Par comparaison, le cas du problème de stable maximum et de sa version pondérée est tout à fait différent. En effet, on peut montrer que la version non pondérée (*i.e.* où tous les poids sont égaux) se comporte essentiellement comme la version pondérée du point de vue de l'approximation et notamment, elle n'admet pas d'algorithme à rapport constant, si P≠NP [22].

Pour ce qui concerne les rapports d'approximation dépendant des poids, la preuve du théorème précédent permet d'établir que :

Proposition 4.1. — *Si P≠NP, aucun algorithme ne peut garantir le rapport standard $w_{max}/(nw_{min})$ pour Min TSP.*

On a donc établi un encadrement pour tout rapport d'approximation garanti par un algorithme polynomiale : entre $w_{max}/(nw_{min})$ et w_{max}/w_{min}.

4.1 Min TSP général : analyse d'un algorithme glouton

Nous proposons dans cette section une première analyse qui permet de mettre en évidence le gain induit par une technique très simple par rapport à la borne supérieure w_{max}/w_{min}. Un *algorithme glouton* construit une solution par décisions successives (au regard d'un critère spécifique) sans retour en arrière. De tels algorithmes, très simples dans leur conception, sont fréquents en approximation et permettent souvent d'établir un premier résultat. À ce propos, il convient d'ailleurs de garder à l'esprit, pour bien appréhender ce domaine, qu'il ne suffit pas de concevoir un algorithme mais de concevoir conjointement un algorithme et son analyse. En particulier, toute amélioration sophistiquée, même quand elle s'avère très performante en pratique, ne permet pas systématiquement d'améliorer l'analyse au pire cas et donc ne présente pas nécessairement d'intérêt pour l'approximation. C'est ainsi, inversement, que des algorithmes très simples, voire naïfs, mais relativement faciles à analyser permettent d'obtenir des résultats d'approximation qui ne sont parfois jamais améliorés. C'est par exemple le cas de l'algorithme glouton pour la couverture d'ensembles [11] qui garantit un rapport logarithmique par rapport à la taille du problème (ici, le nombre d'éléments à couvrir). Dans le cas de *Min TSP*, un algorithme glouton naturel, noté `Plus-Proche-Voisin`, consiste, partant d'un point, à systématiquement se diriger vers la ville non déjà visitée la plus proche.

```
Plus-Proche-Voisin
input : 1-Graphe complet G = (V, E), arêtes valué ;
output :Cycle hamiltonien Γ ;
   Choisir un sommet initial v ;
   Tant qu'il reste des sommets non visités faire
          visiter un sommet non déjà visité le plus
          proche ;
   Revenir en v ;
```

Analyse de l'algorithme `Plus-Proche-Voisin`

Considérons le tour fourni par l'algorithme glouton et numérotons alors les sommets du graphe de 1 à n dans l'ordre dans lequel ils sont visités (choisis). Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on définit $i \oplus 1$ comme $i + 1$ si $i < n$ et 1 si $i = n$; de même $i \ominus 1 = i - 1$ si $i > 1$ et n si $i = 1$. Le coût de la solution gloutonne est $\lambda = \sum_{i=1}^{n} c(i, i \oplus 1)$. Considérons alors une solution optimale $(s(1), s(2), s(3), \ldots, s(n))$ où s est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer $s(1) = 1$. Pour tout $i = s(j)$ considérons le sommet $s(j \oplus 1) \neq i$ situé après i dans cette solution optimale. Si $s(j \oplus 1) < i$, alors d'après le critère glouton, $c(s(j), s(j \oplus 1)) \geqslant c(s(j \oplus 1), s(j \oplus 1) \oplus 1)$ car sinon, l'algorithme glouton se serait dirigé vers $s(j)$ après $s(j \oplus 1)$ et non vers $s(j \oplus 1) \oplus 1$. De même si $i < s(j \oplus 1)$, alors $c(s(j), s(j \oplus 1)) \geqslant c(s(j), s(j) \oplus 1)$. On en déduit :

$$(1) \qquad c(s(j), s(j \oplus 1)) \geqslant \min(c(s(j \oplus 1), s(j \oplus 1) \oplus 1), c(s(j), s(j) \oplus 1))$$

En notant $a_j = c(s(j \oplus 1), s(j \oplus 1) \oplus 1)$ et $b_j = c(s(j), s(j) \oplus 1)$ on remarque que $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j = \lambda$. On note alors $J = \{j, a_j \leqslant b_j\}$ et $\bar{J} = \{j, a_j > b_j\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer $|J| \geqslant n/2$; on a :

$$\lambda \leqslant \sum_{j \in J} a_j + |\bar{J}| w_{max}. \tag{2}$$

Par ailleurs, d'après la relation (1)

$$\beta = \sum_{j=1}^{n} c(s(j), s(j \oplus 1)) \geqslant \sum_{j \in J} a_j + |\bar{J}| w_{min}. \tag{3}$$

Par conséquent, comme $\sum_{j \in J} a_j \geqslant w_{min} n/2$, $|\bar{J}| \leqslant n/2$ et $w_{max} \geqslant w_{min}$, on déduit des relations (2) et (3) :

$$\frac{\lambda}{\beta} \leqslant \frac{w_{min} n/2 + |\bar{J}| w_{max}}{w_{min} n/2 + |\bar{J}| w_{min}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{w_{max}}{2 w_{min}} \ .$$

On en déduit que l'algorithme glouton garantit le rapport $1/2 + w_{max}/(2w_{min})$ qui vaut asymptotiquement $w_{max}/(2w_{min})$. En d'autres termes, cette borne est deux fois meilleure que la borne garantie par tout algorithme.

Nous proposons de montrer maintenant que cette analyse ne peut pas être significativement améliorée. On montre que pour tout $\varepsilon > 0$, `Plus-Proche-Voisin` ne peut garantir, pour toute instance, le rapport $(1 - \varepsilon)[1/2 + w_{max}/(2w_{min})]$.

Considérons un entier $M > 1$ et une instance de *Min TSP* constituée d'une clique (graphe complet) de taille $2k$, $k \geqslant 1$ telle que les arêtes $\{(1,2), (2i, 2i \oplus 1), i = 1 \ldots k, (1,3), (2j, 2j+3), j = 1 \ldots k-2, (2k-2, 2k)\}$ ont pour valeur $1 = w_{min}$ et toutes les autres arêtes ont pour valeur $M = w_{max}$. Partant de 1, `Plus-Proche-Voisin` peut choisir le tour $(1, 2, \ldots n)$ de valeur $M(k-1) + k + 1$ tandis qu'un tour optimal vaut $n = 2k$: $(1, 3, 2, \ldots, 2i, 2i+3, 2i+2, \ldots, 2k-1, 2k-2, 2k)$. Le rapport garanti pour une telle instance est donc supérieur à $[1/2 + M/2](k-1)/k \geqslant (1-\varepsilon)[1/2 + w_{max}/(2w_{min})]$ pour $k \geqslant 1/\varepsilon$.

Le théorème suivant résume cette analyse :

Théorème 4.2. — *`Plus-Proche-Voisin` garantit le rapport standard* $1/2 + w_{max}/(2w_{min})$ *; l'analyse est asymptotiquement optimale.*

5. $\Delta-$Min TSP : approximation à rapport constant

Le théorème 4.1 limite considérablement tout espoir de résolution efficace du problème dans le cas général, hormis des améliorations assez limitées de la borne w_{max}/w_{min} telles que celle obtenue par l'algorithme glouton. Toutefois, dans de nombreux cas, les instances intéressantes ont une structure particulière permettant d'espérer des résultats beaucoup plus optimistes. Dans cette section nous considérons le cas métrique (problème $\Delta - Min\ TSP$) correspondant aux instances pour lesquelles les coûts sont positifs et satisfont les inégalités triangulaires. Mentionnons notamment que dans ce cas, l'analyse de `Plus-Proche-Voisin` peut être affinée pour mettre en évidence un rapport logarithmique (cf. notamment [7] (ch. 2, page 49)). Mais en fait, ce cas particulier sera l'occasion de découvrir une situation beaucoup plus favorable pour l'approximation puisqu'un rapport d'approximation

constant peut être garanti. Ce type de résultat correspond au cas le plus classique en approximation.

5.1 Approcher $\Delta-$Min TSP à partir d'un arbre couvrant minimum

Considérons d'abord un premier algorithme très simple qui nous permettra de mettre en évidence les idées principales pour une amélioration ultérieure.

Étant donnée une clique $K_n = (V, E)$ sur n sommets, un *arbre* (couvrant) de K_n est un graphe partiel $T = (V, E'), E' \subset E$ connexe et minimal pour cette propriété (tout retrait d'une arête brise la connexité). Il s'agit de manière équivalente d'un graphe partiel connexe et sans cycle ou encore d'un graphe partiel connexe comprenant exactement $n-1$ arêtes. Le système de valuation des arêtes de G permet de définir, pour chaque arbre de G, sa valeur comme la somme des valeurs de ses arêtes. Déterminer, dans un graphe connexe G, un arbre de G de valeur minimum est un problème polynomial [27]. Un tour hamiltonien de G peut immédiatement être transformé en un arbre de G par simple retrait d'une arête ; les valeurs étant supposées positives, l'arbre associé au tour est de valeur moindre que le tour lui-même de sorte que la valeur minimum d'un tour hamiltonien est minorée par la valeur minimum d'un arbre de G.

L'idée de l'algorithme est alors de concevoir un tour hamiltonien à partir d'un arbre minimum T de G en maîtrisant l'augmentation du coût. Pour ce faire, une manière de visiter tous les sommets avec retour au point initial est d'effectuer un parcours en profondeur d'un arbre minimum. Chaque arête étant traversée deux fois par un tel parcours, la valeur totale de l'itinéraire résultant est exactement le double de la valeur de T, soit au plus le double de la valeur minimum d'un tour. Bien entendu, une telle solution ne constitue pas un tour hamiltonien puisqu'un sommet peut être visité plusieurs fois dans le parcours en profondeur. Toutefois, si les inégalités triangulaires sont satisfaites, court-circuiter les sommets déjà rencontrés dans le parcours ne peut qu'améliorer cette solution. En d'autres termes, en visitant les sommets dans l'ordre dans lequel ils sont rencontrés (pour la première fois) dans un parcours en profondeur (ordre préfixe des sommets de l'arbre), on construit une solution dont la valeur n'excède pas le double de la valeur minimum, ce qui correspond à un algorithme approché garantissant le rapport 2.

L'algorithme de Christofides [10] (noté CHRFD) est une amélioration de ce premier algorithme.

CHRFD (Algorithme de Christofides)
input : Graphe complet $G = (V, E)$, arêtes-valué ;
les valeurs positives satisfont les inégalités triangulaires ;
output : Cycle hamiltonien Γ ;
(i) Construire un arbre couvrant $T = (V, H)$ de G de valeur minimum ;
$V' \leftarrow \{$ sommets de degré impair dans $T\}$;
(ii) Construire un couplage parfait M de valeur minimum sur $G' = G[V']$;
(iii) Construire un parcours eulérien du graphe $G'' = (V, H \cup M)$;
En déduire un cycle hamiltonien Γ.

Pour en expliquer l'idée directrice, interprétons sous l'angle eulérien le premier algorithme. Alors qu'un tour hamiltonien passe exactement une fois par chaque sommet, un tour eulérien est un cycle qui passe exactement une fois sur chaque arête. On pense immédiatement au fameux problème des ponts de Königsberg résolu par Euler (1766) ! Alors que la reconnaissance d'un graphe hamiltonien (*i.e.* admettant un cycle du même nom) est un problème NP-complet, le théorème d'Euler fournit un certificat d'existence d'un tour eulérien qui peut être testé en temps linéaire par rapport au nombre d'arêtes : *un graphe admet un tour eulérien si et seulement si il est connexe et n'a que des sommets de degré pair* ; on dit alors que le graphe est eulérien. En outre, la preuve (cf. par exemple [9]) fournit un algorithme polynomial (linéaire par rapport au nombre d'arêtes) pour construire un tel tour lorsqu'il existe.

L'algorithme à rapport 2 analysé précédemment peut être interprété de la manière suivante : on a construit un arbre T de valeur minimum, puis en doublant chaque arête de T, on obtient trivialement un graphe respectant le critère d'Euler. Le parcours en profondeur fournit en fait un tour eulérien du graphe ainsi obtenu qui, dans le cas de valuations respectant les inégalités triangulaires, peut immédiatement être transformé en tour hamiltonien (le graphe G est complet) sans augmentation du coût. La borne 2 provient du fait que l'on a doublé chaque arête, ce qui n'est pas nécessaire pour passer de l'arbre minimum à un graphe eulérien. On se pose donc le problème de déterminer un *ensemble d'arêtes de valeur minimum à ajouter à l'arbre T pour le rendre eulérien*. Pour cela, il faut ajouter au moins une arête incidente à chaque sommet de degré impair dans l'arbre T. Comme il y a un nombre pair de sommets de degré impair dans T (la somme des degrés d'un graphe est paire) et comme le graphe initial est complet, il faut et il suffit, pour rendre T eulérien, de lui ajouter un couplage parfait du sous-graphe de G induit par ces sommets de degré impair. Pour faire cette opération à moindre coût, il faut déterminer un *couplage parfait de coût minimum* dans le sous-graphe G' de G induit par les sommets de degré impair dans T. Ceci peut être réalisé en temps polynomial (cf. par exemple [27]).

Analyse de l'algorithme `CHTFD`

Soit $T = (V, H)$ de coût $c(H)$ l'arbre construit à l'étape **(i)** et soit M de coût $c(M)$ le couplage parfait construit à l'étape **(ii)**. Il est clair que le graphe partiel $G'' = (V, H \cup M)$ est eulérien, ce qui assure la validité de l'algorithme. Notons $\tilde{\lambda}$ la valeur du cycle eulérien de G'' construit à l'étape **(iii)** :

$$\tilde{\lambda} = c(H) + c(M). \tag{4}$$

Par ailleurs, comme dans l'analyse initiale, un tour optimal, de valeur β, peut être transformé par suppression d'une arête en un arbre de G ; les coûts étant positifs, on a :

$$\beta \geqslant c(T). \tag{5}$$

Remarquons aussi que, par élimination des sommets ayant un degré pair dans T, on peut extraire d'un tour optimal un tour ne visitant que les sommets de V'. D'après les inégalités triangulaires, le coût ne peut augmenter au cours de cette

transformation. Par ailleurs, ce tour sur V' est la réunion de deux couplages de G', chacun de coût au moins égal à $c(M)$. Il vient :

$$\beta \geqslant 2c(M). \tag{6}$$

Les inégalités triangulaires garantissent que la solution construite (tour hamiltonien) est de valeur $\lambda \leqslant \tilde{\lambda}$ et alors les expressions (4), (5) et (6) impliquent :

$$\lambda/\beta \leqslant 3/2. \tag{7}$$

On en déduit le théorème suivant qui reste la meilleure approximation connue pour le cas métrique du voyageur de commerce :

Théorème 5.1 [10]**.** — *L'algorithme CHTFD garantit le rapport 3/2 pour le problème* $\Delta - Min\ TSP$.

5.2 Approcher Min $TSP_{1,2}$ à partir d'un 2-couplage minimum

L'amélioration de l'algorithme de Christofides reste un problème ouvert. Le cas particulier *Min* $TSP_{1,2}$, pour lequel les valeurs des arêtes sont 1 ou 2, a suscité plusieurs travaux. En particulier, un algorithme à rapport 7/6 est proposé dans [36]. Le cadre de cet article ne permettrait pas d'expliquer totalement ce résultat ; néanmoins, une version très simplifiée, garantissant le rapport 4/3, permet de comprendre le principe de la démarche.

L'algorithme est fondé sur la recherche, dans un graphe complet arêtes-pondéré, d'un ensemble de cycles $M = \Gamma_i, i = 1, \ldots k$ couvrant les sommets (2-couplage parfait) de valeur minimum, ce qui peut être fait en temps polynomial (cf. par exemple [33]). La valeur d'un tel 2-couplage minore celle d'un tour optimal qui correspond à un 2-couplage parfait particulier (pour lequel $k = 1$). Ce 2-couplage joue ici un rôle similaire à l'arbre dans l'algorithme précédent. La méthode consiste à assembler les cycles de M pour en faire un seul cycle en maîtrisant l'augmentation de la valeur. Cette technique de construction de tours de valeur minimum (ou maximum) est relativement classique (cf. notamment [18, 28]), nous la réévoquerons dans la section 7 à propos du rapport différentiel.

L'assemblage de deux cycles se fait simplement en effaçant l'arête de valeur maximum de chacun et en joignant les quatre extrémités libres pour constituer un cycle. L'algorithme assemble ainsi Γ_1 et Γ_2, puis ce nouveau cycle avec Γ_3 et ainsi de suite jusque Γ_n comme indiqué sur le schéma ci-après.

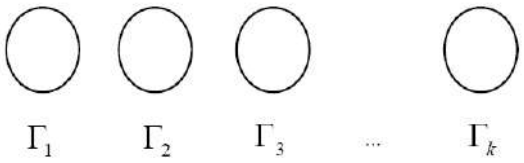
```
Assembler-Cycles1,2
input : Graphe complet arêtes-valué par 1 ou 2 ;
output : Cycle hamiltonien Γ ;
   Construire M = (Γ_1, ..., Γ_k), un 2-couplage parfait de
   valeur minimum ;
   Γ ← Γ_1 ;
   Pour i ← 2 à k faire
        Γ ← Assembler(Γ, Γ_i) ;
```

où **Assembler** est définie par

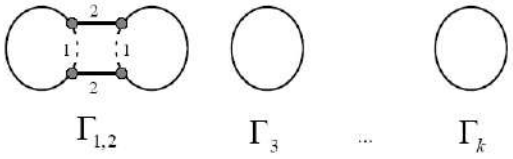
```
Assembler
input :  Deux cycles Γ, Γ' ;
output : Cycle ;
         Effacer une arête la plus lourde de Γ et de Γ' ;
         Relier les extrémités libres pour constituer un
         unique cycle ;
```

Analyse de l'algorithme `Assembler-Cycles12`

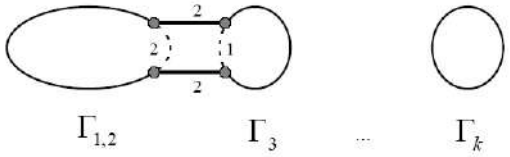
Les dessins suivants expliquent les différentes étapes de l'algorithme ainsi que les notations utilisées.



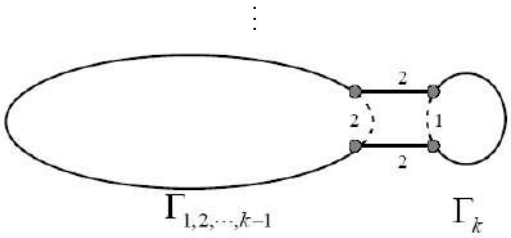
2-couplage M



Premier assemblage



Second assemblage



Dernier assemblage - Solution Γ

Soit n l'ordre du graphe G. Remarquons d'abord que chaque cycle Γ_i étant de taille au moins 3, $k \leqslant n/3$. Lors d'un assemblage, le surcoût peut être de 2 si deux arêtes de valeur 1 sont remplacées par des arêtes de valeur 2 et au plus de 1 si l'un (au moins) des cycles à assembler contient au moins une arête de valeur 2. On note

$\Gamma_{1,\ldots,p}$ l'état de Γ après $(p-1)$ assemblages ($p \leqslant k$), on montre par récurrence sur p que $\forall p \in \{1,\ldots k\}, c(\Gamma_{1,\ldots,p}) \leqslant \sum_{i=1}^{p} c(\Gamma_i) + p$; de plus si l'inégalité est une égalité, alors $\Gamma_{1,\ldots,p}$ contient au moins une arête de valeur 2. Pour $p = 1$, l'inégalité est stricte. Supposons maintenant la propriété vérifiée pour $p \leqslant k-1$ et considérons l'assemblage entre $\Gamma_{1,\ldots,p}$ et Γ_{p+1}.
Supposons d'abord que $c(\Gamma_{1,\ldots,p}) < \sum_{i=1}^{p} c(\Gamma_i) + p$. Dans ce cas :

$$c(\Gamma_{1,\ldots,p+1}) \leqslant c(\Gamma_{1,\ldots,p}) + c(\Gamma_{p+1}) + 2 < \sum_{i=1}^{p+1} c(\Gamma_i) + p + 2$$

et donc

$$c(\Gamma_{1,\ldots,p+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{p+1} c(\Gamma_i) + (p+1).$$

L'égalité correspond nécessairement à un surcoût de 2 lors de cet assemblage, ce qui impose au moins une arête (en fait même deux arêtes) de valeur 2 dans $\Gamma_{1,\ldots,p+1}$.

Si maintenant, $c(\Gamma_{1,\ldots,p}) = \sum_{i=1}^{p} c(\Gamma_i) + p$, alors $\Gamma_{1,\ldots,p}$ contenant une arête de valeur 2 au moins, l'assemblage produit un surcoût de 1 si une arête de valeur 2 et une de valeur 1 sont remplacées par deux de valeur 2 (le nouveau cycle contient alors une arête de valeur 2) ou de 0 au plus sinon. Dans ce dernier cas l'inégalité sera stricte pour $\Gamma_{1,\ldots,p+1}$.
En appliquant cette relation pour $p = k \leqslant n/3$ on a : $c(\Gamma_{1,\ldots,k}) = \lambda \leqslant c(M) + n/3$. Comme la valeur optimale vérifie $\beta \geqslant c(M)$ et $\beta \geqslant n$, on a $\lambda \leqslant 4/3\beta$, d'où le résultat **(i)** suivant :

Théorème 5.2 [36]**. —**

(i) *`Assembler-Cycles12` garantit le rapport 4/3 pour Min TSP*$_{1,2}$.
(ii) *Le rapport 7/6 peut être garanti en temps polynomial pour Min TSP*$_{1,2}$.

5.3 Difficulté d'approximation

Améliorer les rapports d'approximation de $\Delta - $ *Min TSP* et *Min TSP*$_{1,2}$ restent des questions particulièrement intéressantes. Parallèlement, les chercheurs du domaine mettent au point des résultats négatifs qui correspondent à des seuils d'approximation qu'on ne peut pas dépasser. De tels résultats sont très simples à obtenir pour le problème *Min TSP* général comme le montre le théorème 4.1.

La question de l'existence d'un schéma d'approximation polynomial pour $\Delta -$ *Min TSP* a été résolue en 1992 (par la négative) dans [4] en utilisant des techniques de preuves interactives qui ont permis, depuis une dizaine d'années, une explosion des résultats de difficulté d'approximation.

Quasiment au même moment il a été montré ([36]) que *Min TSP*$_{1,2}$ (et donc aussi $\Delta -$ *Min TSP*) est APX-complet, c'est-à-dire complet dans la classe APX (problème admettant un algorithme à rapport constant, cf. section 8.2) pour des réductions préservant les schémas d'approximation. En d'autres termes, l'existence d'un schéma d'approximation pour ce problème permettrait de construire un tel schéma pour tout problème de la classe APX et donc que P=NP. Ce résultat est montré grâce à une réduction préservant les schémas d'approximation polynomiale du problème 3-SAT connu pour être APX-complet au problème *Min TSP*$_{1,2}$ qui est dans APX comme nous venons de le voir. Cette démarche pour montrer de

tels résultats est donc similaire à une preuve de NP-complétude en exploitant des réductions plus restrictives que les réductions de Karp (nous revenons sur ces notions en fin d'article, section 8.3). Ce résultat reste bien entendu valide pour le problème plus général $\Delta - \textit{Min TSP}$; le lecteur intéressé trouvera également une autre preuve de complétude de ce problème dans [27] (page 476). Le fait qu'il n'existe pas de schéma d'approximation polynomiale signifie qu'il existe une constante qu'aucun algorithme polynomial ne peut garantir. Depuis ce résultat, plusieurs bornes explicites d'un tel seuil ont été mises en évidence, notamment si P≠NP aucun algorithme polynomial ne peut garantir le rapport $129/128 - \varepsilon$ [34].

