

SOMMAIRE DU N° 86

Mot de la présidente	3
Vie de la société	3
TRIBUNE LIBRE	
Qualité de l'enseignement et libre accès à l'information, <i>J.-P. Demailly</i>	5
Commission 01 du Comité National, 1995-2000, <i>F. Ledrappier</i>	13
MATHÉMATIQUES	
Connaissez-vous le pendule ? <i>A. Chenciner</i>	21
MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE	
$\mathbb{K}$, objet du 3 ^e type, <i>F. Sergeraert</i>	29
MATHÉMATIQUES ET BIOLOGIE	
Utilisation des mathématiques en biologie, <i>P. Auger</i>	47
FRANCOPHONIE	
Introduction, <i>J.-J. Risler</i>	53
Francophonie mathématique et année mathématique mondiale, <i>B. Courteau</i>	54
Réseaux mathématiques et délocalisation de diplômes français, <i>C. Duhamel</i>	55
Francophonie Mathématique en Roumanie : Lumières et Ombres, <i>M. Iosifescu</i>	60
Les mathématiques dans les universités algériennes, <i>B. Benzaghoul</i>	64
Enseignement des Mathématiques à l'université tunisienne, <i>H. Ouerdiane</i>	65
Afrique : Que fait le M.A.E. ? <i>C. Lobry</i>	67
Mathématiques au Cameroun, <i>D. Rékollé</i>	69
Place de la France dans les mathématiques vietnamiennes, <i>F. Pham</i>	70
HISTOIRE	
Musil, Perutz, Broch. Les mathématiques des écrivains viennois, <i>K. Sigmund</i>	73
La création de la SMF et la fabrication d'une périphérie mathématique, <i>H. Gispert</i>	81
ENSEIGNEMENT	
Université d'été à Poitiers : évolution des effectifs dans les filières scientifiques, <i>M. Déchamps</i> ..	89
Colloque EM 2000 sur l'enseignement des mathématiques, <i>M.-C. David</i>	91
Les Olympiades de mathématiques 2000, <i>J.-C. Novelli</i>	92
Est-il possible de parler de recherche en mathématiques ... <i>Z. Djadli, H. Pajot</i>	94
INFORMATIONS	
Congrès AMS/SMF : Lyon 2001	97
Prix Fermat 2001	97
Prix Fermat Junior	98
Communiqué de presse de la SMF et de la SMAI	99
Prix Wolf 2000	100
CARNET	
Serge Colombo (1911-2000)	101

COURRIERS DES LECTEURS	103
LIVRES	107

Dates limites de soumission des articles
pour parution dans le n^o 87 : 15 novembre 2000
pour parution dans le n^o 88 : 15 février 2001

Éditorial

Nathalie Hermellin, qui assurait, entre autres, le secrétariat ainsi que la mise en forme de la Gazette, a quitté la SMF pour un poste correspondant mieux à ses vœux. Nous la remercions vivement pour sa collaboration et lui souhaitons bonne chance pour la suite de son activité professionnelle.

Une conséquence de ce départ est le retard avec lequel paraît ce volume 86 ; nous présentons à nos lecteurs nos excuses pour cet accident de publication. Il nous a fallu mettre en place une nouvelle logistique et c'est avec l'aide de Claire Ropartz et d'Antoine Chambert-Loir que nous avons bouclé ce numéro ; nous les en remercions chaleureusement et nous ferons tout notre possible pour que le numéro 87 paraisse à la période prévue, c'est-à-dire en janvier 2001.

Ce numéro 86 a pour le comité de rédaction, une valeur particulière ; il concrétise le souhait que nous avions d'explorer les zones d'interaction entre la Mathématique et les autres Sciences. Nous incluons dans ce numéro un article de biométrie écrit par Pierre Auger qui a rejoint notre comité de rédaction et un article de Francis Sergeraert que nous classons dans une nouvelle rubrique : Mathématiques et Informatique. Dans le numéro 87, nous publierons aussi, dans la nouvelle rubrique Mathématiques et Physique, dirigée par Bertrand Duplantier, un texte de physique théorique. Ces balbutiements d'ouverture visent à souligner le rôle joué par la Mathématique dans la culture scientifique, celui d'un langage commun ; ils visent aussi à montrer, qu'en retour, nos problématiques sont influencées par les autres sciences. Nous souhaitons, en conclusion, accréditer, modestement, l'idée d'une unité de la culture scientifique et technique, idée qui ne trouve malheureusement pas encore assez d'écho dans nos écoles et dans nos universités. L'ouverture vers les pays traditionnellement proches de la France est manifestée par le dossier sur la francophonie qui devrait connaître une suite dans le numéro 87. Nous espérons pouvoir informer régulièrement nos lecteurs des actions entreprises dans ces pays.

Gérard Besson

Mot de la présidente

Les mathématiques françaises ont été à l'honneur lors du troisième Congrès Européen de mathématiques qui s'est tenu à Barcelone début juillet : sur la liste des dix jeunes chercheurs (moins de 32 ans) qui ont reçu un des prix décernés par la Société Mathématique Européenne figurent cinq représentants de l'école mathématique française : Raphaël Cerf, Emmanuel Grenier, Vincent Lafforgue, Paul Seidel et Wendelin Werner.

Dans le passé, l'excellence de notre école mathématique et sa reconnaissance au niveau international se sont manifestées notamment par le nombre de Médailles Fields obtenues. Ces nouvelles récompenses montrent que l'on trouve aussi, dans les générations les plus jeunes, des chercheurs d'une qualité exceptionnelle et que la France mathématique continue à se placer aux toutes premières places dans la compétition internationale, ce dont nous nous réjouissons.

La SMF et la SMAI vont fêter cet événement le 9 novembre à l'IHP en compagnie des lauréats, qui auront l'occasion de parler de leurs motivations et de leurs expériences. Vous êtes tous cordialement invités à y participer.

J'avais souhaité il y a un an que la progression du nombre d'adhérents de notre société se poursuive et que de manière symbolique, la SMF fête son 2000ème adhérent en l'an 2000. La progression se poursuit effectivement (1911 en 1999, plus de 1950 aujourd'hui), et, même s'il ne sera pas atteint cette année, le but des 2000 adhérents ne semble plus très éloigné.

Comme vous l'avez sans doute lu dans les derniers rapports moraux, le premier congrès organisé conjointement par l'AMS et la SMF aura lieu en à l'ENS de Lyon du 17 au 20 juillet 2001. Vous trouverez tous les renseignements concernant ce congrès sur le serveur <http://smf.emath.fr/>.

Mireille Martin-Deschamps

Vie de la société

Renouvellement du conseil

Les élections au conseil du 17 juin 2000 ont donné les résultats suivants : M. Waldschmidt (543 voix); A. Chambert-Loir (508 voix); P.-J. Cahen (502 voix); N. Bopp (480 voix); C. Bonnet (477 voix); J.-M. Schlenker (474 voix); A. Quéquiner-Mathieu (470 voix); B. Monthubert (442 voix). Le conseil est maintenant constitué, outre des nouveaux élus, de : Y. Achdou, J. Bellissard, N. Berline, P.-B. Cohen, B. Coupet, C. Deschamps, R. Di Cosmo, M. Herzlich, A. Jacquemard, E. Logak, M. Martin-Deschamps, M. Merle, J. Queyrut, G. Ruget, C. Sabbah, M. Vigué, A. Yger.

Élection du bureau et de la présidente

Le conseil s'est réuni le 18 juin et a réélu Mireille Martin-Deschamps présidente de la SMF. Le bureau est constitué de : Jean-Marc Schlenker (secrétaire), Alain Jacquemard (trésorier), Nicole Berline (vice-présidente, chargée de l'enseignement), Paul-Jean Cahen (vice-président, chargé de la cellule de Marseille), Claude Sabbah (vice-président, chargé des publications), Michel Waldschmidt (vice-président, chargé de la communication).

Assemblée générale

Elle a eu lieu à l'IHP le 17 juin 2000. Le rapport moral et le rapport financier ont été présentés et ont été adoptés à l'unanimité. Vous pouvez les trouver sur le serveur.

Le serveur de la SMF (<http://smf.emath.fr>)

Il est possible d'effectuer des commandes d'ouvrages publiés par la SMF, de s'inscrire à la SMF directement sur le serveur.

Joindre la SMF par courrier, ou courrier électronique

Tout le courrier doit être adressé, soit au secrétariat, soit aux membres du bureau, soit aux comités de rédaction des revues et publications, à l'adresse de la SMF : IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris cedex 05.

– Secrétariat général : (smf@dma.ens.fr),
Officiel : (officiel@dma.ens.fr), Gazette : (gazette@dma.ens.fr),
Claire Ropartz

– Secrétariat des publications
Astérisque, Bulletin et Mémoires, Panoramas & Synthèses, Revue d'histoire des mathématiques, Collections SMF
Nathalie Christiaën : christiae@dma.ens.fr

– Bureau :
Mireille Martin-Deschamps : smf@dma.ens.fr ou mmd@math.uvsq.fr
Jean-Marc Schlenker : jean-marc.schlenker@math.u-psud.fr
Alain Jacquemard : jacmar@u-bourgogne.fr
Nicole Berline : berline@math.polytechnique.fr
Paul-Jean Cahen : paul-jean.cahen@math.u-3mrs.fr
Claude Sabbah : sabbah@math.polytechnique.fr
Michel Waldschmidt : miw@math.jussieu.fr

Mireille Martin-Deschamps

Des enjeux décisifs pour les Sciences : qualité de l'enseignement et libre accès à l'information¹

Jean-Pierre Demailly (*Professeur à l'Université de Grenoble I*)

La communauté mathématique va devoir faire face à un certain nombre de défis qui lui sont posés par l'évolution rapide de la société contemporaine : évolutions sociales, technologiques et politiques, notamment. Je voudrais évoquer les principaux problèmes auxquels j'ai été confronté ces derniers temps comme enseignant-chercheur, mais aussi dans mes fonctions de rédacteur de revues scientifiques ou d'utilisateur des nouvelles technologies. Je crois qu'une réaction collective résolue est nécessaire pour faire face à ces problèmes, et pour peser le cas échéant sur des décisions politiques ou administratives prises par ignorance, pouvant compromettre le développement des mathématiques et de la science dans notre pays.

1. Enseignement, postes et recrutement des enseignants-chercheurs

Il n'est pas exagéré de dire que la situation de l'enseignement des mathématiques (et, par contre-coup, des autres sciences) est dans un état préoccupant. Nous observons tous que les étudiants de premier et second cycle souffrent de lacunes qui affectent profondément leurs connaissances, mais plus encore leur compréhension générale et le sens qu'ils sont capables de donner aux notions mathématiques. L'enseignement de toutes les sciences s'en trouve affecté ; à Grenoble par exemple, il y a une baisse importante du nombre d'étudiants qui s'orientent vers la Physique. Les pays voisins connaissent des problèmes similaires : pénurie de scientifiques et d'informaticiens en Allemagne [1], que les autorités tentent d'enrayer par l'immigration.

L'origine de ces problèmes se trouve sans aucun doute dans l'organisation des filières d'enseignement et des programmes à tous les niveaux : collège, lycée, université. Les réformes et les allègements successifs de programmes ont conduit à un important nivellement par le bas, à une réduction de la diversité des filières scientifiques (seconde indifférenciée, anciennes filières C, D et E regroupées en une unique filière S), et donc en définitive à une réduction de l'adaptabilité du système éducatif face à des populations d'élèves plus nombreuses et plus hétérogènes. La rapidité des changements n'a presque jamais permis d'amortir les « oscillations » dues aux changements, ou d'effectuer les mises au point nécessaires après un temps d'expérimentation et de maturation suffisant.

Les réactions sont aujourd'hui nombreuses. Des pétitions circulent parmi les enseignants du secondaire pour dénoncer les effets nocifs des réformes (collectif « Sauvez les Maths » [2]). L'Académie des Sciences a ouvert une commission de réflexion

¹ Texte $\text{\TeX}$ saisi avec l'éditeur Emacs de Richard Stallman, sous GNU/Linux.

présidée par Jean-Pierre Kahane, et un débat mené à l'Académie des Sciences le 22 mai 2000 a montré que les représentants des autres sciences étaient unanimes pour réclamer un enseignement des mathématiques plus solide, avec la réintroduction de l'apprentissage du raisonnement (de fait presque totalement négligé aujourd'hui dans l'enseignement secondaire...). Les syndicats, SNES en tête, se soucient de la situation. Le SNES m'a convié à rédiger un article à l'occasion de la publication de son magazine syndical de rentrée (US Magazine n° 527 de Septembre 2000, [3]), et va organiser un débat national consacré au problème de l'enseignement des mathématiques. Des journaux scientifiques grand public comme Sciences et Avenir s'émeuvent [4].

Le départ de Claude Allègre en mars dernier a pu être ressenti comme un soulagement par beaucoup de mathématiciens², mais malheureusement aucun des problèmes posés n'a été réglé par son départ : les programmes proposés par l'ancienne équipe ministérielle, jugés néfastes ou désastreux par beaucoup d'acteurs sur le terrain, sont bel et bien en place à la rentrée 2000. Le Ministre avait jugé que les Mathématiques étaient déchues de leur place de science d'utilité générale, et des décisions ont donc été prises pour réduire graduellement le nombre de postes publiés en mathématiques dans l'enseignement supérieur, réduction déjà extrêmement sensible en 1999/2000. La logique était simple (simpliste ?) : les mathématiques ne sont plus vraiment utiles, il faut donc les réduire dans l'enseignement secondaire ; les professeurs de mathématiques vont être en surnombre, il faut donc décourager les étudiants à s'engager dans la voie des mathématiques et ne plus recruter d'enseignants-chercheurs. Tout ceci était assez clair, au moins en filigrane, dans les propos du Ministre [6].

Comment a-t-on pu en arriver là ? Il est probable que le monde politique a une très mauvaise perception des enjeux scientifiques contemporains et de l'importance des mathématiques pour les autres sciences. Cette mauvaise perception, qui est celle de la société dans son ensemble³, semble avoir infiltré jusqu'à l'inspection générale et certains scientifiques qui ont exercé un rôle de conseil auprès des ministres successifs. Mais sans doute en sommes-nous responsables aussi collectivement. Il me paraît urgent que les mathématiciens fassent taire leurs divergences et appellent clairement à une revalorisation générale de l'enseignement, et une renaissance de l'enseignement des mathématiques en particulier. Il est vrai que la situation de pénurie – faiblesse des horaires d'enseignement – n'a pu que raviver les tensions et les désaccords ; chacun jugeant à bon droit que sa sous-discipline n'était pas assez représentée dans les filières d'enseignement. La pression ressentie au niveau des horaires est une conséquence directe du fait que la filière scientifique générale a beaucoup perdu de sa souplesse d'antan. Il est clair, par exemple, que les besoins en mathématiques des étudiants qui veulent s'orienter vers les sciences bio-médicales ou vers les sciences « de la matière » (math, physique, mécanique, informatique...) sont assez différents. Ces besoins ne peuvent pas être correctement adressés dans leur diversité par une unique filière

² J'étais de ceux-là, voir [5].

³ Voilà ce qu'écrit cependant un écrivain comme René Barjavel : « Considérons, par exemple la science la plus universelle, la plus indiscutable, celle qu'on ne peut absolument pas mettre en doute : la science mathématiques (en italique dans le texte). Eh bien, qui connaît toute les maths, jusqu'à la trente millième décimales de pi et à la quadrature du cercle n'en sait pas long. Les maths ne sont pas une connaissance mais un langage qui permet d'aborder et de fouiller les autres sciences et même de formuler l'inimaginable. C'est un outil universel, le plus précieux de ceux qui ont permis à l'homme de se fabriquer ce que la nature lui avait refusé. » *Demain le Paradis*, 1986.

scientifique, sauf à accepter, par exemple, de niveler les exigences à la fois en biologie et en mathématiques. La diversité permettrait sans doute de retrouver de bien meilleures conditions pour enseigner les mathématiques sous des formes variées, cohérentes en fonction des objectifs poursuivis. Il faut, en tout état de cause, revaloriser substantiellement les contenus et les horaires de mathématiques dans la ou les filières qui s'occuperont de sciences de la matière. Ceci, dès la Seconde, pour ne pas faire perdre comme aujourd'hui une année entière aux élèves, avec des horaires de misère⁴.

2. Nouvelles technologies et enseignement des mathématiques

Les conditions dans lesquelles l'« Informatique » et les NTIC (Nouvelles Technologies de l'Information et de la Communication) sont en train d'être introduites à l'école me font frémir. Ce n'est pas que je sois réfractaire à la technologie. Il se trouve que j'ai bricolé mes premiers « ordinateurs » (des assemblages de bouts de fils électriques...) vers l'âge de 12 ans. Un peu plus tard, je me suis beaucoup intéressé à la programmation, et j'ai écrit quelques dizaines de milliers de lignes de code, par exemple à l'occasion d'un enseignement de calcul numérique qui a abouti à la rédaction de mon livre sur les méthodes numériques pour les équations différentielles. J'ai aussi, plus récemment, contribué par du code à quelques programmes Unix assez répandus, et je suis en ce moment même responsable d'un site FTP qui maintient et offre une large panoplie de logiciels scientifiques et éducatifs en source libre [7].

Ce qui me fait frémir, c'est que l'« informatique » introduite dans les différents programmes d'enseignement se réduise très souvent à l'utilisation passive de techniques ou de programmes tout prêts, qui n'apportent pas nécessairement en retour une amélioration de la compréhension des phénomènes étudiés. Un usage trop précoce et mal maîtrisé des calculettes peut empêcher ou retarder l'acquisition du sens des calculs, freiner l'agilité au calcul mental ou aux manipulations algébriques. Le handicap de nos étudiants dans ces domaines est patent, et il est souvent paralysant pour l'exercice quotidien des mathématiques à un niveau élémentaire comme à un niveau plus avancé.

Nous subissons actuellement un matraquage médiatique intense de la part de quelques grandes sociétés qui veulent absolument imposer leurs matériels ou leurs logiciels, quelles qu'en soient les vertus pédagogiques ou éducatives. Lorsque le matraquage porte sur la lessive, ce n'est pas bien grave, mais lorsqu'il porte sur des questions relatives à Internet ou aux logiciels éducatifs, les enjeux pour l'Education Nationale sont énormes. Un des objectifs importants des sociétés commerciales est donc d'influencer les décideurs. Et, apparemment, ils sont sous influence... Nous-mêmes, mathématiciens, sommes sous influence (comme tous les autres citoyens), même si nous sommes peut-être des utilisateurs un peu moins passifs de ces technologies.

⁴ Le système des options actuellement en vigueur un peu partout, y compris à l'Université, est à mon avis un pis-aller. Rien ne garantit vraiment l'homogénéité des formations subies dans ces conditions. Les Travaux Personnels Encadrés, aux grandioses « objectifs interdisciplinaires », risquent aussi de n'être que poudre aux yeux. Les TPE ne sont pas clairement rattachés aux matières fondamentales, n'ont ni horaires ni programmes bien définis, et aucun mécanisme clair d'évaluation. Je me refuse donc à entrer dans la logique des responsables du Ministère qui incluent une fraction de TPE dans le décompte des horaires de Mathématiques.

Je voudrais prendre un exemple, qui sera sans doute familier à notre communauté : l'apprentissage du système de formatage $\text{T}_\text{E}\text{X}$. Avec $\text{T}_\text{E}\text{X}$ ou $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_\text{E}\text{X}$, il faut apprendre un « langage » qui possède une syntaxe précise, puis respecter cette syntaxe avec un peu de soin. Cela demande un petit effort, mais on est ensuite payé en retour par de superbes manuscrits, et surtout, par un niveau de contrôle élevé sur le texte qui est saisi. Au contraire, l'apprentissage d'un traitement de texte comme MS-Word a des vertus éducatives à peu près nulles : l'enjeu est ici simplement de repérer où Microsoft a bien voulu placer les principales icônes et quelles sont leurs fonctions (en général à peu près évidentes). L'utilisateur n'a guère de peine à apprendre l'usage du logiciel – qu'il aurait sûrement juste pu apprendre « sur le tas » le jour venu – mais il se trouve aspiré, souvent à son insu, dans une spirale qui va le conduire à devenir dépendant de logiciels dont il ne maîtrise absolument pas le fonctionnement interne ni les formats, susceptibles de changer à tout bout de champ en fonction des velléités commerciales de l'éditeur.

Malheureusement, je crois que les prétendus « enseignements d'informatique » ou « formations Internet » prévues pour les Collèges et Lycées risquent d'être pour l'essentiel des formations du deuxième type : utilisation passive de programmes – presque tous issus de sociétés monopolistes – qui seront évidemment ravies de s'attirer ainsi de nouveaux jeunes consommateurs en grand nombre. Cela peut éventuellement (?) convenir pour une formation au secrétariat avec une visée professionnelle à court terme, mais pas pour des étudiants qui voudraient ensuite faire de la science. Il y a quand même un nombre non négligeable de tels étudiants, surtout si on a l'objectif raisonnable de faire entrer dans cette catégorie les futurs professeurs de sciences. Si on ne veut pas aboutir à la situation [1] où l'Allemagne se trouve actuellement (et c'est sans doute déjà très tard...), il faudrait songer à former plus de gens qui aient une certaine compréhension des concepts informatiques de base, donc aussi de la logique élémentaire, du raisonnement par récurrence, des structures de données, etc. Beaucoup d'informaticiens émettent des thèses analogues, cf. par exemple le texte très instructif de *Bernard Lang [8]. Un objectif raisonnable et utile serait que les bacheliers scientifiques (au moins ceux de la voie que j'ai intitulée « sciences de la matière ») soient tous en mesure d'écrire des programmes de quelques lignes dans un langage de programmation de base, impliquant des boucles itératives, des tests conditionnels, etc, par exemple en relation avec des situations arithmétiques ou combinatoires simples, des problèmes de tri, etc. A nous autres mathématiciens, de peser pour que les choix faits dans la conception des programmes ne soient pas entièrement orthogonaux aux nécessités de l'apprentissage de la science.

Même dans l'enseignement supérieur, les choix informatiques qui ont été faits pour les programmes de classes préparatoires⁵ ou pour le programme de l'agrégation n'ont sans doute pas été suffisamment réfléchis. Ici encore, la tendance observée – qui cède à la facilité – est de privilégier l'apprentissage de logiciels de « haut niveau » – Maple étant le programme incontournable pratiquement imposé par les programmes. Certes, Maple est un logiciel performant pour effectuer du calcul symbolique et il est largement utilisé dans l'industrie. Il recentre cependant la formation à l'« informatique » dans une direction trop exclusivement tournée vers les mathématiques et les calculs,

⁵ Je renvoie au texte incisé [9] de Denis Monasse, Professeur de Mathématiques et d'Informatique en classe MP* au Lycée Louis-le-Grand pour un point de vue très clairvoyant sur cette question, ainsi que sur la place des Probabilités et Statistiques en classe prépa.

et a tendance à faire perdre à l'utilisateur tout contrôle sur ce qui se passe réellement dans la machine. Pour caricaturer un peu, plutôt que d'apprendre le fonctionnement et la programmation de l'algorithme d'Euclide, l'étudiant risque seulement d'apprendre à taper `gcd(32,18)`; ou commandes analogues⁶. Un autre désavantage majeur des logiciels comme Maple ou Mathematica est leur caractère commercial, qui rend en quelque sorte l'enseignement dépendant du choix d'une « marque spécifique » de logiciel. Tout ceci soulève de graves problèmes déontologiques, impliquant l'éthique de la connaissance, et sur lesquels je voudrais m'étendre avec plus de vigueur et de détails.

3. Une certaine conception de l'éthique de la connaissance

L'idée que des connaissances fondamentales puissent être accaparées par des sociétés privées pour leur seul profit (tout en barrant l'accès à ces connaissances – ou en « rançonnant » cet accès par le biais de la commercialisation) suscite à l'heure actuelle bien des interrogations et de forts mouvements d'opposition. On l'a vu à l'occasion des tentatives de prise de brevets sur le génome humain ; la réprobation a été si forte que les sociétés de biotechnologies concernées ont dû pour la plupart faire machine arrière.

D'une façon parallèle, nous avons assisté depuis environ deux décennies à une mainmise insidieuse d'un petit nombre de sociétés sur les technologies de l'information et de la communication. Insidieuse, parce que le phénomène a été très progressif, que les consommateurs y ont trouvé d'une certaine façon quelques échappatoires, et qu'on n'y pouvait de toutes façons pas grand chose à l'échelon individuel.

Nous n'y prenons pas vraiment garde, mais à l'heure actuelle une course féroce a lieu pour le contrôle de l'accès à l'information, via les banques de données, les systèmes de télévision par câbles ou par satellites, etc. Cela fait peut-être partie du jeu commercial normal pour les programmes de télévision, les données ludiques, les oeuvres musicales ou artistiques. Mais on entre dans des eaux troubles dès qu'un « contrôle » s'exerce pour limiter ou contraindre les données que l'utilisateur produit lui-même. Ainsi, aujourd'hui, beaucoup d'utilisateurs ne se rendent même pas compte que les textes qu'ils produisent avec leur traitement de texte MS-Word est encodé dans un format obscur et non documenté dont seul Microsoft possède l'algorithme de décodage ; ce format, de plus, change régulièrement tous les 2 ou 3 ans, de façon à obliger l'utilisateur à procéder à des mises à jour de son environnement propriétaire, dont il devient littéralement prisonnier.

Le même problème se pose avec l'usage de codes de calcul propriétaires comme Maple ou Mathematica – bien que les équipes de chercheurs et d'ingénieurs qui les produisent aient certainement en la circonstance des intentions moins pernicieuses. Supposons par exemple que nous utilisions Maple pour démontrer ou achever la vérification d'un théorème nécessitant des calculs très compliqués qui ne peuvent pas être faits à la main ou par d'autres moyens. Il y a là une rupture du contrat fondamental qui veut que les preuves mathématiques reposent sur des éléments vérifiables indépendamment par tous. Ici, un maillon essentiel de la preuve repose sur un calcul qui n'est

⁶ Il est vrai qu'on peut aussi faire des choses intelligentes avec Maple ! Cependant, presque toujours, ce sont des choses que l'on pourrait aussi bien faire – dans une perspective un peu plus large – avec des langages de programmation de base comme C ou C++, éventuellement augmentés de bibliothèques de fonctions mathématiques en source libre (de très nombreuses bibliothèques de ce type sont disponibles, voir [10], [12]).

pas vérifiable puisque le code source du programme utilisé n'est pas connu (il peut y avoir des bogues, des cas oubliés, etc). Il n'est pas non plus garanti que le logiciel commercial sera disponible sur une longue durée de temps. Ce problème s'est posé très concrètement pour un article soumis cette année à *Inventiones Mathematicae*, et l'article a dû être rejeté, essentiellement pour les motifs que j'ai évoqués.

Fort heureusement, la « révolte gronde » aujourd'hui et d'autres issues apparaissent. Richard Stallman, qui était alors chercheur au MIT, a lancé il y a une quinzaine d'années l'idée que les logiciels informatiques de base devaient être librement accessibles à tous, et ne jamais contraindre leurs utilisateurs. Dans la foulée, au milieu des années 1980, il crée la Free Software Foundation (FSF) – je ne sais pas si tous les mathématiciens le savent, mais une grande partie des logiciels tournant sur les systèmes Unix qui équipent nos départements de recherche sont issus du travail de la FSF (logiciels GNU [10], comme l'éditeur de textes Emacs). Plus récemment, on a assisté avec l'essor du système Linux [11] à la création de systèmes informatiques complets et très performants en source libre⁷. Linux compte aujourd'hui plus de 20 millions d'utilisateurs, et il est d'ores et déjà largement en tête sur le créneau des serveurs web du réseau Internet. Depuis un an, Linux a fait des percées considérables dans l'industrie et les systèmes embarqués (téléphones mobiles, terminaux d'accès, consoles de jeux...). Si l'évolution favorable constatée ces 2 ou 3 dernières années se poursuit encore quelques années, des pans entiers du secteur des technologies de l'information et de la communication vont se trouver « libérés »⁸. Il faut s'en réjouir, car la science ne peut se nourrir que d'une libre circulation de l'information – et l'informatique sera un maillon essentiel de la chaîne en ce début de millénaire⁹.

4. Accès aux données scientifiques

Nous avons pris l'habitude, depuis des décennies, de consulter les oeuvres de nos pairs et de nos prédécesseurs dans les grandes revues mathématiques ou scientifiques, et l'accès à ces travaux est en effet indispensable au développement de la science.

Pendant, depuis environ 10 ans, les modes de communication ont été bouleversés avec l'apparition du courrier électronique et des serveurs de données. Dans le même

⁷ Linux n'est que le plus répandu et le plus connu de ces systèmes. Il y en a d'autres, très similaires, comme FreeBSD, OpenBSD, NetBSD et peut-être d'autres encore. Ces systèmes sont développés grâce à un travail collaboratif des informaticiens et scientifiques impliqués, s'échangeant les codes informatiques via les serveurs et le courrier électronique. Les codes concernés sont en libre accès sur des sites se comptant par milliers, répartis dans tous les pays du monde. Chacun peut y contribuer en les testant, en les améliorant, ou tout simplement en les utilisant.

⁸ Si ce n'est pas encore fait, vous pouvez vous-même accélérer le processus en préférant systématiquement Linux aux systèmes propriétaires qui vous seraient proposés (on notera que les systèmes commerciaux dits alternatifs comme BeOS ou le futur MacOS X d'Apple sont en fait, si on regarde sous le capot, « pompés » sur BSD et GNU/Linux). Une fois passé le choc du changement d'habitudes et celui d'avoir à faire face à un outil puissant et intelligent, vous aurez un système pratiquement gratuit, plus fiable, plus performant, insensible aux virus et disposant d'à peu près tous les programmes dont vous pouvez rêver, par exemple par téléchargement direct sur Internet [11], [12], [13]...

⁹ La prise de conscience se développe dans de nombreux pays. Le Mexique a ainsi décidé de doter toutes ses écoles (soit tout de même 150 000 établissements...) de systèmes Linux [14]. La Chine Populaire vient de choisir Linux pour son appareil administratif, indépendance nationale oblige. La Maison Blanche vient d'émettre un rapport recommandant l'usage des logiciels libres pour les grosses applications scientifiques [15]. En France également, la situation évolue assez favorablement, entre autres grâce à l'action de l'AFUL [16].

temps, la communauté mathématique a adopté le standard $\text{T}_\text{E}\text{X}/\text{L}^\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$, et ceci a permis de créer des serveurs de prépublications qui couvrent maintenant presque tout le champ des mathématiques (le phénomène est parti du monde de la Physique, où il a sans doute atteint un niveau plus avancé encore).

De ce fait, nous nous trouvons aujourd'hui dans une situation paradoxale. Nous produisons des travaux qui sont de plus en plus souvent immédiatement accessibles à nos collègues dans un délai très court, mais à une certaine étape vient le moment de soumettre notre travail à une revue. Et là, au moment de la publication, il nous faut signer un document disant que nous cédon tous les droits de publication à la revue X. Moyennant quoi, cette revue X va se charger de publier l'article dans un fascicule imprimé, et en *revendre* quelques centaines d'exemplaires aux bibliothèques de mathématiques qui peuvent encore se les procurer (considérez par exemple les tarifs prohibitifs d'*Inventiones Mathematicae* pour voir de quoi je parle !). On ne peut même pas dire qu'on a gagné en qualité d'impression, puisque le plus souvent, on va se contenter de photocopier l'article dans la revue X, avec une qualité de reproduction aléatoire et très inférieure à ce qu'on obtient en imprimant directement le fichier source $\text{T}_\text{E}\text{X}$.

Bien sûr, la différence, peut-être, est que l'article de la revue X a été analysé et vérifié, alors que la prépublication électronique ne l'a pas été. Mais rien n'empêche la communauté mathématique de se « mettre à vivre » avec des revues purement électroniques, ayant les mêmes critères exigeants dans l'analyse des articles soumis¹⁰.

Le recours à des revues électroniques aurait l'énorme avantage de se prêter au fonctionnement systématique des moteurs de recherche, permettant ainsi de retrouver facilement des informations au milieu d'une masse de données en croissance exponentielle¹¹.

Je voudrais plaider ici pour des initiatives allant encore nettement plus loin. Pourquoi ne pas mettre en libre accès l'information déposée sur les serveurs des revues électroniques ? Certes, ces revues auront un coût de fonctionnement, mais vu le prix actuel de la technologie (lire ce qui précède), ce coût sera assez modeste et comportera essentiellement des frais de secrétariat et de maintenance informatique. Il serait certainement très inférieur à la somme cumulée du coût d'équipement des bibliothèques de mathématiques, dans le cas où l'accès serait payant. De plus, on s'épargnerait l'effort pénible (et le coût) d'avoir à exercer un contrôle policier sur qui télécharge quoi, et on permettrait aussi aux pays en voie de développement, par exemple (ou tout simplement aux chercheurs non membres des seuls départements scientifiques abonnés à la revue X) d'y avoir accès rapidement et sans efforts.

¹⁰ La pérennité de l'accès aux documents $\text{T}_\text{E}\text{X}/\text{L}^\text{A}\text{T}_\text{E}\text{X}$ est assurée pour une très longue durée, puisque ce sont des formats universels et entièrement documentés dont Donald Knuth a bien voulu faire don à l'humanité. Au besoin, il serait assez facile de convertir automatiquement les textes saisis en $\text{T}_\text{E}\text{X}$ dans de nouveaux formats – et cela sera de plus en plus facile à mesure que la puissance des processeurs augmente.

¹¹ Pour se convaincre que la technologie est au point, on peut par exemple essayer de faire des recherches sur <http://www.google.org> qui indexe le monde entier, soit plus d'un milliard de pages web. Quelle que soit l'information entrée, sa langue et son niveau de sophistication, on obtient en général en une fraction de seconde la localisation de l'information cherchée, et les premières lignes sont effectivement presque toujours les plus pertinentes possibles. Par parenthèse, Google fonctionne avec « une ferme » de systèmes Linux, et le site beaucoup plus commercial Yahoo !, qui était un peu à la traîne, vient d'acheter la technologie Google, espèces sonnantes et trébuchantes. Encouragez Google en le visitant plutôt que les autres moteurs de recherche. De toutes façons, c'est mieux, et vous n'aurez pas à subir un assaut de bannières commerciales !

Pour que cette idée puisse voir le jour, il faudrait un certain niveau de mobilisation et de consensus autour de ces questions, et obtenir des instances de tutelle qu'elles veuillent bien reconsidérer leur politique de financement, en reversant aux revues une petite partie des sommes qui étaient autrefois affectées à l'équipement des bibliothèques. (On peut imaginer ici que l'idée de réaliser à terme des économies sera plutôt vue d'un bon œil). D'un point de vue technique, il faudrait que la communauté mathématique s'assure de disposer en continu des compétences nécessaires pour la maintenance des systèmes informatiques, et de développer ou faire développer les plate-formes logicielles requises (pour éviter d'avoir à reproduire les mêmes efforts en plusieurs endroits). Ceci pourrait très bien se faire à l'échelle européenne.

Des obstacles légaux importants se posent en cours de route. Un bon nombre des grandes revues de Mathématiques sont la propriété d'éditeurs privés qui les contrôlent étroitement. C'est le cas pour *Inventiones* avec Springer, pour les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences avec Elsevier, pour les *Annales* de l'ENS avec Gauthier-Villars. Cependant, les éditeurs privés ont visiblement quelques difficultés à gérer ces revues, et la communauté scientifique serait sans doute bien inspirée d'en « profiter » pour essayer de reprendre le contrôle de ses publications.

Je crois qu'il y a là une relative urgence. Il y va aussi du rayonnement culturel et scientifique de notre pays et, plus largement, de la communauté européenne. Une évolution des mentalités est nécessaire au niveau administratif et politique – les scientifiques sont certainement en bonne posture pour exercer les pressions nécessaires, pourvu qu'ils aient conscience des enjeux. On constate déjà des évolutions sensibles aux Etats-Unis, l'AMS étant très active de ce point de vue, et il y a là-bas depuis longtemps une bien moins grande frilosité vis à vis de l'accès public aux données. Qu'on visite les sites de la NASA et de la NOAA (National Oceanic Atmospheric Administration), et on constatera qu'une grande quantité d'informations très intéressantes est en libre service¹². L'administration, le secteur Internet institutionnel devraient, suivant en cela les bons exemples évoqués plus haut plutôt que les mauvais, mettre la technologie au service du citoyen, et non pas le « rançonner » – même inconsciemment.

Références

- [1] Le Monde Informatique du 9 juin 2000, <http://www.lmi.fr/ENQUETES/2000/>, voir sous ce répertoire l'article 20000609-57-informaticiensetrangersbienvenueeneurope.htm
- [2] Sauvez les Maths, <http://www.multimania.com/sauvezlesmaths/>
- [3] Site du SNES, <http://www.snes.fr/>
- [4] Sciences et Avenir, <http://www.sciencesetavenir.com/comprendre/pg75.html>
- [5] J.-P. Demailly, cri d'alarme, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/programmes.html>
- [6] Élocubrations de C. Allègre, <http://www.lemonde.fr/article/0,2320,31922,00.html>
- [7] Site de logiciels libres éducatifs du CARMi-Internet Grenoble, <ftp://ftp.ac-grenoble.fr/ge>. Voir aussi <http://www.ac-grenoble.fr/carmi-internet/ge/liens.php>. Des CD-Roms devraient être prochainement disponibles sur l'initiative du CNDP.
- [8] Bernard Lang, <http://pauillac.inria.fr/~lang/ecrits/ailf/>
- [9] Denis Monasse, Déstabilisation des programmes, <http://www.multimania.com/sauvezlesmaths/Textes/SMFTribunelibre3a.rtf>
- [10] Logiciels GNU de la FSF, <http://www.gnu.org/>

¹² En France, par contre, il n'est même pas possible de se procurer des cartes géographiques à petite échelle du pays sans tomber sur l'icône : « carte bancaire » – cf. le site de l'IGN : <http://www.ign.fr>, dont je ne partage pas l'auto-glorification proclamée. Il m'a fallu aller sur un site américain pour trouver une carte décente de la région grenobloise. Qu'est devenu l'idéal républicain d'instruction laïque et gratuite ?

- [11] Linux, <http://www.linux.org/>
- [12] Applications scientifiques sous Linux, <http://www-sor.inria.fr/mirrors/sal/index.shtml>
- [13] Site d'annonces Freshmeat, <http://freshmeat.net> (environ 50 nouvelles annonces par jour...)
- [14] Initiative Red Escolar au Mexique, <http://redesc.linux.org.mx/>
- [15] Rapport PITAC de la Maison Blanche, <http://www.fcw.com/fcw/articles/2000/0918/web-open-09-18-00.asp>
- [16] Association Française des Utilisateurs de Linux et des Logiciels Libres, <http://www.aful.org>

Commission 01 du Comité National, 1995-2000

François Ledrappier

Le Comité National de la Recherche Scientifique achève un mandat de cinq ans, et je voudrais présenter ici un bilan du fonctionnement de la section 01, « Mathématiques et outils de modélisation », que j'ai présidée pendant ces cinq ans. Ce bilan s'adresse à nos successeurs mais aussi à la communauté mathématique que nous avons tenté de représenter. Il est présenté en quatre rubriques, qui correspondent à nos activités : les carrières et les chercheurs, les entrées et les accueils, la contractualisation et l'évaluation, la vie de la discipline et du CNRS. Profitant de cette tribune, je ferai part de plusieurs réactions personnelles sur des points particuliers. Ces remarques ne reflètent pas forcément l'avis des autres membres de la commission.

Je commence par le plus pénible, ce qui laisse un sentiment amer d'échec et de gâchis : la gestion des carrières des chercheurs, ou plutôt de leur absence de carrière. Le passage au grade de Directeur de Recherches en particulier est dramatique. Chaque année les retards s'accumulent, l'âge moyen augmente. Des chercheurs de talent, de réputation mondiale, qui se voient confier des responsabilités internationales de haut niveau comme rédacteur associé ou organisateur de colloques, sont reconnus par tout le monde sauf par leur propre institution. Ce n'est pas une question budgétaire : l'incidence de ces promotions est minime ; il y a une volonté politique de décourager les chercheurs en mathématiques. Chaque année, leur interaction avec leur maison, c'est préparer un dossier et trois mois d'attente pour recevoir une claque. Nous avons tenté de lisser et de partager les coups, mais ce n'est pas possible, et si j'assume nos choix, je sais bien que d'autres listes auraient pu sortir avec les mêmes critères. Il y a eu 25 promotions DR2. Pour revenir à un rythme normal où un chercheur reconnu comme un leader international devient Directeur entre 33 et 40 ans, en supposant que les départs vers l'Université continuent au même rythme (environ 8 par an en moyenne), il faut 10 postes chacune des quatre prochaines années. Il sera ensuite possible de parler de gestion des carrières, mais pour l'instant, c'est obscène.

Pour le chercheur, la promotion DR est une reconnaissance, mais c'est la promotion au grade de DR1 qui peut lui assurer un niveau de vie de cadre moyen. Là, le problème est le même dans toutes les sections, surtout que les autres n'ont pas toutes le bouchon d'asphyxie du passage DR2. Après pétitions, démarches diverses, il paraît que c'est au niveau du ministre que le rapport global # DR1 / # DR2 peut être modifié. On l'a dit au nouveau ministre. Il n'a rien promis. On verra. Pour les quelques postes qu'il y a, la répartition se fait au niveau du département SPM, où les mathématiciens, amalgamés

‘théoriciens’ avec la section 02, sont minoritaires. Si le représentant de la 01 est écouté avec bienveillance et intérêt, il a du mal à faire passer ces sentiments dans les votes. Le bilan est convenable dans ce contexte pour la promotion DR1 (8), il l’est beaucoup moins pour la promotion à la classe exceptionnelle (2), où nous avons présenté en vain des chercheurs vraiment exceptionnels. Ces questions de carrière sont vraiment très pénibles, d’autant plus que la Direction Scientifique précédente les rejetait, les raillait comme des revendications syndicales de routine. Non, il s’agit de la dignité des gens, et il est ulcérant de voir comment elle est traitée. Dans la plupart des institutions, publiques ou privées, la hiérarchie administrative défend ses hommes de terrain, se fait valoir en soulignant leur réussites. En mathématiques, la tradition est, semble-t-il, de traquer les insuffisances et de décourager ceux qui réussissent.

La gestion des carrières comprend aussi celle des chercheurs en situation d’échec ou de demi-échec. Très peu nombreux, ils ont fait l’objet de longues discussions, nous les avons rencontrés et nous avons tenté de les aider à gérer leur situation. D’abord, je considère que l’échec fait partie de la recherche : le risque de se tromper, de prendre la mauvaise voie est bien sûr ce qui fait le prix de la découverte. Le tout est de savoir repartir dans d’autres directions, faire autre chose pendant quelque temps. Le milieu mathématique est souvent sans pitié et il aide mal à rebondir. L’institution CNRS a fait un effort avec les entretiens-chercheurs systématiques. C’est quand même paradoxal qu’elle demande aux plus fragiles de se prendre en main, et qu’elle n’en donne pas la possibilité aux meilleurs !

Une note positive : nous avons, avec une ténacité qui frisait l’acharnement, traqué l’hypothétique faux-chercheur qui ne ferait que toucher son salaire. Nous n’avons rien pu prouver. Enfin, quelques chiffres : Il y a aujourd’hui 231 CR (dont 45 femmes), 163 (27) le sont depuis moins de 10 ans, 216 (42) depuis moins de 20 ans. Il y a en outre 82 DR2 (11), 30 DR1 (4), et 8 DRCE (1).

La mission la plus importante de la commission et sa responsabilité la plus lourde est le jury d’entrée au CNRS. Le jury a tenté de fonctionner par consensus, d’arriver à une liste qui bien sûr n’était la liste idéale de personne mais qui sortait d’un véritable débat scientifique. Nous avons sûrement été injustes parfois, mais ce serait dû à des erreurs d’appréciations et pas à des manœuvres. Je suis peut-être naïf, mais je n’ai pas senti fonctionner de coalition contre-nature, de coups tordus ou d’obstruction systématique. L’ambiance était studieuse et cordiale. Un mot sur les lobbies : la SMAI a tenté une fois une démarche auprès de la Direction Générale qui n’a bien sûr pas donné suite. C’est quand même dangereux car une direction moins saine aurait pu en tirer parti pour affaiblir les mathématiques. Quant aux autres lobbies fantasmagiques, ici comme ailleurs, les évoquer en dit plus sur celui qui profère l’accusation que sur la réalité.

