SOMMAIRE DU Nº 100

Éditorial

Le 8 juillet prochain Henri Cartan aura cent ans. La *Gazette des Mathématiciens* a décidé de fêter l'événement à travers son numéro 100, et donc avec un peu d'avance. Beaucoup des articles de ce fascicule, mais pas tous, réfèrent à Henri Cartan.

Nous remercions les personnes qui ont bien voulu collaborer à cet hommage.

Bon anniversaire Monsieur Cartan !

— *Colette Anné*

Mot du Président

Lors d'une récente visite au Korean Institute for Advanced Study (KIAS) à Séoul, j'ai demandé à son président pourquoi le financement de cet institut était exclusivement public. Il m'a répondu qu'il consacrait ses efforts à utiliser les subventions de l'état et n'avait pas besoin de dépenser son énergie à rechercher d'autres fonds. Il a suffi d'un scientifique au gouvernement il y a une dizaine d'années pour donner cette impulsion qui a été maintenue.

La situation financière de l'État français n'est pas bonne, et le gouvernement cherche à faire des économies. Le Ministère du Budget concentre les crédits sur ce qui est « utile ». Le fait, pour Bercy, que la recherche en fasse partie ne va pas de soi. C'est fort regrettable, c'est même consternant, mais en tout cas il est de la responsabilité de l'ensemble de la communauté scientifique de faire savoir aux responsables politiques et aux contribuables l'importance vitale du rôle des chercheurs pour l'avenir de notre société.

Les sociétés savantes ne sont certainement pas là pour défendre des intérêts corporatistes ni pour agir comme des groupes de pression ; ce ne sont pas des syndicats. En revanche c'est une de leurs missions de faire connaître à la fois aux autorités et au public non averti la place stratégique de la recherche fondamentale pour la France et l'Europe.

Une des difficultés que nous rencontrons pour nous faire entendre par nos dirigeants vient du fait que l'intérêt direct des politiciens se situe à court ou moyen terme, alors que le financement public de la recherche fondamentale se voit récompensé à long terme. Les responsables d'autres pays, comme la Corée du Sud, ont pourtant compris le véritable enjeu que cela représente, et dans l'intérêt de leur nation, ils soutiennent vigoureusement les recherches dans les sciences de base. Tenter d'éclairer les décideurs français sur ces questions est un des rôles que remplit la SMF avec d'autres sociétés savantes.

À la suite de l'initiative du collectif Sauvons la Recherche (que soutient la SMF), un certain nombre de collègues ont cessé d'assumer des responsabilités administratives pendant un certain temps ; il faut en revanche intensifier toutes les activités tournées vers la diffusion de l'information ; les manifestations comme la Fête de la Science ou les rencontres Sciences et Sociétés doivent être multipliées. La récente journée au Centre Pompidou consacrée à la « face cachée des mathématiques » a attiré un public nombreux et réceptif, les questions ont été nourries et pertinentes – la soif de connaissance est une réalité, les chercheurs doivent répondre à l'attente des citoyens. Le Palais de la Découverte est aussi un élément privilégié de la communication vers les jeunes. Une mission d'information conduite il y a moins d'un an par la Commission des affaires culturelles du Sénat constate que l'écart ne cesse de se creuser entre la science et le citoyen. Le faible pourcentage de jeunes dans les filières scientifiques est inquiétant pour l'avenir. Pour y remédier, il faut privilégier la place de la science dans les medias. Les valeurs actuellement mises en avant dans notre société sont rarement liées au domaine intellectuel. Le succès, la célébrité, la richesse, la réussite au sens de la société dans laquelle nous vivons sont bien éloignés des qualités que respectent les scientifiques.

Les actions de la SMF ne seront efficaces que si elles sont relayées localement par ses adhérents. Une réflexion approfondie est en train de se mettre en place, je vous encourage tous à y participer activement.

Je voudrais conclure mon dernier mot du président en souhaitant un heureux anniversaire à un ancien président de la SMF, Henri Cartan, qui fêtera ses 100 ans début juillet. Une journée sera consacrée à cet événement le lundi 28 juin 2004, à l'École normale Supérieure, et la SMF est fière de s'y associer.

Vie de la société

Le 18 mars a eu lieu au Centre National d'Art Contemporain Georges Pompidou une journée organisée par la SMF, la SMAI, l'IHÉS et pour la Science, consacrée à « la face cachée des mathématiques ». Les informations sur cette manifestation sont disponibles sur le site internet[1] de la SMF.

De nouveaux accords de réciprocité ont été signés entre la SMF et la Société Mathématique Iranienne d'une part, et la Société Mathématique Coréenne d'autre part.

La brochure « Explosion des Mathématiques » a été partiellement traduite en finnois pour une version électronique du magazine SOLMU[2] de la Société Mathématique Finlandaise. Des traductions en persan, hindi et anglais sont en cours, d'autres sont envisagées pour le chinois et le coréen.

La SMF a fait part à la Real Sociedad Mathematica Española de sa pleine solidarité à la suite des attentats meurtriers qui ont frappé Madrid le 11 mars 2004.Le premier Congrès Canada/France des sciences mathématiques se tiendra du 12 au 15 juillet 2004 à Toulouse[3].

La SMF a envoyé le communiqué[4] qui suit à l'agence AFP pour affirmer son soutien au collectif « Sauvons la Recherche » et soutenir la pétition[5].

Texte du communiqué envoyé le 8 mars 2004 à l'AFP

« *Avec d'autres sociétés savantes, la Société Mathématique de France s'associe au collectif « Sauvons la recherche » pour demander au gouvernement de prendre des mesures immédiates comportant notamment des créations d'emplois scientifiques permanents et la tenue d'états généraux de la recherche.*

Les mathématiques jouent un rôle croissant dans la société actuelle. En biologie, par exemple, des méthodes statistiques récentes sont employées pour décoder le génome humain et des outils géométriques sont nécessaires pour comprendre la structure de l'ADN. De même l'imagerie médicale, la robotique, les techniques

1 http://smf.emath.fr/VieSociete/Rencontres/Beaubourg2004.html
2 http://solmu.math.helsinki.fi/
3 http://smc.math.ca/Reunions/Toulouse2004/
4 http://smf.emath.fr/InfoDiverses/AvenirRecherche01-04.html (communiqué à l'AFP)
5 http://recherche-en-danger.apinc.org/

de conception assistée par ordinateur, la transmission et la protection de l'information comportent toutes une part importante de mathématiques. De nombreux secteurs économiques requièrent ainsi l'activité de personnes compétentes en mathématiques et capables de parfaire leurs connaissances dans ce domaine au cours de leur carrière.

Si ces faits commencent à être bien connus, on sait moins que ces utilisations des mathématiques sont souvent le fruit de progrès récents et parfois très pointus dans cette discipline. Régulièrement, des recherches internes aux mathématiques et sans connexions immédiates avec des domaines d'applications, menées au départ sous la seule impulsion de la curiosité intellectuelle des mathématiciens, ont trouvé des applications pratiques inattendues. Une des raisons de ce fait surprenant peut être trouvée dans la capacité d'abstraction des mathématiques, un même objet mathématique (une même équation par exemple) pouvant régir des phénomènes très différents. C'est pourquoi les mathématiciens insistent tellement sur la nécessité impérieuse de préserver leur liberté dans le choix des sujets de recherche : l'histoire des mathématiques, qui s'est déroulée sur plusieurs millénaires, leur montre que c'est une méthode extrêmement efficace pour garantir l'innovation et pour assurer la qualité et la diversité des applications. Cette attitude permet l'ouverture aux autres disciplines : la confiance qu'ont les mathématiciens en la validité de leur démarche les assure que leur dialogue sera fécond.

Dans notre discipline, recherche et enseignement sont étroitement liés. La grande majorité de la recherche mathématique est assurée par des milliers d'enseignants-chercheurs présents dans les universités et répartis dans des laboratoires soutenus par le CNRS et par les universités. Le soutien du CNRS aux laboratoires se manifeste par la mise à leur disposition de quelques centaines de chercheurs et de quelques dizaines de postes d'accueil destinés à des enseignants-chercheurs et à des invités étrangers. L'INRIA emploie aussi de nombreux mathématiciens dans ses projets de recherche.

L'école mathématique française, largement ouverte à l'accueil de collègues du monde entier, équipée de structures efficaces et modernes, est une des toutes premières du monde. Mais ce niveau d'excellence est fragile, et sera remis en cause dans les années qui viennent si l'accueil des nouvelles générations de mathématiciens et de mathématiciennes n'est pas assuré au moment où de nombreux collègues vont partir à la retraite.

Le plus inquiétant dans la situation actuelle est la mise en place d'un cercle vicieux : moyens insuffisants pour les organismes de recherche et les universités, découragement des jeunes docteurs qui ne trouvent pas de débouché par manque de créations de postes, désaffection pour les études scientifiques. Les conséquences des amputations budgétaires de ces deux dernières années sont particulièrement dramatiques. L'annulation au dernier moment par le CNRS d'invitations programmées de scientifiques étrangers a eu un effet désastreux sur la réputation internationale de la France. Les retards dans le versement des subventions promises et les annulations de crédits créent des difficultés de gestion considérables. Mais nous considérons que ceci n'est pas le plus grave : le problème crucial est l'impossibilité pour les organismes de recherche et les universités de recruter une fraction significative des très brillants jeunes chercheurs récemment formés. On voit ainsi, après une formation très exigeante, des jeunes mathématiciens et mathématiciennes vivre dans la *précarité, et devoir choisir entre s'exiler (pour quelques années ou pour toujours), et se résigner à un emploi où leurs compétences ne seront pas mises en œuvre. C'est un drame pour l'avenir de la recherche en France et une grande perte pour l'État, qui a financé leur formation. Une planification à long terme du recrutement des chercheurs et des enseignants-chercheurs est indispensable.*

La Société Mathématique de France demande donc la tenue d'états généraux de la recherche. Ce sera pour elle l'occasion d'insister sur l'importance que la communauté mathématique attache à la liberté de la recherche, à la fluidité entre l'enseignement supérieur et la recherche, à l'emploi des jeunes scientifiques. Tous les efforts doivent être faits pour promouvoir dans notre pays l'esprit de recherche, de partage du savoir, d'ouverture, de dialogue et d'accueil aux jeunes générations dont nous aurons besoin pour répondre aux défis du futur. »

MATHÉMATIQUES

Trois quarts de siècle avec Henri Cartan

Jean Cerf

Dans le dossier que *Le Monde* de ce 3 mars 2004 consacre à « *Matière grise : la bataille mondiale* », on lit tout au début des propos du biologiste E. E. Baulieu recueillis par le journal : « *Les mathématiciens français sont parmi les tout premiers du monde.* » Par-delà la remise en cause de certains excès bourbachiques, j'ai la conviction (largement partagée je l'espère) que cette situation est en grande partie héritée d'un groupe de jeunes gens qui, dans les années trente, ont conçu le projet d'un traité « prenant les Mathématiques à leur début. » Dans ce groupe je vois au premier rang Henri Cartan, entouré de ses amis André Weil et Jean Dieudonné.

J'ai eu le privilège de croiser souvent la route d'Henri Cartan. La première fois, c'était (d'après lui) à Strasbourg en 1930 ; j'ai certes oublié cette rencontre – j'avais deux ans – mais j'ai gardé un net souvenir des années qui ont suivi. Cartan était un collègue de mon père et un ami de ma famille, ami admiré mais un peu redouté pour son esprit caustique ; on se faisait aussi du souci pour sa santé fragile ! Puis je l'ai revu en 1940 à Clermont, où l'université de Strasbourg avait été *repliée* et plus tard à La Bourboule, après la catastrophe qu'il avait pressentie. Et de nouveau à Strasbourg en 1945 après le grand trou d'où ma famille sortait indemne, et pas la sienne. Ensuite à Paris, lui professeur et moi élève à l'École normale : le cours aux élèves de 2^e^ année où il nous a appris ce qu'était une variété différentiable, et où un inconnu (c'était Alexandre Grothendieck) s'est permis de dialoguer avec lui d'égal à égal depuis le fond de la salle ; le premier Séminaire Cartan de Topologie (1948) dont j'ai fait sous sa houlette l'exposé n° 3, ensuite entièrement rédigé par lui ; et souvent dans sa famille, Boulevard Jourdan, où j'étais un peu comme un enfant de plus. Puis comme patron de recherche qui ne *donnait* pas de sujet, mais qui m'a signalé un jour l'article de Feldbau sur les homéomorphismes des sphères, qui a été le point de départ de ma thèse.

Dès avant cette époque, j'étais assez proche de lui pour recueillir parfois ses confidences, comme celle-ci, dont je me souviens, sur René Thom, qu'il *découvrit* avant tout le monde en dépit de leurs esprits si différents : « *Thom est un garçon rempli d'idées, mais que c'est dur de les lui faire mettre par écrit !* » Puis au fil du temps : ses batailles, le plus souvent victorieuses, pour « *remonter le niveau de la Sorbonne en Mathématiques* » (la formule est de lui) ; ses vains efforts pour qu'une chaire du Collège de France soit créée pour André Weil. Son engagement précoce à une époque où celà demandait une grande hauteur de vue, en faveur de la réconciliation franco-allemande, cette *utopie* dont la réalisation est aujourd'hui un de nos motifs d'espoir face à des conflits en apparence insolubles. Ses engagements pour la défense des Droits de l'Homme partout dans le monde, et pour la construction d'une Europe fédérale, à laquelle il attache tant de prix.

Jean-Pierre Serre a écrit : « *Je crois que le style de Cartan est ce qu'on peut trouver de mieux en Mathématiques* ».

Je crois que le style de Cartan est ce qu'on peut trouver de mieux dans la vie. Merci, Monsieur Cartan, de nous montrer par votre exemple qu'il est possible de vieillir en devenant de plus en plus humain.

De la formule d'Atiyah-Singer aux complexes parfaits, souvenirs du séminaire Cartan-Schwartz

Luc Illusie

« *Illusie, il faut vous acheter une machine à écrire !* » C'est le premier conseil que Cartan m'ait donné. Un conseil précieux, dont je lui suis toujours reconnaissant. Nous sommes en novembre 1963. Le séminaire Cartan-Schwartz [CS] sur la formule d'Atiyah-Singer a commencé. Mes notes manuscrites de l'exposé de Cartan sur les groupes K viennent d'être distribuées aux auditeurs. On est consterné par mon écriture en pattes de mouche. La prochaine fois, c'est promis, je taperai à la machine. La prochaine fois, c'est pour un exposé sur le caractère de Chern et la classe de Todd. Mon premier exposé de séminaire ! Quand Cartan me le propose, j'ignore tout de la question. Mais, miracle, après un entretien avec lui, tout s'éclaire, le plan est tracé, l'exposé prêt à composer. N'empêche que, le moment venu, je tremblais, même si tout s'est bien passé. Je me rappelle, à la fin, une discussion animée avec un jeune que je rencontrais pour la première fois, et dont l'énergie et l'imagination débordantes m'avaient ébloui : Jean-Louis Verdier. Il nous manque...

On mesure mal, de nos jours, l'importance qu'avait un séminaire comme le séminaire Cartan pour la formation des jeunes mathématiciens. D'abord, il s'agissait d'un séminaire « à thème », d'une durée d'un an, genre aujourd'hui disparu. Cartan choisissait, parmi les résultats récents, un théorème ou une théorie suffisamment riche pour justifier d'y consacrer un séminaire. En début d'année, il répartissait les exposés entre les volontaires. L'exposé, une fois fait, devait être rédigé dans le mois suivant. Une discipline rigoureuse, qui était observée. Au lieu des « séminaires tournants » actuels, où, chaque semaine, on va, souvent sans conviction, écouter un orateur sur un sujet chaque fois différent, le séminaire Cartan demandait des participants un investissement sérieux et durable. C'est au séminaire Cartan, puis, dans les séminaires Grothendieck, qui en conservaient le principe, que j'ai appris le métier. Rien n'était laissé dans l'ombre. Il n'y avait pas de « boîte noire ». Les préliminaires et rappels nécessaires étaient faits en détail. Les démonstrations n'étaient pas seulement « esquissées », mais présentées complètement. Cartan tenait à ce que l'on comprenne, souci légitime, qui n'est plus si répandu, me semble-t-il. Combien de fois l'ai-je vu interrompre un orateur pour lui demander « d'éclairer notre lanterne ». Bien entendu, le séminaire était une occasion privilégiée de rencontres et de discussions, qu'un fort centre d'intérêt commun rendait plus fécondes.

Mais revenons au séminaire Cartan-Schwartz. J'y ai appris à exposer et à rédiger, sous la houlette de Cartan (et de Douady, qui m'a beaucoup aidé à cette époque). J'y ai aussi, tout simplement, découvert le plaisir de la recherche. Dès que j'avais une idée ou une question, même naïve, je n'hésitais pas (j'en ai un peu honte aujourd'hui) à téléphoner à Cartan. Il me répondait toujours avec bienveillance. Parfois, s'il avait un doute, il me disait : « Je vais demander à Serre », et il me rappelait peu après (avec la réponse). Classes de Chern et complexes de de Rham devaient rester pour moi un thème favori, sur lequel je suis souvent revenu. À la fin du séminaire, Cartan m'a proposé, comme sujet de thèse, de généraliser la formule d'Atiyah-Singer aux familles. La formule d'Atiyah-Singer classique [A1] s'écrit

$$i_a(d) = i_t(d).$$

Le membre de gauche, $i_a(d)$, dit *indice analytique*, est l'indice d'un opérateur elliptique $d : E^0 \to E^1$ entre fibrés vectoriels complexes sur une variété C^∞ compacte X, *i.e.* la différence $\dim \operatorname{Ker} H^0(X,d) - \dim \operatorname{Coker} H^0(X,d)$ entre les dimensions de deux espaces vectoriels complexes de dimension finie. Le membre de droite, $i_t(d)$, dit *indice topologique*, est, *a priori*, seulement un nombre rationnel, défini comme $(-1)^n f_*(\mathrm{ch}(d)\,\mathrm{Todd}(TX \otimes \mathbb{C}))$, où n est la dimension de X, $f_* : H^*_X(TX, \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ est le morphisme de Gysin associé à la projection f de X sur un point, $\mathrm{Todd}(TX \otimes \mathbb{C})$ la classe de Todd du fibré tangent complexifié, et $\mathrm{ch}(d)$ le caractère de Chern de l'élément de $K_X(TX)$ défini par le symbole de d (l'indice X signifiant « à support dans X »). Cette formule est analogue à celle de Riemann-Roch-Hirzebruch en géométrie algébrique. Ce que demandait Cartan, c'était un analogue de la formule de Riemann-Roch-Grothendieck, pour un morphisme $f : X \to Y$ propre et lisse entre variétés C^∞ compactes et d un opérateur (ou complexe) elliptique *relativement à Y*. J'avais commencé à réfléchir à la définition, dans ce cadre, de l'indice analytique $i_a(d)$, qui doit être un élément de $K(Y)$. J'étais parvenu à une définition locale (sur Y), mais je ne voyais pas comment globaliser. Cartan m'a alors conseillé d'aller voir Grothendieck, qui, m'a-t-il dit, devait avoir des idées sur la question. Des idées, Grothendieck en avait, en effet, et plus que je ne pouvais digérer sur le moment. Mais cette première rencontre a été pour moi décisive, bien au-delà du point technique qui me préoccupait, puisqu'elle devait déterminer toute l'orientation future de mes recherches.

J'aimerais dire quelques mots de la manière dont Grothendieck a résolu, très simplement, le problème en question (cf. [SGA 6 II, Ap. 2]). L'outil, qu'il m'a expliqué alors, et qui devait avoir de nombreuses applications, est la notion de *complexe parfait* (cette terminologie fut en fait choisie par Grothendieck plus tard). Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un espace (voire un site) annelé, en anneaux non nécessairement commutatifs. Un complexe parfait sur S est un complexe de $\mathcal{O}_S$-modules (à gauche) qui, localement, est isomorphe, dans la catégorie dérivée, à un complexe borné à composantes facteurs directs de $\mathcal{O}$-modules libres de type fini. Si S est un espace compact, annelé par le faisceau des fonctions continues complexes, il est facile de montrer qu'un tel complexe est *globalement* isomorphe, dans la catégorie dérivée $D(S, \mathcal{O}_S)$, à un complexe borné de $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de type fini, et a donc une classe dans $K(S)$. Dans le cas du problème envisagé plus haut, ce que j'avais construit (sans le savoir) était un complexe parfait sur Y. Le résultat de Grothendieck me fournissait l'élément de $K(Y)$ que je cherchais. Quant à la définition de l'indice topologique, et la démonstration de la formule d'Atiyah-Singer dans ce cadre relatif, elles furent données quelque temps après par Shih [S] et, sous une forme plus forte, par Atiyah-Singer [A2].

Pour reconnaître qu'un complexe est parfait, il existe des critères commodes, dont le prototype est le suivant. Prenons pour S un espace réduit à un point, annelé par un anneau noethérien à gauche A. Soit E un complexe de A-modules à gauche. Pour que E soit parfait, il faut et il suffit que les groupes de cohomologie $H^i(E)$ soient de type fini sur A, et qu'il existe un intervalle borné $[a,b]$ de $\mathbb{Z}$ tel que, pour tout A-module à droite M, on ait $Tor_q^A(M,E) = 0$ pour $q \notin [a,b]$. Ces critères sont exposés, dans un degré de généralité malheureusement décourageant, dans [SGA 6, I, II]. Parmi les applications des complexes parfaits en géométrie algébrique, signalons :

(a) critères de semi-continuité ou de continuité pour la cohomologie des fibres d'un morphisme ([SGA 6 III], voir [I] pour une présentation récente) ;

(b) formule de Riemann-Roch-Grothendieck [SGA 6] ;

(c) formule des traces de Grothendieck en cohomologie étale ([G], [SGA 5]).

Quarante ans ont passé. À l'époque, Cartan me paraissait âgé. Il était pourtant plus jeune que je ne suis aujourd'hui. Et il était vif comme la poudre ; il l'est resté. Le revoyant récemment, j'ai évoqué son séminaire, et son conseil pour la machine à écrire. Il m'a confié que Weil, jadis, lui avait donné le même ...

C'est avec amour et reconnaissance que, pour son centième anniversaire, je lui dédie respectueusement ces quelques lignes.

Bibliographie

[CS] Séminaire Henri Cartan, 16^{e} année (1963/64), dirigé par Henri Cartan et Laurent Schwartz, Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur elliptique, W. A. Benjamin, inc., 1967.

[A1] M. F. Atiyah and I. M. Singer, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 422-433.

[A2] M. F. Atiyah and I. M. Singer, The index of elliptic operators, IV, Ann. of Math.(2) 93 (1971), 119-138.

[G] A. Grothendieck, Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Sém. Bourbaki 1964/65, n^{o} 290, 31-45, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced studies in pure math., North-Holland Pub. Comp., Masson et Cie , 1968.

[I] L. Illusie, *Grothendieck's existence theorem in formal geometry*, ICTP Trieste, 2003.

[SGA 5] *Cohomologie ℓ-adique et fonctions L*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965/66, dirigé par A. Grothendieck, SLN 589, Springer-Verlag, 1977.

[SGA 6] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1966/67, dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, SLN 225, Springer-Verlag, 1971.

[S] Shih, Weishu, Fiber cobordism and the index of a family of elliptic diferential operators, Bull. Amer. Soc. 72 (1966), 984-991.

Au même « congrès œcuménique », de gauche à droite : Jacques Dixmier (à l'écoute), Jean Dieudonné (annotant une rédaction), Pierre Samuel (bic au bec), André Weil (à l'extrême droite sur le banc), Jean Delsarte (sur une chaise au soleil) et Laurent Schwartz (stylo en main, debout sous le parasol). Étaient aussi présents à ce congrès : Roger Godement et Jean-Pierre Serre (membres de Bourbaki), Armand Borel et Gerhard P. Hochschild (visiteurs), Pierre Cartier (cobaye), sans compter les « figurants » (femmes, enfants, paysans et animaux domestiques) dont il est fait mention dans le compte rendu de ce congrès.

Henri Cartan (à gauche) et Samuel Eilenberg au congrès Bourbaki de Pelvoux-le-Poët (Hautes Alpes), tenu entre le 25 juin et le 8 juillet 1951. À cette époque, Cartan et Eilenberg composaient ensemble ce qui devint la première grande monographie d'algèbre homologique (Princeton University Press, 1956).

Souvenirs personnels sur Henri Cartan

Pierre Samuel[1]

Ma première rencontre avec Henri Cartan date d'août 1940, à Toulouse, où avait lieu l'oral, pour la « zone libre », du concours d'entrée à la Rue d'Ulm. Les « 5/2 » nous avaient dit que c'était un examinateur « gentil », contrairement à certains examinateurs de l'X qui cherchaient à déstabiliser les candidats. En fait Henri Cartan s'efforçait de bien faire parler le candidat afin de déterminer ce qu'il avait de prometteur. J'ai retrouvé cette qualité lorsque, bien plus tard, nous nous trouvions ensemble dans les jurys de thèse : comparant des candidats qui étaient passés devant nous, les bonnes questions qu'il leur avait posées lui permettaient de déterminer lequel était le plus prometteur ; la suite a montré qu'il ne se trompait pas.

Je l'ai vu à nouveau en 1944-1945, à l'École, dans la préparation à l'Agrégation. Ses critiques des leçons faites devant lui étaient incisives et impeccables. Comme j'avais écrit à Bourbaki pour signaler des erreurs dans les exercices alors publiés, il s'intéressa à moi et me fit venir, avec René Thom, comme « cobaye » au Congrès Bourbaki qui eut lieu à l'École en juillet 1945. Ce fut pour moi une révélation.

Puis j'eus (1945-1947) une bourse de recherche à Princeton et j'en revins avec un sujet de thèse de géométrie algébrique, principalement inspiré par Claude Chevalley. Lorsque cette thèse fut prête, en 1949, je demandai à Henri Cartan d'être du jury en me fournissant un sujet de « seconde thèse » : ce furent les relations entre l'homologie et l'homotopie ; il passa beaucoup de temps à m'indiquer les articles à lire et à s'assurer que je dominais bien ce sujet, nouveau pour moi.

Dans l'intervalle j'étais devenu membre à part entière de Bourbaki. Lors des Congrès, j'admirais ses interventions, toujours incisives, et sa connaissance approfondie de multiples branches de la Mathématique. Lorsqu'une de ses propositions sur la manière de présenter une question dans le *Traité* n'était pas aussitôt retenue, il prenait à part, pendant les promenades, divers membres du groupe pour les convaincre du bien fondé de sa proposition ; tantôt il y parvenait, tantôt sa proposition sortait améliorée de ces discussions. Également, dans les trains qui nous amenaient au Congrès, il nous communiquait son enthousiasme pour des découvertes récentes, par exemple la notion de fonctorialité et divers points de son livre avec S. Eilenberg.

Bien que nos domaines de recherche aient été assez séparés, notre amitié et nos convergences s'approfondirent. Peu à peu, et surtout lorsque je me mis à m'intéresser à l'écologie, il me communiqua son enthousiasme pour l'Europe.

J'admirais aussi ses incessantes actions pour les mathématiciens persécutés. Juste après mai 68, nous fûmes tous deux ouverts à certaines revendications étudiantes, par exemple celle de faire un travail personnel dans le cadre d'un certificat de maîtrise. Nous nous fîmes transférer de Paris-Centre à Orsay en 1970, et là j'admirai ses efforts pour que les structures de la future université de Paris XI (ou Paris-Sud) fassent bien cohabiter recherche et enseignement.

[1] Professeur émérite à l'université de Paris-Sud

Faute de compétence, je laisse à d'autres le soin de parler de ses travaux sur les fonctions de plusieurs variables complexes, la topologie algébrique, l'algèbre homologique, etc. Je sais qu'ils sont fondamentaux et que les « Séminaires Cartan », dont il définissait chaque année le contenu avec une remarquable intuition de ce qui était important, ont éveillé les vocations de nombreux mathématiciens de premier plan.

Les Foncteurs

Honni sois-tu Cartan pour ton trop long voyage,
Et toi aussi Sammy qui perds de ta toison.
Mieux vaudrait ménager, je crois, votre raison
Et laisser là ces jeux pas encor de votre âge.

Quand vous verrai-je, hélas, d'un mémoire plus sage
Tenter la renommée ? Et quand donc pourra-t-on
D'un monstre si patent refuser l'impression ?
Maint journal, à coup sûr, y prendrait avantage.

Plutôt le paradis de Cantor, des aïeux,
Que votre ?uvre superbe au front audacieux.
Plus que l'axiome pur me plaît l'astuce fine.

Plus le lemme chinois que votre article vain.
Plus mon petit Lainé que ce chapitre vingt.
Et plus qu'un satellite un bon espace affine[2].

Le congrès d'été à Pelvoux avait chargé Samuel Eilenberg de rédiger un rapport sur le rôle des foncteurs dans le chapitre « Structures » du volume de Théorie des ensembles de Bourbaki. Peu après le congrès, un participant a communiqué à Bourbaki ce pastiche du célèbre sonnet de Joachim Du Bellay dans lequel l'allusion au travail conjoint de Cartan et Eilenberg - qu'à l'instar de leurs collègues américains les Bourbakis surnommaient « Sammy » - est évidente. Le registre de l'ironie poétique permet peut-être une certaine ambiguïté mais le pasticheur laisse entendre que la (plutôt récente) théorie des catégories est une activité sénile et futile. L'identité du poète n'étant pas révélée par « La Tribu », la question est mise au concours ici.

La Gazette des Mathématiciens *tient à remercier chaleureusement Madame Liliane Beaulieu pour la mise à disposition des illustrations de cet article.*

[2] NBT027 La Tribu. Compte rendu du « Congrès croupion » (octobre 1951), page 1.

À propos d'un colloque[1] en l'honneur de Paul Koosis

Jean-Pierre Kahane

Paul Koosis est un mathématicien très original, qui a beaucoup d'attaches avec la France, et mériterait d'y être mieux connu. Ses ouvrages sur les espaces H_p, sur l'intégrale logarithmique et sur la théorie de Beurling et Malliavin se trouvent dans les bibliothèques, ou devraient s'y trouver, et ce sont les meilleures références sur les sujets en question. Les « Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin » ont été écrites par lui en français, et elles sont publiées par le Centre de recherches mathématiques (CRM) de l'Université de Montréal. Le théorème en question l'a occupé pendant toute sa vie. C'est un théorème multiforme, qui en particulier donne le rayon de totalité d'une famille d'exponentielles sur la droite réelle, une question difficile qui avait intrigué Paley, Wiener, Levinson, Laurent Schwartz et d'autres. Le sujet et le livre valent d'y entrer pour aller voir.

[Les problèmes traités par Beurling et Malliavin :

La théorie de Beurling et Malliavin remonte au début des années 1960, mais ils n'ont achevé la publication de leurs travaux qu'en 1967. Travaux et références se trouvent dans les œuvres de Beurling. Les principaux résultats avaient transpiré dès 1961 (voir par exemple mon exposé au séminaire Bourbaki, n° 225, reposant sur un cours donné par Paul Malliavin à Stanford pendant l'été 1961). La théorie répond aux questions suivantes, qui sont liées au moyen du théorème de Paley-Wiener :

a) calculer le rayon de totalité d'une suite réelle ou complexe S, c'est-à-dire la borne supérieure des r tels que les exponentielles $\exp(isx)$, s dans S, forment un système total dans $L^2(-r,r)$;

b) caractériser les spectres des fonctions moyenne-périodiques, c'est-à-dire des solutions d'équations de convolution par des mesures à supports compacts ;

c) caractériser les fonctions entières qui sont quotients de deux fonctions entières de type exponentiel bornées sur la droite réelle ;

d) peut-on, pour une telle fonction entière, choisir le dénominateur de type exponentiel arbitrairement petit ?

La solution de a) et b) fait intervenir la « densité effective » de Beurling et Malliavin, qui a le caractère d'une densité extérieure (borne inférieure des densités des suites densitables contenant la suite donnée, « densitable » se référant à une certaine manière d'approcher une dilatée de Z). Les solutions de c) et d) (positive pour d)) utilisent à la fois la théorie classique des fonctions et la théorie du potentiel. L'« intégrale logarithmique », à laquelle Koosis a consacré d'autres livres, y joue un rôle majeur.]

Toutes les recherches de Paul Koosis et ses ouvrages sont relatifs à l'analyse classique, et surtout à la théorie des fonctions d'une variable complexe, un domaine où la France était particulièrement active il y a un siècle. Le flambeau est passé à d'autres pays, et d'autres sujets (la physique, les systèmes dynamiques) le réactivent actuellement.

[1] 23-26 octobre 2003, Montréal

Du 23 au 26 octobre s'est tenue à Montréal, annoncée en français et en anglais, une « Conférence en analyse classique en l'honneur de Paul Koosis ». Elle était organisée conjointement par le CRM et par plusieurs universités du Québec, dont Mc Gill où Koosis est professeur. Le programme mariait agréablement les seniors (Louis Nirenberg, Walter Hayman, John Garnett, Victor Havin, David Drasin, Jean-Pierre Kahane, Paul Koosis lui-même), et les plus jeunes dont une belle collection de prix Salem et autres notabilités (Peter Jones, Sasha Volberg, Sergey Treil, Fedya Nazarov, Michael Wilson, Tom Ransford, Henrik L. Petersen, Misha Sodin, Robert Milson, Remm Yassawi, Javad Mashreghi, Ivo Klemes). L'analyse classique est variée et bien vivante. Elle plonge dans le passé (on a plaisir à entendre évoquer des travaux d'Henri Cartan datant de 1928 et 1933) et s'articule à des questions très actuelles liant analyse, géométrie, physique, probabilités, combinatoire et théorie des nombres. Elle a pour caractère principal de ne partir que de notions familières à tous les mathématiciens. C'était du moins la règle du jeu implicite de ce colloque, et une raison de son succès.