6. Le cas euclidien : schéma d'approximation polynomiale

Le cas euclidien $\ell_2 - \textit{Min TSP}$ est très naturel : les sommets sont des points de $\boldsymbol{R}^d$ et chaque arête (x, y) est pondérée par $\|x - y\|_2$. En fait, de nombreuses applications s'inscrivent dans ce cadre. Malheureusement le problème reste NP-difficile au sens fort [19]. Jusque récemment, l'approximation de ce cas particulier est restée relativement mystérieuse : d'une part, les résultats négatifs valides pour $\Delta - \textit{Min TSP}$ ne semblaient pas se généraliser au cas euclidien et d'autre part aucune amélioration significative n'était connue par rapport au cas métrique. Juste certains résultats spécifiques à ce cas étaient connus mais sans différenciation majeure. Nous mentionnons notamment en section 7 un algorithme de recherche locale pour lequel, du point de vue du rapport standard, le cas euclidien se démarque légèrement.

La question a été levée en 1996 par Arora ([1], intégré depuis à [2]) avec un premier PTAS (schéma d'approximation polynomiale) complété depuis par plusieurs améliorations [2, 30]. L'article [3] synthétise ces différents résultats et montre comment appliquer une démarche similaire à d'autres problèmes géométriques.

Théorème 6.1 [1]**.** — *$\ell_2 - \textit{Min TSP}$ (cas euclidien) admet un schéma d'approximation polynomiale.*

Preuve : (pour plus de détails, cf. [2, 3], [27] (page 578) et [41] (page 84).)

Les techniques utilisées s'appliquent en fait à de nombreux problèmes géométriques. La preuve de ce résultat, très technique, ne peut être reportée dans cet article. Dans le cadre de nos objectifs nous évoquons seulement les (très) grandes lignes de la démarche d'Arora, certains de ses ingrédients étant très classiques dans l'élaboration de schémas d'approximation.

L'origine de la démarche remonte en fait à des travaux de Karp en 1977 [26] ainsi qu'à un schéma d'approximation obtenu pour le cas planaire [20]. Les trois idées essentielles sont :

(1) la définition d'instances approchées par un procédé de « scaling and rounding » de sorte qu'approcher ces instances à $(1 + \varepsilon)$-près suffit pour approcher le problème initial,
(2) une discrétisation du problème limitant la recherche à un ensemble de solutions réalisables relativement réduit et contenant au moins une bonne solution du problème défini en (1),
(3) et enfin, la résolution par programmation dynamique du problème restreint défini en (2).

On fixe *a priori* $\varepsilon > 0$, l'objectif étant alors de concevoir un algorithme garantissant le rapport d'approximation $(1+\varepsilon)$. Nous nous plaçons ici dans le cadre $\boldsymbol{R}^2$ qui a en fait valeur de généralité.

Phase (1)

La première phase consiste à remarquer ([27]) qu'il suffit de considérer des instances pour lesquelles :

(a) les coordonnées des points (villes) sont de la forme $1+8k, k \in \boldsymbol{N}$;

(b) la distance entre deux villes est au plus $\frac{64n}{\varepsilon} + 16$.

En effet, étant donnée une instance de $\ell_2 - \mathit{Min\ TSP}$ définie par un ensemble $V \subset \boldsymbol{R}^2$, on note L la distance maximale entre deux points de V (villes). On définit alors une « instance approchée » V' en remplaçant chaque point $v = (v_1, v_2) \in V$ par le point $v' = (1 + 8\left\lfloor \frac{8n}{\varepsilon L} v_1 \right\rfloor, 1 + 8\left\lfloor \frac{8n}{\varepsilon L} v_2 \right\rfloor)$.

On se rend facilement compte, par simples manipulations de la norme que :

(i) V' satisfait les conditions (a) et (b) ;

(ii) toute solution réalisable pour V' de valeur λ' correspond dans V à une (au moins) solution de valeur $\lambda \leqslant \frac{\varepsilon L}{8n}(\lambda'/8 + \sqrt{2}n) \leqslant \frac{\varepsilon L}{8n}(\lambda'/8 + 2n)$;

(iii) de même en construisant une solution pour V' à partir d'une solution pour V on a $\beta(V') \leqslant 8\left(\frac{8n}{\varepsilon L}\beta(V) + 2n\right)$.

Notons que plusieurs points de V peuvent correspondre à un point de V'. Dans ce cas, pour recomposer une solution sur V à partir d'une solution sur V' (cas (ii)), tous les sommets de V se « projetant » sur un même sommet de V' sont visités consécutivement dans n'importe quel ordre. Enfin, les propriétés (ii), (iii) permettent d'établir (comme $\beta(V) \geqslant 2L$) qu'il suffit de garantir pour V' le rapport d'approximation $(1 + \varepsilon/2)$ pour garantir sur V le rapport $(1 + \varepsilon)$. Un schéma d'approximation sur V' correspond donc à un schéma d'approximation sur V. On se limite donc aux instances satisfaisant (a) et (b).

Phase (2)

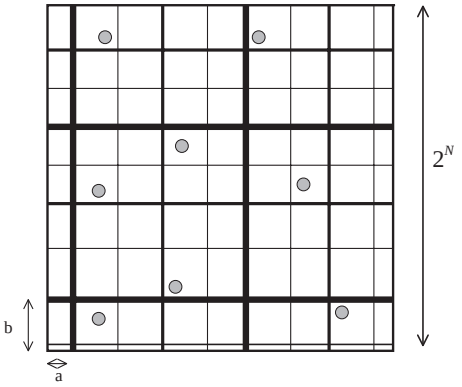
Pour une instance V' satisfaisant (a) et (b), quitte à translater le problème, on inscrit V' dans le carré $K = [0, 2^N] \times [0, 2^N]$ avec $N = \lceil log_2 L \rceil + 1$. Le carré est alors divisé récursivement en quatre, puis chaque quart en quatre et ainsi de suite pendant $N-1$ itérations. On définit ainsi un maillage de K correspondant à une grille qui passe par tous les points entiers à coordonnées paires dans K. Par hypothèse sur V', les villes à visiter sont à l'intérieur des zones ainsi définies et de plus le maillage les sépare : aucune zone ne contient plus qu'une ville.

Le processus de subdivision est organisé comme un arbre de degré 4 : la racine est K et chaque nœud correspond à un des carrés obtenus à une étape. Un carré de côté supérieur à 4 possède quatre fils dans l'arbre (ses quatre quarts). Les lignes de la grille peuvent être partitionnées en segments de différents niveaux : un segment de niveau s correspond à un côté d'un carré créé par subdivision d'un carré de niveau $s-1$. Ainsi, les segments de niveau i sont de longueur 2^{N-i}.

On fixe p un entier (choisi ultérieurement) et c une constante.

Pour chaque $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, on place lors de la division d'un carré de niveau i en quatre, un point au milieu du carré (intersection des lignes séparantes) et, sur chacun des quatre segments, on place $2^p - 1$ points répartis uniformément. On appelle ces points des « portes » que l'on va considérer comme les seuls points

de passage possibles d'une zone à l'autre de la grille. Sur une ligne de niveau i, l'espace entre deux portes est donc de 2^{N-i-p}. On dira qu'un tour est *sympathique* par rapport à cette grille s'il contient tous les points de V', ne franchit les lignes verticales ou horizontales de la grille qu'en des portes et ne passe pas plus de c fois dans chaque porte. L'idée est de limiter le recherche d'une bonne solution à ce type de tours.



Grille translatée de (a, b)

Malheureusement, il se peut qu'aucun tour sympathique ne garantisse un rapport $(1 + \varepsilon)$. Par contre, un tel tour existe en s'autorisant une translation du maillage d'un vecteur (a, b) à coordonnées entières paires (pour garder les villes au milieu des zones). Ce résultat constitue en fait le noyau de la démonstration.

L'idée de base est la suivante : soit un couple (a, b) et la grille associée, considérons un tour optimal et transformons-le pour le rendre sympathique en maîtrisant l'augmentation de sa longueur.

La transformation se fait en deux temps :

1) à chaque fois que le tour traverse une ligne de la grille on le dévie pour passer par la porte la plus proche ;
2) on applique ensuite une procédure permettant de réduire le nombre de passages dans chaque porte à au plus c.

On évalue alors l'augmentation de la longueur par un argument probabiliste car il est plus simple d'évaluer l'espérance de l'augmentation lorsque a et b suivent une distribution uniforme sur l'ensemble des positions possibles.

Considérons d'abord l'augmentation due à la déviation par des portes (transformation 1)) : pour chaque déviation, le détour est au plus la distance séparant deux portes sur la ligne traversée, à savoir 2^{N-i-p} au niveau i. Par ailleurs, la probabilité que la ligne rencontrée soit de niveau i est 2^{i-N} sauf pour $i = 1$ pour lequel la probabilité est 2^{2-N} (effet de bord impliquant qu'il faut comptabiliser, dans la position originelle ($a = b = 0$) le bord gauche et le bord bas du carré global comme lignes de niveau 1). L'espérance d'augmentation est donc $N2^{-p}$ pour chaque croisement. Par ailleurs, comme les villes ne se trouvent pas sur la grille, lors d'un parcours entre deux villes distantes de s, on traverse au plus $\sqrt{2}/2s \leqslant s$ fois les lignes de la grille (comparaison entre normes ℓ_1 et ℓ_2). Donc, l'espérance d'augmentation due à la transformation 1) ne dépasse pas $N\beta(V')/2^p$.

La transformation 2) est un peu plus compliquée mais un calcul similaire conduit à une augmentation moyenne majorée par une expression du type $O(\beta(V')/c)$. Au total, il suffit de choisir p et c pour que l'augmentation moyenne ne dépasse pas $\varepsilon\beta(V')$. Les expressions de p et c ne dépendent que de ε.

En fait, en augmentant p et c on peut augmenter la proportion de couples (a, b) pour lesquels il existe un tour sympathique de valeur au plus $(1 + \varepsilon)\beta(V')$. Ceci aurait de l'importance pour un algorithme probabiliste. Mais ici, l'analyse suffit pour conclure qu'il existe au moins un couple (a, b) pour lequel un tel tour existe.

Pour conclure la preuve, il reste à montrer que, pour chaque couple (a, b) à essayer, un tour sympathique optimal peut être trouvé en temps polynomial. Il suffira alors de couvrir tous les couples possibles et de garder le meilleur tour sympathique rencontré.

Phase (3)

En fait, tous les tours sympathiques peuvent être énumérés en temps polynomial par programmation dynamique des feuilles vers la racine dans l'arbre des subdivisions. La complexité totale de l'étape de programmation dynamique est $O(n(logn)^{O(1/\varepsilon)})$. Ceci devant être fait pour chaque couple (a, b), la complexité globale est $O(n^3(logn)^{O(1/\varepsilon)})$. □

La preuve est identique dans le cas de dimensions supérieures malgré une augmentation très rapide de la complexité à cause de l'énumération des vecteurs de translation de la grille. Par contre, le résultat ne se généralise pas au cas de normes l_p, $p > 2$ [7].

Au-delà de PTAS ?

La question qui reste sur les lèvres après la présentation du schéma d'approximation polynomiale est de savoir si on peut encore faire mieux. Certains travaux plus récents ont pour objectif de diminuer la complexité de l'algorithme d'Arora, notamment pour éviter l'énumération des couples (a, b). Néanmoins, il convient de remarquer que toutes les complexités des schémas d'approximation pour ce problème font intervenir un terme du type $n^{1/\varepsilon}$, ce qui signifie que la complexité n'est polynomiale qu'à ε fixé.

C'est ce point qui différentie un schéma d'approximation complet d'un schéma classique. Le premier a une complexité maîtrisée même par rapport à $1/\varepsilon$. Dans ce cas, un rapport d'approximation de type $(1 + 1/P(n))$ où P est un polynôme en la taille n de l'instance, peut être garanti. La réponse à la question « qu'y a-t-il à espérer au-delà d'un schéma d'approximation ? » est donc : « un schéma d'approximation complet » qui correspond, pour un problème NP-difficile, au cas le plus favorable du point de vue de l'approximation.

Du point de vue d'une résolution pratique pour un problème réel, un schéma complet correspond vraiment à une alternative intéressante à une résolution exacte éventuellement hors d'atteinte. Malheureusement, très peu de problèmes (tel que le problème de sac à dos par exemple) admettent un tel schéma complet. En effet, différents résultats négatifs généraux ne laissent que très peu d'espace au sein de la classe FPTAS. L'un de ces résultats [7] est qu'*un problème NP-difficile à valeurs entières et polynomialement bornées ne peut admettre de schéma complet*. La justification de ce résultat consiste simplement à remarquer que dans le cas contraire un rapport du type $1/P(n)$ permettrait d'imposer entre la valeur approchée et la

valeur optimale une différence inférieure à l'unité et donc nulle, ce qui ne peut évidemment pas arriver si le problème est NP-difficile et si P≠NP.

Dans le cas du voyageur de commerce, ce résultat s'applique : le cas euclidien étant NP-difficile au sens fort, la restriction pour laquelle les coûts sont polynomialement bornés reste difficile. Or cette restriction vérifie les conditions du théorème et n'admet donc pas de schéma d'approximation complet.

7. Un autre point de vue : approximation différentielle

Du point de vue de l'approximation différentielle, la situation est radicalement différente par rapport au cas de la mesure classique. Si nous comparons déjà le problème de minimisation et celui de maximisation (les poids sont toujours supposés positifs), une première différence apparaît. En effet, du point de vue standard, les résultats très pessimistes obtenus pour la version minimisation générale (section 4) ne sont pas valables pour la version maximisation qui admet (coûts positifs sur les arêtes) un rapport d'approximation constant. Une manière très simple de s'en convaincre est de considérer le cas d'un nombre pair de sommets : il suffit de considérer un couplage maximum et de le compléter en un cycle hamiltonien. Un cycle optimal étant la réunion de deux couplages, la solution ainsi construite garantit au moins le rapport $1/2$. Le cas impair est similaire ; pour plus de détails et une amélioration de ce résultat on pourra se référer à [7].

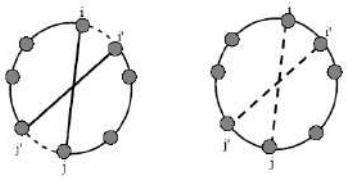
Par contre, du point de vue différentiel, ces deux problèmes sont équivalents [32, 31]. Rappelons en effet que le rapport différentiel est stable par transformation affine de l'objectif. Or il suffit de remplacer la valeur $c(u)$ de chaque arête u par $(c_{max} - c(u))$ (c_{max} est la valeur maximum des arêtes) pour passer du problème de minimisation au problème de maximisation (poids positifs). Le rapport différentiel n'est pas modifié au cours d'une telle transformation. Notons par contre que l'approximation différentielle du problème Max TSP ne se déduit pas directement de l'approximation standard comme cela se passe souvent pour les problèmes de maximisation qui ont souvent une pire valeur nulle. Ce n'est pas le cas pour le voyageur de commerce. Avant d'étudier un algorithme pour l'approximation différentielle de Min TSP et de Max TSP, remarquons une autre différence majeure entre les deux mesures d'approximation pour ce problème : dans le cas classique, nous avons mis en évidence une différence importante entre le cas général et le cas métrique. Or il suffit d'ajouter à chaque arête la valeur maximum c_{max} pour garantir les inégalités triangulaires ; le rapport différentiel étant insensible à cette transformation, il n'y a de ce point de vue aucune différence entre la version générale et la version métrique.

Cette petite introduction illustre bien combien les approches classique et différentielle peuvent s'avérer différentes, ce qui les rend complémentaires. Les problèmes Min TSP et Max TSP se prêtent bien à l'approximation différentielle. Nous présentons deux algorithmes à rapport différentiel constant : le premier, décrit dans [32], exploite une méthode de recherche locale tandis que le second, issu de [31], améliore le rapport d'approximation en exploitant une technique de 2-couplage (cf. section 5.2).

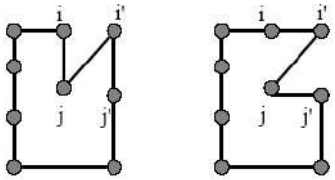
7.1 Algorithme 2-opt et rapport différentiel

La recherche locale compte parmi les premières techniques à avoir été utilisées pour s'attaquer au problème du voyageur de commerce. Un algorithme de recherche

locale est défini par une notion de voisinage de chaque solution réalisable. Partant d'une solution réalisable (fournie par exemple par un autre algorithme) on explore le voisinage de chaque solution courante pour trouver une solution strictement meilleure. Le processus s'arrête lorsqu'une solution localement optimale (*i.e.* optimale parmi son voisinage) est atteinte. Dans le cas du voyageur de commerce, en voyant une solution réalisable comme un ensemble d'arêtes, une notion naturelle de voisinage est de considérer, pour un k fixé, toutes les solutions pouvant se déduire d'une solution courante en ne modifiant que k arêtes, c'est-à-dire en remplaçant p arêtes par p autres, $p \leqslant k$ (on parle de k-échange). En d'autres termes, le voisinage d'une solution contient toutes les solutions réalisables à distance symétrique au plus $2k$ de la solution courante. L'algorithme de recherche locale exploitant ce type de voisinage est appelé k−opt. Il a fait l'objet de nombreux travaux (on pourra notamment se référer à [12, 29]) et constitue la base de nombreuses heuristiques avec des résultats satisfaisants.



Exemples de 2-échanges



Pourtant, du point de vue de l'approximation classique, k−opt n'offre pas de bonnes garanties. Il reste très sensible au choix de la solution initiale de sorte que, même dans le cas de poids polynomialement bornés, aucun rapport $\alpha > 1/n$ ne peut être garanti par k−opt initialisé au hasard [7] (ch. 10 page 333). La seule borne connue est $O(\sqrt{n})$ pour le cas euclidien ([7] (ch. 10 page 335) et [12]).

Un autre problème des techniques de recherche locale pour le problème de voyageur de commerce est qu'elles ne sont pas polynomiales si on ne fait aucune hypothèse sur les valeurs : pour l'algorithme k−opt, chaque voisinage est de taille polynomiale mais la profondeur de recherche peut s'avérer exponentielle. C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous nous plaçons dans le cas où les valeurs des arêtes sont bornées par un polynôme (cas polynomialement borné). Toute recherche locale ne devra alors explorer qu'un nombre polynomial de voisinages, eux-mêmes pouvant être décrits en temps polynomial. Toutefois, la complexité de la méthode mise à part, l'analyse reste valide dans le cas général.

Nous présentons une analyse (cf. [32]) pour le rapport différentiel de l'algorithme 2−opt ci-après.

```
2-opt
input : Graphe complet arêtes-valué ;
output : Cycle hamiltonien Γ ;
   Initialiser Γ par une solution initiale quelconque ;
   Définir un sens de parcours sur Γ ;
   Tant qu' il existe 2 arêtes (i,j) et (i'j') dans Γ
       (orientées dans cet ordre par rapport au sens
       choisi)
       telles que c(ij) + c(i'j') > c(ii') + c(jj') faire
                        Γ ← Γ \ {(ij),(i'j')} ∪ {(ii'),(jj')} ;
```

Dans l'algorithme, l'orientation ne sert qu'à garantir que la solution $\Gamma\setminus\{(ij),(i'j')\}\cup\{(ii'),(jj')\}$ est bien réalisable.

Analyse différentielle de `2-opt`

Il est clair que l'algorithme finit puisque chaque étape améliore strictement la valeur. En outre, les hypothèses sur les pondérations garantissent que le nombre de valeurs réalisables est polynomial et donc que l'algorithme finit en temps polynomial. La solution construite est clairement réalisable et aucun 2-échange ne permet d'améliorer la valeur.

La principale différence dans le cas d'une analyse sous le rapport différentiel est la gestion de la pire valeur. En effet, ce cadre suppose non seulement l'évaluation de la valeur optimale et de la valeur approchée ou au moins leur comparaison comme dans le cas d'une analyse classique, mais nécessite aussi l'évaluation de la pire valeur. Dans certains cas, cette dernière est très simple à évaluer. L'exemple du problème de voyageur de commerce est intéressant de ce point de vue car l'évaluation du pire est également un problème difficile (il s'agit de Max TSP pour le problème de minimisation Min TSP et réciproquement). Dans ce cas, la pire valeur doit être gérée comme la valeur optimale par la mise en évidence de bornes. L'analyse très simple qui suit illustre pleinement une démarche classique en approximation différentielle lorsqu'on ne dispose pas d'expression directe de la pire valeur. Étant données une solution optimale fixée et la solution approchée construite par l'algorithme, on met en évidence une troisième solution réalisable construite à partir des deux premières et qui permet de minorer la pire valeur.

Numérotons les sommets dans l'ordre dans lequel ils sont visités par la solution approchée Γ à partir d'un sommet choisi comme origine, une orientation de Γ étant fixée. Comme dans l'analyse de l'algorithme `Plus-Proche-Voisin` (section 4.1), on note $i\oplus 1$ (resp. $i\ominus 1$)) le successeur (resp. le prédécesseur) modulo n de i. Ainsi, pour tout sommet i, $(i, i\oplus 1)$ est une arête de Γ. Fixons de même une solution optimale Γ^* et notons s^* la permutation associée ($s^*(i)$ désigne le successeur de i sur le cycle Γ^* sur lequel a été défini un sens de parcours).

Pour chaque sommet i, on considère deux arêtes particulières de Γ : $(i, i\oplus 1)$ et $(s^*(i), s^*(i)\oplus 1)$. Un 2-échange sur Γ ne pouvant améliorer la valeur, on a :

$$c(i, i\oplus 1) + c(s^*(i), s^*(i)\oplus 1) \leqslant c(i, s^*(i)) + c(i\oplus 1, s^*(i)\oplus 1). \tag{8}$$

Lorsque i décrit $\{1,\dots,n\}$, $(i, i\oplus 1)$ et $(s^*(i), s^*(i)\oplus 1)$ décrivent les arêtes de Γ. De même $(i, s^*(i))$ décrit les arêtes de Γ^*.

Remarquons par ailleurs que l'ensemble des arêtes $(i \oplus 1, s^*(i) \oplus 1)$ est un cycle hamiltonien Γ'. On en déduit en sommant la relation (8) pour tout i :

$$2\lambda(I) = 2c(\Gamma) \leqslant c(\Gamma^*) + c(\Gamma') \leqslant \beta(I) + \omega(I). \tag{9}$$

Le rapport différentiel étant croissant en ω pour un problème de minimisation, on en déduit :

$$\frac{\omega(I) - \lambda(I)}{\omega(I) - \beta(I)} \geqslant \frac{2\lambda(I) - \beta(I) - \lambda(I)}{2\lambda(I) - \beta(I) - \beta(I)} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

d'où le résultat suivant :

Théorème 7.1 [32]**.** — *2-opt garantit le rapport différentiel* $1/2$*. Tout sous-problème de Min TSP pour lequel 2-opt finit en temps polynomial est* $1/2$*-approché du point de vue différentiel.*

Dans l'article [32], différents cas garantissant une complexité polynomiale pour l'algorithme 2-opt sont discutés. Toutefois, le résultat que nous présentons maintenant ([31]) améliore le rapport $1/2$ et n'a aucune restriction quant à la forme des pondérations.