Le geste politique principal est la déclaration de postes. Pour les CR2, chaque année, environ 20% des postes étaient fléchés ‘applications des mathématiques’ et parfois un ‘modélisation’. En accord avec la DS, nous avons interprété le premier intitulé de façon large, envisageant toutes les applications des mathématiques. Nous avons pris comme règle d’examiner tous les candidats ensemble et de tenter d’avoir des niveaux d’exigence comparables. Le fléchage est utile en ce sens qu’il nous fait prendre en compte d’autres critères que ceux internes aux mathématiques, sans oublier évidemment que nous recrutons des mathématiciens. Le premier passage en revue des

150 candidats est à la fois enthousiasmant par la diversité des thèmes, la richesse et la qualité des résultats, et frustrant, car nous n'avons pas le temps de nous attarder autant que nous le voudrions. Avoir à lire une douzaine de dossiers en y cherchant les arguments pour défendre le candidat est une des tâches les plus gratifiantes de notre mandat. Malheureusement, après, il faut choisir. Le niveau de recrutement est excellent, comparable à une offre de "tenure-track" dans les toutes meilleures universités américaines. Ce n'est pas étonnant, vu le faible nombre de postes. Là encore, le DSA s'est satisfait des diminutions régulières : nous sommes passés de 16 postes CR2 en 96 à 10 en 2000. C'est une vision cohérente du rôle du CNRS en maths : proposer à quelques superpremiers de classe une bourse de post-doc un peu confortable. C'est la vision des années 50/60 (même affublée du chapeau CNRS-Avenir !) correspondant à une époque où les maths actives représentaient un noyau concentré sur quelques thèmes. La remettre en selle aujourd'hui conduira rapidement au dessèchement des maths dans notre pays et notre mandature risque de rester comme celle du début du déclin.

Nous n'avons pas de contrôle sur les affectations et, en général, l'administration n'en fait qu'à sa tête. On nous demande souvent de 'donner' un chercheur ici ou là, mais ce n'est pas du tout en ces termes que la question se pose. Les chercheurs que nous recrutons sont bourrés de talent, mais sont des chercheurs débutants. Ils doivent être mis dans les meilleures conditions et c'est principalement en fonction de leur recherche que nous recommandons leur affectation. Deux remarques. Nous pensons qu'une de ces bonnes conditions est de se retrouver dans un autre environnement que celui de sa thèse, en général. L'autre remarque est que rien n'empêche les labos eux-mêmes de tenter d'attirer les candidats retenus. La question n'est plus alors pourquoi tel labo voudrait un chercheur de plus, mais pourquoi tel jeune chercheur juste recruté pourrait vouloir venir ici. Sur les 69 (seulement, oui, dont seulement 8 femmes) CR2 ou CR1 que nous avons recrutés, en considérant l'affectation d'aujourd'hui, la répartition est 28 à Chevaleret-ENS-Orsay-Polytechnique, 28 en Province (13 lieux concernés avec 6 chercheurs à Nice-Sofia, 3 à Lyon, Marseille, Toulouse et Strasbourg), et 11 dans les autres structures parisiennes (deux sont partis Professeurs).

La politique du CNRS s'exerce aussi par les autres postes déclarés, sur lesquels je dirai quelques mots. Nous avons profité chaque année d'un poste de CR1. Il y a une population de chercheurs non débutants sans poste permanent, et ce poste nous a permis d'attirer plusieurs chercheurs de très bon niveau. Nous avons pris comme règle d'examiner les candidatures en même temps que celles de CR2, ce qui nous a conduits en 1999 à ne pas pourvoir le poste CR1 et préférer recruter un CR2 supplémentaire. Nous avons aussi recruté 5 excellents DR2 extérieurs. Ce poste est très convoité et attire chaque année des candidatures de très haute volée. Il permet de faire venir en France des chercheurs reconnus, avec des compétences nouvelles que nous jugeons importantes. La possibilité d'accueil du labo, et la préparation de cette venue sont importantes. Nous avons eu enfin à débattre d'un certain nombre de postes mis sur deux commissions. Cette initiative de la Direction Générale visait à renforcer l'interdisciplinarité au CNRS. L'intention est louable, mais la démarche nous a paru parfois trop volontariste. Pour avoir de très bons chercheurs débutants sur un sujet multidisciplinaire, il faut des formations doctorales de qualité et c'est là peut-être que l'action du CNRS serait la plus efficace en suscitant de l'activité autour d'un sujet jugé prioritaire : GdR, colloques, invitations de spécialistes, orientation de chercheurs confirmés.

Cela formerait des chercheurs que le CNRS pourrait accueillir sur ces niches en attendant que le sujet soit adulte et trouve sa place tout seul. Sans cette préparation, nous n'avions qu'un ou deux candidats d'excellence comparable à celle des candidats que nous voulions retenir sur les autres concours CR2 (parfois aucun, en ce cas nous n'avons déclaré personne admissible). Ces chercheurs débutants se retrouvent avec une lourde responsabilité.

L'autre forme d'accueil au CNRS est le détachement et la délégation. Nous n'avons pas eu à décider de détachement de longue durée, car la pression étant très forte, nous avons tenté de répartir le plus possible l'accès à cette possibilité. Il y a toutes sortes de bonnes raisons pour demander une ou plusieurs années au CNRS. Celles auxquelles nous avons été le plus sensibles sont pour les Professeurs, un nouveau projet de recherches, ou une relance de la recherche au sortir de lourdes responsabilités administratives, pour les Maîtres de Conférences de permettre la rédaction et la mise au point de l'habilitation. Le nombre de places a été très fluctuant (il est passé de 8 en 1996 à 25 en 1999 et 33 en 2000) car il dépend de budgets variables et, s'il faut multiplier ces années CNRS, réussies pour la plupart, c'est très gênant de le faire dans un cadre aussi peu sûr. Au-delà, chacun est bien d'accord qu'il faudrait beaucoup plus de souplesse dans l'articulation entre les deux manières d'être mathématicien, chercheur à plein temps et enseignant-chercheur. Pour y arriver sans que les mathématiques n'y perdent, on peut envisager un faisceau de mesures : multiplier les offres de délégation et de détachement (la qualité des demandes le justifie aisément), inversement, pour combler les besoins d'enseignement ainsi créés, inciter les chercheurs à enseigner (par exemple par une prime comparable à la PED), ouvrir les postes de DR2 aux MdeC et aux PR (ce n'est raisonnablement envisageable qu'une fois le bouchon actuel disparu), ouvrir un certain nombre de postes PR1, PRCE au concours entre chercheurs, PR, candidats étrangers. Tout cela n'a pas un coût global très élevé et peut améliorer l'efficacité de tous.

La dernière forme d'accueil, très importante pour la vie de la recherche, consiste en les postes provisoires ('roses' ou 'rouges') pour chercheurs étrangers, dont la gestion échappait totalement au CN. Le nouveau DSA semble vouloir apporter plus de transparence dans le choix et l'attribution de ces postes, supprimant ainsi un sujet de friction récurrent.

Du point de vue administratif, la grande affaire de ces cinq années a été la contractualisation. Ce mot affreux désigne un ensemble de procédures qui doit aboutir à la signature d'un contrat entre le ministère, le CNRS, et un organisme, en général une université, précisant la gestion et les objectifs d'unités 'mixtes' de recherches. Je n'ai pas bien compris la règle du jeu, cela paraît une de ces constructions absurdes dont notre pays a le secret, mais la direction scientifique a été bien occupée par ces négociations et y a apparemment pris goût. Le rôle du CN est celui d'expert scientifique et d'évaluation. Plus précisément, un comité d'évaluation formé d'experts extérieurs et d'un membre du CN remet un rapport sur le labo, qui est public, et le CN, au vu de ce rapport, de sa propre évaluation et de la comparaison qu'il peut faire entre les différents labos de la discipline émet un rapport et des recommandations qui sont suivies ou non. Concrètement pour le labo, il s'agit de fournir un rapport d'activité, un rapport intermédiaire 'à deux ans', et d'organiser la ou les journées du comité d'évaluation. Je passe sur le rapport 'à deux ans' qui, s'il n'y a pas de problème particulier, ne doit pas

dépasser 15/20 pages. Le rapport d'activité est examiné par des gens qui ont toutes sortes de différentes lectures. Il faut rassembler pas mal de données, bien sûr pas les mêmes que pour les autres rapports, ou si ce sont les mêmes, pas présentées de la même manière ; il faut relancer un par un les membres du labo pour obtenir listes de publications, rapports individuels, d'équipe, invitations, voyages, contrats, séminaires, que sais-je encore. Pour les petits labos, qui en maths souvent manquent de personnel administratif, cela peut tourner au cauchemar. Pour les gros labos, il y a un réel travail d'organisation et de présentation de toutes ces données, de quoi occuper un gestionnaire pendant pas mal de temps. Tout cela aboutit à un gros rapport d'activité et à une journée de fête où le labo est évalué par le comité d'évaluation. Ce comité est choisi par l'ensemble des partenaires comme supercompétents et a priori ni complaisants, ni hostiles. Il produit un rapport qui, quoiqu'on fasse, ne peut être que fort convenu. Il y a plusieurs aspects positifs de tout ce cirque :

- La préparation du rapport et la journée d'évaluation peut être une occasion pour le labo de retrouver une certaine identité collective, que chacun sache ce que les autres font, en tout cas que chacun consacre un peu de temps et de souci à l'idée qu'il se fait du labo.
- Toute la procédure met l'accent sur la qualité de la recherche. Cela met en général en valeur le département de maths, souvent marginalisé dans la gestion de l'Université.
- Dans le même ordre d'idées, les objectifs recherche sont mieux exprimés et peuvent être mieux pris en compte dans la vie du département, les recrutements, etc...
- C'est une des seules structures où les thésards et les post-docs existent.
- La procédure assure une plus grande transparence interne sur le fonctionnement du labo, l'utilisation des fonds, les contrats, etc...
- Elle assure aussi une plus grande transparence externe, le CN pouvant comparer et dénoncer les abus d'une des trois tutelles.
- En cas de projet lourd (nouveau bâtiment, désamiantage, etc...), il est efficace et utile que le maître d'œuvre ait un interlocuteur cohérent.
- Enfin, en cas de conflit "clochemerlesque" (et il y en a), la présence des trois tutelles et d'observateurs extérieurs permet parfois de faire évoluer la situation.

Qu'on le veuille ou non, la recherche mathématique a un fort aspect collectif aujourd'hui et l'organisation de cette vie collective, même dans un cadre extravagant est une des garanties de la qualité de la recherche.

Les mathématiques vont bien. De grandes conjectures progressent, des théorèmes majeurs sont démontrés et ils ouvrent des voies nouvelles, les recherches les plus pointues interagissent avec d'autres domaines des mathématiques, des objets sophistiqués ont des applications directes, le besoin de modélisation est immense, le besoin d'outils mathématiques pour organiser l'avalanche de données est criant. Pourtant, le nombre des étudiants en maths baisse dans le monde entier, la rigueur risque de ne plus être prioritaire à l'école du zapping, l'irrationnel est omniprésent, même les grandes aventures scientifiques actuelles font, pour l'instant, plus appel à l'empirisme qu'à la déduction logique. Ces tendances lourdes étaient déjà présentes au début de notre mandat et apparaissent dans le rapport de conjoncture que nous avons présenté en 1996. Ce rapport représente un gros travail, surtout pour celui qui coordonne sa rédaction, et ce n'est pas sûr qu'il soit très utilisé. La mathématique française est clairement derrière

celle des Etats-Unis, mais elle peut encore prétendre à la seconde place, non seulement par la présence en France de quelques-uns des grands esprits de notre époque, mais aussi par un tissu vivant et actif de scientifiques d'excellent niveau couvrant tout le spectre des mathématiques. Elle a gardé une rigueur morale qui devient aujourd'hui notable : quasi-absence de corruption, éthique scientifique généralement sourcilleuse. Elle a fait un gros effort de communication vers le public et on peut en espérer une interaction avec la société qui ne soit pas limitée aux grands groupes industriels. Les chercheurs du CNRS y ont un rôle actif.

La direction scientifique dispose d'un budget d'environ 16 MF pour le soutien de base des labos et des actions comme les GdR, des colloques, les revues, le CIRM, et le CN est consulté chaque fois sur l'intérêt scientifique de telle ou telle opération. Chacun de ces sujets mériterait un développement particulier. Tout cela est important dans la vie des maths en France, et le CNRS arrive à jouer un rôle très positif avec peu d'argent. Sur tous ces points, le CN dialogue avec le DSA. Nous avons travaillé dans un climat de confiance avec la direction scientifique. Nous n'avons pas cherché à le surveiller de près, il n'a pas cherché à nous provoquer, et nous étions en accord sur de nombreux points. Sur tous ces sujets, le CN a finalement un rôle important de régulation et comme endroit de négociation.

La gestion des ITA échappe complètement au CN. Il y a en maths environ 150 ITA, souvent de haut grade, généralement qualifiés et appréciés. Ils se répartissent à peu près également entre gestionnaires, bibliothécaires et ingénieurs informaticiens. Les bibliothécaires et certains mathématiciens sont organisés depuis longtemps en réseaux, réfléchissent et font face aux défis importants concernant l'avenir des bibliothèques de maths. Le CN soutient ces initiatives. Les ingénieurs informaticiens, comme chacun le sait, sont de plus en plus indispensables dans nos labos, et on ne peut que demander des postes, des postes, des postes. Ces ingénieurs ne sont pas du tout gérés par le CN. Pourtant, une partie importante de leurs tâches est scientifique, et il faudrait trouver un moyen de signifier notre appréciation. D'une manière générale, la carrière des ITA se joue dans des instances régionales dont les mathématiciens sont absents, et il y a souvent là un sujet d'amertume justifiée.

Avec les directions sortantes du Département et du CNRS, les mathématiques ont été reconnues comme une des disciplines importantes au CNRS. À de nombreux égards, c'est même une discipline exemplaire. Reste le point noir des carrières sur lequel, sans doute, nous n'avons pas été assez véhéments. Même avec l'assistance d'un secrétariat compétent et efficace, la quantité de travail du CN est lourde. Régulièrement revient la question de la division de la section. Si elle peut se justifier pour l'enseignement, une division en deux maths pures / maths appliquées me paraît scientifiquement dangereuse et stérilisante des deux côtés. Dans le cadre d'une grande refonte du CN, une division en trois sections, chacune comportant ses applications pourrait provoquer une réflexion intéressante. Mais je ne crois pas que les grandes réformes spectaculaires soient d'actualité, vu les restes de méfiance de la communauté scientifique.

Ces cinq années de mandat ont été en effet marquées par des attaques directes du pouvoir politique et les réponses qu'à notre place, nous avons tenté de donner. Si je me suis trouvé, avec d'autres, un moment en première ligne, c'est parce que, en tant que mathématicien, j'ai été tout de suite sensible à la signification globale des réformes de l'éducation et de la recherche. Claude Allègre et le courant empiristo-libéral qu'il

représente jusqu'à la caricature dénie le fond de croyances scientifico-humanistes à la base de mon engagement dans les mathématiques, la recherche et la fonction publique. La violence des attaques contre ce qui me paraît fondamental explique la force de la mobilisation de beaucoup de chercheurs. Concrètement, les présidents et les secrétaires de section du CN ont créé... un machin de plus, la Conférence des Présidents de section du Comité National (CPCN), qui a organisé une session extraordinaire du CN dans son ensemble le 14 décembre 1998 et demandé un véritable débat sur ces orientations qui modifiaient en profondeur le sens de l'engagement du pays dans la recherche. Dans la mission parlementaire Cohen Le Déaut qui a suivi, la CPCN a été un interlocuteur présent sur de nombreux points et a contribué au succès de cette mission. À l'occasion de ces débats, la CPCN a noué des liens avec la CPU, et nos échanges ont permis de dépasser certains préjugés. La CPCN a rencontré régulièrement la Directrice Générale du CNRS pour des échanges de vues francs et ouverts et a participé à l'élaboration des réformes internes du CNRS. Enfin, la 'lettre de la CPCN', journal électronique informel, a véhiculé un certain nombre d'informations utiles. Cette CPCN donc, que j'ai présidée, a je crois servi à quelque chose. C'est aussi un lieu de rencontres entre spécialistes de disciplines différentes. Si elle reste assez informelle et ne devient pas une institution de plus, cela vaut la peine de la maintenir, et pas seulement pour les périodes de crise.

Voilà, cinq années à plus parler de recherche et de maths qu'à en faire. Le soulagement de ne pas avoir fait de grosse bêtise. Le plaisir de nombreux échanges et de rencontres. Les boules de ne pas pouvoir assurer une carrière décente à mes collègues. L'impression quand même d'avoir effectué des tâches nécessaires.

Connaissez-vous le pendule ?

Alain Chenciner (IMCCE et Université Paris VII-Denis Diderot)

Les mouvements du pendule mathématique de longueur ℓ et de masse m soumis à une gravité uniforme g (figure 1) sont régis par l'équation différentielle $m\ddot{x} = -mg \sin x$, c'est-à-dire par la projection orthogonale sur la tangente au cercle au point paramétré par l'angle x , de l'équation $f = m\ell$ (la composante normale au cercle est exactement compensée par la réaction de la barre, rigide mais non massive, qui porte la masse ponctuelle m). On a noté par un point, comme les mécaniciens, la dérivée temporelle. Soit $\omega = \sqrt{g/\ell}$; il vient

$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x; \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \dot{x} = y; \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x. \end{cases}$$

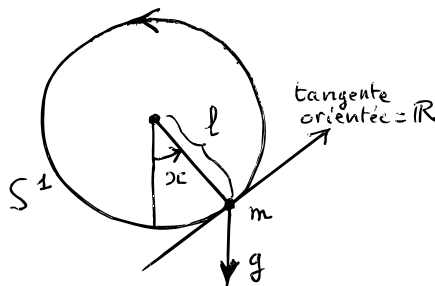


Figure 1

Considéré comme un champ de vecteurs dans le plan de coordonnées (x, y) , le deuxième membre $(y, -\omega^2 \sin x)$ de cette équation a le *portrait de phase* décrit dans la figure 2. Ce portrait de phase ne donne que la géométrie et l'orientation des courbes intégrales, à l'exclusion de leur paramétrage.

Il est encore défini comme l'ensemble des courbes de niveau de la fonction *énergie* :

$$H = \frac{1}{2}m\omega^2|\dot{x}|^2 - mg\ell \cos x;$$

et s'obtient sans peine à partir d'une analyse locale (à l'aide du *lemme de Morse*) des *singularités* de cette fonction, c'est-à-dire des points où, ses deux dérivées partielles s'annulant, elle n'est plus une submersion. Au voisinage des points $y = 0$ et x multiple entier de 2β , la forme quadratique des dérivées secondes est définie positive et l'équilibre est *stable*; au voisinage des points $y = 0$ et x égal à β plus un multiple entier de 2β , elle est indéfinie et l'équilibre est *instable*.

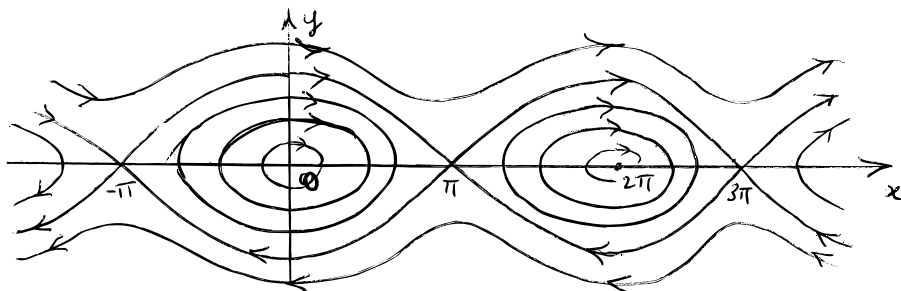


Figure 2

Bien entendu, le « véritable » *espace des phases* du pendule est le cylindre $\mathbb{R} = 2\beta\mathbb{Z} / \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire le *fibré tangent* TS^1 du cercle $S^1 = \mathbb{R} = 2\beta\mathbb{Z}$ (ensemble des couples *position-vitesse*). La figure 3 en donne une représentation à laquelle on pourra préférer celle de la figure 7bis de mon article *Systèmes dynamiques différentiables* de l'*Encyclopædia Universalis*. C'est pourtant le portrait de phase dans $\mathbb{R} = 4\beta\mathbb{Z} / \times \mathbb{R}$ — c'est-à-dire « après revêtement à deux feuillets » — qui est le bon objet d'études au niveau de l'analyse (figure 4).

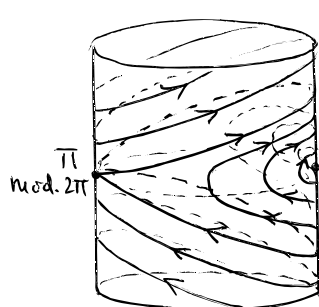


Figure 3

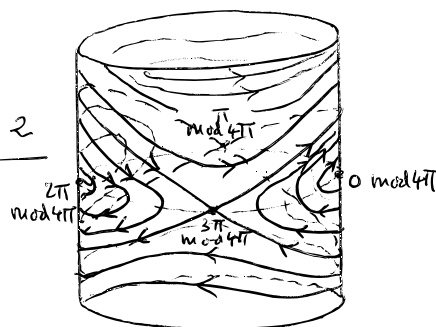


Figure 4

Un premier niveau de compréhension de cette assertion est obtenu directement dans le domaine réel : plongeons en effet $\mathbb{R} = 4\beta\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ par l'application

$$(x; y) \mapsto (z = \sin \frac{x}{2}; w = \cos \frac{x}{2}; \frac{y}{2}) /;$$

et posons $k = \sqrt{\frac{1+H=mg'}{2}}$ en remarquant qu'on a toujours $H \geq -mg'$. La courbe (non connexe si $H \neq mg'$) d'énergie H dans $\mathbb{R} = 4\beta\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ est identifiée à l'intersection des deux cylindres d'équations respectives

$$z^2 + w^2 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2 = k^2;$$

Ces cylindres sont représentés sur la figure 5 dans le cas où $0 \leq k \leq 1$.

Intégrons maintenant l'équation du pendule. Dans la variable de position z , la relation d'énergie s'écrit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - z^2}{k^2 - z^2};$$

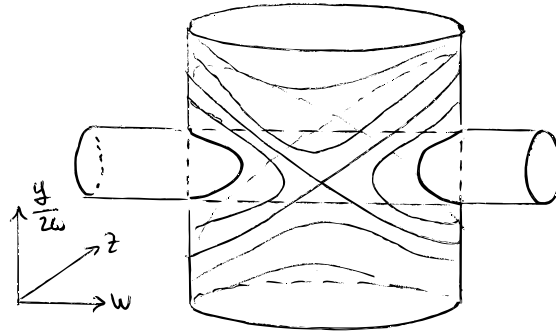


Figure 5

La solution $z.t / = \sin \frac{x.t /}{2}$ vérifiant $z.0 / = 0$ est donc la fonction réciproque de la fonction $t . z /$ définie par

$$!t = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{.1 - z^2/.k^2 - z^2/}} = \int_0^{\frac{z}{k}} \frac{dz}{\sqrt{.1 - z^2/.1 - k^2 z^2/}};$$

c'est-à-dire, si $k \neq 1$, le produit par k de la *fonction elliptique de Jacobi*

$$z.t / = k \operatorname{sn} !t ; k /;$$

On en déduit (voir Whittaker et Watson, *Modern Analysis*, Cambridge University Press, Chapitre XXII) que

$$z.t / = k \operatorname{sn} !t ; k /; w.t / = \operatorname{dn} !t ; k / \quad \text{et} \quad \frac{y}{2!} = k \operatorname{cn} !t ; k /;$$

Si $k \neq 1$, on obtient de même

$$z.t / = \operatorname{sn} \left(k!t ; \frac{1}{k} \right); w.t / = \operatorname{cn} \left(k!t ; \frac{1}{k} \right) \quad \text{et} \quad \frac{y}{2!} = k \operatorname{dn} \left(k!t ; \frac{1}{k} \right);$$

Lorsque $k = 1$, on trouve

$$z.t / = \operatorname{th} !t /; w.t / = \frac{1}{\operatorname{ch} !t /} = \frac{y}{2!};$$

qui décrit l'*orbite homocline* joignant en temps infini l'équilibre instable à lui-même.

Le lecteur ne résistera pas, je l'espère, au plaisir de comparer ce paramétrage des courbes d'énergie constante du pendule par les trois fonctions elliptiques de Jacobi à celui des courbes d'énergie constante de l'*oscillateur harmonique* $\ddot{x} = -!^2 x$ par les deux fonctions circulaires.

Ces formules ne prennent cependant leur véritable stature que dans le domaine complexe. Pour le comprendre, rappelons la nature de la fonction $\operatorname{sn} .u ; k /$ de la variable complexe u . Et puisque cette fonction dégénère en $\sin u$ lorsque k tend vers 0, commençons par étudier le cas de l'*oscillateur harmonique*, autrement dit le sinus complexe et sa fonction (multiforme) réciproque

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

La figure 6 analyse, dans le domaine réel, l'écriture de $z = \sin u$ comme la composée de $u \mapsto .z; \dot{z} / = .\sin u; \cos u /$ avec la projection $.z; w / \mapsto z$.

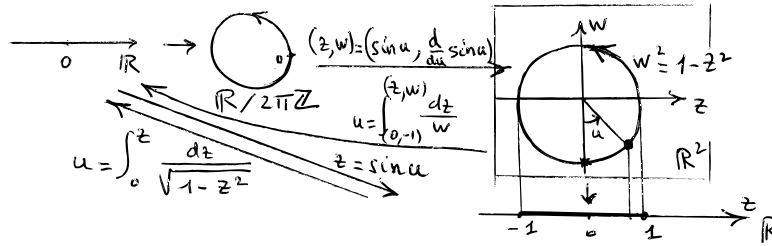


Figure 6

La figure 7 fait de même dans le domaine complexe. Ne pouvant dessiner dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, on a représenté le cylindre image de la première application avec deux demi-droites d'auto-intersection correspondant chacune à une génératrice du cylindre repliée sur elle-même dans $\mathbb{R}^3$ en un point de ramification d'ordre deux pour la projection du cylindre sur le plan complexe de la variable z . Après complétion par deux points à l'infini, ce cylindre devient la surface de Riemann (sphère) de la fonction $\sqrt{1-z^2}$. Enfin, on a représenté les ellipses et hyperboles homofocales, images des droites $\text{Im } u = \text{cste}$ et $\text{Re } u = \text{cste}$.

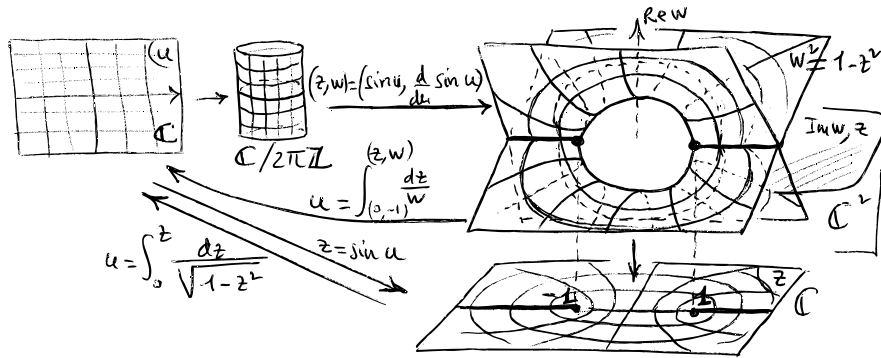


Figure 7

La figure 8, où l'on fait la même chose pour la fonction $z = \text{sn}.u; k /$, montre que le cylindre est remplacé par un tore privé de deux points (les pôles de $\text{sn}.u; k /$) et donc que la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{.1 - z^2 / .1 - k^2 z^2 /}$ est un tore. On retrouvera la figure 7 en faisant tendre k vers 0.

Dans l'espace des phases dédoublé $\mathbb{C} = 4\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, la courbe intégrale complexe d'énergie $k \neq 1$, intersection de deux cylindres $S^1 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{C}^3 = \mathbb{R}^6$, est donc diféomorphe à un tore privé de deux points, alors que dans le "véritable" espace des phases complexe $\mathbb{C} = 2\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$, c'est un tore privé d'un unique point.

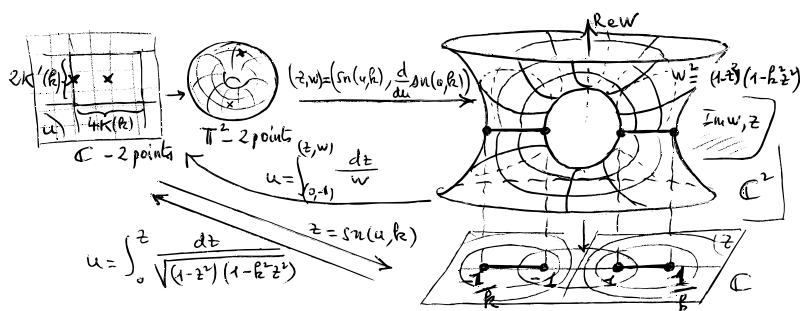


Figure 8

Remarque

Le calcul de la période $T(k)$ d'une oscillation complète du pendule se déduit immédiatement de ce qui précède : si $k \neq 1$, par exemple, on obtient

$$\frac{T(k)}{2\pi} = 4K(k) = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2 z^2)}};$$

qui est la période réelle de la fonction $\text{sn}(u, k)$ et varie de 2π (cas limite, harmonique, des petites oscillations) à l'infini (cas limite de la solution homocline qui joint en temps infini la position d'équilibre instable à elle-même). Mais la fonction $\text{sn}(u, k)$ possède également une période purement imaginaire, notée classiquement $2iK'(k)$ (voir *Whittaker et Watson*). C'est Paul Appell qui, en 1878, a donné, dans le cas où $k \neq 1$ uniquement, l'interprétation dynamique de cette dernière ; il a remarqué que le remplacement du temps réel t par le *temps complexe* it revient à multiplier par i les vitesses et par $i^2 = -1$ les accélérations, ce qui équivaut à changer l'orientation de la gravitation. Il en déduit immédiatement que la période complexe du mouvement de libration obtenu en abandonnant sans vitesse le pendule à la position x est égale à la période réelle du mouvement analogue correspondant à la position initiale $\beta - x$ (figure 9).

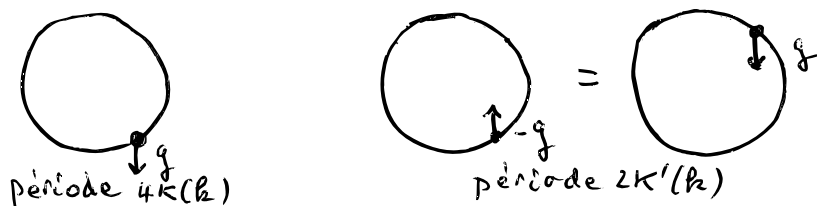


Figure 9

Guide pour l'interprétation des figures 7 et 8

Ces figures s'obtiennent très simplement à partir des remarques suivantes : il s'agit dans les deux cas de la représentation d'une courbe complexe dans $\mathbb{C}^2$ (c'est-à-dire d'une surface réelle dans $\mathbb{R}^4$) donnée par une équation de la forme $w^2 = P(z)$, où P est un polynôme de degré 2 ou 4 dont les racines z_i sont toutes réelles. On peut encore considérer cette surface comme le *graphe* de la fonction *multiforme* $w = \sqrt{P(z)}$. Le problème se passe au niveau des points $z_i/0$ où la restriction à cette surface de la

projection $.z; w/ \mapsto z$ est *ramifiée*, exactement comme l'est en $.0; 0/$ le graphe de la fonction $\sqrt{z}$. On représente classiquement une telle surface de la manière suivante : on effectue dans le plan des z un certain nombre de *coupures* dans le complémentaire desquelles on peut choisir continuellement une racine carrée de $P.z/$. La surface consiste alors en le recollement de deux copies de ce complémentaire le long des bords des coupures et la seule difficulté est dans la compréhension de ce recollement. Pour respecter l'échange des déterminations de $\sqrt{P.z/}$ lorsque z parcourt un petit lacet autour d'une racine, celui-ci doit en effet associer un bord sur un feuillet avec le bord opposé sur l'autre. La figure 10 indique deux perspectives de la représentation dans $\mathbb{R}^3$ du graphe de $\sqrt{z}$ alors que la figure 11 explicite le recollement des deux *feuilles* du graphe de $\sqrt{.1-z^2/.1-k^2z^2/}$.



Figure 10

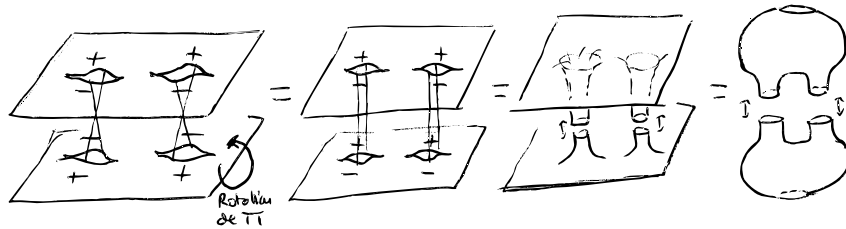


Figure 11

Remarques

1 – On a pas mal de latitude dans le choix des coupures et dans celui de la représentation dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple, si, dans la représentation du sinus, on privilégie la partie imaginaire de w plutôt que sa partie réelle et on remplace les deux coupures par une unique coupure suivant le segment $[-1; 1]$, la figure 7 devient la figure 12.

2 – Dans les applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ représentées sur les figures 7, 8, 10 et 12, les points de bifurcation présentent une singularité inévitable (stable) appelée *parapluie de Whitney*, dont le modèle local le plus simple est

$$.t; s/ \mapsto .t; st; s^2/:$$

Cette singularité se rencontre également dans le *cross-cap*, représentation du ruban de Moebius dans laquelle un voisinage du bord est un anneau plongé de façon standard dans $\mathbb{R}^3$, ce qui permet en le recollant à un disque d'obtenir le modèle le plus simple dans $\mathbb{R}^3$ du plan projectif et plus généralement de n'importe quelle surface non orientable (voir les figures de *Geometry and the imagination* de Hilbert et Cohn-Vossen).

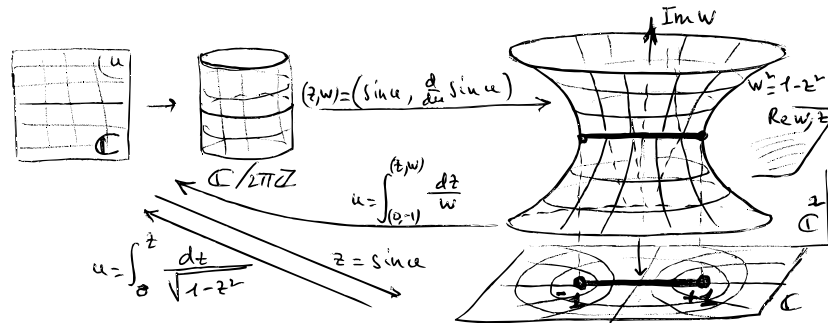


Figure 12

Exercice

Faire les figures analogues dans le cas où P est un polynôme quelconque (*intégrales hyperelliptiques*) et montrer que la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{P \cdot Z}$ est une surface orientable de genre g si le polynôme est de degré $2g + 1$ ou $2g + 2$ (voir par exemple le livre *Riemann surfaces* de George SPRINGER, Chelsea).

Quelques remarques désabusées

La Mécanique classique n'est plus à la mode chez les (certains) mathématiciens. A l'Université Paris VII par exemple, où depuis quelques années mes propositions de l'enseigner dans le cadre d'un cours annuel de géométrie et mécanique en maîtrise se heurtent à des fins de non recevoir de la part des collègues responsables. Trop difficile pour les étudiants d'aujourd'hui, disent-ils. Je ne peux que leur donner raison. Quel besoin de distinguer entre Lagrangien et Hamiltonien, tangent et cotangent, lorsqu'on a pris soin de supprimer des programmes la notion même de dualité. D'ailleurs il n'y a pratiquement plus d'étudiant pour choisir le cours de géométrie. Allo, allo, ne coupez pas...

MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

$\mathbb{K}$, objet du 3^e type¹

Francis Sergeraert²

1. Introduction

Au milieu des années 60, Maître Henri Cartan était ravi d’avoir fait baptiser *Mathématique*, sans s, l’immeuble de l’Université d’Orsay consacré à notre discipline. Ce singulier inhabituel voulait en proclamer l’unité, bien dans la ligne de pensée de l’un des principaux créateurs de Bourbaki.

L’introduction³ du livre *Théorie des Ensembles* [2] de l’éminent Nicolas virtuel explique comment et pourquoi une seule logique, celle de Zermelo-Frænkel, nous est jusqu’à nouvel ordre suffisante. Cette logique de référence est souvent mentionnée dans le présent texte et y est désignée simplement $\mathbb{Z}\mathbb{F}$. Les objections à ce mode de *pensée unique* sont connues, mais elles n’intéressent pas beaucoup de mathématiciens. Bourbaki a « oublié » les catégories, mais quelques modifications mineures permettent de travailler avec les classes *intuitivement* comme on a l’habitude de le faire avec les ensembles, à condition de prendre quelques précautions. Dans un registre assez différent, les logiques *constructives*⁴ ($\mathcal{L}\mathcal{C}$) et *non-standard* ont fini par imposer l’intérêt de leurs points de vue, mais sans que la proportion de mathématiciens vraiment concernés soit significative.

On veut présenter dans cet article un objet d’un type nouveau, noté $\mathbb{K}$, récemment introduit en topologie algébrique. Il faut travailler *simultanément* sous $\mathbb{Z}\mathbb{F}$ et $\mathcal{L}\mathcal{C}$ pour en comprendre la nature. C’est le type inédit de cet objet qui est à l’origine du titre du texte. La situation est cocasse et propice aux malentendus. La « part de marché » de la topologie algébrique s’est appauvrie depuis les temps héroïques de Cartan et Serre⁵. L’une des causes de cette désaffection de fait est l’insuffisance donnée au point de vue *effectif* dans ses résultats, quelquefois assez illusoires, pour ne pas dire *illusionnistes*⁶. Il est curieux dans ces conditions de constater comment cette spécialité reste disjointe des développements modernes de la logique et de l’informatique. La

¹ Larry Siebenmann a suggéré de publier dans cette Gazette le texte [19], en fait un peu trop spécialisé pour le public visé. Le présent article en est une réécriture sous une forme adaptée assez différente, mais équivalente sur le fond.

² Francis.Sergeraert@ujf-grenoble.fr

³ Où l’on croit bien reconnaître la patte d’Henri Cartan ?

⁴ Appelées aussi assez maladroitement *intuitionnistes*.

⁵ La topologie algébrique « classique » était pratiquement absente du dernier Congrès Européen de Barcelone (10-14 Juillet 2000).

⁶ Point détaillé Section 4.

géométrie algébrique, l'arithmétique et la théorie des groupes bénéficient au contraire depuis longtemps de relations « pluridisciplinaires » avec l'algorithmique théorique ou concrète. Les historiens de notre discipline resteront perplexes pour comprendre pourquoi la topologie algébrique est encore, au changement de millénaire, si éloignée du point de vue effectif ; pour des raisons qui seront expliquées plus loin, ce devrait pourtant être l'un de ses buts premiers.

Le résultat à examiner est la définition d'un *modèle algébrique* du type d'*homotopie* d'un espace topologique. On expliquera la nature du problème, qu'on peut appeler « problème MATH », acronyme pour *m*odèle *a*lgébrique du type d'*h*omotopie. Trois solutions sont maintenant disponibles, très différentes, toutes intéressantes, qu'on appellera respectivement JS, RSH et RSG. C'est dans la solution RSG qu'intervient l'objet $\star_K$.

L'article est organisé comme suit. La Section 2 explique de façon ultra-simplifiée la nature du problème MATH. La Section 3 donne les grandes lignes du cheminement qui, par enrichissement progressif de structure, a conduit à la solution obtenue récemment par Justin Smith, celle qu'on a baptisée JS. Cette solution est intéressante, mais ce n'est pas celle qui motive le présent texte ; elle est en effet « classique » et ne nécessite aucune logique particulière pour être comprise et évaluée.

Il n'est pas évident de définir ce que recouvre exactement le mot-clé *algébrique*. La Section 4 examine rapidement le point de vue *algorithmique*, connexe mais pas équivalent. Les solutions RSH et RSG au problème MATH dépendent de ce point de vue ; elles sont succinctement exposées Section 5. La troisième solution, celle qui motive cet article, a été bizarrement accueillie par la profession ; un mini-rapport à ce sujet est donné Section 6. La solution RSG a mené au logiciel *Kenzo* ; quelques résultats de calculs machines sont décrits Section 7.

2. Topologie algébrique

2.1. Topologie et algèbre

La topologie⁷ est une discipline a priori relativement ésotérique, de sorte qu'un sujet permanent d'étude est la recherche d'une réduction de tel ou tel problème topologique à un problème moins ésotérique, par exemple de nature algébrique. La topologie algébrique est l'étude systématique de telles réductions.

L'exemple prototype est le suivant. Soit D^2 le disque unité fermé du plan et S^1 son bord, le cercle unité ; alors il n'existe pas d'application continue $f : D^2 \rightarrow S^1$ telle que la restriction au bord $f|_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ soit l'identité. La preuve, par l'absurde, résulte de l'application du foncteur H_1 de la topologie algébrique, foncteur défini pour tout espace topologique, à valeur groupe abélien. En particulier $H_1(D^2) = 0$ et $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Notons i l'inclusion canonique $i : S^1 \rightarrow D^2$. Un éventuel f devrait vérifier $f \circ i = \text{id}_{S^1}$ et, par application du foncteur H_1 , le morphisme identité $H_1(\text{id}_{S^1}) = \text{id}_{\mathbb{Z}}$ devrait se factoriser comme un composé de deux morphismes $H_1(i)$ et $H_1(f)$ où le groupe médian est nul ; ce n'est pas possible.

⁷ Conformément au style « large public » de la Gazette, l'auteur n'a pas hésité à plusieurs reprises à « tricher » copieusement pour contourner les technicités secondaires ; les topologues professionnels sauront déterminer les corrections appropriées ; les autres lecteurs peuvent demander le cas échéant (Sergeraert@ujf-grenoble.fr) compléments et références.

$$\begin{array}{ccc}
 S^1 & \xrightarrow{\text{id}} & S^1 \\
 \searrow i & & \nearrow f ??? \\
 & D^2 &
 \end{array}
 \quad \xRightarrow{H_1} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} \\
 \searrow 0 & & \nearrow ??? \\
 & 0 &
 \end{array}$$

2.2. Invariants

Un groupe tel que $\mathbb{Z} = H_1.S^1/$ est appelé un *invariant* de S^1 , car il ne dépend que de la classe d'homéomorphisme de l'argument S^1 : si les espaces X et Y sont homéomorphes, les groupes $H_1.X/$ et $H_1.Y/$ sont les mêmes.

Deux applications continues $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $F : X \times [0; 1] \rightarrow Y$ telle que $F.x; 0/ = f_0.x/$ et $F.x; 1/ = f_1.x/$. Une application⁸ $f : X \rightarrow Y$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g : Y \rightarrow X$ telle que les deux composés $g \circ f$ et $f \circ g$ sont homotopes aux identités de X et Y . Par exemple l'inclusion du cercle unité S^1 dans le plan troué $\mathbb{R}^2 - \{.0; 0/\}$ est une équivalence d'homotopie.

Plus fort que ce qui était expliqué plus haut, un groupe $H_1.X/$ est un invariant du *type d'homotopie* de X ; autrement dit, s'il existe une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow Y$, alors les groupes $H_1.X/$ et $H_1.Y/$ sont les mêmes. Un type d'homotopie est une classe d'équivalence d'espaces topologiques pour la relation « il existe une équivalence d'homotopie entre... »; par exemple le cercle unité et le plan troué ont le même type d'homotopie.

Il en est de même pour beaucoup d'autres notions de topologie algébrique, par exemple les groupes d'homotopie $\beta_i.X/$ et les groupes de K -théorie $K_i.X/$ ne dépendent que du type d'homotopie de X ; de sorte que le *problème inverse* s'impose : quel ensemble d'invariants pourrait permettre de *caractériser* un type d'homotopie ? Il s'agit de définir un ensemble d'invariants $H T_0, H T_1, \dots, H T_n, \dots$ de telle façon que deux espaces X et Y admettent une équivalence d'homotopie *si et seulement si* l'égalité $H T_i.X/ = H T_i.Y/$ est valide pour tout entier i . En regroupant ces invariants hypothétiques $H T_i.X/$ en un objet « synthèse » $H T.X/$, on peut alors appeler cet objet $H T.X/$ un modèle du type d'homotopie de X . Il faut arriver à définir le foncteur $H T$ de telle façon que X et Y ont même type d'homotopie si et seulement si $H T.X/ = H T.Y/$.