[Les œuvres de jeunesse d'Henri Cartan présentes dans le colloque :

1. Les théorèmes de division dans l'anneau des fonctions entières s'appuient classiquement sur des minorations des dénominateurs, qui elles-mêmes s'appuient sur des minorations de polynômes (je veux dire de leurs modules). Depuis 1928, le meilleur outil est un théorème de Cartan largement exploité dans sa thèse (œuvres, I, 7-92) : à tout polynôme unitaire on peut associer des disques dont la somme des rayons ne dépasse pas 2e, tels qu'en dehors de la réunion de ces disques le module du polynôme soit supérieur ou égal à 1. Ce théorème, qui a d'abord été publié dans une note aux Comptes rendus (œuvres, I, 4-6), prouve en l'améliorant une conjecture d'André Bloch. Il a des variantes multiples : produits de distances à n points dans un espace métrique, potentiel logarithmique d'une mesure positive, potentiel par rapport à d'autres noyaux. La démonstration se voit bien quand on considère n points dans un espace métrique et un $r > 0$: on met en place une boule de rayon kr contenant k des points, avec k maximum, puis une boule de rayon lr contenant l des points restants s'il y en a, avec l maximum, et ainsi de suite, de sorte que $k + l + \cdots = n$. Remplaçons ces boules par des boules ayant les mêmes centres et des rayons doubles. La somme des leurs rayons est $2nr$ et en dehors de leur réunion les distances aux n points donnés, ordonnées dans l'ordre croissant, sont supérieures à $r, 2r, 3r, \dots nr$ respectivement. D'où tout ce qu'il faut. La conférence de Misha Sodin au colloque Koosis, intitulée « Growth, zeroes, and area estimates ; variations on the theme », débutait par la référence à ce théorème de Cartan.

2. La conférence de Walter Hayman portait un titre mystérieux : « ABC, Waring and Fermat for functions ». Il s'agissait de déterminer, pour divers anneaux de fonctions, les nombres $F(n)$ et $W(n)$ qui sont les plus petits entiers p tels que 1 (resp. un élément arbitraire de l'anneau) puisse s'écrire comme somme de p puissances n-ièmes . L'exposé oral débutait par l'évocation d'une amélioration par Cartan de la théorie de Nevanlinna, parue à Cluj en 1933 (œuvres, I, 421-445). La version écrite doit être publiée dans le Journal of the London Mathematical Society au moment du centième anniversaire de Cartan. Les auteurs sont Gary Gundersen et Walter Hayman, le titre « The strength of Cartan's version of Nevanlinna Theory », et le résumé mérite d'être intégralement reproduit ici : « In 1933 Henri Cartan proved a fundamental theorem in Nevanlinna theory which is a generalization of Nevanlinna's second fundamental theorem. Cartan's theorem works very well for certain kinds of problems. Unfortunately, it seems that Cartan's theorem, its proof, and its usefulness, are not as widely known as they deserve to be. To help give wider exposure to Cartan's theorem, we state the simple and general form of the

theorem, give a proof of the general form, and give several applications of the theorem ». En fait, le travail de Cartan remonte à 1929, et l'énoncé de son inégalité, avec déjà un certain nombre d'applications, se trouve dans une note aux Comptes rendus très claire et facile à lire (œuvres, I, 111-113).

3. Cartan s'intéressait à cette époque à des problèmes d'unicité. Par exemple, on savait d'après Pólya et Nevanlinna que, si deux fonctions entières f et g sont distinctes, et ne sont pas inverses l'une de l'autre, les ensembles de zéros de $f-1$ et de $g-1$ ne peuvent pas coïncider. Cartan résume sa contribution sous forme d'un énoncé en langue « vulgaire » : les zéros communs à $f-1$ et à $g-1$ constituent tout au plus la moitié de l'ensemble total des zéros de $f-1$ et de $g-1$ (œuvres, I, 442). De tels problèmes d'unicité sont difficiles et les progrès sont lents. Pour en avoir un autre aspect on peut se référer à la note aux Comptes rendus récemment présentée par Henri Cartan : « Fonctions méromorphes aux zéros et pôles communs », par G. Frank, X. Hua et R. Vaillancourt.]

Une autre raison du succès de ce colloque était le climat d'amitié autour de Paul Koosis. Paul a eu une carrière atypique, mais qui l'a amené en des endroits divers où il a imprimé une trace. Nirenberg l'a guidé au Courant Institute juste après sa thèse. Je l'ai connu quand il a décidé de passer l'année 1957-58 avec sa bourse Fulbright à Montpellier où j'étais professeur, et où il a eu l'occasion de rencontrer Yitchak Katznelson et d'assister à l'éclosion de sa thèse. Puis il a pris un poste d'enseignement à Paris, au-dessous de son niveau de qualification, juste parce qu'il se trouvait bien en France, et qu'il commençait à être fasciné par le théorème de Beurling et Malliavin. Quand j'ai été nommé à Orsay en 1961, rejoignant Deny, Delange, Lesieur et Malgrange, il n'était pas encore question d'une activité scientifique propre en mathématiques : tout se passait à l'Institut Henri Poincaré. C'est Koosis qui a lancé l'idée d'un séminaire d'analyse avec nos ressources locales. Le séminaire a été un succès et s'est ensuite spécialisé en analyse harmonique, avec rapidement des surgeons en topologie et en algèbre.

C'est à UCLA qu'il a commencé sa carrière de professeur, et il a eu là Garnett comme collègue et Peter Jones comme étudiant. Après des années d'errance c'était l'établissement rêvé. Pour d'autres sans doute mais non pour lui. Outre la France et le français, il s'était pris d'amour pour la Suède et le suédois, et pour Montréal et les Laurentides où il travaillait mieux qu'ailleurs, beaucoup mieux qu'à Los Angeles qu'il appelait méchamment « Disneyland on the sea ». Il s'est donc installé à Montréal avec un modeste gagnepain à Mc Gill. Il y a attiré des élèves et des collaborateurs, surtout parmi les Russes émigrés et les Russes en activité dans leur pays, dont le modèle est Victor Havin. Il y a beaucoup et très bien travaillé, et il est en pleine forme intellectuelle à l'âge de 75 ans.

Il chante et joue du clavecin (moins que naguère), il lit beaucoup, il se passionne pour des auteurs (on dit auteures à Montréal) comme la canadienne Gabrielle Roy et l'allemande Christa Wolf, à côté de Shakespeare, Goethe et Heine. Une conversation avec lui est un bain de jouvence et de culture.

Il n'aime pas beaucoup voyager. Je ne sais quand nous le reverrons en France. Mais il écrit de merveilleuses lettres, et tous les mathématiciens, s'ils le désirent, peuvent faire ou entretenir sa connaissance en lisant ses livres. Je reviens aux leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin. Il serait dommage de les laisser dormir sur les rayons d'une bibliothèque, et plus dommage encore de ne pas les trouver sur les rayons.

[Koosis et le français :

« De nos jours on se sent presque obligé d'expliquer pourquoi on a voulu faire paraître un livre de mathématiques en français. Je ne veux pas m'étendre ici sur mes raisons—multiples—pour cela. Qu'il suffise simplement que j'évoque le fort attachement que j'ai depuis très longtemps pour cette langue, bien que ne la connaissant qu'imparfaitement. »]

[Koosis et l'écriture :

Quand Koosis aime quelque chose, il l'écrit. Ainsi, le 25 février dernier, Nazarov a donné à l'université Mc Gill une démonstration toute nouvelle du « théorème des multiplicateurs » de Beurling et Malliavin, qui est la clé de leur théorie. Koosis l'a rédigée immédiatement, et me l'a adressée le 4 mars. La construction de Nazarov est très belle, et l'écriture de Koosis l'est aussi ; c'est double plaisir que de lire de belles pages manuscrites exposant un beau sujet.]

Références

Koosis, P. — *Leçons sur le théorème de Beurling et Malliavin*, Montréal, Les Publications CRM, 1996, 230 pages.

Beurling, A. — Collected Works, 2 volumes, Birkhaüser 1989.

Cartan, H. — Œuvres, 3 volumes, Springer 1979.

Andreï Bolibroukh, un mathématicien, un ami

Claude Mitschi & Claude Sabbah

Andreï Bolibroukh est décédé le 11 novembre 2003 à l'hôpital de la Pitié-Salpêtrière à Paris. Il avait 53 ans. Nous voulons évoquer ici sa personnalité et ses travaux, en mettant l'accent sur ses rapports avec la France, où il passait plusieurs mois par an depuis près de dix ans.

Le nom

Plusieurs translittérations du nom Болибрух existent : Bolibrukh pour les anglophones, Bolibruch pour les germanophones et Bolibroukh pour les francophones. C'est cette dernière que nous utiliserons dans la suite.

L'ami

Il n'est pas possible d'évoquer la mémoire d'Andreï sans d'abord présenter sa personnalité chaleureuse, riche, ouverte. Pour nombre de ses collègues, il était avant tout un ami. Aussi commencerons-nous par quelques témoignages.

Gentillesse et disponibilité sont des traits essentiels de son caractère ; toujours attentif aux recherches de ses interlocuteurs et prêt à en discuter ; ainsi se le remémorent Werner Balser (Ulm), Antoine Douai, Philippe Maisonobe et Michel Merle (Nice), Hélène Esnault (Essen), Alexeï Glutsyuk (Lyon), Marta Mazzocco (Cambridge), Sergeï Slavyanov (St-Petersbourg) et bien d'autres.

cs : Andreï avait sa manière bien à lui d'établir un contact. Je frappe à la porte de son bureau, « *Entrez, je vous prie !* », j'ouvre : « *Claude, tu sais, j'ai démontré...* » ou bien « *Claude, il faut terminer le rapport...* » ou aussi « *Claude, je suis très content de Stéphane...* ». L'interlocuteur, directement interpellé par son prénom, est d'emblée mis à l'aise, les distances sont abolies, l'échange peut avoir lieu sans complexes. Ceci me permettait aussi de sourire intérieurement de ses petites fautes de français, une langue qu'il avait appris très rapidement à maîtriser et qu'il maniait avec une grande dextérité ; mais il remplaçait « *c'est pourquoi* » par « *c'est parce que* », renversant ainsi à son insu le sens de l'implication.

cm : Cette attention aux autres, Andreï l'annonçait d'entrée de jeu : au téléphone, même à l'hôpital un jour difficile, il décrochait avec un courtois et inimitable « *Je vous écoute !* ». Il ne laissait pas la conversation s'attarder sur sa personne, et son optimisme résolu évacuait rapidement les questions touchant à sa santé. Il préférait alors parler de ce qui se partage : les projets mathématiques, l'avenir de nos jeunes, un nouveau théorème...

L'un de ses anciens étudiants en thèse, Stéphane Malek, parle de « *la grande disponibilité et la grande générosité d'Andreï à l'égard de ses étudiants de thèse* *aussi bien à Moscou qu'en France, bien qu'occupant de hautes responsabilités à l'Institut Steklov* », et se souvient de la précision avec laquelle il organisait jusque dans les moindres détails ses voyages à Moscou.

cm : En dehors de ses heures de cours, Andreï était d'une disponibilité rare, toujours prêt à interrompre son travail pour vous recevoir. Il avait sa façon bien à lui de répéter : « *Je comprends... j'ai compris...* » et de vous encourager. Sa patience et sa gentillesse incitaient chacun, collègue ou étudiant, à frapper à sa porte.

« *On pourrait caractériser la personnalité d'Andreï par un ensemble de mots commençant (en russe, évidemment) par le préfixe « bon » : c'était une personne bienveillante, de bonne foi et aussi très soigneuse. Il était toujours scrupuleusement responsable* » (Vladimir Roubtsov, Angers).

Cette ouverture et ce sens des responsabilités ne concernaient pas seulement le domaine mathématique, ou plus généralement universitaire.

« *Ce qui marquait chez Andreï : un contact chaleureux qui engageait tout de suite à la conversation. On parlait maths facilement, mais de tout autre chose aussi. Il passait facilement du travail à la détente et vice-versa. L'un des très bons moments dont je me souviens est une pause que nous avions faite en allant visiter le château de Brissac ; il y avait là, exceptionnellement, un stand de tir à l'arc et nous avons passé un grand moment à tirer à l'arc puis nous sommes rentrés travailler...* » (Michèle Loday, Angers).

« *Il était quelqu'un avec qui l'on pouvait parler de toute chose — politique, vie quotidienne, l'avenir du monde ou mathématiques — avec légèreté. Car il était à la fois intelligent, doté de bon sens, d'humour et d'une éthique très humaine. À chacune de mes rencontres avec lui, il avait des choses intéressantes à raconter. L'entretien avec lui était toujours agréable. Il pouvait comprendre les gens et leurs rapports (pas toujours faciles) avec bienveillance, comprendre la vie et ses situations parfois difficiles* » (Vladimir Kostov, Nice).

« *I first met Andrey Bolibrukh in 1995 in Groningen, The Netherlands, in a conference devoted to the Stokes phenomenon, although of course I had heard his name long before. That meeting was the beginning of our friendship and scientific collaboration which both have lasted up to Andrey's death. I consider myself exceptionally fortunate for having had this fantastic opportunity to work with a person of such calibre as Andrey Bolibrukh. Indeed, our collaboration had an enormous impact on all my mathematical views and priorities. [...] It is of course very subjective, but to me Andrey has always been one of the representatives of that extremely rare type of an exceptionally well educated and simultaneously very kind, gentle, and considerate person. In Russia, we used to attribute these qualities to the "old Russian intelligentsia". There are still people of this type, but mostly among older generations. It is almost impossible to find them already among our generation (of those who were born some thirty odd years after 1917). Andrey Bolibrukh was one of these exceptional cases* » (Alexander Its, Indiana University).

Le problème de Riemann-Hilbert

C'est en donnant une réponse négative au problème de Riemann-Hilbert (R-H), longtemps considéré comme résolu par Plemelj en 1908, qu'Andreï s'est fait connaître de la communauté mathématique internationale.

Le 21e problème de Hilbert pose la question de savoir si toute famille $M_1, \ldots, M_p$ de matrices complexes inversibles de taille d peut être réalisée comme la représentation de monodromie d'un système différentiel du type de Fuchs portant sur un vecteur inconnu $v(z)$ de taille d, c'est-à-dire de la forme

$$v'(z) = \Big(\frac{A_1}{z-a_1} + \cdots + \frac{A_p}{z-a_p}\Big)\cdot v(z), \tag{F}$$

pour certains nombres complexes deux à deux distincts $a_1, \ldots, a_p$ — que l'on appelle *points singuliers du système* — et certaines matrices complexes $A_1, \ldots, A_p$ de taille d, à déterminer. Les solutions $v(z)$ sont en général holomorphes multiformes sur $\mathbb{C} \smallsetminus \{a_1, \ldots, a_p\}$ et, si $u_j(z)$ est une détermination locale de v près d'un point singulier a_j, les autres déterminations locales s'obtiennent par les formules $M_j u_j(z), M_j^2 u_j(z), \ldots$ Par exemple,

– si α est un nombre complexe, s'il y a un seul point singulier $a_1 = 0$ et si $d = 1$, la matrice $M_1 = \exp 2i\pi\alpha$ est la monodromie de l'équation $v'(z) = (\alpha/z)v(z)$, de solution z^α ;

– toujours avec un seul point singulier mais $d = 2$, la matrice $M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2i\pi & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est la monodromie à l'origine du système donné par $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Dans ce problème, il convient de considérer le point à l'infini comme un point singulier possible, et de lui attribuer la matrice $M_\infty = (M_1 \cdots M_p)^{-1}$.

Revenons un peu sur l'histoire de ce problème, qui est amplement détaillée dans le livre [22].

L'énoncé de Hilbert « *zu zeigen, daß es stets eine lineare Differentialgleichung des Fuchsschen Klasse mit gegebenen singulären Stellen und einer gegebenen Monodromiegruppe gibt* » reprenait, mais en précisant une localisation des singularités, un problème plus ancien de Riemann (vers 1850) qui demandait de reconstruire une équation différentielle fuchsienne à partir de son groupe de monodromie.

Or l'argument invoqué par Plemelj est insuffisant. En 1954 Gantmacher trouve bien un contre-exemple à un résultat de Birkhoff de 1913 (qui reprenait et « clarifiait » la solution de Plemelj) mais n'en tire aucune conséquence. C'est en 1978-79 seulement, à Paris dans le cadre du séminaire « Mathématique et Physique » de l'ENS (exposés publiés en 1983 [21]) qu'Armando Treibich corrige le résultat de Plemelj, en montrant que celui-ci tient la route à condition de supposer l'une des matrices de monodromie $M_1, \ldots, M_p, M_\infty$ diagonalisable. En 1988, Arnold et Ilyashenko apportent à leur tour des éclaircissements.

Par ailleurs, en 1934, Lappo-Danilevskii avait donné une solution du problème lorsque toutes les matrices M_j sont proches de l'identité. D'autres mathématiciens ont aussi donné leurs démonstrations, qui concernent en général le problème posé pour les singularités régulières plutôt que fuchsiennes.

En 1989, Andreï met fin aux incertitudes en apportant des contre-exemples : une représentation de dimension 4 (pour trois singularités données) ne pouvant être réalisée par aucun système différentiel linéaire fuchsien d'ordre 3, ou encore un système d'ordre 3 admettant cinq singularités régulières dont une non fuchsienne, et dont la représentation de monodromie ne peut être réalisée par aucun système à pôles simples. Il cherche ensuite à préciser la nature de ces exemples, en montrant

– d'une part qu'une solution du problème de Riemann-Hilbert existe lorsque la représentation de monodromie est *irréductible*, c'est-à-dire lorsqu'il n'existe pas de sous-espace non trivial invariant par toutes les matrices M_j (ceci a aussi été montré par V. Kostov),

– d'autre part que, pour tous $p \geqslant 3$ et $d \geqslant 3$, et tout choix de points $a_1, \dots, a_p$, il existe une représentation (réductible) qui n'est pas réalisable par un système du type de Fuchs.

Plutôt que de détailler ces résultats, pour lesquels nous renvoyons aux deux excellentes monographies [1] et [7] ainsi qu'à l'exposé ICM [8] d'Andreï ou à l'exposé Bourbaki d'A. Beauville [3], nous voudrions mettre en évidence quelques phénomènes intéressants révélés par Andreï.

D'abord, pour une représentation (réductible) donnée, l'existence ou non d'une solution du problème de R-H dépend de la position des points singuliers. Plus précisément, il existe, dans tout voisinage d'une position ne donnant pas lieu à une solution, une position donnant lieu à une solution. La manière dont elle dépend des matrices M_j a été étudiée par V. Kostov.

Si les matrices M_j sont toutes triangulaires (supérieures par exemple), c'est-à-dire si la représentation est extension de représentations de dimension 1, Juliette Vandamme, étudiante d'Andreï à Nice, a pu classer les premiers exemples « non réalisables », qui se produisent pour $d \geqslant 6$.

D'autre part, la condition d'irréductibilité (ou de semi-simplicité) de la représentation de monodromie est naturelle : par exemple, en géométrie algébrique, la construction de l'espace des modules des représentations du groupe fondamental de $\mathbb{C} \smallsetminus \{a_1, \dots, a_p\}$ identifie toute représentation à sa semi-simplifiée.

La géométrie algébrique permet de poser le problème de R-H dans une perspective plus générale. L'extension de celui-ci aux surfaces de Riemann compactes autres que la sphère de Riemann a longtemps donné lieu à des formulations trop directement inspirées du problème original : « sur une surface de genre g, trouver le nombre minimum de points singuliers apparents nécessaires pour obtenir une solution du problème de R-H ». H. Esnault et E. Viehweg [17] ont ainsi reformulé le problème de R-H sous la forme suivante : étant donnée une représentation ρ du groupe fondamental d'une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points, existe-t-il sur cette surface compacte un fibré holomorphe *semi-stable de degré* 0 muni d'une connexion à pôles logarithmiques, dont la représentation de monodromie associée soit ρ ? (Sur la sphère de Riemann, « semi-stable de degré 0 » signifie « trivial ».) Ils ont montré que ce problème a une solution lorsque la représentation ρ est irréductible, en utilisant les mêmes outils qu'Andreï (dans une présentation proposée par O. Gabber). Dans [16], on trouve des exemples ne donnant pas lieu à une solution lorsque la représentation est réductible.

Ceci a suggéré à Andreï [14] l'idée de remplacer la condition d'irréductibilité par une autre, plus propice à l'étude des espaces de modules : celle de l'existence d'un fibré sur lequel la connexion à pôles logarithmiques est *stable* au sens de Carlos Simpson, et donne lieu à la représentation de monodromie ρ. Cette notion de stabilité a permis à Stéphane Malek de donner une condition suffisante pour qu'une extension de systèmes admettant chacun une solution du problème de R-H en admette une elle-même (ce n'est pas toujours le cas, comme le montre le cas « triangulaire » évoqué plus haut).
cs : Nous avions aussi le projet de tenter de comprendre les aspects métriques du problème de R-H, motivés par les travaux de C. Simpson [20] concernant l'existence, sous la condition de stabilité ci-dessus, d'une métrique harmonique ayant un comportement modéré aux singularités.

Si Andreï a vite compris l'intérêt de certains concepts de la géométrie algébrique, il est resté fidèle aux méthodes analytiques, raisonnant — souvent de manière fulgurante — sur les solutions fondamentales plutôt que sur les systèmes d'équations ou les fibrés à connexion. Il a rénové l'usage de la « filtration de Levelt ».

« *J'ai deux raisons au moins de lui être reconnaissant. D'abord, il a fait de la publicité pour ma thèse (Amsterdam, 1961). Sans lui les « exposants » introduits dans celle-ci seraient tombés dans l'oubli. Dans son livre avec Anosov il leur consacre une vingtaine de pages. Ça m'a donné beaucoup de satisfaction. Deuxièmement il m'avait fait l'honneur d'un bel exposé lors de la conférence pour mon départ à la retraite en janvier 1997* » (Ton Levelt, Nijmegen).

Le travail d'Andreï sur les inégalités de Fuchs pour les exposants de Levelt a sans doute été à l'origine de ses résultats sur le problème de R-H. Diverses généralisations en ont été obtenues par Eduardo Corel dans sa thèse, sous la direction de Daniel Bertrand et Claude Mitschi, et avec les conseils d'Andreï.
cm : Lors de nos dernières rencontres avant sa maladie, nous avions également travaillé, Andreï, Stéphane Malek et moi-même, sur une formulation généralisée de R-H, pour des singularités éventuellement irrégulières.

Le problème de Birkhoff

C'est un petit frère du problème de Riemann-Hilbert : considérons le système

$$v'(z) = \frac{A(z)}{z^r} \cdot v(z),$$

où $A(z)$ est une matrice de fonctions holomorphes au voisinage de $z = 0$ et r est un entier $\geqslant 1$ (on suppose que $A(0) \neq 0$). Est-il possible, par un changement de base $u(z) = P(z)v(z)$ (P holomorphe inversible au voisinage de l'origine), de mettre le système sous la forme plus simple

$$u'(z) = \Big(\frac{B_r}{z^r} + \cdots + \frac{B_1}{z}\Big) \cdot u(z), \tag{B}$$

appelée « forme normale de Birkhoff » (on dit aussi « forme standard de Birkhoff »), où les matrices B_i sont constantes ? On connaît depuis longtemps des exemples où la réponse est négative.

« *The first time I met Andrey was when Don Lutz was here in Ulm and mentioned that he had met this Russian colleague before (I think, perhaps in Essen when he visited Reinhard [Schäfke]). Andrey at this time stayed in Bonn at MPI,* *and I invited him to Ulm. Somehow we immediately became friends, and I was, in particular, impressed by Andrey's work concerning the Riemann Hilbert problem. I told him that I had recently written two articles concerning Birkhoff reduction in dimension three, one showing that with analytic transformations one can achieve reduction for irreducible equations, while for others one still can do it with help of meromorphic transformations. Not long after this, Andrey then showed that irreducible equations can always be transformed into Birkhoff normal form by means of analytic transformations. His proof is so simple that I was always asking myself why I had not succeeded in obtaining this result, but this just shows how much of an expert he was in this field* » (W. Balser).

Et pour cause : le même raisonnement que pour le problème de Riemann-Hilbert s'applique au problème de Birkhoff, si on interprète ce dernier convenablement [6, 9, 5].

cs : Fort de son expérience sur Riemann-Hilbert, Andreï a tenté de comprendre, notamment en collaboration avec W. Balser [2, 11], la raison de l'existence d'exemples « négatifs », en analysant en dimension 4 et 5 (taille des matrices) l'effet d'une transformation méromorphe. À de nombreuses reprises, mais sans succès je crois, il a essayé d'étendre ces résultats en toute dimension.

Les déformations isomonodromiques

Comment se fait-il que l'erreur de Plemelj soit passée si longtemps inaperçue ? Sans doute parce que la solution du 21$^{\text{e}}$ problème de Hilbert n'avait pas eu d'application sérieuse. À quoi peut-il servir, en effet, de résoudre ce problème ? Quelle importance cela a-t-il dans d'autres domaines des mathématiques ?

« *It should be emphasized that the importance of the question goes beyond its abstract formulation. Indeed, the Fuchsian inverse monodromy problem is one of the principal examples (historically the first one) of the vast range of the inverse monodromy and spectral problems which form what is now known as the Riemann-Hilbert approach in the theory of integrable systems. Having been one of the top authorities in the quite abstract theory of holomorphic vector bundles, Andrey, simultaneously, could amazingly easily interact with the mathematical physics community, especially in the area of integrable systems. His last masterpieces on the Birkhoff normal form and isomonodromic deformations belong equally to both fields, mathematical physics and pure mathematics* » (A. Its).

Ainsi, il est important de concevoir le problème de R-H non seulement de manière « statique », mais aussi d'un point de vue dynamique, dans le cadre des déformations isomonodromiques. C'est ce que n'a pas tardé à faire Andreï.

Étant donné un système (F) avec $a_1^o, \dots, a_p^o$ pour points singuliers et $A_1^o, \dots, A_p^o$ pour matrices résidus correspondantes, existe-t-il, pour tout choix $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_p)$ de points distincts dans $\mathbb{C}$, des matrices $A_1(\boldsymbol{a}), \dots, A_p(\boldsymbol{a})$ dépendant de manière holomorphe (en général multiforme) de $\boldsymbol{a}$, telles que $A_j(\boldsymbol{a}^o) = A_j^o$ pour tout j, de sorte que, pour tout $\boldsymbol{a}$, le système (F) de points singuliers $\boldsymbol{a}$ et de matrices $A_1(\boldsymbol{a}), \dots, A_p(\boldsymbol{a})$ ait une représentation de monodromie constante ? Cette contrainte, appelée « isomonodromie », se traduit par un système différentiel non linéaire sur les matrices $A_1(\boldsymbol{a}), \dots, A_p(\boldsymbol{a})$ dépendant des variables $\boldsymbol{a}$, appelé « système de Schlesinger », dont certains cas particuliers ont été beaucoup étudiés, en liaison avec les équations de Painlevé notamment, ou les systèmes intégrables.

Il est connu (voir notamment [19]) que la réponse à cette question, analogue en famille du problème R-H, est positive sur un ouvert dense de l'espace des $\boldsymbol{a}$ contenant le point $\boldsymbol{a}^o$. Que se passe-t-il à la frontière de cet ouvert ? Andreï garde toujours un point de vue géométrique sur cette question : « *In this work we follow the geometrical approach to the Schlesinger equation, which is due to B. Malgrange* » écrit Andreï au début de son article [12], et il renvoie à [18] et [19]. Étant donnée une représentation de monodromie *irréductible*, réalisée par un système de type (F), Andreï a pu appliquer les méthodes développées pour le problème de R-H afin d'analyser le comportement des matrices $A_j(\boldsymbol{a})$ au voisinage de la frontière du domaine de définition ou au voisinage des ensembles de confluence, où les a_j ne sont plus distincts.

Les jeunes années

Andreï a écrit, dans le volume « Mathematics in St. Petersburg », un article de souvenirs [10] relatant sa formation au lycée-internat n° 45. D'autres informations sont données dans [22, p. 367-369].

Andreï Andreevitch Bolibroukh est né le 30 janvier 1950 à Moscou, cent ans après Sofia Kovalevskaïa dont il a organisé la célébration du cent-cinquantenaire, le 15 janvier 2000. Sa mère aimait les mathématiques, tout comme son père, militaire et héros de guerre ; en raison de la guerre aucun d'eux n'a pu suivre des études. Andreï garde le souvenir d'une enfance heureuse : voyages en famille, camping, parties de pêche avec son père, vie au grand air, camps scouts (pionniers) l'été. C'est l'époque du dégel (sous Krouchtchev) qu'il décrit en ces termes : « *Of course, I could not understand things concerning the political or economic situation in the country... but it was, or may have been, the best period of the Soviet Union. I think the atmosphere of the (relative) prosperity of the country influenced positively the whole life at that time.* »

Premier aux Olympiades de Kaliningrad, second aux Olympiades nationales (ex aequo avec A. Suslin et I. Krichever) il est admis d'office au très sélectif lycée-internat spécialisé (en math et physique) numéro 45 de Leningrad. Plusieurs tels lycées furent créés dans les années soixante à l'initiative de Lavrentev et Kolmogorov, à une époque d'euphorie technologique — celle des spoutniks — où l'Union Soviétique cherchait à détecter de jeunes talents pour les diriger vers les études scientifiques. Ce système a produit des mathématiciens de renom ; trois anciens du lycée 45 sont arrivés à Strasbourg dans les années 90 (Viatcheslav Kharlamov, Vladimir Touraev, puis Andreï Bolibroukh).

Sa formation au lycée 45 : les mathématiques et la physique bien sûr, mais aussi la peinture (visites hebdomadaires à l'Ermitage où il découvre les Impressionnistes et Picasso), la musique et surtout la poésie et le théâtre grâce à la circulation et aux représentations d'œuvres « underground ». Les veillées littéraires, auxquelles participent des artistes connus (non officiels), se prolongent souvent par des discussions animées, sur des thèmes aussi variés que la poésie soviétique ou la guerre d'Algérie...

cm : La poésie est restée, toute sa vie, le jardin secret d'Andreï. Très tôt il avait lu en traduction russe de nombreux poètes français et il aimait tout particulièrement Queneau. Il était aussi féru de poésie ancienne chinoise, ce qui impressionna beaucoup un collègue de Pékin, érudit lui aussi, en visite à Strasbourg.

En 1967 Andreï entre à l'université de Moscou où il poursuit ses études jusqu'à la thèse en 1977, sous la direction de Postnikov et Chernavskii. Les enseignants d'alors s'appellent Kolmogorov, Alexandrov, Arnold, Novikov, Sinaï, Anosov, Manin...

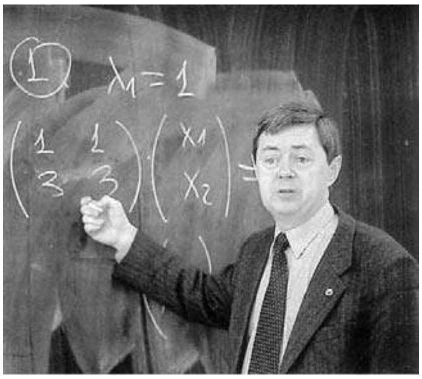
« *Ma première rencontre avec Andreï m'a beaucoup marqué. À l'automne 1972 j'étais étudiant de troisième année au département de Géométrie Différentielle de la Faculté « Mech-Math » de l'Université de Moscou (c'est-à-dire un débutant cherchant sa voie). Comme tous les étudiants et les thésards du département (ainsi que les collègues du département de Topologie et de Géométrie Supérieure) j'ai assisté au Séminaire des doctorants sur les travaux de D. Sullivan — un sujet très à la mode à l'époque et très dur pour un novice. Je ne comprenais presque rien. Un seul thésard, qui arrivait toujours en avance, a spontanément proposé de discuter avec moi du contenu de l'exposé précédent, c'était Andreï. Cette attitude contrastait avec celle des autres thésards qui regardaient d'un peu haut les jeunes étudiants. Bien sûr, dans nos discussions, c'est lui la plupart du temps qui avait des choses à m'expliquer* » (V. Roubtsov).

Andreï et la France

« *Andreï Bolibroukh est venu pour la première fois à Nice exposer ses travaux sur le problème de Riemann-Hilbert au cours de l'année 1991–92. Il est revenu ensuite tous les ans jusqu'en 96-97 pour des périodes d'un mois (les deux premières années) et de trois mois (poste* PAST*) les années suivantes. Il a participé à la vie du laboratoire : cours de 3^{e} cycle, encadrement de la thèse de Juliette Vandamme. C'est pendant ce séjour que le projet d'une coopération européenne* INTAS *a été envisagé pour la première fois. Il a aussi été rapporteur de l'habilitation de V. Kostov en 1998* » (Ph. Maisonobe et M. Merle).