7.2 2-couplage et rapport différentiel

Assembler-Cycles (Cas k pair)
input : Graphe complet arêtes valué ;
output : Cycle hamiltonien Γ ;
Construire $M = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k)$, un 2-couplage parfait de valeur minimum ;
Si $k = 1$ **Alors** $T \leftarrow M$
Sinon Si k est pair **Alors**
Pour tout $i \neq k$ sélectionner $x_1^i, x_2^i, x_3^i, x_4^i$ consécutifs sur Γ_i ;
Sélectionner $x_0^k, x_1^k, x_2^k, x_3^k$ consécutifs sur Γ_k ;
$S_1 \leftarrow \{(x_1^1, x_2^1), \ldots (x_1^{k-1}, x_2^{k-1}), (x_0^k, x_1^k)\}$;
$E_1 \leftarrow \{(x_1^1, x_1^2), (x_2^2, x_2^3), \ldots, (x_1^{2i+1}, x_1^{2i+2}), (x_2^{2i+2}, x_2^{2i+3}), \ldots, (x_1^{k-1}, x_1^k), (x_0^k, x_2^1)\}$;
$T_1 \leftarrow ((\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \ldots \cup \Gamma_k) \setminus S_1) \cup E_1$;

$S_2 \leftarrow \{(x_2^1, x_3^1), \ldots (x_2^{k-1}, x_3^{k-1}), (x_1^k, x_2^k)\}$;
$E_2 \leftarrow \{(x_2^1, x_2^2), (x_3^2, x_3^3), \ldots, (x_2^{2i+1}, x_2^{2i+2}), (x_3^{2i+2}, x_3^{2i+3}), \ldots, (x_2^{k-1}, x_2^k), (x_1^k, x_3^1)\}$;
$T_2 \leftarrow ((\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \ldots \cup \Gamma_k) \setminus S_2) \cup E_2$;

$S_3 \leftarrow \{(x_3^1, x_4^1), \ldots (x_3^{k-1}, x_4^{k-1}), (x_2^k, x_3^k)\}$;
$E_3 \leftarrow \{(x_3^1, x_3^2), (x_4^2, x_4^3), \ldots, (x_3^{2i+1}, x_3^{2i+2}), (x_4^{2i+2}, x_4^{2i+3}), \ldots, (x_3^{k-1}, x_3^k), (x_2^k, x_4^1)\}$;
$T_3 \leftarrow ((\Gamma_1 \cup \Gamma_2, \ldots \cup \Gamma_k) \setminus S_3) \cup E_3$;

Si k est impair **Alors** ...

$\Gamma \leftarrow argmin[c(T_1), c(T_2), c(T_3)]$

Le second algorithme reprend la technique de 2-couplage utilisée pour l'approximation classique de *Min* $TSP_{1,2}$ (section 5.2) en l'adaptant en vue d'une analyse différentielle. Nous explicitons l'algorithme et son analyse dans le cas où le nombre de cycles du 2-couplage est pair, le cas impair est similaire dans la construction et dans la preuve.

Analyse différentielle de l'algorithme `Assembler-Cycles`

À partir du 2-couplage M, l'algorithme construit trois solutions réalisables (tours) notées T_1, T_2 et T_3 et choisit ensuite pour Γ la meilleure. Comme le montre l'analyse ci-après, cette construction permet non seulement de déterminer la solution Γ, mais aussi, grâce aux « mauvaises parties » des solutions T_1, T_2 et T_3, d'exhiber une quatrième solution Γ' suffisamment éloignée de Γ. Il s'agit donc de déterminer conjointement deux solutions pour le problème, une « bonne » et l'autre « mauvaise ».

Notons $M = \cup_{i=1}^{k} \Gamma_i$ le 2-couplage de valeur $c(M)$. Chacun des trois tours T_i construits par l'algorithme est un 2-couplage parfait particulier, donc est de coût au moins $c(M)$ (valeur d'un couplage minimum). On note D_i la différence $D_i = c(T_i) - c(M) \geqslant 0$ qui correspond à ce qu'on perd pour passer de M à une solution réalisable (assemblage des cycles). On a alors :

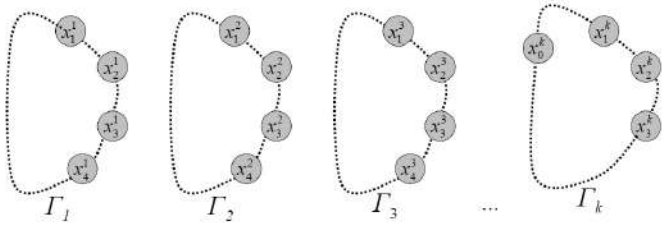
$$c(\Gamma) \leqslant \frac{1}{3}(c(T_1) + c(T_2) + c(T_3)) = c(M) + \frac{1}{3}(D_1 + D_2 + D_3). \tag{11}$$

Venons-en maintenant à l'évaluation (minoration) de la pire valeur. Pour cela on remarque que :

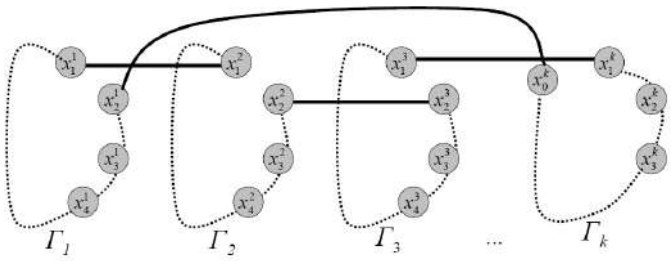
$$\Gamma' = [M \setminus (S_1 \cup S_2 \cup S_3)] \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$$

est un tour réalisable (cf. figures ci-dessous). On en déduit :

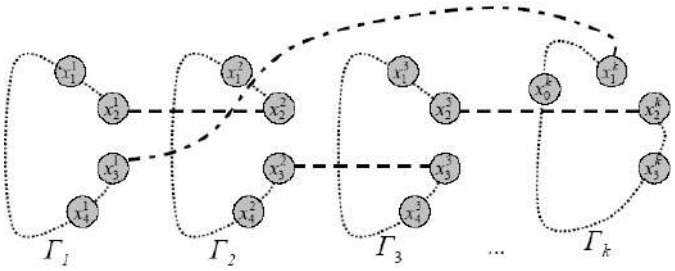
$$\omega(I) \geqslant c(\Gamma') = c(M) + (D_1 + D_2 + D_3). \tag{12}$$



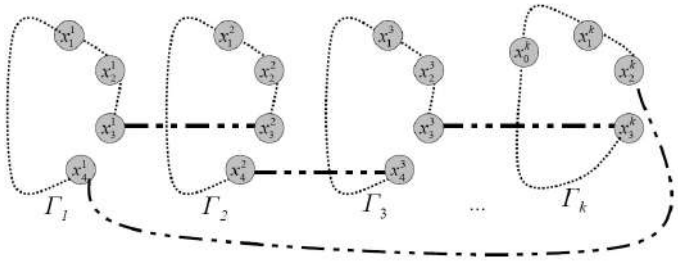
Le 2-couplage parfait M pour $k = 4$



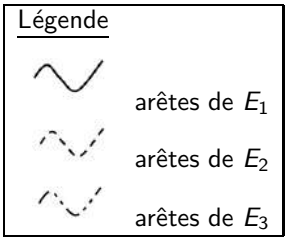
Le tour T_1 pour $k = 4$

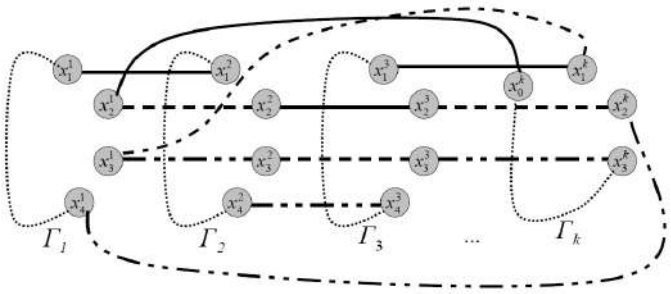


Le tour T_2 pour $k = 4$



Le tour T_3 pour $k = 4$





Le tour Γ' pour $k = 4$

Par ailleurs, M étant une solution optimale, on a :

$$\beta(I) \geqslant c(M). \tag{13}$$

En combinant les relations (11), (12) et (13), on obtient, pour I instance de Min TSP,

$$c(\Gamma) \leqslant \frac{1}{3}\omega(I) + \frac{2}{3}\beta(I) \Leftrightarrow \frac{c(\Gamma) - \omega(I)}{\beta(I) - \omega(I)} \geqslant \frac{2}{3} \cdot$$

Cette analyse permet donc d'établir le résultat suivant :

Théorème 7.2 [31]**.** — *L'algorithme* `Assembler-Cycles` *garantit le rapport différentiel 2/3 pour Min TSP ; par équivalence, Max TSP admet une 2/3-approximation du point de vue du rapport différentiel.*

En outre, l'analyse est optimale en ce sens qu'on peut exhiber des instances pour lesquelles ce rapport est atteint. Dans l'article [31], il est également prouvé que pour les problèmes *Min TSP*$_{1,2}$ et *Max TSP*$_{1,2}$, le rapport 3/4 peut être garanti par un algorithme du même type. De plus, ces deux problèmes et donc *a fortiori* *Min TSP* et *Max TSP* n'admettent pas de schéma d'approximation polynomiale pour le rapport différentiel ; des bornes explicites sont même proposées.

8. Conclusion : méthodes et enjeux de l'approximation

Conformément aux objectifs que nous nous étions fixés, la sélection de résultats sur l'approximation de Min TSP permet de se faire une première idée de ce domaine. Bien entendu, nous n'en avons parcouru qu'un champs très restreint. Toutefois, ces exemples illustrent assez bien les différents types de résultats d'approximation que l'on peut escompter ainsi que les techniques les plus simples permettant d'y mener. Pour approfondir les possibilités de résolution efficace de ce problème, le lecteur intéressé pourra en particulier se référer à [37]. En guise de conclusion, nous pouvons tout d'abord dégager quelques idées générales sur les techniques et les niveaux d'approximation les plus courants. Puis, dans un second temps, ceci nous permettra d'évoquer les principaux enjeux du domaine ainsi que la face immergée de l'iceberg.

8.1 Les types d'algorithmes : quelques grands classiques

Du point de vue des méthodes, ce tour d'horizon fournit des exemples de différentes techniques algorithmiques très courantes en approximation, notamment :

- **Algorithme glouton** : de très nombreux résultats d'approximation reposent sur ces méthodes simples qui allient souvent pertinence et facilité d'analyse. Sans doute les premiers algorithmes à regarder face à un nouveau problème.
- **Recherche locale** : largement utilisée en approximation et pour des heuristiques. La classe GLO regroupe les problèmes pour lesquels un algorithme de recherche locale permet de garantir une approximation constante. Une classe similaire est définie pour l'approximation différentielle (D-GLO) (cf. par exemple [6]), l'analyse de 2−opt indique que Min TSP est dans cette classe ainsi que Max TSP par une adaptation immédiate de l'algorithme.
- Utilisation d'un **problème relaxé** : ce type d'approche est très répandu, par exemple pour la programmation linéaire en nombres entiers ; l'idée est de trouver un problème relaxé (on ajoute des solutions réalisables en retirant des contraintes) plus facile à résoudre. Une solution relaxée risque de ne pas être réalisable pour le problème d'origine mais peut parfois être exploitée pour trouver une (bonne) solution du problème initial. Par ailleurs la valeur optimale du relaxé, lorsqu'on peut la déterminer, fournit une borne (inférieure dans le cas de la minimisation) pour le problème initial, les méthodes de recherche arborescente utilisent très souvent cette propriété. Dans le cadre combinatoire pour Min TSP, l'algorithme de Christofides ou les algorithmes à base de 2-couplage peuvent être vus comme des techniques de relaxation. Le problème relaxé est ici combinatoire : l'arbre minimum pour l'algorithme de Christofides et problème de 2-couplage dans l'autre exemple. Il s'agit dans ce cas de relaxations polynomiales, la technique consiste alors à déterminer une solution relaxée et la transformer en solution réalisable en maîtrisant la détérioration de la valeur. Dans le cadre de l'approximation, l'intérêt d'une telle démarche est de pouvoir exploiter pour l'analyse au pire cas, la valeur optimale du relaxé comme borne de la valeur optimale du problème initial. Les deux exemples rencontrés l'illustrent bien. Pour n'en citer qu'un autre, le plus que célèbre algorithme de couplage pour la couverture de sommets (rapport d'approximation 2) ([19], page 134) est de ce type.
- Enfin, dans le cas du schéma d'approximation polynomiale, les techniques d'**arrondi** et de **programmation dynamique** sont très courantes. L'exemple classique du schéma d'approximation polynomiale complet ([24]) pour le problème de sac à dos est notamment conçu sur la même démarche : définition d'un problème approché et résolution de ce dernier par programmation dynamique (cf. [24] ou par exemple [41], page 69 ou encore, pour plus de détails [7], page 69).

Bien entendu, les techniques classiques d'approximation ne s'arrêtent pas là. Mentionnons notamment les techniques à base de programmation mathématique, en particulier linéaire ou quadratique qui sont à classer au registre des méthodes de relaxation et qui donnent d'excellents résultats pour certains problèmes (notamment pour le problème de stabilité dans les graphes). Le lecteur intéressé trouvera

dans [23] ou encore dans [7] (ch. 2) des exemples variés des principales méthodes, notamment pour celles que nous n'avons pas abordées.

8.2 Les classes d'approximation : structurer NPO

Les résultats que nous avons mentionnés couvrent à peu près toutes les situations que l'on peut rencontrer. Nous avons vu des résultats négatifs, déterminant une limite aux possibilités d'approximation d'un problème, et des résultats positifs correspondant à la donnée d'un algorithme et de son analyse au pire cas. Les types d'approximation que nous avons rencontrés sont très variés : approximation à rapport constant, schéma d'approximation et approximations dépendant de l'instance. L'ensemble de ces résultats pouvant être décliné pour l'un ou l'autre des rapports d'approximation évoqués et il n'est pas exclu de définir de nouvelles mesures.

La diversité des résultats d'approximation et la possibilité de les différencier par des résultats négatifs expliquent en grande partie l'intérêt pour ce domaine et détermine son enjeu principal. En effet, souvenons-nous de la définition de la classe NP-complet [19] : il s'agit d'une classe d'équivalence pour les réductions polynomiales. Pour les problèmes d'optimisation dont la version décision est NP-complète, ceci signifie que tous ces problèmes sont polynomialement équivalents tant que l'on s'intéresse à leur résolution exacte.

Par contre, du point de vue de l'approximation, ils s'avèrent non équivalents. Ainsi, l'approximation polynomiale permet-elle de distinguer une structure au sein de la classe NPO (problèmes d'optimisation dont la version décisionnelle est NP) et, par voie de conséquence, une structure au sein de NP, au moins pour l'ensemble des versions décisionnelles de problèmes d'optimisation. Le fait d'utiliser en parallèle deux rapports d'approximation met même à notre disposition une structure bidimensionnelle de NPO. Les nombreux résultats d'approximation différentielle (cf. notamment [15, 16, 21, 31, 32]) ont permis de mettre en évidence des situations très variées dont les quelques exemples décrits ici ne peuvent rendre compte. Ces derniers montrent néanmoins un exemple de problème qui peut être approché par un rapport constant dans le cadre différentiel et pas dans le cadre classique. Des situations symétriques ont également été mises en évidence (ainsi la couverture de sommets, 2-approchée dans le cadre classique, n'admet pas d'approximation constante dans le cadre différentiel). Dans d'autres cas, les comportements du point de vue de chaque rapport sont comparables de sorte que les résultats actuellement connus permettent de décrire de nombreuses combinaisons possibles entre l'approximation classique et l'approximation différentielle d'un même problème. Cette gamme de résultats valide a posteriori chacune des deux approches qui apparaissent comme complémentaires et chacune porteuse d'information. Ainsi, NPO peut être décomposé, pour chaque rapport d'approximation en différents niveaux d'approximation (représentés en fin de section), le préfixe « D » faisant allusion au cadre différentiel :

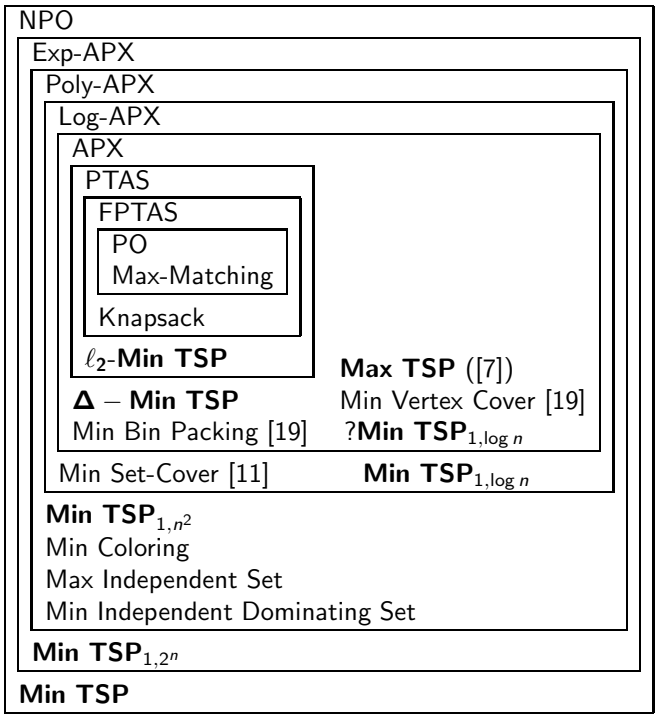
APX (DAPX) : La classe des problèmes admettant un algorithme à rapport constant (resp. rapport différentiel).
PTAS (DPTAS) : La classe des problèmes admettant un schéma d'approximation polynomiale (resp. schéma différentiel).
FPTAS (FDPTAS) : La classe des problèmes admettant un schéma d'approximation polynomiale complet (resp. schéma différentiel complet).

Log-APX (Log-DAPX) : La classe des problèmes admettant un algorithme à rapport logarithmiquement borné (resp. rapport différentiel). En fait, la question de trouver un problème naturel dans la classe Log-DAPX reste ouvert.
Poly-APX (Poly-DAPX): La classe des problèmes admettant un algorithme à rapport polynomialement borné (resp. rapport différentiel).
Exp-APX (Exp-DAPX) : La classe des problèmes admettant un algorithme à rapport exponentiel (resp. rapport différentiel).

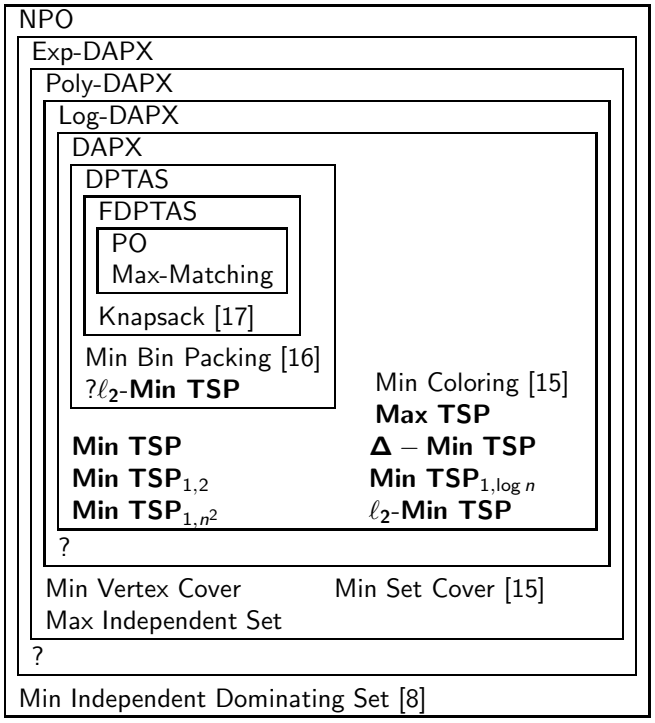
Cette classification peut être raffinée à volonté en considérant des classes de fonctions intermédiaires. Dans le cadre différentiel, la classe 0-DAPX est composée de problèmes pour lesquels aucun rapport d'approximation différentielle ne peut être établi ; bref ... des monstres parmi lesquels pourtant des problèmes naturels et d'apparence bénigne [6] !

Nous avons représenté ci-après la structure de NPO suivant les deux rapports d'approximation. Nous y avons placé, en gras, les problèmes dont il a été question dans cet article, et en non-gras quelques exemples très classiques d'autres problèmes. Nous rappelons rapidement leur définition intuitive (pour de plus amples détails, cf. [7]) :
Max Matching : déterminer dans un graphe un couplage (ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes) de cardinal maximum. Ce problème est polynomial (cf. par exemple [27]).
Max Independent set : déterminer dans un graphe un stable (ensemble de sommets deux à deux non liés par une arête) de cardinal maximum.
Min Coloring : colorier les sommets d'un graphe avec un nombre minimum de couleurs de sorte que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur (partition en stables).
Min Bin Packing : ranger des objets de taille inférieure à 1 dans un minimum de boîtes, chacune de capacité 1.
Min Set Cover : étant donné un système d'ensembles couvrant un ensemble de base E, déterminer un sous-système de cardinal minimum couvrant E.
Min Vertex Cover : déterminer, dans un graphe, une couverture de sommets (ensemble de sommets touchant toutes les arêtes, *i.e.* le complémentaire d'un stable) de cardinal minimum.
Min/Max Knapsack : programmation linéaire à une contrainte.
Min Independent Dominating Set : déterminer dans un graphe un stable maximal (pour l'inclusion) de cardinal minimum.
Les « ? » correspondent à des questions, non nécessairement difficiles mais pour lesquelles il n'y a pas encore, à ma connaissance, de réponse satisfaisante (notamment la connaissance de problèmes naturels pour les classes qui apparaissent vides sur les schémas ci-après).

Enfin, vous remarquerez des problèmes étranges dans ce schéma, à savoir *Min* $TSP_{1,\log n}$, *Min* TSP_{1,n^2} et *Min* $TSP_{1,2^n}$, les versions de *Min TSP* pour lesquelles les poids ne peuvent prendre respectivement que les valeurs 1 ou $\log n$, 1 ou n^2 et 1 ou 2^n, n étant l'ordre du graphe. Ces problèmes ne sont évidemment pas naturels. Leur rôle dans la hiérarchie est de montrer combien, dans le cas du rapport standard, les résultats dépendent des poids alors que cela n'est pas vrai dans le cas du rapport différentiel. Notons enfin qu'étudier l'approximation différentielle de $\ell_2 - $ *Min TSP* reste une question intéressante. Notons enfin que dans les figures qui suivent ce dernier problème apparaît en italique pour signifier que l'appartenance à NP n'est pas connue.



Structure de NPO (rapport d'approximation standard)



Structure de NPO (rapport d'approximation différentiel)

8.3 Réductions en approximation

Structurer NPO est sans doute l'un des principaux enjeux de l'approximation qui s'inscrit ainsi dans le prolongement direct de la théorie de la complexité. On comprend mieux alors les règles que ce domaine s'impose et qui peuvent sembler trop restrictives dans le cadre d'une recherche de bonnes solutions. Pourquoi se restreindre au cadre polynomial ? Pourquoi imposer des garanties au pire cas qui, souvent s'avèrent très pessimistes par rapport au comportement réel des algorithmes ? Une réponse est que, sans cadre strict on ne peut espérer de résultats structurels, notamment des résultats négatifs (de difficulté) qui permettent de séparer des classes. Ainsi, la question devient : « pourquoi ne pas choisir d'autres règles ? » Tout à fait ! L'approximation est un exemple de compromis complexité/qualité directement inspiré de la théorie de la complexité mais d'autres compromis peuvent être (et parfois sont) étudiés. Autant de travaux complémentaires au cadre que nous venons de voir. Pour n'en citer qu'un exemple, certains travaux ne s'intéressent qu'au cadre des complexités très faibles, notamment linéaires. La séparation entre polynomial et non-polynomial devient alors linéaire/non linéaire [14]. Se pose alors notamment la question de l'approximation en temps linéaire de problèmes polynomiaux.

Dans la logique de la théorie de la complexité apparaît la question de *réductions en approximation*. En effet, la structure de NPO du point de vue de l'approximation montre que les réductions polynomiales [25] ne préservent pas les propriétés d'approximation. Il s'agit donc de définir des réductions plus restrictives qui permettent de transférer d'un problème à un autre des résultats d'approximation. Nous avons implicitement rencontré de telles réductions. Dans le cadre classique, les résultats de difficulté d'approximation de Min TSP sont obtenus par réduction. De même, nous avons évoqué l'équivalence, du point de vue du rapport différentiel, des versions maximisation et minimisation de TSP, là encore il s'agit de réductions. L'idée est toujours la même : à partir d'une instance d'un problème A dont on cherche une approximation, on construit une (ou plusieurs) instance(s) d'un problème B dont l'approximation a déjà été étudiée de telle sorte que toute solution approchée de l'instance (ou des instances) de B peut (peuvent) être convertie(s) en une solution approchée pour l'instance de A en maîtrisant l'évolution du rapport d'approximation. Tout résultat d'approximation de B peut alors se transférer (éventuellement sous une autre forme) en un résultat sur A et de même tout résultat de difficulté d'approximation sur A donne lieu à un résultat de difficulté d'approximation pour B. On dit ici que *A se réduit (en approximation) à B*. Le lecteur intéressé par de telles transformations peut par exemple consulter [7] (ch. 8). Dans le cadre différentiel, de telles réductions existent [15]. Certaines même permettent de lier les deux cadres, classique et différentiel. Ainsi, par exemple, dans [16], une réduction de ce type nous permet d'obtenir un schéma d'approximation différentiel pour le Bin Packing à partir de l'approximation classique de ce même problème. En fait, toutes les combinaisons sont intéressantes à regarder. De nombreux résultats d'approximation actuels sont obtenus par de tels outils.