Sous peine de solution sans intérêt⁹, il faut exiger quelque chose du modèle $H T.X/$. Dans l'esprit de la topologie algébrique, on demande habituellement que la solution $H T.X/$ soit un objet *algébrique*, qualificatif qu'il n'est pas possible de définir dans le cadre 3^E. En fait il y a bien une façon de définir l'exigence « algébrique » : l'objet $H T.X/$ doit pouvoir être installé *sur machine*¹⁰, de telle façon qu'il existe un *algorithme* permettant de déterminer s'il y a égalité ou non entre deux tels objets $H T.X/$ et $H T.Y/$. C'est ici que le point de vue constructif apparaît, revenant à dire qu'en définitive est « algébrique » ce qui est exploitable sur machine; cette *définition* de l'algébricité n'est pas standard, mais la topologie algébrique bien comprise est précisément le contexte idéal pour réaliser que c'est la seule possible. On reviendra sur cette question.

⁸ Désormais, sauf mention contraire qui n'arrivera jamais, une application entre espaces topologiques est supposée continue.

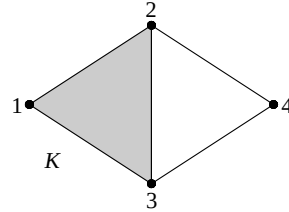
⁹ Si vous connaissez le $\emptyset$ de Hilbert défini comme dans Bourbaki [2], l'objet $H T_{3^E}.X/ = \emptyset_{\mathbb{A}}.A$ le type d'homotopie de $X/$ est une telle solution.

¹⁰ Concrète, comme un PC du supermarché, ou théorique, comme une machine de Turing.

2.3. Groupes d'homologie

Avant de continuer, on explique très succinctement comment on « calcule » le groupe H_1 d'un espace topologique. Cet exemple nous servira de support pour expliquer très grossièrement la nature du problème MATH.

On finira par *devoir* travailler sur machine, et des modèles combinatoires sont nécessaires pour les espaces topologiques à traiter. Le cadre simplicial est commode ; par exemple le *complexe simplicial* K ci-contre, un losange dont un triangle est plein et l'autre creux, peut être défini comme $K = .V; S/$ où V , l'ensemble des *sommets*, est $V = \{1; 2; 3; 4\}$ et S , l'ensemble des *simplexes*, est :



$$S = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{4\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{2; 4\}; \{3; 4\}; \{1; 2; 3\}\}:$$

Autrement dit on décrit un espace topologique par un assemblage de sommets, d'arêtes, de triangles (= 2-simplexes), tétraèdres (= 3-simplexes) et plus généralement de n -simplexes. Seuls les espaces *triangulables* sont susceptibles d'un tel traitement mais on ne considère pas ici les autres¹¹. Le groupe C_0 des 0-chaînes est le $\mathbb{Z}$ -module libre engendré par les 0-simplexes (sommets), ici $\mathbb{Z}^4$; plus généralement le groupe C_n des n -chaînes est engendré par les n -simplexes. L'opérateur de bord $d_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ fait correspondre à un n -simplexe générateur la somme alternée de ses faces, les sous-simplexes obtenus en enlevant l'un des sommets du simplexe. Par exemple :

$$d_2.\{1; 2; 3\} / = \{2; 3\} - \{1; 3\} + \{1; 2\}:$$

Le composé de deux opérateurs de bord successifs est nul, ce qui permet de définir $H_n = \text{Ker } d_n = \text{Im } d_{n+1}$. Ainsi, pour le complexe simplicial ci-dessus, on trouve que H_1 est isomorphe à $\mathbb{Z}$ avec comme générateur la classe de la chaîne (du *cycle*) $\{2; 3\} - \{2; 4\} + \{3; 4\}$.

Il est remarquable et pas si facile à montrer que deux triangulations différentes d'un même espace topologique donnent les mêmes groupes d'homologie. Il faut pour ce faire utiliser l'homologie *singulière*, généralisation de ce qui est expliqué ci-dessus aux espaces topologiques quelconques [8, Chap. VI et VII]. Le complexe de chaînes d'un complexe simplicial est la suite de ses groupes de chaînes et opérateurs de bord :

$$\cdots \xleftarrow{d_{n+1}} C_{n+1}.K / \xleftarrow{d_n} C_n.K / \xleftarrow{d_{n-1}} C_{n-1}.K / \xleftarrow{d_{n-2}} \cdots$$

Pour le différencier du complexe minimal introduit plus loin, on l'appellera le complexe de chaînes *initial* $C_*.K /$ de K . Ce complexe de chaînes vient de l'objet géométrique K , mais on peut aussi considérer des complexes de chaînes « abstraits » faits de $\mathbb{Z}$ -modules et d'opérateurs de bord quelconques vérifiant cependant $d_{n-1} \circ d_n = 0$ pour tout n .

¹¹ Par ailleurs le cadre des *ensembles simpliciaux* [11] est beaucoup plus puissant que celui des complexes simpliciaux, mais hors de portée de ce texte.

2.4. Propriétés de finitude

Il est très fréquent de *devoir* considérer des complexes simpliciaux qui ne sont pas de type fini. Par exemple $K = .V; S/$ où V , ensemble des sommets, est l'ensemble $\mathbb{N}$ de *tous* les entiers, et S , ensemble des simplexes, est l'ensemble de *toutes* les parties finies de $\mathbb{N}$, est un complexe simplicial assez « gros » ; pourtant tous ses groupes d'homologie sont nuls sauf $H_0 = \mathbb{Z}$.

L'un des résultats les plus importants de Serre en topologie algébrique [20] montre que beaucoup de complexes simpliciaux de type infini ont quand même, s'ils sont construits selon des processus « raisonnables », décrits en détail par Serre, des groupes d'homologie de type fini. Dans un tel cas, le complexe de chaînes $C_*.K/$ du complexe simplicial K n'est pas de type fini, mais il a les mêmes groupes d'homologie qu'un autre complexe de chaînes $C_*^m K/$, essentiellement unique pour les propriétés suivantes : le complexe $C_*^m K/$ est fait de $\mathbb{Z}$ -modules libres de rang fini et il est *minimal* parmi les complexes ayant les groupes d'homologie qu'il faut. En particulier une *équivalence de chaînes*, elle aussi essentiellement unique, peut alors être installée entre le complexe de chaînes *initial* $C_*.K/$ définissant les groupes d'homologie et le complexe minimal $C_*^m K/$ qui s'en déduit¹². Une telle équivalence de chaînes est un morphisme de complexes de chaînes (définition naturelle) vérifiant quelques propriétés. C'est cette équivalence qui va nous occuper dans la suite. Elle est si importante qu'elle mérite un affichage T_EX « display » :

$$C_*.K/ \stackrel{''}{\Longleftrightarrow} C_*^m K/$$

On verra que cette équivalence de chaînes '' est le cœur du sujet des trois solutions JS, RSH et RSG du problème MATH¹³.

Le lecteur courageux parvenu à ce point ne doit pas s'inquiéter s'il ne connaît pas le détail de ces définitions. Seul nous intéresse le statut de ces objets par rapport à la calculabilité, statut qui sera exposé de façon « informelle », en essayant de montrer seulement les idées principales.

2.5. Topologie algébrique = ?

Il s'agit donc d'examiner soigneusement l'équivalence de chaînes '' montrée ci-dessus, en analysant la situation créée par le fait que, dans la quasi-totalité des cas intéressants, le complexe *initial* $C_*.K/$ n'est pas de type fini, alors qu'au contraire l'autre complexe $C_*^m K/$, à considérer comme complexe *résultat*, est lui de type fini. Du point de vue de la calculabilité, la non-finitude du complexe initial va clairement poser un sérieux problème. C'est ce point qui est à l'origine des malentendus observés, quelquefois chez des topologues de première classe.

On avait donné dans une note bas de page, Section 2.2, une solution absurde au problème MATH, consistant à utiliser le $\emptyset$ de Hilbert, pour ce qui ressemble à une plaisanterie de mauvais goût ; pourtant, du point de vue $\mathfrak{J}\mathfrak{F}$, la solution proposée en est bien une. Puisqu'elle est sans intérêt, comment préciser l'énoncé pour l'interdire ? C'est le sorcier caché derrière le $\emptyset$ qui est à l'origine de l'entourloupe et il faut le mettre hors d'état de nuire. L'opérateur $\emptyset$ sert à modéliser l'axiome du choix, et nous devons donc

¹² Et vice versa : puisque le complexe $C_*^m K/$ est de type fini, ses groupes d'homologie sont calculables : il y a équivalence, même dans $\mathfrak{L}\mathfrak{C}$, entre la donnée des groupes d'homologie et celle du complexe minimal.

¹³ Les topologues savent qu'il *faut garder* la structure simpliciale de $C_*.K/$ pour ne pas perdre d'emblée le type d'homotopie de K ; le complexe $C_*.K/$ est donc un module simplicial, alors que le complexe minimal $C_*^m K/$ est un complexe de chaînes « pur », ou « abstrait ».

affaiblir, sérieusement, cet axiome. Le plus simple et le plus naturel consiste à changer de logique et à adopter le point de vue $\mathcal{LC}$: on demande que le modèle $HT.K/$ du type d'homotopie d'un complexe simplicial K soit un « objet machine », et que, si deux tels objets $HT.K/$ et $HT.L/$ sont donnés, alors un algorithme sache décider leur égalité¹⁴.

Qu'est-ce qu'un *objet machine* ? C'est le contenu d'un segment mémoire, donc une chaîne de bits, ou bien, si on préfère, une chaîne de caractères. Mais ¹⁵ $\mathfrak{JF}$ va à nouveau nous jouer des tours, car il nous explique comment tout complexe simplicial K peut être défini par une chaîne de caractères sur un alphabet fini, et *de même* pour la classe d'homotopie à la $\mathfrak{JF}$:

$$HT_{\mathfrak{JF}}.K/ = \emptyset_A.A \text{ a le type d'homotopie de } K/:$$

Oui, mais même après installation sur machine du texte $\mathfrak{JF}$ pour les objets $HT_{\mathfrak{JF}}.K/$ et $HT_{\mathfrak{JF}}.L/$, théoriquement *et* pratiquement¹⁶ parfaitement faisable, aucun *algorithme* n'est a priori disponible¹⁷ pour en déterminer l'égalité, et la solution absurde utilisant le $\emptyset$ de Hilbert est cette fois en échec. Il faut donc impérativement considérer le problème MATH dans le cadre $\mathcal{LC}$. Ce type de situation est très fréquent, et on doit indiquer ici au lecteur que ce n'est pas du tout ce point qui motive cet article : il est en effet facile de modéliser la notion d'algorithme à l'intérieur de $\mathfrak{JF}$ même, tout le monde le fait sans se poser de question métaphysique et c'est très bien ainsi.

Dans ces considérations introductrices, deux notions ont évolué en parallèle sans qu'elles aient encore convergé. On a d'une part introduit la notion de *type d'homotopie* du complexe K , d'autre part donné quelques indications sur le « calcul » des groupes d'homologie $H_*.K/$. Seule relation pour le moment : « mêmes types d'homotopie » implique « mêmes groupes d'homologies », ou, si on préfère, mêmes complexes minimaux.

Puisqu'il est classique que les invariants groupes d'homologie *ne déterminent pas* un type d'homotopie, il reste donc à trouver ce qu'on pourrait inventer comme nouveaux invariants pour que leur ensemble détermine enfin le type d'homotopie du complexe simplicial sous-jacent. On a ainsi résumé d'une façon hyper-elliptique le *problème clé* de la topologie algébrique *fondamentale*, le problème MATH¹⁸.

3. De Steenrod à Justin Smith

Les espaces $S^2 \vee S^4$ (deux sphères de dimension 2 et 4 « attachées » par leur pôle sud) et $P^2\mathbb{C}$ (plan projectif complexe) ont les mêmes groupes d'homologie et pourtant ils n'ont pas le même type d'homotopie. Comment distinguer « par la topologie algébrique » les types d'homotopie de ces espaces ?

¹⁴ Au sens des logiciens : répondre par oui ou par non à la question de l'égalité.

¹⁵ Que le lecteur non familier de la formalisation de $\mathfrak{JF}$ telle qu'elle est décrite dans [2] saute ce paragraphe.

¹⁶ On va justement le faire Section 5.3.

¹⁷ Il résulte du théorème d'incomplétude de Gödel qu'un tel algorithme ne peut exister.

¹⁸ Pour les topologues : une autre façon d'énoncer le problème MATH consiste à demander une extension au cas *entier* de la théorie de Sullivan [25], théorie qui n'est valide que pour les types d'homotopie *rationnelle*.

3.1. Structure multiplicative

Les groupes d'homologie ne sont a priori que des groupes, mais ils portent en fait des structures beaucoup plus riches qu'il faut examiner pour tenter d'obtenir plus d'informations sur le type d'homotopie sous-jacent.

En s'inspirant du produit extérieur des formes différentielles sur les variétés, on peut définir une structure d'algèbre sur l'ensemble des groupes de cohomologie ¹⁹ $H^*.K/$. Il arrive alors ceci : les espaces $S^2 \vee S^4$ et $P^2\mathbb{C}$ ne sont pas distingués par les groupes d'homologie, ni par les groupes de cohomologie, mais par contre ils le sont par la structure multiplicative de la cohomologie : celle de $S^2 \vee S^4$ est triviale, alors que celle de $P^2\mathbb{C}$ ne l'est pas.

Bien, mais il se trouve aussi que cette structure multiplicative ne permet pas de distinguer $S^3 \vee S^5$ et la suspension ²⁰ $SP^2\mathbb{C}$. Il faut donc trouver un nouvel invariant permettant de distinguer aussi les types d'homotopie de ces espaces.

3.2. Steenrod

Norman Steenrod a découvert à la fin des années 40 un type de structure d'un type complètement nouveau sur la cohomologie $H^*.K;\mathbb{Z}_2/$ à coefficients ²¹ dans $\mathbb{Z}_2$. Steenrod a montré que cette cohomologie admet naturellement une structure de module par rapport à une algèbre « métaphysique » appelée maintenant l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_2$, algèbre d'opérations de cohomologie. Cette structure de module contient la structure multiplicative évoquée dans la section précédente mais elle est beaucoup plus riche. Elle permet en particulier de distinguer les types d'homotopie de $S^3 \vee S^5$ et $SP^2\mathbb{C}$.

Oui, mais d'autres espaces sensiblement plus compliqués à construire, dont les types d'homotopie sont différents, ne peuvent pas être distingués par la structure de $\mathcal{A}_2$ -module de leur $\mathbb{Z}_2$ -cohomologie...

3.3. Sisyphes, Peter May et Justin Smith

Des quantités d'autres invariants (groupes d'homotopie, à coefficients ou non, groupes de K-théorie, cohomologies extraordinaires, groupes de X-théories de toutes sortes, ...) ont été imaginés depuis Steenrod, le plus souvent pour leur intérêt propre, indépendamment du problème qui nous occupe. Aucune combinaison connue de ces invariants ²² n'est jusqu'à nouvel ordre une solution au problème MATH, au sens expliqué Section 2.5. Il est clair maintenant que ces invariants sont, malgré leur richesse, beaucoup trop... pauvres pour être la matière d'une solution à notre problème. La topologie algébrique est apparue dès lors comme un espace vaste et escarpé, peuplé de clones de Sisyphe ; rien ne permet de contester l'intérêt de leur travail, mais il est vrai qu'ils donnent souvent l'impression d'avoir oublié l'origine de leur sujet.

Une autre direction, du plus haut intérêt, a été heureusement ouverte par Peter May et quelques autres dans les années 70. La topologie algébrique utilise constamment des homotopies et aussi des équivalences d'homotopie, topologiques ou algébriques ;

¹⁹ Obtenus en dualisant d'abord le complexe initial $C_*.K/$.

²⁰ La *suspension* de X est le produit $X \times [0; 1]$ où le plancher $X \times 0$ et le plafond $X \times 1$ sont l'un et l'autre réduits à un point.

²¹ Modification de la cohomologie de style localisation en un premier.

²² Les dispositifs connus comme tours de Postnikov et tours de Wall (voir par exemple [1]) ne sont pas non plus des solutions à notre problème, car les ingrédients qui les constituent ne sont pas a priori calculables ; ils le deviennent dès qu'une solution au problème MATH est disponible.

dans le deuxième cas on les appelle plutôt des *équivalences de chaînes*, mais le principe est le même. Dans un premier temps on préfère se contenter de l'*existence*, au sens $\mathfrak{J}\mathfrak{F}$, de ces équivalences d'homotopie. Puis, peu à peu, on réalise qu'il faut en savoir plus sur ces équivalences d'homotopie, pour mieux exploiter le contexte. De proche en proche, on observe qu'en général on abandonne *bien trop tôt* le contexte structurel à l'origine des principales définitions de la topologie algébrique. On ne peut détailler plus dans ce court article, mais expliquer seulement que ce point de vue a conduit Peter May à définir et développer des types de structure absolument nouveaux appelés *opérades*, car il s'agit de vastes ensembles d'opérateurs richement structurés ; les objets où opèrent ces batteries d'opérateurs sont des « modules » par rapport à ces opérades ; bien utilisée, cette technique permet d'*abstraire* le cœur de la structure des objets topologiques et de leurs descendants, sans rien perdre de l'essentiel. Les invariants usuels de la topologie algébrique sont des micro-sous-produits de ces structures. Vladimir Smirnov [22] est allé très loin en ce sens ; il a obtenu ainsi de superbes solutions à des problèmes très concrets, en particulier autour de l'homologie des espaces de lacets itérés [23].

Suivant la voie ouverte par Smirnov, Justin Smith a annoncé récemment [24] une solution au problème MATH consistant à enrichir le complexe minimal $C_*^m.K$ / d'une structure de module par rapport à un opérade bien choisi, un modèle de type fini de l'opérade E_∞ , opérade clé des questions de topologie algébrique. C'est cette solution qu'on appelle solution JS. Sa validité reste un peu problématique dans ses détails, mais il est clair qu'après quelques corrections et compléments éventuels, une telle solution doit être disponible.

Examinons pour comparaison ultérieure la solution de Justin Smith par rapport à l'équivalence de chaînes ” décrite Section 2.4 :

$$C_*^m.K / \xleftrightarrow{\quad} C_*^m.K /;$$

La *nature* de la solution de Justin Smith est la suivante : la non-finitude très fréquente du complexe initial $C_*^m.K /$ interdit de considérer cet objet pour un usage *sur machine*, théorique ou concrète. Il faut donc l'évacuer complètement et se contenter du complexe minimal $C_*^m.K /$; mais ce dernier est très pauvre en information et il faut enrichir considérablement sa structure si on souhaite y décrire un type d'homotopie *complet*. La solution de Justin Smith utilise les opérades de Peter May, en s'inspirant notamment des travaux de Smirnov sur l'opérade E_∞ . Justin Smith définit un modèle ad hoc pour l'opérade E_∞ , puis une structure de E_∞ -module sur le complexe minimal $C_*^m.K /$, déduite de la topologie du complexe initial K . Notons $[C_*^m.K /]_{E_\infty}$ le complexe à structure ainsi enrichie. Alors :

$$H T_{JS} = [C_*^m.K /]_{E_\infty}$$

est la solution de Justin Smith du problème MATH .

Elle est très intéressante. Son auteur²³ commence à étudier ce qui pourrait être fait sur machine *concrète* pour y implémenter ses E_∞ -modules, pour *calculer* $[C_*^m.K /]_{E_\infty}$ dans les cas usuels de la topologie algébrique, et pour en déduire les divers invariants de la topologie algébrique. Un superbe espace de travail est là devant ceux qui veulent bien s'y intéresser.

²³ Il bénéficie d'une double compétence rare Topologie Algébrique + Informatique.

4. La version algorithmique du problème

On a vu que sans exigence de calculabilité pour une solution MATH, le problème est vide ; les questions de calculabilité en topologie algébrique vont donc jouer un rôle essentiel. L'une des premières questions naturelles en la matière est la calculabilité des groupes d'homotopie des complexes simpliciaux finis²⁴. Elle fut résolue positivement par Edgar Brown [3] dans un article remarquable à deux points de vue :

- Edgar Brown expliquait lui-même que sa solution est définitivement inutilisable pour des calculs concrets ;
- Il n'utilisait pas les *suites spectrales*, l'outil essentiel mis au point par Serre pour « calculer » les groupes d'homotopie qui lui ont valu la médaille Fields.

Le premier point est à l'origine de la désaffection des topologues pour les questions de calculabilité, théorique ou concrète. Il y a pourtant là une anomalie flagrante par rapport à l'évolution scientifique en général, mais on l'a déjà expliqué. La seconde remarque est capitale pour notre sujet. Presque tous les manuels de topologie algébrique présentent les suites exactes et les suites spectrales comme des méthodes de « calcul » de groupes inconnus. C'est le plus souvent *grossièrement faux*²⁵, en raison des problèmes de détermination des différentielles supérieures, d'une part, et des problèmes d'extension à l'aboutissement, d'autre part²⁶. Voir [12, pp 6 et 28], où McCleary explique mieux que d'autres cette difficulté essentielle, mais n'arrive pourtant pas à la décrire *mathématiquement*, pour cause d'absence de contexte *calculabilité* : il faudrait là travailler dans $\mathcal{LC}$.

En vérité on pourrait, en utilisant notamment la suite spectrale de Browder-Bockstein, transformer les suites spectrales en algorithmes ; mais la validité du résultat ne serait accessible qu'aux super-experts en algorithmique et de plus les méthodes ainsi obtenues seraient encore bien moins utilisables concrètement que celle d'Edgar Brown pour les groupes d'homotopie ! On laisse donc définitivement dormir cette idée.

Les deux autres solutions au problème MATH, celles qu'on a baptisées RSH et RSG vont consister justement à transformer suites exactes et suites spectrales en *véritables* outils de calcul, par des méthodes telles que :

- La validité théorique est incontestable, au moins pour ceux qui disposent d'un background raisonnable en informatique théorique ;
- Un espace de travail pour des applications concrètes est ouvert.

Si ceci est réalisé, une solution digne d'intérêt pour le problème MATH résulte alors des méthodes usuelles de topologie algébrique. C'est le cœur des solutions RSH et RSG.

5. Les solutions RSH et RSG

La solution RSH [14] est due à Rolf Schön. Le principe général de la solution RSG²⁷ est dû au présent auteur [18], mais sa forme définitive, très supérieure, résulte

²⁴ Et simplement connexes, sans quoi on bute inévitablement sur les résultats de non-calculabilité de Novikov et Rabin. On ne précisera plus ce point.

²⁵ Soixante ans après Hilbert, Ackermann, Gödel, Church et Turing ! Sans commentaire.

²⁶ C'est pourquoi tant de « résultats » de topologie algébrique sont en fait *illusionnistes*.

²⁷ La coïncidence RS = Rolf Schön = Rubio-Sergeraert nous impose de compléter l'acronyme par l'indication géographique H pour Heidelberg ou G pour Grenoble.

d'un travail commun avec Julio Rubio [13], travail qui a mené non seulement à une solution théorique *remarquablement simple* du problème MATH, mais aussi, grâce justement à sa simplicité, à une utilisation *concrète* des résultats ainsi obtenus pour un programme logiciel assez vaste, voir [6].

5.1. La solution RSH

Il faut à nouveau considérer l'équivalence de chaînes fondamentale :

$$C_* . K / \overset{''}{\Longleftrightarrow} C_*^m . K /$$

Le complexe de gauche contient « tout » mais n'est pas de type fini, il est donc inutilisable sur machine ; le complexe de droite est au contraire de type fini, mais l'essentiel de l'information contenue dans le complexe de gauche y est perdu. Schön construit un système inductif de complexes de type fini $\{[C_*]_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où $\lim_{k \rightarrow \infty} [C_*]_k = C_* . K /$. Il réussit à organiser tout ça de telle façon que :

- Grâce aux méthodes de programmation fonctionnelle, ce système inductif est installable et utilisable sur machine.
- La propriété à la limite de son système inductif implique qu'il *contient* le type d'homotopie de l'espace sous-jacent K .

La solution du problème MATH de Schön est donc :

$$H T_{RSH} = \{[C_*]_k\}_{k \in \mathbb{N}}$$

C'est une systématisation très ingénieuse de la méthode d'Edgar Brown pour le calcul des groupes d'homotopie [3]. Le cadre de travail beaucoup plus conceptuel retire *a priori* l'objection de complexité énoncée par Edgar Brown lui-même contre sa méthode. Rolf Schön parvient en particulier à obtenir des versions effectives des suites spectrales classiques, Serre et Eilenberg-Moore, pour ces objets. Il démontre très complètement pourquoi il a bien ainsi obtenu une solution du problème MATH. Il est fort dommage qu'aucun travail concret n'ait été envisagé autour de la solution de Rolf Schön : le contexte algorithmique est exceptionnellement intéressant et d'une grande nouveauté ; quel que soit le résultat final sur l'efficacité des algorithmes obtenus, la méthode de Schön *doit absolument* être implémentée, notamment pour l'intérêt propre des algorithmes qui doivent y être développés.

5.2. Programmation fonctionnelle

Les méthodes de programmation fonctionnelle jouent un rôle essentiel dans la solution RSH. De quoi s'agit-il ? Le cœur du système inductif $\{[C_*]_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de Schön est un *algorithme* S , objet machine fixe, tel que, si on passe à cet algorithme un entier *quelconque* k , par exemple 7, alors S *construit* dynamiquement l'objet $S.7/ = [C_*]_7$, la 7^e approximation de type fini du gros complexe $C_* . K /$; l'objet machine $S.7/$ est à son tour un paquet d'algorithmes capables de répondre à des questions comme :

- Quelle est la base distinguée de $[C_4]_7$?
- Quel est le bord du générateur n° 5 de $[C_4]_7$?
- Quelle est la face²⁸ n° 3 du même générateur ?

²⁸ Les $[C_*]_k$ sont en fait des sous-complexes *simpliciaux* de $C_* . K /$; la réponse est triviale pour un complexe simplicial, mais essentielle dans le cadre plus général des *ensembles* simpliciaux.

Pour un calcul particulier, comme par exemple celui du groupe d'homotopie ²⁹ $\beta_6.S^3/$, il n'y aura en définitive qu'un nombre fini de questions de cette sorte à poser, ne faisant intervenir qu'un nombre fini d'approximations de type fini de « gros » complexes. Les suites spectrales en jeu sont bien cette fois des *algorithmes* de calcul. Le problème MATH est résolu, avec beaucoup d'élégance.

On voit que les méthodes de programmation fonctionnelle permettent à Schön de « s'approcher » arbitrairement près du gros complexe $C_*.K/$, obtenant ainsi les informations nécessaires pour déterminer le type d'homotopie du complexe K sous-jacent. Ce qui lui a permis en particulier de se dispenser des structures effroyablement compliquées à base d'opérades qui étaient nécessaires pour la solution JS.

5.3. Version localement effective de $C_*.K/$

La troisième solution, la solution RSG, tire le meilleur parti de l'outil *fonctionnel*, au sens des algorithmiciens. Contrairement à ce qui a été affirmé à plusieurs reprises, bien qu'il ne soit pas de type fini, le complexe $C_*.K/$ est parfaitement installable sur machine ! Sous une forme affaiblie qui est le sujet principal de ce texte, sous la forme que nous appelons *localement effective*.

La non finitude très fréquente de $C_*.K/$ interdit définitivement l'installation *complète*, au sens $\mathcal{LE}$, de ce complexe sur machine. Mais un type de *semi*-installation reste disponible, qu'on appelle un codage *localement effectif* : c'est un couple $.O; @/$ d'algorithmes vérifiant les propriétés suivantes :

- La première composante O (fonction caractéristique) est un algorithme

$$O : \mathcal{U} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbf{Bool}:$$

L'ensemble $\mathcal{U}$ (univers) est l'ensemble, dénombrable, de *tous* les objets machine. L'algorithme O répond le booléen $\top$ (vrai) pour la donnée $.a; n/$ si et seulement si l'objet machine a est un générateur (simplexe) de $C_n.K/$.

- La deuxième composante $@$ (opérateur de face) est un algorithme :

$$@ : \mathcal{U} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{U}:$$

Un triplet $.a; i; n/$ est acceptable par cet algorithme seulement si $O.a; n/ = \top$, auquel cas a est donc un n -simplexe de K et notre algorithme $@$ doit retourner la i -ème face³⁰ ; la composante i doit donc à son tour vérifier $0 \leq i \leq n$.

C'est cet objet $\mathbf{x}K = [C_*.K/]_{LE} = .O; @/$, si original dans notre paysage, qui justifie le titre science-fiction de ce texte. L'indice « LE » doit être lu « version localement effective de... ». Il est nécessaire de connaître ici un peu de « vraie » logique pour comprendre les points suivants :

- L'objet $\mathbf{x}K$ est un *terme* $\mathcal{JF}$ (voir [2]). C'est en particulier une chaîne de caractères *finie*, même si K est « très » infini.
- Du point de vue $\mathcal{JF}$, l'objet $\mathbf{x}K$ est une définition *complète* du complexe simplicial K ; « rien » n'y est oublié.

²⁹ Groupe un peu fétiche : c'est le premier qui résista à Serre dans sa thèse : un problème d'extension en fin de course ne lui permettait pas de choisir entre $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$ et $\mathbb{Z}_{12}$.

³⁰ Les connaisseurs notent qu'on a surtout codé la structure *simpliciale* de K , le complexe de chaînes $C_*.K/$ étant à considérer comme un sous-produit. Il est classique qu'avec le complexe de chaînes *seul*, on a déjà perdu le type d'homotopie !

– Le théorème de Post [5] implique que, dans $\mathcal{LC}$, l'objet $\mathfrak{X}K$ n'est pas une définition du complexe simplicial K ; par exemple aucun algorithme de portée générale ne peut déterminer si le complexe K sous-jacent est vide ou non. En particulier aucun algorithme de portée générale ne peut déterminer les groupes d'homologie de K .

L'objet $\mathfrak{X}K$ est donc un oracle, comme adorent dire les informaticiens, qui sait répondre à *certaines* questions au sujet de K , seulement celles qui sont de nature *locale*. L'objet $\mathfrak{X}K$ veut bien vous dire si tel « candidat » simplexe est effectivement un simplexe de K ; si oui, il veut bien vous donner ses faces ; par contre l'oracle $\mathfrak{X}K$ est incapable de vous dire si K est vide, connexe, simplement connexe, etc. Alors que du point de vue $\mathfrak{Z}\mathfrak{F}$, les groupes $H_n \mathfrak{X}K / \beta_n \mathfrak{X}K, \dots$, sont parfaitement définis ! Ce sont d'ailleurs ces groupes qui vous intéressent mais ils ne sont pas $\mathcal{LC}$ -déductibles de cet objet !

L'analogie avec l'oracle qui définit le problème « $P \neq NP$? » (voir encore [5]) est flagrante. Un algorithme de complexité NP ne sait pas trouver rapidement une solution à votre problème ; par contre si vous avez une solution à proposer, il sait vous dire « tout de suite » si votre solution est correcte. Un oracle NP n'est donc rien d'autre qu'un codage *localement* effectif *efficace* de l'ensemble des solutions du problème, mais il est incapable de vous dire en temps polynômial si cet ensemble de solutions est vide ou non !

Noter que l'oracle du problème P - NP ne sert pratiquement à rien, au moins du point de vue théorique, sinon à énoncer un superbe problème³¹. Le point le plus original dans notre situation est donc le fait qu'au contraire l'oracle $\mathfrak{X}K$ joue chez nous un rôle *essentiel* : il va être la clé d'une solution efficace du problème $MATH$, ou, si on préfère, une extension *entière* de la théorie de Sullivan [25]. De plus notre oracle $\mathfrak{X}K$ ne sait répondre que localement, mais il est pourtant exactement ce qu'il faut ajouter au complexe minimal $C_*^m K /$ pour une description *complète* du type d'homotopie de K , notion *globale*³².

Cette situation si originale, si voisine du problème P - NP , devrait normalement intéresser les chasseurs de prime Clay.

5.4. La solution RSG

L'objet $\mathfrak{X}K$ est la composante clé de la solution RSG du problème $MATH$. Il suffit en effet d'adopter comme modèle algébrique du type d'homotopie de K l'équivalence d'homotopie :

$$H T_{RSG} = [\mathfrak{X}K \overset{''}{\longleftrightarrow} C_*^m K /]:$$

Le cahier des charges est satisfait. Ce modèle $H T_{RSG} \cdot K /$ est installable³³ sur machine et un *algorithme* permet de décider l'égalité de $H T_{RSG} \cdot K /$ et $H T_{RSG} \cdot L /$. Il suffit le cas échéant de suivre par exemple le plan de calcul de Schön : les suites spectrales de la topologie algébrique deviennent en effet, si on les applique à de tels objets, des *algorithmes* de calcul des objets images, espace total ou fibre ou base d'une fibration. L'essentiel du travail en la matière avait été fait il y a bien longtemps par Shih Wei-shu [21] pour la suite spectrale de Serre, puis Julio Rubio (voir [17]) a obtenu le même

³¹ Du point de vue pratique, un vérificateur de mot de passe est presque toujours un tel oracle.

³² L'analogie avec la solution *fonctionnelle* de Laurent Schwartz pour modéliser les distributions est elle aussi flagrante : une distribution est un *oracle* qui répond à des questions sur les fonctions C^∞ à support compact, seule possibilité pour « implémenter » un objet si nébuleux.

³³ Mieux : il est *installé* [6].

résultat pour la suite spectrale d'Eilenberg-Moore, sensiblement plus complexe. Une solution remarquablement simple du problème MATH est ainsi obtenue.

5.5. Constructions topologiques

Soit $\mathcal{S}$ un endofoncteur de la topologie, par exemple le foncteur de Serre « espace de lacets » Ω ; il fait correspondre au complexe simplicial K l'espace fonctionnel³⁴ ΩK des applications continues du cercle S^1 dans K . Il se trouve que ΩK est « moralement » l'inverse de K , c'est dire son intérêt. Comment déduire $H T_{RSG} \cdot \Omega K /$ de $H T_{RSG} \cdot K /$:

$$[\Omega K \xleftarrow{\Omega} C_*^m K /] \xrightarrow{???} [\Omega \cdot \Omega K \xleftarrow{\Omega} C_*^m \cdot \Omega K /]$$

Il est classique que $C_*^m \cdot \Omega K /$ ne détermine pas $C_*^m \cdot \Omega K /$, par exemple $C_*^m \cdot S^2 \vee S^4 / = C_*^m \cdot P^2 \mathbb{C} /$, alors que $C_2^m \cdot S^2 \vee S^4 // = \mathbb{Z}$ et $C_2^m \cdot P^2 \mathbb{C} / = 0$. C'est exactement là l'origine des travaux des Sisyphe évoqués Section 3.3.

Par contre ΩK détermine $\Omega \cdot \Omega K$, plus précisément $\mathcal{L}\mathcal{C}$ -détermine, et ce grâce au travail de Kan évoqué en note. On a déjà vu que ΩK ne $\mathcal{L}\mathcal{C}$ -détermine pas $C_*^m K /$ et en particulier $\Omega \cdot \Omega K$ ne $\mathcal{L}\mathcal{C}$ -détermine pas $C_*^m \cdot \Omega K /$. Le couple $(\Omega K; C_*^m K /)$ ne $\mathcal{L}\mathcal{C}$ -détermine pas non plus $C_*^m \cdot \Omega K /$, par contre l'objet *complet* $H T_{RSG} \cdot K / = [\Omega K \xleftarrow{\Omega} C_*^m K /]$ lui $\mathcal{L}\mathcal{C}$ -détermine $H T_{RSG} \cdot \Omega K / = [\Omega \cdot \Omega K \xleftarrow{\Omega} C_*^m \cdot \Omega K /]$: le cordon ombilical ΩK est absolument indispensable. Moyennant quoi, par banale récurrence, on déduit notre solution pour l'itération de la construction Cobar d'Adams, si simple qu'il n'a pas été difficile de la programmer sur machine ; solution à l'origine des aventures épiques de Carlsson évoquées en fin d'article.

6. De l'accueil de la solution RSG par la profession

Le résultat obtenu trouble toujours les témoins, preuve s'il en fallait une de son extrême nouveauté. La nature si étrange de l'objet ΩK indique que l'essentiel de notre solution n'est pas du tout dans la topologie algébrique, mais dans les possibilités si méconnues de la programmation fonctionnelle³⁵, situation elle aussi très nouvelle, qui plonge les « commentateurs » dans des abîmes de perplexité, au moins ceux que les circonstances contraignent à opiner. Ils se répartissent grossièrement en deux classes *contradictoires*, dont nous avons par chance deux beaux exemples prototypes écrits, un pour chacune d'elles.

Les algorithmes obtenus sont si puissants, y compris pour des calculs concrets, que beaucoup cherchent avec opiniâtreté où pourrait se cacher un bug *théorique* dans cette solution si simple du problème MATH. La correction des résultats concrets obtenus, au moins de ceux qui sont vérifiables par d'autres moyens, apparemment ne suffit pas pour ce faire. L'un des épisodes les plus savoureux en la matière est le « rapport » de referee [15] où le dit referee n'hésite pas à conclure : « The algorithmic claim is a joke », alors que l'article proposé donnait toutes les indications nécessaires pour que

³⁴ En fait une version simpliciale de l'espace ΩK , possible grâce au superbe travail de Kan [10] des années 50, travail qui trouve ainsi soudain tout son intérêt.

³⁵ Un autre beau succès de la programmation fonctionnelle est le théorème d'incomplétude de Gödel : la numérotation des objets mathématiques n'est autre en effet qu'un *logiciel* de programmation fonctionnelle permettant aux relations de travailler éventuellement sur elles-mêmes, puis de rencontrer l'obstacle diagonal de Cantor. C'est pourquoi la démonstration de Church basée sur le λ -calcul est si simple.

le lecteur puisse essayer lui-même, sur la machine de son choix, les... algorithmes résultats. Article proposé à une revue « computationale » par l'intermédiaire de l'un des membres de son Comité de Rédaction, topologue médaille Fields en pleine activité.

L'autre classe de témoins est pathologique; elle est moins fournie³⁶ mais déshonore la profession. Ces témoins-là décident que notre résultat est sans intérêt, et/ou trivial, ou encore, œuvre d'une autre médaille Fields dans un contexte très officiel, qu'il n'y a pas de résultat du tout. Dans le même registre, un autre referee, l'un des meilleurs topologues de ces trente dernières années, sollicité par une revue mathématique top-niveau, ajoute que de toute façon si les algorithmes obtenus ne sont pas à temps polynômial, ils ne peuvent avoir d'intérêt [16]. Ce qui, dans le contexte auquel il pense, équivaut à exiger une démonstration de $P = NP$. Alors qu'en fait nos algorithmes sont bien à temps polynômial par rapport à l'énoncé approprié.

On a déjà expliqué que Hilbert, Ackermann, Gödel, Church et Turing avaient fait l'essentiel de leur travail il y a plus de soixante ans. Messieurs les topologues, vous êtes à l'origine de certaines des plus belles réussites mathématiques depuis cinquante ans; félicitations, très sincères. Mais il est peut-être temps néanmoins de reconsidérer un peu votre discipline à la lumière du travail des autres mathématiciens, sinon l'académisme vous menace. Ou quelquefois le ridicule.

Corollaire immédiat de cette situation, la solution $H T_{RSG}$, sous la forme définitive obtenue dans la thèse de Julio Rubio (résumée en [17]), n'est toujours pas *publiée*. Cette thèse a été soutenue en Octobre 1991. Compte tenu des nombreux échecs essayés dont vous n'avez là qu'un tout petit échantillon, nous avons décidé d'inverser le problème et d'attendre³⁷ les propositions des revues qui seraient intéressées.

7. Le logiciel Kenzo.

Il a déjà été expliqué que les solutions JS et RSH du problème MATH n'ont pas jusqu'à présent donné de résultats concrets, contrairement à la solution RSG.

Cette dernière s'est concrétisée en un premier logiciel, baptisé EAT (Effective Algebraic Topology); écrit en 89-90, il permettait déjà des calculs qui ont mis en échec les meilleurs topologues. Une version de portée beaucoup plus large a été récemment entièrement réécrite, baptisée Kenzo³⁸, voir [6]: 16.000 lignes Lisp écrites dans un travail commun avec Xavier Dousson [7]. Le but défi qui nous était constamment opposé, de façon assez puérile³⁹, à savoir le calcul des premiers groupes d'homotopie de complexes simpliciaux *arbitraires*⁴⁰, est atteint. Dans ce registre, notre solution au problème MATH donne immédiatement comme sous-produit une solution simple et naturelle au problème *théorique* de la calculabilité des groupes d'homotopie, à comparer avec les démonstrations si complexes d'Edgar Brown [3] et Rolf Schön [14].

De plus, contrairement à la première solution, elle est utilisable pour des problèmes concrets. Par exemple le groupe $\beta_6.S^3/$ est calculé par Kenzo en 2 minutes avec un PC du supermarché; le calcul met en jeu 53 objets $\clubsuit K$ pour divers complexes K

³⁶ Elle s'est enrichie récemment d'un « expert », anonyme, qui a mis fin à la PEDR de l'auteur.

³⁷ L'auteur tient à la disposition de qui le souhaite la procédure très raisonnable imaginée en ce sens.

³⁸ Nom du chat de l'auteur: cat = Constructive Algebraic Topology.

³⁹ Il faudrait pour bien faire une version effective *entière* de la suite spectrale d'Adams, qui reste à déterminer, un bien beau sujet à attaquer à la lumière des travaux de Smirnov.

⁴⁰ Un tel programme ne calculera jamais de nouveaux groupes d'homotopie de *sphères*, de même qu'aucun programme de factorisation d'entiers *quelconques* ne trouvera de nouveaux nombres de Mersenne premiers.

appropriés. Un nombre fini, quelques dizaines de milliers, de questions *locales* sont posées à ces objets, et ces réponses suffisent à déterminer la solution $\beta_6.S^3/\mathbb{Z}_{12}$. Voir un autre exemple de calcul de groupe d'homotopie dans la démo-web accessible par [6]. Voir aussi à ce sujet l'article de Fred Cohen suscité par notre travail, accessible pas le même chemin.

Le groupe $\beta_6.S^3/$ est maintenant le b-a-ba des topologues, mais si on continue d'examiner les calculs possibles sous Kenzo, on trouve très vite des calculs « connus » depuis longtemps des dits topologues, à ceci près que si on les met en demeure de les exécuter, d'une part on trouve bien peu de partants, et d'autre part l'expérience montre qu'il leur arrive d'échouer. Par exemple le calcul de $H_5.\text{''}^3.\text{Moore}.\mathbb{Z}_2;4///$ est *en principe* une conséquence d'un résultat très ancien (1966) de Milgram⁴¹. Deux éminents collègues s'y sont essayés, avec des méthodes complètement différentes. Le premier a proposé successivement deux résultats qui étaient tous les deux incorrects. Le second a fini par constater qu'il ne savait pas appliquer la suite spectrale de Bockstein nécessaire pour terminer son calcul. Exemple de résultat illusionniste. Malgré cette infortune, ces collègues ont eu au moins le mérite d'essayer, bravo et merci ; le lecteur aura compris qu'on préfère gentiment ne pas expliquer ce qu'il faut penser des autres. Le programme Kenzo trouve le résultat en 70 secondes, après avoir construit en 60 *millisecondes* 59 objets ✂K, prouesses de la programmation fonctionnelle sous Common Lisp : ces objets « du 3^e type » sont aussi banals dans l'environnement ad hoc que le prix du kilo de tomates dans la balance électronique du super-marché.

Puis viennent les calculs où aucune « méthode », *même théorique*, n'est connue à ce jour pour en venir à bout, à l'exception bien sûr des solutions JS et RSH, équivalentes à la nôtre sur le plan théorique. L'exemple suivant cumule des « difficultés » classiques :

$$H_5.\text{''}.\text{''}^2.P^\infty\mathbb{R}=P^3\mathbb{R}/\cup_2 D^3/;\mathbb{Z}/=???$$

Le programme Kenzo détermine ce groupe en un peu moins d'une heure, avec l'aide de 55 objets ✂K. Exemple de résultat non-illusionniste.