Andreï a occupé un poste de PAST à Strasbourg de 1997 jusqu'à son décès. Lors de ses séjours à Strasbourg, il était aussi actif en recherche qu'en enseignement et en co-organisation des activités de l'équipe « Équations fonctionnelles » : cours sur les équations différentielles en licence et magistère, cours de DEA sur le problème de Riemann–Hilbert et les déformations isomonodromiques ; co-organisateur, très efficace, de trois colloques (un « atelier » pour doctorants qui a attiré de nombreux jeunes de l'étranger en 1999, un colloque à la mémoire de Raymond Gérard en 2000 et le dernier en l'honneur de Jean Thomann en 2002).

cm : En proposant la candidature d'Andreï à un poste PAST, j'avais, devant l'inquiétude habituelle des collègues, attesté sa parfaite maîtrise du français, faisant toute confiance à Raymond Gérard qui le connaissait mieux. Avec l'accord d'Andreï, je me suis donc permis d'assister à la première séance de son cours de DEA, que j'ai évidemment suivi jusqu'au bout, tant il était passionnant. Je me souviens comme il savait valoriser les questions les plus simples et, à travers elles, ceux ou celles qui les posaient. Tout cela, bien sûr, sans le moindre problème de langue. Il fallait seulement s'habituer à sa façon bien russe d'écrire les indices à la hauteur des exposants...



© Kessler/SIPAPress pour L'Express

Lors de son dernier séjour à Strasbourg il a, avec Benjamin Enriquez, mis la dernière main à un projet PICS de collaboration franco-russe qui lui tenait très à cœur et qui a démarré en mai 2003.

« *Andreï avait à cœur non seulement les liens franco-russes, mais aussi franco-français (Strasbourg-Paris) : il a énormément insisté pour que le* PICS *ait un nœud parisien* » (Daniel Bertrand, Paris).

Il faut aussi rappeler que, pendant le même temps, Andreï a occupé plusieurs postes de responsabilité, aussi bien à Moscou (Académie des sciences, Institut Steklov, Société Mathématique de Moscou) qu'au sein de l'Union mathématique internationale ou du Conseil scientifique du Centre Banach à Varsovie, faisant preuve d'un talent d'organisateur très apprécié.

« *Dans ma conscience, Andreï restera toujours un créateur, et non un contemplateur. Je voudrais le comparer à certains diplomates : tout en restant inconnus, ils préparent patiemment, en utilisant des ressources intellectuelles énormes, la fin d'une guerre sanglante.*

Andreï a été profondément affecté par l'éclatement de la communauté mathématique ex-soviétique en groupes politiquement engagés — une chose, à mon avis, inévitable et très naturelle dans la société instable de la période de passage, dite « perestroïka ».

Mais pour Andreï, c'était une peine personnelle et il est devenu l'un des initiateurs et des organisateurs d'un Colloque « unification ». Son espoir était de rassembler et de réunir (sur une base scientifique) tous les grands noms des mathématiques ex-soviétiques à l'occasion d'une Conférence consacrée au 90e anniversaire de L. Pontriaguine — une figure scientifique aussi grande que controversée.

Andreï a fourni un travail d'Hercule pour un résultat de Sisyphe mais j'ai bien compris que, pour lui, il était indispensable de tenter cette « unification ». Je ne voudrais pas dire qu'Andreï ait été aussi naïf — tout simplement, il avait mal vécu cette situation et n'a pas pu renoncer à cette tentative » (V. Roubtsov).

Tout en dirigeant et en « gérant » l'Institut Steklov de Moscou jusque dans les menues besognes, Andreï trouvait le temps de se consacrer avec enthousiasme à l'enseignement, mais aussi à la vulgarisation scientifique qui lui tenait tant à cœur. Il prenait volontiers son bâton de pèlerin pour aller à la rencontre de lycéens, de professeurs d'école ou de lycée auxquels il apportait la bonne parole mathématique dans l'espoir d'attirer davantage de jeunes vers cette discipline — dont les perspectives peu lucratives séduisent moins, en ce moment, la jeune génération russe. Andreï était heureux d'avoir, en janvier 2000, réussi à rassembler dans le théâtre de Velikiye-Luki quatre cents personnes venues écouter sa conférence sur S. Kovalevskaïa : « *Je ne leur ai parlé ni de Bourse ni de business, et pourtant ils m'ont suivi avec intérêt. À la fin de l'exposé, certains sont venus me dire que je leur avais apporté un peu d'air frais dans l'ambiance actuelle* » confiait-il quelques jours plus tard au journaliste de l'hebdomadaire l'Express venu l'interviewer à Strasbourg (propos parus dans l'article intitulé « Petit creux dans la bosse des maths » en mars 2000).

Son efficacité s'est illustrée, en France, par la manière dont il a su mettre en place un programme de travail franco-hispano-russe dans le cadre d'un projet INTAS.

« *Andreï a beaucoup aidé à l'établissement d'autres projets* INTAS. *Par exemple, j'ai bien profité de ses conseils dans l'organisation d'un accord* INTAS-RFBR *« Nombres transcendants » en 1999–2001.*

Il a aussi été le maître d'œuvre de la partie mathématique de l'accord de coopération entre l'Académie des Sciences de Russie et l'Université de Paris 6, qui a débuté en 2001, regroupant la théorie des nombres et l'analyse algébrique. Cela met en valeur un côté typique d'Andreï : rassembler les chercheurs non seulement à travers les frontières géographiques, mais aussi — et surtout — à travers les sujets de recherche. Nous avions ainsi le projet d'appliquer son extension à plusieurs variables [4, 13] *de l'inégalité de Fuchs à la mise en place de lemmes de zéros multidimensionnels pour la transcendance.* » (D. Bertrand).

Enfin, après la création d'un laboratoire CNRS à Moscou, il est devenu l'interlocuteur privilégié de Christian Peskine à Moscou.

« *Notre dernière rencontre — nous avons déjeuné ensemble au CNRS — remonte au printemps dernier. Le matin même, Andreï était sorti de l'hôpital. Il discutait déjà de nouveaux projets, de nouvelles idées. C'était une belle journée ensoleillée et nous avons longuement parlé d'un projet de nouveau laboratoire européen de mathématiques à Moscou* » (C. Peskine).

Venu tenter un traitement à Paris en septembre 2003, il a été soutenu sans relâche par sa femme Nina, ainsi que par Viatcheslav et Sonia Kharlamov, et a reçu la visite de plusieurs collègues et amis, à qui il tâchait d'expliquer ses derniers travaux mathématiques, mais parlait aussi d'un recueil de souvenirs qu'il avait commencé à écrire.

« *La dernière fois que j'ai parlé maths avec lui, Andreï me demandait des précisions sur ce dernier travail de Corel. Cette marque d'intérêt, alors qu'il était déjà si faible, m'a beaucoup ému* » (D. Bertrand).

« *Comme j'allais à Paris, je suis passé le voir ; je l'ai trouvé en une grande forme, ce qui m'a surpris, plein d'énergie et de projets. Lors de ma visite, une infirmière est cependant venue apporter le résultat d'analyses ; c'était très mauvais mais, sur le moment, il n'en a pas paru affecté (peut-être ne voulait-il pas le montrer). Il se trouve qu'en fait, je l'ai vu un des tout derniers jours où il a été bien* » (Bernard Malgrange, Grenoble).

cm : Andreï m'a appelée le lendemain, très optimiste encore, heureux surtout d'avoir, dans la nuit, démontré un théorème à la suite de sa conversation avec Bernard Malgrange. Deux jours plus tard, il entrait en réanimation.

« *Un autre trait que je voudrais mentionner : son sens des responsabilités. Étant déjà gravement malade, il m'a fait part à Moscou de sa préoccupation au sujet des tâches administratives qui l'attendaient à l'Institut Steklov. Même lors de notre* *dernière rencontre au service de réanimation de l'hôpital de la Pitié, il était inquiet pour ses étudiants et thésards de Moscou...* » (V. Roubtsov).

cs : Jusqu'au dernier moment, il a gardé intactes ses capacités d'organisation : « *Claude, je dois tenir quinze jours pour pouvoir tenter une greffe...* ».

cm : Même dans un état de grande faiblesse, jusqu'au bout, Andreï oubliait sa maladie et retrouvait le sourire dès qu'on lui parlait de mathématiques.

Strasbourg, le 30 janvier 2004.

Références

[1] D.V. Anosov & A.A. Bolibruch – *The Riemann-Hilbert problem*, Aspects of mathematics, vol. 22, Vieweg, 1994.

[2] W. Balser & A.A. Bolibruch – « Transformation of reducible equations to Birkhoff standard form », Ulmer Seminare – Funktionalanalysis und Differentialgleichungen, Universität Ulm, 1997.

[3] A. Beauville – « Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann (d'après A. Bolibruch) », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 216, Société Mathématique de France, 1993, p. 103–119.

[4] A.A. Bolibrukh – « Pfaffian systems of Fuchs type », *Uspehi Mat. Nauk* **32** (1977), p. 203–204.

[5] ———, « On an analytic transformation to the standard Birkhoff form », *Proc. Steklov Inst. Math.* **203** (1994), p. 33–40.

[6] ———, « On analytic transformation to Birkhoff standard form », *Russ. Acad. Sci. Dokl.* **49** (1994), p. 150–153.

[7] ———, *The 21st Hilbert problem for linear Fuchsian systems*, Proceedings of the Steklov Inst. of Mathematics, vol. 206, American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[8] ———, « The Riemann-Hilbert problem and Fuchsian differential equations on the Riemann sphere », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, Basel, 1995, p. 1159–1168.

[9] ———, « On the Birkhoff standard form of linear systems of ODE », in *Mathematics in St. Petersburg*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 174, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, p. 169–179.

[10] ———, « Some memories of Boarding School #45 », in *Mathematics in St. Petersburg*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 174, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, traduit du russe par A. Sossinsky, p. 1–5.

[11] ———, « Meromorphic transformation to the Birkhoff standard form in small dimensions », *Proc. Steklov Inst. Math.* **225** (1999), p. 78–86.

[12] ———, « On orders of movable poles of the Schlesinger equation », *J. Dynam. Control Systems* **6** (2000), no. 1, p. 57–74.

[13] ———, « The Fuchs inequality on a compact Kähler manifold », *Dokl. Akad. Nauk* **380** (2001), no. 4, p. 448–451.

[14] ———, « The Riemann-Hilbert Problem on a compact Riemannian surface », *Proc. Steklov Inst. Math.* **238** (2002), p. 55–69.

[15] L. Boutet de Monvel, A. Douady & J.-L. Verdier (éds.) – *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique*, Progress in Math., vol. 37, Birkhäuser, Basel, Boston, 1983.

[16] H. Esnault & C. Hertling – « Semistable bundles on curves and reducible representations of the fundamental group », *Internat. J. Math.* **12** (2001), no. 7, p. 847–855.

[17] H. Esnault & E. Viehweg – « Semistable bundles on curves and irreducible representations of the fundamental group », in *Algebraic geometry : Hirzebruch 70* (P. Pragacz, M. Szurek & J. Wiśniewski, éds.), Contemp. Math., vol. 241, American Mathematical Society, 1999.

[18] B. Malgrange – « La classification des connexions irrégulières à une variable », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [15], p. 381–399.

[19] ———, « Sur les déformations isomonodromiques, I, II », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [15], p. 401–438.

[20] C. Simpson – « Harmonic bundles on noncompact curves », *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 713–770.

[21] A. Treibich Kohn – « Un résultat de Plemelj », in *Séminaire E.N.S. Mathématique et Physique* [15], p. 307–312.

[22] B.H. Yandell – *The Honors Class – Hilbert's problems and their solvers*, A.K. Peters, Natick, Massachussets, 2002.

Mathématiques d'Est en Ouest
Théorie et pratique : l'exemple des distributions

Jean-Michel Kantor

La science au regard mauvais
Elle (la mathématique) lance un regard mauvais à l'humanité, elle la force à voir la dure réalité en face, le fait réel uniquement, celui qui réduit à néant les fantaisies les plus merveilleuses comme les plus caustiques.
Robert Musil[1]

Introduction

Quelles leçons tirer des bouleversements qui ont marqué le vingtième siècle quant au développement scientifique ? Les mathématiques ont-elles subi le même bouleversement ? Leur rôle a-t-il été modifié, ont-elles gardé au temps d'Hiroshima la valeur morale et esthétique que vantait Platon ? Ces questions sont trop générales, mais elles suggèrent un débat.

Nous n'étudions ici qu'une situation, un contexte bien précis, celui des travaux mathématiques menés en Russie et en France à partir des années trente, inspirés entre autres par l'œuvre fondatrice d'Hadamard, et qui ont conduit au développement mondial de l'analyse mathématique et de la théorie des équations aux dérivées partielles. Les documents existent, plus de cinquante ans ont passé, assez pour qu'un examen historique soit possible.

La disparition de Laurent Schwartz, éminent mathématicien français, membre du groupe Bourbaki et l'un des animateurs de la communauté mathématique pendant plus de vingt ans, peut être l'occasion de revenir sur la naissance de la théorie des distributions. La publication récente d'archives soviétiques permet de compléter le travail des historiens, en particulier celui d'Adolphe Yuskevitch[2], critique du livre de Jesper Lützen (dont la compétence reconnue en histoire des mathématiques et la conscience professionnelle sont hors de cause) [Lu]. Yuskevitch examine, entre autres, avec le plus grand soin les articles publiés en russe (nos références complètent celles de son article). En effet si les temps ont changé, les barrières linguistiques persistent, qui ont ralenti les échanges d'idées entre l'Ouest et la Russie, et d'ailleurs ont empêché que le texte de Yuskevitch, bien que publié en 1991 dans la

[1] Carnets. Extrait du cahier 16, L'espion (1923-24), W I 1979-80.

[2] Voir p. 30 la traduction de l'article de Adolphe P. Yuskevitch publié en 1991 « Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées » (Ist. Math. Issled. 1991, p. 256–266, en russe).

revue d'histoire qu'il avait créée, soit mieux connu. Bien entendu les mathématiques ne sont pas à l'abri de comportements chauvins dans la compétition internationale (l'effet « Popov » à l'Est comme à l'Ouest), Yuskevitch en est conscient, et ne tombe aucunement dans ce travers. Il a visiblement à cœur de montrer qu'il y avait une vie mathématique intense à l'Est, dans l'URSS isolée par la guerre froide et la « construction du socialisme dans un seul pays ». Nous évoquons les différentes sensibilités, les différents styles, que cet épisode révèle.

C'est aussi l'occasion de revenir sur la coopération scientifique internationale de cette période, encore si peu étudiée[3]. La médaille Fields fut attribuée à Laurent Schwartz à Harvard en 1950 en pleine guerre de Corée : la médaille Fields de la guerre froide, a-t-on pu dire (en faisant référence aux difficultés d'obtention du visa pour Hadamard et pour son neveu Schwartz). Un épisode mal connu en tout cas, comme nous le verrons, des rapports entre science et politique. D'autre part dans les années trente l'idée de fonction généralisée ou distribution était « dans l'air », utilisée par le grand physicien Paul Adrien M. Dirac (1902-1984), ou par Solomon Bochner (1889-1982) dont les travaux ont souvent été précurseurs de ceux des distributions [Boc] : les physiciens utilisaient les distributions comme Monsieur Jourdain la prose, sans le savoir. La naissance même de la théorie des fonctions généralisées-distributions peut donc être riche en leçons à une époque où les relations entre mathématiques et physique évoluent (cf [JQ]).

Enfin, cette étude est l'occasion de mettre en scène deux conceptions différentes du rôle des mathématiques, à l'Est et à l'Ouest (pour simplifier), l'une autour de Schwartz et Bourbaki visant à privilégier les structures, l'autre autour de Sobolev et de l'école péterbourgeoise, étroitement liée aux sciences physiques. Toutes ces questions sont encore d'actualité, et nous pensons que nous devons à la mémoire de Laurent Schwartz et à son sens aigu de la place du savant dans la Cité, de les aborder avec honnêteté et rigueur, mais de les aborder enfin.

Les acteurs : Hadamard (1865–1963), Sobolev (1908–1989) et Schwartz (1915–2002), deux mondes

Laurent Schwartz est un mathématicien admiré dans le monde entier, connu bien au-delà des cercles de spécialistes pour son rôle de « mathématicien dans le siècle » [S2]. L'un des membres actifs du groupe Bourbaki après la guerre, il fut aussi un homme de combat défendant toutes les causes humanitaires du vingtième siècle, depuis son trotskisme actif entre 1936 et la Libération jusqu'au Comité Audin pendant la guerre d'Algérie, et celui des mathématiciens pour les droits de l'homme dans les pays de l'Est. La personnalité de Schwartz condense les qualités de l'intellectuel français, issu d'une longue tradition d'ascension sociale qui a fourni à notre pays des intellectuels éminents.

Rien — à part les mathématiques — ne rapproche la personne de Laurent Schwartz de celle de Sergei Sobolev, un grand savant lui aussi, bien moins connu à l'Ouest : Sergei L'vovich Sobolev est né à Saint-Pétersbourg en 1908 d'une famille apparentée à la noblesse ; son père était un avocat important de Saint-Pétersbourg (devenue Léningrad). Dans la compétition qui dure encore entre les villes de Moscou et Saint-Pétersbourg, créée par Pierre le Grand en 1703, les écoles mathématiques

[3] Un ouvrage récent qui concerne le développement international des mathématiques de 1800 à 1945 oublie la Russie !

ont eu un rôle particulier : Saint-Pétersbourg fut la ville d'Euler qui y passa une grande partie de sa vie, et aussi Chebyshev (1821-1894), Markov (1856-1922), Lyapounov (1857-1918). On voit, rien qu'à cet énoncé, que la vie mathématique y a été marquée par une large ouverture vers les sciences et les techniques. C'est aussi à Saint-Pétersbourg que les talents d'organisation de Steklov (1863-1926), mathématicien appliqué, conduisirent à la création d'Instituts de recherche de l'Académie qui portèrent ensuite son nom. On trouvera un récit détaillé des luttes politiques à Moscou et Léningrad au sein des sociétés mathématiques et de leurs conséquences dramatiques (« l'affaire Lusin ») dans plusieurs publications récentes [De, Mar, M-Sh, Viu, Y] entre autres, ainsi que dans les numéros de la revue d'histoire créée par A.P. Yuskevitch *Istoriko-Matematikcheskie Issledovanie*. Voir aussi [G-K].

Sobolev fait de brillantes études précoces comme souvent en Russie au vingtième siècle. À l'université où il entre en 1925 il suit les cours de Grigorii Mikhailovich Fikhtengholtz (1888-1959), Nikolai Maksimovich Gunther (1871-1941) (ce dernier en théorie du potentiel). Il fait la connaissance alors de Vladimir Ivanovich Smirnov (1887-1974), qui sera professeur puis collaborateur de Sobolev, professeur à partir de 1925 et plus tard doyen de la faculté « Mat-Mekh » pendant 25 ans, ce qui ne lui évita pas d'être l'objet de remontrances en 1957 à l'occasion d'un hommage à Euler : louant l'influence positive de Fréchet, présent à la cérémonie, sur les mathématiques soviétiques, Smirnov se voit reprocher en public par Kolmogorov son « amour pour l'étranger » ([Y], page 31). La première publication de Sobolev est un contre exemple à un résultat annoncé par Saltykov et repris dans son cours par Gunther. Il rejoint en 1929 après sa thèse un institut de sismologie où il collabore avec Smirnov avant d'intégrer l'Institut Steklov et de devenir membre correspondant à 24 ans, puis membre à part entière — le plus jeune — de l'Académie des sciences de l'URSS. Il mènera outre sa carrière mathématique, ouverte vers les autres sciences et vers l'extérieur de l'URSS dans un contexte difficile — il parlait couramment le français qu'il avait appris dès l'enfance avec sa gouvernante belge — différents projets dont la création du centre sibérien de l'Académie des sciences, manifestant toute sa vie sa fierté russe et une grande loyauté envers le pouvoir soviétique (il est membre du Parti depuis les années trente), qui ne l'ont pas empêché de prendre des positions parfois difficiles et courageuses (par exemple dans l'affaire Lysenko), parfois plus orthodoxes, comme dans l'affaire Lusin auquel il reproche de manière virulente, avec d'autres, en 1936 son ouverture et ses publications à l'étranger [De].

Entre ces deux personnalités il y a Hadamard, « *le petit père Hadamard* », comme l'appelaient avec familiarité ses admirateurs, ou « *la légende vivante des mathématiques* », expression utilisée par Hardy pour le présenter à la London Mathematical Society en 1944 [Ka]. Après Poincaré, Hadamard est sans doute le Français qui a marqué le plus le vingtième siècle mathématique. Il est lui aussi représentatif du meilleur des traditions humanistes et universalistes de la culture française. Pour la suite il faut remarquer qu'Hadamard est le grand-oncle par alliance de Laurent Schwartz qu'il suivra dès ses années de lycée, puis à l'École normale supérieure où Hadamard professait. Son séminaire, à l'origine de la naissance du groupe Bourbaki (à travers le Séminaire Julia), fut le lieu où s'exerça son influence sur plusieurs générations de normaliens. Laurent Schwartz a reconnu (*loc. cit.*) la part très importante qu'a eue Hadamard dans sa formation. On connaît bien la vie d'Hadamard [M-Sh] — l'immensité de son œuvre mathématique, son engagement à l'extrême gauche lui aussi, d'abord motivé par l'affaire Dreyfus puis par la montée du nazisme, et son compagnonnage aux côtés du parti communiste avec Frédéric Joliot-Curie. Les archives de l'Académie contiennent des copies d'articles publiés lors de ses séjours en URSS, vantant le système et les mérites de la science soviétique [H].

Les faits

Les années trente : les fonctionnelles de Sobolev

Dans le cadre de ses activités militantes pour l'amitié entre les peuples, Hadamard, voyageur infatigable, fit de nombreux voyages à l'Est, en particulier en Chine et en URSS. En URSS il séjourna :

– en 1930 : Congrès des mathématiciens soviétiques à Kharkov, juillet ; il voyage ensuite à Kiev. Il rencontre Sobolev à Kharkov et ils discutent ensuite ensemble en français, à Léningrad. Hadamard demande à Sobolev de le tenir au courant de ses travaux [M-Sh p. 217] ;

– en mai 1934 : Hadamard est membre d'une délégation de neuf savants français dans le cadre de la semaine de la science française en URSS. À Léningrad il rencontre Sobolev, mais il ne participe pas au second Congrès des mathématiciens soviétiques qui se tient du 24 au 30 juin 1934, et où Serge Sobolev donne trois conférences :

1. une nouvelle méthode de résolution du problème de Cauchy pour les équations aux dérivées partielles hyperboliques ;
2. solutions généralisées de l'équation des ondes ;
3. sur le problème de diffraction pour les surfaces de Riemann.

Le contenu de ces interventions a été certainement discuté quinze jours plus tôt avec Hadamard, qui suivait avec intérêt les travaux de son émule : Sobolev lui-même a reconnu l'influence de la notion de partie finie mise à jour par Hadamard en 1903 (!) dans ses découvertes de 1934-1935. Comme le soulignent la nécrologie de Sobolev par Jean Leray [L4], et la recension du livre [Lu] par Yuskevitch, la découverte des fonctionnelles généralisées doit être attribuée à Sobolev dans ses articles de 1935 et 1936 :

– Le problème de Cauchy dans l'espace des fonctionnelles, *Comptes Rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1935, volume III (VIII), Nffi 7 (67).

– Méthodes nouvelles à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, *Math. sbornik* (recueil mathématique), 1936, t.**1** (43), p. 36–71.

Dans ces deux articles, Sobolev définit explicitement les fonctionnelles généralisées comme formes continues sur l'espace des fonctions différentiables à l'ordre m à support dans un compact K pour m et K fixés. Il établit les propriétés fondamentales des fonctionnelles généralisées.

Pourquoi en français ?

L'année 1934, avec l'assassinat de Kirov, un dirigeant communiste très populaire, à Léningrad, marque un tournant dans la situation de l'URSS qui va peu à peu se replier sur elle-même et où les combats « idéologiques » vont faire rage, comme en témoigne la campagne contre Lusin déjà évoquée. Dans cette campagne le rôle des publications, en Russie ou à l'étranger, en russe ou en langue plus accessible, joue un rôle important. La publication de l'article fondateur de Sobolev en russe et en français dans le même volume des Doklady n'est pas innocente. C'est à la fois un exemple de patriotisme que donne Sobolev détracteur de Lusin, mais cela pouvait représenter aussi le risque de rappeler les origines sociales de l'auteur, bien que les publications en français fussent assez fréquentes. Il y a donc fort à parier que cette double publication fut au moins bien accueillie par Hadamard, sans doute même suggérée. En 1936 Hadamard repasse à Moscou de retour de Chine. En 1945 il effectue un nouveau voyage à Moscou et Léningrad comme membre de la délégation française aux célébrations du 220^{e} anniversaire de l'Académie des sciences de Russie (puis d'URSS). Il ne rencontre pas Sobolev (on verra pourquoi). Cependant dès 1935 les rapports qu'il fait à ses retours montrent chez Hadamard la conscience des problèmes (il évoque la disparition tragique d'une étoile montante, il s'agit sans doute du suicide du jeune et brillant mathématicien Schnirelman, théoricien des nombres et topologue, en 1938). Hadamard y loue les relations étroites entre sciences pures et appliquées en URSS, même en mathématiques [H]).

La découverte de Sobolev

Sobolev, inspiré entre autres par les travaux d'Hadamard, a défini d'abord les solutions généralisées d'une équation aux ondes puis en 1934-1935 les « fonctions généralisées », sans qu'il soit question d'une équation de référence (contrairement à la description de [Lu], page 65), d'abord sous le nom de fonctions « idéales », en référence sans doute à l'introduction des nombres idéaux par Kummer, puis comme « fonctions généralisées » dans l'article fondateur de 1935. L'ancien terme évoquait dangereusement la philosophie idéaliste [M-Sh] à une époque où le philosophe marxiste d'origine tchèque Kolman et d'autres adeptes de la « science prolétarienne » sévissaient à Léningrad. Cette hésitation sur l'appellation comme la double publication en russe et en français confirment que Sobolev avait une claire idée de l'importance de son travail et de son caractère général, contrairement aux affirmations de [Lu]. Nous renvoyons à Yuskevitch pour une analyse détaillée des différents articles de Sobolev et de ses inspirateurs et collaborateurs. Outre les travaux d'Hadamard, l'origine de l'article de Sobolev peut être retrouvée chez Gunther [Na]. L'esprit curieux et enthousiaste d'Hadamard ne pouvait rester indifférent à ce travail en cours, il lut l'article de 1936 dès réception à l'ENS. D'ailleurs jusqu'à la fin de sa vie Hadamard fut abonné aux principales revues mathématiques soviétiques [ManS]. Parmi les professeurs de l'École normale figurait, outre Hadamard, Jean Leray, spécialiste des équations aux dérivées partielles et qui lui aussi a participé à la « préhistoire des distributions » avec sa notion de solution faible d'équations aux dérivées partielles [L1]. Il a raconté à Serge Sobolev dans les années quatre-vingt qu'il avait discuté de son article de 1936 avec Laurent Schwartz avant la guerre (Communication personnelle de V. Chechkin, professeur à la Chaire d'équations aux dérivées partielles de l'université de Moscou et petit-fils de S. Sobolev).

Il fallut attendre plus de dix ans, dont quelques années sans travail mathématique puis de lente maturation, pour que naisse le travail de 1945 de Schwartz, qui reprend la définition de Sobolev. Mais entre temps Sobolev avait quitté la scène par une porte dérobée ! Sobolev n'a pas poursuivi son travail dans cette direction, et a laissé à Schwartz le champ libre pour développer la théorie où manquaient essentiellement la transformation de Fourier et la structure d'espace topologique sur l'espace des distributions[4].

La première publication où Schwartz cite ses sources [S1] contient d'ailleurs une note (Note 4 page 5 de l'introduction), étrange par la présentation partielle et anti-chronologique des articles de Sobolev : « Soboleff[5] ; Friedrichs[6] ; Kryloff[7]. Certains articles signalés dans les notes précédentes sont postérieurs aux distributions, mais les auteurs ignoraient les distributions par suite de la lenteur de l'impression, des communications internationales, ou de ma publication. Voir aussi les fonctionnelles de Soboleff[8] ».

Les deux premières références n'ont pas un intérêt crucial ; la dernière « Méthodes nouvelles ... » est l'article déjà cité. Par contre l'article des *Doklady* de 1935 (reçu le 17.7.1935) est « oublié ».

De plus cette Note est restée à l'identique dans les éditions « entièrement revues et corrigées » ultérieures.

La clé du mystère

Dans son autobiographie, Schwartz, après avoir fait une description *a minima* de la découverte de Sobolev de 1935, tirée de l'article qui n'est pas cité dans la Note 4 ci-dessus, se demande ([S2], p. 236) pourquoi Sobolev n'a pas poursuivi après la guerre ses travaux sur les fonctions généralisées.

La réponse est instructive. Sobolev a disparu du milieu de la recherche mathématique et de tout contact avec l'étranger de 1943 à 1953 parce qu'il était occupé à d'autres activités, des mathématiques appliquées, très appliquées même. Il devint adjoint principal du directeur I. V. Kurchatov au « Laboratoire 2 », d'abord situé au sein de l'université de Moscou, et qui devint ensuite le LIPAN. C'est dans ce laboratoire que vit le jour la première bombe atomique soviétique [Viz].

On sait qu'à l'Ouest comme à l'Est de grands mathématiciens ont joué un rôle crucial dans les projets atomiques [Go, p. 383]. La physique complexe des ondes de choc qui entre en jeu conduit en effet à la résolution d'équations non linéaires, et Bethe (qui en parla à Von Neumann) avait remarqué le caractère instable de l'approximation numérique des solutions ; les compétences des meilleurs mathématiciens étaient requises ! Ces travaux essentiels à la défense soviétique conduisirent Sobolev à la résolution numérique des équations pour un réacteur nucléaire sphérique. Il étudia aussi l'effet appelé « effet-gun » et sa variation sous bombardement par neutrons. Ce sont des travaux essentiels pour les applications aux pertes en eau des réacteurs (Three-Mile Island et Chernobyl). Sobolev fut décoré de la plus haute médaille civile en 1951, celle de héros socialiste du travail. Bien entendu tout contact avec l'étranger lui était totalement interdit : même sa

---

[4] Lützen compare les articles de Sobolev (1936) et l'exposé de Schwartz de 1950, à Cambridge qu'il confond avec son manuel de 1950 qui ne contient pas le théorème des noyaux !

[5] « Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions ayant des dérivées à carré intégrables. » Comptes rendus Académie des Sciences URSS, **1** (1936), p. 279–282.

« Sur un théorème d'analyse foctionnelles ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), **4** (1938), p. 471–496.

[6] « On differential operators in Hilbert spaces ». Amer. J. Math., **61** (1939), p. 523–544.

[7] « Sur l'existence des dérivées généralisées des fonctions sommables ». Comptes rendus Académie des Sciences URSS, **55** (1947), p. 375–378.

[8] « Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), **1** (1936), p. 39–71.

femme ne savait pas où Serge Sobolev disparaissait pendant des mois, après des passages rapides à son domicile. Sa liste de publications pendant cette période s'en est ressentie — sauf son manuel de 1950 occasionné par un séjour à l'hôpital pour jambe cassée —, et l'essentiel des travaux auxquels nous venons de faire allusion n'est toujours pas publié.

La suite est plus connue : Sobolev reprendra des activités scientifiques classiques dans les années soixante. Entre-temps, le livre *Théorie des distributions* et les travaux poursuivis par L. Schwartz (distributions tempérées et transformation de Fourier, applications de la théorie des espaces vectoriels topologiques) conduisirent à le considérer comme le père de la théorie. La reconnaissance tardive de la paternité de Sobolev dut attendre encore quinze ans [L3, L4]. L'apport principal de Schwartz, dans la lignée du projet Bourbaki (« algébriser l'analyse », en somme), fut de rapprocher la définition de Sobolev des travaux entrepris par Dieudonné sur les espaces vectoriels topologiques à partir de 1940 [Du] à la suite des travaux de Banach et Köthe, déja assez avancés. Schwartz comprit dans les années quarante cinq-cinquante l'intérêt d'appliquer la théorie des espaces vectoriels topologiques au cas des fonctions généralisées.

On pourrait appeler « appropriation par bourbakisation » ce processus de découverte par rapprochement de théories disjointes. Il fut fréquent. On peut se reporter à [Gr, Mi, S4] pour voir comment une belle idée de Minlos que Gross avait eue indépendamment s'est incarnée dix ans plus tard dans la théorie des applications radonifiantes, le nom de Minlos s'étant perdu au passage. Avec Sobolev, c'était l'auteur lui-même qui avait favorisé le processus ! Le terme de bourbakisation renvoie ici au « projet Bourbaki », qui consistait, en dégageant les structures profondes des mathématiques, à obtenir le degré de généralité donnant à une théorie sa puissance extensive, ici la mise à jour des structures d'espaces vectoriels topologiques. On peut d'ailleurs remarquer que Jacques-Louis Lions (1928-2001), s'est orienté dès sa thèse avec L. Schwartz vers l'utilisation des méthodes de majoration-inégalités de normes de type Sobolev, certes moins élégantes que l'analyse fonctionnelle, mais plus efficaces. Lions devint ensuite le chef des mathématiques appliquées françaises.