Enfin, à l'image des résultats de NP-complétude, les réductions en approximation donnent lieu à des résultats de complétude au sein des classes d'approximation. Ainsi par exemple, le résultat d'APX-complétude que nous avons mentionné pour *Min TSP*$_{1,2}$ signifie que tout problème de la classe APX se réduit à *Min TSP*$_{1,2}$

par une réduction préservant les schéma d'approximation. Ainsi, un schéma pour *Min* $TSP_{1,2}$ serait immédiatement transformé en un schéma pour tout problème d'APX. Du point de vue structurel, la complétude permet, au sein d'une classe (APX dans notre exemple) de distinguer ce que l'on peut considérer comme les problèmes les plus difficiles (au sens de l'approximation) de la classe. Le lecteur intéressé pourra se référer, par exemple à [7] (ch. 8) pour le cadre classique et à [6] pour de premiers résultats de complétude dans le cadre différentiel.

8.4 Enjeux

À l'issue de ce bref aperçu du domaine des algorithmes polynomiaux d'approximation, je souhaiterais conclure en rappelant les deux principaux enjeux, selon moi, de ce domaine et faire quelques remarques sur les différents types de résultats qu'il recouvre.

Le premier enjeu reste la possibilité de résoudre des problèmes difficiles par des algorithmes à la fois polynomiaux et offrant des garanties absolues (valables pour toute instance) d'approximation. À ce titre, il faut voir cet axe de recherche, au sein de la recherche opérationnelle, comme complémentaire des techniques de résolution exacte et des techniques heuristiques.

Un second enjeu s'inscrit plus dans la continuité de la théorie de la complexité : structurer NPO (pour mieux la comprendre) en classes d'approximation correspondant à différents niveaux de difficulté des problèmes, lier ces classes par des réductions permettant de les comparer et les compléter par des classes de complétude.

Mentionnons ici tout un pan que nous n'avons pas évoqué. Dans cette démarche de structurer, une approche duale des classes d'approximation consiste à différencier les problèmes de manière syntaxique à partir d'une écriture en termes de logique des problèmes d'optimisation (on parle alors de classes syntaxiques) et d'étudier les propriétés d'approximation des différentes classes. Cette voie, initiée notamment dans [35] a joué entre autres un rôle important dans la découverte de résultats de complétude.

Du point de vue des résultats, nous en avons mis en évidence de trois types. Les *résultats* positifs correspondent à la mise au point d'un algorithme et de son analyse. Nous avons déjà insisté sur différentes techniques utilisées dans ce cadre ; ajoutons-y désormais les réductions en approximation qui sont à la base de nombreux résultats. Du point de vue des classes d'approximation, un résultat positif correspond à l'appartenance à une classe.

Les *résultats négatifs* correspondent à une impossibilité, sous une hypothèse de théorie de la complexité (du type P$\neq$NP), d'obtenir tel résultat d'approximation pour un problème. Du point de vue structurel il s'agit donc d'exclure un problème d'une classe et par conséquent de différencier deux classes. C'est la conjonction de résultats positifs et négatifs qui permet d'établir la hiérarchie de NPO en classes d'approximation. Du point de vue des techniques, les réductions en approximation jouent un rôle central pour l'élaboration de tels résultats.

Mentionnons ici un autre pan du domaine totalement éludé dans cet article : les *systèmes de preuves interactives* (PCP) qui ont joué un rôle majeur dans l'obtention des résultats négatifs actuels. Pour simplifier de manière outrancière, un tel système peut être vu comme une généralisation des machines de Turing non

déterministe conduisant (« PCP-theorem » [4]) à une caractérisation probabiliste de NP. L'utilisation de tels systèmes dans le cadre de l'approximation et cette caractérisation ont ouvert la voie à de très nombreux résultats négatifs spectaculaires. Le lecteur pourra se référer par exemple à [7] (ch. 6-7) et à [23] (ch. 10).

Enfin, les *résultats conditionnels* lient l'approximation de différents problèmes. Il s'agit, de manière plus ou moins directe, de réductions en approximation. Nous avons déjà eu l'occasion d'insister sur leur rôle pour l'obtention de nouveaux résultats, qu'ils soient positifs ou négatifs. Du point de vue structurel, il s'agit de lier différentes classes d'approximation. Elles donnent également accès à des résultats de complétude permettant ainsi de définir de nouvelles classes, le tour (non hamiltonien) est bouclé.

Remerciements

Cet article a été réalisé pendant ma visite à l'École polytechnique de Lausanne, au sein de la chaire de Recherche Opérationnelle (ROSE). Je tiens tout particulièrement à remercier toute l'équipe pour son accueil.

Références

[1] S. Arora, *Polynomial-time Approximation Schemes for Euclidean TSP and other Geometric Problems*, Proc. of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2-12, 1996.

[2] S. Arora, *Polynomial-time Approximation Schemes for Euclidean Traveling Salesman and other Geometric Problems*, Journal of the ACM **45**(5) 753-782, 1998.

[3] S. Arora, *Approximation Schemes for NP-hard geometric optimization problems : a survey*, Mathematical Programming, Ser. B, **97** 43-69, 2003.

[4] S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan and M. Szegedy, *Proof verification and hardness of approximation problems*, Proc. of the 33rd Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 14-23, 1992.

[5] G. Ausiello, A. D'Atri and M. Protasi, *Structure preserving reductions among convex optimization problems*, Journal of Computer and System Sciences **21**, 136-153, 1980.

[6] G. Ausiello, C. Bazgan, M. Demange and V. Th. Paschos, *Completeness in differential approximation classes*, Proc. of 28th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS), ed. B. Roban and P. Vojtás, LNCS 2747, 179-188, 2003.

[7] G. Ausiello, P. Crescenzi, G. Gambosi, V. Kann, A. Marchetti-Spaccamela and M. Protasi, *Complexity and approximation (combinatorial optimization problems ans their approximability properties)*, Springer-Verlag, 1999.

[8] C. Bazgan and V. Th. Paschos, *Differential approximation for optimal satisfiability and related problems*, European Journal of Operational Research **147**, 397-404, 2003.

[9] C. Berge, *Graphs and hypergraphs*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[10] N. Christofides, *Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem*, Technical Report 388, Graduate School of Indistrual Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburg, 1976.

[11] V. Chvátal, *A greedy heuristic for the set covering problem*, Mathematics of Operations Research **4**, 233-235, 1979.

[12] B. Chandra, H. Karloff and C. Tovey, *New results on the old k-opt algorithm for the traveling salesman problem*, SIAM Journal of computing **28**, 1998-2029, 1999.

[13] S. A. Cook, *The compexity of theorem-proving procedures*, Proc. of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, 151-158, 1971.

[14] N. Creignou, *Temps linéaire et problèmes NP-complets*, Thèse de doctorat, Université de Caen, France, 1993.

[15] M. Demange, P. Grisoni and V. Th. Paschos, *Differential approximation algorithms for some combinatorial optimization problems*, Theoretical Computer Science **209**, 107-122, 1998.

[16] M. Demange, J. Monnot and V. Th. Paschos, *Bridging gap between standard and differential polynomial approximation : the case of bin-packing*, Applied Mathematics Letters **12**, 127-133, 1999.

[17] M. Demange and V. Th. Paschos, *On an approximation measure founded on the links between optimization and polynomial approximation theory*, Theoretical Computer Science **158**, 117-141, 1996.
[18] M.L. Fisher, G.L. Nemhauser, L.A. Wolsey, *An analysis of approximations for finding a maximum weight hamiltonian circuit*, Operation Research **27** (4), 799-809, 1979.
[19] *M.R. Garey et D.S. Johnson*. Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completness. CA.Freeman, San Francisco, 1979.
[20] M. Grigni, E. Koutsoupias and C. Papadimitriou, *An approximation scheme for planar graph TSP*, Proc. of the 36th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 640-646, 1995.
[21] R. Hassin and S. Khuller, *z-Approximations*, Journal of Algorithms **41**, 429-442, 2001.
[22] J. Håstad, *Clique is hard to approximate within* $n^{1-\varepsilon}$, Proc. of the 37th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 627-636, 1996.
[23] D.S. Hochbaum ed., *Approximation algorithms for NP-hard problems*, PWS, Boston, 1997. chapter 10 : C. Arora and C. Lund, *Hardness of approximation*, 399-446.
[24] O. H. Ibarra and C. E. Kim, *Fast approximation for the knapsack and sum of subset problems*, Journal of the ACM **22**, 463-468, 1975.
[25] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, in Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York, 85-103, 1972.
[26] R.M. Karp, *Probabilistic analysis of partitioning algorithms for the TSP in the plane*, Mathematics of Operations Research **2**, 209-224, 1977.
[27] B. Korte and J. Vygen, *Combinatorial Optimization - Theory and Algorithms*, Springer Verlag (2d édition), 2002.
[28] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan and D.B. Shmoys, *The traveling salesman problem*, Wiley Interscience, New York, 1986.
[29] S. Lin and B.W. Kernighan, *An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem*, Operations Research **21**, 498-516, 1973.
[30] J. Mitchell, *Guillotine subdivisions approximate polygonal subdivisions : a simple polynomial-time approximation scheme for geometric TSP, k-MST and related problems*, SIAM Journal on computing **29**, 1298-1309, 1999.
[31] J. Monnot, *Differential approximations results for the traveling salesman and related problems*, Information Processing Letters **82**, 229-235, 2002.
[32] J. Monnot, V. Paschos and S. Toulouse, *Approximation algorithms for the traveling salesman problem*, Mathematical methods of operations research, **56**, 387-405, 2002.
[33] C. H. Papadimitriou et K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization :Algorithms and Complexity*, Prentice Hall, New Jersey, 1981.
[34] C. H. Papadimitriou et S. Vempala, *On the approximability of the traveling salesman problem*, Proc. of the 32nd Annual ACM Symposium the Theory of Computing, 126-133, 2000.
[35] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, *Optimization, approximation and complexity classes*, Proc. of the 20th Annual ACM Symposium the Theory of Computing, 229-234, 1988.
[36] C. H. Papadimitriou and M. Yannakakis, *The traveling salesman problem with distances one and two*, Mathematics of Operations Research **18**(1), 1-11, 1993.
[37] V. Th. Paschos ed., *Optimisation Combinatoire* (in french) Hermès, to appear.
Chapter : J. Monnot and S. Toulouse *Le voyageur de commerce et ses variations : un tour d'horizon de ses résolutions*.
[38] A. Paz and S. Moran, *Non deterministic polynomial optimization problems and their approximation*, Theoretical Computer Science **15**, 251-277, 1981.
[39] A. Schrijver, *On the history of combinatorial optimization (till 1960)*, preprint (available at `http://homepages.cwi.nl/~lex/`.
[40] *The traveling salesman home page*, `http://www.math.princeton.edu/tsp/index.html`.
[41] V.V. Vazirani, *Approximations algorithms*, Springer-Verlag, 2001.
[42] E. Zemel, *Measuring yhe quality of approximate solutions to zero-one programming problems*, Mathematics of Operations Research **6**, 319-332, 1981.

HISTOIRE

Quelques tendances actuelles en histoire des mathématiques. À propos de trois livres récents

David Aubin[1]

> « *On a fait l'Histoire de la Peinture, de la Musique, de la Medecine etc. Une bonne Histoire des Mathematiques, & en particulier de la Geometrie, seroit un Ouvrage beaucoup plus curieux & utile (...). Il me semble qu'un tel Ouvrage bien fait pourroit être en quelque sorte regardé comme l'histoire de l'esprit humain* ». Pierre Rémond de Montmort [2]

Ainsi, avant même qu'elle ne soit écrite, l'histoire des mathématiques est investie d'une bien haute mission. Ce *credo* que Pierre Rémond de Montmort exprime dans une lettre adressée à Nicolas Bernoulli, le 20 août 1713, formera également l'armature du premier traité d'histoire des mathématiques : celui de Jean-Étienne Montucla en 1758. Constamment réaffirmée depuis ce temps-là, la conviction que les mathématiques forment le cœur de la pensée occidentale[3], le modèle même du raisonnement méthodique et l'ultime refuge de la vérité investit ses historiens d'une grande responsabilité : rien de moins que de retracer le cheminement de la Raison au delà, si possible, de toute influence extérieure ou contingente.

Renonçant à l'exigence démesurée d'expliquer l'histoire des idées par celle des mathématiques, quand elle ne la met pas radicalement en question, l'histoire sociale des mathématiques a fait grincer bien des dents. Comme l'affirme l'historien Dirk Struik, « *great changes in the social-political structure, and especially revolutions, have a way of influencing the thoughts of men, also in the field of science, including mathematics* » [4]. Non moins ambitieux que celui de Montmort, ce programme a conduit les historiens à porter leur attention sur l'évolution des institutions et de la professionnalisation du mathématicien dans divers contextes

[1] David Aubin est maître de conférences à l'université Pierre et Marie Curie, Paris VI et l'Institut de mathématiques de Jussieu.

[2] *Essai d'analyse sur les jeux du hazard*, 2nde éd., Jacque Quillau, Paris, 1713, p. 399 ; cité par Jeanne Peiffer dans *Writing the History of Mathematics : Its Historical Development*, sous la dir. de Joseph W. Dauben et Christoph J. Scriba, Birkhäuser, Bâle, 2002, p. 6.

[3] Voir Catherine Goldstein, Jeremy Gray et Jim Ritter, dir., *L'Europe mathématique : histoire, mythes, identités*, éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris, 1996.

[4] Voir son article dans *Social History of Nineteenth-Century Mathematics*, textes rassemblés par Herbert Mehrtens, Henk Bos et Ivo Schneider, Birkhaüser, Boston, 1981, p. 6.

nationaux, et aux multiples domaines du savoir et de la technique où interviennent les mathématiques[5].

L'histoire des mathématiques a donc aussi son histoire, qui est le reflet de la manière dont on a pu considérer les mathématiques à des époques et dans des cultures différentes. Dans un ouvrage récent dirigé par Joseph Dauben et Christoph Scriba, *Writing the History of Mathematics* (cf. note 2), dix-neuf articles retracent cette histoire dans autant de pays ou de régions du monde, non seulement dans les grandes puissances européennes, mais aussi dans la « périphérie » européenne, en Amérique ou en Asie. Plus de trois cents biographies d'auteurs d'études historiques complètent ce tour d'horizon étourdissant. Ce que démontre cet ouvrage, c'est non seulement la multiplicité des méthodes de l'écriture de l'histoire, mais également celle de ses fonctions, qui recoupent d'ailleurs souvent celles de l'histoire en général. Il s'agit d'établir des chronologies, des priorités intellectuelles, de clarifier la manière dont s'enchaînent des raisonnements... Ce livre démontre également la fréquence avec laquelle l'histoire est mise au service d'idéologies tant progressistes que nationalistes.

Aujourd'hui encore, les fonctions de l'histoire des mathématiques restent multiples. Deux autres recueils d'articles récents témoignent de la grande vitalité actuelle du domaine, tout autant que de la diversité de ses approches[6]. Dans ce qui suit, mon intention n'est pas de refléter fidèlement cette diversité d'approches, ni même celle qui s'exprime dans ces deux ouvrages[7]. Je voudrais simplement saisir l'occasion qui m'est donnée de montrer comment de nouveaux outils d'analyse historique permettent aujourd'hui de mieux cerner la sociabilité de ceux qui, de près ou de loin, s'investissent dans les mathématiques et de mettre ainsi en évidence la diversité des pratiques mathématiques elles-mêmes.

Les mathématiciens s'occupent parfois de choses qui ne relèvent pas directement des mathématiques. Ils s'impliquent dans d'autres champs des sciences et de la culture ; ils ont des activités institutionnelles, voire politiques, qui ne sont pas toujours sans incidence sur leur production scientifique. Les mathématiques,

---

[5] Il serait trop long ici de citer les multiples ouvrages qui traitent de ces questions, soulignons simplement les ouvrages de Hélène Gispert, *La France mathématique. La Société Mathématique de France (1873–1914)*, Société française d'histoire et de philosophie des sciences et Société Mathématique de France, Paris, 1991 ; Alain Desrosières, *La Politique des grands nombres. Histoire de la raison statistique*, La Découverte, Paris, 1993, et Eric Brian, *La Mesure de l'État*, Albin Michel, Paris, 1994 ; Bruno Belhoste, et al., dir. *La Formation polytechnicienne*, 1794-1994, Dunod, Paris, 1994 ; et Karen Hunger Parshall et David E. Rowe, *The Emergence of the American Mathematician Research Community, 1876–1900 : J. J. Sylvester, Felix Klein, and E. H. Moore*, American Mathematical Society & London Mathematical Society, Providence & Londres, 1994.

[6] *Changing Images in Mathematics : From the French Revolution to the New Millenium*, sous la dir. de Amy Dahan Dalmedico and Umberto Bottazzini, Routledge, Londres, 2001 et *Mathematics Unbound : The Evolution of an International Mathematical Research Community, 1800–1945*, sous la dir. de Karen Hunger Parshall et Adrian C. Rice, London Mathematical Society, Londres et American Mathematical Society, Providence, coll. « History of Mathematics » 23, 2002. Soulignons également la parution d'un numéro spécial de la revue *Science in Context*, volume 17, n^{os} 1/2 (2004), dirigé par Leo Corry, et de *Development of Mathematics 1950–2000*, dirigé par Jean-Paul Pier, Birkhäuser, Bâle, 2000, dont il serait utile que la *Gazette* rende compte prochainement.

[7] Voir l'état des lieux dressé par Catherine Goldstein en 1999, *L'histoire des mathématiques en France*, rapport pour la commission 01 du CNRS (`http://www.spm.cnrs-dir.fr/presentation/activites/RapportGoldstein.pdf`).

de plus, n'interviennent pas uniquement dans la vie des mathématiciens ; et il arrive que des milieux extérieurs aux mathématiques, pures ou appliquées, puissent avoir un impact déterminant sur le développement de ces dernières. Bref, je voudrais souligner comment on parvient aujourd'hui, dans le domaine de l'histoire des mathématiques, à étudier finement l'imbrication des pratiques, qu'elles soient purement mathématiques ou non et qu'elles s'exercent dans le cadre strictement professionnel des mathématiciens ou non.

Comme l'admettait partiellement Jean Dieudonné : « *Pas plus que les autres sciences (et malgré sa réputation d'abstraction), la mathématique n'est pas une science désincarnée, et il serait absurde de séparer complètement l'histoire des idées de celle des hommes qui les ont introduites* [8] ». Ce sont précisément les manières de lier l'histoire des hommes à celle des idées que j'examine ici.

Les matheux ne font pas que des maths

Avant le XIX^e^ siècle, presque tous les mathématiciens consacrent une part plus ou moins importante de leur temps à divers travaux scientifiques ou à des tâches d'expertise technique (dans le cadre des Académies ou comme examinateurs, par exemple). La constitution des mathématiques pures, comme champ social relativement bien circonscrit depuis deux siècles, n'empêchera bien sûr pas certains de ses représentants les plus illustres de s'intéresser à d'autres champs. Pendant certaines périodes de crises, comme les deux guerres mondiales, de nombreux mathématiciens auront ainsi une activité importante dans le domaine militaire. Même parmi ceux qui concentreront leur action sur des questions internes aux mathématiques, il ne sera pas rare de trouver des personnes énergiques dont l'incessante activité professionnelle sera tournée, par delà la publication de recherches originales, vers l'enseignement, la mise sur pied et la gestion de revues scientifiques, ou la structuration institutionnelle de leur communauté tant au niveau national qu'international. Pour n'être pas strictement mathématiques, ces diverses activités, on s'en rend bien compte, restent déterminantes dans l'exercice de leur métier.

C'est justement le caractère international des mathématiques qui est soumis à un examen approfondi dans le second livre dont je voudrais parler ici, *Mathematics Unbound* (cf. note 6). Il est clair que si les mathématiques peuvent prétendre au statut d'objet-modèle pour la raison humaine, celles-ci doivent par essence transcender les frontières. Dès lors, il n'est pas absurde de chercher à montrer, comme l'a fait l'historien Hayashi Tsuruichi (1873–1935), que le concept de déterminant apparaît dans les mathématiques traditionnelles japonaises avant même que Leibniz n'en établisse les premiers éléments [9].

Que le savoir mathématique se soit, dès la Renaissance, constitué au travers d'échanges intenses entre savants de diverses provenances géographiques ne saurait être remis en question. Mais c'est bien sûr l'émergence de l'État-nation vers 1800 qui doit former la matrice d'une réflexion sur l'internationalisme. Or, au XIX^e^ siècle, si les échanges internationaux se poursuivent et s'intensifient, l'activité mathématique se développe grâce au soutien de l'État et se professionnalise dans des contextes essentiellement nationaux. À l'apogée de la pensée nationaliste, la

[8] Jean Dieudonné, dir., *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900*, Hermann, Paris, 1978, p. 2.

[9] *Writing the History of Mathematics*, p. 291.

doctrine internationaliste et les processus d'internationalisation se développent toutefois en parallèle, malgré les traumatismes causés par les deux guerres mondiales. Ainsi, à la fin de la période traitée (1800–1945), la situation serait familière au mathématicien contemporain : « a language for mathematics used for communication by mathematicians worldwide, a range of research agendas recognized and engaged in by mathematicians worldwide, a subject matter and practices shared among mathematicians worldwide » [10].

Cette « internationale mathématique » n'émerge pourtant pas spontanément. Au contraire, ce que démontre l'ouvrage de Parshall et Rice, c'est l'intense effort qui préside à la constitution d'une communauté mathématique internationale pendant cette période. Cet effort se déploie dans des sphères diverses, tant institutionnelles qu'épistémologiques, et de manière inextricable. Si les traditions mathématiques (éducation, sociétés savantes, publications, etc.) se développent dans des contextes nationaux, les frontières nationales ne confinent pas les idées et programmes de recherches. Et il serait illusoire de chercher à comprendre l'internationalisation des mathématiques sans tenir compte du corps de connaissances qui se constitue.

L'internationalisation des mathématiques est donc un processus complexe qui exige une variété d'approches bien exemplifiées dans *Mathematics Unbound*. Des études nationales mettent en évidence les résistances rencontrées dans l'intégration locale des apports étrangers[11]. L'étude contrastée des sociétés savantes françaises (la Société Mathématique de France et l'Association française pour l'avancement de la science) dans la période 1870–1914 montre combien l'organisation des communautés mathématiques reste avant tout nationale, et que les contributions étrangères s'intègrent selon des modalités assez différentes dans les deux sociétés (Hélène Gispert). L'analyse des articles provenant de l'étranger publiés dans les périodiques britanniques et français au XIX^{e} siècle (Sloan Evans Despeaux et Jesper Lützen, respectivement) montre comment l'insularité des communautés nationales est contrebalancée par les traductions qui circulent d'un pays à l'autre. Divers modèles étrangers jouent aussi des rôles fondamentaux, quoique distincts, dans l'émergence d'une communauté mathématique moderne en Chine entre les années 1860 et la deuxième guerre mondiale (Joseph Dauben).

D'autres auteurs étudient les modes d'actions qui se placent à des niveaux supranationaux. La fondation d'*Acta Mathematica* par Gösta Mittag-Leffler en 1882 apparaît comme un effort délibéré pour constituer un forum commun aux mathématiciens du monde entier (June Barrow-Green). D'abord essentiellement italien, le *Circolo matematico di Palermo*, fondé en 1884, finit par remplir une fonction similaire en réunissant, à partir de 1904-1914, les mathématiciens de tous les pays en une seule société savante (Aldo Brigaglia). Ces mouvements culminent à la fin du XIX^{e} siècle avec les premiers congrès internationaux de mathématiciens, puis en 1920 avec la création de l'International Mathematical Union (Olli Lehto). L'émigration importante de mathématiciens européens vers les États-Unis suite à la persécution nazie y implante une communauté internationale appelée à avoir un fort

[10] *Mathematics Unbound*, p. 4.