Un topologue peut trouver cet exemple artificiel ? Il a tort. On sait depuis Serre que le calcul des groupes d'homologie des espaces de lacets itérés permet de « tout » faire, d'où l'intérêt qui leur est accordé. C'est ainsi que dans un article de 1995 [4, p. 545], Carlsson et Milgram expliquent exactement quel est le point où la théorie actuelle est en échec à ce propos, au moins ce qu'ils en connaissent. Soit X un CW-complexe de type fini 3-réduit *qui n'est pas* une suspension ; il se trouve que l'exemple le plus simple est notre quotient $P^\infty\mathbb{R}=P^3\mathbb{R}$. Il résulte du travail de Serre [20] qu'il « existe » (attention, dans $\mathfrak{J}\mathfrak{F}$) un CW-complexe de type fini Y dont le type d'homotopie est celui de ''^3X ; Carlsson et Milgram expliquent comment un autre travail d'Adams permet de déterminer un nombre suffisant de cellules pour la construction de Y , puis ils font état de difficultés *sévères*, sic, pour déterminer les matrices de bord correspondantes. En langage de mathématicien, on dit que la $\mathfrak{L}\mathfrak{C}$ -existence de ces matrices est un problème *ouvert* ou, de façon moins pédante, qu'on ne connaît pas d'algorithme les produisant. L'exemple le plus simple en la matière est la détermination des matrices de bord du complexe Cobar *itéré* d'Adams de $\text{''}^3.P^\infty\mathbb{R}=P^3\mathbb{R}/$. Le programme Kenzo détermine en 35 secondes la matrice de bord du dit complexe entre les dimensions 5 et 4, matrice à 13 lignes et 33 colonnes dont les termes varient de -4 à +6, ce qui, pour ceux qui savent ce que ceci implique, décrit une géométrie absolument hallucinante

⁴¹ Voir l'article synthèse [4].

du modèle dont Serre et Adams savaient démontrer la $\mathfrak{J}\mathfrak{F}$ -existence. Kenzo sait donc résoudre avec ses modestes moyens le problème « sévère » de Carlsson et Milgram.

Il est amusant dans ces conditions de rapporter que l'article [18] contient l'essentiel de la solution. Avant d'être accueilli par les *Advances* en 1990, cet article avait été proposé en 1989 aux *Annals of Mathematics*, par l'intermédiaire de... Gunnar Carlsson, alors membre de son Comité de Rédaction. L'article avait été refusé sans lecture, puisque, selon la réponse qui avait été retournée, il n'intéressait pas un large lectorat (*broad readership*, sic). Si cet article n'avait eu qu'un seul lecteur, Carlsson, il aurait au moins évité à ce dernier d'énoncer comme ouvert⁴², en 1995, dans le texte de référence sur la spécialité, un problème majeur résolu en fait depuis plusieurs années, et de façon très simple [18, Theorem 10.3]. Il aurait en outre appris comment l'énoncer correctement.

Références

- [1] Hans J. Baues. *Homotopy types*. in [9], pp 1-72.
- [2] N. Bourbaki. *Théorie des Ensembles, chap. 1 et 2*. Hermann, 1960.
- [3] Edgar H. Brown Jr.. *Finite computability of Postnikov complexes*. *Annals of Mathematics*, 1957, vol. 65, pp 1-20.
- [4] Gunnar Carlsson and R. James Milgram. *Stable homotopy and iterated loop spaces*. in [9], pp 505-583.
- [5] Patrick Dehornoy, *Complexité et décidabilité*. Springer, 1993.
- [6] Xavier Dousson, Julio Rubio, Francis Sergeraert et Yvon Siret. *The Kenzo program*. www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/
- [7] Xavier Dousson. *Un programme pour le calcul des groupes d'homotopie*. Thèse Institut Fourier, 1999, Grenoble.
- [8] Samuel Eilenberg and Norman Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton University Press, 1952.
- [9] *Handbook of Algebraic Topology* (Edited by I.M. James). North-Holland (1995).
- [10] Daniel M. Kan. *A combinatorial definition of homotopy groups*. *Annals of Mathematics*. 1958, vol. 67, pp 282-312.
- [11] J. Peter May. *Simplicial objects in algebraic topology*. Van Nostrand, 1967.
- [12] John McCleary. *User's guide to spectral sequences*. Publish or Perish, Wilmington DE, 1985.
- [13] Julio Rubio, Francis Sergeraert. *Constructive Algebraic Topology*. En préparation, voir www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar.
- [14] Rolf Schön. *Effective algebraic topology*. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1991, vol. 451.
- [15] www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/dcg-report.html
- [16] www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/asens-report.html
- [17] www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/survey.ps
- [18] Francis Sergeraert. *The computability problem in algebraic topology*. *Advances in Mathematics*, 1994, vol. 104, pp 1-29.
- [19] Francis Sergeraert. *Constructive Algebraic Topology*. Exposé aux Rencontres EACA, Tenerife, Septembre 1999. www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Papers/tenerife.ps
- [20] Jean-Pierre Serre. *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*. *Annals of Mathematics*, 1953, vol. 58, pp. 258-294.
- [21] Weishu Shih. *Homologie des espaces fibrés*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 1962, vol. 13.
- [22] V.A. Smirnov. *On the chain complex of an iterated loop space*. *Mathematics of the USSR, Izvestiya*, 1990, vol. 35, pp 445-455.
- [23] V.A. Smirnov. *The homology of iterated loop spaces*. www-fourier.ujf-grenoble.fr/~sergerar/Kenzo/smironov-s.ps
- [24] Justin R. Smith. *m-structures determine integral homotopy type*. vorpal.mcs.drexel.edu/research/m-homotop.pdf.

⁴² Pardon, sévère.

- [25] Dennis Sullivan. *Infinitesimal calculations in topology*. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S., 1977, vol. 47, pp 269-331.

Utilisation des mathématiques en biologie

Pierre Auger (UMR CNRS 5558, Université Claude Bernard Lyon 1)

1. La recherche en Biologie Mathématique

1.1. Les étapes de la recherche en biologie et les mathématiques

La recherche en Biologie passe par une démarche expérimentale permettant le recueil des données de terrain par exemple en écologie ou dans le domaine des sciences de l'environnement. Les données de terrain sont ensuite analysées et traitées. Enfin, bien souvent, la modélisation mathématique est utilisée pour rechercher les mécanismes responsables de l'évolution et de la dynamique observée. La modélisation s'accompagne en général de simulations numériques avec un ordinateur.

Les mathématiques interviennent à chacune des étapes précédentes. Les plans d'échantillonnage sont très utiles et permettent de déterminer les mesures qui vont être effectuées en fonction des questions biologiques posées. Cette étape est très importante pour éviter de réaliser des expériences coûteuses qui s'avèrent ensuite inexploitable. L'analyse des données permet d'extraire des informations des données de terrain et d'établir des relations entre les différentes variables. L'étape ultime consiste à construire un modèle mathématique et/ou informatique qui a pour but de reproduire la dynamique observée et de l'expliquer. Les systèmes dynamiques constituent l'outil privilégié pour cette étape de modélisation mathématique et informatique. Cet article va se limiter à ce dernier aspect que je connais mieux, c'est-à-dire à l'utilisation des Mathématiques pour la modélisation des systèmes biologiques.

On peut constater que dans ces dernières années, la part de la modélisation mathématique en Biologie n'a fait qu'augmenter. Aujourd'hui, la plupart des articles publiés par les grandes revues de Biologie présentent des modèles mathématiques. C'est particulièrement vrai dans le domaine de l'écologie et des sciences de l'environnement. Cela n'a pas toujours été le cas et l'on peut même dire qu'à l'origine, les biologistes dans leur ensemble étaient plutôt réfractaires aux mathématiques et à leur utilisation en Biologie. Aujourd'hui, la modélisation mathématique apparaît comme une étape incontournable de la recherche en Biologie.

1.2. Biologie Mathématique, les outils

Les systèmes dynamiques constituent l'outil fondamental de la modélisation en biologie. On trouve principalement des modèles mathématiques utilisant :

- des systèmes d'équations différentielles non linéaires, par exemple en dynamique de populations où les variables sont des effectifs de populations.

- des systèmes d'équations aux différences non linéaires où le temps est une variable discrète. Ces modèles sont assez populaires en Biologie car certains processus comme la reproduction sont annuels et se produisent chaque année à des périodes précises.
- des équations aux dérivées partielles dans le cas où la population étudiée est structurée en âge par exemple avec une variable d'âge continue.
- plus récemment des équations à retard qui permettent de prendre en compte le décalage entre une cause et son effet qui peut être retardé.
- la théorie du contrôle trouve de nombreuses applications en Biologie en particulier dans le domaine de la modélisation des ressources renouvelables. Il est fréquent de vouloir contrôler la dynamique d'une ressource en l'exploitant. On cherche à maximiser une capture ou un rendement tout en maintenant la ressource dans un état satisfaisant sans risquer l'extinction de cette ressource.
- les systèmes biologiques sont constitués de niveaux d'organisation correspondant à des échelles d'observation plus ou moins microscopiques. On parle en général des niveaux moléculaires, macromoléculaires, de la cellule, de l'organe, de l'organisme, de l'individu, de la population, de la communauté et de l'écosystème. Les échelles de temps et d'espace sont très différentes selon le niveau d'observation auquel on se place. Un problème important concerne l'utilisation des dynamiques lentes et rapides afin de prendre en compte plusieurs niveaux d'organisation en même temps et d'étudier leur couplage
- les problèmes de choix et de validation des modèles sont aussi très importants.

1.3. Les risques liés à la modélisation en Biologie

Deux risques majeurs, me semble-t-il, concernent la modélisation mathématique en Biologie :

- construire des modèles mathématiques sans biologie, c'est-à-dire ne s'appuyant sur aucune ou trop peu de données biologiques. Il s'agit de modèles qui ne sont jamais validés mais qui peuvent être utilisés pour faire des prédictions qui évidemment sont en général totalement inexactes.
- construire des modèles sans analyse mathématique. La floraison des logiciels de simulation numérique peut conduire certains chercheurs plutôt expérimentateurs à construire un modèle mathématique ayant pour but de représenter la dynamique du système qu'ils étudient. Il peut s'agir de modèles avec un grand nombre de variables et de paramètres. Il est parfois aisé de réaliser des simulations numériques des équations avec des logiciels disponibles dans le commerce. On obtient ainsi des séries de données issues de l'ordinateur qui sont ensuite interprétées biologiquement. Bien souvent, on peut douter que les solutions numériques correspondent aux vraies solutions du modèle mathématique. De plus, la sensibilité aux paramètres et aux conditions initiales n'est en général pas étudiée. Enfin, on ne connaît pas du tout la dynamique. Observe-t-on une dynamique transitoire ? Quels sont les états asymptotiques ?

1.4. Pour le développement d'une recherche en Biologie Mathématique

La communauté des mathématiciens peut sans doute et doit jouer un rôle important pour aider les biologistes dans la construction des modèles et pour l'étude analytique de ceux-ci lorsque celle-ci est possible. Pour l'heure, cependant, on peut constater que les deux communautés sont encore un peu isolées et n'ont que très peu d'interactions

ou pas du tout. Il y a des raisons assez fondamentales pour expliquer ce manque de contacts entre biologistes et mathématiciens :

- les mathématiciens considèrent trop souvent la modélisation mathématique en biologie comme une simple application sans grand intérêt mathématique, en tout cas ne relevant pas du tout des mathématiques pures mais plutôt du domaine de la Biologie elle-même. Certains voient même le risque d’être rejetés de leur communauté mathématique d’origine s’ils devaient pratiquer un peu trop une application plutôt que des mathématiques plus fondamentales.

- les biologistes voient dans la modélisation mathématique, en particulier lorsque l’on procède à des études analytiques des systèmes d’équations, des développements strictement mathématiques ne relevant absolument pas de leur discipline. Ils considèrent qu’il s’agit d’un exercice de mathématiques n’ayant aucune conséquence en Biologie.

Ces deux points de vue sont à mon avis erronés.

Il apparaît de plus en plus que la Biologie génère des nouveaux modèles mathématiques, de nouveaux systèmes d’équations dont l’étude doit être réalisée par des mathématiciens spécialistes de ce type de système. On peut trouver là des problèmes de mathématiques tout à fait intéressants. Il devient même parfois nécessaire de développer des nouvelles mathématiques pour étudier ces nouveaux systèmes.

Les biologistes se rendent de plus en plus compte qu’il est indispensable de procéder à l’étude de leurs équations. Cette étape est indispensable pour interpréter correctement les résultats obtenus par simulation numérique.

Aujourd’hui, on trouve encore peu de groupes de chercheurs en Biologie mathématique. Pour l’essentiel, il s’agit de chercheurs isolés soit des mathématiciens appartenant à des départements de mathématiques et qui sont un peu marginalisés dans leur communauté, ou bien des modélisateurs dans des départements de Biologie qui font bien souvent de la prestation de service. Cependant, tout comme, la physique, a donné naissance à la Physique Théorique ou encore à la Physique Mathématique, il n’y a pas de doute que la Biologie donne naissance à une Biologie Théorique et Mathématique. Il est important que des équipes de Biomathématiciens se mettent en place et cela doit se faire en maintenant en permanence le contact entre biologistes et mathématiciens.

Les expériences de groupement de recherche en Biomathématiques au CNRS ont toutes été un succès. Elles ont permis de faire travailler ensemble des mathématiciens et des modélisateurs avec des biologistes. Ces échanges sont fructueux et conduisent à des travaux de recherche communs où les deux parties bénéficient des compétences mutuelles. De plus, dans ce type de collaboration, les risques dont nous avons parlé ci-dessus sont en partie écartés.

Il n’y a pas de doute que la discipline Biomathématique est en plein développement. Il s’agit d’une discipline jeune et en plein essor. Aujourd’hui, et à l’exemple des communautés étrangères, il semble nécessaire d’aller au-delà de simples structures de GDR et de fonder véritablement une discipline Biomathématique. Cela ne pourra pas se faire sans une véritable volonté de la communauté des mathématiciens à s’intéresser réellement et à valoriser les travaux de recherche dans ce domaine. Il serait important que de véritables équipes de recherche soient créées et mises en place en interface avec la communauté des Biologistes.

Un aspect important est de briser l’isolement des chercheurs en Biologie Mathématique et de leur permettre de se retrouver dans des équipes correspondant à leur activité

de recherche. Bien souvent, les chercheurs en Biologie Mathématique ont l'impression d'être jugés dans des commissions par des personnes qui ne connaissent pas ou très peu les problèmes de leur discipline. On peut même s'interroger sur la nécessité de créer des commissions de spécialistes et des grands organismes de recherche précisément dans le domaine de la biologie Mathématique. Cela apparaît nécessaire pour éviter que les moyens mis en œuvre soient déviés de leur véritable destination et que la discipline soit réellement reconnue ainsi que les chercheurs engagés dans cette discipline.

2. L'enseignement des Mathématiques pour la Biologie

Le développement d'une nouvelle discipline passe évidemment par son enseignement. Deux types d'enseignement sont possibles :

- des enseignements de mathématiques en biologie avec des filières biomathématiques en Licence et en maîtrise de Biologie comme à l'Université de Lyon 1 par exemple.
- des enseignements de Biologie et de modélisation en mathématique. On pourrait imaginer avoir des modules sur les systèmes dynamiques et leur utilisation en biologie dans les licences et les maîtrises de mathématiques.

Il est aussi indispensable que des DEA de Biomathématiques se mettent en place en collaboration entre Biologistes et Mathématiciens. Il en existe déjà un certain nombre, à Paris, à Lyon et à Grenoble.

Conclusion

Pour finir, nous pouvons quand même faire un bilan plutôt positif de l'évolution des dernières années. Il apparaît clair que la modélisation mathématique en Biologie apparaît comme un élément incontournable de la recherche en Biologie pour l'avenir. Dans ces conditions, on est en droit d'espérer que dans un avenir proche, des moyens soient apportés à la fois pour diffuser et enseigner cette nouvelle discipline et en même temps pour stimuler la recherche dans ce domaine par la création et le renforcement d'équipes performantes en Biologie Mathématique. Tout cela passe sans doute par une prise de conscience de la communauté des mathématiciens de la nécessité de ne plus négliger cette discipline mais au contraire de devenir l'un des partenaires essentiels dans ce domaine. Les enjeux sont importants en terme de nouvelles applications pour les mathématiciens, d'étude de problèmes nouveaux, de moyens et de postes qui seront sans nul doute accordés à la communauté de la Biomathématique pour permettre à cette discipline d'émerger.

La bibliographie suivante ne présente que quelques ouvrages généraux de Biologie Mathématique.

Bibliographie

L. Edelstein-Keshet, *Mathematical Models in Biology*. Random House, New York, 1988.

S.A. Levin. *Frontiers in mathematical biology. Lecture notes in Biomathematics* 100. S.A. Levin Editor. Springer Verlag, Heidelberg, 1994.

J.D. Murray. *Mathematical Biology. Biomathematics Texts* 19, Springer Verlag, Heidelberg, 1989.

H. Caswell. Matrix population models. Sinauer Associates Inc., Sunderland, Mass., 1989.

A.D. Bazykin. Nonlinear dynamics of interacting populations. World Scientific Series on Nonlinear Science. 11. World Scientific. Singapore, 1998.

F.C. Hoppensteadt. Mathematical methods of population biology. Cambridge Studies in Mathematical Biology 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

A. Okubo. Diffusion and ecological problems : Mathematical models. Biomathematics Volume 10. Springer Verlag, Heidelberg 1980.

V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Editions Jacques Gabay avec la permission de Gauthier-Villars, Sceaux, 1990.

F.C. Hoppensteadt & C.S. Peskin. Mathematics in Medicine and the Life Sciences. Texts in Applied mathematics 10. Springer Verlag. Heidelberg, 1992.

L. Segel. Mathematical models in molecular and cellular biology. L. Segel Editor. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

FRANCOPHONIE

Introduction

Jean-Jacques Risler

La francophonie est souvent considérée chez nous comme un sujet dépassé, voire « ringard », réservé aux réactionnaires et aux nostalgiques d'une époque révolue. Il suffit pourtant de voyager dans certains pays francophones, ou partiellement francophones, pour se rendre compte que celle-ci peut être vécue comme un combat essentiel, voire vital dans certains pays d'Afrique.

D'autre part le français joue en mathématiques un rôle certes modeste, mais plus important que dans les autres sciences, et plus important que les autres langues (hormis l'anglais évidemment) ; il suffit pour s'en convaincre de consulter les principales revues de mathématiques : on peut y voir régulièrement des articles écrits en français. De plus, les pays francophones (dont la France) font encore principalement leur enseignement et leur recherche en français.

Tout cela m'a amené à penser qu'il était du devoir de la SMF de s'intéresser au sujet et que, sans nécessairement avoir une attitude militante, il fallait soutenir les collègues étrangers qui combattent pour la francophonie, ou au moins leur marquer un peu d'attention. C'est le sens du dossier présenté ci-dessous.

J'ai ainsi sollicité des articles de mathématiciens francophones dont j'ai pu avoir l'adresse, leur demandant de présenter un peu les activités mathématiques de leur pays, vues si possible sous l'angle de la francophonie. Même si certains des papiers de ce dossier ne présentent pas un grand intérêt pour beaucoup de lecteurs (ils sont effet quelque fois purement descriptifs), ils montrent tout l'intérêt que portent leurs auteurs à cette initiative. Le fait que certains pays francophones ne soient pas représentés dans ce dossier n'est nullement intentionnel : il résulte de ce que je n'ai pas toujours su (ou pu) contacter l'interlocuteur qu'il fallait. J'espère d'ailleurs pouvoir compléter ce dossier dans un prochain numéro de la gazette.

Il y a en plus dans ce dossier un article de C. Duhamel (ex-attaché scientifique à l'ambassade de France à Bucarest) sur la délocalisation des diplômes français et un papier de C. Lobry, directeur du CIMPA, sur la politique du MAE en Afrique.

Mon souhait est que cette initiative ne reste pas sans lendemain, et que de nombreux collègues français ou non auront à coeur d'alimenter une rubrique régulière qui pourrait s'intituler par exemple « Nouvelles de la francophonie ». Outre des nouvelles de certains pays francophones, il manque clairement à ce dossier au moins deux papiers que je ne suis pas pour l'instant arrivé à obtenir : une enquête sur les publications mathématiques en français, et un article de fond répondant à la question : « faut-il encourager les mathématiciens francophones à publier en français ? »

J'espère que cette lacune pourra être comblée, et j'invite tout lecteur intéressé par le sujet à soumettre une contribution.

Francophonie mathématique et année mathématique mondiale

Bernard Courteau

Président de l'Association mathématique du Québec

L'Association mathématique du Québec soutient l'initiative de Jean-Jacques Risler et de la Société Mathématique de France visant à favoriser les échanges entre les mathématiciens et les professeurs de mathématiques de la francophonie. Cette initiative répond à ce désir de préserver la diversité culturelle dans les sciences et les mathématiques de façon que le mouvement de mondialisation soit autre chose que la simple expression d'une hégémonie.

Il est indéniable que la langue anglaise est à l'heure actuelle la « lingua franca » de la science et des mathématiques pour ce qui est de la recherche et du développement. Il est clair aussi que pour la diffusion dans le grand public et pour l'enseignement, les langues nationales sont indispensables ; pour jouer leur rôle social et pour prendre tout leur sens, les mathématiques et les sciences doivent s'intégrer à la culture. Comme les mathématiques font partie du patrimoine universel et transcendent les cultures particulières, on peut être amené à penser que leur diffusion puisse contribuer au dialogue entre les hommes, à une organisation sociale plus civilisée et à la paix.

Pour le monde francophone, la langue française doit continuer à servir de métalangage qui donne du sens à son action, y compris en sciences, en mathématiques et dans les techniques. Pour cela, la francophonie doit entre autres maintenir et développer une politique de publication d'ouvrages de synthèse et de manuels en français à l'intention de l'enseignement universitaire, un réseau francophone de communications électroniques efficace ainsi qu'une politique de diffusion d'expositions scientifiques, de films, vidéos ou disques numériques à caractère scientifique destinés au grand public aux fins d'alimenter les musées nationaux, les maisons de la culture et les postes de télévision éducative. L'Association mathématique du Québec est prête, dans la mesure de ses moyens, à apporter sa contribution à une telle politique de la francophonie mathématique.

Le lancement de cette francophonie mathématique tombe à point puisque les communautés mathématiques nationales organisent actuellement, dans le cadre de l'Année mathématique mondiale, des activités visant à montrer les mathématiques en relation avec les autres domaines de la connaissance et comme partie intégrante de la culture. On peut donc déjà échanger de l'information là-dessus et voir de façon plus spécifique ce qui se prépare dans la francophonie.

Au Québec, des partenariats se sont établis très naturellement entre l'Association mathématique du Québec (AMQ), la Société Mathématique du Canada (SMC), l'Institut des sciences mathématiques (ISM) qui regroupe sept universités québécoises, le Centre de recherches mathématiques (CRM), l'Association canadienne française pour l'avancement des sciences (Acfas), le Conseil québécois pour l'enseignement des mathématiques (CQEM) qui regroupe les associations d'enseignants ou de chercheurs en mathématiques et en didactique, le Musée du Séminaire de Sherbrooke, le Centre d'exposition de l'Université de Montréal, les maisons d'éditions MODULO et Le Griffon d'Argile, ainsi que la troupe de théâtre pour enfants *Le petit Chaplin*. Cela a produit les projets suivants qui sont confirmés :

- (1) une exposition itinérante, interactive et animée sur les mathématiques, dont le maître d'œuvre est le Musée du Séminaire de Sherbrooke,
- (2) un projet d'affiches dans le métro de Montréal,
- (3) un encart sur les mathématiques dans la revue Québec Science,
- (4) une série "Mathématica" de 26 émissions de télévisions sur le nouveau canal Z,
- (5) un supplément de la revue Interface de l'Acfas sur les mathématiques en mars 2000,
- (6) un méga-congrès à Québec les 5, 6 et 7 mai 2000,
- (7) un ouvrage collectif de vulgarisation mathématique,
- (8) une pièce de théâtre sur les mathématiques pour enfants de 6 à 12 ans.

Réseaux mathématiques et délocalisation de diplômes français

Christian Duhamel

Département de mathématiques, université Paris-Sud

Le DESS d'Orléans implanté à Bucarest

Depuis quelques années, des universités françaises délivrent leurs propres diplômes dans des universités étrangères. Ainsi, depuis septembre 1996, l'université d'Orléans, a implanté à l'Académie (université en fait) d'études économiques de Bucarest son DESS de *Finance et contrôle de gestion*. En juillet 1999 sortira la troisième promotion d'une quinzaine d'étudiants roumains munis du diplôme universitaire roumain de cinquième année et du DESS d'Orléans pour des études intégralement suivies à Bucarest. Après accord avec les autorités académiques roumaines, l'entière direction pédagogique fut confiée à Orléans. C'est ce qui distingue ce DESS délocalisé des habituelles « filières francophones » sous responsabilité de l'université locale avec seulement l'appui d'une ou de plusieurs universités françaises. Il s'agissait bien de préparer une implantation en Roumanie d'une formation française délivrant un diplôme français et diplôme roumain, ce qui nécessite donc l'habilitation roumaine du diplôme.

Les cours de 1996-97 furent intégralement réalisés à Bucarest par des professeurs français. Progressivement une partie de plus en plus importante de la formation (identique à celle dispensée en France) est transférée à des enseignants roumains choisis par Orléans.

Le résultat est plus qu'encourageant : tous les étudiants munis de ce double diplôme trouvent une embauche dans des sociétés d'audit ou bancaire implantées en Roumanie. Les salaires proposés sont largement supérieurs aux salaires usuels et on maintient ainsi dans le pays de jeunes et brillants économistes qui, généralement, partaient pour l'étranger. Cette formation acquiert sa réputation et, venant de tout le pays, les candidatures se multiplient. Une fois le régime de croisière atteint et le transfert didactique opéré, le coût de l'intervention d'Orléans pour la formation en un an d'une vingtaine d'étudiants diplômés, devrait représenter l'équivalent de deux bourses annuelles en France.

Toujours à Bucarest, l'université Paris 1 a délocalisé depuis 1995 son DEUG, sa licence et sa maîtrise de Droit. À l'issue de la première année universitaire roumaine une centaine d'étudiants est sélectionnée et suit, en plus de la seconde année roumaine, une formation dirigée par des enseignants français et roumains choisis sous la seule responsabilité de Paris 1. Ils obtiennent, en plus des diplômes de l'Université de Bucarest, ceux de Paris 1. Là aussi le résultat en termes d'embauche et de salaire est remarquable.

À Budapest, l'université d'Amiens a implanté son diplôme de licence en économie dans une université hongroise. Le programme est établi en commun et les examens se déroulent sur les mêmes sujets et aux mêmes heures à Amiens et à Budapest, avec ensuite double correction franco-hongroise et classement commun des résultats.

D'autres expériences semblables existent, et toutes, dans leur diversité, ont en commun ce double diplôme qui représente :

- pour les étudiants un fantastique atout pour l'embauche ;
- pour les universitaires français, la perspective de mise en place de collaboration de recherche ;
- pour l'université d'accueil la possibilité d'attirer les meilleurs étudiants du pays, voire de devenir un centre de dimension internationale ;
- pour les entreprises françaises un excellent vivier de futurs cadres locaux ;
- pour le pays une possibilité de garder les meilleurs sur place ;
- pour les commanditaires (les ambassades de France) un coût de formation au moins 10 fois inférieur au coût d'étude en France sur bourses du gouvernement français. Plus, bien sûr, une implantation à long terme et la possibilité d'un meilleur suivi des anciens étudiants.

Dans tous les cas, l'université française partenaire engage sa réputation par la délivrance de ses propres diplômes et s'oblige ainsi à maintenir une vigilance et une évaluation permanente sur le niveau de la formation et du diplôme délivré. Généralement, ces formations devenant de véritables pôles d'attraction dans le pays, les étudiants qui en sont issus ont souvent des résultats meilleurs que les étudiants formés en France sur le même programme. La logique voudra peut-être qu'un étudiant français ait, dans quelques années, intérêt à suivre le DESS d'Orléans à Bucarest plutôt qu'à Orléans !

En mathématiques

Les motivations, le milieu universitaire et les perspectives d'embauche ne sont évidemment pas les mêmes en mathématiques qu'en droit, finance, gestion ou en commerce international. Toutefois, dans beaucoup de pays qualifiés d'émergents, il apparaît un réel besoin de renforcer le potentiel de formations en mathématiques. Cela est généralement présenté pour la formation des futurs ingénieurs et concerne plutôt les mathématiques appliquées. À cause de sa réputation, et de la présence maintenant sur place de quelques professeurs formés en France, notre pays est de plus en plus sollicité, surtout, semble-t-il, lorsque les formations existantes sont largement inspirées de modèles anglo-saxons. De plus, la récente crise financière et la construction européenne ont entraîné une évolution des mentalités poussant à chercher d'autres références que le strict modèle anglo-saxon. La France et l'Allemagne présentent, à cause de cela un nouvel attrait. Ainsi, quelques universités asiatiques nous sollicitent

pour renforcer sur place leurs enseignements de mathématiques en premier cycle (jusqu'au niveau de *bachelor of science*) de façon à permettre à leurs meilleurs étudiants de suivre en France des études technologiques.

En Inde

Depuis septembre 1997 un *master of science* en calcul scientifique a été ouvert à Pondichéry, dans une collaboration montée par Olivier Pironneau, professeur à Paris 6 et avec le soutien de l'ambassade de France. Ce master admet chaque année une quinzaine d'étudiants, et cinq ou six modules de cours sont faits par des professeurs français. La faculté a été équipée en ordinateurs et la bibliothèque fournie en livres. Plusieurs mathématiciens indiens ont été formés et commencent à assurer des cours dans des domaines introduits par l'équipe française. Le but est que l'élévation du niveau de cette formation permette à terme :

- d'une part la délocalisation à Pondichéry d'un DEA français,
- d'autre part la définition d'un réseau franco-indien de formation doctorale par cotutelle de thèse pour de futurs formateurs.

La perspective est d'implanter à Pondichéry un double diplôme (DEA puis thèse) français et indien sanctionnant une formation d'excellence dans ce domaine du calcul scientifique et ainsi capable d'acquérir une réputation permettant d'attirer des étudiants de tout le pays. L'affaire avance bien, même si cela est moins rapide que ce qui était initialement espéré.

En Asie du Sud-Est

Malaisie à la demande des mathématiciens de l'université de Penang, une intervention en mathématiques appliquées est initiée depuis 1998 par Jean-Pierre Puel (université de Versailles) et Dominique Chapelle (INRIA). Une première école d'été de dimension régionale aura lieu durant deux semaines en septembre 1999 sur le thème des éléments finis. Nous attendons de jeunes mathématiciens de Malaisie, Philippines, Vietnam, Thaïlande et Singapour. Le bilan de cette école devrait permettre de définir la suite de l'intervention dans ce pays où la demande officiellement formulée est de renforcer la formation mathématique pour les formateurs des futurs ingénieurs. L'idée est de créer, sans doute à Penang, un master de mathématiques appliquées permettant une dissémination à l'échelle du pays.

Philippines La demande fut formulée par une mathématicienne de l'Université des Philippines (UP), Mitos Navarro, ancienne boursière du gouvernement français ayant soutenu sa thèse en France. La volonté affirmée est de délivrer à terme à UP un double diplôme de master of science philippin et d'un DEA ou DESS de Limoges en mathématiques appliquées. La stratégie est d'abord d'implanter des modules consistant en d'abord une douzaine d'heures de préparation par des professeurs philippins, suivies d'une vingtaine d'heures par un professeur français. Ce module est soumis à un examen passé un mois après le départ de l'intervenant français et corrigé par lui. La note attribuée est intégrée dans le master philippin. Puis le cours doit être rédigé et photocopié par une équipe censée reprendre le cours l'année suivante. Les premiers modules sont ceux de Michel Thera de Limoges (coordinateur du projet) en février 1999 et de Doïna Cioranescu, de Paris 6, en juillet. Un autre est en préparation en

crypto-codage. Ces modules, au nombre de deux ou trois par an, seront désormais annoncés dans d'autres pays pour acquérir une dimension régionale. Y assisteront aussi des enseignants d'autres universités philippines réunies par un accord.

Action régionale Une coordination des actions en Malaisie et aux Philippines permettra de bénéficier du programme de coopération universitaire que prévoit de financer l'Union Européenne dans les mois à venir. D'autres interventions existent au Vietnam et en Thaïlande où Jean-François Mela et Francis Lavainne de Paris-Nord réalisent des écoles d'été de recyclage des formateurs universitaires. Un projet est d'implanter dans chacun de ces quatre pays une formation de master en mathématiques appliquées avec la perspective d'y délocaliser dans quelques années un diplôme français et de développer une coopération en formation doctorale. Ceci se ferait progressivement à partir de l'implantation de modules sur le modèle de ce qui se fait à UP. Chaque année une école d'été régionale permettra de faire se rencontrer les principaux intervenants des différents pays et d'envisager ainsi la construction d'un réseau fondé sur une perspective commune et fortement relié aux mathématiciens français et plus largement européens. Dans ce réseau sera discutée l'amélioration des formations mathématiques des ingénieurs. Une école du CIMPA prévue en septembre 2000 à Manille est intégrée dans ce cadre.

En Roumanie

C'est sans doute le pays où les projets de coopération en mathématiques ont été les plus soutenus depuis 1991, l'année d'entrée dans TEMPUS. Plus de cent thèses de math, le plus souvent en cotutelle et d'excellent niveau, ont été soutenues en Europe de l'Ouest, dont une grande majorité en France. Des dizaines de modules de DEA ont été réalisés en Roumanie même et un colloque franco-roumain a lieu tous les deux ans. Mais force est de constater que les résultats ne sont pas à la hauteur des efforts et financements mis en jeu. La raison principale en est que beaucoup de jeunes docteurs ont trouvé des postes à l'étranger et qu'il y a maintenant un véritable « trou » de génération parmi les mathématiciens de moins de 35 ans en Roumanie. Cause et conséquence de cela, dans ce pays où les salaires universitaires sont insuffisants, les pouvoirs en place, tant dans l'université que dans la recherche, se sont parfois ossifiés, chacun s'accrochant à la moindre position de pouvoir.

Cette année nous avons lancé ce qu'on peut appeler l'opération retour de la jeune diaspora roumaine : structurer à l'université Babes-Bolyai de Cluj d'abord un DEA où une partie importante des cours sera faite par de jeunes mathématiciens roumains installés en France. L'opération coordonnée par Andrei Moroianu, chercheur à l'X, et soutenue par la DRIC, a démarré en avril 1999. Cinq modules d'une vingtaine d'heures seront implantés cette année. En fonction des résultats, une perspective de délocalisation de deux DEA français (mathématiques pures et appliquées) sera envisagée. De plus, l'université de Cluj, en accord avec le ministère de l'enseignement, a décidé d'aménager un grand manoir qu'elle possède dans les Carpates en un centre régional pluridisciplinaire de séminaires et écoles d'été francophones. La partie mathématique pourrait être confiée au CIMPA. Déjà en juillet 1998 la SME a organisé à Cluj une école internationale très réussie en géométrie non-commutative « Espace avec singularités et monopôles ».

Délocalisation ou programmes externes ?

Cette politique d'implantation sur place de formations universitaires est largement mise en place par les universités anglo-saxonnes, mais dans des domaines qui ne sont généralement pas scientifiques. Alertée par les crises financières touchant ces pays, l'Australie pour qui l'accueil d'étudiants étrangers représente une source importante d'entrée de devises, envisage maintenant en Asie du Sud-Est l'implantation de campus rattachés à des universités mères australiennes. Mais il s'agit le plus souvent de formations en franchise sous forme de programmes externes délivrés par ces universités australiennes. La motivation est très largement commerciale, ce qui n'exclut pas nécessairement la qualité. Ce que nous proposons est différent. Il ne s'agit pas de développer une politique extensive mais d'implanter des formations délivrant, en plus des diplômes locaux, des diplômes d'universités françaises qui, par l'acquisition d'une réputation méritée d'excellence, ont vocation à devenir de véritables pôles attracteurs à l'échelle du pays voire de la région. On peut d'ailleurs concevoir la possibilité, qu'un étudiant français suive ces cours et reçoive le même diplôme français que s'il avait suivi les cours en France. Notre perspective est aussi d'envisager des collaborations de recherche par la mise en place de programmes de cotutelle de thèses et d'échange de professeurs. Cela situe la qualité visée et nous différencie des *external programs* implantés par des universités anglo-saxonnes au prétexte « d'adaptation aux conditions locales » : la formation y est coordonnée par l'université étrangère qui labellise seulement de son nom le diplôme délivré localement.

Et la francophonie ?

En Roumanie, le développement des *modules d'enseignement francophone* (MEF) implantés par des universitaires français depuis 1993 et maintenant au nombre de 75, fait que plusieurs DEA francophones de diverses disciplines (chimie, biologie, philosophie, littérature, gestion, ...) envisagent maintenant avec leurs partenaires français de délivrer des diplômes français. C'est aussi, par le passage obligé d'une rigoureuse expertise française, un moyen pour des équipes dynamiques de se soustraire aux pesanteurs locales. Certes, la francophonie roumaine est un cas très particulier. Mais dans d'autres pays, même si les cours sont en Anglais, une formation française délocalisée développant de plus des cotutelles de thèse, ne peut, à terme, que renforcer la francophonie. On peut d'ailleurs envisager l'exigence d'une connaissance minimum de la langue française pour délivrer, en plus du diplôme local et d'un « label » français, le véritable diplôme français. Pour cela un TOEFL (test of english as a foreign language) serait bien venu. Nous proposons le TREFLE : test de reconnaissance du français comme langue étrangère.

Suggestions

Des collaborations fortes existent en mathématiques avec d'autres pays comme le Chili, la Tunisie ou le Bénin, pour ne pas les citer tous. Elles pourraient aussi mener à une politique de délocalisation, adaptée à chaque cas spécifique. On peut espérer que ces expériences de délocalisation s'inscrivent dans le contrat de développement des universités françaises. Une formation doctorale s'engageant dans cette voie pourrait se voir attribuer :

– Des mois de professeurs invités permettant aux enseignants partenaires de venir réaliser dans le DE en France un volume d'enseignement comparable à celui réalisé dans leur pays par les professeurs français. Lesquels seraient alors déchargés, en France, des horaires de cours réalisés à l'étranger. Avec peut-être un coefficient correcteur à définir.

– Des moyens pour favoriser des cotutelles de thèses, si possible dans les deux sens, la publication des cours, la réalisation d'écoles d'été régionale, et la mise en réseau d'équipes de recherche sur des thèmes bien définis.

Une telle politique doit être conçue sur le long terme car il s'agit d'implanter de véritables « antennes » de formations françaises de troisième cycle. Elle nécessite une adaptation en temps réel au cas par cas, fonction du déroulement du projet, des imprévus, des financements possibles, etc. Elle nécessite aussi une grande rigueur à la fois dans l'évaluation et pour éviter la constitution progressive de féodalités confisquant la conduite de la coopération. L'avis régulier d'experts extérieurs pourrait être sollicité.

Francophonie Mathématique en Roumanie : Lumières et Ombres

Marius Iosifescu

Membre correspondant de l'Académie des sciences Roumaines

La francophilie des Roumains d'abord, qui devait entraîner la francophonie des élites roumaines surtout au XIX^e siècle et dans la première moitié du XX^e, date depuis plus de deux siècles. Vers la fin du XVIII^e siècle il y avait dans les Principautés danubiennes de nombreux émigrés dans les cours des princes ou des boyards. Ces Français ont posé les bases de l'enseignement scientifique dans les écoles roumaines, en grec ou en français, avant de l'être en roumain. Les premiers manuels de sciences roumaines sont des adaptations — en roumain ou en français — des œuvres françaises. L'enseignement français se trouve ainsi être le premier pas vers l'enseignement roumain des sciences et donc, vers le développement scientifique rapide accusé par les Roumains au XIX^e siècle.

Le deuxième pas s'est produit un peu plus tard, vers 1820. Nos premiers scientifiques sont venus presque naturellement apprendre en France, qui les a toujours accueillis avec générosité. On a là un cas particulier d'une situation bien plus générale ; presque tous nos dirigeants, hommes politiques ou savants depuis le début du siècle dernier jusqu'à la prise du pouvoir par les communistes, ont structuré leur esprit d'après l'enseignement français ; Alexandru Ioan Cuza avait étudié en France, de même que le premier recteur de l'Université de Bucarest, docteur en droit de Paris. Après la Grande Guerre, la présence de la langue, de la culture et de l'esprit français à côté de la langue et de la culture nationale est tout à fait remarquable et une bonne partie des Roumains considèrent la France comme leur seconde patrie.

Les scientifiques devenus docteurs ès sciences en France depuis le dernier quart du XIX^e siècle, de retour en Roumanie, ont enseigné dans les universités roumaines en imprimant la manière française de travailler aux écoles scientifiques qui naissaient sur le sol roumain. Entre les deux guerres mondiales, l'enseignement roumain formait déjà les premiers docteurs ès sciences dans le pays. Néanmoins, dans cet intervalle de

temps, il y eut encore presque autant de Roumains docteurs ès sciences de France que des quatre universités roumaines existant à l'époque. Pour donner une idée de l'ampleur prise par les rapports scientifiques franco-roumains en ce temps-là, signalons que dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris on trouve en 15 ans, de 1911 à 1925, 96 notes mathématiques dues à des auteurs roumains tandis que le seul premier semestre de 1929 en contient 23.

Nous pensons que rappeler les noms des scientifiques roumains formés en France avant 1940 serait dresser la liste de presque tous les grands noms de la science roumaine. Ce sont ces gens qui ont maintenu l'influence française dans la vie universitaire et la science roumaine pendant les premières décennies du pouvoir communiste. Ce pouvoir a détérioré jusqu'à l'anéantissement les relations scientifiques privilégiées entre la Roumanie et la France. En fait, les relations bénéfiques avec la science occidentale ont été à nouveau interrompues comme tant de fois au cours de notre histoire, cette fois-ci pour 50 ans.

Il convient d'exprimer notre gratitude envers la France pour le fait qu'à ce jour, depuis 1990, plusieurs centaines de jeunes scientifiques roumains ont pu bénéficier de bourses de formation doctorale en France. On se réjouit du fait que les candidats roumains accueillis en France ont eu des résultats stupéfiants, y compris dans les Écoles Normales Supérieures et à l'École Polytechnique, qui accueillent en France la crème de l'élite. (Nous revenons plus loin sur les ENS.). Là il y a danger : la découverte à l'ouest de cette élite étudiante roumaine peut amorcer une fantastique pompe aspirante et la nécessité de s'adapter à des critères économiques occidentaux fonctionnant dans des sociétés de consommation peut conduire à se détourner de cette élite. D'ores et déjà, une bourse à l'Ouest représente trop souvent pour un jeune scientifique de talent l'ouverture vers l'émigration. Ce phénomène paraît plus sensible dans la capitale et la tendance en est évidemment renforcée par un séjour prolongé hors de Roumanie. D'autant plus que, revenu au pays, le jeune boursier risque parfois de ressentir les effets de l'incompréhension de ceux, jeunes ou vieux, qui n'ont pas pu partir, qui représentent la très grande majorité et qui restent souvent crispés sur le « confort minimum » d'un fonctionnement hérité des années précédentes.

Parmi les nombreux projets de coopération, d'une importance toute particulière s'est avéré le Projet Européen Commun (PEC) TEMPUS 2797 « Développement des Mathématiques Appliquées en Roumanie » — MATAROU (1991–1994). Ce projet comprenant 32 institutions réparties dans 9 pays différents (Roumanie — avec 5 universités, l'Allemagne, la Belgique, l'Espagne, la France, la Grande Bretagne, l'Irlande, l'Italie et le Portugal), avait comme but affiché de former, au sein des universités roumaines, une nouvelle école de mathématiques appliquées, à côté de l'enseignement mathématique classique.

Le PEC 2797 a été coordonné de Paris par Mme Doina Cioranescu, directeur de recherches au CNRS à l'Université de Paris VI, avec Mme Colette Perrigault chargée de la gestion financière du projet. L'auteur de cet article en était le coordinateur pour la partie roumaine. Mais le principal initiateur du projet a été Christian Duhamel, à l'époque chargé des relations de l'Université de Paris-Sud avec l'Europe de l'Est et l'Amérique du Nord, puis de 1992 à 1996, attaché pour la coopération scientifique et technique auprès de l'Ambassade de France en Roumanie.