La percolation

La percolation (ou l'illumination, il emploie les deux mots) dont parle Schwartz dans son autobiographie, est probablement constituée du rapprochement final, à l'occasion d'un problème posé par Gustave Choquet, entre la théorie des fonctionnelles de Sobolev (définies comme formes linéaires continues) et les travaux de Dieudonné puis Dieudonné-Schwartz. Contrairement aux affirmations de [Lu] en effet, en janvier 1946 Schwartz avait une bonne connaissance des travaux de Sobolev : lors de son cours Peccot au Collège de France « il n'avait que le nom de Sobolev à la bouche », selon le témoignage des participants.

Conclusions et problèmes

À l'Est et à l'Ouest

En Russie, à l'époque du socialisme triomphant, la science se doit d'être au service du peuple pour le progrès de l'humanité. Cette conception actualise en fait une tradition culturelle ancienne en Russie, vivante à Saint-Pétersbourg, même dans le domaine des mathématiques. Qu'on songe à Pafnuty Chebyshev dont les soucis pour les systèmes articulés, le découpage des tissus, les lois du hasard, étaient étroitement reliés à des préoccupations d'une grande abstraction. Chebyshev a très explicitement décrit [C] l'intérêt mutuel que les mathématiques pouvaient tirer des applications pratiques. Dans le cas des fonctionnelles, Smirnov, dans une analyse profonde, montre combien les sciences expérimentales restent au cœur des soucis des mathématiciens russes (Y, page 46). Pour l'école russe, à l'époque concernée comme plus tard, les mathématiques se mesurent à leur efficacité. Même la topologie générale trouve chez Tychonov puis Pontryagin des applications à l'étude du contrôle des systèmes. On peut citer plus récemment les travaux d'Arnold et de son école. On conçoit d'ailleurs quelles furent les difficultés de la Lusitania, la célèbre école créée autour de la théorie des fonctions par Lusin à Moscou, largement inspirée par la théorie des ensembles (germanique) ou la théorie des fonctions (française) [GrK] . En France par contre (comme en Allemagne), le pays de Descartes, de Galois et de Bourbaki, on a favorisé le goût de la recherche mathématique « *pour l'honneur de l'esprit humain* » (l'expression est de Jacobi) : la valeur d'une théorie se mesure à son degré de généralité, une généralité purificatrice synonyme d'efficacité, et qui se manifeste par le rapprochement de domaines apparemment éloignés dans la production de théories nouvelles, et par l'élégance des concepts [B1]. Pour Schwartz par exemple la théorie des distributions prend de l'ampleur quand il marie la définition de Sobolev à la théorie des espaces vectoriels topologiques : il aboutit ainsi aux propriétés des topologies d'espaces de distributions qui permettront les travaux de ses élèves Lions et Malgrange et auparavant au théorème des noyaux annoncé au Congrès de 1950 à Cambridge (USA), qui est la cerise sur le gâteau qui lui rapporte la médaille Fields et la paternité ultérieure — à l'Ouest au moins — des distributions. Ces deux conceptions des mathématiques et de leur rôle ont été présentes simultanément dans chacun de ces pays, et parfois dans la production d'un même mathématicien : qu'on songe à Gel'fand en URSS ou dans le passé à Fourier en France. À l'époque qui nous intéresse, les aspects dominants étaient plutôt ceux que nous avons indiqués. On peut remarquer, même si la question dépasse notre propos, que les développements récents des sciences physiques et mathématiques montrent que la tension entre efficacité et rigueur reste forte (Intégrale de Feynman, théorie des cordes : voir le débat, par exemple à partir de [JQ]). Faut-il se réjouir que les bouleversements politiques des dernières décades risquent d'uniformiser mondialement les pratiques de la science mathématique et les réponses à cette « tension essentielle » [Ku] ?

Probabilités et mesure

La théorie de la mesure et ses relations avec les probabilités méritent une étude particulière : ce fut le premier écueil sérieux pour le développement du projet Bourbaki [B2]. Du point de vue qui nous intéresse, il est indéniable que la théorie des distributions a servi d'argument « idéologique » de poids à l'époque ; voici quelques lignes de l'introduction de [B1] concernant la théorie de la mesure : « ... la théorie de l'intégration est ainsi reliée, d'une part à la théorie générale de la dualité dans les espaces vectoriels topologiques, de l'autre à la théorie des distributions, qui généralise certains aspects de la notion de mesure, et que nous exposerons dans un livre ultérieur ». On voit combien ce point de vue « structuraliste » à l'œuvre aussi dans l'approche de Schwartz des distributions masquait la nature réelle des phénomènes en question, par exemple la finesse des processus aléatoires. On peut avoir un autre aperçu des erreurs commises à la lecture d'André Weil [W1], [W2] : « ... *Le moment est venu de chercher, par une analyse plus serrée, à décomposer les découvertes de Lebesgue en leurs éléments constitutifs pour y distinguer ce qui est essentiel au maniement d'une intégrale, et ce qui a trait aux opérations particulières des ensembles sur lesquels on a le plus souvent à opérer* ».

Plutôt qu'un mépris des applications en vue, ce fut la volonté de faire passer la structure avant le phénomène, l'architecture avant le portrait, qui fit prendre un retard de quinze ans aux probabilités françaises, un comble au pays de Laplace, Lebesgue, Borel et surtout de Paul Lévy, Fortet, Loeve, Ville et Doeblin qui dans les années trente ont participé au tout premier rang à la renaissance de la théorie des probabilités en développant les nouveaux aspects trajectoriels des processus dont les applications se révéleront d'une grande richesse dans la seconde moitié du xx^e siècle, y compris dans la solution des grands problèmes de l'analyse classique et son renouvellement (EDP, problème de Dirichlet, théorie du potentiel,...). On espère revenir ailleurs sur cette question, sur laquelle Schwartz lui-même apporte un jugement autocritique ([S2]).

Les difficultés de communication

Depuis la révolution jusqu'aux années soixante-dix, les échanges de mathématiciens ont souffert de nombreuses difficultés dues au manque de liberté intellectuelle en URSS, à la guerre froide, aux conflits à l'intérieur du système culturel et universitaire soviétique à partir des années soixante. C'est ainsi que la délégation soviétique déclina tout entière l'invitation à se rendre au Congrès de 1950 à Harvard, en pleine guerre de Corée. C'est à ce congrès que fut remise la médaille Fields à Laurent Schwartz. On suppose que Kolmogorov, membre du comité qui l'a décernée, n'a pas même mentionné le nom de Sobolev alors sous-directeur du Lipan. Dans les années soixante d'autres problèmes surgirent : nous avons été témoin des difficultés des échanges et de publication d'articles mathématiques en URSS, qui ont conduit par exemple à la naissance de la revue *Functionalnii Analyz* d'Israël M. Gel'fand dans les années soixante-dix.

Mathématiques et politique

À la fin de l'interview qui a servi de document de travail à Lützen, Laurent Schwartz fait un étonnant rapprochement entre la théorie des distributions et la démocratie politique, en citant l'éminent historien marxiste anglais Moses Finley pour lequel la démocratie a été découverte par les Grecs : « *Ce sont les Grecs, somme toute, qui ont découvert non seulement la démocratie, mais la politique. Je ne nie pas l'existence possible d'exemples antérieurs de démocraties ... Quelle que puisse avoir été la réalité de ces derniers faits, leur influence historique sur les sociétés ultérieures fut nulle. Les Grecs découvrirent la démocratie ...tout à fait comme Christophe Colomb, et non quelque navigateur viking, découvrit l'Amérique* » [Fi]. Autrement dit Sobolev aurait été le Viking de Colomb-Schwartz. Au-delà du débat général sur le réalisme philosophique (la démocratie fut-elle découverte ou inventée ? et les distributions ?), il est clair que les mathématiques comme les concepts politiques n'adviennent pas *ex nihilo*, et que le travail scientifique est un processus : Schwartz arrive après Sobolev, Dirac,... et même Euler ! Avec le recul et l'étude précédente la comparaison paraît plus qu'excessive, injustifiée. On a vu apparaître dans le même champ de l'analyse mathématique le point de vue de l'analyse algébrique dont l'importance paraît autrement prometteuse, ne serait-ce, en adoptant le point de vue de Bourbaki, que par les « ponts » qu'elle établit. Allant plus loin, et tenant compte des non-dits fréquents chez Schwartz (voir plus haut page 38), on peut se demander s'il n'y a pas là allusion au pouvoir idéologique qu'a constitué Bourbaki, parfois contre la volonté de certains de ses membres comme Claude Chevalley, resté libertaire toute sa vie (dans son bel interview nostalgique [Che] il reconnaît aussi avoir pensé « *apporter la lumière au monde mathématique* »), dans une volonté commune de renouveau. D'ailleurs c'est chez Chevalley qu'on trouve les remarques les plus intéressantes sur le rapport entre Bourbaki et la pensée politique : « *c'est chez le penseur politique Castoriadis, dit-il, que j'ai compris les erreurs de mon point de vue en logique mathématique !* »

Le pouvoir de Schwartz a personnifié celui de Bourbaki : mathématiques modernes et réforme dans l'enseignement, rôle du savant pour dire « le juste », et pouvoir indirect dans la vie de la Cité : l'aura du mathématicien, que Schwartz a su manier « pour la bonne cause » est bien faite pour évoquer la Grèce. Cette comparaison renvoie à un rapprochement fréquent chez le grand mathématicien entre action mathématique, combat politique et principes moraux.

La disparition d'une si forte personnalité évoque la fin parfois annoncée de l'époque des « grands récits », celle des acteurs romantiques qui créent des mythes (Bourbaki, le rêve des distributions). Cette époque-là est-elle advenue ? L'avenir nous le dira, et l'Histoire jugera.

Remerciements

L'auteur remercie Chandler Davis pour avoir autorisé la publication de la version française de l'article publié auparavant en anglais dans *The Mathematical Intelligencer*, et Serge Demidov pour avoir autorisé la traduction par l'auteur et la publication de l'article de Serge Yukevitch tiré de son journal *Istoriko-Matematikcheskie Issledovanie* (1991). Enfin il remercie Serge Kutateladze pour avoir attiré son attention sur plusieurs points historiques.

Références

[Be] Beaulieu Liliane. Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944). Thèse de Ph. D, Université de montréal. 1990

[Boc] Bochner Salomon. Review of L. Schwartz 's « théorie des distributions », Bull. Amer. Math. Soc. 58, (1952), pp. 78-85

[B1] Bourbaki Nicolas. Éléments de mathématique, livre VI Intégration, Hermann, 1952

[B2] Bourbaki Nicolas. L'architecture des mathématiques, p. 35-47, in Les grands courants de la pensée mathématique, sous la direction de F. Le Lionnais, Ed. Albert Blanchard

[Boul] Bouleau Nicolas. Dialogues autour de la création mathématique. Association Laplace-Gauss, 1997

[C] Chebyshev Pafnuty. Rapport du professeur extraordinaire de l'université de Saint- Pétersbourg sur son voyage à l'étranger.

[Che] Chevalley Claude. Nicolas Bourbaki, Collective Mathematician. The Math. Intelligencer, Vol. 7, n° 2, (1985), pp. 18-22

[De] Demidov Sergei S. The Moscow school of the theory of functions in the 1930s in : Golden years of Moscow Mathematics, S. Zravkovska, P. Duren Editors, vol. 6, AMS, LMS, 1993

[Du] Dugac Pierre. Jean Dieudonné mathématicien complet, Éd. Jacques Gabay, 1995

[FI] Moses I. Finley, Démocratie antique et démocratie moderne, Payot, 1976

[Ge] Gel'fand Israel M. Some aspects of functional analysis and algebra. Proc. Int. Cong. Math, 1954, Amsterdam (1957), 253-276

[JQ] Jaffe Arthur ; Quinn Frank. « Theoretical mathematics » : toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics. Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993), n° 1, 1-13

[Go] Godement Roger. Analyse mathématique, tome 2, Springer-Verlag 2000

[Gr] Gross Leonard. Harmonic Analysis on Hilbert space, Mem, AMS, n° 46, 1963

[GrK] Graham Loren, Kantor Jean-Michel. Name Worshippers : Religion, Russian and French Mathematics, 1900-1930 sur www.math.jussieu.fr/∼kantor

[H1] Hadamard Jacques. Le mouvement scientifique en URSS, Rapport présenté en 1935 à Paris aux journées d'étude et d'amitié franco-soviétiques.

[H2] Hadamard Jacques. Rapport paru en 1945 après le 220e anniversaire de l'Académie des sciences de Russie

[Ka] Jean-Pierre Kahane. Jacques Hadamard. The Math. Intelligencer, vol. 13, n° 1, (1991), pp. 23-29

[Kub] Kuhn Thomas. La tension essentielle, Gallimard, 1990

[L1] Leray Jean. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, Acta math. 63 (1934), p. 193-248

[L2] Leray Jean. Travaux de M. Laurent Schwartz, rapport annexe à la candidature de Laurent Schwartz, 1964, Académie des Sciences, Paris

[L3] Leray Jean. Rapport sur l'attribution du prix Cognac-Jay (Samaritaine) 1972 à Laurent Schwartz, Jacques-Louis Lions et Bernard Malgrange

[L4] Leray Jean. La vie et l'œuvre de Serge Sobolev, La Vie des sciences, série générale, t. 7 (1990), n° 6, p. 467-471

[Lo] Lorentz G. G. Mathematics and Politics in the Soviet union, Journal of Approximation Theory 116 (2002), p. 169-223

[Lu] Lutzen, Jesper. The Prehistory of the theory of distributions, Springer-Verlag, 1982.

[ManS] Mandelbrojt Szolem. Souvenirs à bâtons rompus, recueillis en 1970 et préparés par Benoît Mandelbrot, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, n° 6, (1985), p. 1-46

[ManB] Mandelbrot Benoît. Chaos, Bourbaki and Poincaré, The Math. Intelligencer, vol. 11, n° 3, (1989)

[Mar] Maritz Peter. Around the graves of Petrovskii and Pontryagin The Math. Intelligencer, vol. 25, 2, (2003), p. 79

[M-Sh] Maz'ya Vladimir - Shaposhnikova Tatyana - Jacques Hadamard. Universal Mathematician. (AMS-LMS), 1998

[Mi] Minlos R. Continuation of a generalized random process to a completely additive measure Dokl. Akad. NaukSSSR (N. S.) 119 (1958), p. 439-442

[Na] Naumann Joachim. Remarcs on the prehistory of Sobolev spaces. Preprint series, Institut für Mathematik, Hunbold, universität zu Berlin.

[S1] Schwartz Laurent. Théorie des distributions, t. 1, Herman, Paris 1950

[S2] Schwartz Laurent. Un mathématicien aux prises avec le siècle, Éd. O. Jacob, 1997

[S3] Schwartz Laurent. Le point de vue de Laurent Schwartz in « Les mathématiciens » pour la Science, Paris (1996)

[S4] Schwartz Laurent. Séminaire « Applications radonifiantes », 1969-70, École polytechnique

[Viu] Viucinich A. Soviet mathematics and dialectics in the Stalin Era. Historia mathematica 27 (2000), pp. 54-76

[Viz] Vizguin V. Istoria sov. atomnogo proekta. Izdat. rousk. kristian. gumanitarnogo instituta St. Petersbourg

[Y] Yuskevitch A. P. Encounters with mathematicians, Golden Years of Moscow mathematics. S. Zdravkovska, Peter L. Duren Editors History of mathematics, vol. 6, AMS, LMS, 1991

[W1] Weil André. Calcul des probabilités, méthode axiomatique, intégration. Revue scientifique, t. 78, 1940, p. 201–208 ; p. 260-272

[W2] Weil André. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1940, Œuvres vol. 1. Voir aussi Commentaire p. 551

Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées [1]

Adolphe P. Yuskevitch

Depuis 1968 je publie les appréciations de célèbres mathématiciens français sur leurs collègues russes, à l'occasion de leur candidature comme membre étranger de l'Académie des sciences à Paris (la procédure d'élection se déroule de la même manière depuis le milieu du XIX^{e} siècle). Souvent ces appréciations ont de l'intérêt pour l'histoire des relations entre scientifiques de nos deux pays. Bien entendu ces appréciations reflètent le point de vue personnel des orateurs et souvent le jugement sur les candidats dépend aussi de la situation internationale. Les candidatures déja publiées sont celles de Chebyshev, Lyapounov, Bernstein, Vinogradov, Lavrentiev, Kolmogorov. C'est avec grand plaisir que j'ai obtenu l'autorisation de Paul Germain de publier l'appréciation de Jean Leray sur son collègue Sergei Sobolev.

La meilleure appréciation de l'œuvre de Sobolev se trouve dans l'ouvrage [4], publié pour ses quatre-vingts ans[2]. Sergei L'vovich Sobolev[3] a terminé ses études à l'université de Leningrad en 1928. Ses directeurs étaient N. M. Gunther (1871-1941) et V. I. Smirnov (1887-1974), tous deux élèves de V. A. Steklov (1863-1926), lui-même élève de A. M. Lyapounov (1857-1918). Ces quatre professeurs se sont occupés essentiellement toute leur vie de la théorie des équations différentielles, des équations aux dérivées partielles, et de leurs applications en physique mathématique et en mécanique. C'étaient des membres éminents de l'école mathématique de Saint-Pétersbourg devenue Leningrad, école dirigée par P. Chebyshev (1821-1894), l'un des professeurs de Lyapounov. Pendant ses études Sobolev suivit aussi des conférences de Fihtengoltz (1888-1959), qui fut le premier à développer à Leningrad l'étude des fonctions d'une variable réelle qui a suscité les travaux intensifs de l'école de Moscou avec D. F. Egorov (1869-1931), N. N. Lusin (1883-1950) et leurs élèves. Sobolev appartient à la quatrième génération de l'école de Chebyshev, qui a systématiquement exploité les relations entre les mathématiques et les problèmes concrets des sciences et des techniques, sans exclure le souci d'introduire les questions abstraites souvent tôt en amont des questions pratiques (même en théorie des nombres). Il faut aussi insister sur le fait que les professeurs de Sobolev utilisaient déjà eux-mêmes les développements les plus récents des mathématiques – topologie, théorie des fonctions d'une variable réelle, nouveaux secteurs de la théorie des fonctions d'une variable complexe, équations intégrales, analyse fonctionnelle naissante. Le travail de recherche de Sobolev commença tout de suite après la fin de ses études, dans le département de

[1] Traduit de *Istoriko-matematicheskie issledovanie*, 1991, p. 256–266 par Jean-Michel Kantor.
[2] Voir aussi la *Notice nécrologique de Sobolev* par Jean Leray. [NdT]
[3] 1908-1989

sismologie de l'Académie des sciences que dirigeait V. I. Smirnov. Et même, encore étudiant à l'université il présenta un diplôme, sur un thème suggéré par Gunther. À l'Institut sismologique, Sobolev fit à nouveau des travaux étroitement liés au thème suggéré auparavant par Gunther, la théorie analytique des équations aux dérivées partielles et en particulier la propagation des ondes élastiques. Certaines de ses premières publications furent cosignées avec Smirnov. Le 29 juin 1930 Sobolev fit un exposé au Premier congrès des mathématiciens de l'URSS « équation des ondes dans un milieu isotrope inhomogène », dont un résumé parut aux *Notes aux Compte Rendus de l'Académie des sciences de Paris*. Ce travail intéressa Jacques Hadamard (1865-1963) qui assistait au congrès et y fit un exposé sur un thème voisin de celui de Sobolev, « équations aux dérivées partielles et théorie des fonctions d'une variable réelle » ([5], en français et en russe). Déjà les premiers travaux de Sobolev, résumés à la suite de ceux de Gunther et Smirnov dans ([6] huitième partie) eurent un grand écho chez les mathématiciens soviétiques et Sobolev fut élu le 1er février 1933 membre-correspondant de l'Académie des sciences. Il n'avait pas encore 25 ans ! Il devait être élu membre le 29 janvier 1939.

En 1932 Sobolev entre à l'Institut physico-mathématique créé par Steklov en 1921. C'est à cette époque qu'il développe les travaux les plus importants qui établissent le début de la théorie des fonctions généralisées. Il est le premier à les définir mathématiquement et à s'atteler à l'étude de leurs propriétés fondamentales. Un résumé de ses idées a été fait par Smirnov ([7], p. 187-191). Les idées de Sobolev sur les distributions, qu'il appelle fonctionnelles et qui furent ensuite appelées « fonctions généralisées », furent formulées à partir de la fin des années vingt et du début des années trente – si ce n'est pas plus tôt – et exposées dans sa conférence « Solutions généralisées de l'équation des ondes » le 29 juin 1934 au second Congrès des mathématiciens soviétiques à Leningrad. En voici le résumé laconique qu'en fit l'auteur : « *La classe de fonctions qu'on peut considérer comme solutions de l'équation des ondes du point de vue classique est formée de fonctions deux fois différentiables. Mais dans diverses applications pratiques il paraît commode de considérer des fonctions ayant des singularités d'un type bien défini. On introduit un espace de fonctions intégrables au sens de Lebesgue, dans lequel on peut définir les solutions généralisées de l'équation des ondes comme limites de solutions deux fois différentiables. À l'aide d'un critère simple d'intégrabilité, on donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit solution généralisée, et on établit le lien entre solutions usuelles et solutions généralisées. Enfin, la théorie ainsi construite est appliquée à quelques exemples concrets ([8], p. 259)* ». Leray accorde une très grande importance aux travaux de Sobolev en théorie des fonctions généralisées, appelées distributions dans la littérature mathématique occidentale, mais il les date des travaux de 1935 et 1936. Smirnov ([7], p. 187) renvoie à l'article [9] de 1935 et aussi à deux autres articles cités dans [9] et [10]. Dans le travail bibliographique [9] la conférence de 1934 n'est même pas mentionnée. Dans les deux volumes classiques de Dieudonné sur l'histoire des mathématiques des deux derniers siècles, Dieudonné écrit que Sobolev a commencé l'étude des fonctions généralisées en 1937 ([11], p. 2, [7], p. 171). Dans l'article « Fonctions généralisées » de 1982 Vladimirov cite [9] et aussi l'article « solutions généralisées » ([12], t. 3, p. 1102-1110, 1116-1117).

Ce n'est que dans l'article écrit à l'occasion du jubilé de Sobolev en 1989, que l'un des auteurs, portant lui aussi le nom de Vladimirov, signale l'article de 1934, « où apparaît pour la première fois la théorie des fonctions généralisées ». On sait bien que l'établissement d'une priorité chronologique entre plusieurs auteurs d'une découverte scientifique ne se fait pas toujours de manière harmonieuse, mais aujourd'hui il ne conduit plus à des effets aussi négatifs, ni à des disputes violentes, comme ce fut le cas par exemple avec Newton et Leibniz, les artisans de l'analyse infinitésimale.

En ce qui concerne la préhistoire de la théorie des fonctions généralisées de Sobolev, elle reste peu étudiée. Un rôle devrait sans doute être attribué dans la mise au point des notions centrales aux travaux de Gunther (en particulier à sa méthode de lissage des fonctions insuffisamment dérivables, travail souvent cité par Smirnov ([7] p. 184). Encore plus tôt, une voie vers la théorie des fonctions généralisées fut trouvée dans les travaux d'Hadamard, en commençant par sa remarque « sur les opérations fonctionnelles » et ses « Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique », publiées en 1903. L'académicien Steklov attira l'attention sur ces travaux lors de la présentation de l'œuvre d'Hadamard qui venait d'être élu correspondant de notre Académie le 2 décembre 1922.

L'article de Steklov est profond et d'une portée certaine. Il insiste en particulier sur l'importance du premier article où pour la première fois Hadamard utilise le terme de « fonctionnelle » et il détaille les résultats du second. Il y insiste en particulier sur l'existence des « ondes de choc » dans les liquides compressibles et les corps élastiques. Une remarque intéressante de Steklov est la suivante : les questions d'hydrodynamique, traduites dans le langage de l'analyse mathématique, coïncident avec la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles, « née de manière totalement indépendante d'une quelconque origine physique ». Cette remarque montre que Steklov comprenait parfaitement la signification pour les applications ultérieures de recherches fondamentales abstraites poursuivies de manière complètement indépendante de leur utilisation. D'ailleurs il utilise la terminologie classique dont il a l'habitude (le terme de « fonctionnelle » est utilisé en passant), et il ne pouvait pas prévoir qu'en quelques années c'est essentiellement dans son institut qu'allaient être posées les bases de la théorie des fonctions généralisées. Ce discours de Steklov ne fut publié qu'en 1968 ([1] p. 110-115). En ce qui concerne les avancées d'Hadamard vers la théorie des solutions généralisées des équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées, citons l'exposé de G. Shilov (professeur à l'université de Moscou de 1917 à 1975), spécialiste de la question, le 10 février 1964 lors d'une session – mémorial de la société mathématique de Moscou : « En résolvant les équations hyperboliques, Hadamard introduit essentiellement l'appareil de la théorie des fonctions généralisées d'une ou plusieurs variables. Cette découverte est restée en sommeil à l'époque – Hadamard devançait ainsi de nombreuses années les réflexions des mathématiciens de sa génération – et ce n'est qu'au milieu des années cinquante que les fonctions généralisées se sont propagées dans le monde entier dans les questions d'analyse » ([13], p. 185). Shilov achève son intervention en citant les mots de Szolem Mandelbrojt à propos des célèbres « Lectures on Cauchy's problem, 1922, (traduction française 1932, russe 1978) » : les conceptions développées dans ce travail conduisent à la topologie générale et à l'analyse fonctionnelle, et l'introduction de la notion de solution élémentaire est d'une très grande généralité en liaison avec les distributions (fonctions généralisées ([14], p. 4-5). De plus c'est à Hadamard qu'on doit le terme de fonctionnelle et celui d'analyse fonctionnelle. Jean Leray mentionne aussi ces travaux précurseurs. Ce qui a été dit ici ne minimise d'aucune manière les accomplissements de Sobolev, qui a été le premier à donner une définition rigoureuse – et de plusieurs manières – de la notion moderne de fonction généralisée et a posé les bases du développement ultérieur dans divers domaines de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées, en tant que domaine autonome de l'analyse.

Presque tous les travaux de Sobolev sur la théorie des solutions et des fonctions généralisées ont été publiés en russe, sauf l'article en français de 1936 ([9], 22). Il n'est donc pas étonnant qu'à l'étranger ces travaux n'aient pas immédiatement attiré l'intérêt qu'ils méritaient. Cette remarque s'applique aussi au livre « Quelques applications de l'analyse fonctionnelle en physique mathématique » (Léningrad, 1950), qui reprenait le cours fait par Sobolev à l'époque à l'université[4]. Ce livre fut traduit en anglais seulement en 1963 (en allemand en 1964), il est cité plusieurs fois par Leray et, comme le remarque V. I. Smirnov « ce livre joua un rôle important dans l'utilisation des idées et des méthodes modernes de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle pour la solution de problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles » ([6] p. 191). En Russie les idées nouvelles de Sobolev, à la suite de celles de ses maîtres Gunther et Smirnov, se diffusèrent assez vite, et furent prolongées et développées à partir des années cinquante. Pour la diffusion de ces nouvelles directions de l'analyse mathématique à l'étranger un rôle majeur doit être attribué à l'ouvrage en deux tomes de Laurent Schwartz « Théorie des distributions », correspondant (1973) puis membre (1975) de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Plusieurs articles de Schwartz entre 1945 et 1948 utilisaient déjà l'expression « distributions ». Après la publication en 1950-1951 du livre de Schwartz, la théorie des distributions connut un très grand développement, et trouva de nombreuses applications nouvelles. La première étude historique sur l'histoire des distributions est celle de Jesper Lützen en 1980, où se trouvent analysés précisément mathématiquement de manière irréprochable les travaux de Sobolev, de Schwartz et de nombreux mathématiciens antérieurs ou contemporains. Malgré tous ces accomplissements le livre de Jesper Lützen contient quelques lacunes et de mon point de vue des appréciations peu convaincantes, qui s'expliquent par une connaissance imparfaite des travaux en russe en général et en particulier de Sobolev (bien que sa bibliographie contienne onze références qui ont été traduites en anglais, comme d'ailleurs le livre de 1950 déja mentionné et le volumineux cours, dans sa troisième version de 1954). La note de Leray sur les travaux de Sobolev complète de manière substantielle l'étude de Lützen.

Sans vouloir écrire l'histoire de la question, je me limiterai ici à quelques remarques sur le livre de Lützen. D'abord je ne peux pas être d'accord avec son appréciation des résultats obtenus par Sobolev puis Schwartz et sur leur place dans le développement de la théorie des distributions. L'essence des différences entre

[4] en fait rédigé pendant une période où une chute retenait Sobolev à l'écart du LIPAN, (cf. p. 38). [NdT]

leurs théories, c'est, selon Lützen (p. 64), le fait que pour Sobolev les distributions sont une technique pour résoudre un problème spécifique, alors que Schwartz mit au point la théorie des distributions sous de nombreux angles, et l'appliqua pour poser et résoudre de manière rigoureuse de nombreux problèmes. Il est vrai qu'en 1934 Sobolev commença par le problème de Cauchy pour l'équation des ondes (qui est hyperbolique), mais ensuite il ne s'est pas restreint à l'une des applications qu'il avait introduites et les a considérablement enrichies, comme le montre Jean Leray (« œuvre d'une étendue, d'une diversité, d'une puissance admirables »...). Il est vrai aussi que ces diverses contributions publiées en articles successifs ne furent pas réunies en une monographie, qui aurait eu sans doute le rôle fondateur du livre de Schwartz, devenu le livre de base pour de nombreux chercheurs à l'étranger et aussi en Russie. Lützen résume d'une formule la différence fondamentale entre les travaux de Sobolev et Schwartz : « Ainsi Sobolev inventa les distributions, mais la théorie des distributions fut créée par Schwartz » (p. 64). Cette réflexion est déclinée dans le livre à plusieurs occasions. Dans l'une (p. 67), après avoir cité Liusternik et Vishik dans un discours prononcé à l'occasion du cinquantième anniversaire de Sobolev (1959), Lützen confirme cette citation pour aussitôt ajouter que « the further development of the theory... was not the work of Sobolev but of Schwartz ». Sans vouloir le moins du monde diminuer l'importance primordiale du livre de Laurent Schwartz de 1950, je trouve bien plus équilibré le jugement émis par S. Vladimirov ([12], t. 4, p. 1104) : « Les fondements de la théorie mathématique des fonctions généralisées furent posés par Sobolev en 1936 en vue de la résolution du problème de Cauchy pour les équations hyperboliques, mais dans les années cinquante L. Schwartz donna un exposé systématique de la théorie et indiqua de nombreuses applications ». On aurait pu ajouter que l'exposé systématique et écrit dans un langage moderne de l'ouvrage de Schwartz a éclipsé les travaux de Sobolev. En ce qui concerne la connaissance qu'aurait eue Schwartz des découvertes antérieures de Sobolev, selon les déclarations que fit L. Schwartz en 1950-1951 et en 1974, il n'en connaissait rien avant 1945 (p. 67 de [16]). Aillleurs Lützen écrit que l'attention de Schwartz fut attirée sur les travaux de Sobolev par Leray en 1946[5]. Assurément Sobolev et Schwartz sont arrivés à leurs découvertes des « fonctions généralisées » et des « distributions » par des voies différentes. Mais assurément aussi il n' y a aucune raison d'associer le travail de Sobolev à la « préhistoire » de la théorie des distributions, comme Lützen l'affirme trois fois (p. 64, 67 et 156). Plus généralement Lützen accorde plus d'attention dans son livre à Laurent Schwartz qu'à Serge Sobolev. L'exposé des résultats selon la bibliographie est correct ; mais il aurait pu être plus détaillé et de ce point de vue la Notice de Leray contient des compléments précieux, si même elle ne contient pas assez de données biographiques sur Sobolev. Ces indications auraient dû et auraient pu être enrichies du texte de Liusternik et Vishik (que cite Lützen et qu'il utilise par ailleurs). Il n'y a aucune indication sur les professeurs de Sobolev ni dans le texte ni dans l'index de références. La biographie de L. Schwartz est traitée de manière opposée. Dans le chapitre 6 nous apprenons toutes les étapes de la vie de Schwartz, le nom des professeurs à l'École normale (Leray, Lévy, Hadamard) ; nous apprenons son appartenance au groupe Bourbaki, sa découverte en six mois des distributions, ses conversations avec de Rham (mentionnées

[5] Voir cependant p. 37 le témoignage de V. Chekchin

aussi par Leray), etc. Toute cette information est précieuse et il est fâcheux que le travail de maturation de Sobolev soit traité par Lützen en une demi-page (p. 60).

Bien sûr, les distinctions entre la « préhistoire » d'une théorie et son développement sont affaire de convention. La notion de « distribution » est apparue chez différents auteurs du début du XX^e siècle sous une forme presque explicite, et finalement on peut remonter à Euler (voir plus loin ; Lützen l'évoque aussi). Cependant nous distinguons entre des idées appartenant à la préhistoire, qui sont déjà nées mais n'ont pas été encore introduites dans un cadre bien défini, avec les idées de l'histoire d'une théorie, où elles sont introduites par une définition précise, et où on s'attache à l'étude de leurs propriétés spécifiques. Ainsi on a raisonné avec des fonctions d'un type ou d'un autre dans la Grèce antique, au Moyen Âge, et au début de l'époque moderne, mais les fonctions comme objet d'étude mathématique dans toute leur généralité n'apparaissent qu'à la fin du XVII^e siècle. Au demeurant le livre de Lützen s'appelle « Prehistory of ... ». Il en résulte que Schwartz auquel est accordé la majorité du livre, fait partie aussi de la préhistoire de la théorie.