[11] Dans cet ordre d'idée, on attend avec impatience la parution du livre, coordonné par Hélène Gispert et Catherine Goldstein, qui compare la version originale allemande de l'*Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (1898–1935), lancée par Felix Klein, à son adaptation française, l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, coordonnée par Jules Molk (1904–1916).

rayonnement (Sanford Segal). Enfin, certains individus contribuent personnellement à intégrer des traditions mathématiques de diverses provenances : dans les années 1870 et 1880, la promotion de travaux mathématiques allemands en France par Charles Hermite (Thomas Archibald) et les travaux de Cesare Arzelà en théorie de Galois (Laura Martini) le démontrent bien.

Dans un article remarquable, Jeremy Gray apporte un éclairage nouveau aux débats sur les fondements des mathématiques [12]. Selon son analyse, les discussions sur la nature des mathématiques entre David Hilbert, Gottlob Frege et Bertrand Russell doivent prendre place au sein des débats contemporains sur les moyens de communiquer dans une communauté qui s'internationalise. Autour de 1900, la langue dans laquelle on publie ses résultats n'est pas un choix anodin et l'on se remet à rêver d'une langue universelle. L'enthousiasme pour les langues artificielles à la fin du XIX^{e} siècle (espéranto et autres volapüks) reçoit le soutien de plusieurs mathématiciens, comme Frege ou Giusseppe Peano lui-même auteur d'un « latin sans inflexion ».

C'est de manière parallèle que les mathématiques elles-mêmes en viennent à être considérées comme une langue universelle, une vision qui d'après les recherches de Gray n'existait pas en tant que telle auparavant. Si les tentatives de Ernst Shröder (*Algebra der Logik*) et de Peano (*Formulario*) d'exprimer leurs mathématiques sans faire appel aux langues naturelles font longs feux, les travaux de David Hilbert sur l'axiomatique connaissent, eux, le succès fulgurant que tout mathématicien connaît bien. Gray montre que le programme métamathématique de Hilbert est bien d'introduire une langue universelle permettant d'analyser les fondements des mathématiques. Ainsi les manières dont les mathématiciens négocient le passage du nationalisme à l'internationalisme, conclue-t-il, sont reflétées dans les programmes qu'ils mettent en œuvre dans leurs recherches les plus influentes, celles mêmes qui, en retour, contribuent à forger l'image internationale et universelle des mathématiques modernes.

Cet exemple montre de manière frappante que l'activité que les mathématiciens peuvent avoir en linguistique, ou dans tout autre champ de la culture ou des sciences, n'est pas toujours facilement dissociable de leur activité mathématique. L'article de Ivor Grattan-Guinness dans *Mathematics Unbound* souligne le fait que le grand rayonnement des mathématiques françaises dans le premier tiers du XIX^{e} siècle (avec Cauchy, Fourier, etc.) ne peut être compris sans porter attention à ces autres domaines où s'exerce l'activité mathématique (astronomie, physique ou sciences de l'ingénieur).

Le troisième ouvrage que je veux analyser ici, *Changing Images of Mathematics* (cf. note 6), dirigé par Amy Dahan Dalmedico et Umberto Bottazzini, insiste également sur la contribution que font les mathématiciens à d'autres domaines. On pourra suivre, par exemple, les activités de Félix Klein dans l'élaboration d'une politique scientifique pour la communauté mathématique (David Rowe), les débats intellectuels, nationaux et éditoriaux qui ponctuent la conception, puis la traduction de son immense *Encyclopédie des sciences mathématiques* (Hélène Gispert), les diverses manières dont les mathématiciens professionnels investissent d'autres domaines scientifiques, en particulier la mathématique physique (Tom Archibald,

[12] J. Gray, « Languages for Mathematics and the Language of Mathematics in a World of Nations », *Mathematics Unbound*, 201–228.

Jeremy Gray, David Aubin), ou les conflits majeurs qui agitent les mathématiciens à propos de l'image de leur discipline, en particulier par rapport au structuralisme de Bourbaki (Amy Dahan Dalmedico, Leo Corry). La comparaison entre la France et l'Allemagne au XIX^{e} siècle apparaît dans ce livre comme un thème mineur particulièrement riche en enseignements.

Il n'y a pas que les matheux qui font des maths

Changing Images of Mathematics explore la notion de représentation, que les auteurs tirent de la sphère de l'histoire culturelle. À la suite de Roger Chartier, entre autres, les historiens ont étudié la manière dont les structures sociales et les pouvoirs peuvent être représentés dans le langage ou par des images et, en même temps, déterminés par ces représentations[13]. Dans leur introduction, Dahan Dalmedico et Bottazzini soulignent que les représentations sont nécessairement multiples, en compétition les unes avec les autres. En s'attachant à reconstituer les diverses images des mathématiques qui s'affrontent à des époques données, on est conduit à s'intéresser aux différents groupes d'acteurs qui les proposent.

Qu'on l'envisage de manière restreinte en suivant les « grands noms » qui ont laissé leurs marques dans l'histoire et la mémoire, ou de manière plus étendue en y incluant l'ensemble des professeurs du secondaire et du supérieur, des membres des diverses sociétés mathématiques nationales ou internationales ou des auteurs d'articles de telle revue, le milieu mathématique est stratifié, composé de groupes divers qui sont engagés dans différents types d'activité mathématique. On peut élargir encore la perspective et chercher à reconstituer les groupes exclus des représentations « officielles » : les actuaires, les calculateurs de l'observatoire, les artilleurs ou les statisticiens dont les pratiques professionnelles impliquent une utilisation parfois fort créative des mathématiques. Les historiens se penchent de plus en plus sur ces domaines de pratiques longtemps confinés dans les marges.

Dans *Changing Images in Mathematics*, le cas français est tout particulièrement développé. L'émergence d'une classe technocratique d'ingénieurs formés à l'École polytechnique fait naître une conception toute particulière du lien entre théorie et applications, ces dernières servant à engendrer les généralisations théoriques (Bruno Belhoste[14]). Au XIX^{e} siècle, le travail des statisticiens consiste autant à chercher à répondre à des questions concrètes dans des domaines variés dans lesquels ils amassent une énorme quantité de données chiffrées (criminalité, astronomie et géodésie, démographie, météorologie) qu'à construire une mathématique du hasard. D'après l'analyse de Michel Armatte, on ne peut donc pas parler d'une application du calcul des probabilités à la statistique sociale pour la bonne raison qu'aucun savoir théorique n'existait encore dans la forme qui aurait convenu ! L'image des mathématiques est aussi modifiée par les utilisateurs, comme le montre l'étude des méthodes statistiques en médecine (essais cliniques en double aveugle, débats épidémiologiques sur les liens entre tabagisme et cancer du poumon). Les

[13] Roger Chartier, « Le monde comme représentation, » *Annales ESC* 6 (novembre-décembre 1989), 1505–1520.

[14] Voir également son nouveau livre *La Formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves*, Belin, Paris, 2003.

mathématiques deviennent ainsi une aide à la prise de décision entre les mains d'acteurs les plus divers : mathématiciens, médecins et décideurs publics (Jean-Paul Gaudillière).

Pour souligner la manière dont ces dynamiques sociales complexes peuvent avoir un impact sur un champ des mathématiques, je m'attarderai sur un cas que je connais un peu mieux : le domaine qu'on a appelé la théorie du chaos ou la théorie des systèmes dynamiques[15]. La différence de terminologie est l'indice de tensions disciplinaires, épistémologiques et historiographiques qu'on aurait tort de glisser sous le tapis. Si les physiciens et spécialistes d'autres disciplines s'enthousiasment entre 1975 et 1990 pour la révolution du chaos, la troisième du XX^{e} siècle, prétend-on, après la relativité et la mécanique quantique, certains mathématiciens soulignent avec raison que de nombreux éléments de la théorie mathématique remontent au début du siècle, aux travaux de Henri Poincaré. Confronté à la longue durée alors même qu'ils cherchent à rendre compte de l'enthousiasme extraordinaire suscité, à un moment donné, par la constitution des sciences du non linéaire, les historiens doivent faire face à des problèmes conceptuels majeurs.

En cherchant à reconstituer les différents parcours qui mènent de Poincaré au « chaos », on s'aperçoit rapidement qu'ils se déploient dans des espaces disciplinaires très variés, souvent hors des mathématiques proprement dites : les sciences physiques, la mécanique des fluides, les sciences de l'ingénieurs, et même les sciences de la vie. De plus, les disjonctions multiples, les oublis provisoires, les redécouvertes soudaines de concepts fondamentaux ou les reconfigurations majeures qui jalonnent cette histoire ne sont pas simplement dus à des incompréhensions interdisciplinaires, mais bien le fait d'environnements sociaux, nationaux et épistémiques divers.

Dans les années 1920, par exemple, George David Birkhoff, Aleksandr Andronov et Balthasar van der Pol reprennent le flambeau de Poincaré et innovent dans la description mathématique des oscillations dans les systèmes complexes. Si des ponts peuvent être établis entre leurs travaux, on reste néanmoins frappé par le caractère ténu des contacts établis avant la fin des années 1960 (cf. les travaux de Stephen Smale). Que pouvaient bien avoir en commun les univers sociaux du professeur de mathématiques à l'université de Harvard, du « physico mathématicien » de l'institut de radiophysique de Gorki et du « Great Old Man of Radio » des laboratoires de la Philips[16] ? La tâche de l'historien consiste donc non seulement à expliquer comment la communication est parfois difficile, mais bien à montrer comment des réappropriations et des transferts peuvent tout de même se produire, même — surtout, serais-je tenté de dire — lorsqu'ils apparaissent trivialement justifiés par le développement ultérieur des mathématiques. Au-delà des ruptures et redécouvertes si souvent déplorées ou célébrées dans l'histoire de l'héritage de Poincaré, seule l'analyse des programmes scientifiques et des contextes spécifiques de divers groupes de chercheurs permet de se rendre compte que cet héritage a bel et

[15] David Aubin et Amy Dahan Dalmedico, « Writing the History of Dynamical Systems and Chaos : *Longue Durée* and Revolution, Disciplines and Cultures, » *Historia mathematica* 29 (2002), 273-339.

[16] Voir D. Aubin, « Dynamical Systems (1927) », in *Landmark in Western Mathematics : Case Studies, 1640–1940*, éd. I. Grattan-Guinness, Eslevier, à paraître en 2004 et Amy Dahan Dalmedico avec Irina Gouzevitch, « Early Developments of Nonlinear Science in Soviet Russia : The Andronov School at Gor'kiy », *Science in Context* 17 (2004), 235-265.

bien été richement exploité par le passé, mais avec des objectifs qui n'étaient pas ceux des « chaologistes » de la fin du XX^{e} siècle.

Le cas du vaste processus de convergence socio-disciplinaire et de reconfiguration conceptuelle qui se produit entre la fin des années 1960 et le début des années 1980, celui-là même qu'on a appelé le « chaos », me paraît particulièrement instructif. Le « chaos » s'est construit sur la base de multiples convergences entre disciplines différentes à des époques diverses. Dans l'histoire des systèmes dynamiques, il n'y a donc pas d'« intérieur » et d'« extérieur » qui s'imposeraient de manière évidente. L'étude de la constitution des savoirs mathématiques nous conduit insensiblement des contenus mathématiques aux conditions sociales de leur production et nous fait naviguer entre des cultures scientifiques et techniques les plus variées.

Au-delà de l'interne et de l'externe : la bouteille de Klein

On mesure facilement l'écart qu'il peut y avoir aujourd'hui entre l'activité de l'historien et celle du mathématicien, le premier recherchant la source des travaux mathématiques dans des contextes spatio-temporels précis, tandis que le second s'efforcerait plutôt d'en effacer les traces dans le but de constituer le cœur universel et intemporel du savoir mathématique[17]. Pour de nombreux mathématiciens, l'histoire tient toutefois une place importante. Les nombreux écrits que lui ont consacrés les fondateurs de Bourbaki, par exemple, en témoignent amplement[18]. Mais, pour ces derniers, l'histoire conservait un rôle subalterne, celui de permettre de mieux comprendre l'émergence des tendances unificatrices à la base de l'image structurale des mathématiques qu'ils ont promue sans relâche. Dans leur pensée, « les idées mathématiques [étaient] le vrai sujet de l'histoire mathématique » [19]. De là, l'affirmation forte et maintes fois réitérée de l'autonomie des mathématiques : « *Il semble que l'on a une vue assez juste du développement des mathématiques en considérant que son principal moteur est d'origine* interne*, la réflexion profonde sur la nature des problèmes à résoudre, sans que l'origine de ces derniers exerce beaucoup d'influence* » [20].

Il est tentant pour l'historien, même si ce terrain est encore insuffisamment défriché, de chercher à rendre compte de la vision bourbakiste des mathématiques, ainsi que du large écho qu'elle a eu. On pourrait chercher à tenir compte d'une analyse du positionnement adopté *a contrario* par une partie de la communauté mathématique transatlantique dans les années qui suivent la deuxième guerre mondiale (pendant laquelle mathématiques et mathématiciens interviennent de manière massive dans une foule de domaines) et pendant la guerre froide qui poursuit

[17] Joseph Dauben, « Mathematics : An Historian's Perspective », in *The Intersection of History and Mathematics*, sous la dir. de C. Sasaki, M. Suguira et J. Dauben, Birkhäuse, Bâle, 1994, p. 1–13 ; Moritz Epple, « Genies, Ideen, Institutionen, mathematische Werkstätten : Formen des Mathematikgeschichte. Ein metahistorischer Essay, » *Mathematische Semesterberichte* 47 (2000), 131-163.

[18] Nicolas Bourbaki, *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960.

[19] André Weil, « History of Mathematics : Why and How, » *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, Academia Scientiarum Fennica, Helsinki, 1980, p. 227–236, à la p. 231.

[20] Dieudonné, *Abrégé d'histoire*, p. 11. (cf. note 8)

allègrement ces expériences[21]. Comme j'ai tenté de le montrer autrefois, ces visions structuralistes s'élaborent concurremment dans plusieurs champs de l'activité intellectuelle française et internationale, aussi bien en sciences humaines qu'en littérature[22]. De même, le rôle primordial que jouent alors les mathématiques dans l'éducation en tant qu'outil sélectif de l'élite sociale ne saurait être négligé[23]. Il semble d'ailleurs clair, bien que difficilement mesurable, que le prestige des mathématiques a considérablement reculé ces dernières années, au profit d'autres domaines plus « visibles » comme la biologie moléculaire et les sciences du climat. Dans le contexte actuel, on courrait sans doute de grands risques à insister trop lourdement sur l'autonomie des mathématiques et on préfère souligner leur ubiquité dans les sociétés contemporaines[24].

Dans ce nouveau paysage, quelles pourraient être, désormais, les fonctions de l'histoire des mathématiques ? Depuis les travaux de l'historien T.S. Kuhn sur la *Structure des révolutions scientifiques*, dont la première édition remonte à 1962, et le courant des « *science studies* » qui en découle, les cadres de l'histoire des sciences ont éclaté. Une communauté professionnelle s'est enracinée, qui a pour objet propre de tenter d'appréhender le développement des sciences dans une perspective historique forte. En s'ouvrant à l'étude des savoir-faire pratiques autant qu'aux connaissances théoriques, les historiens des sciences insistent maintenant sur les conditions de production, de transmission et de réception des savoirs scientifiques, et la compréhension des catégories conceptuelles qui les fondent[25]. Ce courant s'est depuis ouvert sur plusieurs problématiques culturelles, comme les rapports entre cultures savantes, techniques et populaires.

Tantale de l'histoire des sciences, l'histoire des mathématiques semble prendre plaisir à afficher son particularisme, tantôt pour le célébrer, tantôt pour le déplorer. Malgré les nombreux débats historiographiques, certains, mêmes partisans d'une histoire sociale des mathématiques, continuent d'éprouver le besoin de répéter que leur domaine accuse du retard par rapport aux autres champs de l'historiographie des sciences[26]. Faire le pari d'historiciser les mathématiques devrait-il nécessairement confiner ceux qui s'y risquent à s'isoler dans un « ghetto » du savoir, condamnés à produire une littérature « trop mathématique pour les historiens, trop historique pour les mathématiciens[27] » ?

---

[21] Voir Amy Dahan et Dominique Pestre, *Les sciences pour la guerre (1940-1960)*, Éditions de l'École des Hautes Etudes en Sciences sociales, Paris, 2004.

[22] David Aubin, « The Withering Immortality of Nicolas Bourbaki : A Cultural Connector at the Confluence of Mathematics, Structuralism, and the Oulipo in France, » *Science in Context*, 10(2) : 297–342.

[23] Pierre Samuel, « Mathématiques, latin et sélection des élites, » *Pourquoi la mathématique ?* Union générale d'éditions, « 10/18 », Paris, 1974, p. 147–171.

[24] Voir, par exemple, la plaquette de la SMF, intitulée *L'Explosion des mathématiques* (juillet 2002), disponible à l'adresse : `http://smf.emath.fr/Publications/ExplosionDesMathematiques/`.

[25] Dominique Pestre, « Pour une histoire sociale et culturelle des sciences : nouvelles définitions, nouveaux objets, nouvelles pratiques, » *Annales Histoire, Sciences Sociales* 50 (1995), 487-522.

[26] Pour les débats au sujet de la notion de « révolution » en mathématiques, voir les textes rassemblés par David Gillies dans *Revolutions in Mathematics*, Clarendon, Oxford, 1992.

[27] Ivor Grattan-Guinness, « Does the History of Science Treat the History of Science ? The Case of Mathematics, » *History of Science* 28 (1990), 149-173, p. 158.

Loin d'être un écueil, l'insistance que les tenants des nouvelles approches portent aux aspects pratiques et matériels des sciences permet d'élargir le champ de l'histoire des mathématiques à de nouveaux objets en la croisant tout naturellement avec d'autres histoires. Le programme du CNRS et du Ministère de la Recherche, « Histoire des savoirs », en témoigne à travers, par exemple, l'attention qui est portée aux « instruments du calcul savant » et aux « savoirs et techniques de l'observatoire[28] ». Plusieurs exemples de travaux des dernières décennies permettent de constater que, malgré les nombreuses protestations du contraire, un rapprochement tranquille s'est produit entre professionnels de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences[29]. Bien que reflétant la très grande diversité du domaine, tous ces travaux montrent, chacun à leur manière, que le clivage entre approches « externalistes » et « internalistes » est dépassé et qu'il est contre-productif, aujourd'hui, d'opposer l'histoire des mathématiciens à celles des historiens. Les travaux des uns et des autres s'interpénètrent et produisent de nouvelles connaissances.

Au fond, la frontière du domaine que cherche à circonscrire l'histoire des mathématiques pourrait bien s'apparenter à une bouteille de Klein, où l'intérieur se fond graduellement dans l'extérieur et l'externe dans l'interne. Tâche impossible, nous dira-t-on. En mathématiques, nul ne saurait le contester. Mais en histoire des mathématiques, il est d'ores et déjà acquis que cette tentative aura produit ses fruits[30].

---

[28] `http://www.cnrs.fr/DEP/prg/Hist.Savoirs.html`.

[29] Dans son analyse des liens entre physique, théorie des nœuds et topologie, par exemple, Epple (art. cit.) revendique la filiation des études de laboratoire. Il suggère tout l'intérêt qu'il y aurait à porter attention aux pratiques à l'œuvre dans ce qu'il nomme les « ateliers mathématiques (*mathematische Werkstätten*) ». Pour une perspective similaire à propos de la physique mathématique, voir aussi Andrew Warwick, *Masters of Theory : Cambridge and the Rise of Mathematical Physics*, University of Chicago Press, Chicago, 2002.

[30] Je remercie Amy Dahan Dalmedico, Christian Gilain, Hélène Gispert et Catherine Goldstein d'avoir bien voulu lire et commenter une première version de cet article.

ENSEIGNEMENT

Enseigner les mathématiques à l'université

Patrick Sargos[1]

La pédagogie est une pratique, pas une science. Chaque discipline a sa propre pédagogie. Ici, nous parlerons seulement des mathématiques. Ce qui est nécessaire au futur enseignant, c'est un ensemble de conseils simples à appliquer, qui l'aideront dès le départ, mais aussi qui l'inviteront à se poser des questions par la suite. Ce qui suit est essentiellement une série de remarques toutes plus évidentes les unes que les autres. Toutefois, quelques suggestions personnelles qui ne font pas l'unanimité apparaissent ça et là ; il appartient à chacun d'y faire son tri, ou d'adapter selon ses idées.

Sans doute y a-t-il beaucoup d'oublis et de maladresses dans cette première version. Pour améliorer ce texte, les commentaires des collègues seront les bienvenus !

1 Généralités

Les enseignants-chercheurs recrutés à l'université sont en général bien préparés à la recherche ; mais, pour ce qui est de l'enseignement, ils sont entièrement livrés à eux-mêmes (les formations actuelles en pédagogie semblent beaucoup plus orientées vers des théories dont il semble difficile d'extraire des règles pratiques). Il faut pourtant insister sur l'importance de la qualité de l'enseignement :

Remarque 1. Un enseignant-catastrophe = des générations sacrifiées.

Traditionnellement, chacun de nous tire son modèle d'enseignement presque exclusivement de son expérience d'étudiant. On s'améliore alors naturellement :

Remarque 2. Expérience professionnelle consciencieuse + réflexion personnelle + discussions avec les collègues = progrès assurés.

Dans une carrière d'enseignant-chercheur, le système universitaire ne nous incite pas à faire des efforts pour l'enseignement (il n'y aucune sanction ni aucune récompense liée à la qualité de l'enseignement, ni aucune vérification de cette dernière, les autorités faisant confiance — le plus souvent à juste titre — à la conscience professionnelle de chacun). Enseigner est évidemment une fonction essentielle de l'universitaire ; mais, à dose modérée, c'est un facteur d'équilibre qui compense l'isolement de la recherche, un passionnant contact avec la réalité humaine, qui justifie en partie le niveau scientifique qu'on exige de nous ; enfin, c'est aussi un moyen de consolider sa culture mathématique générale.

Les programmes de mathématiques de l'enseignement supérieur sont bien au point depuis longtemps. Les problèmes pédagogiques se limitent surtout aux

[1] Université Henri Poincaré, Nancy I

détails : choix techniques dans le cours écrit, présentation du tableau, méthode d'interrogation en TD, etc.

Nous allons faire un tour d'horizon de ces détails, en essayant de les classer par thèmes.

Simplicité, clarté, efficacité

Remarque 3. On ne peut enseigner efficacement que ce que l'on a bien compris.

On entend souvent dire les étudiants de leur professeur : « *Il est très fort, mais on ne comprend rien* ». Dans la plupart des cas, on devrait plutôt dire : « *Il n'arrive pas à expliquer parce qu'il n'a pas suffisamment préparé son cours, ou, pire encore, parce qu'il a du mal à comprendre ce qu'il enseigne* ».

Remarque 4. Pas de mots savants.

Il existe deux cas d'utilisation des mots savants : 1) lorsque, au cœur d'un problème profond, un concept difficile revient souvent (il est alors nécessaire de lui donner un nom savant) ; 2) lorsqu'on veut faire croire qu'on est dans le cas précédent.

Les mathématiques sont par essence très compliquées ; il n'y a donc pas lieu de faire semblant d'être savant quand on les enseigne.

Remarque 5. Toujours le plus simple possible.

Dans tous les domaines de l'existence, le plus difficile est de trouver les idées simples qui marchent. Malheureusement, nous avons tous une forte tendance à collectionner les idées compliquées qui ne marchent pas. Face à n'importe quel problème, dans l'enseignement comme dans la recherche, faites un effort pour trouver plus simple.

Remarque 6. La clarté est une qualité qui se travaille.

On reviendra plus loin sur la façon dont un cours doit être préparé, car c'est essentiellement de là que provient la clarté d'un enseignement. Mais, être plus clair doit être un souci constant ; à vous de trouver les moyens pour y parvenir.

La tenue du tableau

Remarque 7. Un cours de mathématiques se fait au tableau.