Le nombre des étudiants ou jeunes enseignants roumains qui sont devenus des boursiers du PEC 2797 s'est élevé à 64 dont 22 ont été admis en doctorat. À ce jour, 14

de ces derniers ont déjà soutenu leurs thèses en France, Espagne et Grande Bretagne. Presque toutes ces thèses ont été considérées comme tout à fait remarquables. Force est de constater que le PEC 2797 a répondu parfaitement au souci d'éviter l'hémorragie cérébrale de la Roumanie. Et ce, avec une sélection d'étudiants exceptionnellement « exportables » : jeunes donc plus facilement déracinables que la génération de leurs parents, particulièrement brillants ... et pauvres donc susceptibles d'accepter des situations peu enviées en Europe de l'Ouest mais qui pour eux auraient représenté déjà un substantiel progrès de leur statut social. Sur les 64 boursiers on peut considérer que 7 seulement sont entrés dans un processus d'exil définitif (dont 4 par mariage). Ce constat remarquable est probablement à mettre au compte de deux éléments clés du dispositif de formation mis en place : la double insertion institutionnelle des étudiants et la très grande dispersion de leurs universités d'accueil dans l'Union Européenne. Le premier a eu pour effet d'avoir maintenu une responsabilité de délivrance de titre par l'université de départ et donc de ne pas avoir permis de considérer les étudiants en formation à l'étranger comme « placés » dans l'université d'accueil ; le second, qui a présenté aussi des inconvénients, a eu pour principal intérêt de permettre un suivi très précis de chaque étudiant, non seulement pédagogique mais aussi de son statut, de son insertion, de ses projets.

Globalement, l'exemple du PEC 2797 autorise à considérer qu'une stratégie de mise en échec du brain drain¹ est possible, au moins à court terme, et au moins pour les étudiants européens, c'est-à-dire pour qui une présence alternée dans les pays assez proches est pensable. Mais à plus long terme il n'est pas du tout certain que ce constat puisse se maintenir ni d'ailleurs que l'on ait à s'en féliciter. Il faut, bien sûr, empêcher par tous les moyens (sauf la contrainte !) les élites de quitter leur pays (cela va sans dire c'est bien notre affaire ; quand les élites préféreront rester en Roumanie, le pays sera revenu à la normalité).

Pour conclure la discussion sur notre projet, il est intéressant de dire quelques mots sur la façon dont le Comité de coordination du PEC 2797 a vu la continuation du projet dans le cadre de TEMPUS 2 (1994–1997). En janvier 1994 on a présenté à l'Office TEMPUS de Bruxelles une demande d'aide financière pour le PEC 07247 « Centre d'Harmonisation et de Rencontres Européennes pour les Sciences et les Technologies » — CHREST. Le CHREST s'appuyait sur la compétence des étudiants et formateurs ayant bénéficié depuis 1990 de mobilités dans l'Union Européenne pour y suivre des formations doctorales. Ces anciens boursiers devaient former la structure permanente d'initiative et d'organisation sous la responsabilité d'un coordinateur national et sous le contrôle d'un comité national interuniversitaire. Les objectifs du CHREST étaient de :

- relocaliser en Roumanie la formation prédoctorale et doctorale avec valorisation et dissémination des acquis des anciens boursiers ;
- mettre en place 11 Masters en mathématiques dans 8 universités roumaines (Bucarest, Brasov, Cluj-Napoca, Constanta, Craiova, Iasi, Sibiu et Timisoara), avec prise en charge conjointe de l'enseignement par des enseignants roumains, de l'Union Européenne, et des étudiants doctorants ;

¹ Le brain drain est un problème difficile à résoudre même pour les pays européens développés, dont la France. J'apprends, par exemple, que depuis 1997, la Fondation (française) pour la recherche médicale a créé un fonds d'aide au retour après une formation à l'étranger de certains « cerveaux » en leur assurant pendant deux ans des subsides de l'ordre de 120 à 150 mille francs.

- œuvrer à la complémentarité des enseignements à l'échelle nationale et la reconnaissance des titres par les instances nationales ;
- veiller à l'ouverture des formations à des étudiants d'autres universités roumaines et étrangères ;
- organiser 22 écoles d'été et 3 colloques (en trois ans), largement ouverts, pour lesquels toutes les disciplines étaient éligibles.

Pour réaliser ses objectifs, le CHREST se proposait d'organiser une mobilité d'étudiants et d'enseignants de grande ampleur, y compris à l'intérieur de la Roumanie.

Le CHREST se proposait aussi d'assurer une évaluation internationale permanente de la qualité des travaux et de l'avancement du projet à travers un Comité International d'Évaluation rassemblant des représentants des 11 pays partenaires de ce projet.

Le CHREST avait vocation à devenir un centre interuniversitaire et interdisciplinaire permanent. Il devait accueillir pendant les vacances universitaires des écoles d'été internationales et devait être le reste de l'année un « Grand Collège Universitaire » largement ouvert aux contacts internationaux et aux entreprises.

Il est bien clair que le CHREST aurait permis de rapprocher les enseignements en mathématiques des institutions roumaines partenaires des standards européens et de constituer un noyau scientifique de haut niveau, intégré dans un vaste réseau européen. Ce noyau aurait pu, dans des conditions économiques plus favorables, permettre la relance des activités scientifiques du pays.

Après qu'une première proposition n'ait pas été retenue, l'année suivante, un autre projet qui retenait une partie seulement des objectifs du CHREST, mais qui accordait un poids excessif aux mobilités des enseignants roumains à l'étranger, a été accepté. J'insiste sur la vocation de CHREST à devenir un Grand Collège Universitaire, voire une sorte d'École Normale Supérieure Franco-Roumaine en Roumanie ...

Pendant 7 ans, de 1993 à 1999, dans le cadre de la convention SAFE — pour SOROS, Ambassade de France, ENS — d'accueil d'étudiants roumains dans les ENS, 77 tels étudiants (auxquels à partir de 1996 s'ajoutent 6 étudiants moldaves et 6 bulgares), sélectionnés à Bucarest chaque année de manière extrêmement rigoureuse, ont fait de brillantes études en sciences exactes et sciences humaines en France. (À partir de cette année la convention continue sans SOROS). Ce modèle des « pensionnaires roumains des ENS » peut bien être le point de départ pour la construction d'un collège franco-roumain en Roumanie. D'ailleurs dans l'allocution prononcée par le Président de la Roumanie le 7 novembre 1997 à l'occasion de la remise des insignes de Docteur Honoris Causa de l'ENS celui-ci affirmait : « J'ai donc décidé de lancer ici pour la première fois un projet de création d'un Institut Roumain des Hautes Études, susceptibles de devenir, avec votre coopération, votre partenaire d'élection dans la formation d'un pôle d'excellence roumain, inspiré de cette grande tradition que vous avez si généreusement partagée avec nous. » Malgré le caractère volontariste de tels propos, la mise en œuvre de ces projets est lente et semble rencontrer beaucoup d'obstacles.

Les mathématiques dans les universités algériennes

B. Benzaghrou

Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene, Alger

1. L'université algérienne aujourd'hui

Depuis une trentaine d'années, l'université algérienne a connu des changements importants, passant de quelques milliers à plus de quatre cent mille étudiants, répartis sur une trentaine de villes universitaires. Cette année, près d'une quarantaine de milliers de diplômes ont été délivrés (licence, diplômes d'études supérieures analogues aux maîtrises, diplômes d'ingénieur, diplômes en sciences médicales, ... ainsi que des diplômes de cycles courts).

Cette extension massive et rapide a posé et pose encore de redoutables problèmes à l'université, en particulier face à une forte rétraction de l'offre d'emplois. Aussi un des thèmes majeurs de débat actuellement est la nécessaire réforme de l'enseignement supérieur (et de toute l'école algérienne).

L'enseignement à l'université est dispensé en langue arabe dans les sciences humaines et sociales, le droit, les lettres et, en général, en langue française dans les sciences médicales, les sciences exactes, la technologie. La situation peut varier d'une université à une autre. En revanche, les licences d'enseignement en mathématiques sont préparées en langue arabe, l'enseignement secondaire étant assuré dans toutes les disciplines dans cette langue.

2. L'enseignement des mathématiques

Il existe quatre instituts de mathématiques (USTHB Alger, Universités d'Oran, de Constantine, de Annaba) et un dizaine de départements de mathématiques dans les autres universités et les centres universitaires. Les diplômes préparés sont :

- la licence d'enseignement ;
- le diplôme d'études supérieures (DES) — 4 ans ;
- des diplômes d'ingénieurs (en statistique, en recherche opérationnelle) — 5 ans ;
- la formation post-graduée, qui existe dans les quatre instituts, comporte une année d'enseignement (type DEA), suivie de la préparation d'une thèse de magistère (en 2 ou 3 ans). Par exemple, à l'institut de mathématiques de l'USTHB (Alger) fonctionnent les post graduations suivantes :
 - Algèbre et théorie des nombres ;
 - Analyse (avec plusieurs sous-spécialités) ;
 - Probabilités-statistiques ;
 - Recherche opérationnelle.

L'informatique s'est détachée de l'institut de mathématiques et constitue un institut autonome.

Après le magistère, les étudiants peuvent s'inscrire pour la préparation d'une thèse de doctorat (une centaine d'inscrits à l'USTHB). Une réforme allant vers la thèse unique est en cours.

Les licences d'enseignement en mathématiques sont dispensées en langue arabe, les DES, ingéniorats et post-graduation en général en français. Il peut arriver qu'un étudiant suive une partie de sa scolarité en langue arabe et sa spécialité (en 4^{ème} année) en langue française. À titre indicatif, voici les statistiques pour l'année 96/97 :

- 397 licences en mathématiques.
- 310 DES de mathématiques.
- 45 diplômes d'ingénieurs (statistiques, R.O.).
- une cinquantaine de magistères ont été soutenus.

3. La recherche en mathématiques

Beaucoup d'enseignants de rang magistral ont préparé leur thèse ou PhD dans des universités françaises, américaines ou des pays de l'ex Europe de l'Est ; ils ont maintenu des relations de recherche avec les laboratoires concernés.

Avant la période difficile qu'a traversé l'Algérie, de nombreux collègues français intervenaient dans les enseignements post-gradués, dans le cadre d'accords inter-universitaires. Actuellement, la recherche en mathématiques dans les universités algériennes connaît quelques difficultés : acquisitions irrégulières de revues, voire interruptions, difficultés pour participer à des colloques et congrès internationaux, exode d'une partie du corps magistral. Dans le cadre d'accords inter-universitaires, de jeunes chercheurs algériens effectuent des « stages » de un à trois mois dans des laboratoires français. Pour contribuer au développement de la recherche en mathématiques, une société scientifique, l'Association Mathématique Algérienne (AMA¹) a été créée il y a une dizaine d'années. Elle participe à l'organisation de rencontres scientifiques (comme le congrès algérien de mathématiques, Annaba, Mai 1999, ou des ateliers avec les professeurs de lycées). Elle édite une revue de mathématiques (*Maghreb Mathematical Review*).

Elle a été présidée à sa création par le Prof. B. BENZAGHOU, et depuis 1994 par le Prof. A. KHELLADI. L'AMA est vivement intéressée par des échanges avec la SMF.

Enseignement des Mathématiques à l'université tunisienne

Habib Ouerdiane

Professeur à la Faculté des Sciences de Tunis. Université de Tunis II.
habib.ouerdiane@fst.rnu.tn

L'enseignement des mathématiques dans les différentes écoles d'ingénieurs ainsi que dans les universités tunisiennes se fait actuellement en Français. Il est vrai que déjà à partir du second cycle des collèges et lycées, cet enseignement est dispensé aux élèves en Français. Les manuels et les différents supports pédagogiques sont aussi rédigés en Français : photocopiés, manuels d'exercices et de cours, sujets d'examens et corrigés...

Depuis deux ans et en application de la réforme des programmes de l'enseignement supérieur les cours de mathématiques à l'instar d'ailleurs des autres matières se

¹ AMA, Institut de mathématiques, USTHB. BP 32, El Alia, 16111 Alger.

font par modules semestriels. Par exemple, actuellement et pour donner un exemple concernant les Facultés des Sciences en Tunisie, les jeunes bacheliers admis à ces facultés pourront suivre en première année soit la filière MPC1, une sorte de tronc commun mathématiques, physique, chimie et informatique ou la filière SVT qui est un tronc commun entre sciences de la vie (biologie) et sciences de la terre (géologie). Le volume horaire pour la section MPC1 pour l'enseignement des Mathématiques est de 10 heures hebdomadaires réparties comme suit : cinq heures de cours et cinq heures de travaux dirigés (TD). Pour la filière SVT, l'horaire de cet enseignement est d'une heure et demie de cours et une heure et demie de travaux dirigés hebdomadaire. Il est à signaler que dans le premier cycle des collèges et lycées et à l'école de base, l'enseignement des mathématiques en Tunisie se fait en arabe. En conséquence un module d'arabe pour l'enseignement des mathématiques a été introduit en deuxième année de maîtrise en mathématiques pour les étudiants désirant passer le concours du CAPES.

Actuellement le département de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Tunis ne compte pas moins d'une trentaine de Professeurs et Maîtres de Conférences en mathématiques et d'une cinquantaine d'Assistants et Maîtres Assistants animant différents groupes de travail et séminaires : théorie du potentiel, analyse harmonique, analyse complexe, analyse stochastique, théorie des nombres, topologie différentielle, optimisation, analyse numérique, algèbre, théorie des Probabilités... Un DEA de mathématiques avec différentes options est proposé chaque année aux étudiants ayant obtenus la maîtrise en mathématiques. La préparation de ce diplôme d'étude approfondie s'étale sur deux années : durant la première année l'étudiant doit suivre au minimum deux cours et passer avec succès les examens de fin d'année. La deuxième année est réservée à un stage de recherche.

La thèse de doctorat en Mathématiques se prépare en trois années avec possibilité de dérogations de deux années consécutives. Pour passer l'Habilitation il est nécessaire d'avoir déjà le grade de Maître-Assistant et présenter ses travaux de recherches et de pédagogie à la commission des thèses qui désignera les rapporteurs. Beaucoup de Mathématiciens tunisiens continuent à publier leurs travaux de recherches dans les différentes revues et journaux en langue française. Mais la tendance est de rédiger si possible les publications en langue anglaise pour une meilleure diffusion auprès de la communauté internationale des mathématiciens.

Il est à signaler que notre faculté par exemple fait partie du réseau francophone des universités dans le monde ayant en commun l'utilisation de la langue française : UPELF,... Beaucoup d'équipes de recherches et de formation ici à la faculté des sciences de Tunis répondent aux différents appels d'offres de ces différents organismes de recherches et de formations francophones. Aussi toujours dans ce cadre, des bourses de troisième cycle sont proposées chaque année à des étudiants tunisiens dans différents pays francophones : France, Canada, Belgique...

Pour finir il est à signaler que le département de mathématiques de la faculté des sciences de Tunis a une tradition francophone très ancrée. En effet, dans les années soixante et au tout début de la création de l'université tunisienne et particulièrement du département de mathématiques, beaucoup de mathématiciens français ont contribué à la formation de jeunes mathématiciens tunisiens sur place sans parler des mathématiciens tunisiens formés essentiellement dans les universités et grandes écoles françaises. Tout ceci explique actuellement les liens privilégiés entre les équipes de recherche mathématiques tunisiennes et françaises : collaboration scientifique, échange

de Professeurs, cotutelle de thèses, programme CMCU, envoi de stagiaires tunisiens en France, échange de documentation scientifique...

Afrique : Que fait le M.A.E. ?

C. Lobry

Ce n'est pas un scoop : L'Afrique subsaharienne a des problèmes. Complètement décolonisée depuis seulement trente ans, soumise à la surenchère des deux blocs pendant la guerre froide, l'Afrique est soumise à une instabilité politique et sociale grandissante. Comme un malheur ne va jamais seul, aux maladies dévastatrices traditionnelles s'est ajouté le SIDA. Avant de parler de la recherche mathématique en Afrique, il faut rappeler en quelques mots ce qu'est devenue la politique des pays riches dans cette région. En gros, seront aidés les états dont le budget sera suffisamment faible comparé au P.N.B. Comme l'économie est peu développée, peu monétarisée, on arrive à des chiffres parfois ridicules. Le budget de l'état béninois est de l'ordre de trois milliards de francs, dans un pays de 5 à 6 millions d'habitants. Même les pires adversaires de l'état ne se satisferaient pas d'un budget d'une trentaine de milliards pour notre pays ! Sans ressources, les états sous-payent leurs fonctionnaires particulièrement les enseignants. Dans les cas les plus graves ils n'arrivent même plus à payer la police.

Il existe une quinzaine de pays, plus ou moins grands, entourant le Nigéria, où la France et la Belgique ont quelques responsabilités historiques. Dans ces pays, pour une population environ deux fois plus nombreuse que celle de la France, le Français est la langue officielle, la langue de travail. Or, il se trouve que dans ces pays qui n'échappent pas aux difficultés générales rappelées plus haut, les universités, et au sein des universités les mathématiques, se portent étonnamment bien. Dans ces pays pendant les premières années qui ont suivi la période coloniale, une intense coopération de substitution a permis de faire manque de cadres nationaux. À ces universitaires français ou belges expatriés en Afrique ont succédé des enseignants chercheurs formés dans nos universités et, comme la situation politique et économique de l'époque le permettait, des petits laboratoires ont commencé à se constituer. De plus ces pays francophones se sont dotés d'un instrument international¹ dont la mission est d'harmoniser les programmes et d'inscrire les enseignants sur des listes d'aptitudes aux fonctions de Maître Assistant et de Professeur. Pour les enseignants et étudiants d'Afrique francophone, la mobilité est certainement plus avancée qu'en Europe.

Dans ce système universitaire de qualité, les mathématiques ne se sont pas attardées, mais elles sont aujourd'hui particulièrement menacées, comme nous allons le voir. L'enseignement des mathématiques, jusqu'au niveau de la licence, voire de la maîtrise, est de bonne qualité. Il suffit d'observer un département de mathématiques pendant l'année scolaire pour se retrouver en terrain connu : cours magistraux, groupes de T.D., feuilles d'exercices... Seules les conditions matérielles changent : peu ou pas de livres, papier qui pourrit dans les régions chaudes et humides, peu d'ordinateurs. Cette bonne impression se confirme par des faits objectifs. En voici deux exemples.

¹ Le CAMES, Comité Africain et Malgache pour l'Enseignement Supérieur.

Le Centre Abdus Salam de Trieste² recrute sur dossier des étudiants pour un cours de niveau maîtrise-DEA. L'expérience montre que les étudiants en provenance d'Afrique francophone ont en général reçu une meilleure formation de base que leurs collègues des autres pays. Le CIMPA soutient une formation doctorale inter-états où quatre enseignants habitués des D.E.A. français ont donné des cours. Ils sont unanimes pour dire que les étudiants étaient largement aussi bons, voire meilleurs, que ceux formés en France. La recherche mathématique existe également. Plus exactement il faut dire qu'il existe des chercheurs de niveau international, car la recherche est pour le moment assez peu structurée. Il y a environ une vingtaine de chercheurs qui passent sans problèmes les filtres des colloques et des revues de standard international. Ce n'est certes pas beaucoup pour une telle population, mais c'est mieux que ce que font beaucoup de pays économiquement bien plus développés.

Cet acquis remarquable est en train de s'effondrer complètement car soumis, comme toutes les autres disciplines, à la réduction constante des moyens que les états consacrent à l'université. Mais les mathématiques subissent plus que les autres pour la raison suivante qui est assez peu connue. Les grands programmes internationaux de coopération pour le développement se concentrent sur des objectifs à relativement court terme principalement focalisés sur les questions de santé, d'agronomie et de sciences sociales. Les sciences les plus fondamentales et plus particulièrement les mathématiques sont oubliées. Les salaires des universitaires sont extrêmement bas, souvent insuffisants pour nourrir une famille, c'est pourquoi tout complément de salaire est considéré comme une planche de salut. Dans des disciplines comme la biologie, la chimie, parfois la physique, les sciences humaines et sociales, la médecine, les universitaires africains peuvent intervenir comme experts locaux dans des projets internationaux soutenus par le Nord.³ Ils touchent ainsi des indemnités qui doublent ou triplent leur salaire. Ces compléments de salaires ne sont pas accessibles aux mathématiciens. Qui continuera à enseigner les mathématiques en licence alors qu'une petite compétence en informatique se monnaie dans le privé à trois fois le salaire d'un professeur d'université ?

Il y a un moyen pour sauver ce qui existe. Pour cela il faut développer en Afrique même des réseaux de recherche et des formations doctorales en mathématiques où les universitaires impliqués trouveront un complément de salaire. Par chance les mathématiques ne nécessitent pas des moyens expérimentaux coûteux et de très nombreux mathématiciens de langue française sont prêts à donner de leur temps. Il a été démontré⁴ que quelques postes dédiés à la coopération et quelques millions de francs par an permettent de maintenir et développer le potentiel mathématique actuel de l'Afrique francophone. La Direction de la Recherche du Ministère de l'Éducation Nationale de la Recherche et la Technologie et l'UNESCO ont compris l'enjeu et ont montré leur détermination en signant au plus haut niveau (Ministre et Directeur Général de l'UNESCO) une convention où ils s'engagent à soutenir l'action d'un organisme comme le CIMPA dans la mesure de leurs moyens. Mais les moyens nécessaires vont

² International Center for Theoretical Physics (ICTP). Sa mission est de promouvoir la recherche en physique théorique et en mathématique dans les pays du sud.

³ Dans un article remarquable « Dramatique déliquescence des états en Afrique », paru dans le *Monde Diplomatique* de Février 2000, J.-P. Olivier de Sardan montre les effets pervers de la politique des « projets » de coopération sur la structuration des états.

⁴ Ces démonstrations se trouvent dans les nombreux documents produits par le CIMPA en direction de divers bailleurs de fonds potentiels. On peut s'adresser au CIMPA pour les obtenir.

au-delà de ce que ces deux organismes peuvent consacrer. C'est au Ministère des Affaires Étrangères, dans le cadre de sa politique de coopération, de prendre ses responsabilités.

Il y a maintenant un an que les représentants légitimes des mathématiciens de l'hexagone, SMF, SMAI, Académie des Sciences se sont entretenus de cette question avec les responsables au plus haut niveau de la politique de coopération du M.A.E. Dans le même temps le CIMPA a fait part de son expérience à la « commission Nemo », chargée de faire des propositions dans le cadre de l'intégration de l'ex-ministère à celui des affaires étrangères. La balle est dans le camp du M.A.E., espérons qu'il ne tarde pas plus à la saisir.

Mathématiques au Cameroun

David Rékollé

Du point de vue de la francophonie, le cas du Cameroun est un peu spécial parce que le pays comporte une importante minorité anglophone. Jusqu'en 1993, la seule université était l'université de Yaoundé ; depuis lors, le Cameroun possède six universités : Yaoundé I, Yaoundé II, Douala, Dochang, Ngaoundéré, et l'université « de type anglo-saxon » de Ruéa. Le plus grand département de Mathématiques est celui de la faculté des Sciences de l'Université Yaoundé I qui comporte 25 membres, et celle-ci a hérité des locaux de l'ancienne Université de Yaoundé.

Pour les mathématiques, notre société est actuellement en sommeil ; elle s'appelle « Société Mathématique du Cameroun » (S.M.C.) et son président est Jean Kouafi Kanga. En collaboration avec le département de Mathématiques de l'Université nationale du Bénin, notre département organise tous les deux ans depuis 1986 le séminaire GIRAGA (Groupe Interafricain de Recherche en Analyse, Géométrie et Applications). Ce séminaire international a lieu alternativement à Yaoundé et au Bénin. Le CIMPA en est co-organisateur depuis 1990. Le septième séminaire GIRAGA s'est tenu à Yaoundé en septembre 1998 ; les cours portaient sur l'Analyse non linéaire (conférenciers : Laurent Desvillettes (Orléans) et Hamidou Fouyri (Ouagadougou)), et sur les EDP appliquées à la relativité générale (conférenciers : Marcel Dossa et Norbert Noutcheguéré (Yaoundé I)).

Du 5 au 16 Avril 1999, nous avons organisé une école du CIMPA intitulée « outils informatiques dans la recherche en systèmes dynamiques complexes ». Cette école a été financée par le CIMPA, le CNRS, l'ICTP et le gouvernement camerounais. Elle a regroupé 70 participants originaires de 10 pays : Algérie (1), Bénin (1), Burkina Faso (4), Congo-Brazzaville (2), France (6), Malaisie (1), Nigéria (1), Sénégal (4), Tchad (1) et Cameroun.

En conclusion, il y a un peu d'activité et cela devrait s'amplifier dans les prochaines années avec le concours de la communauté mathématique internationale. Ainsi, nous préparons pour septembre 2000 une école « Mathématiques et Malaria », pour laquelle nous avons déjà l'accord de nombreux mathématiciens.

Place de la France dans les mathématiques vietnamiennes

Frédéric Pham

Laboratoire J.A.Dieudonné, Université de Nice-Sophia Antipolis

Quelques points de repère historiques

Les pionniers : *Lê van Thiêm*, ancien élève de l'ENS (promo 1941), rentre au pays après sa thèse en 1949. Il peut être considéré comme le fondateur de l'école mathématique vietnamienne.

Les années de guerre du VietNam : développement au nord d'une assez bonne école mathématique vietnamienne, fortement aidée par les pays du bloc socialiste, chez qui un grand nombre de mathématiciens vietnamiens sont formés (nombreuses bourses). Aide non institutionnelle de nombreux mathématiciens français (Martineau, Grothendieck, Laurent Schwartz...).

1976 : *Paix, et unification du pays*

1986 : « *Perestroïka* » vietnamienne, et fin de l'aide des pays socialistes

Évolution dans les dix dernières années

À la faveur de l'ouverture du VietNam vers l'étranger, il devient beaucoup plus facile aux mathématiciens vietnamiens de faire des séjours de travail dans des pays d'Europe occidentale. Bien que ralentis par la lourdeur administrative des procédures françaises d'invitation, des contacts se nouent ou se renouent entre de nombreux mathématiciens vietnamiens et français (quelques-uns de ces mathématiciens vietnamiens ont été formés en URSS par des mathématiciens aujourd'hui professeurs en France !). C'est pour répondre à leur appel qu'avec le soutien du CNRS (et plus récemment du Ministère des Affaires Étrangères) a été créé fin 1995 le programme *ForMathVietNam* (aide à la formation des jeunes chercheurs en mathématiques au Vietnam)¹ : aidez-nous — disaient-ils — à encourager nos jeunes à faire des mathématiques, car notre école mathématique est menacée d'extinction.

Actuellement la situation semble évoluer de façon encourageante, avec un retour des jeunes dans les filières mathématiques universitaires, et la création dans les universités de « classes d'excellences » dont les étudiants sont très motivés et bénéficient de relativement bonnes conditions matérielles de travail. Le goût des jeunes vietnamiens pour les mathématiques est aussi attesté par le fait qu'en France plusieurs jeunes venus du VietNam ont réussi récemment à obtenir des postes permanents, soit au CNRS soit comme Maître de Conférence dans des universités. Le problème principal auquel se trouve confrontée la communauté mathématique vietnamienne est de créer les conditions pour que les mathématiques continuent à vivre et à se développer *au Vietnam même*.

¹ Site web (hébergé à l'Université de Nice) : <http://math.unice.fr/FMVN/accueil.html>

Place de la langue française

Une minorité non négligeable des mathématiciens vietnamiens « chevronnés » parle le français : il ne s'agit pas seulement de la petite minorité de ceux qui ont été formés en France avant ou pendant la guerre, mais aussi de ceux qui ont appris le français à la faveur de leurs contacts mathématiques dans les vingt dernières années. Quant aux jeunes, dont l'immense majorité aujourd'hui cherche à perfectionner son anglais, rares sont ceux qui parlent français.

Dans sa politique d'attribution de bourses dans le cadre du programme *ForMath Vietnam*, l'Ambassade de France n'exige la connaissance du français que pour les bourses de DEA. Pour les bourses de thèse en cotutelle, elle admet notre argument selon lequel la connaissance de l'anglais suffit pour que la communication se fasse. Si notre coopération réussit à former des thésards de qualité, qui continuent après leur thèse à avoir des contacts réguliers en France, il est raisonnable de parier que beaucoup d'entre eux apprendront le français, comme cela a été le cas pour leurs aînés dont je viens de parler.

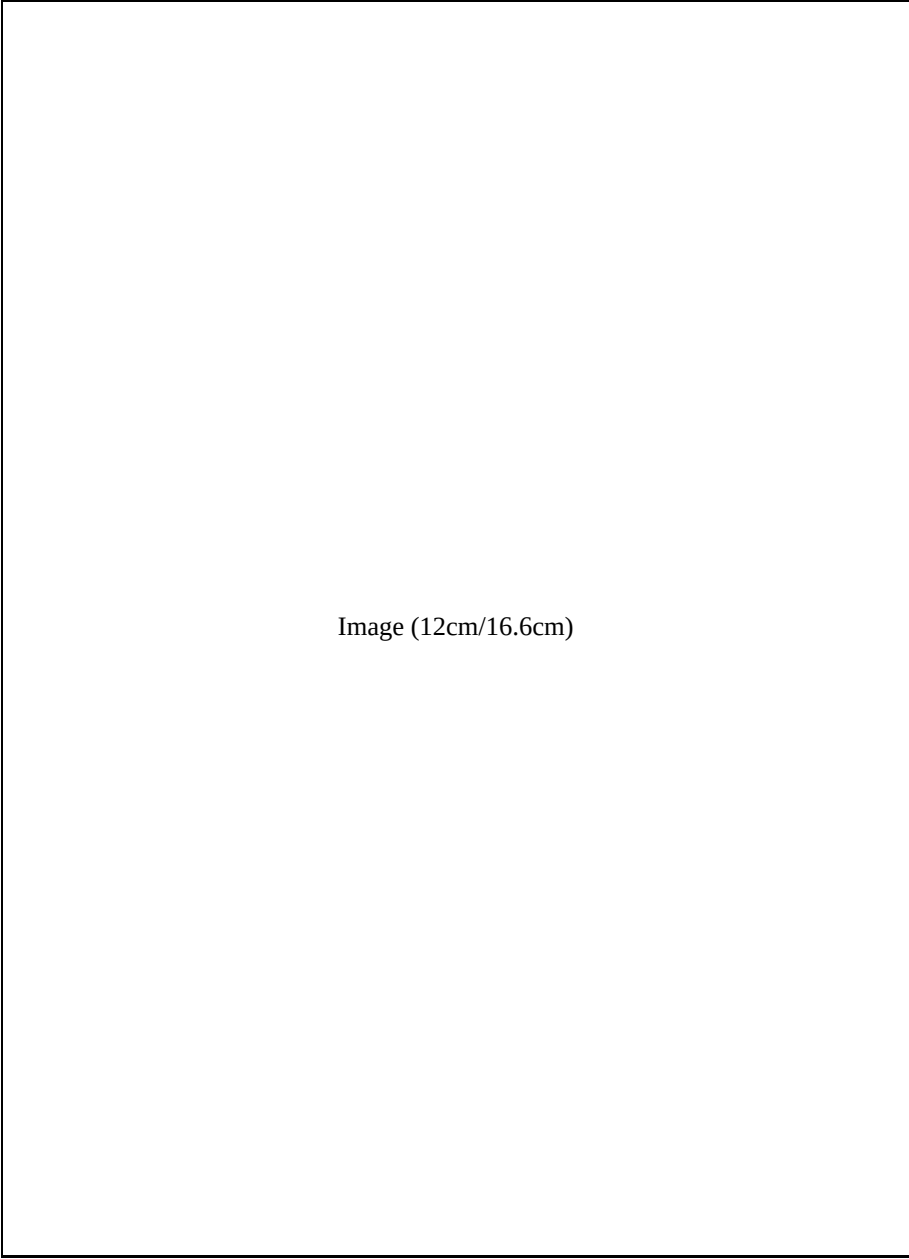


Image (12cm/16.6cm)

Robert Von Musil (1880-1942) © Roger-Viollet
L'auteur de L'homme sans qualités a aussi écrit un article sous le titre L'homme mathématique

HISTOIRE

Musil, Perutz, Broch

Les mathématiques des écrivains viennois

Karl Sigmund (Vienne)

L'article de Karl Sigmund que nous présentons aux lecteurs de la Gazette est paru d'abord aux annales de la DMV. Nous remercions l'auteur et la Société mathématique allemande de nous avoir autorisé à publier ce texte. La revue Commentaire le présentera aussi en 2001, dans le cadre d'un dossier sur l'Autriche. Karl Sigmund, biomathématicien de renommée internationale, s'intéresse depuis de longues années à l'histoire culturelle de Vienne au siècle dernier, celui de Von Neumann, Gödel, Wittgenstein, pour ne citer que certains des mathématiciens. Nous espérons que les lecteurs apprécieront cette évocation puissante d'une période marquée par deux crises simultanées, celle de la politique et celle des fondements des mathématiques. Karl Sigmund a aussi publié deux articles passionnants sur la Vienne des années trente dans The Mathematical Intelligencer :

A philosopher's mathematician : Hans Hahn and the Vienna circle. 17 (1995), n° 4, p. 16–29.

Exact thought in a demented time : Karl Menger and his Viennese Mathematical Colloquium. 22 (2000), n° 1, p. 34–45.

Nous le remercions, ainsi que Jeanne Peiffer, d'avoir collaboré avec nous à la traduction.

— Jean-Michel Kantor

S'IL VOUS VIENT L'IDÉE de faire à Vienne une promenade littéraire, vous croiserez tôt ou tard la Strudlhofstiege, un magnifique escalier qui a fourni le titre et la scène principale d'un roman célèbre de Heimito von Doderer. Arrivé en haut, vous trouverez à votre gauche un grand bâtiment que l'administration universitaire désigne, encore aujourd'hui, de « Nouveau Bâtiment de Chimie », bien qu'il fût achevé en 1912 et loge aussi des instituts de physique et de mathématiques. Doderer n'en parle que peu dans son roman : il décrit la façade comme « lisse et close, de contenu incompréhensible ». Pourtant, il y sent « le souffle de cette nouvelle forme de romantisme qui émane particulièrement des sciences les plus exactes ». Doderer ne soupçonnait guère que derrière ces murs lisses qu'il longeait si souvent en compagnie de ses *Démons* (titre d'une autre œuvre qu'il situe dans les mêmes parages), ses rivaux littéraires Hermann Broch et Elias Canetti étaient en train de poursuivre leurs études, Canetti dans le grand labo de chimie (il le décrit dans *Fackel im Ohr*, le deuxième volume de son autobiographie) et Broch dans le séminaire mathématique.

Alors que Canetti n'étudiait qu'à contrecœur, Hermann Broch a longtemps vu dans les mathématiques le but de sa vie. Pour son roman *Die unbekannte Größe* (*La grandeur inconnue*), il choisit un mathématicien comme héros, ce qui n'était pas sans irriter Robert Musil, dont *l'Homme sans qualités* (*Der Mann ohne Eigenschaften*) était lui aussi un matheux. De surcroît, Leo Perutz, l'écrivain viennois le plus lu à l'époque, était mathématicien professionnel, et le personnage principal de son *Tag ohne Ende* (*Journée sans fin*) se révélait à titre posthume un véritable mathématicien de génie — Perutz n'aimait pas faire les choses à moitié.

Pas d'autre possibilité d'éprouver des sensations aussi fantastiques

Pourquoi est-ce que les écrivains de la CaCanie (l'Autro-Hongrie k.k., c'est-à-dire impériale et royale) s'intéressaient-ils à tel point aux mathématiques ? Était-ce parce que celle-ci était en train de traverser une crise des fondements bien plus dramatique encore que celle de la physique ? Dans Vienne, ce « laboratoire de l'apocalypse » (Karl Kraus), on avait développé un goût suraigu pour les crises de toute sorte, et une ouïe très fine pour le moindre craquement des échafaudages. Comme Musil l'écrivit en 1913 dans un essai sur *L'homme mathématique*, après avoir souligné l'apport essentiel des mathématiques à la vie quotidienne de son époque :

Tout à coup, des mathématiciens (ceux qui réfléchissaient au sein de l'édifice) découvrirent qu'il y avait quelque chose qui clochait dans les fondements, que l'on ne pouvait absolument pas remettre en ordre ; vraiment, ils regardaient le plus profond possible et découvraient que le bâtiment entier reposait sur du vide. Il faut donc admettre que notre existence n'est rien qu'un pâle fantôme ; nous la vivons, mais en fait seulement à cause d'une erreur, sans laquelle elle ne se serait pas établie. De nos jours, il n'y a pas de seconde possibilité pour ressentir de pareilles sensations fantastiques.

Et Broch lui aussi parle, dans ses *Schlafwandler* (*Les somnambules*), de ce « changement de paradigme des mathématiques modernes, qui, partant des paradoxes de l'infini, nous a mené vers une révolution dont les conséquences ne peuvent pas encore être mesurées ».

Au tournant du siècle dernier, il était bien établi, parmi « ceux qui réfléchissaient au sein de l'édifice » que les mathématiques pouvaient se ramener à la théorie des ensembles. Mais le traitement d'ensembles infinis soulevait des difficultés imprévues et des contradictions logiques. Ce qui paraissait évident à tel mathématicien (comme l'axiome du choix) ne l'était pas du tout pour tel autre. Il se formait des clans : les formalistes, les logiciens, et les intuitionnistes. Un pareil schisme est bien plus scandaleux en mathématique qu'en religion, par exemple. En physique, une expérience-clé peut décider qui a raison ; les théologiens peuvent placer leurs espoirs dans un signe divin ; mais les matheux ne peuvent compter que sur eux-mêmes.

A Vienne, les logiciens dominaient, définis (un peu allègrement) par Musil comme des « mathématiciens qui trouvaient que rien du tout n'était certain, et qui construisaient une nouvelle doctrine fondamentale ». *L'homme sans qualités* était des leurs, de même que Richard Hieck, le héros du roman de Broch, qui défendait « avec la lueur de celui qui connaît bien plus qu'il ne le dit sa conviction : la logique et les mathématiques sont un (oui, je vois, le logicisme, répliquait son interlocuteur, encore une de ces nouvelles inventions !) ».

Une intégrale pour maigrir

Comme étudiant à l'École polytechnique de Brünn (l'actuel Brno) où son père enseignait, Robert Musil n'acquit pas seulement une formation solide en mathématiques supérieures, mais apprit aussi à les connaître sous leur plus beau jour.

Comme il l'écrira plus tard, il avait « choisi Elsa von Czuber pour en tomber amoureux », la fille d'un professeur de mathématiques qui, par la suite, fit carrière à l'université technique de Vienne. Cette Elsa, dont le véritable nom était Berta, se transforma en la soeur jumelle de Ulrich dans *L'homme sans qualités* ; dans la vie réelle elle devint l'épouse d'un archiduc. Musil, qui devait gagner très tôt un succès d'estime dans le monde littéraire avec sa première nouvelle, *Die Verwirrungen des Zöglings Törless* (*Les désarrois de l'élève Törless*), déclara hautement qu'après la lecture de deux romans allemands, il fallait calculer une intégrale pour maigrir.

Hermann Broch, lui aussi, fit le détour d'une école technique pour aboutir aux mathématiques. Comme héritier d'une grande usine textile, il s'était vu obligé de suivre une école d'ingénieur de l'industrie textile, mais en 1904 et 1905, il fréquenta de surcroît des cours de mathématique et de philosophie à l'université de Vienne. Il se trouva de bonne heure une vocation pour les mathématiques, bien que sa note au baccalauréat n'eût été que passable dans cette discipline (et d'ailleurs encore moins brillante en allemand). Le premier poème, dans ses *Oeuvres Complètes*, s'intitule *Mystère mathématique* :

*Posé sur le concept solitaire,
Un édifice se dresse hautement,
Et adhère aux étoiles,
illuminé de divinité lointaine...*

Cependant, le positivisme de son éminent professeur, Ludwig Boltzmann, ne put suffire aux aspirations métaphysiques de Broch. Incapable de se décider entre ses ambitions mathématiques, philosophiques et littéraires, il suspendit provisoirement toutes ses études pour gagner l'industrie textile, et suivre en cela sa famille cossue.

Néanmoins il se fit sa place dans les cafés littéraires de Vienne, et c'est ainsi qu'il réussit son entrée dans la littérature en 1920 : non pas comme auteur, mais comme personnage. Il était le modèle du « jeune industriel du textile » dans la comédie de Musil intitulée *Vincent et l'amie des hommes importants*. Quant à Vincent lui-même, il s'agissait d'un mathématicien de profession qui travaillait pour une grande compagnie d'assurances. « Il développe des formules », dit *l'amie des hommes importants*, « d'après lesquelles les gens doivent mourir, c'est à dire payer leurs cotisations d'assurances ». Mais à la fin, Vincent s'avère être un simple escroc, qui avait délesté ses rivaux de grosses sommes pour financer un système de jeu « qui ne contredise pas le calcul des probabilités ».

Aucune ambition littéraire

Quand Broch atteignit la quarantaine, il reprit ses études mathématiques à l'université. Un de ses professeurs avait à peine vingt-cinq ans : c'était Karl Menger, « du même âge que moi », écrit le philosophe Karl Popper, qui lui aussi étudiait alors au séminaire mathématique, « mais de toute évidence un génie, plein d'idées nouvelles et excitantes ». Menger, le fils d'un économiste de renommée mondiale, était

lui aussi passé sous la plume d'un littéraire. Comme camarade de classe du fils d'Arthur Schnitzler, Heinrich, il figure dans maints passages du journal intime du célèbre dramaturge, et nous pouvons y suivre sa carrière d'étoile filante :

19.1.1920. L'après-midi un collègue de Heini, jeune homme de talent, Menger ; je parle de son premier essai dramatique raté sur la papesse Jeanne.

10.5.1920. Karl Menger, collègue de Heini, à qui je parle de ses vers.

12.6. Menger (collègue de Heini), à qui je parle de sa pièce réécrite.

30.10.1920. L'après-midi Karl Menger m'apporte sa nouvelle « Jeanne » pour la soumettre à mon jugement. (Il étudie maths et physique.)

13.11.1920. Karl Menger (collègue de Heini) à qui je dois dire bien des choses pas trop favorables au sujet de sa pièce (Papesse Jeanne). Il n'a aucune ambition littéraire, et veut seulement écrire cette pièce engagée contre la religion, le catholicisme, la superstition. Son vrai métier : la physique. Quand je le questionne sur ses véritables plans : « Au fond, ce que j'aimerais le plus c'est me suicider »... Un jeune homme qui a sans doute bien des talents mais qui n'est peut-être pas tout à fait normal.

2.11.1921. Karl Menger, me raconte son séjour en Hollande ; — ses études mathématiques ; me lit une nouvelle scène de sa pièce (entre Jeanne la papesse et l'hérétique). Homme de talent, peut-être de génie — avec des traits bizarres et mégalomanes.

9.1.1922. Le jeune Menger, qui me fait comme d'habitude une impression un peu pathologique ; — ses découvertes algébriques.

Quelques semaines après les découvertes effectivement fondamentales de Menger en topologie, celui-ci tomba malade de la tuberculose — un danger mortel dans la capitale ruinée d'un empire défunt. Il dut se retirer dans un sanatorium à Aflenz, sa Montagne Magique, où il guérit complètement.

26.4.1923. L'après-midi Karl Menger ; a passé un an à Aflenz ; me parle de ses travaux mathématiques et épistémologiques, m'apporte un nouveau deuxième acte ; sa solitude ; ses dépressions, frisant le suicide. J'arrive à remonter son moral — mais je trouve des traces pathologiques très prononcées dans son caractère (à côté de signes d'un grand talent).

9.6.1923. Karl Menger (sa thèse mathématique ; le nadir de la philosophie contemporaine).

Menger n'avait pas encore renoncé à ses ambitions dramatiques (quelques mois plus tard, Schnitzler se vit obligé encore une fois de lui dire « ce qu'il devait sur sa Comédie Athée »), mais ses réussites mathématiques passèrent au premier plan, et dès 1928 il fut promu professeur sans chaire.

17.1.1928. À table Karl Menger, de retour des Pays Bas, qui attend d'être nommé professeur ; — mathématiques, relativité. Avec ses 25 ans, il semble déjà jouir d'une réputation européenne, et je sens toujours son génie dans un domaine dans lequel, il est vrai, je ne saurais pénétrer.

18.10.1931. À table le professeur Menger (de retour de conférences en Amérique).