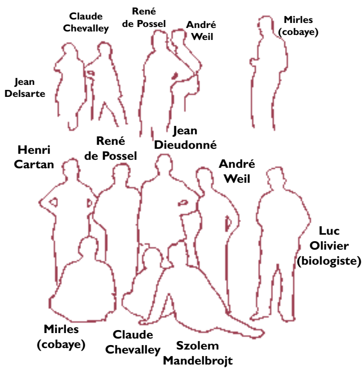
Si Lützen avait restreint son étude de la préhistoire des distributions à l'Europe de l'Ouest, il eût été naturel d'insister sur les travaux de Schwartz. Mais pour l'étude du développement des mathématiques, comme processus mondial (ce qu'il a toujours été), le plan suivi ne paraît pas correct. C'est ce que montre en tout cas l'étude historique des faits dans notre pays. Sobolev, à la suite de ses maîtres, joua un rôle important, en posant les bases des nombreuses études qui ont commencé avant même 1970, date de parution de l'article déjà cité de Smirnov, où on trouve le résumé de vingt ans de travaux en théorie des équations aux dérivées partielles, de type elliptique, hyperbolique et parabolique, ou de type mixte, ou encore avec des enrichissements de la théorie générale, travaux de O. A. Ladijenskaia, S. G. Mikhlin, N. N. Ouraltseva, et d'autres. Tous ces travaux n'étaient pas isolés des recherches faites à l'étranger. Des collaborations eurent lieu entre tous ces pays, parfois difficiles pour des questions de communication, par manque de contacts personnels, qui se sont beaucoup développés ces dernières années, et qui auparavant étaient remplacés par les nombreux journaux de références. Mes remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées et des fonctions généralisées ont pour but non seulement de préciser les conclusions du livre de Lützen, mais aussi d'introduire à la présentation de la candidature de Sobolev par Leray qui enrichit de manière essentielle l'étude de l'historien danois.

Il reste à faire quelques remarques complémentaires sur la proto-histoire antérieure, qui a conduit à la résolution de l'équation des cordes vibrantes et à la dispute entre d'Alembert et Euler, dispute qui s'est prolongée près de trente ans, à partir de 1750 et à laquelle ont participé de près ou de loin tous les mathématiciens du XVIII^e siècle. Brièvement, d'Alembert excluait tout à fait le cas de discontinuité d'une dérivée et encore plus de la fonction elle-même. Dans mon livre sur l'histoire des mathématiques russes avant 1917 (Naouka 1968), j'ai montré qu'Euler, à partir de considérations physiques, jugeait nécessaire d'admettre comme solutions de problèmes de physique mathématique des fonctions et des courbes, selon son expression, « brisées » ; nous dirions que la position initiale de la corde et sa vitesse initiale sont des fonctions de la position continues par morceaux, autrement dit on permet des discontinuités (au sens moderne) des deux premières dérivées. Sans disposer de l'appareil mathématique nécessaire, Euler fit la description géométrique simplifiée de la propagation des ondes et de leur réflexion pour une corde fixée en un point. Je me permets de citer mon livre : « Ici des fils se tissent entre les idées d'Euler et les nouvelles méthodes du xx^e siècle, jusqu'aux fonctions généralisées de Sobolev et Schwartz » (p. 166, 169). Dans la suite de l'histoire des notions de solutions d'équations aux dérivées partielles l'historien S. S. Demidov s'appuyait comme moi sur une citation de d'Alembert (Opuscules, tome IX) : « Euler comprenait essentiellement comme solution de l'équation une solution généralisée, dont la définition correcte et encore plus la construction, dépassait les capacités des mathématiciens de l'époque » (p. 179). Nous ajoutions alors qu'en raison de son efficacité pratique, la construction d'Euler avait été l'objet de l'attention de nombreux mathématiciens de l'époque. Nos travaux utilisaient les études bien connues de Trusdell sur les travaux d'Euler en hydrodynamique et élasticité. Les références en russe sur ce sujet sont inconnues de Lützen (par exemple sur le tome IX des Opuscules de d'Alembert il ne cite que la conférence de Demidov au congrès international d'histoire des mathématiques de 1977, que d'ailleurs il utilise longuement page 15). Lützen fait aussi remonter à Euler la notion de solution généralisée et il trace un parallèle entre Euler et Sobolev. En utilisant la définition de solutions généralisées comme limite de suite de fonctions classiques, Lützen remarque qu'on trouve cette idée chez Euler en 1765 et Laplace en 1772, et que la définition rigoureuse fut introduite en 1935 par Sobolev puis par d'autres auteurs, en particulier Schwartz en 1944. On peut pour conclure signaler qu'Euler a introduit des fonctions qui pouvaient paraître étranges à ses contemporains (par exemple $(-1)^x$, avec x nombre réel quelconque… mais pas la fonction delta !)

Références

[1] Relations scientifiques franco-russes, A. Grigorian, A. Yuskevitch, Naouka 1968
[2] Istori. Math. issledovanie, t. 31, 1989, Naouka
[3] Ibidem, 90, t. 32-33
[4] Bakhalov-Vladimirov-Gonchar. Serge Lvovich Sobolev, Ouspekhi Mat. Naouk, 1989, t. 43 ;5, p. 3-13
[5] Travaux du premier congrès des mathématiciens de l'Urss, Kharkov 1930, Gonti, 1935
[6] Sobolev Serge L. Séminaire Smirnov, Éd. de l'Académie des sciences de l'Urss, 1949
[7] Smirnov V. I. Équations aux dérivées partielles. Mathématiques à l'université de Léningrad, Red. Smirnov, LGU, 1970
[8] Travaux du second congrès de mathématiciens de l'Union, Léningrad, 24-30 juin 35
[9] Quarante ans de mathématiques en Urss, 1917-57, ED. Fizmatgiz, 1959, t. 2, Liusternik-Vishik
[10] Mathématiques en Urss, 1958-67, bibliographie, Naouka, 1970, t. 2
[11] Dieudonné Jean. Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900, Éd. Hermann, 1978
[12] Encyclopédie des mathématiques, vol. 5.
[13] Shilov G.E. Hadamard J. et la naissance de l'analyse fonctionnelle, Ousp. Mat. Naouk, 1964, t. 19, 3, p. 183-186
[14] Mandelbrojt Szolem, Hadamard Jacques. Dictionary of scientific biography, 1972, vol. 6
[15] Schwartz Laurent. Théorie des distributions, 1950-1951
[16] Lützen Lesper. The prehistory of the theory of distributions Springer, 1980, 232 p.
[17] Leray Jean. La vie et l'œuvre de Serge Sobolev La vie des sciences, Comptes rendus, série générale, t. 7, 1990, n° 6, p. 467-471.

Dans cette maison
est né
le 12 juillet 1935
N. Bourbaki
mathématicien



Photos prises à Besse-en-Chandesse entre le 10 et 17 Juillet 1935

Cette plaque a été apposée le 12 juillet 2003 par Alain Bouvier, recteur de l'académie, chancelier des universités de Clermont-Ferrand et André Gay, maire de Besse et Saint-Anastaise.

Université Blaise Pascal

Imp. Numérique Pixel - Issoire - 04 73 55 29 90

Plaque commémorative de la naissance de Bourbaki.

Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle

Christian Houzel

Commémoration de la naissance de N. Bourbaki,
Besse-en-Chandesse, 12 juillet 2003

Une plaque commémorative de la naissance de N. Bourbaki a été apposée par le Recteur de l'Académie de Clermont-Ferrand et le Maire de Besse[1] *sur un mur extérieur de la station biologique de l'université Blaise Pascal ; celle-ci hébergea en effet en juillet 1935 la réunion plénière de fondation du groupe qui allait marquer profondément son empreinte sur les mathématiques du xx*e *siècle.*
La cérémonie, au cours de laquelle Christian Houzel présenta la conférence que l'on peut lire ci-dessous, a rassemblé 120 mathématiciens et élus locaux ; le seul survivant des sept fondateurs, Henri Cartan, avait envoyé un message de sympathie et nous lui avons adressé nos vœux pour son quatre-vingt-dix-neuvième anniversaire ; Jacques Mandelbrojt, fils de Szolem, était présent ainsi que Roger Godement. À l'issue de la cérémonie, les participants ont pu visiter une exposition sur « Bourbaki et l'Auvergne » et apprécier le vin d'honneur offert par la Municipalité.

P.-L. Hennequin

Nous fêtons aujourd'hui un anniversaire : il y a exactement 68 ans se réunissait ici, à Besse-en-Chandesse, le 10 juillet 1935, le premier Congrès Bourbaki ou « réunion plénière de fondation ». Un groupe de jeunes mathématiciens avait en effet décidé quelques mois auparavant, en décembre 1934, de travailler ensemble à la rédaction d'un grand « Traité d'analyse ». Le cours d'analyse d'Édouard Goursat, trois volumes datant du début du vingtième siècle, était alors la référence courante, mais nos jeunes mathématiciens le trouvaient vieillot et peu adapté aux développements plus récents des mathématiques, comme ce qu'ils avaient pu apprendre au cours de voyages en Allemagne à la fin des années vingt. Ils voulaient aussi inclure le point de vue du père de l'un d'entre eux, Élie Cartan (1869-1951), sur les formes différentielles extérieures et établir la formule générale de Stokes correspondante. Ce traité devait pouvoir servir aussi bien aux étudiants qu'aux mathématiciens, aux physiciens et aux ingénieurs.

La réunion de Besse s'est tenue du 10 au 20 juillet avec Claude Chevalley, Jean Dieudonné, René de Possel, Henri Cartan, Szolem Mandelbrojt, Jean Delsarte, André Weil, le physicien Jean Coulomb, Charles Ehresmann et un « cobaye » du nom de Mirles. Elle avait été préparée par un certain nombre de rapports sur les divers chapitres prévus pour le traité, chaque rapport ayant été confié à trois membres et attendu pour le 1er juillet. La liste de ces rapports, avec les noms des rapporteurs, se trouve dans l'annexe II. L'ordre du jour de la réunion était extrêmement chargé et on est étonné qu'il ait pu être tenu en dix jours ; il s'agissait

[1] Besse-en-Chandesse est un petit bourg médiéval et touristique d'Auvergne au sud du Sancy.

de discuter les divers rapports prêts et d'examiner en commission les parties les moins avancées dans leur préparation. Il en est sorti un gros dossier contenant des décisions de rédaction de chapitres ou de nouveaux rapports ; on trouvera, dans l'annexe III, un extrait de ce dossier. L'ouvrage devait comporter 2 500 à 3 000 pages et les rédactions étaient attendues pour des dates proches, qui se sont révélées irréalistes.

Le premier fascicule *Théorie des ensembles : Résultats* est paru seulement en 1940 (daté de 1939) et il a été suivi, dans les années quarante, des premiers chapitres de la *Topologie générale* et de l'*Algèbre*. Le projet avait complètement changé de nature et il était devenu une exposition systématique et unifiée des parties fondamentales des mathématiques selon la méthode axiomatique inspirée de Hilbert. Tout ce qui concerne le calcul différentiel, la géométrie, les fonctions analytiques, les équations fonctionnelles et les fonctions spéciales, et qui constituait l'essentiel du plan initial, a disparu.

Pour comprendre ce qui s'est passé, il faut resituer Bourbaki dans la conjoncture mathématique de l'époque. En effet la période 1935-1965, où se situe l'activité de Bourbaki, est assez particulière dans l'histoire des mathématiques. Elle se caractérise par un effort des mathématiciens pour remettre en chantier les bases de leurs théories et pour construire de nouvelles machineries théoriques dans l'espoir qu'elles permettraient d'aborder plus efficacement les problèmes sur lesquels on butait alors. Ce mouvement touchait presque tous les secteurs mathématiques et il se développait dans le monde entier et pas seulement en France. Voici quelques exemples de ces nouvelles machineries :

– L'algébrisation de la topologie et la création de l'algèbre homologique. Les recherches en topologie avaient abouti à des ouvrages de synthèse comme le *Lehrbuch der Topologie* de Seifert et Threlfall (1934) ou la *Topologie* d'Alexandroff et Hopf (1935), mais il restait plusieurs points obscurs et ces synthèses étaient chargées d'hypothèses et de restrictions gênantes. Dans la période suivante, ces restrictions ont été éliminées tandis que de nouvelles notions apparaissaient, comme celles de cohomologie (Alexander 1935, Kolmogoroff 1936), de groupes d'homotopie supérieurs (Cech 1932, Hurewicz 1935-1936), d'espace fibré (Seifert 1933, Whitney 1938, Ehresmann et Feldbau 1942), de classes caractéristiques (Stiefel 1939) ou de catégories et foncteurs (Eilenberg et Mac Lane 1942). Une nouvelle synthèse a pu paraître en 1952, les *Foundations of Algebraic Topology* d'Eilenberg et Steenrod. Ces nouvelles théories ont conduit au développement d'un nouvel outil algébrique, l'algèbre homologique, codifiée dans l'*Homological Algebra* de Cartan et Eilenberg en 1956.

– La théorie des faisceaux, issue des travaux de Leray sur la topologie algébrique et destinée à prendre en compte les relations entre les propriétés locales et les propriétés globales (Cours de captivité de Leray, publié en 1945 ; suite spectrale 1946 ; cours au Collège de France, publié en 1950. *Séminaire Cartan* 1948-1951. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux* de Godement, 1958).

– La géométrie algébrique abstraite et l'algèbre commutative. L'application de la géométrie algébrique à certains problèmes de théorie des nombres, spécialement en analyse diophantienne, nécessitait le développement d'une géométrie où les coordonnées ne sont plus nécessairement des nombres complexes, mais peuvent être prises dans un corps commutatif arbitraire, ou même dans un anneau commutatif. La première synthèse est celle d'André Weil, dans les *Foundations of algebraic geometry* (1946). Une autre démarche sera entreprise par J.-P. Serre dans l'article *Faisceaux algébriques cohérents* (1955) et poursuivie, d'une manière considérablement élargie, par Grothendieck à partir de 1957. Les moyens algébriques nécessaires à cette nouvelle géométrie, c'est-à-dire l'algèbre commutative, peuvent se trouver dans la *Commutative Algebra* de Samuel et Zariski (1958).

– L'analyse fonctionnelle, avec la théorie des distributions. Après l'impulsion donnée par les recherches sur les équations intégrales, le développement de ces théories était rendu nécessaire d'une part par l'élargissement de l'analyse de Fourier, d'autre part par les problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles (*Normierte Ringe* de Gelfand, 1941 ; article de Sobolev en 1936, *Théorie des distributions* de Schwartz, 1951).

– La théorie des représentations linéaires des groupes, en particulier des groupes de Lie (A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques*, 1940 ; travaux de Gelfand, Raikov et Neumark, 1943-1950, puis travaux de Mackey et ceux de Harish Chandra).

– L'axiomatisation des probabilités et la théorie des processus stochastiques (Kolmogoroff, *Grundbegriffe der Warscheinlichkeitsrechnung*, 1933 ; N. Wiener, *Differential Space*, 1923 ; P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 1948).

– Logique et théorie des modèles. Après les résultats d'incomplétude de Gödel en 1931, la logique mathématique a pris un nouveau départ avec d'un côté, vers 1936, les travaux de Kleene, Church et Turing sur la notion de calculabilité, de l'autre, avec les travaux de Tarski à partir de 1931 sur la théorie des modèles.

On notera que les collaborateurs de Bourbaki ont largement contribué à toutes ces constructions, exception faite de celles qui concernent les probabilités et la logique.

Cet effort de refondation a eu pour conséquence un certain repli des mathématiques sur elles-mêmes, repli encore accentué par un éloignement du côté des physiciens. Rappelons en effet que l'édification de la relativité générale et de la mécanique quantique avait été accompagnée d'une collaboration étroite entre mathématiciens et physiciens. Il suffit, pour s'en convaincre, de citer les noms de H. Weyl (*Raum, Zeit, Materie*, 1918 et *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, 1928) ou de J. von Neumann (*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, 1932). Mais, dans les années trente, la demande de mathématiques de la part des physiciens a disparu et il a fallu attendre les années soixante-dix pour qu'elle soit vraiment réactivée, avec les théories de jauge, la théorie quantique des champs et la supersymétrie.

Le repli des mathématiques sur elles-mêmes, que nous venons d'esquisser, a donné un caractère particulier au développement des mathématiques en direction des applications pendant cette période, avec à terme une séparation de nature sociologique entre mathématiciens « purs » et mathématiciens « appliqués » ; une telle séparation n'était guère concevable dans les périodes précédentes. Il faut dire que l'effort de guerre a suscité, entre 1939 et 1945 puis après avec la guerre froide, un intense développement vers les applications (mécanique des fluides, probabilités et statistiques, recherche opérationnelle, etc.) ; ceci a eu lieu aux États-Unis, en

Grande Bretagne et en URSS, mais pas dans la France occupée, où les « mathématiques appliquées » sont apparues beaucoup plus tard, dans les années soixante.

La tradition mathématique française avant la deuxième guerre mondiale était principalement tournée vers l'analyse mathématique et elle ignorait presque totalement des secteurs développés dans d'autres pays, comme la topologie algébrique, la géométrie algébrique ou la théorie des nombres. Une des raisons de cet isolement français est sans doute l'hécatombe causée par la première guerre mondiale, qui a privé la France d'un renouvellement des générations de chercheurs. Lorsqu'on consulte l'annuaire des anciens élèves de l'École normale supérieure, on constate que près de la moitié de chaque promotion mobilisable a été tuée au combat. Mais, comme nous l'avons dit plus haut, nos jeunes mathématiciens avaient tous fait un séjour en Allemagne à la fin des années vingt et ils y avaient appris de nouvelles mathématiques, alors dominées par l'algèbre, avec l'École de Hilbert, E. Noether et E. Artin. Le livre de B. van der Waerden *Moderne Algebra* (1931) était devenu pour eux un modèle de rédaction, avec des énoncés précis de définitions, lemmes, propositions, théorèmes et corollaires. Ce style contrastait avec la rédaction assez lâche des mathématiques françaises antérieures, qui se présentait en général sous la forme d'un texte continu sans énoncé clair permettant des références. Et c'est par le style de ses rédactions que Bourbaki a eu l'influence la plus durable.

En suivant Hilbert, Bourbaki a adopté la méthode axiomatique d'exposition des mathématiques. Il s'en explique dans un article de 1948, « L'architecture des mathématiques » publié dans *Les grands courants de la pensée mathématique*. Cette méthode consiste, après avoir analysé les démonstrations des théorèmes pour en extraire les hypothèses utilisées, à poser ces hypothèses comme axiomes de la théorie et à ne plus faire intervenir que ces axiomes dans les démonstrations. Il en résulte une théorie beaucoup plus abstraite, mais dont le champ d'application est plus vaste. La méthode s'avère féconde, car elle permet de transporter des idées venant d'une application particulière au niveau abstrait et d'utiliser ensuite ces idées dans toutes les autres applications, mettant ainsi en œuvre une sorte de transfert d'intuition. La méthode axiomatique avait été élaborée par Hilbert pour analyser les fondements de la géométrie élémentaire et elle s'était développée en algèbre ainsi qu'en topologie générale. Bourbaki voulait l'étendre à l'ensemble des mathématiques.

Son entreprise était en effet dominée par l'idée de l'unité des mathématiques, idée très à la mode dans les années trente, comme en témoigne la thèse complémentaire d'Albert Lautman *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur état actuel* (1938). Ce thème s'appuie sur le développement des mathématiques depuis la deuxième moitié du 19^{e} siècle, avec en particulier les constructions arithmétiques des nombres réels de Dedekind, Weierstrass et Cantor, qui ont permis de fonder l'analyse sur la théorie des nombres entiers, puis avec la théorie des ensembles qui englobe la théorie des nombres entiers vus comme les cardinaux finis. Bourbaki a donc intitulé son traité *Éléments de mathématique*, où « mathématique » est au singulier contrairement à l'usage français ; quant au mot « éléments », il se réfère au titre de l'ouvrage d'Euclide qui signifie « parties fondamentales » sur lesquelles se construisent les parties plus spécialisées.

La mathématique exposée selon la méthode axiomatique peut paraître très abstraite et le contenu de ses objets risque de se dissoudre. L'idée de structure intervient ici pour redonner du corps aux objets mathématiques. Elle répond à l'exigence de clarification de la notion d'isomorphisme de deux objets définis axiomatiquement, deux objets isomorphes devant avoir la même « structure » ; elle était déjà courante en algèbre abstraite avec la théorie des corps commutatifs (Steinitz 1910), la théorie des groupes et l'algèbre linéaire. Fidèle au thème de l'unité des mathématiques, Bourbaki a étendu l'idée de structure à l'ensemble de sa construction, intitulant la première partie de son traité *Les structures fondamentales de l'Analyse*. Ces structures fondamentales sont : les structures d'ordre (*Théorie des ensembles*, chap. III), les structures algébriques, les structures topologiques et des structures composées comme les espaces vectoriels topologiques ou l'intégration. Les autres parties sont plus spécialisées : *Algèbre commutative, Théorie spectrale, Groupes de Lie*.

Le terme de structure a été galvaudé dans les années soixante, à la suite du succès des livres de Claude Lévi-Strauss comme *Anthropologie structurale* (1958). Dans ce sens, il vient d'une extension aux « sciences humaines » de l'idée de structure linguistique. C'est en effet le linguiste R. Jakobson qui avait suggéré à Lévi-Strauss cette forme de structuralisme pendant leur exil commun aux États-Unis durant la guerre. Il est clair que les structures de Bourbaki ne doivent rien à cette vogue structuraliste, même si les structuralistes des années soixante ont parfois fait référence à Bourbaki pour donner une caution scientifique à leurs spéculations.

On sait que l'idée de structure s'est rapidement révélée insuffisante. À côté des isomorphismes, on doit plus généralement considérer les morphismes, qui ne conservent pas la structure et qui permettent de dégager la notion de dépendance fonctorielle. C'est ce qu'ont compris Mac Lane et Eilenberg dans les années quarante à propos de l'homologie des espaces topologiques et c'est la source de la théorie des catégories. Après d'âpres discussions dans les années cinquante, Bourbaki a renoncé à reprendre toute sa construction sur la base de la théorie des catégories, ce qui lui a été beaucoup reproché. Il s'est ainsi trouvé démodé dans une certaine mesure. Mais il faut dire que Bourbaki n'a jamais été intéressé aux problèmes de fondement des mathématiques, considérant ces problèmes comme dépassés après les résultats de Gödel.

Dans les années cinquante, on pouvait étudier les mathématiques dans le traité de Bourbaki, mais je ne pense pas que cela se fasse maintenant. À la fin des années soixante, un mouvement de réforme de l'enseignement secondaire des mathématiques a été lancé dans la plupart des pays et ce mouvement s'est malheureusement réclamé de Bourbaki. Il en est sorti ce qu'on a appelé les « mathématiques modernes », dont la nocivité ne fait plus de doute. Mais il est injuste d'en faire porter le poids à Bourbaki, dont la seule faute a été de se désintéresser du problème après avoir laissé Dieudonné faire une propagande plutôt dangereuse auprès des enseignants.

À l'heure actuelle, Bourbaki existe toujours, mais son activité visible se réduit à l'organisation du Séminaire Bourbaki, qui se réunit trois week-ends par an à Paris pour exposer au public mathématicien les avancées mathématiques les plus récentes. Ce séminaire a eu un très grand rôle dans la diffusion des connaissances mathématiques et la collection de ses exposés rédigés est une référence indispensable.

Références

J. W. Alexander, On the chains of a complex and their duals, Proc. Ac. Sc. USA, 21 (1935), p. 509-511
P. Alexandroff et H. Hopf, Topologie I, Springer 1935
L. Beaulieu, Bourbaki : une histoire du groupe des mathématiciens français et de ses travaux, Thèse, Université de Montréal, 1989
N. Bourbaki, L'architecture des mathématiques, Les grands courants de la pensée mathématique, Cahier du Sud, 1948, p. 35-47
Éléments de mathématique, Première partie, Les structures fondamentales de l'analyse, Hermann, 1939-1971 (29 fascicules)
H. Cartan, Séminaire « Cohomologie des groupes, suites spectrales, faisceaux », Paris, 1950-1951
H. Cartan et S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton University Press, 1956
A. Church, An unsolvable problem of elementary number theory, Amer. J. of Math. 58 (1936), p. 345-363
J. Dieudonné, Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques, Revue scientifique, 77, 1939, p. 224-232
The difficult birth of mathematical structures (1840-1940), Scientific culture in the contemporary world, Scientia
S. Eilenberg et N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton University Press, 1952
I. Gelfand, Normierte Ringe, Mat. Sbor. 9 (1941), p. 3-24
I. Gelfand et D. Raikov, Représentations unitaires irréductibles des groupes localement bicompacts, ibid. 13 (1943), p. 301-316 (en russe)
I. Gelfand et M. Neumark, Anneaux normés avec involution et leurs représentations, Izv. Ak. N. SSSR, ser. mat. 11 (1948), p. 445-480 (en russe)
K. Gödel, Ueber formal unentscheidbare Qätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monats. math. phys. 38 (1931), p. 173-198
R. Godement, Topologie algébrique et théorie des faisceaux, Hermann, 1958
É. Goursat, Cours d'analyse mathématique, 6e éd., Gauthier-Villars, 1942 (3 vol.)
A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku math. J. 9 (1957), p. 119-221
A. Grothendieck et J. Dieudonné, Éléments de géométrie algébrique I, Le langage des schémas, Publ. math. de l'IHÉS 4 (1960), p. 1-228
Harish-Chandra, Représentations of semi-simple Lie groups, Proc. Nat. Ac. Sc. USA 37 (1951), p. 170-173 et 362-369
D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner, 1899
S. C. Kleene, General recursive functions of natural numbers, Math. Ann. 112 (1936), p. 236-253
A. Kolmogoroff, Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Springer, 1933
— , Ueber die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie, Mat. Sbor. 1 (1936), p. 701-705
A. Lautman, Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel, Paris, 1937
J. Leray, Les complexes d'un espace topologique ; L'homologie d'un espace topologique ; Transformations et homéomorphies dans les espaces topologiques, CRAS 214 (1942), p. 781-783, 839-841 et 897-899
— , Sur la forme des espaces topologiques et sur les points fixes des représentations ; Sur la position d'un ensemble fermé de points d'un espace topologique ; Sur les équations et les transformations, J. de math. pures et appl., 9e sér., t. 24 (1945), p. 95-167, 169-199 et 201-248
— , L'anneau d'homologie d'une représentation ; Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation, CRAS 222 (1946), p. 1366-1368 et 1419-1422
— , Propriétés de l'anneau d'homologie de la projection d'un espace fibré sur sa base ; Sur l'anneau d'homologie de l'espace homogène quotient d'un groupe clos par un sous-groupe abélien, connexe, maximum, CRAS 223 (1946), p. 395-397 et 412-415
— , L'homologie filtrée, XIIème Coll. Intern. de Top. Alg., CNRS, Paris (1949), p. 61-82
L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une

application continue ; L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe, J. de math. pures et appl., 9ème sér., t. 29 (1950), p. 1-139 et 169-213
C. Lévi-Strauss, Anthropologie structurale, Plon, 1958
P. Lévy, Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, 1948
G. W. Mackey, Imprimitivity for representations of locally compact groups, Proc. Nat. Ac. Sc. USA 35 (1949), p. 537-545
— , On induced representations of groups, Amer. J. of Math. 73 (1951), p. 576-592
L. Schwartz, Théorie des distributions, Hermann, 1950-1951 (2 vol.)
S. L. Soboleff, Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Mat. Sbor. 1 (1936), p. 39-72
H. Seifert et W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner, 1934
J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents, Ann. of Math. 61 (1955), p. 197-278
A. Tarski, O pejJciu prawdy w odniesieniu do sformalisowanych nauk dedukcyjnych, Ruch Filosz. 12 (1930-31), p. 210-311
A. Turing, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc. ser. 2, vol. 42, (1936-37), p. 230-265
A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, 1940
— , Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc. Coll. 29, 1946
N. Wiener, Differential Space, J. math. phys. MIT 2 (1923), p. 131-174
O. Zariski et P. Samuel, Commutative algebra, Van Nostrand, 1958

Annexe I

Les archives de Bourbaki

Les archives de Bourbaki jusque vers 1950 sont maintenant ouvertes au public des mathématiciens et des historiens des mathématiques. En 1997, l'Association des collaborateurs de N. Bourbaki a décidé de confier ces archives au CNRS ; cette décision a abouti à la signature, en décembre 1999, d'une convention entre l'Association et le CNRS. J.-M. Lemaire, alors directeur adjoint pour les mathématiques au département sciences physiques et mathématiques du CNRS, m'a demandé de m'occuper de cette affaire et nous avons créé, en septembre 1999, une unité propre de service (UPS 2065) intitulée « Archives de la création mathématique » pour préparer et organiser la mise à disposition du public des archives de Bourbaki. Au printemps 2000 le CNRS a recruté un chercheur pour l'unité, L. Beaulieu, venant du Québec avec, à son actif, une thèse sur l'histoire de Bourbaki soutenue en 1989 ; puis une secrétaire, C. Harcour a été affectée à l'unité.

Le travail des Archives de la création mathématique a commencé par l'élaboration d'un catalogue détaillé des archives de Bourbaki. Celles-ci étaient partagées entre deux localités : le secrétariat de Bourbaki à Paris et l'Institut Élie Cartan à Nancy. Un premier catalogage avait été entamé dans chacune des deux localités, mais nous avons dû reprendre ces deux catalogues pour y inclure plus d'informations et pour les unifier sous une forme commune. Le catalogue comprend environ 600 fiches ; chaque fiche décrit l'un des documents d'archives, non seulement dans son aspect matériel, mais aussi dans son contenu. Il est complété par un index de mots-clés. Ce catalogue est une œuvre collective (L. Beaulieu, moi-même et trois vacataires, doctorants en histoire des mathématiques) ; il aurait dû être mis en ligne sur Internet, mais des difficultés techniques ont empêché cette opération. Seule une liste des archives est en ligne sur le site de l'unité. Les archives contiennent trois types de documents : — la *Tribu*, journal interne de Bourbaki pour les années 1940-1953 ; elle est précédée par les comptes rendus des réunions sur le *Traité d'analyse* (pour les premiers mois) et par le *Journal de Bourbaki* (pour les années antérieures à 1940). On y trouve les comptes rendus des congrès Bourbaki et les décisions sur les rédactions.

— les rédactions jusqu'au numéro 199 (une réédition du chapitre II d'Algèbre)

— la correspondance, comprenant environ 150 lettres, surtout de la période 1945-1950 ; cette correspondance est particulièrement intense et instructive pendant le temps où Weil et Dieudonné étaient au Brésil, tandis que les autres membres de Bourbaki étaient en France.

La deuxième étape du travail a consisté à photocopier la totalité des archives, à la faire microfilmer et saisir numériquement sur CD-Rom, dont la consultation est plus simple que celle des microfilms. Une charte de l'utilisateur des archives a été élaborée par un comité scientifique, dont le rôle est de contrôler l'accès aux archives et de le réserver aux gens sérieux. La consultation a déjà commencé, d'ailleurs sur un plan international puisque nous avons reçu un italien, un allemand et un américain.

D'autres étapes étaient prévues :

— la constitution d'une liste détaillée de mots-clés présents dans les documents eux-mêmes (et non plus dans le catalogue), pour faciliter la consultation.

— le traitement, dans les années à venir, des archives Bourbaki postérieures à 1950. A. Guichardet m'a d'ailleurs confié la partie des papiers laissés par L. Schwartz qui concerne Bourbaki.

— le traitement, selon les mêmes méthodes, d'autres fonds d'archives, comme les archives de J. Leray ou celles d'É. Cartan. Car l'unité a élaboré des méthodes originales de travail, déjà reconnues à l'étranger puisque nous avons été sollicités par l'Institut d'histoire des sciences de l'Académie de Moscou pour l'aider à traiter les archives d'Alexandroff et de Kolmogoroff (dont une partie est en français).

— l'édition de textes mathématiques, comme les œuvres de G. Reeb, celles d'A. Néron ou celles de J. Liouville, ou encore la correspondance de Bourbaki.

Mais ces étapes devront rester à l'état de projet ou dépendre de notre travail individuel sans soutien institutionnel. Les Archives de la création mathématique ont été brutalement supprimées à la fin du mois d'août 2003, en profitant de mon départ à la retraite. Cette décision de fermeture a d'ailleurs été prise d'une manière scandaleuse, par la seule volonté du directeur adjoint, sans aucune consultation de personnalité compétente et je ne l'ai apprise que par des bruits de couloir. Elle m'a été confirmée oralement au cours d'un rendez-vous que j'avais demandé au mois de mars 2003, mais le directeur adjoint n'a pas daigné répondre au courrier que je lui ai fait parvenir. Ceci m'a amené à écrire à la directrice générale du CNRS, qui m'a répondu d'une manière évasive en quelques lignes.