La pédagogie des mathématiques a une particularité : la tenue du tableau y joue un rôle essentiel. On peut dire que presque tous les problèmes pédagogiques peuvent être résolus par ce biais. Les diverses méthodes de projection sur écran sont de plus en plus utilisées ; nous ne parlerons que du tableau classique, avec de la craie (celle qui s'étale sur nos vêtements), laissant au lecteur le soin d'adapter notre propos à la projection sur écran.

Pour s'assurer que les étudiants ont les moyens de suivre parfaitement, il ne faut pas oublier que

Remarque 8. Tout ce qui est mathématique doit être entièrement écrit au tableau, avec des phrases complètes.

L'objectif à atteindre est le suivant : tout ce qui est nécessaire à la compréhension de la partie mathématique qu'on traite doit figurer sur le tableau.

L'étudiant ne suit pas toujours le rythme du professeur, il s'attarde sur certains détails ; il doit pouvoir retrouver le fil en lisant le tableau. Dans ce cas, il perdra au plus quelques explications orales.

Si vous souhaitez donner des indications supplémentaires qui ne sont pas indispensables à la compréhension du sujet traité (répondre à une question, par exemple), vous pouvez bien sûr le faire par oral ; si l'explication requise est un peu compliquée, alors il faut écrire sur un autre coin du tableau. En résumé :

Remarque 9. On peut faire par oral au plus quelques remarques simples ; tout le reste doit avoir un support écrit.

Quand un étudiant passe au tableau, le plus souvent, on a du mal à lire ce qu'il a écrit, et l'ensemble donne l'impression d'être désordonné (bien que certains étudiants écrivent remarquablement). Cela doit vous inciter à :

Remarque 10. Écrire lisiblement, avec des gros caractères et en appuyant fort sur la craie. Encadrer les énoncés et bien les séparer de la solution (ou de la démonstration). Il est impératif de séparer le tableau en bandes verticales.

Comme dit plus haut, l'effet d'un tableau mal tenu est désastreux. Un long entraînement est hélas nécessaire pour arriver à un niveau « professionnel », sauf exception. Cependant, les conseils ci-dessus permettent d'arriver rapidement à un niveau intermédiaire acceptable.

Un autre élément essentiel de l'utilisation du tableau : les dessins.

Remarque 11. Des dessins ! Toujours plus de dessins !

C'est ce qui manque le plus aux enseignants débutants : savoir faire le bon dessin qui explique presque tout (noter que la remarque vaut aussi pour les chercheurs débutants). Il faut dire que trouver le bon dessin est souvent le reflet de la meilleure compréhension, et que cela nécessite une très grande maturité sur le sujet, contrairement aux idées préconçues. Il faut toutefois prendre certaines précautions :

Remarque 12. Ne pas faire un dessin au tableau si on ne l'a pas préparé correctement.

Au passage, profitons-en pour placer une remarque analogue :

Remarque 13. Ne pas se lancer dans une explication qu'on ne maîtrise pas.

Sinon, on arrive à un résultat surprenant ; les étudiants pensent que c'est leur faute s'ils ne comprennent pas et ils se disent : « *Il est très fort, mais on ne comprend rien* ». (voir plus haut).

La présentation de l'enseignant

Les étudiants n'ont pas toujours pitié de nous ; ils ont une furieuse tendance à bavarder et parfois pire. Que peut-on y faire ?

Remarque 14. Pas de tenue fantaisiste, pas de comportement fantaisiste.

À moins, bien sûr, d'être capable d'en assumer les conséquences.

Remarque 15. L'enseignant doit parler avec assurance.

Facile à dire, mais c'est précisément le plus difficile. Comment y parvenir ? L'expérience est essentielle et la situation s'améliore toute seule avec le temps. Mais cela ne suffit pas toujours. Il est vivement recommandé aux jeunes enseignants qui n'ont pas encore trop d'habitudes de se mobiliser pour progresser :

Remarque 16. 1) Ne pas rester inerte face à un public agité : se forcer à parler mieux ou plus fort. 2) S'appuyer sur le cours écrit : un tableau bien présenté et les étudiants peuvent suivre ; si bavardages bruyants, accélérer le cours jusqu'à ce que le calme revienne.

Certains d'entre nous ont des problèmes particuliers qui peuvent transformer leurs heures de cours en calvaire, et qui finissent par hanter leur existence. Les troubles les plus fréquents sont les défauts d'élocution, le manque d'assurance ou des difficultés à communiquer. Si les problèmes ne sont pas bénins, on peut toujours consulter un médecin ou un orthophoniste ; il n'y a aucune honte à cela, contrairement à ce que trop de gens pensent encore. Attention toutefois au piège des médecines magiques.

On en vient alors au problème majeur : le chahut.

Remarque 17. Ne pas accepter le statut de « professeur chahuté ».

Autrefois, il était impensable d'avouer son statut de professeur chahuté, le sujet était tabou. Les mentalités ont considérablement évolué sur ce genre de sujet. Aujourd'hui, on peut communiquer avec ses collègues, se soulager sans risquer d'être exclu de la communauté, et même recevoir des conseils ou un soutien.

Mon conseil en pareil cas est formel : il faut réagir immédiatement et avec détermination. Examinons plus en détails.

Remarque 18. Le chahut ne peut persister que si, à la fois
1) l'enseignant a un défaut de présentation (problème d'élocution, manque d'assurance, difficultés à communiquer, etc.)
2) Le cours est mal fait.

Les deux problèmes doivent être combattus simultanément.

Pour prendre de l'assurance, pour parler mieux en public, préparez vos cours en pensant à la façon dont vous allez les présenter. Entraînez-vous avec des effectifs réduits (parlez-en au chef du département). Trouvez vous-mêmes vos propres « trucs ». Tout plutôt que l'immobilisme.

En résumé :
Remarque 19.
1) Bien préparer son cours et le présenter de façon impeccable au tableau.
2) Résoudre ses problèmes de présentation dans la mesure du possible, en allant au besoin jusqu'à la consultation médicale.
3) Améliorer son assurance par l'expérience et par un travail personnel.

Par contre, attention à ne pas commettre les erreurs de comportement qui vont aggraver les problèmes. Par exemple, les attitudes familières ou, au contraire sévères, distantes, sont des sources de problèmes ; si vous n'avez pas une faculté de réaction suffisante, il vaut mieux rester plus neutre. Bien entendu, si vous avez une personnalité très originale, mais cohérente, si vos réactions sont à la hauteur des problèmes, tout vous est permis.

Autre erreur classique : la réaction trop molle par rapport à ce que la situation mériterait. « *Ah, mais ça suffit à la fin* » (intonation chantante) est une réaction qui discrédite l'enseignant, au même titre qu'une colère qui ne fait pas peur.

Remarque 20. Une réaction inadaptée peut être pire que pas de réaction du tout.

Il vaut mieux attendre d'avoir pris de l'assurance avant de se lancer dans des réactions dont on ne contrôle pas l'évolution.

Le conseil suivant est une précaution élémentaire :

Remarque 21. Ne pas accepter la charge d'un cours en amphi avant d'avoir l'assurance requise.

Le niveau du cours et des étudiants

J'invite les enseignants débutants à se méfier de tout ce que l'on dit du niveau des étudiants. De nombreux collègues estiment que les étudiants sont aujourd'hui inimaginablement faibles par rapport à autrefois. Il y a une raison à cela : c'est qu'on ne se voit pas progresser. Quand on nous parle de notions mathématiques qui nous sont familières, par exemple une série numérique semi-convergente, nous avons immédiatement une sorte d'image qui nous vient à l'esprit et qui nous permet de visualiser l'objet et toutes ses propriétés immédiates (et, si nous sommes un tant soit peu spécialistes, c'est tout un volume de propriétés qui nous vient à l'esprit, exagérations mises à part).

L'étudiant, au contraire, ne s'est encore fabriqué aucune image relative au concept qu'il vient d'apprendre ; ses hésitations ne sont pas synonyme de nullité, mais d'une période intermédiaire que tout le monde a connue, puis oubliée.

« *De mon temps...* » est une expression dont il faut se méfier. La Société Mathématique de France a distribué à une époque un papier qui répondait magnifiquement à cette complainte des enseignants : par des citations qui reculent dans le temps, ce papier montre que les gens ont toujours eu l'impression que le niveau de pensée régressait, ce qui ramènerait probablement le sommet de la pensée humaine à l'*homo habilis*.

Cependant, on peut penser que des décisions politiques (donner le baccalauréat à 80% de la population, à une certaine époque ; une telle décision peut être critiquée ou appréciée, mais notre propos n'est pas là), ont pu faire effectivement baisser le niveau de l'enseignement supérieur pendant quelques années.

De toute façon, quel que soit le résultat de nos analyses, nous n'avons pas le choix ; il faut

Remarque 22. Adapter le niveau du cours à celui des étudiants.

Cette phrase en elle-même n'est pas très précise et nous y reviendrons dans cette section. Toutefois, il faut signaler que personne n'a jamais vu un cours de mathématiques trop simple ! La tendance naturelle est de faire trop difficile ; si on se place dans les normes actuelles, on peut imaginer que

Remarque 23. Un cours trop difficile gêne au moins 95% de l'auditoire. Un cours trop simple en gênera au plus 5%.

Là encore, ces statistiques ne cherchent pas à être précises, mais avec un peu d'indulgence, l'image n'est pas très loin de la réalité.

Faire un cours difficile est très tentant, mais

Remarque 24. On ne fait pas cours pour se faire plaisir, mais pour être compris.

L'université française pose un problème très particulier. Presque tous les bons étudiants du premier cycle en mathématiques se trouvent dans les classes préparatoires aux grandes écoles. Cependant, de très bons candidats, pour des raisons variées, ont choisi l'université. À part ces exceptions, le niveau moyen des autres semble un peu faible devant la subtilité des programmes (de mon temps, c'était pareil !).

Remarque 25. Le niveau des étudiants dans les premières années de l'université est complètement hétérogène ; le niveau du cours doit en tenir compte.

Sur ce point, les opinions divergent. Certains collègues pensent qu'on ne peut pas diminuer le contenu du cours sans encourager la baisse du niveau des étudiants. La remarque suivante est évidente : un cours de niveau zéro et un cours de niveau infini auront le même résultat égal à zéro ; il ne reste plus qu'à déterminer les paramètres qui vont optimiser le résultat. Partant des programmes officiels, c'est à nous de trouver le niveau de difficulté adapté à notre public, par l'expérience, par notre perception de la réaction des étudiants, par les discussions avec les collègues, mais aussi par la réflexion personnelle.

Voici maintenant un exemple de choix possible. Pour cela, imaginons la situation suivante :

– 30% des étudiants ont un niveau inexplicable (un niveau tellement bas qu'on se demande comment ils peuvent se trouver à l'université),

– 30%, les faibles, arrivent au mieux à répéter les raisonnements les plus simples,

– 30%, les moyens, peuvent raisonnablement espérer la moyenne avec beaucoup de travail,

– 10% sont bons, certains d'un niveau exceptionnel.

Je recommande le choix suivant :

Remarque 26. Cibler systématiquement le cours sur les « moyens ». Compléter par de nombreuses explications très simples en visant les « faibles » (étant bien entendu qu'elles seront appréciées par tous). Glisser occasionnellement quelques subtilités pour les « bons ».

Ce dernier point sert en particulier à montrer que l'université ne dispense pas un « sous-enseignement ».

Le comportement vis-à-vis des étudiants

Cette section ne comporte que des évidences totales, et pourtant...

La règle d'or est la suivante :

Remarque 27. En toutes circonstances, l'enseignant doit rester « professionnel ».

Voici quelques remarques qui s'appliquent souvent et qui précisent la remarque ci-dessus.

Remarque 28. Ne jamais insulter ni vexer un étudiant.

Remarque 29. Ne pas décourager ; prendre l'habitude d'encourager l'étudiant qui progresse.

Remarque 30. Garder un calme absolu devant les erreurs mathématiques. Savoir les commenter sans le moindre agacement.

Mieux encore : on peut parfois remercier l'étudiant d'avoir fait une erreur instructive, faute de quoi une difficulté du cours serait passée inaperçue.

Remarque 31. Humour ou fantaisie nécessitent des contreparties pour éviter les dérapages, et en particulier une cohérence entre le cours et la personnalité de l'enseignant.

Bien sûr, s'il se présente une occasion exceptionnelle pour une plaisanterie bien à propos, à vous de jouer.

Enfin, est-il vraiment nécessaire de rappeler qu'il faut

Remarque 32. Arriver à l'heure, et surtout ne pas dépasser l'horaire.

Faciliter la compréhension

Remarque 33. Comprendre une notion, c'est savoir la comparer avec des situations analogues plus simples et bien comprises.

Voici quelques exemples.

– La formule de Taylor sera mieux comprise si on a déjà assimilé le théorème des accroissements finis.

– La formule sur le produit de deux séries entières ne peut pas être énoncée sans rappeler l'analogie avec les polynômes (la raison pour laquelle un produit de deux polynômes est un polynôme est bien comprise par les étudiants).

– Dans l'étude des fonctions de plusieurs variables, il faut toujours regarder le problème analogue à une variable (ou deux) avant de regarder le cas géneral. On risque de reconnaître un énoncé classique.

La remarque suivante devient alors évidente.

Remarque 34. Préparer un répertoire de telles remarques qui recouvre l'ensemble du cours.

Ce travail de préparation est d'autant plus facile que le niveau mathématique de l'enseignant est plus élevé.

Un raisonnement nouveau qui ne ressemble à rien de connu est difficile à assimiler ; il faut acquérir une vue d'ensemble alors que chaque détail est déjà une énigme. Il devient clair que

Remarque 35. La seule façon de comprendre un raisonnement est de le répéter autant que nécessaire.

Ce principe est contraire aux lieux communs sur la question. Pourtant, il peut aussi être recommandé aux jeunes chercheurs.

Faire des comparaisons, rabâcher les mêmes idées, donner des explications, tout cela prend du temps alors qu'il y a un programme à respecter. Est-ce judicieux ? Bien sûr, il appartient à chacun de s'organiser ; mais attention :

Remarque 36. Quelques raisonnements bien compris valent mieux qu'une grande quantité de charabia.

2 Les Travaux Dirigés

Le plus souvent à l'université, les enseignements sont divisés d'une part en cours magistraux en amphi, et, d'autre part, en TD (travaux dirigés) dans des salles de classe ordinaires. Les TD consistent à faire des séances d'exercices dans lesquelles les étudiants participent en passant au tableau mais aussi en posant ou en répondant à des questions.

La méthode habituelle qui consiste à faire chercher les exercices par les étudiants en classe n'a jamais été remise en cause. Il me semble pourtant que cela coûte un temps précieux qui pourrait être mis à profit pour faire des commentaires, et engager des dialogues, notamment autour des points délicats de l'exercice. Cela demande de la part de l'enseignant une plus grande maîtrise, à la fois de la partie mathématique et de la communication avec les étudiants. Ce paragraphe est écrit dans l'optique où c'est cette dernière méthode qui est utilisée ; mais pour ceux qui préfèrent procéder de la manière habituelle, l'essentiel de ce qui suit s'adapte sans mal.

Corriger un exercice

Le corrigé d'un exercice commence toujours de la même façon :

Remarque 1. Rappeler systématiquement au tableau l'énoncé de l'exercice en cours.

Voici un autre principe de base :

Remarque 2. La solution de l'exercice doit être entièrement rédigée au tableau par l'enseignant, sauf exception.

Les exceptions peuvent être, par exemple :

– l'étudiant au tableau a rédigé suffisamment bien ;

– l'exercice est trop simple ou trop classique ou trop proche d'un autre déjà bien rédigé ;

– une solution raccourcie est suffisante.

Remarque 3. Avancer lentement dans les explications et les solutions. Ne pas hésiter à répéter les points cruciaux et à récapituler l'ensemble de la solution. Ne pas oublier de faire des figures chaque fois que c'est possible.

En bref, rappelez-vous que l'étudiant met du temps à recopier le tableau, surtout s'il a du mal à comprendre.

Remarque 4. Ne pas se contenter de donner la solution. Il faut aussi faire des commentaires.

C'est notre rôle, et c'est évidemment la partie la plus difficile du métier d'enseignant, qu'on a tendance à escamoter. Faire des commentaires pertinents nécessite un niveau mathématique assez élevé, une bonne expérience et un stock de remarques personnelles sur le programme. On peut encore relever l'impact des commentaires avec des artifices, par exemple en faisant un peu de « spectacle » (l'art de raconter des histoires en public est réservé aux enseignants qui sont déjà à l'aise).

Voici quelques questions standard qui permettent d'introduire des commentaires et faire plus qu'un simple corrigé :

– Le résultat reste-t-il vrai si on supprime cette hypothèse ?

– Ce passage de la démonstration est-il nécessaire ?

– La solution qui vient d'être exposée est-elle correcte ?

Cette dernière question peut être posée à l'issue d'un corrigé par un étudiant qui vient de faire une erreur instructive (Il convient d'être très courtois envers l'étudiant, en lui précisant après coup qu'il ne s'agit pas d'une attaque contre lui, mais qu'il est de l'intérêt général d'insister sur cette erreur instructive). On peut pousser l'idée un peu plus loin en insérant dans le corrigé écrit au tableau une erreur volontaire, mais qui est très instructive, puis demander où est l'erreur. Il s'ensuit des discussions particulièrement profitables dans lesquelles les étudiants en viennent à douter de tout ; il est recommandé de ne pas se lancer dans de telles manœuvres si on n'est pas assez sûr de soi.

Les idées de commentaires sont inépuisables pour qui maîtrise son sujet et il vous appartient de les trouver et de les adapter à votre style.

D'autres exemples de commentaires sont à chercher dans l'histoire des mathématiques ou dans les applications, tout particulièrement aux autres sciences.

Remarque 5. S'il existe une deuxième solution suffisamment différente de la première, ne pas hésiter à la rédiger en détails.

Il est très profitable aux étudiants de découvrir deux solutions bien différentes d'un même exercice, à la fois sur le plan philosophique et pour une meilleure compréhension mathématique. Il se peut aussi que certains étudiants aient cherché à faire l'exercice, en partant dans la direction de cette deuxième solution, d'où un intérêt supplémentaire.

Remarque 6. Quand on utilise un résultat du cours (qu'il s'agisse du cours actuel ou d'un cours des années précédentes), il est impératif de rappeler l'énoncé complet, sauf exception.

En effet, tout d'abord cette méthode est irremplaçable pour retenir un résultat ; c'est lorsqu'on l'apprend pour la deuxième fois (ou plus) qu'un énoncé se comprend bien, ce qui montre la nécessité de rappeler un théorème, même s'il ne fait pas partie du cours actuel.

Le deuxième avantage, c'est de montrer que réécrire un énoncé au moment où on doit l'utiliser n'est jamais une perte de temps : c'est la seule façon de l'appliquer sans erreur.

Par ailleurs, beaucoup d'étudiants font un blocage quand, au cours d'un exercice, on utilise un théorème qu'ils n'ont pas compris ; un rappel écrit du résultat, accompagné de quelques explications, et le problème psychologique s'estompe.

Remarque 7. Il est parfois utile de réécrire au tableau une définition.

Car souvent les étudiants ont oublié. Les remarques précédentes peuvent être répétées ici, mais avec plus de modération.

Remarque 8. S'assurer que les étudiants ont compris.

Pour cela, inutile de poser la traditionnelle question : « *Y a-t-il quelqu'un qui n'a pas compris* », car personne ne répond jamais. Il faut tourner sa phrase avec plus d'habileté : « *La solution vous paraît-elle assez claire, ou préférez-vous que je*

la réécrive avec plus de détails ? » La réponse des étudiants n'est pas toujours celle qu'on attend.

Remarque 9. Laisser aux étudiants le temps de recopier ce qui est écrit au tableau ; laisser des temps morts entre deux exercices, ou chaque fois que vous sentez qu'ils ont besoin de se ressaisir.

Pendant ces temps morts, il est bon de les laisser discuter entre eux. Souvent, les étudiants utilisent les temps morts pour demander à leur voisin une explication.

Faire chercher les exercices

Je préconise fortement de ne pas perdre de temps à laisser les étudiants chercher les exercices en classe, mais au contraire de les faire chercher à la maison. Le temps gagné peut alors être utilisé pour faire des commentaires, donner des explications, faire les rappels de cours qui interviennent dans la solution. De toute façon, les conseils qui suivent s'appliquent quel que soit le mode d'enseignement choisi.

La première chose est de motiver les étudiants à chercher les exercices ; il doivent en comprendre l'importance.

Remarque 10. Chercher les exercices est le seul moyen de progresser.

La comparaison suivante est, à mon sens, à peine exagérée :

Remarque 11. Assister au corrigé sans avoir cherché, c'est comme assister à un match de tennis : ça paraît facile, mais ça ne suffit pas pour progresser.

Très souvent, les étudiants ne cherchent pas les exercices, mais étudient les corrigés. C'est une autre façon de travailler, certainement moins performante, mais il ne faut pas oublier que chaque étudiant a sa personnalité et que seul le résultat compte. Notre devoir est de tout faire pour qu'ils en viennent à chercher les exercices. On pourrait donner des devoirs à rendre chaque semaine, la solution idéale en quelque sorte ; mais cela impliquerait que nous consacrions un temps excessif à corriger des copies, au détriment de beaucoup d'autres tâches. Que faut-il faire ?

Remarque 12. D'une séance à l'autre, les étudiants doivent avoir une liste d'exercices à chercher pour la prochaine fois.

Par exemple, s'il y a une feuille d'exercices, indiquez les numéros de ceux qu'ils auront à regarder. S'il n'y a pas de feuille d'exercices, écrivez les énoncés au tableau.

Cependant, vous ne pouvez pas vous contenter de cela, sinon les étudiants ne feront aucun effort pour les chercher. Il faut les motiver :

Remarque 13. Présenter et commenter les exercices à chercher pour la prochaine fois (notamment avec des dessins) pour leur donner envie de chercher. Ne pas en donner trop à la fois.

Tous les moyens sont bons pour motiver les étudiants. Quand on commente un exercice à chercher pour la prochaine fois, on peut vraiment leur communiquer le désir de trouver la solution. C'est tout un art !

Remarque 14. Les étudiants ne cherchent que les exercices qui leur paraissent faciles. Il se découragent très vite devant les difficultés.

Par exemple, un exercice où il n'y a que du calcul est généralement jugé facile. Dès que l'exercice ne se réduit pas à une application directe d'un critère, seuls les deux ou trois meilleurs continuent à chercher.

Nous verrons plus loin comment doser le niveau des exercices.

Faire passer un étudiant au tableau

Les étudiants n'osent pas passer au tableau. Certainement s'agit-il de réflexes qui remontent à l'enseignement secondaire (timidité, peur, gêne, mauvais esprit, ou tout simplement paresse). Pourtant

Remarque 15. Passer au tableau, c'est :
– une leçon particulière,
– un entraînement pour les oraux,
– un entraînement pour les futurs enseignants.

Un étudiant qui croit avoir fait juste ne découvrira peut-être jamais son erreur s'il ne passe pas au tableau.

La première règle pour motiver, c'est ne pas démotiver :

Remarque 16. Aucune réflexion désobligeante envers l'étudiant au tableau, et cela quelles que soient ses erreurs mathématiques. Pas d'intonation agacée.

Certains enseignants se sentent obligés de montrer un agacement devant les erreurs, alors que chez d'autres cela vient tout seul ; c'est, à mon sens, un manque de professionnalisme dans les deux cas.

Remarque 17. Pas de bavardages quand un étudiant planche au tableau.

D'une part par correction vis-à-vis de lui, mais aussi parce que cela fait partie du déroulement du cours.

Remarque 18. Ne jamais rater une occasion d'encourager un étudiant qui passe au tableau.

Par exemple s'il est arrivé au bout d'un raisonnement, ou s'il a su expliquer un passage délicat, etc.

Remarque 19. Si l'étudiant se trompe, vous devez lui trouver des excuses pour qu'il ne se sente pas diminué vis-à-vis des autres.

Par exemple : « *Ne vous inquiétez pas si vous n'avez pas réussi à aller jusqu'au bout, c'est une difficulté classique* ».

Il se pose aussi l'important problème de savoir qui doit aller au tableau.

Remarque 20. Il vous appartient de trouver une stratégie personnelle, adaptée à votre style, pour désigner les étudiants qui doivent passer au tableau.