Constat de carence

Karl Menger et son ancien maître Hans Hahn furent les professeurs de Hermann Broch pendant plus de cinq ans. Dix-sept cahiers dans le Nachlass de ce dernier, bien

remplis de notes de cours d'analyse et de géométrie, témoignent du sérieux de ses intentions. Mais ce que Hermann Broch voulait trouver en premier lieu, c'était le Mystère Mathématique de l'adolescent de jadis, et pas du tout ce qui se passait alors, chaque deuxième jeudi, au Cercle de Vienne qui se réunissait dans une petite salle déjà assez délabrée au rez-de-chaussée du « Nouveau Bâtiment de Chimie ». Là, philosophes et mathématiciens se rencontraient pour mettre à jour, à travers d'épais nuages de fumée de cigare, les fondements de la logique.

Bientôt, un mince volume qui venait de paraître sous le titre de *Tractatus logico-philosophicus* devint le centre de tous les débats. Son auteur, un certain Ludwig Wittgenstein, était issu d'une famille d'industriels viennois fort connue et fabuleusement riche, même après la défaite. Pour Hahn, qui avait d'abord réagi en sceptique, ce traité fournissait la réponse à sa « question fondamentale » : comment concilier le point de vue empiriste avec l'applicabilité des mathématiques et de la logique au domaine du réel ? Puisqu'il est inconcevable qu'une proposition comme « deux et deux font quatre » perde demain sa validité, les mathématiques ne peuvent se fonder sur l'expérience. Il en va de même de la logique, sur laquelle — selon le logicisme — elles se basent. Les mathématiques et la logique ne disent donc rien sur le monde réel, mais seulement sur notre façon de parler du monde réel ; elles ne traitent pas des objets, elles traitent seulement du langage à l'aide duquel nous parlons de ces objets. Hahn écrit : « Ce fut Wittgenstein qui, le premier, reconnut le caractère tautologique de la logique ». Une tautologie est une proposition valide de par sa forme même, et la logique ne consiste qu'en règles permettant de remplacer telle expression par telle autre équivalente. « Les mathématiques sont le type même du savoir tautologique, reposant sur lui-même », cet aperçu qui se trouve dans les notices de Broch fait écho à cette conviction. Mais ce qui signifiait pour Hahn une découverte révolutionnaire n'est plus pour Broch, que l'évidence même.

Ceci n'empêcha nullement Broch de s'opposer carrément au Cercle de Vienne. Au moins reconnut-il aux positivistes assez d'acuité pour un « constat de déficience » : ils comprennent que leur mathématisation de la philosophie ne saurait jamais leur ouvrir « l'immense domaine du mystique-éthique ». Pour Broch, ce constat signifiait une véritable libération thérapeutique, puisqu'il lui prouvait une fois pour toutes la supériorité de la littérature sur les mathématiques et la philosophie. Finies les hésitations ! Broch avait désormais trouvé sa voie. Peut-être que l'exemple de Wittgenstein, qui s'était débarrassé de son immense héritage, l'aida aussi à réaliser la séparation, si longtemps envisagée, de son usine textile. Ainsi Broch, à la fin des années vingt, se consacra tout entier à la littérature, et alors qu'il n'avait rien écrit de valable jusqu'à sa quarante-cinquième année, il devint un écrivain infatigable et productif — trop productif, même, selon l'opinion narquoise de Musil.

La science au regard malin

Après avoir terminé Vincent, Musil ne travailla plus, au fond, que sur un seul livre, le roman « de l'homme intellectuel qui adviendra », et qui par conséquent devait être mathématicien. Dans ses notes inédites, on trouve encore, bien fortement souligné, la décision définitive : « faire de Anders [c'était alors encore le nom d'Ulrich] un mathématicien ». On y trouve aussi la remarque : « Il tient l'esprit mathématique de Nietzsche : penser froidement, penser incisivement, penser mathématiquement ». L'agressivité si typique de Musil se fait jour aussi dans les titres de chapitres rejetés

plus tard : « Logicien et boxeur » ou « Les mathématiques, science au regard malin ». Quant à Ulrich « on pouvait en dire avec assurance une chose, c'est qu'il aimait les mathématiques à cause de ceux qui les détestaient ». Les mathématiques étaient une arme, pour Musil ; c'est pourquoi on ne doit pas s'étonner qu'il ait commencé son essai sur *L'homme mathématique* avec une remarque sur les « mathématiciens des champs de bataille ». Quelque chose du « luxe de bravoure du mathématicien et de la « témérité endiablée de son intellect » se trouve déjà dans une réflexion du jeune Törless : « Si on était trop consciencieux, il n'y aurait pas de mathématiques ».

Mais en dépit d'une discipline féroce et de plus de vingt années de travail acharné, Musil n'arrivait pas à finir son *Homme sans qualités*. Le premier volume était paru en 1930 et avait obtenu un succès foudroyant auprès des critiques littéraires ; mais cela n'améliorait guère sa situation financière, et l'attention intense qu'il portait à la deuxième partie n'arrangeait rien. Puisqu'il se sentait trop proche, à Vienne, du monde de son roman, Musil déménagea à Berlin. Mais là, il fréquenta surtout le salon d'un viennois, Richard von Mises, une des principales figures des mathématiques appliquées. Mises, ami d'école de Hugo von Hoffmannsthal et grand mécène de Rainer Maria Rilke (les deux poètes autrichiens les plus en vogue à l'époque), donnait la preuve que l'admiration des littéraires viennois pour les mathématiques n'était pas à sens unique. Il fonda une association ayant comme unique objectif d'assister financièrement Robert Musil.

Dès qu'il eût lu l'exposé du grand roman de Broch, *Les somnambules*, Musil nota avec une pointe d'aigreur : « Il me semble que les intentions de Broch et les miennes sont très proches, même dans les détails ». Elias Canetti confirme que Musil prit la trilogie de Broch comme « une imitation de sa propre entreprise, et le fait que Broch, qui venait à peine de commencer, avait déjà menée sa tâche à bout, le remplit de la méfiance la plus noire ».

Cependant Broch, sans s'en soucier le moins du monde, osa pénétrer de plus en plus profondément dans le domaine de Musil. Alors qu'il n'avait accordé que quelques lignes des *Somnambules* aux mathématiques, il entama un nouveau roman dont le héros était, tout comme *l'homme sans qualités*, un mathématicien universitaire ! Les « espoirs les plus audacieux » de ce Richard Hieck faisaient écho à deux des questions majeures du Séminaire Mathématique de Vienne : « si seulement il pouvait réussir... à dépister les traces du miracle de la dimension, à découvrir une logique sans axiomes... » Et tandis que Musil, travaillant de plus en plus lentement, s'embourbait dans le deuxième volume de son chef-d'oeuvre, Broch jeta sur le papier, entre juillet et novembre 1933, *La Grandeur Inconnue*, une tentative un peu touchante dans le genre « populaire ». Plein d'enthousiasme, Broch compléta même pour la Paramount un script pour le film correspondant, qui ne réussit pas à convaincre Hollywood.

Décor mathématique

Celui dont les romans furent effectivement filmés, c'était Leo Perutz. Il avait obtenu, déjà avant guerre, un bon poste dans une grande compagnie d'assurance, et publiait même des travaux scientifiques sur des questions d'assurance-vie. La formule d'égalisation de Perutz jouissait d'un certain lustre, du moins parmi les littéraires des cafés viennois. Mais la passion majeure de Perutz était toujours le métier d'écrivain ; d'ailleurs, les maths, pour lui, avaient peu à voir avec des spéculations philosophiques portant sur des mondes alternatifs ; il les voyait plutôt comme un sport intellectuel, un

peu comme le bridge. Toute pâleur spirituelle était étrangère à sa nature vigoureuse ; ses contes étaient tous des thrillers de premier ordre, d'ailleurs fortement admirés par Alfred Hitchcock et Ian Fleming, qui connaissaient le genre. Le succès fut immense : publications dans les grands magazines illustrés, adaptations pour la scène, films... Pendant les années vingt, Perutz faisait partie des auteurs allemands les plus lus. Avec chaque livre, son style devenait plus économique et plus serré. Derrière chacune de ses nouvelles et comédies (l'une fut mise en scène par Heinrich Schnitzler, l'ancien ami d'école de Karl Menger), se cachait une idée ingénieuse, calculée jusqu'au bout.

Un conte bref de Perutz, *La Journée sans fin*, est une transposition littéraire du duel d'Evariste Galois dans l'atmosphère fin de siècle du Vienne de Schnitzler. Elle incita un des membres du Cercle de Vienne, le jeune mathématicien Gustav Bergmann, à écrire une lettre à Perutz qui dut assurément causer un plaisir intense à ce maître illusionniste. « Permettez la question », écrivait Bergmann fort poliment, « l'épisode que vous avez décrit avec tant de goût possède-t-il quelque arrière-fond réel ? Car bien que les circonstances extérieures soient fort romantiques, les précisions que vous donnez sur les courbes de Cayley, le cercle cubique... se distinguent si nettement des absurdités qui servent de « décors mathématiques » dans d'autres instances du genre qu'elles justifient la conjecture que Monsieur Botrel a vraiment existé. En vous priant avec les sentiments les plus respectueux de m'envoyer des détails supplémentaires (l'endroit où se trouve le Nachlass, si possible, ...) »

Il se trouve que je me connais un peu en mathématiques

Broch, qui sut très tôt reconnaître le talent de Perutz, avait publié en 1920 une critique fort favorable de son roman historique *Le marquis de Bolibar*. Musil, lui aussi, connaissait Perutz, mais il ne supportait que fort mal le caractère bougon de cet homme qui aimait être affublé du sobriquet « d'ours » et s'illustrer dans de fameuses bagarres. Ce qui irritait le plus Musil, ce n'était pas l'écrivain Perutz, mais le mathématicien avec sa maudite formule. Cette hostilité sourde ne tarda pas à apparaître. Un journal de Prague avait publié une anecdote littéraire à laquelle Musil répliqua, quatre jours plus tard, avec une mise en garde invoquant la loi sur la presse :

Il y a quelque temps, une anecdote apparut dans votre journal avec à peu près le contenu suivant : « Le grand écrivain et mathématicien Leo Perutz reçut la visite, un jour, d'un schmock bien connu nommé Robert Musil, qui lui demandait : « Écrivez donc quelque chose sur les mathématiques pour mon journal, Monsieur Perutz, ou sur quelque chose d'avoisinant, disons l'éthique ». Ce à quoi l'écrivain et mathématicien Perutz répondit, sans perdre son calme : « Tenez, je vous écrirai sur la moralité du triangle isocèle ». Cet entretien se passa, en effet, du temps où tout le monde raffolait d'Einstein.

Et Musil poursuivit :

Je veux bien laisser croire que je suis, en tant qu'écrivain, sur tous les points le contraire du grand Leo Perutz. Mais il se trouve que je m'y connais un peu en mathématiques : il est vrai que je ne peux pas me prévaloir d'une formule comme Perutz, mais j'ai tout de même développé un appareil de physique qui est encore en usage et dont la construction a exigé quelques calculs... Oui, j'ai même écrit, plusieurs fois, sur les liens entre la pensée morale et la pensée mathématique, et je suis bien aise de pouvoir souligner que des liens non-conventionnels

existent aussi. Si l'on rétablissait donc le contenu authentique de cet entretien, on trouverait que l'esprit souverain de Leo Perutz relaté par cette anecdote se réduit en fait à l'expression d'un certain enfantillage.

La fin de toute sécurité (probablement)

Entre-temps, sans que les littéraires s'en soient rendu compte, l'institut de la Strudlhofgasse avait vécu une heure historique. Le plus jeune et silencieux des membres du Cercle de Vienne, un nommé Kurt Gödel originaire de Brünn, avait mis à bas le programme de Hilbert, voie royale pour assurer des fondements sûrs aux mathématiques. Gödel avait démontré qu'il était impossible de prouver rigoureusement qu'il n'existe pas de contradiction en mathématiques ! Ce que Musil avait anticipé vingt ans auparavant, « que quelque chose clochait dans les fondements que l'on ne pouvait absolument pas remettre en ordre », ne pouvait plus être contesté. L'incertitude n'avait pas été seulement passagère. « Probablement il n'existe nulle part un savoir qui soit totalement assuré », écrit Hans Hahn, patron de thèse de Gödel. On remarque le « probablement » qui annonce le slogan de Karl Popper — « je sais que je ne sais rien, et peut-être même pas Áa ».

En politique aussi, c'était la fin de toute sécurité. Dans le régime clérico-fasciste qui s'était établi en 1934 en Autriche, un souffle froid se levait sur le Cercle de Vienne. Après la mort de Hahn, sa chaire resta vacante. À cause de troubles politiques, l'Université de Vienne dut souvent interrompre ses cours, parfois pendant des mois. Quand le Cercle de Vienne tenait ses séances dans la Strudlhofgasse, Karl Menger (comme professeur il possédait une clé de l'institut) devait ouvrir la porte aux autres. Tandis que policiers et éléments incontrôlés se battaient dans la rue, le petit groupe, perdu dans l'immense bâtiment, discutait de logique.

La plupart des membres du Cercle finirent par trouver un havre aux États Unis. L'un des plus jeunes, ce Gustav Bergmann qui jadis avait écrit à Perutz avec un tel entrain, rencontra Hermann Broch sur son paquebot. Les deux émigrants, qui avaient étudiés ensemble, nouèrent une amitié profonde.

Le steamer de Perutz vogua dans une autre direction, mettant cap sur la Palestine. « Adieux froids à l'Europe », nota le passager laconiquement lors de sa sortie du port de Trieste. Et Musil passa ses dernières années, totalement appauvri, en Suisse. Ainsi se confirma ce que l'auteur viennois Egon Friedell (qui se jeta par la fenêtre le jour où Hitler entra en Autriche) avait écrit, bien des années auparavant, et dans un tout autre contexte : « la ville de Vienne possède un génie pour se débarrasser de ses maîtres à penser. »

La création de la SMF et la fabrication d'une périphérie mathématique

Hélène Gispert

(GHDSO – Université Paris Sud-Orsay, IUFM de Versailles)

La Société Mathématique de France et son *Bulletin* sont créés en 1872. Souhaités par beaucoup, dont Michel Chasles qui y voyait une condition du développement et du rayonnement des mathématiques françaises, ils voient le jour l'année qui suit la défaite française devant la Prusse. Il ne s'agit pas là d'une coïncidence, la création de la société participant d'une politique de redressement national dans le domaine de l'enseignement et de la recherche, en particulier en sciences. La période qui s'ouvre alors est, jusqu'à la première guerre mondiale, un temps de formidables changements dans la vie mathématique française, tant au plan institutionnel qu'au plan des orientations de recherche ; certains intérêts, certains acteurs s'affirment avec force au cœur de la vie académique, d'autres sont marginalisés. La SMF n'a-t-elle été que le témoin de ces évolutions ou a-t-elle joué un rôle dans ces processus ? S'est-elle construite en s'appuyant, ou plus encore en mettant en œuvre, certains processus d'exclusion ?¹

Le paysage institutionnel à la naissance de la SMF

Sur les 178 membres français adhérents à la Société Mathématique de France l'année 1874, plus de la moitié (58%) sont polytechniciens. Cette centaine d'hommes - car 100% des sociétaires sont évidemment des hommes, cette caractéristique institutionnelle étant alors tellement banale qu'on ne pense guère à la souligner - ont étudié les mathématiques à l'Ecole polytechnique, filière d'excellence, mais filière quasi unique, de la formation mathématique depuis le début du XIXe siècle. Tous les mathématiciens d'importance jusqu'aux années 1860 y ont étudié ou enseigné un temps ; Gaston Darboux est le premier à faire exception à cette règle, bientôt suivi par d'autres : reçu premier à l'Ecole normale et à l'Ecole polytechnique, il choisit la première. L'année 1874, ils sont 25 normaliens (soit 14% des membres français) à être sociétaires. Darboux est, a fortiori, une exception aux premiers bureau et conseil de la SMF dont vingt-deux des vingt-sept membres sont polytechniciens².

Au delà de cette supériorité numérique des adhérents polytechniciens quatre fois plus nombreux que les normaliens, il est intéressant de noter que les trois quart des sociétaires français ont été élèves de l'une ou l'autre de ces deux grandes écoles. Quel a pu être le cursus de la quarantaine restant ? Ce n'est qu'en croisant d'autres facteurs

¹ Je tiens à remercier ici Jean-Pierre Bourguignon qui, lors de ma soutenance d'habilitation à diriger des recherches en décembre 1997, m'a posé ces questions auxquelles je n'ai su alors que répondre très partiellement. Daniel Barsky, auquel je racontais plus tard et les questions et les problématiques que j'avais alors été conduite à formuler, a considéré que cela pouvait avoir un intérêt tout à la fois historique et contemporain pour les lecteurs de la Gazette ce dont je le remercie.

² Toutes les données quantitatives avancées dans cet article ont été établies lors de l'étude que j'ai réalisée de la Société Mathématique de France de sa création à 1914. Elles sont présentées dans le chapitre 7 de mon ouvrage *La France mathématique, La Société Mathématique de France (1870-1914)*, SFHST et SMF, 1991, pp.163-180. Les pourcentages indiqués dans cet article concernent les seuls sociétaires français, mais je précise à titre indicatif que le nombre de sociétaires étrangers était de 12 en 1874 et qu'il atteignait 100 en 1914.

d'analyse sur les professions des sociétaires que l'on peut suggérer des réponses à cette question. Mais l'affirmation d'une caractéristique forte du paysage scientifique français – à savoir, la faiblesse, voir la quasi inexistence, des facultés des sciences autres que la Sorbonne jusque dans les années 1870 – permet d'exclure certaines hypothèses ; ainsi, la centaine d'enseignants qui se partagent en France, souvent avec cumul, les postes de mathématiques dans les facultés (une trentaine), les classes préparatoires (une soixantaine), à l'Ecole polytechnique et ses écoles d'application (une trentaine), à l'Ecole normale supérieure (cinq) n'est pas passée par l'université.

Le profil professionnel des membres de la SMF reflète la dominance de l'Ecole polytechnique et des filières auxquelles elle conduit par le biais de ses écoles d'application. Presque la moitié des sociétaires (46%) sont en effet mentionnés comme "ingénieur" sur les listes d'adhérents de la Société, soit à peine moins que les enseignants (49%) , ces deux catégories se chevauchant comme dans le cas de Jordan par exemple. En fait, parmi ces enseignants, ce sont encore les enseignants à l'Ecole polytechnique ou dans des écoles d'application qui sont les plus nombreux. Enfin, un tiers des sociétaires ingénieurs sont officiers. La part des sociétaires qui, dans les listes d'adhérents, ne relèvent ni de la profession enseignante, ni de la profession ou du titre d'ingénieur, n'est que de 13%.

Ce profil établi, une première question se pose. Dans quelle mesure la Société est-elle représentative du milieu mathématique français ? Question qui en induit immédiatement une autre dans la perspective de cet article : quelle définition adopter du milieu mathématique ? A la diversité, parfois contradictoire, des définitions actuelles s'ajoute l'obstacle de la diversité et de la pertinence des réponses historiques. Procédons par étapes.

Si l'on considère qu'il faut publier des mathématiques pour appartenir au milieu, une première ligne de partage serait alors entre les auteurs de mathématiques et les autres. Dans ce cas, plus de la moitié des premiers membres de la SMF (55% exactement) sont disqualifiés. En fait un quart des membres seulement, soit une petite cinquantaine, ont publié des articles ou des livres de façon non-épistodique³. Parmi eux, le poids de l'Ecole polytechnique est à nouveau remarquable (63%), mais guère supérieur au poids des polytechniciens dans l'ensemble de la Société.

Ce critère d'auteur doit cependant à son tour être précisé. En effet, le quart de la production des sociétaires dans les années 1870-1874 paraît dans *les Nouvelles Annales de mathématiques*, journal dont le sous-titre – *journal des candidats aux Ecoles polytechnique et normale* – indique bien que ses intérêts se situent pour l'essentiel dans les domaines des mathématiques élémentaires de classes préparatoires. Ainsi, l'objet que s'est donné la Société dans l'article 1 de ses statuts : « l'avancement des sciences et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées », semble ici compris dans un sens large.

La cinquantaine d'auteurs de la SMF sont en fait pour les trois quarts des enseignants. Leurs postes appartiennent, à part à peu près égale, au monde universitaire (ENS comprise), au monde secondaire (dont les classes préparatoires) et au monde de l'Ecole polytechnique et de ses écoles d'application. Cette sur-représentation des

³ J'ai réalisé le recensement des publications des sociétaires à partir du dépouillement des tomes annuels du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, recensement qui dépend donc à nouveau d'un processus de sélection induit par le choix des journaux et ouvrages pris en compte par les responsables du *Jahrbuch*.

enseignants parmi les auteurs est une indication de ce que certains milieux professionnels, qui ont à voir avec les mathématiques, comme les actuaires, les astronomes, les ingénieurs qui ont (ou vont avoir) leurs propres sociétés, leurs propres périodiques, ont une histoire qui s'est séparée de celle d'un milieu mathématique plus académique qui se retrouve dans la Société Mathématique de France.

La réussite d'un type professionnel nouveau : le mathématicien universitaire

Dès la fin des années 1890 la Société Mathématique de France se modifie profondément. Elle bénéficie d'une nouvelle vague d'adhésions, les vieilles générations de sociétaires, celles des années 1870-1880, disparaissent plus rapidement. Alors que le nombre de sociétaires français en 1914 est égal à 178, soit exactement le même qu'en 1874, il y a au total 160 noms nouveaux d'adhérents français sur les listes de sociétaires entre 1900 et 1914. Les conséquences sur la composition de la Société sont spectaculaires. En 1914, un sociétaire français sur trois est universitaire alors qu'ils n'étaient qu'un sur dix en 1874; parallèlement, le nombre des polytechniciens – et avec lui celui des ingénieurs – s'effondre et passe sous celui des normaliens qui représentent alors plus du tiers des adhérents⁴. Enfin, la proportion d'enseignants parmi les membres est devenue écrasante : ils sont 72%.

Cette évolution structurelle de la Société renvoie à des changements institutionnels dans le paysage mathématique qui ont lieu dans les premières décennies de la Troisième République. En trente ans, de 1870 à 1900, le nombre de postes universitaires en mathématiques est multiplié par deux et atteint la soixantaine. L'université est devenue un champ professionnel qui peut concurrencer l'Ecole polytechnique. A ce premier changement, d'ordre quantitatif, s'ajoute un second de nature qualitative. La création de ces postes correspond en effet à la volonté institutionnelle de développer les activités de recherche dans des facultés de sciences qui ne soient plus vouées au seul enseignement, ou même, à la certification des diplômes. Les bénéficiaires de ces postes de mathématiques, pour la plupart de jeunes et brillants docteurs, peuvent ainsi éviter le passage jusqu'alors obligé dans un poste en lycée ou en classes préparatoires après l'obtention de leur thèse. Une distinction commence à apparaître entre les carrières d'enseignants du secondaire et du supérieur, ainsi que, d'une certaine façon, entre les carrières de l'Université et celles de l'Ecole polytechnique. Le monde universitaire, les carrières universitaires échappent à la sphère de l'Ecole polytechnique. Leur développement symbolise la naissance d'un nouveau pôle dans le monde mathématique, celui de l'Ecole normale supérieure qui devient à son tour, à la fin du siècle, le lieu de l'excellence mathématique.

La création de ce nouveau type professionnel, pour lequel on peut risquer le qualificatif anachronique d'« enseignant-chercheur », a ainsi eu des effets spectaculaires sur la composition de la SMF. Prenons en toute la mesure. Le pourcentage d'auteurs parmi les sociétaires – qui est, rappelons-le, de 26% en 1874, atteint 40% en 1914; parmi ces auteurs, neuf sur dix sont enseignants et plus de la moitié sont des universitaires issus de l'Ecole normale. La nature même de la Société, du lien que ses adhérents

⁴ Le nombre de polytechniciens est de 103 (soit 58% des sociétaires français) en 1874 et n'est plus que de 52 (soit 29%) en 1914. Celui des normaliens passe par contre de 25 (soit 14%) en 1874 à 63 (soit 35%) en 1914.

entretiennent avec les mathématiques en sont affectés, cela d'autant que le pourcentage des auteurs qui publient dans des revues reconnues de recherche en France ou à l'étranger passe dans la même période de 18% à 28%. Ainsi, par exemple, si les *Nouvelles Annales de mathématiques* ont toujours en 1914 la deuxième place, après les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, dans la production des sociétaires, leur part est quand même tombée de 24% à 13% de la production totale.

Le passage d'une dominance polytechnicienne à une dominance normalienne dans la Société s'accompagne d'une évolution manifeste des normes, des standards, des intérêts qui peuvent être repérés dans l'ensemble de la production des sociétaires. L'étude de cette production montre en effet qu'à l'intérieur du champ académique passe une ligne de partage qui permet d'identifier deux sortes d'auteurs qui correspondent pour une grande part à des lieux institutionnels de formation et d'exercice distincts⁵. D'un côté, se trouvent des auteurs (peut-on les appeler des mathématiciens ?) qui ne publient que dans les revues scolaires ou de vulgarisation et, de l'autre, des auteurs qui peuvent publier à la fois dans ce type de journaux et dans la presse mathématique de recherche. Les premiers sont enseignants des classes préparatoires ou du secondaire, contrairement aux seconds qui sont le plus souvent universitaires ; ils sont plus nombreux parmi les polytechniciens qui s'investissent plus particulièrement dans ces questions d'enseignement et de vulgarisation que dans une activité de recherche. Il n'en est pas de même par contre pour l'*Autre* école. Dès les années 1880 les normaliens investissent promptement et massivement, si l'on peut dire vu l'effectif des élèves, les revues de recherche.

Enfin, cette ligne de partage institutionnelle traverse également les domaines privilégiés de recherche des sociétaires. Pour les polytechniciens, tout au long de la période, ces domaines sont avant tout la physique mathématique et la mécanique. A partir des années 1890, par contre, les sujets d'intérêt majeur pour les normaliens appartiennent à la nouvelle analyse – celle de la théorie moderne des fonctions – et se différencient donc nettement de ceux des polytechniciens. On doit ajouter que la géométrie, domaine le plus fréquemment abordé (sous son aspect élémentaire) dans les revues d'enseignement et de vulgarisation qui ne traitent que rarement d'analyse transcendante, donne lieu à peu d'articles dans les revues de recherche quels qu'en soient les auteurs.

Nous pouvons, à ce point, saisir toute la signification de l'évolution de la production mathématique globale des sociétaires, toutes catégories d'auteurs et de revues considérées, entre 1874 et 1914 : la géométrie, triomphante dans les débuts de la Société avec 43% de la production totale, s'efface devant l'analyse qui, entre 1910 et 1914, atteint le score de 32% . La réussite du mathématicien universitaire à l'intérieur de la SMF propulse ainsi l'analyse au premier rang des intérêts de la Société.

La SMF et la fabrication d'une périphérie mathématique

On observe dans ces décennies une différenciation, une stratification des différentes composantes de l'activité mathématique et de ses acteurs. A la fin de la période, juste avant la première guerre mondiale, tous ne se retrouvent pas dans la Société Mathématique de France et, pour ceux qui en sont membres, ils ne publient pas tous dans

⁵ Ces éléments d'analyse ont été établis dans H. Gispert, « Le milieu mathématique français et ses journaux en France et en Europe », in Aussejo et Hormigon (eds), *Messengers of Mathematics : European Mathematical Journals (1800-1946)*, Siglo XXI de España Editores (1993), pp. 133-158.

son bulletin. Si l'on prend en compte la diversité des acteurs possibles, dans et hors de la Société, on trouve ainsi :

- une recherche académique, centrée principalement sur quelques domaines spécifiques comme les équations différentielles et la théorie des fonctions, publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, le *Bulletin* de la SMF, le *Journal de Liouville* ou des revues étrangères de ce type,
- une recherche qui diffère de la précédente en ce sens qu'elle traite de sujets plus élémentaires, essentiellement en géométrie ou théorie des nombres. Elle est publiée dans des journaux spécifiques parmi lesquels une presse d'enseignement qui se développe de façon spectaculaire dans les années 1890,
- des recherches sur des sujets plus « appliqués » – comme les statistiques et les probabilités dont le développement se fait alors en dehors du champ universitaire avec les mathématiques des actuaires ou la balistique, la mécanique (non rationnelle), la géodésie – publiées dans des journaux spécifiques et qui disparaissent progressivement de ce que l'on peut appeler le champ mathématique académique,
- enfin, la diffusion, à une échelle plus large que celle de la Société Mathématique de France, publiée, là encore, dans une presse spécifique.

Il apparaît, manifestement, à travers l'étude de la production de ses membres mais plus encore à travers le contenu de son bulletin, que la Société Mathématique de France ne reflète pas, et de loin, l'éventail de ces intérêts mathématiques et donc l'éventail des acteurs potentiels de la vie mathématique en France. Elle a accompagné et même promu, nous allons le voir, le mouvement de professionnalisation du milieu mathématique centré sur le noyau académique parisien évoluant autour de l'Ecole normale et de la Sorbonne. Avec la promotion – et non seulement la réussite – du mathématicien universitaire, des catégories de sociétaires qui s'étaient reconnues dans la jeune Société Mathématique de France ne s'y retrouvent plus du tout quarante années plus tard.

La stagnation des effectifs nationaux de la SMF dans cette période, contrairement à l'évolution des effectifs de sociétés mathématiques d'autres pays, témoigne de ce processus. La Deutsche Mathematiker-Vereinigung compte en effet 480 sociétaires allemands en 1914 (elle en avait 192 à sa création en 1890), l'American Mathematical Society, plus de 700. La taille des pays, des milieux potentiels n'est pas ici en jeu. C'est ce que montre la politique éditoriale de ces différentes sociétés à travers la structure de leur bulletin. Le journal de la SMF est le seul à ne publier que des mémoires originaux de recherche de ses membres ; il n'y a dans le *Bulletin* de la SMF, à la différence des autres, ni revue bibliographique – que ce soit à propos de livres nouvellement parus ou des journaux ou bulletins que la Société échange avec le sien – ni information sur la vie mathématique française ou étrangère. A quelques exceptions près, aucun article critique, aucune mise au point, aucune discussion ou réflexion d'ordre mathématique, pédagogique, philosophique ne paraît dans le journal ; celles-ci se déroulent ailleurs que dans la Société qui présente une interprétation très restrictive et de fait très élitiste des intentions affichées dans ses statuts de promouvoir l'avancement et la propagation des études mathématiques. La différence est de taille avec, par exemple, le bulletin de l'AMS qui a pour sous titre « Historical and Critical Review of Mathematical Science » ou le *Jahresbericht* de la DMV qui consacrent tous deux, au début du siècle, de nombreuses pages à la vie mathématique nationale et internationale ainsi qu'aux actualités de l'édition mathématique.

L'étude comparée des profils mathématiques des contributions des sociétaires publiées dans le *Bulletin* de la SMF et dans les *Comptes Rendus de l'Académie des sciences* permet de mieux encore cibler le sens et les conséquences de cette politique de la Société Mathématique de France⁶. Ouvert aux publications de recherche de chacun de ses sociétaires – l'élite académique mais aussi les professeurs de classes préparatoires ou de lycées et les répétiteurs de l'Ecole polytechnique pour lesquels le *Bulletin* est la publication de recherche de référence - le *Bulletin* présente dans les années 1872-1879, et jusque dans les années 1890, un profil qui est différent de celui des *Comptes rendus* et qui traduit un certain divorce entre les intérêts du milieu mathématique français, investi principalement dans des recherches géométriques qui s'essoufflent, et les travaux de mathématiciens qui se situent sur le front avancé de la recherche mathématique et investissent parallèlement d'autres champs dont l'analyse.

A partir des années 1900, moment où les modifications structurelles dans la Société ont pris toute leur ampleur, les différences relevées s'atténuent, la part des articles de géométrie est du même ordre dans le *Bulletin* et dans les *Comptes Rendus*. Mais surtout le *Bulletin* semble être un lieu d'amplification de cette évolution de la production qui n'est plus en fait que celle d'une fraction du milieu français, évolution caricaturée en partie par les modifications brutales des rapports géométrie/analyse dans le *Bulletin* : alors qu'il y a plus de trois fois plus d'articles de géométrie que d'analyse dans les années 1872-79, il y en a sensiblement autant dans ces deux domaines dans les années 1900-1909. Dans les années 1910-1914, la proportion d'articles d'analyse dans les colonnes du *Bulletin* dépasse même de 20% celle relevée dans les *Comptes Rendus*.

L'absence dans le *Bulletin* de toute une partie de la production et d'auteurs, dont certains sont d'ailleurs encore sociétaires, témoigne de choix qui dessinent les contours d'une périphérie mathématique constituée des activités et des acteurs dans lesquels la Société Mathématique de France se sent de moins en moins concernée. Une des composantes de cette périphérie s'inscrit dans le cadre académique ; elle est reléguée dans d'autres journaux que le *Bulletin* qui ne relèvent plus du monde mathématique distingué comme toute la presse d'éducation mathématique dont les *Nouvelles Annales*. La professionnalisation du milieu mathématique dont participe la SMF provoque l'existence d'une seconde périphérie qui, par contre, ne relève plus de ce monde académique.

Celle-ci se manifeste, entre autre, à l'occasion des sections de sciences mathématiques des congrès d'une association scientifique créée, la même année que la SMF, à la fois par les milieux industriels, bancaires et commerciaux et par les milieux scientifiques académiques. L'ambition de cette Association française pour l'avancement des sciences est de contribuer au redressement du pays par le progrès et la diffusion des sciences partout en France, « du double point de vue du perfectionnement de la théorie pure et du développement des applications pratiques ». Dans le domaine des sciences mathématiques (y compris l'astronomie, la géodésie et la mécanique), de la création de l'Association en 1872 à la première guerre mondiale, plus de 350 congressistes présentent environ 1200 communications, soit à peu près autant que d'articles

⁶ Cette comparaison, ainsi que celle avec les comptes rendus des congrès de l'AFAS (Association française pour l'avancement des sciences) traitée ci-dessous, est développée dans H. Gispert, « Réseaux mathématiques en France dans les débuts de la troisième République », *Archives internationales d'Histoire des sciences* (49), 1999, pp. 121-149. (Les graphiques 2 (SMF) et 3 (CRAS) de la page 142 ont été intervertis).

publiés dans la même période dans le *Bulletin* de la SMF. Dans les années 1870, malgré des spécificités affirmées dont l'intérêt porté aux applications et la participation de nombreux « amateurs », les réseaux sur lesquels s'appuient l'AFAS recourent en partie ceux de la Société Mathématique de France⁷. Les membres les plus actifs de l'AFAS ont alors également des responsabilités à la SMF. Il n'en est absolument plus de même à partir des années 1880-1890 où la part des militaires en retraite, des ingénieurs non-polytechniciens, des amateurs sans profession annoncée ne cesse de croître, et où l'AFAS ne peut plus s'appuyer sur le milieu mathématique français tel qu'il apparaît dans la Société Mathématique de France. A la fin du siècle la différenciation des réseaux est accomplie et s'est accompagnée d'une différenciation radicale des intérêts mathématiques.

Ainsi, une multiple cassure s'est produite dans un milieu français qui englobait encore tous les genres à la naissance de la Société mathématique de France et qui, à la veille de la première guerre mondiale, a laissé à ses marges, d'une part, les personnes non engagées dans une activité institutionnellement mathématique – qu'elles soient amateurs ou qu'elles évoluent dans des milieux professionnels non académiques où sont développées des mathématiques aujourd'hui dites appliquées – et, d'autre part, les spécialistes de mathématiques scolaires, principalement des enseignants du secondaire des lycées. Cette cassure, nous l'avons dit, a été provoquée par la dynamique de professionnalisation de l'activité mathématique autour de l'Université et de l'Ecole normale à partir des années 1880, mais un regard sur la scène mathématique internationale permet de pointer en conclusion certaines des spécificités de cette situation française.

L'ampleur de la rupture entre le milieu des sociétaires et les recherches de mathématiques appliquées ou les applications des mathématiques à partir des années 1900, n'a pas d'équivalent, par exemple, en Allemagne. La présence des sujets dans les domaines dits « appliqués » dans les activités de la SMF et de la DMV est particulièrement significative d'une différence d'orientation⁸. Alors que les pairs de l'Université française, dont l'idéal est « une recherche passionnée de la vérité pour elle-même, en dehors de toute application et de tout profits immédiats », s'opposent à l'introduction à la Sorbonne de toute orientation appliquée dans les chaires de sciences, Felix Klein créée à Göttingen la première chaire universitaire de mathématiques appliquées. La promotion du mathématicien universitaire en France à laquelle a participé la SMF a donc rejeté dans une périphérie d'un centre mathématique institutionnalisé des champs des mathématiques appliquées.

De la même façon, la mise à l'écart du monde du secondaire ne se retrouve ni en Allemagne, ni aux Etats Unis. A la DMV, en 1914, les enseignants de lycée représentent le tiers des adhérents nationaux. Quant à l'AMS, elle affirme sa vocation d'être et de demeurer une société d'enseignants et non, comme semble l'être devenu

⁷ Sur les mathématiques à l'AFAS voir l'article cité note 6 et voir Anne-Marie Décaillot, « L'arithméticien Edouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation », *Revue d'histoire des mathématiques* (4) 1998, pp. 191-236. Signalons seulement, dans le cadre de cet article, que les domaines privilégiés de l'AFAS sont la géométrie (en particulier la géométrie du triangle), puis la théorie des nombres, l'astronomie (essentiellement l'astronomie d'observation), la mécanique (mécanique appliquée et non mécanique rationnelle).

⁸ Sur l'étude comparée des deux sociétés voir H. Gispert et R. Tobies, « A comparative study of the French and German Mathematical Societies before 1914 », in Goldstein, Gray, Ritter (eds), *L'Europe mathématique, Mathematical Europe*, Editions de la Maison des sciences de l'homme, Paris (1996), pp. 408-430.

la SMF à la lecture de son seul organe, le *Bulletin*, de mathématiciens se trouvant être enseignants⁹.

La physionomie que présente la Société Mathématique de France en 1914 est donc très particulière. Si elle reflète une évolution institutionnelle qui dépasse le seul cadre de la Société, elle est aussi le résultat de choix, tant dans le domaine du recrutement que dans le domaine éditorial, difficiles à saisir dans la mesure où il n'ont été explicités ni dans son *Bulletin* ni dans ses statuts. Il n'en demeure pas moins que, durant toutes ces années, la SMF a défini une politique dont l'élitisme a abouti à l'existence d'une périphérie dans un paysage mathématique centré autour des recherches universitaires.

⁹ C'est ce dont témoigne l'adresse délivrée devant l'AMS par son président en 1894 : « Any tendency to restrict its usefulness solely to the paths of investigation and publication should, for every reason of prudence and wisdom, be resisted », *Bulletin of AMS*, 1 (1895), pp. 85-94.

Université d'été à Poitiers : évolution des effectifs dans les filières scientifiques

Myriam Déchamps

Université Paris-Sud

Des représentants de la communauté enseignante scientifique, des responsables d'orientation et d'insertion, des responsables ministériels et des milieux professionnels se sont retrouvés à l'Université de Poitiers les 6, 7 et 8 juillet 2000 pour confronter leurs données et leurs analyses sur la baisse des effectifs en sciences, du second degré à l'université, constatée aussi bien en France que dans de nombreux autres pays.

Dans son intervention, Jean-Pierre Borel, président de la CDUS¹, souligne qu'il est très difficile d'obtenir une vision à la fois globale et précise de la chute des effectifs scientifiques. Suivant que l'on regarde les diplômes délivrés, les inscrits ou les flux entrants, les chiffres et les analyses sont différents. La CDUS a mené deux années d'enquêtes pour avoir le « flux entrant » en première année de DEUG. Si la tendance globale rejoint les chiffres du MEN qui indiquent une baisse des effectifs depuis trois ans, deux constats sont faits : une grande variabilité suivant les mentions de DEUG et suivant les universités. Par exemple, en DEUG Sciences et Technologies, l'évolution va de -31% à +16% suivant les universités. Au niveau européen, les baisses d'effectifs en Physique et Chimie constatées en France (-3,2 en 1998, -2,4 en 1999 en DEUG SM) deviennent spectaculaires au Pays-Bas et en Allemagne.

Il a été trop souvent signalé que la déperdition des effectifs en sciences dépasse largement l'évolution démographique et on a cité des nombreux motifs : une image négative des sciences chez les jeunes, le grand public et les médias ; une appréhension, chez les lycéens, et surtout chez les filles, à s'orienter vers les disciplines scientifiques considérées comme difficiles ; une liaison insuffisante Lycée-Université ; une formation et un encadrement en premier cycle universitaire à adapter aux nouveaux publics ; une méconnaissance des formations universitaires.

Ce dernier point est mis en évidence par une étude commandée par la Direction des Enseignements Supérieurs en juin 1999, auprès de 3100 lycéens. Les réponses à la question « à niveau d'études équivalent, il vaut mieux être passé par » sont sans surprise : 51% répondent « École d'Ingénieurs » et 17% « Université ». Plus surprenant, à la question « pour faire carrière dans la recherche, vaut-il mieux être passé par », 43% répondent « École d'Ingénieurs » et 30% « Université ». L'information reçue sur les possibilités d'étude à l'Université semble insuffisante à 60% des lycéens. La situation n'est pas meilleure du côté des enseignants du secondaire : 60% d'entre eux pensent ne pas avoir à informer sur les études universitaires et les 30% qui le font incitent à aller en CPGE. Les raisons invoquées : l'université recrute les plus mauvais lycéens et les pires enseignants, l'encadrement y est mauvais et il y a peu de contacts avec

¹ Conférence des Doyens et directeurs des UFR Scientifiques des universités françaises.

les entreprises. On peut penser que les universitaires ne communiquent pas assez et n'ont pas su expliquer les changements intervenus dans la dernière décennie dans les filières scientifiques universitaires, soit dans l'encadrement des étudiants, soit dans la professionnalisation.

L'intervention de Jacques Desplancq, de IBM Europe, sur la position de la filière informatique en France et Europe, face au marché de l'emploi, a mis en évidence des besoins extrêmement importants de formation initiale et continue, en particulier pour la nouvelle économie. C'est un secteur en mutation continue, où les compétences ont changé (IBM doit redéployer un millier de personnes dans les six mois) et où l'on est en concurrence permanent avec les nouveaux talents. L'image du secteur donnée par les médias, d'activité ludique déconnectée des sciences, est fausse. Les aspects scientifiques et techniques y sont primordiaux, mais les cursus d'aujourd'hui ne sont pas toujours adaptés aux demandes. Les besoins dans les trois années à venir sont immenses en Europe (de l'ordre de deux millions d'emplois). En l'absence d'une politique explicite de formation, il y aura une pénurie complète dans le marché de l'emploi, avec un coût économique très fort (380 milliards d'Euro de croissance de perdus) et le besoin d'importer des talents de pays en dehors de la sphère européenne. Des grandes entreprises se sont mobilisées, pour définir ensemble des nouveaux profils d'emploi, pour réfléchir à des nouvelles formations initiales ou continues, traditionnelles ou à distance, à l'aide des nouvelles technologies (en collaboration avec des Écoles et des Universités). La pénurie de formateurs compétents va nécessiter une vraie mobilisation des entreprises (développement des postes PAST, formules nouvelles d'intervention de professionnels).

Sous la forme d'ateliers ou de tables rondes, un certain nombre d'expériences, de bilans et de problèmes ont été abordés : expériences pédagogiques (« petits groupes », tutorat, « main à la pâte »,...), professionnalisation, bilans disciplinaires, bilans d'orientation (en particulier, choix effectués par les filles vers les filières scientifiques), place des sciences dans les formations IUFM, reconnaissance de toutes les missions de formation et recherche dans le statut des enseignants-chercheurs, ...

Des propositions à envoyer à nos autorités de tutelle ont été soumises à discussion, le dernier jour du colloque. La volonté était de fixer deux ou trois objectifs précis, certes modestes au regard des enjeux, mais d'en assurer la réalisation et le suivi. En voici un résumé :

Innovations pédagogiques : apporter une aide aux initiatives pédagogiques en DEUG Sciences et Technologies, en fléchant des moyens (de l'ordre de 5 MF par an) hors contrat pour ne pas attendre trois ou quatre ans pour les mettre en place.

Information, communication et articulation Lycée-Université : une plaquette d'information et un stand « formation scientifique » au salon de l'Éducation devraient être financés par le ministère et mis en œuvre avec la collaboration de la CDUS et de l'association Promosciences ; une ligne de financement de l'ordre de 100 kF par an et par rectorat devrait permettre des actions communes entre enseignants des Lycées et des Universités.