Cette décision, justifiée seulement par un souci d'économie, est mal venue pour plusieurs raisons :

— l'argument d'économie n'est pas très sérieux, car l'unité a un très petit budget. Les seules dépenses importantes ont été occasionnées par le microfilmage et la fabrication des CD-Rom. D'ailleurs la suppression d'une unité qui a fait ses preuves après quatre ans d'existence seulement ne paraît pas un modèle de bonne gestion.

– le savoir-faire et les méthodes que nous avions élaborés pendant ces quatre ans se trouvent condamnés au sommeil ou à l'oubli.

– l'unité était une structure indispensable pour gérer l'accès du public aux archives ainsi que les problèmes de citation ou de reproduction de textes.

– un centre d'archives doit rester vivant pour pouvoir accueillir de nouveaux documents, comme les archives Bourbaki plus récentes.

Ceci n'est qu'un exemple faisant ressortir la mauvaise situation de l'histoire des mathématiques dans notre pays. Beaucoup de mathématiciens ont, vis-à-vis de cette activité, une réaction de rejet ou une réaction d'indifférence, ou bien ils prennent des décisions sans être informés et sans prendre aucun avis auprès de personnes compétentes, par exemple parmi les chercheurs étrangers, ce qui est peut-être une forme de mépris.

Annexe II

Liste des rapports attendus pour le 1er juillet 1935

Titre	Auteurs	État
Algèbre	Chevalley, Dieudonné, R. de Possel	prêt
Fonctions analytiques	Cartan, Mandelbrojt, Delsarte	insuffisant
Intégration	Delsarte, R. de Possel, Weil	prêt (?)
Équations différentielles	Coulomb, Dieudonné, Weil	pas prêt
O et o	Coulomb, Dieudonné, Weil	prêt
Équations intégrales	Leray, Delsarte, Cartan	à discuter
Théorèmes d'existence	Leray, Cartan, Weil	à discuter
Équations aux dérivées partielles	Chevalley, Delsarte, Weil	pas prêt,
Différentielles et formes différentielles	Cartan, Leray, R. de Possel	à travailler
Topologie	Chevalley, Dieudonné, R. de Possel	à travailler
Calcul des variations	Coulomb, Leray, Weil	à travailler
Fonctions spéciales	Coulomb, Mandelbrojt, Cartan	à travailler
Géométrie	Cartan, Chevalley, Delsarte	à travailler
Séries de Fourier etc.	Delsarte, Mandelbrojt, Weil	à travailler

Annexe III

Plan du traité d'analyse à l'issue du Congrès de Besse

Titre	Nbre pages	Auteur(s)	Date prévue
Ensembles abstraits	20	Cartan	décembre
Algèbre scolaire	120	Delsarte	fin de l'année
Nombres réels et complexes, séries	15	Dieudonné	décembre
Topologie, théorèmes d'existence	300	Weil, R. de Possel	(fin février)
Topologie des nombres complexes ; formes quadratiques et hermitiennes. Corps convexes, groupe orthogonal	50	Dieudonné	(février)
Intégration	100	Mandelbrojt	fin mai
Multiplication extérieure, déterminants, formes de Pfaff	100	Weil, Cartan	(avant Pâques)
Tenseurs, géométrie	100	Ehresmann	fin de l'année
Produits infinis, inégalités, O et o	80	Chevalley	février
Fonctions analytiques générales	200	R. de Possel	(avant Pâques)
Fonctions analytiques spéciales	100	Mandelbrojt	(avant Pâques)
Représentation approchée	150	Dieudonné	mai
Heaviside et calcul opérationnel	70	Delsarte	(février)
Équations diff. générales	200	Chevalley	moitié à la fin de l'année
Équations diff. spéciales	100	Delsarte	
Élie Cartan	150	Weil	
Équations intégrales	100	Mandelbrojt	(mai)
Potentiel, équations elliptiques	80	Cartan	
Équations hyperboliques et paraboliques	100	Delsarte	
Calcul des variations	120	Cartan	
Fonctions spéciales :			
— Bessel etc.	150	Coulomb	
— algébriques	100	Chevalley	
— elliptiques	50	Dieudonné	
— thêta	50	Weil	
— gamma, zêta	40	Mandelbrojt	
Calcul numérique	100	Coulomb	
Tout le reste	500	Bourbaki	
Fonctions de variable réelle	?	Dieudonné	mai

Remarque : Lorsque la date est entre parenthèses, seul un rapport est promis.

RELATIONS EUROPÉENNES

Henri Cartan s'est engagé franchement pour la construction européenne. Cet engagement s'appuyait sur des relations scientifiques et amicales précoces avec l'Allemagne. La Gazette des Mathématiciens *a publié dans son numéro d'octobre 1997 un texte de Friedrich Hirzebruch qui retrace ces fructueux échanges. Nous remercions celui-ci de nous avoir proposé de publier cette correspondance relative à la nomination d'Henri Cartan comme membre d'honneur de la DMV en 1994.*

DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG E.V.
DER VORSITZENDE

Professor Dr. Martin Grötschel
Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik
Heilbronner Str. 10, D-10711 Berlin-Wilmersdorf
Telefon 030/89604-210
Telefax 030/89604-125
email groetschel@zib-berlin.de

3. Juni 1994

Professor Dr. Henri Cartan
95 Boulevard Jourdan
75014 Paris
France

Sehr verehrter Herr Cartan,

es ist für mich eine große Freude und Ehre, Ihnen mitteilen zu können, daß das Präsidium der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Sie zum Ehrenmitglied unserer Vereinigung gewählt hat. Wir hoffen, daß Sie diese Wahl annehmen werden und wir durch Ihre Ehrenmitgliedschaft Ihre lange Verbundenheit mit Mathematikern in Deutschland zum Ausdruck bringen dürfen.

Vor 63 Jahren im Juni 1931 kamen Sie zu Vorträgen nach Münster. Damit begann die enge wissenschaftliche und persönliche Beziehung zu Heinrich Behnke und seiner Schule der komplexen Analysis, den vielen Mathematikern, die daraus hervorgingen, und sogar noch zu deren Schülern. Die Freundschaft mit Heinrich Behnke hat die Zeit des nationalsozialistischen Terrors und den Krieg überdauert, bereits 1946 kamen Sie nach Oberwolfach und 1947 wieder nach Münster. Vielen deutschen Mathematikern, gerade auch den jüngeren, gaben Sie so das Gefühl, daß sie trotz des Unheils, das Deutschland über die Welt gebracht hatte, nicht aus der internationalen Gemeinschaft der Mathematiker ausgeschlossen waren. Dadurch spendeten Sie Mut und Kraft für viele in der ungewissen Zeit nach dem Kriege.

Heinrich Behnke, dessen 80. Geburtstag Sie mitgefeiert haben und der ein Jahr später verstarb, hat immer mit großer Dankbarkeit von Ihnen erzählt. Er war vor dreißig Jahren (1964 und 1965) Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Mit unserem Entschluß, Ihnen die Ehrenmitgliedschaft anzubieten, handeln wir ganz in seinem Sinne und gedenken bei dieser Gelegenheit auch seiner großen Verdienste beim Wiederaufbau nach dem Kriege.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung ehrt auch Ihren Einsatz für die Europäische Einigung. Den Politikern weit voraus haben Sie sofort nach dem Krieg den Europäischen Gedanken vielen Mathematikern nahegebracht. Während der vier Jahre als Präsident der Internationalen Mathematischen Union (1967–70) haben Sie sich mit Erfolg für die internationale Verständigung eingesetzt.

Lettre de Grötschel à Cartan

Wir danken Ihnen auch für Ihr Wirken beim ersten Europäischen Mathematischen Kongreß in Paris 1992.

Ihr großes wissenschaftliches Werk können die Mathematiker an Hand Ihrer Œuvres studieren. Es wäre vermessen, hier eine Würdigung zu versuchen. Ihre Séminares de l'Ecole Normale Supérieure (1948-64) waren Seminare nicht nur für den Pariser Raum; Mathematiker in der ganzen Welt haben sie verfolgt und lernen auch heute noch daraus.

Am 8. Juli 1994 feiern Sie Ihren 90. Geburtstag. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gratuliert von Herzen und wünscht Ihnen Gesundheit und Wohlergehen. Das Präsidium der Deutschen Mathematiker-Vereinigung grüßt Sie und Ihre Frau Gemahlin.

Ihr sehr ergebener

Martin Grötschel

Martin Grötschel
Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

2

Lettre de Grötschel à Cartan (suite)

Traduction[1] de la lettre de Grötschel à Cartan du 3 juin 1994

Cher Monsieur Cartan,

C'est pour moi un grand plaisir et un grand honneur de vous annoncer que le comité directeur de l'Association des mathématiciens allemands vous a élu membre d'honneur. Nous espérons que vous accepterez cette élection et que nous pourrons ainsi, à travers elle, montrer les liens qui vous unissent de longue date à des mathématiciens allemands.

Il y a 63 ans, en juin 1931, vous êtes venu à Münster pour y donner des conférences. C'est ainsi qu'ont débuté vos étroites relations scientifiques et personnelles avec Heinrich Behnke et son école d'analyse complexe, avec les nombreux mathématiciens qui en sont issus et même encore avec les disciples de ceux-là. L'amitié qui vous liait à Heinrich Behnke a survécu au temps de la terreur nazie et à la guerre ; dès 1946 vous veniez à Oberwolfach et en 1947 de nouveau à Münster. Vous avez ainsi donné à beaucoup de mathématiciens allemands, et surtout aux plus jeunes, le sentiment que malgré les malheurs que l'Allemagne avait infligés au monde, ils n'étaient pas exclus de la communauté internationale des mathématiciens. Par là-même vous avez, dans les incertitudes de l'après guerre, donné à beaucoup de nos collègues force et courage.

Heinrich Behnke, dont vous avez célébré avec nous le quatre-vingtième anniversaire, et qui est mort un an plus tard, a toujours parlé de vous avec une grande gratitude. Il y a trente ans, en 1964 et 1965, il a été le président de l'association des mathématiciens allemands. En vous invitant à devenir membre d'honneur, nous suivons la voie qu'il a tracée et nous rappelons en même temps ses grands mérites lors de la reconstruction après la guerre.

L'Association des mathématiciens allemands rend aussi hommage à votre engagement en faveur de l'unification européenne. Bien avant les hommes politiques vous avez, immédiatement après la guerre, propagé l'idée européenne auprès des mathématiciens. Pendant les quatre ans où vous avez été président de l'Union internationale des mathématiciens (1967-70) vous avez œuvré avec succès aux rapprochements internationnaux.

Nous vous remercions aussi pour votre action lors du premier congrès mathématique européen à Paris en 1992.

Les mathématiciens peuvent étudier votre immense œuvre scientifique en lisant vos travaux. Il serait présomptueux de vouloir ici en retracer l'importance. Vos Séminaires à l'École normale supérieure (1948-1964) n'ont pas compté uniquement pour les milieux parisiens ; des mathématiciens du monde entier les ont suivis et en tirent encore aujourd'hui des enseignements.

Le 8 juillet 1994 vous fêterez votre quatre-vingt dixième anniversaire. L'Association des mathématiciens allemands vous présente ses meilleurs vœux et vous souhaite santé et bonheur. Le comité directeur de l'Association des mathématiciens allemands vous transmet ses salutations ainsi qu'à votre épouse.

Votre dévoué Martin Grötschel,
président de l'Association des mathématiciens allemands

[1] Traduit par Werner Wögerbauer

HENRI CARTAN
95, BOULEVARD JOURDAN
F-75014 PARIS
TEL (1) 45 40 5178

Paris, le 10 juin 1994

Professor Dr. Martin Grötschel
Vorsitzender der DMV
Heilbronner StraBe 10
D-10711 BERLIN-Wilmersdorf

Monsieur le Président et cher Collègue,

C'est avec émotion que j'ai reçu hier votre lettre du 3 juin 1994. Le message que vous m'adressez au nom des mathématiciens allemands, en m'annonçant mon élection comme Ehrenmitglied der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, me va droit au cœur, et je vous prie de transmettre mes chaleureux remerciements au Präsidium de la DMV.

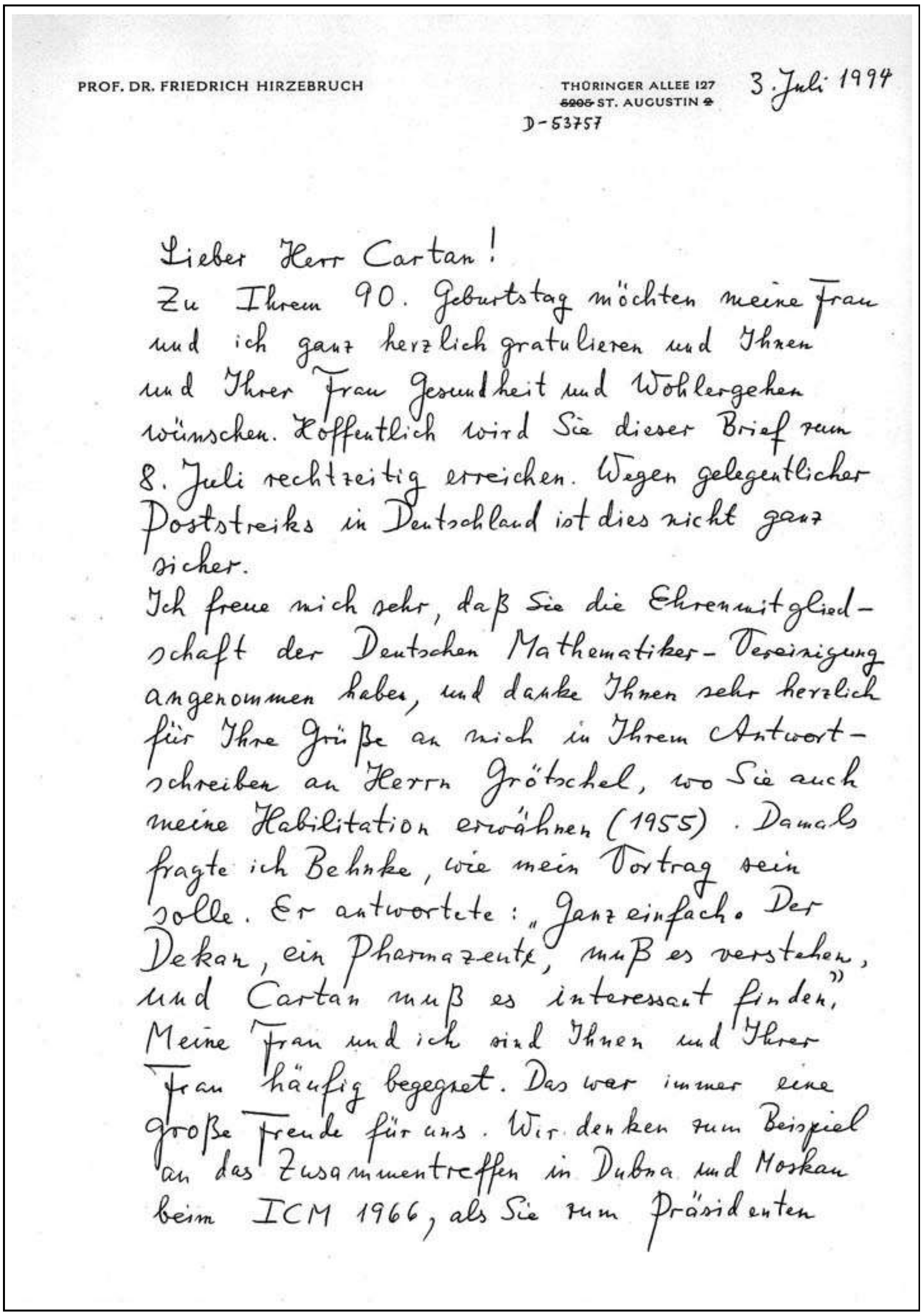
Vous avez bien voulu rappeler que mes relations avec les mathématiciens allemands remontent à 63 années déjà. Vous avez évoqué les liens qui depuis cette époque m'ont uni à Heinrich BEHNKE. Non seulement il a été le chef d'une École mathématique qui a marqué toute une époque, mais il m'a aussi donné des temoignages d'amitié, notamment pendant la guerre, auxquels je ne puis penser sans émotion. Après la guerre il a servi d'exemple à ses concitoyens en s'attaquant avec courage à la reconstruction de son pays. Vous me dites que mon élection comme Ehrenmitglied est aussi une façon de rendre hommage à l'homme que fut Heinrich Behnke, et ceci me touche profondément. Je tiens à vous remercier d'avoir eu cette pensée.

Et je vous remercie aussi d'avoir évoqué mes efforts en faveur de la construction d'une Europe unie, que me paraît aujourd'hui plus nécessaire et urgente que jamais.

Puis-je vous prier de transmettre mon amical souvenir à l'un de vos prédécesseurs à la présidence, le professeur Friedrich HIRZEBRUCH, que j'ai eu souvent le plaisir de rencontrer depuis le jour où j'ai assisté à son habilitation à Münster, et avec qui j'ai été heureux de collaborer au sein de l'Union mathématique internationale.

Je vous prie d'accepter, Monsieur le Président, mes vifs remerciements pour les vœux que vous m'adressez ainsi qu'à ma femme, et de croire à mes sentiments reconnaissants.

Henri CARTAN



PROF. DR. FRIEDRICH HIRZEBRUCH

THÜRINGER ALLEE 127
~~5205~~ ST. AUGUSTIN ~~2~~
D-53757

3. Juli 1994

Lieber Herr Cartan!

Zu Ihrem 90. Geburtstag möchten meine Frau und ich ganz herzlich gratulieren und Ihnen und Ihrer Frau Gesundheit und Wohlergehen wünschen. Hoffentlich wird Sie dieser Brief zum 8. Juli rechtzeitig erreichen. Wegen gelegentlicher Poststreiks in Deutschland ist dies nicht ganz sicher.

Ich freue mich sehr, daß Sie die Ehrenmitgliedschaft der Deutschen Mathematiker-Vereinigung angenommen haben, und danke Ihnen sehr herzlich für Ihre Grüße an mich in Ihrem Antwortschreiben an Herrn Grötschel, wo Sie auch meine Habilitation erwähnen (1955). Damals fragte ich Behnke, wie mein Vortrag sein solle. Er antwortete: „Ganz einfach. Der Dekan, ein Pharmazeut, muß es verstehen, und Cartan muß es interessant finden.“ Meine Frau und ich sind Ihnen und Ihrer Frau häufig begegnet. Das war immer eine große Freude für uns. Wir denken zum Beispiel an das Zusammentreffen in Dubna und Moskau beim ICM 1966, als Sie zum Präsidenten

Lettre de Hirzebruch à Cartan

2

gewählt wurden und Ihre segensreiche Tätigkeit
für die IMU, u.a. auch mit der Vorbereitung
des ICM 1970 in Nizza, begann. Anfang
August reisen meine Frau und ich zum ICM 1994
nach Zürich. Vorher ist die Versammlung der
IMU in Luzern, an der ich teilnehme. Ich hoffe,
daß dort die Einladung nach Berlin (1998) endgültig
akzeptiert wird. Heinrich Behnke hat immer gesagt,
der Kongreß müsse endlich einmal wieder in
Deutschland stattfinden (zuletzt Heidelberg 1904),
und war traurig, daß die Einladung nach
Deutschland für 1966 nicht realisiert werden
konnte, da die erste Einladung in die Sowjetunion
natürlich vorging. Ähnlich war es 1990, als
Ostasien vorging. Nun wird vielleicht im
Jahre seines 100. Geburtstages der ICM nach
Deutschland kommen.
Ich weiß nicht, ob ich Sie bei Ihrem Besuch
in Münster 1947 gesehen habe. Gesprochen habe
ich Sie wohl zum erstenmal, als ich 1951/52
als junger Assistent von Erlangen aus nach
Oberwolfach kam. Ich gehöre zu den vielen
Mathematikern in Deutschland, denen Sie nach
dem Kriege Mut und Kraft geschenkt haben.
Im Dezember 1953 haben Sie im Bourbaki-
Seminar über meine Dissertation vorgetragen.
So denke ich dankbar an vieles zurück.

Lettre de Hirzebruch à Cartan (suite)

Ihren frühen Einsatz für den Europäischen Gedanken konnte ich bewundern, da ich bei den Beratungen über das Europäische Studienbuch dabei war. Für den Europäischen Kongress in Paris 1992, und damit auch für die European Mathematical Society, haben Sie viel getan. Deshalb möchte ich Ihnen heute auch im Namen der EMS herzlich gratulieren und danken. Meine Zeit als Präsident der EMS ist bald vorbei, am 31. 12. 94 scheide ich aus. Im Anschluß an den Kongreß in Zürich trifft sich der Council der EMS. Mein Nachfolger wird dort gewählt.
Meine Frau und ich hoffen, daß wir Sie und Ihre Frau bald einmal wiedersehen.

Nochmals ganz herzliche Glückwünsche

Ihr
F. Hirzebruch

Lettre de Hirzebruch à Cartan (suite et fin)

Traduction[2] *de la lettre de Hirzebruch à Cartan du 10 juin 1994*

Cher Monsieur Cartan,

Pour votre quatre-vingt dixième anniversaire, nous voudrions ma femme et moi vous présenter de tout cœur nos meilleurs vœux et vous souhaiter, à vous et à votre femme, santé et bonheur. J'espère que cette lettre vous parviendra à temps pour le 8 juillet. En raison des mouvements de grève au sein de la poste allemande, cela n'est pas tout à fait certain.

Je me réjouis d'apprendre que vous avez accepté votre élection comme membre d'honneur de l'Association des mathématiciens allemands et je vous remercie de tout cœur pour les salutations que vous m'adressez dans votre réponse à M. Grötschel et où vous mentionnez aussi mon habilitation (1955). À l'époque j'avais demandé à Behnke comment je devais concevoir ma conférence. Il répondit : « C'est très simple. Le doyen, un professeur en pharmacie, doit la comprendre et Cartan doit la trouver intéressante ». Ma femme et moi, nous vous avons souvent rencontré vous et votre femme. Cela a toujours été pour nous un grand plaisir. Je pense par exemple à la rencontre à Dubna et Moscou lors de l'ICM de 1966 où vous avez été élu président et où a commencé votre action salutaire pour l'IMU, entre autre avec la préparation de l'ICM 1970 à Nice. Début août ma femme et moi irons à l'ICM 1994 à Zürich. Auparavant aura lieu l'assemblée de l'IMU à Lucerne à laquelle je participerai. J'espère que l'invitation à Berlin (1998) y sera définitivement acceptée. Heinrich Behnke a toujours dit qu'il était temps que le congrès se tienne de nouveau en Allemagne (la dernière fois c'était en 1904 à Heidelberg), et il regrettait que l'invitation en Allemagne pour 1966 n'ait pas pu aboutir puisque la première invitation en Union Soviétique avait été évidemment prioritaire. Et il en avait été de même en 1990 avec la priorité donnée à l'Asie orientale. Peut-être que maintenant, pour son centième anniversaire, l'ICM pourra se tenir en Allemagne.

Je ne sais pas si je vous ai vu lors de votre visite à Münster en 1947 ; je pense que nous nous sommes parlés pour la première fois en 1951-1952 lorsque, jeune assistant, je suis venu d'Erlangen à Oberwolfach. J'appartiens à ces nombreux mathématiciens en Allemagne à qui vous avez donné force et courage après la guerre. En décembre 1953 vous avez parlé dans le Séminaire Bourbaki de ma thèse. Ainsi je me souviens avec reconnaissance de beaucoup de choses.

Ayant assisté aux délibérations concernant le « livre d'études européennes », j'ai pu admirer votre engagement précoce en faveur de l'idée européenne. Vous avez beaucoup fait pour le congrès européen de Paris en 1992 et par là-même aussi pour la Société mathématique européenne. Pour cette raison je voudrais vous présenter aujourd'hui, au nom de l'EMS aussi, nos vœux cordiaux et vous remercier. Mon mandat de président de l'EMS s'achève bientôt, je quitterai ces fonctions le 31 décembre 1994. Le Conseil de l'EMS se réunira à la suite du congrès de Zürich. On y élira mon successeur.

Ma femme et moi espérons que nous vous reverrons bientôt, vous et votre femme.

Je vous adresse encore une fois mes vœux de bonheur les plus cordiaux.

Votre F. Hirzebruch

---

[2] Traduit par Werner Wögerbauer

HENRI CARTAN
95, BOULEVARD JOURDAN
F - 75014 PARIS
TÉL. (1) 45 40 51 78

Die (Drôme), le 15 juillet 1994

Herrn Prof. Dr. Friedrich Hirzebruch
Thüringer Allee 127
D-53757 St AUGUSTIN

Cher Professeur Hirzebruch,

J'ai lu et relu avec plaisir et reconnaissance la longue lettre que vous m'avez écrite pour mon 90-ième anniversaire. Excusez-moi de ne pas vous avoir remercié plus tôt: il ne m'était pas possible de vous répondre en quelques lignes....

Je me doutais bien que vous aviez été l'inspirateur de la lettre par laquelle le Professeur Grötshel m'informait de mon élection comme Ehrenmitglied de la DMV. Je dois avouer que j'ai été très sensible à cette élection.

Dans votre lettre vous évoquez quelques-unes de nos rencontres passées. Permettez-moi d'y ajouter votre venue à Paris pour être reçu associé étranger de l'Académie des Sciences, et aussi votre venue à l'Institut de Bures-sur-Yvette pour célébrer je ne sais plus quel anniversaire.

Je partage entièrement votre souhait concernant le choix de Berlin comme lieu du Congrès international en 1998. J'espère que l'Assemblée générale de l'UMI se mettra facilement d'accord pour choisir la capitale de l'Allemagne enfin réunifiée, un pays qui a tant apporté aux mathématiques. Quant à la Société mathématique européenne, je lui souhaite de bien choisir son nouveau président, qui devra suivre l'exemple donné par son prédécesseur.

Madame Hirzebruch a été souvent présente lors de nos rencontres. Vous avez sans doute deviné que, dès leur premier contact, un courant de sympathie a passé entre nos deux épouses. Nous serons heureux, ma femme et moi, de vous revoir tous deux; mais je crains que cela ne soit possible qu'à Paris, car nous avons cessé d'entreprendre des voyages.

A Madame Hirzebruch et à vous-même, nous envoyons notre fidèle et amical souvenir.

H. Cartan

Henri Cartan

Réponse de Cartan à Hirzebruch

2005 : Année mondiale de la physique

Michèle Leduc[1]

L'ensemble des physiciens se mobilise partout en France pour proposer pour 2005 des événements et des manifestations autour des sciences physiques destinés à avoir une large audience. L'année 2005 a été choisie exactement cent ans après la parution de trois articles révolutionnaires d'Albert Einstein sur la relativité, les quanta de lumière et le mouvement brownien. Cette commémoration devrait être l'occasion d'exciter la curiosité du public pour les perspectives qu'offrent aujourd'hui les sciences physiques. Le caractère fondamental, intemporel, imprévisible de la recherche en physique sera souligné, de même que l'omniprésence de ses résultats dans le monde qui nous entoure. Tout particulièrement les jeunes, leurs parents à travers eux et leurs enseignants, devraient être touchés par les opérations qui se dérouleront en milieu scolaire, dans les lieux publics ou même dans la rue, en développant le plaisir de comprendre la science en dehors des parcours obligés. La dimension ludique de l'activité de physicien sera mise en lumière : elle peut émerveiller et faire rêver. On espère en outre qu'il en résultera une amélioration face à la crise des vocations pour la Physique et les sciences en général, comme ce fut le cas en Allemagne après que l'année 2000 fut déclarée « Année de la Physique ». Des initiatives nombreuses et très variées partent de chaque région de France. La Société Française de Physique s'est associée avec le Ministère délégué à la Recherche et aux Nouvelles Technologies et les organismes de recherche afin d'en assurer la coordination.

Lancement à l'UNESCO

L'année 2005 a été déclarée « Année Mondiale de la Physique » sous le patronage de l'UNESCO. Il est prévu d'abord une grande conférence internationale de lancement de deux jours en janvier 2005 au siège de l'UNESCO à Paris. Elle fera appel à des conférenciers prestigieux, dont plusieurs prix Nobel, qui évoqueront le rôle de la physique dans la société, l'influence d'Einstein dans la science du 20^{e} et du 21^{e} siècle, les liens de la Physique avec les autres champs disciplinaires et les problèmes liés à son enseignement. Y seront invités de nombreuses personnalités du monde scientifique et l'ensemble des décideurs de la politique d'enseignement et de recherche de notre pays et de l'Union Européenne. En outre on envisage d'y attirer des jeunes passionnés de science, en particulier les lauréats des Olympiades de Physique.

[1] pour le comité de pilotage de physique 2005, le 15 février 2004

La Physique en milieu scolaire

De nombreux chercheurs et professeurs sont volontaires pour intervenir dans les classes et préparer des expositions présentant dans les collèges et les lycées des expériences qui montrent des phénomènes de base de physique. Une exposition itinérante est en préparation avec le Centre National de Documentation Pédagogique (CNDP). Les intervenants pourront utiliser du matériel didactique sous forme variée : mallettes d'expériences, préparées avec les musées scientifiques, documents video etc. Une brochure illustrée sur « les métiers de la physique » sera diffusée à l'occasion de toutes les manifestations en milieu scolaire. D'autres idées sont à l'étude, inspirées d'expériences très positives aux États-Unis : la mise en place de capteurs (en météorologie et sismologie) dans les établissements scolaires, pour faire pratiquer dans les classes des relevés reliés aux réseaux nationaux par internet et gérés par les élèves. Des idées de même nature sont développées pour l'astronomie dans le cadre du prolongement des interventions « la main à la pâte » dans les collèges et notamment l'opération « l'univers à portée de main ». L'année 2005 sera aussi l'occasion d'une reprise dynamique de la participation d'équipes françaises au concours des Olympiades Internationales de Physique, destiné aux élèves de fin d'études au lycée.

De la Physique fondamentale...

Une série de rencontres de « Physique et Interrogations Fondamentales » est prévue. Elles porteront sur « les Horizons d'Einstein » et sur des entités fondamentales telles que le temps, l'espace, la matière, la vie, la pensée, la complexité, avec un dialogue entre communautés intellectuelles diverses. L'université de Tous les Savoirs réserve pour la Physique un module de 25 conférences à Paris en juillet 2005. Tous ces conférenciers seront invités en province tout au long de l'année 2005. Une place particulière sera accordée au thème de « l'univers », notamment avec les trous noirs, les exoplanètes, la physique du Soleil, la formation des étoiles. Une exposition itinérante de photos géantes « Le Ciel vu de la Terre » est en préparation.

...à la Physique comme base des nouvelles technologies

Le thème de « la Physique et le Vivant » sera particulièrement mis en valeur, avec des exemples comme l'imagerie, les nouveaux matériaux pour la médecine, les capteurs pour la perception des sons et la vision. Des questions très multidisciplinaires posées par le thème de « l'environnement » seront abordées, par exemple la climatologie, la sismologie et les sources d'énergie. Le thème « lumière, matière» a été choisi pour illustrer l'importance dans la vie courante des nouvelles technologies issues de la Physique, avec l'univers omniprésent des communications (du lecteur DVD au web et à l'internet). De tout nouveaux matériaux apparaissent à l'âge de la nanophysique et la lumière sert aussi bien à nous éclairer qu'à étudier la matière vivante, à sonder la pollution ou à mesurer l'âge de l'univers. Chacun de ces thèmes donnera lieu à des conférences, des colloques, des débats, avec des conférenciers « tournant » dans les grandes villes, des films, des expositions itinérantes, des affiches, des animations, des émissions dans les medias. Ils feront l'objet de courtes plaquettes illustrées regroupées sous le titre « la Physique pour comprendre le monde ».

La Physique et les Arts : une inspiration nouvelle...

L'aspect « art et science » sera fortement encouragé avec une programmation théâtrale ou chorégraphique d'inspiration scientifique, parfois sous la forme de spectacles de rue. Des expositions mettront en valeur les liens de la musique avec l'acoustique, de la peinture avec l'optique, comme pour l'exposition « la Lumière au siècle des Lumières » en préparation à Nancy. La présentation des expériences de physiques destinées au grand public sera travaillée pour être à la fois spectaculaire et esthétique.

D'ores et déjà on assiste à une forte mobilisation des physiciens et des acteurs de la culture scientifique dans les régions.

Voici quelques exemples de projets en préparation : – à Strasbourg et à Clermont-Ferrand : construction d'un détecteur de muons dans la Ville ;
– à Besançon : exposition itinérante « le violon d'Einstein » ;
– à Lille et à Limoges : véhicules équipés d'expériences circulant dans les académies ;
– à Strasbourg : expositions « objets de science » et « bande de savants » ;
– à Nice : diverses « manips » sorties des laboratoires ;
– à Paris : opération « Paris Ville-Lumières » avec arcs en ciel sur la Seine, mesure de la vitesse de la lumière, nettoyage de monuments au laser, etc.
– à Paris encore : photos de grands instruments internationaux sur les grilles du Sénat.
Un site web (`http://www.physique2005.org`) est en préparation.