Voici quelques choix possibles :

– demander un volontaire (il y en a parfois),

– interroger à tour de rôle (vous devez auparavant trouver une parade contre l'enfer des étudiants nuls qui passent au tableau),

– demander qui a trouvé, puis en choisir un dans cet ensemble s'il est non vide. Sinon, choisir quelqu'un parmi ceux qui ont cherché. Si cet ensemble est à nouveau vide, vous pouvez faire le corrigé vous-même, mais en faisant des efforts pour provoquer le dialogue,

– passer dans les rangs en regardant les solutions qui vous sont proposées. Vous trouverez sûrement quelqu'un qui a quelque chose d'intéressant à exposer (ne serait-ce qu'une solution partielle, ou une erreur instructive),

– prévenir à l'avance celui qui sera interrogé sur tel exercice, en lui demandant de le préparer à la maison. Il faut alors choisir les étudiants à tour de rôle.

Le niveau des exercices

Quel niveau d'exercices faut-il choisir ? Aucune réponse ne fera l'unanimité au sein du corps enseignant. Certains pensent qu'abaisser le niveau des exercices aura pour inéluctable conséquence la baisse du niveau des étudiants. D'autres ne posent que des exercices infaisables, sans doute pour épater les collègues. En fait, il faut donner des exercices de niveaux variés. Soyons plus précis.

Remarque 21. Pour assimiler un concept nouveau, il faut commencer par une série d'applications immédiates des définitions. Même remarque pour les énoncés d'un type nouveau.

Avant d'attaquer des exercices composés portant soit sur un nouveau concept, soit sur un résultat difficile à appliquer (il y a une foule d'exemples possibles : résolution de systèmes linéaires, produit de matrices, dérivation sous le signe $\int$), il est indispensable de traiter des exemples numériques immédiats, autant que nécessaire.

Remarque 22. Graduer les exercices.

Plus précisément, pour accéder à un exercice de niveau moyen ou difficile, il faut au préalable traiter des exercices semblables, mais plus simples.

Remarque 23. Réserver les « exercices composés » pour la fin du chapitre.

Un exercice composé est celui dont la solution réunit plusieurs étapes de nature bien différente. L'étudiant ne peut y accéder que s'il est suffisamment à l'aise sur la partie du cours concernée.

Remarque 24. On progresse le plus avec des exercices adaptés à son niveau.

Malheureusement, le niveau des étudiants n'est pas homogène, comme il a déjà été dit. Comment choisir ?

Remarque 25. C'est à vous de déterminer le niveau des exercices en fonction de la réaction des étudiants ; vous décidez alors d'ajouter ou non des indications.

Si vous ne connaissez pas encore le niveau, si vous n'arrivez pas encore à interpréter les réactions des étudiants, sachez que

Remarque 26. Un exercice que vous pensez trop simple peut profiter à tous, tandis qu'un exercice trop difficile peut décourager les meilleures volontés.

Ce qui ne veut pas dire qu'il ne faut faire que des exercices enfantins.

Remarque 27. Il est nécessaire de glisser occasionnellement un exercice un peu subtil, mais seulement si :
– la solution n'est pas trop longue,
– le terrain a déjà été préparé par des exercices antérieurs,
– la solution ne fait appel qu'à des notions bien acceptées par les étudiants.

Le style des exercices est également un sujet de discussion. On ne parlera pas des « applications directes », qui ont été vues plus haut. Il faut distinguer les exercices purement calculatoires, ou purement algorithmiques, ou abstraits, ou intermédiaires. Dans cette dernière catégorie, il faut compter les exercices qui traitent

d'un exemple concret, mais en faisant appel à la fois à des calculs ou des algorithmes, et à des mécanismes d'une certaine généralité.

Remarque 28. Doser entre les exercices « algorithmiques », les exercices « théoriques », et les exercices « intermédiaires », ces derniers devant être majoritaires.

La rédaction

La rédaction reste un grand mystère pour les étudiants. Quand on leur dit que leur solution est mal rédigée, ils pensent qu'ils ont fait des fautes de français. Il faut d'abord se mettre d'accord sur le sens du mot « rédiger ».

Remarque 29. Rédiger une solution, c'est transformer une vision complète de la solution en une démonstration rigoureuse.

Un mathématicien professionnel n'est jamais sûr de trouver l'idée de la démonstration ; mais si on la lui donne, il est sûr de savoir la rédiger. Pour un étudiant, c'est bien différent. Même s'il voit quelle est l'idée, la transformer en une démonstration est souvent difficile.

Une mauvaise qualité de la rédaction n'est jamais due au manque de maîtrise de la langue (le correcteur comprend presque toujours une solution « mathématiquement claire » entachée d'une succession d'erreurs de langage), mais à une erreur mathématique : affirmation non justifiée (parce que la difficulté est restée inaperçue), non sens (une phrase qui n'a pas de sens ; c'est souvent une faute grave), explication incompréhensible (qui traduit une confusion), imprécision (par exemple, oublier de dire « il existe », ou « quel que soit », introduire de nouvelles lettres sans expliquer de quoi il s'agit, écrire une expression comme si elle dépendait de la variable muette qui apparaît dedans, etc. L'imprécision est la faute de rédaction la plus courante ; elle traduit un manque de maîtrise du sujet). Une solution peut être à peu près juste, mais avec une plus ou moins bonne rédaction. Les étudiants ont du mal à comprendre cela.

Remarque 30. Enseigner comment rédiger fait partie de notre travail.

Il faut donc en parler chaque fois qu'une solution est écrite au tableau : souligner les erreurs de rédaction, les commenter et proposer une correction modèle.

3 Le cours magistral

Dans ce paragraphe, nous ne parlerons que de la partie écrite du cours. La façon de le présenter a été décrite aux généralités du §1.

Avant toute chose, il faut rappeler qu'un cours doit être structuré.

Remarque 1. Découper le cours en chapitres et les chapitres en paragraphes, chacun ayant un titre.

Les titres des chapitres ou des paragraphes sont indispensables pour que l'étudiant se repère et pour donner du relief à l'ensemble du cours. Il est à peine moins important de numéroter ces chapitres ou paragraphes.

Un autre principe qui est à la base de tout cours :

Remarque 2. Un cours n'est pas une œuvre de référence, mais un exposé simplifié qui ne contient pas beaucoup plus que le strict minimum nécessaire à couvrir le programme.

Il est évident que la marge de manœuvre de l'enseignant est énorme, et que son niveau mathématique et sa responsabilité sont fortement sollicités.

Définitions et théorèmes

Remarque 3. La dénomination de « théorème » doit être réservée aux grands résultats et porter si possible un nom (exemple : le théorème de la base incomplète).

Il est essentiel de ne pas galvauder le terme « théorème » qui doit garder son aura. Un théorème qui porte un nom sera plus facile à retenir et contribuera à créer des points de repère.

Remarque 4. Se limiter aux théorèmes essentiels.

Les conséquences importantes du théorème seront appelées « corollaire » ; ceux-ci peuvent être d'une aussi grande importance que le théorème et doivent eux aussi avoir un nom, dans la mesure du possible.

Remarque 5. Les résultats dérivés d'un théorème, et qui ne sont pas absolument indispensables, ne doivent pas faire l'objet de nouveaux énoncés.

Ils peuvent apparaître sous forme de remarque ou d'exercice ; il n'y a pas besoin de les connaître par cœur. Le rôle de l'étudiant est plutôt de savoir les retrouver à partir du théorème dont ils découlent. D'une façon plus générale, il faut

Remarque 6. Tout faire pour réduire le nombre des énoncés.

Sinon le cours devient terne, plus rien ne s'en dégage.

Remarque 7. Ne pas sacrifier la clarté d'un énoncé pour gagner en généralité.

À moins d'avoir en vue des applications précises, et ce dans le cadre d'un enseignement de haut niveau (maîtrise), la généralité présente rarement un véritable intérêt, et ne doit pas dépasser ce qui est demandé dans le programme officiel. Je dirai même qu'une trop grande généralité est nuisible dans beaucoup de cas, car elle masque souvent le sens du résultat, et donne aux étudiants une fausse idée de la réalité mathématique.

Remarque 8. Lors d'une première approche, il vaut mieux choisir la formulation la plus simple.

Pour les définitions et les notations, le problème est similaire, bien qu'il soit beaucoup plus difficile de réduire leur nombre. Faut-il ou non faire l'économie d'une définition ? Cela fait partie des responsabilités de l'enseignant qui doit garder ce problème présent à l'esprit.

Remarque 9. Limiter le nombre de définitions et de concepts nouveaux, mais sans diminuer la portée du cours.

Attention bien sûr à ne pas supprimer certaines définitions ou certains concepts qui ajoutent à la compréhension.

Remarque 10. Les énoncés du cours sont classés en « théorème », « corollaire », « proposition », « propriété », « lemme », « exercice », « remarque », ou « exemple ».

Les propriétés apparaissent après les définitions, et s'appliquent à des résultats qui ne sont pas inattendus. Par exemple : « la limite du produit est le produit des limites », « la composée de fonctions continues est continue », sont typiquement des propriétés.

Les lemmes servent surtout à séparer les difficultés à l'intérieur d'une démonstration ; leur énoncé n'est pas forcément à retenir, sauf si l'enseignant le demande.

La décomposition d'un polynôme en facteurs premiers (disons sur les complexes) est un grand théorème. Sa démonstration nécessite plusieurs étapes. Les énoncés intermédiaires qui sont conséquence du théorème lui-même doivent être appelés « lemme » ; c'est ainsi que le théorème de d'Alembert-Gauss, ou théorème fondamental de l'algèbre, peut, par exemple, être présenté avec le titre : « Lemme 1 (Théorème fondamental de l'algèbre) ». Bien sûr, en première année, ce théorème doit être admis.

Les résultats dont l'énoncé est élaboré, et qui ne méritent pas la dénomination de « théorème », peuvent être appelés « proposition ».

Enfin, on peut toujours signaler des énoncés sous la forme de « remarque », « exemple », ou « exercice », selon les cas.

Exemples et commentaires

Remarque 11. Tout nouvel énoncé ou toute nouvelle définition doit être accompagné de commentaires et d'exemples, sauf exception.

Trouver des exemples instructifs n'est pas difficile, même si cela demande déjà un réel travail. Par contre, commenter un résultat ou une définition nécessite davantage de compétences. Examinons quelques pistes.

Remarque 12. Chaque fois que cela est possible, il faut replacer le théorème ou la définition dans son contexte historique.

Voilà une complication pour la préparation du cours ! En effet, l'histoire des mathématiques est très peu enseignée et beaucoup d'entre nous ne la connaissent pas assez pour être capables d'y faire référence. Je pense que tout responsable de cours devrait faire l'effort de se plonger dans l'historique des points critiques de son cours ; malheureusement, cela prend du temps. Il y a de bonnes références sur le sujet, et il n'est pas désagréable de s'en servir comme livre de chevet.

Remarque 13. Expliquer le sens des énoncés ou des définitions.

Le « dessin qui explique tout » reste évidemment le must de la pédagogie mathématique. En voici un exemple. Comment démontrer visuellement la formule, dite de Fubini,

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx \right) dy \,?$$

Le sens de cette formule se comprend aisément quand on dit que l'intégrale double est le volume d'un tas de sable (ici, D est la partie du sol qui supporte le tas de sable et le graphe de f en délimite la partie supérieure) ; on le découpe alors en tranches verticales très fines parallèles à l'axe des x, dont le volume vaut à peu près $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ multiplié par dy, autrement dit, le volume de la tranche est à

peu près égal à sa surface multipliée par son épaisseur. Il ne reste plus qu'à ajouter tous ces petits volumes, et le tour est joué.

Mais les dessins ne sont pas toujours possibles et il vous appartient de rechercher le commentaire ad hoc dans chaque cas particulier.

Les démonstrations

La démonstration reste le meilleur commentaire qu'on puisse faire sur un énoncé. Le problème est d'arriver à la faire comprendre.

Remarque 14. Pendant la démonstration, il faut avancer lentement en donnant des explications. Il faut rappeler les énoncés des résultats qu'on utilise et faire des figures chaque fois que c'est possible. Si la démonstration est un peu longue, ou si elle suit un scénario subtil, il est bon de récapituler l'ensemble en mettant en avant les idées directrices.

L'étudiant a ainsi la sensation d'avoir suivi et cela l'incite à venir au cours plutôt que d'étudier tout seul sur un livre.

Des simplifications dans le cours, comme la suppression d'énoncés (cf. Remarque 5 du §3) ou de parties du cours qui paraissent trop pointues pour une première approche, permettent de récupérer le temps investi dans les explications.

Voici maintenant un autre problème de pédagogie. Dans quels cas peut-on se passer d'une démonstration ; autrement dit, peut-on admettre un résultat ?

Remarque 15. Il vaut mieux « surexpliquer » certaines démonstrations qu'on estime instructives et, en compensation, en omettre d'autres qui le paraissent moins.

Omettre une démonstration est toujours une responsabilité : cela peut être interprété comme le refus de faire un point précis de son travail. Il ne faut pas que les étudiants le voient ainsi. Mais beaucoup de petites propriétés ont des démonstrations suffisamment standard pour être laissées en exercice.

Remarque 16. Bien choisir les démonstrations qu'on décide d'omettre. Compenser par un surcroît de commentaires et d'exemples, en donnant la sensation d'une grande rigueur.

Un cas où la démonstration peut être faite sur un exemple plutôt que dans le cas général est le théorème sur la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples. En effet, le cas général pose des problèmes de notation ; de plus, un exemple bien choisi contiendra déjà toute la difficulté et permettra un exposé incomparablement plus clair.

Omettre une seule démonstration importante peut également permettre de simplifier grandement le cours. Mais il faut être prudent ; certains collègues peuvent considérer cela comme une faute et il est bon de savoir leur répondre avec des arguments qui prouvent que le choix a été fait en connaissance de cause.

4 Le sujet d'examen

L'élaboration d'un sujet d'examen nécessite quelques précautions.

Remarque 1. Un sujet facile et long est la forme d'examen la plus sélective.

Un sujet difficile ne séparera pas forcément les moyens des mauvais.

Remarque 2. Un sujet trop facile reste très sélectif, à condition d'être suffisamment long.

Cela ne paraitra pas évident à tout le monde. Pourtant, on remarque qu'un étudiant qui n'est pas fort, devant un exercice très simple, se met à hésiter sans qu'on sache pourquoi, alors qu'un bon étudiant hésitera en moyenne beaucoup moins. L'épreuve facile et longue évite les « accidents » (les risques d'accident avec un énoncé difficile sont élevés, alors que sur un exercice facile, ils sont réduits) et mesure mieux la valeur des candidats, car il y a beaucoup de questions (analogie possible : un match en trois sets est plus sélectif qu'un match en un set).

Une épreuve trop difficile n'est pas classante ; en poussant les paramètres à l'extrême, une épreuve où tout le monde a eu zéro ne fournit aucune indication, alors qu'il n'y a pas d'analogue avec les épreuves trop faciles.

Bien entendu, les termes « facile » ou « difficile » sont à interpréter en fonction du niveau des étudiants. Pour un concours d'entrée aux ENS, les principes restent les mêmes, mais il faut faire une translation sur le niveau.

Remarque 3. Un sujet doit être composé de plusieurs exercices indépendants.

Il y a une multitude de raisons à cela :
1) Cela permet de mieux recouvrir le programme.
2) On peut ainsi poser à peu près exactement les questions qu'on veut.
3) Les étudiants peuvent passer à l'exercice suivant sans culpabiliser.
4) Ils peuvent commencer par celui qui les inspire le mieux.
5)Il y a un côté rassurant.
6) Les risques d'accident sont moindres.
7) Dans un problème long, comme cela se pratiquait autrefois, une bonne partie des questions portaient nécessairement sur des points éloignés du cours.
8) La correction des copies avec exercices indépendants est plus simple (par exemple, on peut corriger exercice par exercice, ce qui est préconisé par certains collègues).

Remarque 4. Graduer les exercices.

En fait, l'idéal est de commencer par un ou deux exercices immédiats qui permettent de détecter ceux qui ne savent vraiment rien et qui donnent déjà 5 ou 6 points à tous les étudiants moyens (attention aux surprises !). Ensuite, il faut mettre des exercices moins simples, mais accessibles à tous, la sélection se faisant sur le fait que les moins bons inventent des difficultés là où il n'y en a aucune. Enfin, un dernier exercice doit fournir une occasion pour un raisonnement légèrement plus élaboré ; la dernière question, facultative, pourra être astucieuse.

Remarque 5. Pas d'originalité un jour d'examen : le sujet doit être le plus près possible du cours et des TD.

Les étudiants jugent inacceptable qu'on leur pose un sujet d'examen qui n'est pas assez en rapport avec le cours. Ils ont l'impression qu'ils ont travaillé pour rien, d'où un sentiment d'injustice.

En pensant cela, ils ont à la fois tort et raison, car d'avoir travaillé sur une partie des mathématiques fait progresser dans les autres parties, à condition qu'elles soient assez voisines. De toute façon, le plus simple, et qui ne coûte rien, est de poser presque la même chose que ce qu'ils ont vu en cours ou en TD. Cela les motive très fort pour travailler, sachant qu'ils sont au courant des sujets des années précédentes.

Remarque 6. Le sujet d'examen doit être accompagné d'un barème précis.

C'est tellement rassurant pour les étudiants ! Cela fait partie de leurs revendications les plus courantes, de même qu'un sujet proche du cours. Il n'y a aucune raison de leur refuser cela, bien au contraire. Certains collègues précisent que le barème qu'ils proposent est seulement indicatif. C'est une possibilité qui permet de se couvrir en cas d'imprévu.

Remarque 7. Rédigez entièrement le corrigé du sujet (ou faites-le rédiger par un collègue) pour vous assurer qu'il correspond bien à ce que vous pensez.

On risque de découvrir que certaines questions étaient beaucoup plus difficiles que prévu, voire infaisables ! J'ai moi-même trop souvent fait cette erreur pour ne pas insister tout particulièrement sur ce point essentiel.

INFORMATIONS

Bilan de la session 2004 du CNU
Section 26[1]

Qualifications : bilan 2004

Qualifications aux fonctions de Maître de Conférences

Le nombre de candidats inscrits était de 463. Le nombre de dossiers non parvenus aux rapporteurs est de 76. Sur les 387 dossiers examinés, 259 candidats ont été qualifiés (soit 67 %, à comparer à 60 % en 2003 et 66 % en 2002). Environ les trois-quarts des refus de qualification sont justifiés par une inadéquation de la candidature au domaine disciplinaire recouvert par la section.

Comme les années passées, deux repères importants ont été utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrivait pas de façon canonique dans les thématiques de la section.

1. L'aptitude à enseigner les mathématiques.

2. L'activité scientifique. Dans les domaines d'application des mathématiques, cette activité ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés. L'évaluation prend en compte l'apport méthodologique, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation par des applications réalistes.

Recommandations aux candidats (et aux directeurs de thèse)

Le dossier de candidature doit faire apparaître clairement :

– La capacité à enseigner les mathématiques dans un cursus de Licence de Mathématiques.

– Un travail de recherche en mathématiques appliquées. L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline ne semble pas suffisant à lui seul pour la qualification en section 26.

– Une activité liée à la recherche en mathématiques appliquées dans la période précédant la demande de qualification.

Le dossier de candidature doit être présenté avec soin et clarté. Nous demandons que les rapports préalables à la soutenance de thèse de doctorat soient joints au dossier (quand ils existent et sont publics, ce qui est le cas des doctorats français). Le dossier doit contenir un CV détaillé, les références complètes des travaux du candidat, et au minimum quelques-uns de ceux-ci.

[1] rédigé par le bureau de la section : Emmanuel Lesigne, François Golse, Bernard Gleyse et Olivier Raimond.

La présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses récentes. Mais elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes. La publication d'un article en seul auteur, ou sans son directeur de thèse, peut être un élément positif d'appréciation.

En ce qui concerne les dossiers relevant pour une grande part d'une autre discipline que les mathématiques (informatique, biologie, physique, mécanique, traitement du signal,...), le dossier doit faire clairement apparaître la contribution du candidat dans le domaine des mathématiques appliquées. Pour les candidats titulaires d'un doctorat récent, il est naturel d'attendre qu'un ou plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification. (Cette condition n'est bien sûr pas absolue).

Enfin, signalons l'existence de guides édités par les sociétés savantes (livret du candidat SMF-SMAI, voir `www.emath.fr`) qui donnent des conseils très utiles aux candidats sur les postes universitaires.

Qualifications aux fonctions de Professeur

Le nombre de candidats inscrits était de 123. Le nombre de dossiers non parvenus aux rapporteurs est de 18. Sur les 105 dossiers examinés, 77 candidats ont été qualifiés soit 73 %, stable par rapport aux années précédentes). Environ les deux-tiers des refus de qualification sont justifiés par une inadéquation de la candidature au domaine disciplinaire recouvert par la section.

Les points essentiels examinés dans un dossier de candidature à la qualification aux fonctions de Professeur sont les suivants :

– La capacité à enseigner les mathématiques dans un cursus de Master de Mathématiques.

– Un travail de recherche significatif en mathématiques appliquées, avec une activité avérée dans la période récente.

– La démonstration d'une réelle autonomie scientifique.

– L'aptitude à l'encadrement et à la direction de recherches.

Sur la base de ces critères, la majorité des dossiers examinés ne posaient aucun problème.

Commentaire

Que ce soit pour les MCF ou les Professeurs, le nombre de nouveaux qualifiés est relativement stable ces dernières années, alors que le nombre de postes ouverts au concours MCF 26 est passé de 80 à 44 entre 1999 et 2004, et le nombre de postes ouverts au concours Prof 26 est passé de 40 à 26 pendant la même période. Suite à des redéploiements le nombre d'enseignants-chercheurs en mathématiques a diminué de façon sensible dans la période récente dans notre pays. Alors que la plus grande partie de la recherche mathématique française est effectuée dans les universités et que l'école mathématique française est reconnue pour sa qualité, cette situation est inquiétante pour l'avenir. Nous devons alerter les décideurs locaux et nationaux sur un risque de déclin qui serait dommageable à l'ensemble des sciences de notre pays.

Promotions : bilan 2004

Pour les promotions, le CNU doit gérer la pénurie. Il ne fait aucun doute pour chacun des membres du Conseil que le nombre de promotions offertes est très faible par rapport au nombre de collègues pouvant légitimement y prétendre pour la qualité de leur travail scientifique, de leur investissement pédagogique et des services rendus à la communauté dans l'administration de la recherche ou de leurs établissements.

Les dossiers de candidature à une promotion doivent contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière (et non des trois dernières années, comme c'est demandé par l'administration). À côté du CV et de la liste complète des travaux (classés par type de publication), le dossier doit comporter des informations précises sur les activités pédagogiques, administratives, et les services rendus à la communauté universitaire.

Chaque dossier de candidature est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi.

Promotions à la hors-classe des MCF

Nombre de promotions offertes : 12
Nombre de collègues promouvables : 283
Nombre de candidats : 121

Liste des promus :
Adelman Omer (Paris 6), Alcantara Barthélémy (Versailles),
Benabdallah Assia (Aix-Marseille 1), Bourdarias Christian (Chambéry), Chalabi Abdallah (Toulouse 3), Cherif Abdoul Aziz (IUFM Nice), Doisy Michel (INP Toulouse), Freund Micael (Paris 4), Martin Daniel (Rennes 1), Noirfalise Robert (Clermont 2), Tchou Nicoletta (Rennes 1), Zone Daniela (Nice).

(Il y a dans cette liste une promotion « en voie 2 ». La voie 2 concerne les collègues de « petits établissements » dont la promotion n'est examinée qu'au niveau national. C'est le cas dans les IUFM.)

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble d'une carrière de MCF. À côté du travail de recherche et de l'activité d'enseignant, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

L'âge moyen des promus est 54 ans. Les âges s'étendent de 45 à 64.