Groupe de suivi et d'évaluation : ce groupe, qui se réunirait quatre à cinq fois par an, aurait pour mission d'animer la réflexion, de programmer des actions, de mutualiser les expériences (site web, forum,...) et il pourrait aussi participer à l'expertise et l'évaluation d'innovations pédagogiques. Sa composition pourrait être : trois membres du CDUS, un membre de Promosciences, des représentants d'Universités (par exemple, Bordeaux, Grenoble, Lille, Orsay, Toulouse, déjà engagées dans des innovations).

Je conclus ce compte-rendu par une appréciation personnelle. Les propositions ci-dessus devraient permettre d'améliorer l'information sur les filières scientifiques universitaires, leur cohérence avec le secondaire et l'encadrement des étudiants. Néanmoins, j'estime que nous ne pouvons pas faire l'impasse sur une réflexion approfondie sur les contenus disciplinaires enseignés en premier cycle universitaire et les limites horaires imposées. Les réformes de structure, de forme et d'organisation des enseignements de la dernière décennie ont montré leurs limites et la plupart des universitaires s'accordent à constater un appauvrissement des compétences des étudiants à la fin des premiers cycles, qui se traduit dans certaines disciplines par un taux élevé d'échec en second cycle et des performances en licence très en-dessous de celles des étudiants issus des classes préparatoires. C'est là un problème que les sociétés savantes et les associations disciplinaires d'enseignants ne peuvent plus éluder : c'est de leur ressort de faire des propositions d'évolution des contenus scientifiques et d'apprécier le temps et les formes d'encadrement nécessaires pour une bonne assimilation de ces contenus, compte-tenu des contraintes politiques et sociales, des besoins disciplinaires et d'une cohérence globale des formations scientifiques.

Colloque EM 2000 sur l'enseignement des mathématiques

Marie-Claude David

Les 15, 16 et 17 juillet s'est déroulé à Grenoble le colloque EM 2000, colloque régional de la CFEM. La « région » concernée était la Francophonie, les cent septante participants, dont une bonne trentaine de jeunes, venaient de quatre continents et 18 pays et pratiquaient la langue française avec diversité et ce fut la première richesse de cette rencontre. Tous les niveaux de l'enseignement étaient représentés parmi ces participants qui, tous, s'impliquent de façon concrète dans la réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Ce sont donc des expériences vécues qu'ils nous ont rapportées lors des communications ou qu'ils nous ont proposé de partager dans les ateliers.

Les multiples initiatives présentées, qu'on ne peut malheureusement toutes mentionner ici, étaient très riches : il a été question d'histoire des sciences, de didactique des mathématiques, d'utilisation des TICE, de formation des enseignants, de lien avec les autres disciplines... Une exposition très complète sur Pythagore était présentée. Au Québec, la formation des enseignants est une formation intégrée de quatre ans à partir du niveau du baccalauréat ; elle comporte des enseignements de mathématiques et d'autres disciplines scientifiques, de sciences de l'éducation, de didactique très appliquée, des stages... La géométrie y fait un retour en force, on s'appuie sur le logiciel Cabri-Géomètre pour faire découvrir par exemple les multiples propriétés de la parabole et explorer des conjectures. En Afrique, on s'appuie sur les jeux traditionnels pour enseigner les mathématiques. Un membre de la commission de réflexion sur les épreuves du baccalauréat nous a proposé d'évaluer des copies produites par des élèves sur un énoncé plus ouvert et nous avons ainsi été mis en face des problèmes qui se posent au moment de l'évaluation de tels exercices et comment les enseignants expérimentateurs ont tenté de les résoudre.

Nous avons pu découvrir dans ces démarches très diverses les éléments communs de l'enseignement des mathématiques, les spécificités de chaque pays et profiter ainsi

d'un nouvel éclairage permettant de relativiser certaines de nos pratiques. Il me semble indispensable de s'intéresser à ces multiples expériences qui nous ouvrent des voies pour sortir de notre routine parfois bien décevante. Les actes de ce colloque seront bientôt disponibles sur Cdrom (s'adresser à Pierre Jullien pjullien@newsup.univ-mrs.fr).

Les Olympiades de mathématiques 2000

Jean-Christophe Novelli

Chef de délégation adjoint de l'équipe de France 2000

Cette année, les Olympiades de Mathématiques se sont déroulées à Taejon, en Corée du Sud à l'intérieur du campus universitaire, un lieu très vert et très agréable. Rappelons que cette compétition s'adresse à des élèves de niveau bac (au maximum) et rassemble environ 450 candidats venus du monde entier (plus de 80 pays étaient représentés à Taejon). Cette année, la France, dont le chef de délégation était Claude DESCHAMPS, a emmené : Paul BOURGADE, élève en Terminale à Dax (40), Yannick CHASSAGNEUX, élève en Terminale à Oullins (69), Emmanuel LEPAGE, élève en Première à Limoges (87), Pierre NOLIN, élève en Terminale à Versailles (78), Nicolas TEMPLIER, élève en Terminale à Pau (64) et Benjamin WAGENER, élève en Terminale à Paris (75).

Durant les deux jours de compétition, les élèves ont disposé à chaque fois de quatre heures et demie pour traiter trois problèmes (les trois premiers le premier jour et les trois autres le second), chaque problème étant noté sur 7 points. Ces problèmes sont de difficultés très différentes, les plus difficiles étant comme d'habitude les derniers de chaque journée.

Problème	1	2	3	4	5	6	Total
FRA 1	7	1	0	1	1	0	10
FRA 2	0	1	0	1	0	0	2
FRA 3	7	1	0	1	1	2	12
FRA 4	0	7	1	4	1	0	13
FRA 5	0	1	1	6	2	0	10
FRA 6	6	1	0	1	1	2	11

TABLE. — Scores des différents candidats numérotés par ordre alphabétique dans les divers problèmes.

La médaille d'or était à 30 points (38 candidats), la médaille d'argent à 21 points (72 candidats) et la médaille de bronze à 11 points (110 candidats), ce qui fait que la France a ramené trois médailles de bronze (voir table des scores). Sur l'ensemble des pays, la France termine 47^e.

Les problèmes

Problème 1. — Deux cercles O_1 et O_2 se coupent en M et N.

Soit l la tangente commune à O_1 et O_2 telle que M soit plus proche de l que N. La droite l est tangente à O_1 en A et à O_2 en B. La droite passant par M et parallèle à l rencontre à nouveau le cercle O_1 en C et le cercle O_2 en D.

Les droites CA et DB se coupent en E ; les droites AN et CD se coupent en P ; les droites BN et CD se coupent en Q.

Montrer que $EP = EQ$.

Problème 2. — Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1:$$

Problème 3. — Soit $n \geq 2$ un entier. Au début, il y a n puces sur une droite horizontale, pas toutes au même point.

Pour un nombre réel strictement positif γ , on définit un *mouvement* de la façon suivante :

- on choisit deux puces situées aux points A et B, avec A à gauche de B ;
- alors la puce en A saute au point C, situé sur la même droite, à droite de B et tel que $BC = AB = \gamma$.

Trouver toutes les valeurs de γ telles que, pour tout point M sur la droite et pour toutes positions initiales des n puces, il existe une suite finie de mouvements qui amène toutes les puces à droite de M.

Problème 4. — Un magicien a cent cartes numérotées de 1 à 100. Il les répartit dans trois boîtes, une rouge, une blanche et une bleue, de telle sorte que chaque boîte contienne au moins une carte.

Un spectateur choisit deux de ces trois boîtes, tire une carte dans chacune d'elles et annonce la somme des nombres figurant sur les cartes tirées. Connaissant cette somme, le magicien identifie la boîte dans laquelle aucune carte n'a été tirée.

De combien de façons le magicien peut-il répartir les cartes dans les boîtes de telle sorte que ce tour de magie réussisse toujours ?

(Deux façons de répartir les cartes sont considérées comme différentes si au moins une carte est placée dans deux boîtes différentes)

Problème 5. — Existe-t-il un entier strictement positif n tel que n soit divisible par exactement 2000 nombres premiers distincts et $2^n + 1$ soit divisible par n ?

Problème 6. — Soient AH_1, BH_2, CH_3 les hauteurs d'un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Le cercle inscrit dans le triangle ABC est tangent respectivement aux côtés BC, CA, AB en T_1, T_2, T_3 . On désigne respectivement par l_1, l_2, l_3 les symétriques des droites H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 par rapport aux droites T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 .

Montrer que l_1, l_2, l_3 déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit dans le triangle ABC.

Est-il possible de parler de recherche en mathématiques et d'histoire des mathématiques à des étudiants ?

Z. Djadli et H. Pajot (*Université de Cergy-Pontoise*)

Depuis deux ans, nous organisons à l'Université de Cergy-Pontoise (UCP) un « Séminaire Jeunes » destiné principalement aux étudiants en mathématiques de 2^e et 3^e cycle mais aussi aux enseignants/chercheurs de toutes les disciplines. Disons d'emblée que nous ne prétendons pas que notre initiative soit originale (de fait, il y a quelques années, un séminaire portant le même nom et ayant un contenu très proche a été organisé à l'Université Paris-Sud).

Cependant, le relatif succès obtenu par notre séminaire nous a incité à écrire ces quelques lignes. Nous espérons que le texte qui suit motivera et donnera des idées à nos collègues des autres universités et, dans la mesure du possible, nous souhaiterions alors qu'ils nous les communiquent. Signalons aussi qu'une autre initiative du même type destiné plutôt aux étudiants de DEUG (un ciné-club scientifique pluridisciplinaire) est organisé dans notre université.

1. Présentation

Le séminaire en 1999-2000 était organisé en trois phases :

- Une séance organisée par des doctorants de l'UCP afin de présenter divers aspects de la thèse : choix du directeur de thèse et du thème de recherche, travail du thésard, débouchés, financement,...
- Cinq séances (1^{er} semestre) faites par des enseignants-chercheurs de l'UCP afin de présenter quelques thèmes de recherche développés dans notre équipe. Le but de ces exposés était de donner une idée la plus concrète possible de ce que signifie « faire de la recherche en mathématiques » et d'aider l'étudiant désireux de faire une thèse à l'UCP à choisir son sujet. Nous nous sommes efforcés de couvrir tous les domaines des mathématiques présents à l'UCP (de l'algèbre aux probabilités en passant par la géométrie, l'analyse et les EDP) et de maintenir un équilibre entre mathématiques « pures » et mathématiques « appliquées ».
- Cinq séances d'histoire des mathématiques (2^e semestre) faites par des chercheurs extérieurs à l'UCP. Les thèmes abordés en 1999-2000 étaient proches des sujets traités en 2^e cycle et les exposés étaient donc abordables pour des étudiants ayant au moins un niveau maîtrise. L'objectif de ces séances était de faire sentir aux étudiants que le développement de la connaissance mathématique n'est pas exactement linéaire et de leur montrer, à travers l'évolution d'une théorie, comment l'introduction de certains objets, à priori très abstraits, s'est imposée.

2. Bilan et perspectives

Contredisant certains de nos collègues pour qui notre initiative était vouée à l'échec, les étudiants ont répondu présents, puisque entre 20 et 60 personnes sont venues aux exposés (quelques enseignants-chercheurs et une majorité d'étudiants de maîtrise, préparation au CAPES et Agrégation, DEA, Thèse). On peut toutefois regretter la passivité des étudiants qui, comme en cours, ne sont pas intervenus à la fin des exposés pour poser des questions, laissant ce soin aux « plus très jeunes ». Un aspect positif doit cependant être souligné : les étudiants sont venus nous voir en dehors des cours pour discuter des mathématiques en général.

Nous avons également été surpris et heureux de voir des collègues des autres disciplines du pôle Sciences de l'UCP venir assister à notre séminaire.

Enfin, notre initiative a été relayée de manière spontanée par la bibliothèque du pôle « Sciences » de l'UCP, puisque les livres ou articles, écrits par les conférenciers du Séminaire Jeunes et disponibles à la BU, ont été exposés.

Notre séminaire est destiné aux étudiants et ceux-ci en majorité restent quelques années dans notre Université. Afin que notre séminaire reste attrayant, nous nous devons de le faire évoluer. Et puisque notre séminaire est « jeune », il se doit d'être dynamique.

Voici ce que nous envisageons pour l'an prochain, en plus des séances « habituelles » :

- une séance faite par un professeur de lycée qui présentera (tout en les commentant) les programmes de lycée.
- des séances de philosophie des sciences.
- des séances faites par les étudiants. La solution la plus simple serait que les thésards de l'UCP fassent un court exposé dans lequel ils expliquent leur sujet de thèse, comme c'est déjà le cas dans d'autres universités. On peut aussi envisager de suivre l'exemple de Serge Lang (voir « Math talks for undergraduates », Springer, 1999) et proposer des thèmes d'exposés aux étudiants de DEA et Maîtrise. Il s'agit là d'un projet beaucoup plus ambitieux !
- des séances de présentation des systèmes universitaires européens et extra européens par les post-docs ou les professeurs invités dans notre université.

Remarque : notre séminaire ne souhaite pas se substituer au CIES (centre d'initiation à l'enseignement supérieur), mais plutôt en être un prolongement.

3. Quelques commentaires

Alors que l'on parle de rénover l'enseignement des sciences et des mathématiques en particulier, enseignement jugé par certains peu excitant, par l'introduction de philosophie des sciences (voir le récent rapport Lecourt), le succès de notre séminaire, avec par exemple près de 70 personnes pour assister à un exposé sur les fondements de l'analyse au XIX^e siècle, semble montrer qu'il existe un public demandeur d'histoire des sciences.

Alors que certains prétendent aussi que les mathématiques sont en déclin, incapables d'attirer les jeunes générations, cette expérience (par exemple une cinquantaine de personnes présentes à un exposé sur l'analyse dans les espaces singuliers) semble montrer qu'il y a toujours un public d'étudiants pour apprécier les belles mathématiques. Il faut aussi noter que ce Séminaire a été l'occasion de voir que l'actuel débat

sur l'opposition entre mathématiques dites « pures » et mathématiques « utilitaristes », remis au goût du jour par un ancien ministre de l'Éducation Nationale, n'est pas une nouveauté. Celui-ci a été constant depuis au moins deux siècles et n'a pas attendu l'apparition de moyens de calcul très performants pour voir le jour. Il est remarquable aussi de voir que ce type de débat a toujours été fructueux pour l'ensemble de la communauté et que celle-ci possède toute la maturité nécessaire pour le traiter sans intervention extérieure, équivoque et polémique.

En guise de conclusion, citons l'un de nos collègues : « l'incroyable n'est pas le succès du séminaire jeunes, mais le fait de ne pas avoir pensé plus tôt à le mettre en place ! ».

Annexe : Liste des exposés en 1999-2000 (comme annoncé dans l'Officiel)

20 octobre 1999 : Bruno Nazaret (UCP), *Faire une thèse ?*

27 octobre 1999 : Thierry Coulhon (UCP), *Isopérimétrie et noyau de la chaleur*.

3 novembre 1999 : Florian de Vuyst (UCP), *Modélisation des écoulements diphasiques et simulation numérique*.

10 novembre 1999 : Raika Dehy (UCP), *La combinatoire de la théorie des représentations*.

15 décembre 1999 : Frank Merle (UCP), *Quelques exemples de problématiques en mathématiques appliquées*.

5 janvier 2000 : Paul Doukhan (UCP), *Quelques exemples de modèles de suites de variables aléatoires indépendantes*.

9 février 2000 : Hélène Gispert (Paris-Sud), *Fonctions bizarres et saugrenues : exceptions et contre-exemples à la fin du XIX^e siècle*.

15 mars 2000 : Amy Dahan Dalmédico (Polytechnique), *Mathématiques pures, mathématiques appliquées, une cohabitation conflictuelle (1950-1970)*.

22 mars 2000 : Catherine Goldstein (Paris-Sud), *Continuité et théorie de nombres au XIX^e siècle*.

26 avril 2000 : Philippe Nabonnand (Nancy), *Autour des géodésiques des surfaces au XIX^e siècle*.

10 mai 2000 : Jean-Pierre Kahane (Paris-Sud), *Un aspect de la théorie des séries de Fourier : le théorème de Riesz-Fischer, son histoire, ses suites*.

INFORMATIONS

Congrès AMS/SMF : Lyon 2001

La Société Mathématique de France (SMF) et la société Mathématique Américaine (AMS) organisent un Congrès Conjoint AMS/SMF à l'École Normale Supérieure (ENS) de Lyon du 17 au 20 juillet 2001.

Comité Organisateur de ce Congrès : Jean-Michel Bony (École Polytechnique), Etienne Ghys (ENS Lyon), Mireille Martin-Deschamps (Université de Versailles), Denis Serre (ENS Lyon), Paula Cohen (CNRS, UST de Lille), Craig Evans (Berkeley University), Robin Hartshorne (Berkeley University), Lisa Jeffrey (Toronto University), Barry Mazur (Harvard University), Lesley Sibner (Brooklyn Polytechnic).

Pour plus de renseignements <http://smf.emath.fr/>

Prix Fermat 2001

Prix Fermat de Recherche en Mathématiques

Université Paul Sabatier – ASTRIUM¹

Le Prix Fermat récompensera les travaux de recherche de mathématiciens dans des domaines où les contributions de Pierre de Fermat ont été déterminantes :

- Énoncés de principes variationnels
- Fondements du calcul des probabilités et de la géométrie analytique
- Théorie des nombres.

À l'intérieur de ces domaines, l'esprit du prix est de récompenser plutôt des résultats de recherche qui sont accessibles au plus grand nombre de mathématiciens professionnels.

D'un montant de 100 000 FF, attribués par ASTRIUM, le Prix Fermat est décerné tous les deux ans à Toulouse ; la septième édition aura lieu au cours de l'année 2001.

¹ ASTRIUM : fusion de Matra Marconi Space avec les activités spatiales de Daimler-Chrysler Aerospace

Prix Fermat Junior

Prix Fermat Junior de Mathématiques

Université Paul Sabatier - ASTRIUM

Le Prix Fermat Junior de Mathématiques (le Prix Fermat est un prix de recherche en Mathématiques, créé à Toulouse et dont la septième édition aura lieu en 2001) récompensera la contribution d'un *étudiant* des Lycées ou Universités Françaises dans des domaines qui figurent aux programmes des enseignements aux niveaux BAC à BAC+3, c'est-à-dire essentiellement : classes préparatoires aux Grandes Écoles, D.E.U.G. et Licences des Universités.

La contribution d'un lauréat pourra prendre la forme suivante :

- nouvelle démonstration ou démonstration particulièrement courte et élégante d'un résultat de mathématiques figurant aux programmes de Mathématiques des formations des niveaux visés ci-dessus ;
- point de vue original ou synthétique sur un ensemble de résultats de Mathématiques acquis au cours de la scolarité ;
- nouveau résultat pouvant avoir un intérêt ou une retombée directe dans l'enseignement des Mathématiques.

Il ne s'agit pas d'un travail de recherche au sens habituel de ce vocable, mais plutôt d'une contribution, dont la teneur et l'intérêt doivent être accessibles au plus grand nombre d'étudiants engagés dans des études de Mathématiques des cursus des niveaux cités plus haut. Le jury considère que les propositions doivent tenir en dix pages maximum. Une contribution de deux pages contenant une idée ou une méthode astucieuse est tout à fait recevable.

D'un montant de 10 000 FF, attribués par ASTRIUM, le Prix Fermat Junior est décerné tous les deux ans à Toulouse ; la septième édition aura lieu au cours de l'année 2001.

Le règlement des Prix, les modalités de dépôts des candidatures, sont disponibles dès le deuxième trimestre 2000, auprès de :

*Prix Fermat de Recherche en Mathématiques
et Prix Fermat Junior de Mathématiques
Service des Relations Publiques
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4, France*

ou bien : <http://www.ups-tlse.fr/PrixFermat/>

Date limite de dépôt des candidatures : 30 Juin 2001. Les candidats potentiels sont priés de se conformer aux modalités de dépôt préconisées dans le règlement.

Communiqué de presse de la Société Mathématique de France (SMF) et de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles (SMAI)

Lors de l'ouverture du 3^e Congrès Européen de Mathématiques à Barcelone, le 10 juillet 2000, ont été proclamés, pour la troisième fois, les dix prix décernés à de jeunes mathématiciens européens (moins de 32 ans) pour des travaux extrêmement prometteurs.

Les lauréats sont : Semion Alesker (israélien, Tel Aviv, théorie de la convexité), Raphaël Cerf (français, CNRS-Université Paris-Sud, probabilités), Dennis Gaitsgory (russe, Clay Mathematics Institute-Harvard University, théorie des représentations), Emmanuel Grenier (français, ENS de Lyon, équations aux dérivées partielles et mécanique des fluides), Dominic Joyce (britannique, Oxford, géométrie riemannienne), Vincent Lafforgue (français, CNRS-Institut de Mathématiques de Jussieu, algèbres d'opérateurs), Michael McQuillan (britannique, Cambridge, géométrie algébrique), Stefan Nemirovski (russe, Moscou, topologie et analyse complexe), Paul Seidel (italien, CNRS-École polytechnique, géométrie symplectique), Wendelin Werner (français, Université Paris-Sud, probabilités),

On peut noter que les derniers lauréats européens des médailles Fields (1998) Richards Borcherds, Timothy Gowers et Maxim Kontsevitch faisaient partie des lauréats des prix précédents (1992, 1996) de la Société Mathématique Européenne.

Parmi les lauréats de cette année, quatre sont français et un cinquième exerce son activité en France au CNRS. La SMF et la SMAI se réjouissent de voir ainsi reconnue une nouvelle fois au niveau international l'excellence de la recherche mathématique française et aussi l'effet de la politique de recrutement de jeunes scientifiques suivie ces dernières années.

La Société Mathématique de France, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, le Comité An 2000 France et Springer-Verlag sont heureux de vous inviter

Jeudi 9 novembre 2000

Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris
à fêter les lauréats des prix de la Société Mathématique Européenne.

Pour plus de renseignements, consulter le serveur de la SMF : <http://smf.emath.fr>

Prix Wolf 2000

Le prix Wolf 2000 a été attribué à Raoul Bott et Jean-Pierre Serre. Le texte qui suit est une très brève description des travaux de Raoul Bott. Dans un numéro ultérieur nous présenterons plus en détail certains aspects des travaux de Jean-Pierre Serre.

Raoul Bott

Bott stated his famous periodicity theorem in his 1957 research announcement "The Stable Homotopy of the Classical Groups." Bott periodicity was instantly recognized as a remarkable result. Now, almost half a century later, we know that Bott periodicity is a powerful unifying principle which underlies K-theory, the Atiyah-Singer index theorem, and much of homotopy theory. Bott's other outstanding achievements include the Borel-Weil-Bott theorem, the Atiyah-Bott fixed point formula, the heat equation proof of the index theorem (due to Atiyah-Bott-Patodi), and the Atiyah-Bott elementary proof of Bott periodicity. Bott's work on foliations began with his brief but fundamental paper « On a Topological Obstruction to Integrability ». Bott and his co-workers combined the vanishing theorem of this paper with the Haefliger classifying space and Gelfand-Fuks cohomology to formulate a fascinating theory of characteristic classes for foliations. In a related development, Bott and G. Segal proved the Bott conjecture on Gelfand-Fuks cohomology. Bott's most recent work (which continues to this day), has been marked by his vigorous participation in the astounding mathematics-physics interaction of the last thirty years. Especially noteworthy are the Atiyah-Bott results on moduli spaces of holomorphic vector bundles on Riemann surfaces, and the Bott-Taubes proof of the rigidity theorems predicted by E. Witten. Bott's work is a wonderful blend of topology, geometry, and analysis. He is surely one of the best mathematicians of the twentieth century. His work is vibrant with the power and beauty of modern mathematics.

*Paul Baum
(Pennsylvania State University)*

Serge Colombo (1911-2000)

Né en 1911 à Constantinople, Serge Colombo, de nationalité française, est décédé le 1er février 2000. Après ses études à l'Institut électrotechnique de Grenoble, de retour en Turquie, il exerce le métier d'ingénieur électricien. Revenu en France, au début des années quarante, il prépare une thèse de mathématiques et se manifeste dans la Résistance. Chargé de recherche au C.N.R.S., à partir de 1950, il poursuit ses travaux sur le calcul symbolique puis fait partie de la Mission culturelle française à Saïgon. Dès les années soixante il enseigne à l'université Lovanium, à Leopoldville, puis devient professeur à l'université de Louvain-la-Neuve où il exerce pendant treize ans.

Les recherches de Serge Colombo concernent principalement le calcul symbolique (étroitement lié à la transformation de Laplace), les fonctions spéciales et leurs applications. Elles ont commencé avec sa thèse (1947) sur le calcul symbolique et les fonctions discontinues, sous la direction de Pierre Humbert. Les résultats principaux en ont été publiés (1943) pour la plupart aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences et au Bulletin des Sciences Mathématiques. Ils ont trait particulièrement aux fonctions spéciales ${}_0F_n$ et ${}_nF_m$ rencontrées dans la résolution d'équations intégrales de Volterra à noyaux logarithmiques. Une présentation synthétique, complétée par des applications à la théorie des circuits électriques et des contributions de Pierre Humbert, se trouve dans un ouvrage en collaboration avec Pierre Humbert sur "Le calcul symbolique et ses applications à la physique théorique", publié au Mémorial des Sciences Mathématiques (deux éditions, 1947 et 1965, Gauthier-Villars, Paris).

Dans les années cinquante, Serge Colombo complète son étude des fonctions transcendentes ${}_0F_1$ et ${}_1F_1$: lien avec les fonctions de Bessel (C.R.A.S., 1950, avec P. Barrucand), relations impliquant les dérivées de la fonction ${}_0F_1$ (C.R.A.S., 1952), propriétés et transformées de Laplace des fonctions ${}_0F_1$ et ${}_1F_1$ (B.S.M., 1953, 1955). En 1959, il publie une étude sur "Les transformations de Mellin et de Hankel" (C.N.R.S., Paris).

Des compléments sont donnés en 1963 aux Annales de la Faculté des Sciences de Saïgon, puis, en 1964, dans "Étude des transcendentes intervenant dans la résolution des équations intégrales de Volterra à noyaux logarithmiques" (Université Lovanium, Léopoldville, Gauthier-Villars, Paris). Un dernier livre "Holomorphic Functions of One Variable" paraît en 1983 (Gordon and Breach), c'est une préparation à l'étude des fonctions spéciales.

Robert Vallée

COURRIERS DES LECTEURS

Je désirerais faire trois remarques concernant les deux dernières livraisons de la Gazette des Mathématiciens.

1/ Dans le n° 84 (avril 2000) on trouve p. 81, dans la rubrique information, sous le titre « l'avenir des mathématiques » un texte de J.-M. Kantor qui dit se placer de son « *modeste point de vue de rameur de fond de cale* » (a) et annonce le fait que « *les problèmes les plus abstraits posés par Grothendieck sont dépassés.* » (b)

Il me semble qu'il est contradictoire de souligner (a) et de prétendre (b).

2/ dans ce même numéro on trouve p. 88 un texte intitulé « les mathématiques méritent considération » avec en italique la mention « *ci-dessous un texte proposé par certains membres de l'Académie des Sciences* ».

La Gazette omet de préciser que ce texte a été publié par le journal *Le Monde* du 22/03/2000. Curieusement ce journal, qui pendant plus de deux ans, et à longueur de pages s'est fait le propagandiste de la « modernité » d'Allègre et a fustigé le « conservatisme » des professeurs, *Le Monde* donc, a vu le vent tourner au printemps 2000, et a ouvert ses colonnes aux opposants à Allègre. Il a ainsi publié ce texte avec la liste des soixante-dix-neuf signataires, membres ou correspondants de l'Académie des sciences, issus des sections mathématiques, physique, sciences mécaniques, sciences de l'univers, biologie animale et végétale, biologie humaine et science médicale. Le texte des académiciens se termine ainsi : « *Il est urgent que Claude Allègre renonce à ses appréciations déconcertantes et infondées sur la dévaluation des mathématiques.* » Mais dans la version de la Gazette, le nom d'Allègre ne figure pas, c'est le mot Ministre qui est employé. De plus, la Gazette ne fait mention d'aucun signataire.

Il semble qu'il y a eu une étrange intention de la Gazette de ménager ce personnage dont pourtant on ne saurait minimiser le rôle destructeur qu'il a joué pendant plus de deux ans en particulier contre les mathématiques et les professeurs (surtout ceux du secondaire).

Je voudrais rappeler certains faits en résumant à grands traits.

Concernant les mathématiques, c'est la haine qui animait Allègre ; voir le tissu d'inepties de son livre¹ intitulé *La défaite de Platon*, ses propos qui ont indigné l'Académie des Sciences « *Les mathématiques sont en train de se dévaluer de façon quasi inéluctable* », et sa décision de « *diminuer rapidement le nombre de postes de mathématiciens mis aux concours dans l'enseignement secondaire, faute d'être autorisé à les supprimer tous d'un seul coup* » (déclaration au *Monde* le 24/11/99). Il faut savoir que par décision d'Allègre, depuis la rentrée de septembre 2000, l'horaire hebdomadaire de mathématiques passe de 6h à 5h en classe de Première scientifique, ce qui fait suite à la réduction d'une heure qu'il a décidée pour la classe de Seconde l'an dernier. Je doute que cette nouvelle réduction des horaires de mathématiques, et que l'augmentation simultanée d'une heure de l'horaire des sciences de la vie et de la terre, soient de nature à réhausser l'attrait des études scientifiques.

Concernant les professeurs, il n'a cessé de les vilipender avec le soutien complaisant de tous les médias mobilisés par son service de communication. Qu'on se rappelle sa dénonciation (infondée statistiquement) de « *l'absentéisme des professeurs* », sa prétention à « *dégraissier le mammouth* », ses fanfaronnades, proclamant qu'il allait donner un « *coup de pied dans la fourmilière* ». Il s'agissait d'abaisser aux yeux de la population et, plus grave, à leurs propres yeux, ceux qui sont chargés de transmettre le savoir. Après sa démission, Allègre a surenchéri dans un entretien à *Paris-Match* du 13 avril 2000 ; il y dit (la sottise et la grossièreté de tels propos sont telles que je répugne à les retranscrire) : « *dorénavant toutes les connaissances sèches seront à disposition sur Internet. Le rôle du prof sera d'enseigner ce qu'on n'y trouvera pas. (...) Internet va tout balayer, on pourra se préparer au bac sur la toile.* » Plus loin il évoque « *certains enseignants dans les manifs qui défilent avec leur litron de rouge* ». Il ajoute « *Les profs du secondaire forment un milieu très fermé. Ils vivent entre eux, se marient entre eux, voyagent entre eux, ne parlent que d'eux dans leur bulletin. Ils ressassent et veulent ressasser (...) ils refusent la mobilité intellectuelle, le changement.* »

¹ un compte-rendu de Zisman figure dans la Gazette d'octobre 1997

Imaginez un instant un ministre de la santé qui parlerait ainsi des médecins hospitaliers. Quelle indignation dans les médias ! Mais avec les professeurs il n'y a plus à se gêner, Allègre a tellement manipulé les moyens d'information et l'opinion publique que tout lui est permis.

Et tout ceci dans quel but ? Derrière le masque d'une philosophie bon enfant et à courte vue : "mettre l'élève au centre du système éducatif", il y a essentiellement la volonté de désengager l'Etat de l'Education Nationale pour en diminuer le coût, et de mettre au pas les enseignants, de les infantiliser par leurs autorités de tutelle. La lutte contre l'échec scolaire, qui est le thème porteur de la « Réforme », fait pour appâter les parents d'élèves, se réduit à la mise en place d'un Lycée allégé, où les matières considérées comme élitistes (mathématiques, lettres classiques, langues anciennes etc.) sont mises à mal de toutes les façons. L'alliance cynique des ultras-libéraux et des idéologues de la pédagogie passe par le dénigrement des professeurs, de leurs savoirs « trop lourds », « trop abstraits », « inutiles ». Les programmes sont progressivement vidés de leur contenu et les étudiants qui se destinent à l'enseignement subissent dans les IUFM une formation au rabais, centrée sur une rhétorique pédagogique creuse, et de moins en moins axée sur leur discipline. En citant Lacan on peut dire que le rituel technique s'accroît à mesure de la dégradation des objectifs.

Il aurait fallu avoir particulièrement mauvaise conscience pour supporter cela. Heureusement qu'il y a eu, pendant deux ans, des professeurs courageux (enseignants des Lycées professionnels, Collèges, Lycées classiques ou techniques, Classes préparatoires) pour lutter contre Allègre, ses réformes démagogiques, son mépris et ses insultes jusqu'à obtenir sa démission.

Les élèves et les parents d'élèves les plus conscients se sont rendu compte des pièges de la réforme Allègre et ont rejoint massivement les professeurs.

Ces professeurs n'ont reçu aucun soutien de la SMF dans la lutte qu'ils ont menée pour défendre leur dignité et la qualité de l'enseignement. On aurait pourtant pu espérer au minimum une réaction de la SMF au sabotage délibéré de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire.

3/ dans le n.85 (juillet 2000) la Présidente de la SMF dans son mot p. 2, au lieu de saluer la démission d'Allègre comme une délivrance, chipotte sur les éventuels effets néfastes de la partition en deux du Ministère de l'Éducation et de la Recherche. La SMF s'était déjà montré frileuse mais à ce point !

Jean-Louis Frot
Lycée Henri IV et Université Paris VI

La collection *SCOPOS*, dont on a déjà parlé dans la *Gazette* n° 80 (avril 2000, p. 105), publie une traduction du livre de E. HAIRER et G. WANNER : *Analysis by its history* qui devient en français : *L'analyse au fil de l'histoire*. Ce projet a pris naissance à la suite de la publication d'un article de Dominique Tournès dans la *Gazette* n° 80 (avril 1999). C'est justement cet article qui a donné l'idée à Jean-Etienne MITTELMANN, un grand ami des mathématiques qui travaillait à ce moment là chez Springer-France, de me proposer de publier la traduction en français de cet ouvrage. Pour la petite histoire, il s'agit de la traduction en français de la révision en anglais, suite à la traduction en japonais, de la première édition en anglais qui elle était la traduction d'un texte de cours en français enseigné à Genève...

Voici donc le premier volume de la *Bibliothèque SCOPOS* et le dixième de la collection. La *Bibliothèque SCOPOS* se propose de publier des traductions ou des rééditions d'ouvrages à dominante mathématique qui ont une coloration historique, tout en restant des ouvrages techniques¹. En ce moment nous travaillons sur la traduction d'un grand classique : *Introduction to the theory of numbers* de G.H. Hardy et E.M. Wright.

Je lance dans ce numéro de la *Gazette*, un concours d'idées dont les suggestions sont attendues sur le site internet www.scopos.org : toute suggestion de traduction ou de réédition dans l'esprit de la *Bibliothèque SCOPOS* sera attentivement étudiée...

La collection *SCOPOS* est relayée par le site internet déjà cité, et à partir de cette rentrée universitaire, elle anime une rubrique, **B.A.-BA**, dans le mensuel *La Recherche*, rubrique qui tâche (modestement) de vulgariser des mathématiques de la deuxième partie de la fin du XX^e siècle. Là encore toute suggestion d'article correspondant à une page dans *La Recherche* sera la bienvenue !

¹ technique par contraste à épistémologique

² ouvrages de mathématiques, dans un sens large, ayant une coloration historique et pertinent pour les deux premiers cycles des universités

Ceux qui me connaissent savent que j'aime mettre les pieds dans le plat. La seule rémunération³ que je tire de la direction de la collection *SCOPOS* est l'immense plaisir que me procure cette aventure de livre. J'invite tous les adhérents et collègues à m'envoyer tout plein de manuscrits où d'idées de manuscrits.

E. HAIRER et G. WANNER, *L'analyse au fil de l'histoire*, 371 pages, 121 illustrations, 249F, ISBN 3-540-67463-2, Springer-Verlag.

Jean-Michel Ghidaglia (jmg@cmla.ens-cachan.fr)
École Normale Supérieure de Cachan

³ ô combien gratifiante et exempte de taxes

LIVRES

Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I. Elementary theory ; Vol. II. Advanced theory

R. V. KADISON & J. R. RINGROSE

Graduate Studies in Mathematics, Vols. **15-16**, American Mathematical Society, 1997. 398 p. ISBN 0-8218-0820-6 ; 776 p. ISBN 0-8218-0819-2

Ces deux livres sont une réédition par l'A.M.S. des ouvrages originaux publiés par Academic Press en 1983 pour le volume I et en 1986 pour le deuxième volume.

Le champ d'applications de la théorie des Algèbres d'Opérateurs s'est considérablement élargi ces vingt dernières années, sous l'impulsion prépondérante de A. Connes (Géométrie non commutative), de V. Jones (Sous-facteurs et applications) et de D. Voiculescu (Probabilités libres). Ces progrès majeurs sont brièvement mentionnés dans la préface à la seconde édition du volume II, qui se trouve être la seule modification par rapport à l'édition originale, mis à part quelques corrections mineures dans ce même volume. Ce parti pris conservateur paraît raisonnable compte-tenu de la taille déjà importante de ces ouvrages (plus de mille pages en tout) et de leur style. Les auteurs exposent clairement leur objectif dans la préface du volume I : enseigner les bases de la théorie de façon à rendre accessible la littérature plus spécialisée et les applications, en exigeant seulement du lecteur des connaissances relativement élémentaires en analyse réelle et complexe et en théorie de la mesure. De nombreuses façons d'utiliser ces ouvrages sont possibles et suggérées : lecture personnelle, cours à différents niveaux. Les démonstrations sont claires et très complètes et, par souci pédagogique, les auteurs n'hésitent pas à revenir sur le même sujet ou à présenter deux preuves d'un même résultat.

Une autre particularité est la richesse des exercices proposés à la fin de chaque chapitre. Ils n'ont pas été extraits tels quels de la littérature : retravaillés, réorganisés, accompagnés d'indications, ils sont presque toujours très accessibles. En même temps qu'ils illustrent et enrichissent le texte, ces exercices constituent d'excellents outils pour acquérir une bonne pratique du sujet. Signalons que leurs solutions complètes ont été publiées par R. Kadison et J. Ringrose dans deux volumes parus chez Birkhäuser en 1991 et 1992. En revanche, aucune référence aux sources n'est indiquée, aussi bien pour les exercices que pour les énoncés du texte. Les auteurs ne commentent pas l'aspect historique du sujet, et la bibliographie est volontairement sommaire.

Comme l'indique le titre, le premier volume traite de la théorie élémentaire. Les trois premiers chapitres exposent les bases de l'analyse fonctionnelle classique. Ils sont suivis de deux chapitres d'introduction aux C^* -algèbres et algèbres de von Neumann, incluant la théorie spectrale des opérateurs non bornés. Le deuxième volume est d'un niveau plus avancé. Tous les outils et concepts indispensables à la formation d'un spécialiste en algèbres d'opérateurs au début des années 80 sont présentés : analyse des projecteurs à la Murray-von Neumann, théorie des états et poids normaux, étude des traces dans les algèbres finies, théorie de Tomita, produits tensoriels finis et infinis, produits croisés. Le lecteur appréciera notamment l'exposé très accessible de la théorie modulaire de Tomita, la présentation claire de la classification des produits tensoriels infinis d'algèbres de matrices conduisant à la construction, due à R.T. Powers, d'une infinité non dénombrable des facteurs de type III non isomorphes, ainsi que l'introduction à l'étude de la structure des facteurs de type III, à l'aide des groupes d'automorphismes modulaires.

Ces livres, écrits par deux éminents spécialistes de la théorie des Algèbres d'Opérateurs remplissent bien leur mission : conduire le lecteur, même débutant, à un niveau de connaissances

et de pratique lui permettant de démarrer des recherches sérieuses dans le domaine. On peut toutefois regretter l'absence d'une introduction à la K -théorie des C^* -algèbres tant cette notion a profondément transformé l'approche du sujet depuis vingt-cinq ans.

C. Anantharaman-Delaroche, Université d'Orléans

The Gelfand Mathematical Seminars, 1996-1999

I. M. GELFAND, V. S. RETAKH, éditeurs

Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000. 154 p. ISBN 0-8176-4013-4

Ce volume, dédié à la mémoire de C. H. Sah, réunit sept exposés présentés au séminaire Gelfand. Difficile de trouver un chapeau commun à leurs thèmes variés — si ce n'est « géométrie et physique » —, et de dire pourquoi leur côtoïement semble malgré tout naturel. En tout cas, la plupart brillent par une certaine transparence conceptuelle, et la lecture en est fort stimulante.

Deux de ces exposés s'apparentent à des survols, rédigés avec un soin remarquable. Il s'agit d'une introduction de G. Cherlin aux structures homogènes sporadiques, et d'un texte de J. Dupont et C. H. Sah portant sur les variantes sphériques et hyperboliques du troisième problème de Hilbert.

Entre logique et géométrie, Cherlin expose la correspondance galoisienne qui lie structures relationnelles finies et groupes finis de permutations, introduit la notion d'homogénéité et les fonctions de complexité associées, et présente la classification de Lachlan de ces structures en l'illustrant de nombreux exemples.

Le brillant exposé de Dupont et Sah, très accessible, commence par rappeler l'histoire du problème de Hilbert sur la décomposition des polyèdres, résolu l'année d'après par son élève M. Dehn : il existe des tétraèdres de même base et même hauteur ne pouvant être découpés en polyèdres superposables. Dehn et Sydler ont montré que deux polyèdres peuvent être découpés ainsi si et seulement s'ils ont même volume et même invariant de Dehn. C'est de la question non résolue des analogues sphériques et hyperboliques de ce critère que traite l'article, en dimension ambiante trois. Dans le cas sphérique, la question est liée à un problème de Cheeger-Simons : montrer qu'en général le volume d'un simplexe géodésique d'angles dièdres commensurables à β n'est pas commensurable à β^2 . Dans le cas hyperbolique, la question est liée à une conjecture de Milnor sur l'indépendance $\mathbf{Q}$ -linéaire de valeurs de dilogarithmes aux racines de l'unité (via la fonction de Lobachevsky). Dupont et Sah élucident la partie « formelle » (i.e. non diophantienne) de ces questions au moyen de leur « scissors congruence group », en décrivent les propriétés et le lien avec K_3 . Le texte contient enfin une agréable présentation de la paramétrisation des simplexes par les matrices de Gram, et de l'action galoisienne sur icelles qui fait tantôt passer du cas sphérique au cas hyperbolique.

V. Kac et A. Radul étudient la structure de Poisson sur le centre de l'algèbre enveloppante des algèbres de Lie restreintes obtenues par réduction mod. p d'une algèbre de Lie sur $\mathbf{Z}$. La motivation est l'analogie avec la théorie des représentations des groupes quantiques aux racines de l'unité, où la structure de Poisson joue un rôle important (d'après G. Lusztig, la réduction mod. p d'un tel groupe quantique donne essentiellement l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie restreinte classique). Comme les auteurs reportent les applications, non dévoilées, à publication ultérieure, on reste un peu sur sa faim.

L'exposé audacieux de M. Kontsevich et A. Rosenberg propose une définition et une étude des espaces algébriques non-commutatifs lisses. Ils commencent par exposer la notion non-commutative de lissité due à D. Quillen et J. Cuntz : propriété de relèvement pour les extensions nilpotentes, ou de manière équivalente, projectivité du bimodule des différentielles non-commutatives. Le prototype en est l'algèbre de polynômes non-commutatifs sur un corps commutatif k ; plus généralement, l'algèbre des chemins d'un graphe. À toute k -algèbre lisse A (de type fini), les auteurs associent une suite de k -schémas, appelés espaces de représentation, qui coreprésentent les foncteurs $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}} A; \mathrm{Mat}_{n \times n} - //$. Leur guide heuristique est que de tels espaces de représentations doivent être attachés à tout « espace non-commutatif lisse » X et

refléter toute structure introduite sur ces derniers. La construction des espaces non-commutatifs lisses est basée sur la topologie plate et le théorème de descente de Barr-Beck. Sans entrer dans les détails, l'idée consiste à voir X comme une catégorie abélienne (intuitivement, celle des faisceaux quasi-cohérents sur le « vrai espace sous-jacent ») munie de deux foncteurs adjoints $\beta^*; \beta_*$ vers les k -vectoriels (β^*k est « vécu » comme le faisceau structural). Les notions générales (faisceaux cohérents...) sont illustrées par la définition et l'étude « concrètes » de l'espace projectif non-commutatif.

Il y a aussi un exposé de V. Alekseyevskaya, V. Borovik, I. Gelfand et N. White généralisant aux matroïdes l'homologie des graphes de Kontsevich, et un texte de A. Kazarnovski-Krol sur les fonctions sphériques de type A_n . Le volume se termine par un texte de Rosenberg contenant « une preuve courte » du théorème d'existence, dû à P. Deligne, des foncteurs fibres pour les catégories tensorielles dont la dimension des objets est toujours un entier naturel ; je n'ai pas compris en quoi cette preuve diffère de celle de Deligne — si ce n'est, légèrement, par la présentation.