Prix de l'IRMA en mémoire de Paul André Meyer

Michel Émery[1]

En mémoire du mathématicien Paul André Meyer (1934–2003), dont toute la carrière s'est déroulée à Strasbourg, l'Institut de recherche mathématique avancée (IRMA, UMR 7501 du CNRS et de l'université Louis Pasteur de Strasbourg) a créé un prix annuel destiné à distinguer un jeune mathématicien aux qualités exceptionnelles s'illustrant dans le même domaine que Paul André Meyer, la théorie des probabilités et des processus stochastiques.

Le premier Prix de l'IRMA en mémoire de Paul André Meyer a été décerné le mardi 3 février 2004 à M. Thomas Duquesne. La remise du prix a eu lieu à 14 heures, à l'IRMA (à Strasbourg), lors de l'ouverture du colloque international en mémoire de Meyer, en présence de Madame Fabienne Keller, maire de Strasbourg, et de Monsieur Bernard Carrière, président de l'université Louis Pasteur.

Âgé de 29 ans, ancien élève de l'École normale supérieure, ancien agrégé préparateur à l'École normale supérieure de Cachan, Thomas Duquesne est actuellement maître de conférences à Orsay (université de Paris-Sud). Il a soutenu en octobre 2001, sous la direction de M. Jean-François Le Gall, une thèse intitulée « Arbres aléatoires, processus de Lévy et superprocessus ».

[1] Institut de recherche mathématique avancée — université Louis Pasteur de Strasbourg, emery@math.u-strasbourg.fr

Les premiers travaux qui l'ont fait connaître étendaient à des processus de Lévy réels très généraux les décompositions trajectorielles à la Williams et à la Bismut.

Venues ensuite, ses découvertes les plus frappantes portent sur les arbres aléatoires continus. Prenons un arbre aléatoire tel que les nombres (aléatoires) des descendants des sommets sont indépendants et de même loi. Lorsque cette loi est dans le domaine d'attraction d'une loi stable, en conditionnant par l'effectif total de l'arbre et en passant à la limite, Duquesne obtient un objet asymptotique, l'arbre aléatoire continu stable, dont seuls des cas particuliers, tels l'arbre brownien, étaient connus antérieurement. Ces arbres stables ont été utilisés depuis dans la construction de certains processus de fragmentation ; ils joueront sans doute un rôle important dans de nombreuses analyses asymptotiques.

Ses travaux ultérieurs, menés seul ou en collaboration avec Le Gall, font tous intervenir des arbres aléatoires continus, soit comme objets limite sous des conditions plus générales que ci-dessus ou dans d'autres contextes, soit pour une étude fine de leurs propriétés. Des objets liés à de tels arbres sont les « serpents de Lévy », qui fournissent une réalisation trajectorielle fort utile dans l'interprétation probabiliste, par l'intermédiaire des superprocessus, de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires.

Les qualités qui distinguent particulièrement Thomas Duquesne sont, outre le grand intérêt de ses découvertes dans un domaine difficile, sa maturité et son goût mathématique très sûr. À cela s'ajoute une clarté de style qui rend agréable la lecture de ses travaux — qualité particulièrement bien venue pour un prix évoquant Meyer, qui fut un modèle sur ce point aussi.

Présentation des archives de Laurent Schwartz

Alain Guichardet[1]

Laurent Schwartz a déposé ses archives à l'École polytechnique à l'aide d'une convention, signée le 13 janvier 2002, qui stipulait « ... *il souhaite que ses archives y soient conservées, aussi bien pour des motifs d'ordre personnel, que dans le but de les rendre accessibles aux chercheurs des différentes disciplines qui s'y intéresseraient* ». Ayant travaillé à leur classement pendant plus d'un an, j'ai pensé qu'il serait bon d'en faire une brève présentation à l'usage des chercheurs et, en particulier, des lecteurs de la *Gazette des mathématiciens* ; cela complétera utilement le court article que j'ai publié dans le numéro spécial de la Gazette consacré à Laurent Schwartz.

Quelques remarques préliminaires me semblent s'imposer. Tout d'abord, et c'est là une constatation que fait tout archiviste amateur, les archives sont, par leur nature même, toujours très incomplètes : elles contiendront par exemple des lettres écrites par l'intéressé ou reçues par lui, mais sans leur réponse ; ou encore des documents concernant certains séjours à l'étranger, alors que l'on sait par ailleurs qu'il en a fait d'autres.

Les archives de Laurent Schwartz contiennent une impressionnante quantité de correspondances de toutes sortes — purement mathématiques, professionnelles en

[1] Centre de mathématiques de l'École polytechnique

un sens plus général, administratives, de défense des droits de l'homme... — mais seulement à partir du début des années soixante-dix, pratiquement rien auparavant. Outre ses archives, l'École polytechnique possède aussi un « dossier administratif » de Laurent Schwartz, contenant des documents antérieurs aux années soixante-dix (notamment exclusion de l'École polytechnique, puis réintégration), consultable seulement sur autorisation de sa famille.

Les « chercheurs intéressés » auront intérêt à consulter, avant d'ouvrir les cartons contenant les archives, d'une part un « plan de classement », disponible sur papier et sur disquette, et, d'autre part, le texte de la convention de dépôt, important en ce qu'il précise les délais d'accessibilité des divers documents : « Les documents relatifs à des personnes privées, tels que lettres, rapports, mémoires, sans que cette liste ne soit limitative [...] seront accessibles ou consultables seulement après autorisation écrite de M. Laurent Schwartz ou de sa famille ». La libre consultation des archives interviendra seulement trente ans après leur dépôt, soit en 2031.

Les archives ont été classées sous les cinq grandes rubriques suivantes :

I. Les mathématiques : recherche et direction de recherche.
II. L'enseignement. L'École polytechnique.
III. Problèmes de l'enseignement et de la recherche en France et dans le monde.
IV. Défense des droits de l'homme.
V. Affaires personnelles.

Chacune de ces rubriques est subdivisée une ou deux fois suivant les cas. Une telle classification ne peut malheureusement jamais être parfaite : un document placé dans telle ou telle case pourrait tout aussi bien être mis dans telle autre ; les différentes cases ne sont pas toujours décrites, dans le plan de classement, avec la même précision. J'espère que l'on pardonnera ces nombreuses imperfections à l'archiviste amateur que j'ai été !

Plutôt que d'entrer dans les détails, nécessairement fastidieux, du classement des archives, je voudrais souligner quelques-uns de leurs aspects qui m'ont particulièrement frappé. C'était d'abord la quantité de notes manuscrites — entre 1 000 et 2 000 pages : notes prises lors de l'apprentissage d'une nouvelle théorie, ou de l'audition d'un exposé, ou encore de la préparation d'un cours ou d'une conférence... Tout aussi impressionnante est la masse de correspondances, appelant « correspondance » un échange de une (exceptionnellement) ou plusieurs lettres avec une personne ou un groupe de personnes. On en relève par exemple près de 400 sous les intitulés « Correspondance scientifique » et « Invitations et sollicitations diverses à caractère scientifique » ; près de 250 dans la période qui a suivi le rapport de Schwartz dans le cadre du bilan demandé par le Premier ministre en 1981 ; plus de 300 entrant dans la catégorie « Défense des droits de l'homme », etc. Par contre il n'est question de papillons que dans une quinzaine de lettres... Que l'on ne déduise pourtant pas de tout cela que les mathématiques sont mal représentées dans ces archives : on y trouve 72 tirés à part d'articles (le second, daté de 1938, reproduit une leçon d'agrégation du candidat Schwartz jugée particulièrement intéressante par le jury), 11 livres, 29 tapuscrits... De quoi occuper de nombreux chercheurs pendant de nombreuses années, que ce soit pour écrire une biographie de Laurent Schwartz, ou pour compléter l'histoire des droits de l'homme dans la seconde moitié du XX[e] siècle !

Les comptes rendus de l'Académie des sciences

Yves Meyer[1]

Chers collègues,

Je remercie Hervé Pajot de m'avoir invité à présenter aux lecteurs de la Gazette mon travail aux *CRAS* (Comptes rendus de l'Académie des sciences). J'y remplace Philippe Ciarlet qui est « rédacteur en chef » et qui, pour quelques années encore, occupe un poste à Hong-Kong. Le second « rédacteur en chef » est Bernard Malgrange. Les rédacteurs en chef sont aidés par un « comité de lecture » pluridisciplinaire qui lit soigneusement les notes, choisit un ou deux rapporteurs et, au vu des rapports obtenus, conclut à l'acceptation ou au refus. Il s'agit donc du fonctionnement normal d'une revue scientifique et la seule différence est la rapidité avec laquelle nous menons l'analyse des notes. Cette rapidité doit beaucoup au travail des rapporteurs et aussi à celui de Mireille Flay dont le rôle dépasse très largement celui d'une secrétaire.

En reprenant une boutade de Jean-Pierre Kahane, les *CRAS* étaient autrefois une « *boîte aux lettres* » et assuraient à une découverte, une observation ou même une remarque, une diffusion presque instantanée. La rapidité de la diffusion était le critère essentiel. Il n'y avait pas de « comité de lecture ». Le « présentateur » de la note en était le seul juge et sa qualité d'académicien suffisait à justifier sa décision. Mais certains académiciens bienveillants laissaient imprimer tout ce qu'on leur envoyait et les *CRAS* ont publié des notes fausses ou insignifiantes. Ce système a été corrigé par Bernard Malgrange et Michel Herman qui ont créé le « comité de lecture » et institué le fonctionnement que je viens de décrire.

Aujourd'hui nous disposons de la toile pour diffuser des observations ou des remarques. La « Série Mathématique » des *CRAS* ne peut donc plus se contenter d'être une boîte aux lettres, mais, comme le souhaitait Michel Herman, se doit de remplir un rôle analogue à celui de *Science*, de *Nature*, des *Physical Review Letters* ou des *Proceedings of the National Academy of Sciences*. Notre politique éditoriale consiste à ne publier que des résultats dont la qualité et l'importance soient indiscutables. Nous acceptons, par ailleurs, les notes en anglais et souhaitons que les mathématiciens du monde entier publient aux *CRAS*. Un article accepté dans la série mathématique des *CRAS* est donc maintenant une publication dans un journal ayant un critère d'excellence qui rejoint ceux de *Science* ou de *Nature*. Cela doit être pris en compte par les jurys de recrutement.

Cette politique scientifique a plusieurs conséquences fâcheuses et je voudrais présenter à toutes et à tous mes excuses pour la gêne subie. Il arrive qu'une note ne soit publiée que six mois après son dépôt, bien que l'attente moyenne ne soit que de deux mois. Beaucoup de notes sont refusées. Enfin les fascicules ont maigri. Mon espoir est que la diète ne soit que provisoire et que la « Série Mathématique » des *CRAS* en sorte en meilleure santé.

[1] CMLA, École normale supérieure de Cachan, ymeyer@cmla.ens-cachan.fr

À la suite de la défection de Gauthier-Villars, les *CRAS* sont éditées par Elsevier, ce qui présente des avantages et pose de nouveaux problèmes, liés à la numérisation des archives et à la diffusion payante (via ScienceDirect). Voici comment ScienceDirect fonctionne : tout le monde a accès à ScienceDirect (`www.sciencedirect.com`) et peut recevoir gratuitement les résumés des articles publiés. En laissant une adresse e-mail, on est ainsi alerté dès qu'une revue sort un nouveau numéro, etc. Si votre laboratoire est abonné à cette revue, vous pouvez télédécharger gratuitement des articles en PDF, et pour certaines revues en HTML (rare pour les revues de mathématiques). Sinon vous devez payer l'article par carte bancaire. C'est le même système chez Kluwer et Oxford University Press. En ce qui concerne les *CRAS*, les problèmes posés par ce fonctionnement sont discutés en ce moment et seront peut-être résolus dans les mois qui viennent. Mais ils me semblent indépendants de la politique éditoriale.

Bien évidemment, les *CRAS* ont vocation à publier les premiers résultats importants d'un jeune chercheur. Mais il conviendrait aussi que ces chercheurs, devenus seniors, n'oublient pas d'utiliser ces mêmes *CRAS* qui ont accueilli leurs premiers travaux.

Merci à tous d'y penser !

Prix Abel 2004

L'Académie des sciences et des lettres de Norvège a décidé de décerner le prix Abel pour l'année 2004, d'un montant de 710 000 €, conjointement à Sir Michael Francis Atiyah de l'université d'Edinburgh, et Isadore M. Singer du Massachusetts Institute of Technology pour « leur découverte et leur démonstration du théorème de l'indice, reliant la topologie, la géométrie et l'analyse, et pour leur rôle exceptionnel dans la construction de nouveaux ponts entre mathématique et physique théorique. »

Pour plus d'information : `www.abelprisen.no/en/`

A Criticism on "A Mathematician's Apology" by G. H. Hardy[1]

Paulo R. C. Ruffino[2]

> *"... modern science ... has recognised the anthropomorphic origin and nature of human knowledge ... it has recognised that man is the measure of all things, and that there is no other measure."*
>
> *Tobias Dantzig*

Among the greatest scientists in the world, there are many who consider science, from an idealistic point of view, as an *anonymous* human achievement, hence, something that mankind should be proud of (contrasting by the way, with many other shames of our species!). This is the point of view which I want to adopt in this article: consider science in a classic and pure context, independent of industrial technology or military motivations. Following this idea, science is evolving naturally as a consequence of the curiosity of the mind on finding out how things in the world around us work, and how they behave: Is it possible that there are general laws? Are there some principles governing the apparent chaos? Is it possible that the apple which falls is part of the same natural phenomena as the Moon which rotates around the Earth but does not fall?

The search for such kind of answers is rather exciting for these intellects. Two hundred years ago, Laplace explained this exploration in his impressive *Exposition du système du monde* [9, Livre V, Chap. IV] "une des plus fortes passions est l'amour de la vérité dans l'homme de génie"[3]. Real scientists do not compete with each other: the challenge is rather to overcome the limitations and ignorance of human beings. Inarguably, some scientific contributions carry more weight than others. But, once scientists view their research as part of an exhilarating scientific voyage, there is no room left for dichotomous attitudes, classifying people as winners or losers. And here starts my criticism of the well-known book of G. H. Hardy (1877-1947): *A Mathematician's Apology*. In this book, published for the first time in 1940, he gives his opinion on the mathematical world in twenty-nine short chapters. More recent editions are easier to find and include a foreword by C. P. Snow

---

[1] This article was written during a visit to the Mathematical Institute, University of Oxford, UK.

[2] Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brazil.
ruffino@ime.unicamp.br

[3] "*One of the strongest passions is the love of truth, in a man of genius*"

[5]. Along this article I am going to point out some ideas presented in his book which sound to me either controversial, having prejudice or could be argued in a more respectful and deferential way.

Right from the start, he apologizes for his own criticism, claiming that: "*exposition, criticism, appreciation, is work for second-rate minds.*" It is a rather surprising beginning (what does he imply about the author of the *Exposition du Système du Monde* [9], the masterpiece mentioned above?) We all know about very talented philosophers, critics, writers, artists, even journalists who had been and are still playing a fundamental role in the development of science, arts and humanism in general. So, this comment sounds very pretentious coming from a mathematician.

Still in the first chapter he disdains the speech of Alfred E. Housman (1859-1936), Kennedy Professor of Latin in the University of Cambridge, in his Leslie Stephen lecture on the 9th of May 1933: *The Name and Nature of Poetry* when, at the very beginning [6, p. 2] he modestly referred to his previous speech years before in the same Senate-House: "*In these twenty-two years I have improved in some respects and deteriorated in others, but I have not so much improved as to become a literary critic, nor so much deteriorated as to fancy that I have become one.*" He was reinforcing what he had said in 1911 in the Cambridge Inaugural Lecture *The Confines of Criticism,* about literary criticism [7, p. 27]. Concerning this quotation, Hardy declares: "*... deplorable that a great scholar and a fine poet should write like this*". I apologise for wishing to express exactly the same words about Hardy's declaration.

My disappointment arises specifically from the fact that the book was written by such a great mathematician, who not only left many contributions of his own, but also, the unique occidental mathematician who was considerate enough to recognise the talent of Ramanujan. A quite unusual attitude for that time: help and support bringing to light exceptionally talented people who come from not so (scientifically) prestigious places. For those who are interested in knowing more about the relation between Hardy and Ramanujan, see e.g. the Ranganathan's book [11], where one finds details of Ramanujan's meteoric and short carrier, and his depressive and unhealthy life.

Due to the atrocities of the First World War, Hardy had reasons to condemn the application of science in military matters, in particular, to reprobate the fact that some research on applied mathematics was supporting directly those purposes. Needless to say that applied mathematics is much wider than those military purposes (by the way Bertrand Russell knew that, and focused his pacifism in a more directed way, up to the point of being imprisoned for pacifist acts during the war). For some reason related to this, Hardy was very proud for being a *pure* mathematician ("*a real mathematician ... the purest of the pure*" as C. P. Snow described in the Foreword), I would say, almost to the point of treating applied mathematics with prejudice. Nevertheless, ironically, contrasting with this stereotype, he also became famous due to a beautiful result on applied mathematics. In 1908 he sent a 2-page letter to the editor of the *Science* [4] with results (concurrently with the German physician W. Weinberg) on how proportions of dominant and recessive genetic traits propagate in a large mixed population, the well-known Hardy-Weinberg law. This result became centrally important in many population genetic problems including hemolytic disease, see e.g., among many others introductory textbooks on the subject, Spiess [12]. Concerning Hardy's outstanding legacy on pure mathematics, his contributions are mainly on theory of Diophantine analysis, divergent series, Fourier series, Riemann zeta-function and the distributions of primes. His greatest collaborators were Littlewood and Ramanujan.

Back to the book which is the focus of my criticism, in Chapter seven he describes his ideas on motivation for scientific research. He emphasizes some motives which go, in some sense, against those ideas I presented in the first two paragraphs. He claims that, besides intellectual curiosity, the inspirations come from professional pride, "*ambition, desire for reputation, and the position, even the power or the money, which it brings*". I agree that these latter points represent part of motivation for many among us. But definitely they also represent delicate points which, when overcharged can induce acts which hurt (or could be in the borderline of) ethic. Regrettably, he emphasizes the last few motives: "*So if a mathematician, or a chemist, or even a physiologist, were to tell me that the driving force in his work had been the desire to benefit humanity, then I should not believe him (nor should I think the better of him if I did)*".

This phrase could sound as an offence for those working on science for idealism or for those really working for "love of truth" or to "benefit the humanity", and we know that these people, though the minority, do exist!

These élitist or competitive ideas, in the sense that the only contributions which matter are made by those among the best, is pejoratively reinforced along the book. They are expressed in words like: "*mathematical fame ... one of the soundest and steadiest investment*" (Chap. 8) ,"*second-rate mind*" or "*... have done something beyond the powers of the vast majority of men*" (Chap. 6).

Philosophically speaking, I think nowadays it is hard to find somebody who agrees with his statement in Chapter 27 concerning a phrase of Hogben: "*The mathematics which can be used 'for ordinary purposes by ordinary men' is negligible*". Firstly, on what concerns the élitist aspect of this disdainful phrase, compare it with the Preface of *The Mathematics of Great Amateurs* [1], where Coolidge says that, in his book: "... the number of men included could easily be doubled or trebled". Secondly, on what concerns the presumptuous aspect of Hardy's phrase, contrast it with the modest and respectful declaration of Laplace, as simple and deep as that [9, Book V, Chap.1] : "*... l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant à la fois, une valeur absolue et une valeur de position; idée fine et importante, qui nous paraît maintenant si simple, que nous en sentons à peine le mérite.*" [4]

This quotation of Laplace opens the second chapter of the remarkable book *Number: the Language of Science* by Tobias Dantzig [2], author of the epigraph at the top of this article. His book received many compliments of 20th century top scholars, including Albert Einstein. Many other authors also contrast with Hardy's idea. Besides the already mentioned Laplace book [9], it is hard to prevent to mention the excellent work of some other illustrious authors (I apologise in advance for omitting so many of them in this short article) like Morris Kline, in particular his comprehensive survey *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* [8],

[4] "... the ingenious method of expressing all numbers by means of ten symbols, each symbol receiving a value of position as well as an absolute value; a profound and important idea which appears so simple to us now that we ignore its true merit."

Lancelot T. Hogben (who, in Chapter 27 and 28 Hardy makes clear that he belongs to a different school from his own), some contemporaries like David Fowler, Carl Boyer, or Ian Stewart with his vast work involving updated mathematical objects. It is equally interesting to note some introductory texts regarding philosophy of science in general, like (back to the 17th century) the classic *Dialogue* written by the founder of the modern physics Galileo Galilei [3], some of H. Poincaré's works ([10], e.g.) and the more philosophical works of Bertrand Russell and Raymond Wilder. As we said before, many of these books go in an opposite direction of the ideas presented by Hardy.

We all know that there are many books on history and philosophy of mathematics which are partial, elitists or even tendentious in many aspects. But what really surprises me is the gap between Hardy's attitude in his life and the ideas expressed in his book. Naturally, people develop different concepts, sensitiveness and points of view along their intellectual carrier. Nevertheless, Hardy's book, compared to others, humanistically speaking, reflects a very dry, bitter and thorny philosophy.

Finally, for those who are interested in getting to know more about the kind of "irony" Hardy enjoyed, have a look in the note by A. M. Vershik [13]. Without wanting to dislodge Hardy's book from its established status as a statement on mathematical philosophy by a thoughtful and articulate mathematician, I recommend that in reading it we ask ourselves whether some of the ideas presented are presumptuous and scornful to the point of hurting the development of science and humanism in general.

References

[1] Coolidge, J. L. – *The Mathematics of Great Amateurs*. The Clarendon Press, Oxford, UK, 1949.

[2] Dantzig, T. – *Number: the Language of Science*. Free Press, 4^{th} edition, New York, 1954.

[3] Galilei, Galileu – *Dialogues Concerning Two New Sciences*. Northwestern University Press, 1968.

[4] Hardy, G. H. – Mendelian proportions in a mixed population. *Science*, section: "Discussion and Correspondence". **Vol.** 28, pp. 49-50, 1908. *Reprinted in* J. H. Peters, ed. *Classic Papers in Genetics*. Englewood Cliffs, N. J.:Prentice-Hall, 1959.

[5] Hardy, G. H. – *L'apologie d'un mathématicien*, Collection "Un Savant, une époque", Berlin, 1985. Original in English: "A Mathematician's Apology", Cambridge University Press, Canto Edition (reprint), 2000.

[6] Housman, A. E. – *The Name and Nature of Poetry*, Leslie Stephen Lecture at Cambridge, 9 May 1933. The Macmillan Company, 1936.

[7] Housman, A. E. – *The Confines of Criticism: The Cambridge Inaugural, 1911*. Cambridge University Press, 1968.

[8] Kline, M. – *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford University Press. 1st edition, 1972. 2nd Edition in 3 volumes, 1990.

[9] Laplace, P. S. – *Exposition du Système du Monde*, texte de l'édition de 1835 revu par l'Auteur, Librairie Arthème Fayard, 1984. English translation of first edition in 1796 by J. Pond "The System of the World", Ed. Richard Phillips, London, 1809.

[10] Poincaré, H. – *La science et l'hypothèse*. E. Flammarion, Paris, 1943. English translation "Science and Hypothesis", Dover, New York, 1952.

[11] Ranganathan, S. R. – *Ramanujan, the Man and the Mathematician*. Asia Publishing House, London, 1967.

[12] Spiess, E. B. – *Genes in Populations*, 2^{nd} Edition, Wiley-Interscience Publication, New York, 1989.

[13] Vershik, A. M. – "A Dangerous Joke". *The Mathematical Intelligencer*, Vol. **20**, no. 2. Springer-Verlag, New York, 1998.

COURRIER DES LECTEURS

La division nous divise

Merci à la SMF pour le très intéressant dossier sur les Mathématiques dans l'enseignement primaire avec les textes des contributions au débat du 11 octobre 2003. J'étais membre du bureau et du Conseil de la SMF lorsque Michel Delord nous interpellait *conformément au mandat sur lequel j'ai été élu au Conseil de la SMF et dans la droite ligne de la pétition contre les nouveaux programmes du primaire* (selon les termes du début de son intervention) pour réclamer *que la SMF prenne position publiquement* sur cette cause (comme il le répète vers la fin de son intervention). Je faisais partie de ceux qui pensaient qu'avant toute prise de position, qui n'est d'ailleurs peut-être pas du rôle de la SMF, il convenait d'organiser un débat, l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire étant en tout cas de premier intérêt pour tous les membres de notre société. Ce débat a eu lieu, bravo ! Je trouve le dossier qui en résulte tout à fait passionnant. Passons sur le ton un peu trop polémique à mon goût de l'intervention de Michel Delord. Sur le fond que dit-il ? : il déplore que la maîtrise des quatre opérations arithmétiques élémentaires ne soit pas une compétence attendue des élèves sortant de l'école primaire. De manière plus précise, il veut d'une part convaincre qu'*il est vrai* que cette compétence n'est pas exigée, de l'autre il émet l'opinion que c'est tout à fait regrettable. Sur ces deux points l'ensemble du dossier (centré plus spécifiquement sur la division et l'usage des nombres décimaux) lui donne à mes yeux tout simplement raison et c'est en grande partie la lecture des contributions de Viviane Durand-Guerrier, Roland Charnay et Catherine Houdement qui emportent ma conviction.

Pour les faits, Roland Charnay (membre du groupe d'experts pour les programmes de l'école primaire) confirme notamment que *Les connaissances mathématiques enseignées à l'école Primaire le sont dans le cadre d'une scolarité prolongée pour tous les élèves jusqu'à la fin du collège* et qu'avant d'entrer au collège les élèves doivent avoir *une première maîtrise des nombres décimaux : compréhension des écritures à virgule, ordre sur ces nombres, calcul (addition, soustraction, multiplication par un entier)*. Quand bien même il est dit que ces connaissances seront complétées pendant les premières années du collège, il est donc tout à fait explicite que la maîtrise de la division n'est pas une compétence requise à la sortie de l'école élémentaire (il n'est d'ailleurs pas clair qu'elle le soit pour l'entrée au lycée). La contribution de Catherine Houdement le confirme : en cycle 3 du primaire, la compétence requise est de calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (*d'au plus 4 chiffres*) par un nombre entier (*d'au plus 2 chiffres*) et en classe de 5ème de ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier.

En ce qui concerne l'opinion qu'on peut avoir sur ces programmes, ce sont là aussi les arguments de la défense qui me portent à épouser les thèses de l'accusation. J'en retiendrai trois.

(1) La difficulté (Roland Charnay : *les difficultés des élèves sont importantes*). Il est vrai que la maîtrise du calcul demande un sérieux apprentissage et qu'il en découle évidement qu'il convient de graduer les exercices ! Pour autant, imaginerait-t-on, sous prétexte que l'orthographe est difficile, des programmes qui indiqueraient comme compétence requise les accords des verbes du premier groupe seulement ? Non ! Maîtriser les quatre opérations à l'issue de l'école primaire, sans limites imposées, est une excellente ambition, même s'il convient de tenir compte des difficultés dans l'évaluation (pour reprendre ma comparaison avec l'orthographe, avec laquelle j'avais des difficultés, je suis heureux que 5 fautes en dissertation ne soit pas éliminatoire, mais je tiens à ce qu'on persiste à faire des dictées).

(2) L'exigence de donner du sens. Cela me fait penser à M. Jourdain heureux de découvrir qu'il fait de la prose sans le savoir. Devrait-on empêcher les enfants d'apprendre à parler de crainte qu'ils ne soient pleinement conscients qu'ils s'expriment en prose ? Devrait-on leur interdire d'apprendre ou de prononcer des mots dont ils ne maîtriseraient pas tout le sens ? Il est certes souhaitable, tout au long de l'apprentissage, d'arriver à comprendre ce que l'on fait. Mais il n'y a pas là argument à limiter la pratique dont l'exercice quotidien ne peut au contraire que contribuer à donner du sens.

(3) Quels savoirs enseigner ? Posons tout simplement la question : est-il vraiment nécessaire d'enseigner la division ? Alors que ceux qui accusent les programmes partent du postulat simple que la réponse doit être positive, les avocats de la défense ne posent pas clairement la question pas plus qu'ils n'y répondent. On trouve cependant, entre les lignes, quelques arguments contre. Ainsi Catherine Houdement oppose *les connaissances nécessaires à la culture du citoyen éclairé* à *celles à atteindre pour une certaine élite scientifique* faisant par ailleurs allusion aux *documents d'application* et *fiches d'accompagnement* des programmes qui introduiraient une juste pondération entre *Calcul automatisé, Calcul réfléchi* et *Calcul instrumenté*. Ah qu'en termes galants ces choses-là sont dites ! Osons être brutal : la nécessité d'apprendre à faire de longues et fastidieuses divisions serait remise en question par l'introduction des calculettes. Or, parmi les très nombreuses raisons qu'on pourrait donner pour maintenir un bon niveau de calcul à l'école primaire, je donnerais précisément celle de la culture du citoyen éclairé. C'est un acte citoyen que d'être au moins au niveau de cette petite boîte avec quatre touches (pour chacune des quatre opérations) et de comprendre qu'elle n'opère pas des tours de magie. Si les élèves du primaire comprenaient, à propos de la calculette, que les machines ne font que ce pourquoi elles sont programmées, on aurait alors au moins tenté de faire d'eux des citoyens responsables, attitude qu'ils pourraient plus tard avoir face à des machines plus complexes dont ils n'auront pas nécessairement personnellement la maîtrise.

Je ne vois toujours pas bien sous quelle forme la SMF pourrait *prendre publiquement position*. Mais en tout cas, le citoyen que je suis, à la lecture du compte rendu de ce débat, est désormais résolu à demander à Michel Delord le texte de sa pétition contre les nouveaux programmes du primaire pour considérer de la signer.

Paul-Jean Cahen
Université d'Aix-Marseille III

LIVRES

Introduction to the Mori program
Kenji Matsuki
Universitext, Springer-Verlag, 2002. 478 p. ISBN : 0-387-98465-8. 80,20 €

Le livre de Kenji Matsuki est une introduction à un domaine de la géométrie algébrique souvent perçu comme étant d'une difficulté intimidante : le Programme Minimal ou Programme de Mori. L'objet de ce programme est l'étude des variétés algébriques (projectives complexes, même si diverses généralisations sont possibles hors de ce cadre naturel), en particulier en dimension supérieure ou égale à 3. Un premier objectif est l'obtention d'une recette permettant, à partir d'une variété donnée, de sélectionner dans la même classe birationnelle une autre variété « plus jolie que les autres ». Cette variété privilégiée est appelée *fibration de Mori* ou *modèle minimal* suivant une première grande dichotomie dans la théorie. Dans un deuxième temps se pose la question d'étudier la géométrie de ces modèles privilégiés.

Depuis le début des années quatre-vingt cette théorie a été développée par de nombreux mathématiciens dont Kawamata, Mori, Reid, Kollar, Shokurov, et a connu de nombreux succès spectaculaires. En particulier en dimension 3 on dispose à présent de résultats assez complets (quelques énoncés cruciaux restant à l'état de conjecture à partir de la dimension 4).

Je discute maintenant le contenu du livre, plus ou moins chapitre par chapitre.

L'objet de la théorie de Mori étant essentiellement l'étude des variétés projectives de dimension plus grande que 3, on pourrait s'étonner que l'auteur consacre un premier long chapitre d'une centaine de pages au cas des surfaces. Pourtant le pari me semble gagné : ce chapitre permet d'intégrer en douceur les concepts de la théorie en les confrontant aux résultats « bien connus » (ou en tout cas qui le deviennent à l'étude de ce chapitre...) de la théorie des surfaces.

J'aime aussi beaucoup les deux chapitres informels en début d'ouvrage ; d'une part l'introduction joliment intitulée *The Tale of the Mori Program*, d'autre part le chapitre 3 *Overview of the Mori Program* qui trouve tout naturellement sa place après qu'ait été traité le cas de la dimension 2.

Une idée centrale dans la théorie est d'utiliser la dualité, au travers de la forme d'intersection, entre les fibrés en droite et les courbes (précisément les 1-cycles) d'une variété. Un fibré en droite joue un rôle majeur : c'est le fibré canonique, associé à une forme volume holomorphe. Ainsi l'idée centrale du programme de Mori est que les courbes qui sont d'intersection négative avec le diviseur canonique peuvent être « éliminées ». Par ailleurs dans de nombreuses situations il est utile de considérer des perturbations du diviseur canonique, c'est ce qu'on appelle travailler dans le cadre logarithmique. C'est une qualité du livre de nous convaincre qu'en effet « le cadre logarithmique est agréable et naturel », Kenji Matsuki revenant avec insistance sur ce point, dans le chapitre 2 puis tout au long du livre.

Cependant le livre n'est pas exempt de défaut : d'ailleurs un livre qui débute par une liste de notations s'étendant sur onze pages (!) m'inspire aussitôt une méfiance instinctive. Il me semble que ce détail est assez typique de la manière de rédiger de Matsuki : à force de vouloir rendre son sujet abordable il finit parfois par noyer le lecteur sous une profusion d'informations vagues et redondantes... J'ai parfois eu la sensation à la lecture du livre d'être face à l'un de ces orateurs par trop enthousiastes qui vous assène sans discontinuer de nouveaux arguments chacun plus incompréhensible que le précédent...

Je ne suis ainsi guère convaincu par le chapitre 4 concernant les singularités. Après avoir introduit de manière aride les multiples définitions nécessaires à la théorie (singularités terminales, canoniques, log-terminales, purement log-terminales...) l'auteur ne nous présente pour exemples que le cas de la dimension 2.