Promotions à la première classe des PR

Nombre de promotions offertes : 13
Nombre de collègues promouvables : 270
Nombre de candidats : 166

Liste des promus :
Amirat Youcef (Clermont 2), Ben Abdallah Naoufel (Toulouse 3), Clerc (ép. Bergounioux) Marie (Orléans), Dias Frédéric (ENS Cachan),
Fernandez Roberto (Rouen), Lavielle Marc (Paris 5), Limnios Nikolaos (Compiègne),

Mohammadi Bijan (Montpellier), Mokkadem Abdelkader (Versailles), Privault Nicolas (La Rochelle), Quincampoix Marc (Brest), Villani Cédric (ENS Lyon), Wu Liming (Clermont 2).

(Il y a dans cette liste une promotion « en voie 2 ». La voie 2 concerne les collègues de « petits établissements » dont la promotion n'est examinée qu'au niveau national. C'est le cas à l'ENS Lyon.)

Pour l'examen des promotions à la première classe des professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants :

– domaine scientifique, âge et ancienneté comme professeur,
– faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques,
– responsabilités diverses (direction d'équipe, de projet ou d'établissement, responsabilités pédagogiques, activités éditoriales, appartenance à différentes commissions,...),
– activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications),
– valorisation de la recherche, collaborations extra-mathématiques,
– encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leurs dossiers.

Le CNU veille à une répartition équilibrée des sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistiques) qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques.

L'âge moyen des promus est 43 ans. Les âges s'étendent de 30 à 55.

Promotions au 1er échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 4
Nombre de collègues promouvables : 201
Nombre de candidats : 80

Liste des promus :
Cottet Georges Henri (Grenoble 1), Merle Frank (Cergy), Roynette Bernard (Nancy), Thera Michel (Limoges).
L'âge moyen des promus est 54 ans. Les âges s'étendent de 41 à 59.

Promotions au 2nd échelon de la classe exceptionnelle des PR

Nombre de promotions offertes : 4
Nombre de collègues promouvables : 29
Nombre de candidats : 20

Liste des promus :
Blum Jacques (Nice), Bosq Denis (Paris 6), Charrier Pierre (Bordeaux 1), Puel Jean-Pierre (Versailles).
L'âge moyen des promus est 58 ans. Les âges s'étendent de 53 à 64.

Analyse rapide par genres

Parmi les MCF promouvables à la hors-classe, 27 % sont des femmes, et elles représentent la même proportion parmi des candidats (et 25 % des promus).
Parmi les PR en 2nde classe, 14 % sont des femmes, et elles représentent 12 % des candidats (et 1 promu sur 13).

Dans les deux corps, on n'observe donc pas d'autocensure significativement plus importante chez les femmes que chez les hommes. La proportion de femmes parmi les promus devra être analysée sur un bilan pluri-annuel.

Congés pour recherche ou conversion thématique : bilan 2004

(*Un changement de procédure est à signaler : à partir de cette année les demandes de CRCT non satisfaites au niveau du CNU pourront être examinées au niveau local et être obtenues sur le contingent accordé à chaque établissement.*)

Nombre de semestres offerts : 8.
Nombre de demandes : 8 pour 1 semestre, 21 pour 2 semestres.

Le CNU propose d'accorder un semestre de CRCT à :
Antoine Xavier (Toulouse 3), Durand (ép. GUERRIER) Viviane (IUFM Lyon), Duret (ép. MILLET) Annie (Paris 1), Grammont (ép. Fedoriw) Laurence (St Etienne), KAVIAN Otared (Versailles), Le Jan Yves (Paris 11), Lewandowski Roger (Rennes 1), Tomal Tristan (Paris 9).

Espérant se voir accorder quelques semestres supplémentaires le CNU propose la liste complémentaire suivante (pour un semestre chacun) :
1. Butucea (ép. Rio) Cristina (Paris 10).
2. Lamberton Damien (Paris 12).
3. Mazet Olivier (INSA Lyon).
4. Cornet Bernard (Paris 1).
5. Delcroix Antoine (IUFM Guadeloupe).
6. Fan Ai Hua (Amiens).
7. Fourati Sonia (INSA Rouen).
8. Kavian Otared.
9. Renault Jérôme (Paris 9).
10. Duret (ép. Millet) Annie.
11. Tomala Tristan.
12. Lewandowski Roger.

Dernière nouvelle (10 septembre 2004) : le ministère a bien trouvé dans ses tiroirs quelques semestres supplémentaires, et les demandes des huit premiers classés de cette liste complémentaire ont été satisfaites. Bilan final : 14 semestres et une année de CRCT ont été obtenus.

Intégration des assistants dans le corps des MCF

Cette procédure nationale est gérée par une commission regroupant l'ensemble des disciplines, après avis du CNU sur les dossiers. 250 emplois de MCF étaient ouverts cette année pour des assistants. Il y avait 422 candidats, toutes sections confondues. Parmi les 18 candidats de 26^{e} section, la commission en a retenu 14, dont les noms suivent.

Berlan épouse Philip Claude, Boudin épouse Dunau Marie-Françoise, Brouard Guy, Carbonnel épouse Boulaire Marie-Claude, Corbel Pierre, Daubin Pascal, Giarmachi

Marcel, Legris Laurent, Pares François, Rosenfeld Henri, Roy Elisabeth, Tournadour Yvonne, Tricot Guy, Vercasson Alexandre.

Les membres de la commission nous ont transmis la recommandation suivante : les dossiers doivent être bien préparés ; ils doivent contenir au minimum un CV et un document mentionnant le nombre d'heures de Cours, de TD ou de TP effectuées par an au moins pour les dernières années.

Prix Fermat 2005

Le prix Fermat récompensera les travaux de recherche de mathématiciens dans des domaines où les contributions de Pierre de Fermat ont été déterminantes :

* énoncés de principes variationnels ;
* fondements du calcul des probabilités et de la géométrie analytique ;
* théorie des nombres.

À l'intérieur de ces domaines, l'esprit du prix est de récompenser plutôt des résultats de recherche qui sont accessibles au plus grand nombre des mathématiciens professionnels. D'un montant de 20 000 Euros, le prix Fermat est décerné tous les deux ans à Toulouse ; la neuvième édition aura lieu au cours de l'année 2005.

Le règlement du Prix, les modalités de dépôt des candidatures, sont disponibles auprès de :

Prix Fermat de recherche en mathématiques
Service Communication
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4, France

ou bien sur le site `http://www.ups-tlse.fr`

COURRIER DES LECTEURS

À propos « Des mathématiciens dans le conflit israélo-palestinien. »

Sous le titre « *Des mathématiciens dans le conflit israélo-palestinien* » la *Gazette* a publié en particulier deux longs textes, l'un de Marwan Aloqeili, Maître de Conférences à l'Université de Bir-Zeit, l'autre de Zeev Schuss, professeur à l'Université de Tel-Aviv.

Le texte de M. Aloqeili décrit de manière factuelle les conditions de vie d'un universitaire en Cisjordanie. Hormis une phrase sur « *l'intransigeance israélienne* », M. Aloqeili se tient aussi près que possible d'une objectivité rigoureuse, évitant avec soin toute confusion entre citoyens et gouvernement israélien.

Le texte de M. Schuss, sans contester sérieusement les faits relatés par M. Aloqeili, et écrit sur le ton de "tous des terroristes" (l'expression « *terrorists amidst a supporting civilian population* » revient deux fois), est d'une autre facture.

Une phrase y résonne terrible à nos oreilles : « *The mathematical work coming out of these "politically active" universities is nil. Faculty members who did not care for this type of campus life, packed and left for USA, Canada, Europe,...* ».

En d'autres termes, "Un bon (mathématicien) palestinien est un (mathématicien) palestinien en exil".....

Interdire à un peuple l'accès à l'éducation sert rarement la cause de la paix. Prétendre comme le fait M. Schuss, que c'est un juste prix à payer pour "lutter contre le terrorisme" est une thèse surprenante de la part d'un citoyen, et indigne d'un enseignant.

Le reste de l'argumentaire de M. Schuss tient en ces quelques mots, utilisés par ceux qui savent tout justifier, jusqu'au pire : « *... there is no nice and tidy way to fight terrorists hiding behind supporting civilians* ».

Quant à l'accusation finale d'antisémitisme, on n'ose demander à qui elle s'adresse ! Doit-on rappeler qu'à la base de presque toutes les formes d'antisémitisme, on trouve justement la notion de "responsabilité collective" qui sous-tend tout le discours de M. Schuss ?

Ce texte haineux et diffamatoire n'avait pas sa place dans la *Gazette*. Non seulement il insulte M. Aloqeili et les collègues palestiniens, mais encore caricature les positions de nombreux collègues israéliens.

Simple membre de la SMF, et n'étant pas responsable du contenu de la *Gazette*, je prie néanmoins Marwan Aloqeili et les collègues palestiniens de bien vouloir accepter ma part d'excuses.

Claude Viterbo
Paris

Le conflit armé en Israël et Palestine est douloureux, comme tous les conflits armés, et ses protagonistes expriment des sentiments et des positions qui peuvent nous paraître dangereuses, injustes ou absurdes. Mais les positions déplaisantes font partie de la réalité du conflit. Le dossier présenté par la Gazette avait pour but d'informer et nous nous devions de n'exclure aucun avis. La constitution de ce dossier ne fut pas facile et cela malgré de nombreuses demandes auprès d'institutions et de collègues.

— Le comité de rédaction

LIVRES

L^2-Invariants : Theory and Applications to Geometry and K-Theory
Wolfgang Lück
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 44, Berlin, Springer, 2002.
595 p. ISBN : 3-540-43566-2. 119 €

Je voudrais d'abord remercier Damien Gaboriau pour ses remarques éclairantes sur une version préliminaire de ce texte.

On peut dire que ce sujet (les invariants L^2) prend sa source dans un article remarquable de M. Atiyah en 1974. Il y définit les nombres de Betti L^2 d'une variété compacte et montre une formule de Gauss-Bonnet pour ceux-ci. Ce papier fut le départ de cette théorie, il contient les premières définitions et résultats et il pose de nombreuses questions. Je ne saurais trop recommander la lecture de cet article aux personnes intéressées par l'aspect analytique du sujet.

Voyons donc comment sont définis ces nombres de Betti L^2 : si (M^n, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n, son revêtement universel

$$\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$$

est naturellement équipé d'une métrique qui fait de π une isométrie locale et alors $\pi_1(M)$, le groupe fondamental de M, agit isométriquement sur $(\tilde{M}, \tilde{g})$. On peut identifier les fonctions sur M et les fonctions $\pi_1(M)$-invariantes sur $\tilde{M}$. On note maintenant Δ_p le laplacien de Hodge deRham agissant sur les p-formes différentielles de M (ou de $\tilde{M}$). Le célèbre théorème de Hodge deRham identifie le noyau de cet opérateur sur M avec le p-ième groupe de cohomologie à coefficient réel de M. Si on note H_p le noyau de Schwartz du projecteur orthogonal sur ce noyau : pour $(x, y) \in M \times M$, $H_p(x, y)$ est un homomorphisme de $\Lambda^p T^*_y M$ dans $\Lambda^p T^*_x M$. C'est alors un petit exercice de montrer que

$$\dim \ker \Delta_p = \int_M \mathrm{Tr}\ H_p(x, x) dvol_g,$$

et cette quantité vaut $b_p(M)$, le p-ième nombre de Betti de M. Elle est en particulier indépendante de la métrique. Et lorsque $\tilde{H}_p$ est le noyau de Schwartz du projecteur orthogonal sur le noyau L^2 de Δ_p sur $(\tilde{M}, \tilde{g})$, ce projecteur commute à l'action de $\pi_1(M)$, et donc la fonction

$$x \in \tilde{M} \mapsto \mathrm{Tr}\ \tilde{H}_p(x, x)$$

est $\pi_1(M)$-invariante, le p-ième nombre de Betti L^2 de M est défini par

$$b_p^{L^2}(M) = \int_M \mathrm{Tr}\ \tilde{H}_p(x, x) dvol_g.$$

Ces nombres de Betti L^2 s'interprètent aussi comme une dimension de von Neumann de l'espace des formes harmoniques L^2 sur $\tilde{M}$. Dans son papier, M. Atiyah montre que l'on a une formule de Gauss-Bonnet :

$$\sum_p (-1)^p b_p^{L^2}(M) = \chi(M).$$

Et il pose la question de savoir si ces nombres sont des invariants d'homotopie. C'est J. Dodziuk qui répond peu après à cette question, en particulier le travail de J. Dodziuk montre qu'on a une définition de ces nombres de Betti L^2 à partir d'une triangulation et on peut donc définir ces nombres de Betti L^2 pour n'importe quel CW complexe de type fini (qui pour tout p a un p-squelette fini). En fait c'est B. Eckmann qui en 1945 introduit une structure euclidienne sur l'espace des chaînes d'un « CW complexe » (B. Eckmann parle de polyèdres) et qui obtient une décomposition de Hodge qui permet de calculer l'homologie à l'aide de chaînes harmoniques. D'ailleurs une des applications majeures de B. Eckmann concerne les revêtements finis. En particulier, si un groupe discret G a un classifiant BG de type fini, on peut définir ses nombres de Betti L^2. Par exemple, si F_p est le groupe libre à p générateurs, son classifiant est un bouquet de p cercles et le revêtement universel de ce classifiant est « le » graphe de Cayley du groupe (c'est un arbre). Pour calculer les nombres de Betti L^2, on peut employer plusieurs méthodes : un calcul direct des espaces correspondants et de leurs dimensions de von Neumann ou utiliser la formule de Gauss-Bonnet, ou encore comme Cheeger et Gromov, utiliser une suite exacte de Mayer-Vietoris et on trouve que $b_0^{L^2}(F_p) = 0$ et $b_1^{L^2}(F_p) = p - 1$.

Dans la préface, W. Lück nous explique pourquoi il aime ce sujet : on y trouve des conjectures importantes liées à la topologie algébrique, la théorie des groupes, l'analyse fonctionnelle et la géométrie riemannienne ou spectrale ; de plus les approches algébriques, analytiques, géométriques ont chacune contribué à résoudre des parties de ces conjectures et aussi ces nouveaux invariants ont permis de découvrir de nouveaux résultats spectaculaires sur d'autres domaines des mathématiques, on peut citer les travaux récents de D. Gaboriau qui montre que les nombres de Betti L^2 d'un groupe sont projectivement des invariants d'équivalence mesurables et aussi les travaux de T. Cochan, K. Orr et P. Teichner qui construisent des nouveaux invariants de nœuds et utilisent pour cela l'invariant eta L^2 défini par J. Cheeger et M. Gromov (pour plus de précisions cf. l'exposé de P. Teichner au congrès I.C.M. de Pékin). Dans l'introduction, W. Lück nous donne un vaste panorama des résultats et conjectures reliés aux invariants L^2. La première partie du livre est consacrée aux définitions des nombres de Betti L^2 ; leurs propriétés élémentaires sont démontrées.

Je vais maintenant décrire ce livre mais dans un ordre qui ne respecte pas celui du livre. J'espère ne pas trop dérouter le lecteur.

La deuxième partie du livre est consacrée aux invariants de Novikov-Shubin. Lorsque (M^n, g) est une variété riemannienne compacte de dimension n, son revêtement universel est noté $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$. Soit $E_p(\lambda, x, y)$ le noyau de Schwartz du projecteur spectral (sur l'intervalle $]0, \lambda[$) du laplacien Δ_p en restriction aux p-formes L^2 cofermées sur $\tilde{M}$. Comme précédemment, la fonction $x \mapsto \mathrm{Tr}\ E_p(\lambda, x, x)$ est π_1-invariante, on pose alors

$$\theta_p(\lambda) = \int_M \mathrm{Tr}\ E_p(\lambda, x, x).$$

En 1986, Novikov et Shubin introduisent les invariants suivants :

$$\alpha_p(M) = \liminf_{\lambda \to 0} \frac{\log \theta_p(\lambda)}{\log \lambda} \in [0, \infty],$$

et lorsque $\theta_p(\lambda) = 0$ dans un voisinage de zéro, on pose

$$\alpha_p(M) = \infty^+.$$

Cet invariant mesure la quantité de spectre du laplacien près de zéro et il gouverne aussi la décroissance en grand temps du noyau de la chaleur $e^{-t\Delta_p}$. On peut de même définir un analogue discret de ces invariants pour un CW complexe et les théorèmes de A. Efremov, M. Gromov et M. Shubin montrent que ces invariants analytiques et discrets coïncident et qu'ils sont, comme les nombre de Betti L^2, des invariants d'homotopie de M.

Ces deux familles d'invariants (nombre de Betti L^2 et invariants de Novikov Shubin) sont en général délicats à calculer. Concernant $\alpha_0(M)$ on sait grâce aux travaux de N. Varopoulos qu'il calcule le taux de croissance polynomiale du groupe fondamental. Dans un quatrième chapitre, l'auteur nous expose les résultats de J. Lott et lui-même sur les invariants L^2 des variétés compactes de dimension 3 qui entrent dans la classification de W. Thurston donc conjecturalement (voire mieux suivant G. Perelman) toutes les variétés compactes de dimension 3. Le calcul est possible grâce aux techniques cohomologiques expliquées dans les deux premières parties. Dans une cinquième partie, l'auteur décrit les travaux de M. Olbrich qui a calculé les invariants L^2 des variétés localement symétriques, ces travaux reposent sur une utilisation fine de la formule de Plancherel de Harish Handra et de résultats sur la $(\mathfrak{G}, K)$ cohomologie.

Une partie fascinante des invariants L^2 est son lien avec la théorie des groupes. Ces invariants (nombres de Betti L^2 et invariants de Novikov-Shubin) L^2 fournissent une nouvelle classe d'invariants des groupes, *a priori* uniquement pour les groupes dont le classifiant est un CW complexe de type fini mais dans une sixième partie, l'auteur nous explique comment étendre ces définitions (quitte à autoriser la valeur $+\infty$) à tous les groupes. En 1986, dans un article superbe, fondamental et inspiré, J. Cheeger et M. Gromov ont aussi donné une telle généralisation. Au lieu de considérer la cohomologie réduite à coefficients dans la représentation régulière de G (*i.e.* G agissant à gauche sur $l^2(G)$), W. Lück considère l'homologie à coefficients dans l'algèbre de von Neumann de G, $\mathcal{N}(G)$: c'est la sous-algèbre des opérateurs bornés de $l^2(G)$ qui commute avec l'action de G. Et la difficulté analytique est réduite à donner une définition idoine de la dimension de von Neumann pour tout les $\mathcal{N}(G)$ modules. Cette homologie contient l'homologie L^2 et les invariants de Novikov-Shubin et la force de cette approche est qu'elle se traite dans un cadre homologique classique.

Les liens entre les invariants L^2 et la théorie des groupes sont présentés dans le septième chapitre notamment le résultat de B. Eckmann qui permet de majorer l'écart entre le nombre de générateurs et celui de relations en fonction des premiers nombres de Betti.

Dans son article, M. Atiyah demande aussi si ces nombres de Betti L^2 sont des nombres rationnels, plus exactement sa question est de donner des exemples où ceux-ci ne sont pas des nombres rationnels. Cette question a été généralisée en

demandant si les nombres de Betti L^2 d'un groupe Γ sont dans le sous-groupe de $\mathbb{Q}$ engendré par les inverses des cardinaux des sous-groupes finis de Γ. En 1986, J. Cheeger et M. Gromov avaient construit des groupes pour lesquels les nombres de Betti L^2 sont des réels constructibles[1] arbitraires. Cependant cette construction ne permettait pas de trouver des groupes opérant librement et proprement sur un CW complexe avec des nombres de Betti L^2 irrationnels. Il faut donc supposer que le classifiant du groupe soit compact. D'une part, on sait grâce aux travaux de R. Grigorchuk, P. Linnell, T. Schick et A. Zuk que cette dernière conjecture est fausse et d'autre part grâce aux travaux de P. Linnell on connaît une classe assez grande de groupes pour lesquels la réponse à cette conjecture générale est affirmative. La dixième partie nous livre un panorama très complet sur cette question et une preuve des résultats de P. Linnell.

La troisième partie est dédiée à la torsion L^2. Elle a deux versions, une associée à un CW complexe qui est le pendant de la torsion de Reidemeister, et l'autre analytique qui est le pendant de la torsion de D. Ray et I. Singer. Cependant, pour être proprement défini, il faut que le spectre de Δ_p sur $\tilde{M}$ soit assez petit près de zéro. Plus précisémment, il faut que

$$\int_0^1 \frac{\theta_p(\lambda)}{\lambda} d\lambda < \infty.$$

Un théorème de D. Burghelea, T. Kappeler, L. Friedlander montre que lorsqu'elles sont définies, ces deux torsions L^2 coïncident. Ce théorème est l'analogue du théorème de J. Cheeger et W. Müller démontrant l'égalité entre la torsion analytique de Ray-Singer et la torsion de Reidemeister.

La neuvième partie traite de questions reliées à la K-Théorie des algèbres de von Neumann. Je ne connais pas ce sujet, je m'abstiendrai donc de dire des âneries.

Ce livre contient aussi quatre chapitres très instructifs et documentés faisant le point sur des questions très intéressantes. Le quatorzième chapitre traite des liens entre les invariants L^2, le volume minimal et le volume simplicial. Suivant M. Gromov on sait que la nullité du volume minimal implique la nullité du volume simplicial (c'est la norme de la classe fondamentale de M en homologie L^1), la nullité des nombres de Betti L^2 et de tous les nombres caractéristiques. Une conjecture est que lorsque la variété est asphérique, alors la nullité du volume simplicial implique celle des nombres de Betti L^2. Le douzième chapitre aborde la question de la conjecture du zéro dans le spectre. Cette conjecture due à M. Gromov prédit que lorsque M est une variété compacte dont le revêtement universel $\tilde{M}$ est contractile alors pour un p entier, zéro est dans le spectre de Δ_p sur $\tilde{M}$. Si comme J. Lott, on pose la question sans l'hypothèse « $\tilde{M}$-contractile » (mais non compacte) alors M. Farber et S. Weinberger ont un contre exemple. Cette conjecture est reliée à la conjecture de I. Singer qui fait l'objet du onzième chapitre. Cette conjecture prédit que si M est une variété à courbure sectionnelle strictement négative alors les nombres de Betti L^2 de M sont nuls sauf en degré égal à la moitié de la dimension. Grâce au théorème de M. Atiyah, on obtiendrait ainsi la conjecture de H. Hopf qui prévoit que pour une telle variété on aurait $(-1)^{\dim M/2}\chi(M) > 0$. M.

[1] Les nombres constructibles sont les nombres réels dont on peut calculer chaque décimale en temps fini avec une machine de Turing.

Anderson a trouvé des exemples de variétés simplement connexes à courbure sectionnelle strictement négative qui violent la conclusion de la conjecture de Singer. Cependant ces exemples n'ont pas de quotient compact. Le résultat le plus abouti vers cette conjecture de Singer est un travail remarquable de M. Gromov sur les variétés kähleriennes.

La treizième partie est consacrée à deux conjectures (dite du déterminant et d'approximation). La conjecture de l'approximation est une généralisation potentielle d'un résultat de W. Lück qui répondait à une question de M. Gromov. Si (M, g) est une variété riemannienne compacte et si $\Gamma_i \subset \pi_1(M)$ est une suite de sous-groupes normaux telle que

$$\cap_i \Gamma_i = \{e\}$$

alors

$$b_p^{L^2}(M) = \lim_{i \to \infty} \frac{b_p(\tilde{M}/\Gamma_i)}{[\pi_1(M) : \Gamma_i]}$$

et

$$\theta_p(\lambda) \leq -C/\log(\lambda), \text{ pour } \lambda \text{ proche de zéro.}$$

La conjecture du déterminant concerne le déterminant de Fuglede-Kadison d'un morphisme associé à une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}G$. Il se trouve que ces deux questions sont reliées.

On peut trouver que ce livre formalise un peu trop un sujet bien vivant et que cela nuit à une lecture linéaire du livre (mais les mathématiques sont-elles bien linéaires ?). On peut aussi estimer que ce livre est un tantinet trop algébrique. Fort de son expertise dans ce sujet, W. Lück nous a livré un livre personnel qui contient les fondements de la théorie, les développements récents de cette théorie, une présentation claire, instructive et complète sur des conjectures très intéressantes, une bibliographie monumentale et exhaustive et des exercices qui permettent au lecteur de tester si sa compréhension est satisfaisante.

Gilles Carron, Université de Nantes