Il existe deux ensembles de techniques assez distinctes dans ce que l'on appelle génériquement « la théorie de Mori » : le point de vue (dû à Mori précisément) d'étudier une variété *via* les déformations des courbes qu'elle contient, en particulier à l'aide du principe fameux du « bend and break » ; et d'autre part les techniques cohomologiques qui s'appuient sur des théorèmes d'annulation. Le point de vue du livre est résolument le deuxième. Durant cinquante pages l'auteur nous amène du théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, qui généralise le théorème d'annulation de Kodaira, jusqu'au théorème du cône, *via* des résultats techniques : théorème « base point free » (je suis incapable de trouver un équivalent français satisfaisant), théorème de non-annulation de Shokurov, théorème de rationalité. Les résultats sont clairement motivés, et de plus l'auteur prend la peine d'énoncer des versions non-logarithmiques de ces théorèmes ce qui donne une chance au lecteur de ne pas se noyer aussitôt dans la technicité.

Si les motivations et les énoncés sont agréablement rédigés, on peut cependant souvent regretter un manque de concision dans les preuves techniques proprement dites, ainsi qu'un usage abusif du « copier-coller » qui nuit à la cohérence du texte. Un exemple typique : la figure 7.2.3, illustrant la preuve du théorème de rationalité, est manifestement une copie de la figure 1.3.3, illustrant le même théorème dans le cas des surfaces ; malheureusement l'auteur a omis de changer le S de surfaces en un X de variété de dimension quelconque... De façon générale, le livre comporte beaucoup de coquilles qui ne sont pas toutes aussi faciles à rectifier.

Les chapitres 8 à 11 sont quatre chapitres très (trop ?) courts, où l'on a la sensation que l'auteur se rend compte qu'il a presque épuisé le nombre de pages qui lui était alloué alors qu'il lui reste encore une montagne d'informations à faire passer. Du coup le chapitre 8, qui est un chapitre d'exemples, nous laisse un peu sur notre faim : même en considérant que le lecteur doit mettre la main à la pâte il me semble que certains exemples (comme ceux concernant les fibrations en surfaces del Pezzo) sont mentionnés de manière trop rapide pour pouvoir être éclairante. Le chapitre 9, sur les flips, fait l'impasse sur le problème de l'existence (ce qui est tout à fait raisonnable) et se donne pour ambition de démontrer l'unicité et la finitude. Était-ce vraiment possible en seulement sept pages ? En particulier pour la question de l'unicité, il est tout d'un coup demandé au lecteur une maîtrise certaine du « Hartshorne » qui jusque-là n'était pas aussi cruciale. Le chapitre 10 concerne un aspect de la théorie de Mori occulté dans tout le restant du livre, à savoir la technique dite du « bend and break ». L'idée générale est de produire des courbes rationnelles en déformant une courbe intersectant négativement le diviseur canonique, l'argument nécessitant un aller-retour entre caractéristique nulle et caractéristique positive. Le lecteur intéressé par cet aspect de la théorie de Mori trouvera dans [Debarre, *Higher dimensional algebraic geometry*, également paru dans la collection Universitext] une agréable introduction ; en général les livres de Debarre et Matsuki se complètent d'ailleurs très bien. Le chapitre 11 consiste en une redite des principaux résultats dans le cadre logarithmique.

Les chapitres 12 et 13 sont consacrés au problème de l'étude des produits du programme de Mori, à savoir les modèles minimaux et les fibration de Mori. Le chapitre 12 est consacré au problème de la non-unicité des modèles minimaux, ce qui contraste avec le cas de la dimension 2. Deux modèles minimaux dans une même classe birationnelle sont isomorphes en codimension 1, et on peut passer de l'un à l'autre par une suite de transformations appelées « flops ». L'auteur discute également la finitude du nombre de modèles minimaux dans une classe birationnelle donnée.

Le chapitre 13 concerne le programme de Sarkisov, qui explique comment deux fibrations de Mori contenues dans une même classe birationnelle sont reliées par une suite d'opérations élémentaires. L'auteur reprend essentiellement un article de Corti [*Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov.* J. Algebraic Geom. 4 (1995)], apportant quelques précisions et simplifications bienvenues. Par contre l'application au théorème de Jung, qui est un sujet que je connais bien et où je pense que les idées de Sarkisov devraient être particulièrement éclairantes, me paraît rédigée d'une manière extrêmement confuse.

Le premier chapitre sur les surfaces se présentait comme une mise en bouche ; le dernier chapitre quant à lui se veut une récréation dans le monde des variétés toriques. Ce but n'est sans doute pas pleinement atteint, et il est à craindre que ce chapitre technique ne semblera une agréable pause que pour les spécialistes des variétés toriques.

Moi-même novice dans ce sujet j'ai récemment co-animé un groupe de travail dont l'objectif était de comprendre les grandes lignes de la théorie de Mori. À cette occasion le livre de Kenji Matsuki a été pour moi une porte d'entrée privilégiée dans ce domaine. Ainsi les quelques critiques que j'ai formulées ci-dessus ne sauraient entacher la principale qualité du livre, qui est de nous amener, à partir d'un bagage initial réduit au strict minimum, au cœur d'une théorie difficile et fascinante encore en pleine évolution.

Stéphane Lamy, Université de Lyon I

A Course in metric geometry, Graduate studies in mathematics

D. Burago, Y. Burago et S. Ivanov

Graduate Studies in Mathematics, 33. Amererican Mathematical Society, 2001.
415 p. ISBN : 0-8218-2129-6.44 $.

La « géométrie métrique » s'apparente bien sûr à la géométrie riemannienne. Elle remonte aux travaux de l'École russe, qui a développé avec succès une théorie des surfaces convexes non lisses.

De quoi s'agit-il ? En simplifiant à peine, c'est de la géométrie riemannienne où l'on abandonne complètement le point de vue infinitésimal. Le tenseur de courbure est un « *monstre d'algèbre linéaire* » (M. Gromov) qui rend compte de l'écart à l'ordre 2 entre une métrique riemannienne et la métrique euclidienne de l'espace tangent (sachant que pour une métrique lisse il n'y a pas d'invariants infinitésimaux d'ordre 1). Certaines propriétés ont une interprétation métrique. Tout le monde sait par exemple que le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle (euclidien !) a une longueur moitié de celle du troisième côté. Si pour les (petits) triangles géodésiques d'une variété riemannienne, cette longueur est inférieure (resp. supérieure) à celle du troisième côté, cela signifie que la courbure (plus précisément la courbure sectionnelle) est négative (resp. positive).

On trouve dans la littérature la terminologie de « CAT(0) space ». CAT est l'acronyme de Cartan-Alexandrov-Toponogov, et les espaces CAT(0) sont les espaces métriques à courbure positive ou négative au sens précédent. Les auteurs ont abandonné cette terminologie pour celle d'espaces d'Alexandrov (à bas les acronymes). Quel que soit leur nom, leur théorie est l'un des fleurons de l'École russe.

Le livre commence par des résultats de base sur les espaces métriques, suivi d'un exposé systématique sur les espaces de longueurs. Ce sont les espaces métriques pour lesquels les propriétés des distances que nous avons évoquées se prêtent à une exploitation raisonnable. Cette terminologie, popularisée par M. Gromov (cf. [6], ch. 2) remplace la terminologie tradionnelle de métrique intrinsèque ou géodésique. Une autre vertu de ces métriques est de se prêter très naturellement aux constructions usuelles de la topologie, quotients, recollements, cônes, suspensions. Vient ensuite un exposé détaillé sur les espaces d'Alexandrov à courbure inférieure ou supérieure à k (leur définition est la même que pour $k = 0$, sauf que l'on prend comme espace de référence une sphère ou un espace hyperbolique de courbure k). L'un des aboutissements de la théorie est le passage du local au global. Un espace sera dit globalement de courbure $\leq k$ ou $\geq k$ si le résultat de comparaison mentionné plus haut vaut pour *tous* les triangles géodésiques. Alors :

Un espace simplement connexe complet à courbure $\leq k \leq 0$ est globalement à courbure $\leq k \leq 0$ (Hadamard-Cartan-Gromov) ; un espace complet à courbure $\geq k$ est globalement à courbure $\geq k$ (Alesandrov-Toponogov-Perelman).

Les auteurs ont fait le choix délibéré de ne faire intervenir que très tard, au bout de 200 pages, la géométrie riemannienne. C'est confirmé, les variétés riemanniennes à courbure sectionnelle inférieure (ou supérieure) à k sont bien des espaces d'Alexandrov ! On aura déjà vu auparavant tout ce que l'on peut faire uniquement avec la distance.

Cette théorie métrique va d'ailleurs bien au-delà du riemannien. Un bel exemple d'espace d'Alexandrov est l'ensemble des points à l'infini d'un espace symétrique non compact muni de la métrique de Tits (cet exemple ne figure pas dans ce livre, suffisamment riche par ailleurs, sans doute vu l'existence de [1] et de [3] ; ce dernier livre est d'ailleurs écrit dans le même esprit). Un autre exemple est celui du graphe de Cayley de certains groupes de type fini. Ce thème de théorie géométrique des groupes (voir par exemple [5]) est par contre bien abordé dans le livre.

Mais la géométrie métrique aujourd'hui, ce n'est plus seulement la théorie des espaces d'Alexandrov, si belle soit-elle. Inspiré par la distance de Haussdorf sur les parties compactes d'un espace métrique, M. Gromov a inventé une distance sur les classes d'isométries d'espaces métriques compacts qui s'est avérée extraordinairement féconde (voir [6] ch. 5 et 8, ainsi que [7] et [4] pour des développement récents). L'exposé détaillé des fondements de la théorie qui est donné au chapitre 7 est particulièrement bienvenu. Un exemple éclairant est celui du cône asymptote d'un espace métrique (X, d). Il s'agit de la limite, si elle existe, de $(X, \lambda d)$ quand λ tend vers zéro. Si X est $\mathbf{Z}^2$ muni de la métrique des mots pour les générateurs les plus simples, on obtient $\mathbf{R}^2$ muni de la métrique de Manhattan. Cela n'a pas l'air très sérieux. Mais c'est par ce procédé, appliqué à la métrique des mots d'un groupe à croissance polynomiale, que M. Gromov a montré qu'un tel groupe est virtuellement nilpotent (cf. [8]).

Cet ouvrage se présente comme un manuel. Mais quel manuel ! Il est unique sur le marché. Partant de la définition d'un espace métrique, il nous conduit à des théories en plein développement. Il ne ménage ni les exemples, ni les motivations ou les exercices (parfois faciles, parfois ardus, toujours intéressants ; les plus faciles renouvelleraient avantageusement le stock d'exercices de topologie de licence). Il est parsemé de discussions sur des points « élémentaires » mais fondamentaux, et rarement explicités. Je pense par exemple aux ennuis causés par les points fixes d'une action de groupe, au lien entre la lissité des géodésiques d'une métrique de Finsler et la stricte convexité des boules pour la norme, ou encore aux différents volumes sur un tel espace. Des résultats importants et significatifs, parfois avec quelques simplifications techniques bienvenues, arrivent suffisamment tôt pour tenir en haleine.

Ce livre est un formidable pied à l'étrier pour aborder des théories profondes et en plein développement. Il est abordable avec profit par tout non spécialiste un tant soi peu curieux. Son étude est un impératif (catégorique ?) pour quiconque veut étudier sérieusement la géométrie riemannienne (et sans doute aussi pour qui s'intéresse à la théorie géométrique des groupes).

Références

[1] W. Ballmann, M. Gromov & V.Schroeder – *Manifolds of non positive curvature*, Progress in Maths., Birkhauser, 1985.

[2] M. Berger – « La Géométrie métrique des variétés riemanniennes », in *Élie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui Lyon 25–29 juin 1984*, Astérisque, Soc. Math. France, Paris, 1985, supplementary issue, p. 9–66.

[3] M. Bridson & A. Haefliger – *Metric spaces of non-positive curvature, Grundlehren der mathematischen wissenschaften*, vol. 319, Springer, 1999.

[4] S. Gallot – « Volumes, courbure de ricci et convergence des variétés (d'après T.H. colding et Cheeger-Colding) », in *Séminaire Bourbaki 1997-1998*, Astérisque, vol. 252, Soc. Math. france, 1998, p. 7–32.

[5] E. Ghys & P. de la Harpe – *Sur les groupes hyperboliques d'après Gromov*, Birkhaüser, 1990.

[6] M. Gromov – *Metric structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces*, Birkhaüser, 1998.

[7] P. Petersen – *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, 1998.

[8] J. Tits – « Groupes à croissance polynomiale (d'après M. gromov et al.) », in *Séminaire Bourbaki 1980-1981, exp. 572*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 901, Springer-Verlag, 1981, p. 176–188.

Jacques Lafontaine, Université de Montpellier II

L'enseignement des sciences mathématiques – Statistique et probabilités
Sous la direction de J.-P. KAHANE
Odile Jacob 2002. 284 p. ISBN : 2-7381-1138-6. 22 €

Ce compte rendu critique porte sur le contenu du chapitre 2 « Statistique et probabilités » et ses annexes, du rapport « L'enseignement des sciences mathématiques » réalisé par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, sous la direction de Jean-Pierre Kahane. Cette partie du rapport sera désignée dans la suite par « rapport SPSM ». Certaines parties de ce texte ainsi que des annexes et des comptes rendus de sessions non publiés sont disponibles sur internet sous forme de rapports d'étape, à diverses adresses dont le site de l'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) `http://www.ac-grenoble.fr/irem/sobre/kahane.htm`. Ces documents donnent une vision plus large et explicative du travail de la commission. On pourra en particulier y consulter des textes sur le travail préparatoire de la commission, absents du rapport final, qui peuvent en éclairer la lecture. Je recommande toutefois (en particulier pour le corps du rapport SPSM) la lecture de la version finale imprimée, récemment publiée aux éditions Odile Jacob, qui a été retravaillée et remise en forme. Le style et certaines expressions, dues sans doute à la difficulté d'une synthèse pourront cependant surprendre : le lecteur en jugera par lui-même.

Vision d'ensemble du rapport

Il convient de noter dès le départ que ce rapport porte plus sur l'enseignement des statistiques que sur les probabilités. Ainsi, le travail de la sous-commission sur « la statistique et les probabilités » s'inscrit dans le prolongement du 8^{e} rapport sur la science et la technologie, « La statistique » de l'Académie des sciences. Ce dernier qui dresse un panorama très clair de l'état de la recherche en Statistique et décrit les besoins de formation en France, y est abondamment cité. La conclusion du rapport SPSM en reprend en particulier les recommandations 2 et 9 à savoir :

– la nécessité de développer la recherche en statistique en France ;
– la nécessité de favoriser la formation initiale et continue des professeurs de lycée et des collèges, l'objectif 2) pouvant et devant contribuer à l'objectif 1).

Après avoir rappelé les buts du rapport de l'Académie des sciences, le rapport SPSM, essentiellement destiné au public des professeurs des collèges et des lycées se propose :

(1) d'une part de rendre compte des débats sur « la place des statistiques et des probabilités (de l'aléatoire) au sein des mathématiques » ; je ne suis cependant pas sûr que les multiples avis exprimés dans ce rapport rédigé par un collectif de personnes, qui y expriment des visions très différentes (complémentaires ou opposées) de la statistique soient toujours complètement transparents à des mathématiciens n'ayant pas de formation statistique. Aussi, je reviendrai dans un premier temps sur ces visions de la statistique et leur lien aux outils mathématiques.

(2) d'autre part de contribuer à l'élaboration du contenu des enseignements. Plutôt que de dresser une liste d'objets mathématiques utiles aux statistiques et à

l'aléatoire, les auteurs ont préféré illustrer la « démarche statistique » par l'exposition de très nombreux exemples, soit purement illustratifs et à visée pédagogique (voir en annexe les textes de C. Robert et J. Treinier ou Y. Escoufier) soit plus développés dans le cadre d'applications spécifiques. En particulier, les annexes proposent divers textes des membres de la commission qui donnent quelques exemples sur la manière d'aborder des problèmes statistiques concrets, dans des domaines du *credit-scoring*, de l'analyse sensorielle, la biophysique ou le traitement de données textuelles.

Le rapport met particulièrement bien en évidence l'importance prise par les « statistiques » tant dans notre vie courante que dans les domaines de recherche les plus divers, ne serait-ce que par leur rôle social et civique (voir ces fameux « sondages d'opinion » dont on se demande toujours, surtout lorsqu'on est statisticien, ce qu'il disent réellement) que par leur intervention de plus en plus importante dans les sciences physiques, naturelles ou économiques et sociales. Comme le souligne le rapport, cette omniprésence a tendance à donner de la statistique une image un peu simpliste qui peut se retourner contre elle, notamment s'il s'agit de convaincre des mathématiciens d'introduire de la « statistique » dans les programme du primaire et du secondaire, ou tout simplement d'inciter à étudier les probabilités et les statistiques à des étudiants attirés par les mathématiques et leurs applications. Les nombreux exemples donnés dans le corps du rapport SPSM ont une fonction essentiellement pédagogique. Cependant je ne peux m'empêcher de penser à sa lecture que l'utilisation trop systématique d'exemples simples, pour expliquer mieux à des non-spécialistes a le même revers, en ce qu'ils font perdre le fil de l'exposé et n'est peut être pas la meilleure façon « de guider des choix de contenus ». La dernière partie sur la formation et les acquis du secondaire laisse pour cela un peu sur sa faim. Dans une partie développée, le rapport propose pour les formations professionnelles ou supérieures non-scientifiques une approche de la statistique en contexte, la moins mathématique possible et reposant sur des considérations de bon sens, mais ne donne que peu de suggestions voire de solutions pour une véritable réforme de l'enseignement dans les grandes écoles ou le supérieur, pas plus que pour le secondaire. La question posée par Y. Escoufier dans le rapport de l'Académie de sciences « Que faut-il enseigner en statistique et à qui ? » me semble donc encore en suspens, mais ce point, il est vrai, est délicat.

La place de l'aléatoire dans les mathématiques

Comme le souligne le rapport SPSM, la statistique se situe à la fois « dans les mathématiques », dont elle utilise de très nombreux outils (la géométrie, l'analyse, le calcul, l'algèbre) tout en créant également ses propres objets mathématiques et « en dehors des mathématiques » dans le sens où son application a de très nombreux champs (la biologie, la physique, l'économie, la sociologie, et « la vie publique ») relevant de l'induction et de l'interprétation, nécessite une connaissance profonde (problématiques, concepts) du domaine d'application. C'est cette place ambiguë qui pose souvent problème dans les débats sur la place de la statistique dans les mathématiques. Si on ne peut nier cette double appartenance, s'y greffent également des questions vaines de hiérarchie implicite entre les mathématiques pures, les impures (les mathématiques appliquées) et les intouchables (les statistiques), débat très sensible dans la France cartésienne mais beaucoup moins dans les pays anglo-saxons.

Apprentissage contextualisé ou décontextualisé ?

Le rapport accorde beaucoup d'importance à un apprentissage de la statistique en contexte tout en insistant sur le fait que les statistiques doivent être enseignées par des mathématiciens. Le rapport justifie l'introduction des statistiques dans des cours de mathématiques essentiellement pour les raisons suivantes :

(i) l'omniprésence des statistiques dans la vie quotidienne et les sciences (la statistique permettant alors d'ouvrir l'horizon des mathématiciens...)

(ii) la nécessité de donner aux futurs citoyens une culture statistique minimum pour aiguiser leur sens critique face aux interprétations douteuses.

(iii) l'existence d'une « culture statistique et mathématique commune » sous-jacente, par delà les différences de modèles et d'applications.

Les points i) et ii) ne me paraissent pas entièrement convaincants et posent le problème de l'enseignement contextualisé sur lequel je reviendrai. On peut également imaginer que le point ii) puisse intéresser la philosophie et l'épistémologie ou l'éducation civique.

Seul le point iii) me semble de nature décontextualisée et donc indiscutable. En particulier, une des idées fortes du rapport SPSM est que l'introduction des probabilités dans le secondaire doit fortement contribuer à une formation à l'aléatoire et aux statistiques. Les auteurs proposent là encore plusieurs exemples pour illustrer leurs propos mais les visions différentes de la statistique qui sous-tendent ce rapport rendent le texte parfois contradictoire, les probabilités étant déclarées parfois comme indispensables et parfois inutiles, ce qui peut paraître un peu surprenant.

Pour expliquer ces apparentes contradictions, je rappellerai, comme le fait également L. Birgé lors de son intervention devant la commission, que le mot « statistique » recouvre lui-même au moins trois sens qu'il me semble fondamental de distinguer :

(a) la statistique en tant que « représentation et collecte de données ». C'est une phase complexe car elle mêle tant les définitions des objets, la constitution des catégories, les choix des nomenclatures qui vont déterminer le champ et les limites de l'analyse (la nature ontique de toute science), que la collecte, le nettoyage (le redressement, les repondérations) et le stockage de données d'expérience ou d'observations, qualitatives et/ou quantitatives.

(b) la statistique « exploratoire » ou « descriptive ». Elle travaille sur les données brutes pour essayer d'en dégager du sens, des structures, des régularités, des lois, etc.

(c) la statistique inférentielle reposant sur la notion de modèle probabiliste. Elle développe des outils mathématiques qui vont permettre de confronter un modèle scientifique et des hypothèses, aux données d'expérience ou d'observation, compte tenu de leur caractère supposé aléatoire.

Ceci explique en particulier pourquoi il existe tout un continuum de métiers de la statistique. Chacune de ces composantes de la statistique requiert des outils mathématiques spécifiques, mais contrairement à ce qu'affirme le rapport, la connaissance des probabilités me paraît indispensable dans ces trois aspects.

Les statistiques et les probabilités

En ce qui concerne a), il est rare que l'on dispose de données exhaustives pour étudier un phénomène : rappelons par exemple que même le recensement exhaustif de la population française (qui ne l'était pas tout à fait, puisque certaines catégories de personnes notamment les personnes sans domicile fixe lui échappaient) n'existe plus depuis cette année. Le premier travail du statisticien « appliqué » est de savoir comment les données sont construites (les définitions, concepts implicites ou explicites), constituées (collectées) et stockées ou de décider comment elles doivent l'être. Cette phase conceptuelle se révélera indispensable à toute interprétation postérieure. Les dérives que l'on a pu constater en analyse exploratoire viennent toujours du fait que cette étape n'est pas maîtrisée.

Les méthodes de planification (sondages, les plans d'expérience), le contrôle des biais de sélection, des censures (monnaie courante en médecine, toxicologie, économie, finance), les troncatures (très fréquentes en astronomie)[1], le contrôle des erreurs de mesure (voir dans les annexes) utilisent les probabilités. Comme le souligne plus tard le rapport, dans le chapitre sur la formation, les sondages sont minoritaires dans les enseignements d'école spécialisée comme l'ENSAE (École nationale de la statistique et de l'administration économique), mais sont surtout, en France, pratiquement absents de la recherche académique et même de la plupart des enseignements de statistiques.

Dans la confrontation des points b) et c), on entre dans ce qu'on appelle l'opposition des deux cultures statistiques, l'une qui serait probabiliste et l'autre pas, opposition que reflète d'ailleurs partiellement le rapport SPSM, dès son introduction. C'est un point qui me paraît discutable et somme toute assez secondaire vu les développements des méthodes statistiques dans les vingt dernières années. Même si l'on oublie complètement comment ont été constituées les données, les techniques exploratoires de données de très grande dimension (le fameux « data mining » ou « l'apprentissage statistique ») font appel aujourd'hui pour en comprendre le fonctionnement profond à des techniques mathématiques et probabilistes sophistiquées (inégalité de concentration, problèmes de transports de masse, théorie des processus empiriques dans des Banach non séparables, théorie de l'approximation non-linéaire). On peut aussi introduire des probabilités pour expliquer les techniques classiques d'analyse des données (analyse en composante principale, classification, etc.), on en comprend alors mieux les limites. Enfin, la statistique inférentielle c) est par nature probabiliste et utilise de nombreux outils mathématiques, souvent les mêmes d'ailleurs que ceux cités précédemment pour b).

---

[1] On parle de données censurées lorsque les données ne peuvent être observées entièrement, soit que le phénomène n'ait pu être observé dans son intégralité sur une période de temps (par exemple l'effet d'un traitement qui serait interrompu par le decès du patient), soit qu'il y ait des contraintes techniques empêchant cette observation (par exemple en toxicologie, il existe des limites, dépendant du matériel, des conditions de l'expérience, en dessous desquelles, il n'est plus possible de déterminer la quantité d'une substance chimique dans un corps). La censure (ici le temps, là la limite de détection) apporte néanmoins de l'information dont il faut tenir compte : éliminer les observations incomplètes peut s'avérer catastrophique pour l'interprétation. Dans la troncature, une partie de l'information est irrémédiablement perdue (par exemple si l'on envoie sur une étoile de nombreux signaux, et que seulement une petite partie de ces signaux revient). Les problèmes de censures, de données incomplètes et leur prise en compte pratique ont donné lieu à d'importantes recherches méthodologiques dans les vingt dernières années.

Le véritable dénominateur des différentes formes de la statistique me semble donc bien être les probabilités. Introduire et développer l'enseignement des probabilités dès le secondaire, c'est déjà faire un grand pas dans la formation à l'aléatoire et ne peut que fortement contribuer au développement de la statistique. Par ailleurs, les statistiques font appel à un bagage mathématique de base. L'exemple 3 donné page 58 sur l'importance de la vision géométrique me semble en particulier important, parce qu'il est aussi commun à b) et c) (et même à a), les techniques de redressement pouvant s'interpréter comme des méthodes de projections). Les notions d'espace vectoriel, d'espace de Hilbert, de projections orthogonales ou le théorème de Pythagore sont indispensables pour faire comprendre la statistique sous toutes ses formes, l'analyse exploratoire, la régression, les séries temporelles, l'estimation semi-paramétrique, les problèmes inverses etc... Cependant, contrairement à ce que conclut ce paragraphe page 58 (en contradiction flagrante avec son introduction), je pense que ce bagage fondamental, que peut seul apporter un enseignement solide des mathématiques en secondaire, est indispensable à tout statisticien théoricien ou appliqué et me semble dans une certaine mesure plus important que l'introduction des histogrammes ou des boîtes à moustaches dans le secondaire.

Statistiques et champs disciplinaires

Comme le souligne le rapport, l'apprentissage de l'informatique et de la simulation peuvent également contribuer à familiariser les étudiants avec l'aléatoire. Une formation initiale à la statistique par « l'expérimentation informatique » qui ne nécessite finalement que peu de bagage théorique pourrait se faire dès le collège. Le chapitre sur la formation dans le secondaire propose quelques pistes pour relier l'enseignement des statistiques aux vécus des étudiants. Dans cet apprentissage de la statistique, l'informatique est un outil remarquable qui permet de voir et d'entendre, souvent sous une forme ludique. Au-delà de l'apprentissage, notons par ailleurs que les modes de stockage optimaux (hiérarchiques ou non) qui dépendent de la taille des données observées sont généralement du ressort de l'informatique (avec ses propres outils mathématiques) mais peuvent également avoir un impact non négligeable sur le choix des méthodes statistiques à mettre en œuvre, en raison des contraintes qu'elles imposent (traitement en temps réel ou pas par exemple). On lira à ce sujet le chapitre « Statistique et informatique : la nouvelle convergence » du rapport de l'Académie des sciences.

Cependant, il y a là une dérive possible, qui est patente dans les réformes des enseignements actuels. Vouloir faire des statistiques (ou des mathématiques) « une science expérimentale » sous le prétexte que les statistiques et les mathématiques sont utiles aux sciences expérimentales, c'est tout confondre. L'outil informatique peut aussi donner des intuitions fausses et brider l'imagination (Einstein n'avait pas d'ordinateur et si le modèle de la relativité générale n'a pas été construit en aveugle, il a fallu un certain temps avant d'avoir des données qui permettent de le tester... Cela pour rappeler qu'on peut aussi construire des modèles peu intuitifs et extrêmement porteurs sans données ni simulations). Le rapport insiste à juste titre sur le fait que les statistiques utilisent l'ordinateur mais que l'informatique n'est qu'un outil privilégié ne pouvant en aucun cas se substituer à la compréhension des concepts sous-jacents. Je doute même, comme il est dit page 66, qu'il puisse permettre « d'appréhender la nature des preuves statistiques ». Travaillant depuis de nombreuses années sur une méthode, « le bootstrap » qui utilise l'ordinateur de manière intensive, je peux en témoigner et montrer à ceux qui en douteraient encore, que la preuve statistique et mathématique peut être en totale contradiction avec ce que montre l'ordinateur.

Le rapport insiste, à juste titre, sur ce que peut avoir d'enrichissant le contact entre les mathématiques et les autres sciences. Les exemples retenus bien qu'intéressants et révélateurs, me paraissent souvent peu attrayants. Si le but est de sensibiliser des adolescents avec la statistique et les probabilités, pourquoi ne pas plutôt évoquer les problèmes statistiques liés au génome, aux interrogations de sites web et aux files d'attente, à l'image ou au traitement du signal (déconvolution, codage, compression, reconnaissance de forme) ou l'évaluation et la gestion des risques (environnementaux — OGM —, alimentaires, financiers), qui ont actuellement des répercutions médicales, techniques et parfois éthiques considérables ?

Dans l'intéressant chapitre sur la géométrie, la commission souligne l'importance des arts graphiques dans la perception géométrique. On peut en statistique et en probabilités, en trouver une analogie dans celui de la musique, art de la combinatoire s'il en est ou la poésie (cf. Mille Milliards de poèmes de Queneau et l'Oulipo). De nombreux musiciens, depuis Mozart (voir les fameux menuets K294d qui utilisent des matrices de transition et d'anachroniques chaînes de Markov) jusqu'aux compositeurs contemporains, J. Cage ou Xenaxis, ont eu recours à l'aléatoire dans leurs œuvres. Expliquer comment les probabilités peuvent également jouer un rôle dans les arts, comment des techniques de « sampling », de nettoyage de bande son, de codage en mp3 ou en divx sont directement liés à des problèmes de probabilités et statistiques, peut aussi susciter des discussions, des intérêts ou des vocations... et donner une image de la statistique plus vivante et contemporaine que « des pourcentages », « les colonnes de chiffres » ou des régressions douteuses[2]. Vouloir donner un sens critique aux citoyens vis-à-vis des statistiques et de toute science me semble important mais convaincre de l'utilité et de l'importance de ces techniques l'est au moins autant.

Formation à la modélisation ?

Plus que les techniques probabilistes et mathématiques, le point sans doute le plus difficile de la statistique et celui qui, à mon avis, pose le plus de problèmes au niveau de l'enseignement est celui de la *modélisation*. L'acte de modéliser est un acte qui requiert une connaissance profonde des phénomènes que l'on observe et nécessite de l'imagination. Il est difficile justement parce qu'il introduit la notion de la pertinence et de potentialité pour le domaine d'application, qui sont des notions

[2] Le mot « régression » vient des prétentions eugénistes de M. Galton, qui voulait montrer que la taille de la « race ouvrière » décroît de génération en génération et est vouée à la régression. Si le but est de démontrer qu'on peut faire n'importe quoi en statistique (comme dans toute science), cet exemple historique me semble plus intéressant. Ce n'est pas la technique qui est en cause dans l'exemple page 57 mais bien la pertinence de l'interprétation.

subjectives et non plus mathématiques. Je pense que seul un enseignement contextualisé à un niveau supérieur peut permettre de réellement développer cette faculté, ne serait-ce que parce qu'elle nécessite de nombreux acquis dans des domaines très différents et un investissement total du champ d'application. Le rapport n'apporte malheureusement pas vraiment de solutions pour développer cette approche dans les cycles supérieurs et n'aborde que peu le problème de la modélisation, ce qui était déjà le cas du rapport de l'Académie des sciences.

Si l'on veut développer dans le secondaire cette faculté de modélisation, des exposés d'applications spécifiques en situation et des enseignements spécifiques peuvent y contribuer. La collaboration entre enseignants mathématiques et enseignants d'autres disciplines (physique, biologie, génétique, économie, philosophie) sous forme de cours communs serait sans doute encore plus intéressante mais actuellement difficilement envisageable au niveau national par la refonte totale du système qu'elle impliquerait. De telles collaborations constitueraient sans doute un exercice délicat, mais très formateur pour les élèves. De telles tentatives existent déjà dans les pays anglo-saxons, alors pourquoi cette perspective est-elle rarement évoquée en France ? Peut-être n'est-ce encore qu'une question de moyens accordés à l'éducation et aux enseignants ? Qui peut en France se charger de tels enseignements ? Le rapport évoque dans sa dernière partie la formation des professeurs impliqués par l'introduction des probabilités et des statistiques et évoque la formation des 60 000 professeurs, toutes matières confondues. On se demande dans le contexte actuel de pénurie d'enseignants et de chercheurs et même de professionnels de la statistique en France, qui pourrait bien enseigner à 60 000 personnes... Les statistiques et les probabilités ne s'enseignent pas en quinze jours. Si l'on ne commence pas d'abord à former des formateurs qui puissent assurer ce rôle, ce qui prendra, même avec des moyens suffisants un certain temps, il restera toujours l'autoformation...

Patrice Bertail, CREST-Laboratoire de Statistiques