Yves André, CNRS Paris

Regulators in Analysis, Geometry and Number Theory

A. REZNIKOV, N. SCHAPPACHER, éditeurs

Progress in Mathematics, **171**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000. 324 p.

ISBN 0-8176-4115-7

Ce recueil d'articles est issu d'un congrès de même titre, tenu au centre E. Landau de Jérusalem en 1996. Il présente un état des lieux non systématique de la théorie des régulateurs et des classes caractéristiques secondaires en géométrie arithmétique. L'introduction écrite par les éditeurs brosse le panorama et aide le lecteur à mettre en perspective les différentes contributions.

Rappelons en quelques mots les points de départ du sujet. Les régulateurs classiques (déterminants de logarithmes d'unités) apparaissent dans la « formule analytique du nombre de classes » exprimant la dérivée à l'origine des fonctions zêta de Dedekind. Borel a proposé une formule semblable pour les valeurs aux entiers négatifs, à l'aide de régulateurs définis via la K -théorie (se ramenant dans ce cas à de la cohomologie des groupes arithmétiques). Les travaux de Bloch et de Beilinson mettent en place une vaste généralisation de la notion de régulateur (incluant celle de Borel) en toute dimension. Suivant une conjecture profonde de Beilinson, ces régulateurs sont sensés relier K -théorie et valeurs de fonctions L de motifs. Ils apparaissent toujours comme des déterminants ou volumes, et la cohomologie de Deligne-Beilinson sous-jacente à leur définition fait le pont avec les classes secondaires de Cheeger-Chern-Simons (qui correspondent aux classes de Chern en DB-cohomologie), et donc aussi avec la torsion analytique de Ray-Singer (qui calcule les classes CS des fibrés plats).

Les articles d'H. Esnault, K. Köhler, K. Künnemann et V. Maillot, et J. Lott se rattachent au thème des invariants secondaires et de la torsion analytique, y compris ses avatars arakéloviens.

Les articles de S. Bloch, H. Gangl, A. Goncharov (sur le trilogarithme), A. Levin et J. Wildeshaus se situent autour des problèmes de régulateurs pour les motifs de Tate mixte et leurs analogues elliptiques (problèmes d'ailleurs étroitement liés à la conjecture de Zagier sur les valeurs des fonctions zêta de Dedekind).

Enfin, le recueil contient deux contributions en marge du thème général : un article de D. Blasius et J. Rogawski sur la cohomologie et la géométrie des surfaces modulaires de Picard, et un essai de C. Deninger, largement spéculatif mais très précis et instructif, sur une éventuelle interprétation « dynamique » des variétés arithmétiques — du moins au niveau cohomologique.

Yves André, CNRS Paris

Polynomials with special regard to reducibility

ANDRZEJ SCHINZEL

Encyclopedia of Math. and Appl, **77**. Cambridge, 2000. 558 p. ISBN 0-521-66225-7

Ce livre présente un panorama très complet des résultats et des techniques « élémentaires » concernant la réductibilité des polynômes à une ou plusieurs variables à coefficients dans un corps k . Par « élémentaire », j'entends que l'auteur ne requiert de son lecteur que très peu de connaissances préalables (un peu de théorie algébrique des nombres), et notamment aucune connaissance de géométrie algébrique. Deux bons tiers de l'ouvrage traitent de corps très généraux, et dans le reste, k est un corps de nombres. Les paragraphes se terminent régulièrement par des notes « historiques » qui réfèrent à la très riche bibliographie.

Dès le début, avec le théorème de Lüroth, l'auteur revendique sa préférence pour les méthodes constructives ; mais l'ouvrage ne se réduit pas, tant s'en faut, à une description d'algorithmes. Il est impossible de donner ici une idée des 82 théorèmes soigneusement présentés par l'auteur (dont 37 dûs à lui-même, selon son recensement). Dans l'appendice final — qui utilise un peu de géométrie algébrique —, U. Zannier expose ses travaux récents avec E. Bombieri sur une conjecture de Schinzel.

Ce livre sans équivalent est une mine de résultats et de méthodes ingénieuses, rassemblés, et pour une part substantielle élaborés, par un maître incontesté du sujet. Dans ses parties les moins avancées, on pourra aussi y puiser de nombreux exercices inédits pour des cours d'algèbre ou d'arithmétique.

Yves André, CNRS Paris

Complex tori

CHRISTINA BIRKENHAK, HERBERT LANGE

Progress in Math. **177**. Birkhäuser, Boston, Inc., Boston, MA, 1999. 251 p.

ISBN 0-8176-4103-3

Cet ouvrage fait suite à *Complex abelian varieties* des mêmes auteurs. Contrairement aux variétés abéliennes, qui sont parmi les objets les plus étudiés des mathématiques, fort peu est connu et écrit sur les tores complexes non algébriques. Ce livre s'efforce de combler cette lacune.

A part un théorème de F. Oort et Y. Zarhin selon lequel toute $\mathbf{Q}$ -algèbre de dimension finie est algèbre d'endomorphismes d'un tore complexe, la plupart des principaux résultats du livre sont dûs aux auteurs, et concernent les tores complexes dits non-dégénérés. Signalons notamment leur étude approfondie des familles de tores avec endomorphismes prescrits, qui étend celle de G. Shimura pour les variétés abéliennes, et qui fournit une interprétation modulaire pour des « domaines de drapeaux » et leurs quotients par des groupes arithmétiques, quotients qui ne sont pas nécessairement du type variétés de Shimura.

Un court et clair chapitre est consacré aux jacobiniennes intermédiaires (de Weil, de Griffiths et de Lazzeri) ; celles de Griffiths sont en effet des exemples naturels de tores complexes non nécessairement algébriques. Dommage que les auteurs n'évoquent aucune application (même conjecturale) de leur théorie à la théorie des cycles algébriques, via ces jacobiniennes.

Yves André, CNRS Paris

Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs

X. BUFF, J. FEHRENBACH, P. LOCHAK, L. SCHNEPS, P. VOGEL

Panoramas et Synthèses **7**, Soc. math. France, 1999. 143 p. ISBN 2-85629-073-6

Ce numéro 7 de la série Panoramas et Synthèses est le texte d'une rencontre des *États de la Recherche*. Il comporte trois chapitres, dont l'axe fédérateur est la structure de catégorie tensorielle tressée. Les sujets abordés sont extrêmement riches et ont été depuis une bonne

dizaine d'années au cœur de recherches importantes, mettant en relation des domaines « jusqu'à indépendants : l'arithmétique des corps de nombres et des courbes algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la géométrie des espaces de modules $\mathcal{M}_{g;n}$ des surfaces de Riemann munies de points marqués, la théorie des nœuds, et les théories conformes étudiées en physique théorique ». Que ceux qui seraient impressionnés par cet étalage se rassurent : il s'agit ici de textes de cours, et l'essentiel est abordable avec peu de prérequis.

Le parti pris de présenter une approche élémentaire est particulièrement remarquable dans le premier chapitre *Éléments de géométrie des espaces de modules des courbes* (X. Buff, J. Fehrenbach, P. Lochak). Il serait d'ailleurs préférable de parler de plusieurs approches élémentaires : analytique, métrique, et par représentations du groupe fondamental. On donne donc trois définitions de l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g;n}$ et de l'espace des modules $\mathcal{M}_{g;n}$, ainsi que les clefs pour comprendre l'équivalence entre ces définitions, la principale étant le théorème d'uniformisation. Dans le cas hyperbolique (caractéristique d'Euler-Poincaré strictement négative), le point de vue métrique définit l'espace des modules comme l'ensemble des métriques hyperboliques à difféomorphisme près ; le jeu est de comprendre la correspondance avec les surfaces de Riemann et les sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. On trouve ensuite un exposé concis des classiques du sujet : coordonnées de Fenchel-Nielsen, cellulation de l'espace de Teichmüller, description de la partie à l'infini de l'espace de modules. Le cas de l'espace des modules en genre zéro et de sa compactification est traité avec une attention particulière justifiée par le lien avec le chapitre suivant.

Le groupe fondamental de l'espace des modules en genre zéro $\mathcal{M}_{0;n}/$ (groupe de Teichmüller, aussi appelé groupe modulaire ou mapping class group) est un quotient du groupe de tresse d'Artin. Si on définit ce groupe comme un groupe fondamental on doit choisir un point de base, et à un lacet entre deux points de base est associé un isomorphisme. La question centrale dans le second chapitre, *Groupeïdes fondamentaux des espaces de modules en genre 0 et catégories tensorielles tressées* (L. Schneps), est l'étude du groupeïde de Teichmüller : il s'agit de faire varier le point de base dans certaines régions au voisinage de l'infini. Précisément :

$$\mathcal{T}_{0;n}/ = \mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{M}_{0;n}/; \mathcal{B}_n/;$$

où $\mathcal{B}_n$, ensemble des points base à l'infini, est la réunion, pour tous les points de dégénérescence maximale de $\mathcal{M}_{0;n}/$, des régions réelles simplement connexes contenues dans leurs voisinages tubulaires.

La compréhension de la structure de ce groupeïde passe par la notion de catégorie tensorielle tressée. Cette notion est présentée avec un exemple fondamental qu'on peut appeler une catégorie tensorielle tressée libre, et qui est décrit par des arbres. Le lecteur peu habitué devra probablement faire preuve d'un peu de patience pour comprendre en quoi cette présentation est utile pour décrire la situation géométrique. Une fois établi le lien entre les catégories tensorielles tressées et les espaces de modules en genre zéro, on peut aborder la théorie de Grothendieck-Teichmüller et le fameux programme de Drinfel'd.

Théorème. — Soit $n \geq 4$. Alors le groupe de Grothendieck-Teichmüller $\widehat{\mathcal{GT}}$ est un groupe d'automorphismes du groupeïde de Teichmüller profini $\widehat{\mathcal{T}}_{0;n}/$.

Toute la saveur de ce théorème réside dans le fait que le groupe $\widehat{\mathcal{GT}}$ contient le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ (Drinfel'd, Ihara). La suggestion de Grothendieck était d'utiliser l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les groupes fondamentaux algébriques des espaces de modules pour essayer de donner une nouvelle définition de ce groupe.

Question. — Est-ce que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \simeq \widehat{\mathcal{GT}}$?

Le troisième chapitre, *Invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev et théories quantiques des champs* (P. Vogel), est une introduction à la théorie topologique des champs quantiques. Cette notion a été inventée par Witten en 1988. Une telle théorie contient en particulier :

- un invariant numérique des variétés de dimension 3 orientées compactes sans bord,

- pour chaque surface $\mathcal{G}$, un espace vectoriel de dimension finie $V(\mathcal{G})$ dont la dimension est donnée par la fameuse formule de Verlinde,
- ainsi qu’une représentation (projective) du groupe modulaire (mapping class group).

La construction d’une telle théorie nécessite une structure algébrique un peu plus riche que celle de catégorie tensorielle tressée. Il est montré ici comment à partir d’une catégorie enrubannée convenable, on peut obtenir une telle théorie. L’exposé, succinct, comporte les idées clefs et les exemples de base et constitue un bon préalable à la lecture de la référence sur le sujet : *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds* par Vladimir Turaev. Signalons également le numéro 5, *Quantum groups and Knot Invariants* (Christian Kassel, Marc Rosso, Vladimir Turaev) de cette même série *Panoramas et Synthèses*, ainsi que l’ouvrage de Christian Kassel, *Quantum groups* pour une étude plus complète des catégories enrubannées et le rapport avec les groupes quantiques.

C. Blanchet, Université de Bretagne-Sud

Large deviations

FRANK DEN HOLLANDER

Fields Institute Monograph, **14**, A.M.S., 2000. 143 p. ISBN 0-8218-1989-5

Ce livre d’environ 150 pages présente une introduction à la théorie des grandes déviations et un choix de quelques unes de ses applications les plus récentes. Son contenu a été enseigné au *Fields Institute for Research in Mathematical Sciences* de Toronto (Canada) pendant l’automne 1998. Il se compose de deux parties : la **Partie A** décrit les principaux éléments de la théorie elle-même ; la **Partie B**, beaucoup moins classique, offre dans une série de cinq thèmes empruntés à la mécanique statistique et aux milieux aléatoires des situations assez diverses pour illustrer la puissance des outils présentés dans la première partie.

Alors que plusieurs monographies, que l’auteur invite à lire, sont aujourd’hui disponibles sur cette branche mathématique qui emprunte tout à la fois aux probabilités, à l’analyse convexe, au calcul variationnel et à l’analyse fonctionnelle, cet ouvrage répond – et, faut-il le souligner ?, pour nos étudiants francophones, *en anglais* – au besoin d’un manuel accessible, privilégiant une présentation rapide des idées dans le contexte le plus simple et mêlant au fil du texte exercices, commentaires immédiats et pistes d’approfondissement. En effet, l’intérêt essentiel d’un tel ouvrage est bien de donner un accès rapide et économique aux techniques de base, quitte à abandonner à un approfondissement futur les extensions, certainement frappantes mais techniquement bien plus difficiles.

Partie A : théorie pour des suites I.I.D. ou faiblement dépendantes

La théorie des grandes déviations traite des écarts d’un système aléatoire à son comportement moyen. Imaginons un jeu de pile ou face avec une pièce parfaite, pour lequel on code la succession des résultats par une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de 0 de 1 suivant qu’on tire pile ou face : la proportion de Face après n lancers, $\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$, est, selon la loi forte des grands nombres proche de $\frac{1}{2}$; mais peut-on en dire plus ? Précisément, le théorème séminal de CRÁMER établit que la probabilité que la proportion de Face soit à une distance ε strictement positive de sa moyenne décroît exponentiellement vite avec n .

De façon plus générale, une suite de mesures de probabilités $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur un espace topologique mesuré $(S, \mathcal{S})$ satisfait un principe de grandes déviations à la vitesse v_n/n et suivant une fonction de taux $\mathcal{J} : S \rightarrow [0; +\infty]$ d’ensembles de niveau $\{\mathcal{J} \leq \varepsilon\}$ compacts si : pour tout fermé F de S (resp. tout ouvert G de S), la limite supérieure (resp. inférieure) de $v_n^{-1} \log \mu_n(F)$ (resp. $v_n^{-1} \log \mu_n(G)$) est majorée (resp. minorée) par $-\mathcal{J}(F)$ (resp. $-\mathcal{J}(G)$), où $\mathcal{J}(A)$ désigne la borne inférieure de $\mathcal{J}$ sur A . Autrement dit, pour les *bons* boréliens $E \in \mathcal{S}$, $\mu_n(E)$ est, à l’ordre exponentiel, de la forme $\exp(-v_n \mathcal{J}(E))$. Le principe est dit *faible* si $\mathcal{J}$ est semi-continue inférieurement et la propriété ci-dessus est satisfaite pour les ouverts et les compacts de $(S, \mathcal{S})$.

Les cinq chapitres de la partie A forment cinq étapes de difficulté croissante. Dans les deux premiers, sont étudiées les grandes déviations de quantités statistiques reliées à une suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, comme le jeu de Pile ou Face. Les grandeurs statistiques intéressantes sont ainsi : la moyenne $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$, la mesure empirique $L_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i \leq n} \delta_{X_i}$ (dont la moyenne empirique est la moyenne) et le processus empirique. La suite des lois de chacune de ces quantités satisfait un principe de grandes déviations sous des hypothèses adéquates. L'auteur aborde graduellement chacune des preuves en se limitant au cadre où les quantités aléatoires ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs ; ce choix nécessite l'utilisation de techniques combinatoires parfois assez subtiles (un joli calcul fait appel à quelques connaissances en théorie des graphes) mais le modèle discret a cet avantage de *déplier* des calculs que l'analyse dissimule.

Le troisième chapitre balaye en quelques pages les outils et les principes généraux de la théorie : les définitions, le lemme de VARADHAN et une version de ce lemme adaptée à la mécanique statistique, le principe de contraction qui permet de transférer, via une flèche continue, un principe de grandes déviations de la source au but, le rôle de la convexité et, partant, la généralisation du théorème de CRAMER.

Dans les deux derniers chapitres de cette partie sont étudiées deux situations où les suites de variables aléatoires ne sont plus indépendantes : les chaînes de Markov à espace d'états fini, à temps discret puis à temps continu (chapitre 4) ; le théorème d'ELLIS-GARTNER qui permet d'établir l'existence d'un principe des grandes déviations de façon similaire à la déduction de la convergence en loi grâce à la convergence des fonctions caractéristiques (chapitre 5). Cette dernière approche repose sur l'étude des moments exponentiels de la suite de probabilités et utilise intimement des résultats d'analyse convexe.

Partie B : applications

Les cinq chapitres de la deuxième partie présentent des applications, des plus classiques aux plus récentes, empruntées à la statistique et à différents problèmes des milieux aléatoires.

Ainsi l'outil des grandes déviations permet-il grâce aux travaux de CHERNOFF de préciser l'ordre exponentiel des erreurs de première et deuxième espèces dans le test optimal d'hypothèses de NEYMAN-PEARSON ainsi que celui d'une borne inférieure de l'erreur bayésienne (chapitre 6).

Le chapitre 7 est consacré à un sujet qui connaît depuis quelques années de nouveaux et riches développements : les marches aléatoires dans un milieu aléatoire. Le modèle d'origine physique est le suivant : un individu se déplace sur le réseau linéaire $\mathbb{Z}$, d'un site x à ses deux plus proches voisins $x+1$ et $x-1$ avec une probabilité respective p_x et $1-p_x$; le milieu est aléatoire au sens où les probabilités d'avancer ou reculer (qui reflètent les propriétés locales de l'espace) sont distribuées aléatoirement selon une mesure de probabilités et la variable $p = (p_x)_{x \in \mathbb{Z}}$ contient toute l'information du milieu. Le comportement de cette marche diffère de celle que l'on connaît pour une marche simple, i.e. avec des probabilités de déplacement constantes : si X_n est la position du marcheur à l'instant n , sa vitesse moyenne $\frac{1}{n} X_n$ converge presque sûrement vers une vitesse, parfois nulle : le marcheur peut musarder ! Sous des hypothèses adéquates, on peut montrer [travaux de GREVEN - DEN HOLLANDER, DEMBO-PERES-ZEITOUNI, COMETS-GANTERT-ZEITOUNI] que pour presque tout p , la loi de la vitesse moyenne, conditionnelle au milieu, satisfait un principe de grandes déviations suivant une fonction de taux *déterministe*. À côté d'autres résultats, on ne peut résister au plaisir de voir surgir des fractions continues qui, loin d'être un artefact, reflètent le comportement profond de la marche aléatoire.

Dans le chapitre 8, l'auteur expose l'étude du modèle d'Anderson de conduction thermique dans un réseau en présence de sources et de puits de chaleur (mais le modèle admet bien d'autres interprétations) : $(u_t(x); t \geq 0, x \in \mathbb{Z})$ ou $(u_t(x); t \geq 0, x \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+)$, $u_t(x) \geq 0$ et $(s_t(x); x \in \mathbb{Z})$ représente une suite aléatoire de sources ou de puits de chaleur. La représentation

probabiliste de la solution de cette équation aux dérivées partielles permet, sous des hypothèses adéquates sur la répartition des sources ou puits, de décrire le comportement moyen (corrélations, moments de tout ordre, etc.) de la solution pour des temps grands ; *grosso modo*, le champ aléatoire u possède des pics élevés bien localisés et séparés dans le milieu dans de rares îlots, lesquels constituent pourtant la contribution majeure des moments. Ce type de problème pose de délicates questions et nécessite la résolution de problèmes variationnels variés.

Le chapitre 9 introduit le lecteur dans un domaine de prédilection des chimistes : les chaînes de polymères. Le modèle mathématique associé se réfère aux propriétés physiques du polymère : sa très grande irrégularité dans l'espace et sa capacité d'auto-répulsion que les liaisons chimiques organisent. Le modèle très simplifié choisi est donc celui d'une marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}^d$, dont on pénalise sévèrement les auto-intersections. Parmi les nombreuses questions posées par cette modélisation, il est montré pour le modèle unidimensionnel que la longueur d'un chaîne de n monomères est, avec probabilité tendant vers 1 avec n , proportionnelle à n avec une vitesse analytique en le paramètre d'autorépulsion. La preuve de ce résultat exige d'étudier le modèle légèrement modifié où l'on impose à la chaîne des n premiers monomères de former un pont (i.e. celle-ci s'enroule entre ses extrémités). Ici aussi, principes de grandes déviations et problèmes variationnels abondent et offrent par leur subtilité technique un panorama très large des idées probabilistes dans ce domaine.

Le dernier chapitre expose un modèle d'évolution dynamique hamiltonienne de particules en interaction aléatoire. La loi, moyennée suivant l'aléa des interactions, (des distributions empiriques) des trajectoires des N particules converge vers celle des trajectoires d'un processus non linéaire, le processus de MCKEAN-VLASOV. En fait, l'étude des grandes déviations associées à ce système donne accès à de nombreux résultats connexes, dont la fameuse propagation du chaos.

Du rapide survol du contenu très copieux de ce mini-cours, on peut à juste titre souligner le brio par lequel l'auteur amène son lecteur aux confins de la recherche la plus pointue, même si un tel voyage nécessite quelque effort. Le style ramassé et vivant atténue quelque peu la technicité de certaines preuves. À cet égard, l'insertion au fil du texte d'exercices, dont les solutions sont données en appendice, fournit au lecteur motivé l'occasion de vérifier sa compréhension du sujet mais aussi de prolonger la lecture du cours par des approfondissements bienvenus. Une bibliographie très complète, un index de termes et un glossaire de symboles closent cet ouvrage réussi et séduisant.

Marc Brunaud, Université Paris VII – Denis Diderot

Introduction to Mathematical Statistical Physics

ROBERT A. MINLOS

University Lecture Series, **19**, A.M.S., 2000. 103 p. ISBN 0-8218-1337-4

Cet ouvrage d'une centaine de pages présente dans une série de quinze leçons une introduction aux fondements d'une théorie mathématique de la physique statistique. Cette branche de la physique intéresse les mathématiciens depuis près de quarante ans. Alors qu'en contraste des physiciens, les observations expérimentales, sinon les expériences physiques, y jouent un rôle négligeable, le but poursuivi consiste plutôt à construire, à partir des postulats de la physique, une théorie rigoureuse selon les règles communément admises. De fait, le mathématicien trouve là l'occasion d'utiliser des techniques très variées (combinatoire, probabilités, systèmes dynamiques, théorie des opérateurs, analyse complexe, etc.) et, aussi, la source de nombreux problèmes.

Comme l'annonce le titre de la série, ce volume s'adresse à des étudiants d'un niveau au moins égal à notre *Maîtrise* et constitue par son style volontairement concis une introduction à la lecture d'ouvrages plus développés, plus spécialisés et, dès lors, plus complets ([Rue69, Sim93, Sin82, Tho80]). Il est construit en trois parties : la première expose les modèles de base, les notions d'ensembles statistiques, d'espace des phases, de leurs distributions,

i.e. les mesures de probabilités construites sur ces espaces, et, enfin, de limite thermodynamique ; dans la seconde, l'auteur établit l'existence d'une limite thermodynamique des distributions d'ensembles statistiques pour des valeurs régulières des paramètres du modèle et en étudie les propriétés (ergodicité, fonctions thermodynamiques, etc.) ; la troisième partie, de loin la plus délicate, introduit la notion de distribution de GIBBS limite au sens de DOBRUSHIN – LANFORD – RUELLE, en abrégé D-L-R, établit la non-unicité d'une telle distribution pour l'exemple fameux du modèle d'Ising ferromagnétique bidimensionnel à champ magnétique nul, ce qui constitue un premier exemple de *transition de phase*, et offre une introduction à la théorie de PIGOROV–SINAI en traitant la situation d'un modèle pouvant admettre trois états fondamentaux à l'équilibre.

Modèles et notions de base de la physique statistique à l'équilibre

La physique statistique étudie l'évolution d'un grand système de *particules* confinées dans un grand domaine $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}^3$ de l'espace physique. L'exemple typique est un *gaz classique*, i.e. une collection de N vecteurs position-vitesse $(Q; V) = (q_i; v_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathcal{Z} \times \mathbb{R}^3/N \equiv \mathcal{Z}_N$, où q_i (resp. v_i) est la position (resp. vitesse) de la i -ième particule.

Les équations de la mécanique classique et des lois de réflexion au bord du domaine $\mathcal{Z}$ bien choisies permettent de montrer que la dynamique du système des N particules définit un semi-groupe préservant à la fois la forme volume de l'espace des phases $\mathcal{Z}_N$ et l'énergie du système $E = H_{\mathcal{Z}_N}(Q; V)$, somme de l'énergie cinétique, de l'énergie interne et de l'énergie d'interaction. Comme l'énergie totale est un invariant de l'évolution du système, on peut restreindre l'espace des phases à la variété $\mathcal{Z}_N(E)$ des configurations d'énergie E , muni de sa mesure induite $\mu_{\mathcal{Z}_N(E)}$, appelée *mesure microcanonique*.

La propriété essentielle des grands systèmes de particules consiste en leur comportement collectif : l'évolution d'une seule particule importe moins que le comportement moyen du système. Le postulat de la physique statistique à l'équilibre établit que, pour des grandes valeurs de N et $\mathcal{Z}$, toute observation du système – une fonction numérique F définie sur $\mathcal{Z}_N(E)$ est appelée *observable* – est proche de sa valeur moyenne calculée selon une mesure de probabilités P de l'espace des phases.

Le problème principal reste donc de définir cette distribution sur l'espace des phases : on distingue ainsi la distribution microcanonique $P_{\mathcal{Z}_N(E)}^{\text{microcan}}$, proportionnelle à la mesure microcanonique et la mesure de Gibbs canonique $P_{\mathcal{Z}_N, \beta}^{\text{can}}$, mesure de probabilités absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{Z}_N$, de densité proportionnelle à $\exp. -\beta H_{\mathcal{Z}_N}(Q; V)$.

Le principe de l'équivalence des ensembles énonce le lien entre ces deux types de mesures : la mesure de Gibbs canonique $P_{\mathcal{Z}_0, \beta}^{\text{can}}$ est, dans un sens approprié, la limite, lorsque $\mathcal{Z} \supset \mathcal{Z}_0$ tend vers $\mathbb{R}^3$, des mesures microcanoniques $P_{\mathcal{Z}_N(E)}^{\text{microcan}}$ restreintes aux configurations ayant M particules dans $\mathcal{Z}_0$, sous la condition que la densité de particules $N = |\mathcal{Z}|$ tend vers ∞ et la densité d'énergie $E = |\mathcal{Z}|$ vers e (dans ce cas, $\beta = 1/\infty; e/\infty$).

Comme, dans le modèle étudié, l'énergie du système dépend de l'ensemble des particules et non du N -uplet $(Q; V)$, i.e. de l'image de ce N -uplet, on peut définir une troisième famille de mesures : $P_{\mathcal{Z}, \beta, \mu}^{\text{grandcan}}$, appelée *distribution grand-canonique*, définie sur la totalité des configurations possibles des particules, qui coïncide, conditionnellement à un nombre fixé N de particules, avec la mesure de Gibbs canonique $P_{\mathcal{Z}_N, \beta}^{\text{can}}$; le paramètre μ , dual du nombre de points de la configuration, est appelé *potentiel chimique*.

Définir la limite thermodynamique de telles distributions consiste à établir l'existence d'une mesure de probabilités P_∞ sur l'espace de toutes les configurations dans $\mathbb{R}^3$ telle que, pour toute observable locale F , $\langle F; P_{\mathcal{Z}, \beta, \mu} \rangle$ $\rightarrow$ -converge vers $\langle F; P_\infty \rangle$ lorsque $\mathcal{Z}$ croît vers $\mathbb{R}^3$ (β, μ signifie que, selon le choix des distributions, microcanonique (resp. canonique, grand canonique), on introduit les paramètres adéquats de $(\beta, \mu; N; E)$ (resp. $(\beta; \mu; N; \mu)$), les paramètres limites de $\beta : \infty; e/\infty$ (resp. $\beta; \mu/\infty; \mu/\infty$) ainsi que le type de convergence : $N = |\mathcal{Z}| \rightarrow$

α et $E = |\mathcal{Z}| \rightarrow e$ (resp. $N = |\mathcal{Z}| \rightarrow \alpha$, rien !)). Lorsque ces trois limites existent et sont uniques, les paramètres limites $\alpha; \beta$ et γ sont reliés entre eux et ces dernières relations montrent qu'en fait, les trois familles de distributions limites coïncident.

Existence de distributions de Gibbs limites ; conséquences

Dans cette deuxième partie (leçons 5 à 8), sont établies l'existence et l'unicité d'une distribution limite grand canonique $P_{\infty; \beta; \gamma}^{\text{grandcan}}$ pour des valeurs *régulières* $\beta; \gamma \in 0$, i.e. soit à température élevée $0 < \beta < \beta_0$ soit à grand potentiel chimique $\gamma > \gamma_0$. L'outil principal de la preuve, de nature combinatoire et probabiliste, est la fonction de corrélation d'une distribution qui la définit de manière unique. La preuve consiste à établir un système d'équations, les équations de KIRKWOOD-SALSBURG, satisfait par les fonctions de corrélations et d'en étudier les solutions sur un espace de Banach adéquat (les fonctions des configurations à croissance au plus exponentielle). Le fait le plus remarquable reste que la même élégante méthode, mais avec des opérateurs modifiés, permet de prouver l'existence de la limite, le comportement asymptotique de sa fonction de corrélation, et la décroissance des corrélations de la distribution limite.

Cette dernière propriété possède une interprétation physique essentielle : la distribution limite satisfait la propriété de mélange telle que la probabilité d'observer une configuration contenant deux sous-configurations disjointes fixées de taille finie est asymptotiquement égale au produit des probabilités d'observer chacune de ces deux sous-configurations. En conséquence, il est possible de déduire une loi des grands nombres et un théorème de la limite centrale pour la distribution limite, pour des valeurs régulières des paramètres $\beta; \gamma$. On peut aussi définir les principales fonctions thermodynamiques, *entropie spécifique, énergie libre de Helmholtz, pression*, soit de manière directe soit à l'aide des relations satisfaites par les paramètres $\beta; \alpha; \gamma$ de la distribution limite, et décrire les équations fonctionnelles qui les relient.

En conséquence, on définit l'ouvert D_{reg} des valeurs *régulières* des paramètres comme l'ensemble des $\beta; \gamma$ tels que : (1) il existe une unique distribution de Gibbs limite $P_{\infty; \beta; \gamma}^{\text{grandcan}}$; (2) cette distribution $P_{\infty; \beta; \gamma}^{\text{grandcan}}$ possède la propriété de décroissance exponentielle des corrélations; (3) les fonctions thermodynamiques ci-dessus sont réelles analytiques en leurs paramètres; (4) le principe d'équivalence des ensembles est satisfait pour $\beta; \gamma$. L'existence de valeurs singulières des paramètres établit la présence d'une *transition de phases*.

Formalisme D-L-R et transition de phases

La troisième et dernière partie introduit à la difficile théorie de la transition de phases. Dans ce but, la notion de distribution de Gibbs limite doit être modifiée : au lieu de considérer une distribution $P_{\mathcal{Z}; \beta; \gamma}$ définie sur les configurations confinées dans un grand volume $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{R}^3$, suivant la définition D-L-R, on introduit la mesure de Gibbs $P_{\mathcal{Z}; \beta; \gamma} \cdot |c'|$ définie sur les configurations de $\mathcal{Z}$ conditionnées à un environnement $c' \subset \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{Z}$, extérieur à $\mathcal{Z}$, fixé. Une distribution de Gibbs limite pure (on dit aussi un *état pur de Gibbs*) est, par définition, une mesure de probabilités sur toutes les configurations de $\mathbb{R}^3$ telle qu'il existe une suite de parties finies $\mathcal{Z}_n / n \geq 1$ et une suite d'environnements $c'_n / n \geq 1$ vérifiant :

$$\langle F; P_{\mathcal{Z}_n; \beta; \gamma} \cdot |c'_n| \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle F; P_{\infty; \beta; \gamma} \rangle$$

pour toute observable locale F . L'ensemble des distributions de Gibbs limite est l'enveloppe convexe fermée des états de Gibbs purs.

L'exemple le plus basique qu'on connaisse (leçon 10) de système exhibant une transition de phases est le modèle d'Ising 2-D ferromagnétique : l'espace des phases est formé de configurations de spins $\alpha = (\alpha_x)_{x \in \mathbb{Z}^2} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{Z}^2}$, ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^2$) et l'énergie de la configuration α dans l'environnement $\alpha' = (\alpha'_x)_{x' \in \mathbb{Z}^2 \setminus \mathbb{Z}}$ est :

$$H_{\mathbb{Z}}(\alpha | \alpha') = - \sum_{\substack{x, y \in \mathbb{Z} \\ |x-y|=1}} \alpha_x \alpha_y - \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}, y' \in \mathbb{Z}' \\ |x-y'|=1}} \alpha_x \alpha'_{y'} + h \sum_{x \in \mathbb{Z}} \alpha_x$$

où h désigne le champ magnétique.

Le remarquable argument combinatoire de PEIERLS, lequel repose sur la construction des contours associés à une configuration α des spins, permet de prouver que, lorsque $h = 0$ et α' est constant, égal à ± 1 , les mesures de Gibbs associées $P_{\mathbb{Z}, \alpha'}^+ = P_{\mathbb{Z}, \alpha'} \cdot | + 1 /$ et $P_{\mathbb{Z}, \alpha'}^- = P_{\mathbb{Z}, \alpha'} \cdot | - 1 /$ convergent (pour α' assez grand) vers des états de Gibbs purs $P_{\infty, \alpha'}^+$ et $P_{\infty, \alpha'}^-$ distincts. Cette transition de phases se manifeste ainsi par la discontinuité de la magnétisation totale au voisinage du champ magnétique nul.

Dans les chapitres suivants, l'auteur présente une généralisation du modèle d'Ising, où le système de spins peut prendre désormais trois valeurs distinctes. Le même procédé consistant à introduire les configurations de contours séparant deux valeurs distinctes de spins conduit à prévoir l'existence d'un point triple de coexistence de trois phases distinctes et d'interfaces, lignes sur lesquelles coexistent deux phases distinctes. La preuve de ce résultat est développée en trois leçons ; elle nécessite l'approfondissement des notions de distributions de contours ainsi que l'adaptation des méthodes déjà utilisées à ce type de distributions. Cependant, dans un souci très pédagogique, la preuve complète sur la forme du diagramme des phases est laissée à la lecture future d'articles référencés.

L'ultime chapitre mentionne les différentes directions de généralisation des concepts présentés dans ce mini-cours et explore quelques questions connexes (formes de Wulff, interfaces, etc.) qui constituent les problèmes essentiels abordés par les chercheurs du domaine. Une courte et efficace bibliographie aidera le lecteur débutant à se diriger dans une littérature gigantesque.

Trouver une monographie de taille raisonnable introduisant dans un cadre mathématique rigoureux les principales notions de la physique statistique est désormais chose aisée : l'ouvrage de R. MINLOS répond sans lourdeur inutile ni excès paralysant de formalisme ou de complétude à ce besoin et facilite ainsi la lecture d'articles originaux ou de livres plus développés. Mais, puisque ce livre réussit à s'adresser à un public de débutants, on regrette un peu les coquilles d'impression ou quelques imprécisions de notation, dont on ignore si elles peuvent parfois plonger le lecteur novice dans des abysses de questionnement ou l'obliger à un salutaire exercice de lucidité. Le plaisir de lecture et le style efficace et concis l'emportent néanmoins.

Marc Brunaud, Université Paris VII – Denis Diderot

Références

- [Rue69] David Ruelle. *Statistical Mechanics (rigorous results)*. Benjamin, 1969.
- [Sim93] Barry Simon. *The statistical mechanics of lattice gases*, volume Vol. 1. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1993.
- [Sin82] Yacov Sinai. *Theory of phase transitions : rigorous results*. Pergamon, London, 1982. English translation.
- [Tho80] Colin Thompson. *Mathematical statistical mechanics*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1980.

Elliptic curves. Function theory, geometry, arithmetic

HENRY MCKEAN, VICTOR MOLL

Cambridge University Press, 1997. 280 p. ISBN 0-521-58228-8

C'est à un sacré chemin parmi quelques siècles de mathématiques que nous convient les deux auteurs de ce livre consacré aux courbes elliptiques. Comme le laisse présager son sous-titre, ce livre entremêle analyse complexe, théorie des corps, fonctions spéciales, géométrie projective, théorie des nombres. . . Ainsi, en 250 pages est brossé un vaste tableau de ce sujet dont il faut bien avouer qu'il est rarement traité de la sorte. (Comparer par exemple avec les ouvrages classiques de Silverman ou Husemoller, manifestement orientés vers la théorie des nombres). J'ai personnellement trouvé cela enthousiasmant même si l'exercice a ses défauts, souvent décriés dans le pays natal de N. Bourbaki. En effet, les définitions sont souvent approximatives, les énoncés rarement mis en valeur de la façon traditionnelle, les démonstrations esquissées ou reportées dans des exercices à l'énoncé lapidaire : « Check that. » Il n'empêche, j'ai trouvé ce livre d'une grande richesse.

Décrivons succinctement ce qu'on peut y trouver, chapitre par chapitre. Le point de départ du premier chapitre est la projection stéréographique qui motive la définition de surface topologique. De proche en proche, le lecteur est amené à la définition des surfaces de Riemann, des courbes algébriques planes. Au passage, sera démontré le théorème de Lüroth et esquissé la preuve du théorème d'uniformisation via l'interprétation hydrodynamique de l'équation de Laplace.

Les intégrales et fonctions elliptiques sont motivées par de nombreux exemples (de la représentation conforme d'un rectangle à la période du pendule simple sans oublier la rectification de l'ellipse). De nombreuses formules sont données, dont l'application au calcul de la moyenne arithmético-géométrique et la relation de Legendre. On y trouve aussi les applications au porisme de Poncelet ainsi qu'à certaines solutions de l'équation de Korteweg-de Vries. Arrivent ensuite les fonctions θ avec leur lot de formules explicites et l'entrée de l'arithmétique dans le livre (sommes de carrés, réciprocité quadratique via les sommes de Gauß).

Les fonctions et formes modulaires sont introduites ensuite, mais c'est peut-être le chapitre du livre le moins agréable à lire. L'accent est mis sur la détermination plus ou moins explicite des équations modulaires ou de leurs variantes (notamment en degrés ≤ 5). Cela intervient au chapitre suivant, *Ikosaeder*, qui fait le lien entre la résolution des équations de degré 5 et les fonctions modulaires qui fournissent dans ce cas un substitut à l'impossible résolution par radicaux.

Les deux derniers chapitres sont vraiment de nature arithmétique. Le premier traite de la multiplication complexe. Il introduit la théorie algébrique des nombres (essentiellement dans le cas des anneaux d'entiers des corps quadratiques imaginaires) : idéaux premiers, nombre de classes et le fait qu'il est fini, le théorème de Minkowski étant avantageusement remplacé dans ce cas par la considération du domaine fondamental de l'action $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré. Enfin, le théorème de Mordell (selon lequel le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique sur le corps $\mathbb{Q}$ est un groupe abélien de type fini) est démontré, mais sous l'hypothèse simplificatrice que les points de 2-torsion sont rationnels. Ceci simplifie en effet la partie « galoisienne » de la démonstration en permettant un critère simple pour qu'un point rationnel soit divisible par 2. Cette démonstration est celle de Weil et se généralise aux variétés abéliennes sur un corps de nombres.

Antoine Chambert-Loir

The nonlinear Schrödinger equation. Self-focusing and wave collapse

CATHERINE & PIERRE-LOUIS SULEM

Applied Math. Sciences **139**, Springer-Verlag, New York, 1999. 350 p. ISBN 0-387-98611-1

Le livre de C. Sulem et P.-L. Sulem est un vrai livre de mathématiques appliquées qui se

lit avec plaisir. Le sujet peut sembler être très ciblé et d'envergure minimale à première vue, mais il n'en est rien. Tout d'abord les auteurs ne se restreignent pas à l'équation de Schrödinger non linéaire proprement dite mais traitent de façon détaillée des modèles connexes. Un nombre important de techniques mathématiques et de situations physiques différentes sont balayées. Ensuite, les preuves des résultats mathématiques ne sont pas toujours données (particulièrement en début d'ouvrage) ce qui permet d'aller loin dans la théorie, d'aborder des aspects variés de celle-ci et facilite la lecture de ce livre. Une bibliographie sérieuse et très complète termine l'ouvrage. Un autre point qui donne du champ à cet ouvrage est le fait que même quand les mathématiques deviennent impuissantes à résoudre le problème, les auteurs ne s'arrêtent pas : tous les coups deviennent permis, même les techniques de physiciens et les expérimentations numériques si bien qu'un embryon de réponse est donné.

Le livre est découpé en 5 parties.

La première partie est une grosse introduction dans laquelle il est montré que l'équation de Schrödinger est un modèle universel pour décrire les phénomènes physiques dans lesquels dispersion et non-linéarité sont en compétition. L'exemple précis développé est la propagation d'un laser dans un milieu dont l'indice dépend de l'intensité du champ électrique. Puis sont développés quelques aspects concernant la structure de l'équation de Schrödinger et la dynamique qui va en ressortir. On commence à parler d'invariance, de loi de conservation et de soliton.

Ces notions sont étudiées avec force détails dans la deuxième partie consacrée à la théorie rigoureuse. Les trois chapitres de cette partie font un inventaire qui n'est pas loin d'être exhaustif sur les problèmes suivants : problèmes de Cauchy locaux et globaux en temps, existence d'ondes solitaires et leur stabilité, explosion en temps fini. Les relations entre ces différents aspects sont clairement mis en évidence et les résultats optimaux (actuellement) sont décrits, tout cela en une soixantaine de pages. La bibliographie est très soignée.

La partie 3 rebondit sur les phénomènes d'explosion en temps fini. Il s'agit de décrire la solution au voisinage du temps d'explosion, tâche ardue ! Très peu de résultats mathématiques sont disponibles. Cette partie commence donc par un chapitre nommé *Numerical Observations*. Une description phénoménologique et quantitative sur l'explosion en temps fini suit. Cette partie se termine par un chapitre décrivant ce qu'il peut se produire lorsque l'on perturbe une équation de Schrödinger dont des solutions explosent en temps fini à partir de simulations numériques.

Les deux dernières parties sont consacrées à l'étude de cas où l'équation de Schrödinger est couplée à l'évolution d'un champ moyen où à des ondes basse fréquence c'est à dire des ondes acoustiques. Les « variantes » de l'équation de Schrödinger décrivant cela sont des systèmes : les systèmes de Davey et Stewartson dans le premier cas et le système de Zakharov dans le second. Le premier cas intervient essentiellement dans le cadre des ondes hydrodynamiques de surface, le second dans le cadre de la physique des plasmas. L'obtention de ces modèles est rappelée dans ces deux situations physiques. Dans le cas des plasmas, je dirais même que c'est sans doute la seule référence actuellement disponible dans laquelle cette obtention est écrite de façon lisible par un mathématicien. Les résultats décrits dans les parties 2 et 3 pour Schrödinger sont alors étendus dans la mesure du possible à ces classes de systèmes.

En conclusion, je pense que ce livre est appelé à devenir un classique et en tout cas va rester longtemps un ouvrage de référence sur le sujet dans lequel tout le monde peut trouver son intérêt : mathématiciens, physiciens ou ingénieurs.

Thierry Colin, Université Bordeaux 1

Fermat's Last Theorem for Amateurs

PAULO RIBENBOIM

Springer-Verlag, New York 1999. 407 p. ISBN 0-387-98508-5

Que faire lorsqu'une révolution scientifique vient bouleverser un paysage serein dans lequel les adeptes du théorème de Fermat (FLT en abrégé) avaient trouvé une niche protégée ?

C'est à ce problème que P. Ribenboim se trouve confronté en écrivant ce livre. Cela le conduit à devoir rappeler souvent à « ses » lecteurs amateurs que le théorème est maintenant démontré, ce qu'il fait avec une courtoisie et une discrétion remarquables. Jusqu'à présent les représentants de la « science normale » (pour utiliser le vocabulaire de Thomas Kuhn [K]) pouvaient conseiller la lecture des classiques aux amateurs car dans ce domaine les travaux de Kummer, expliqués par Edwards [E] par exemple, n'étaient pas inabordables. Aujourd'hui, malheureusement, il n'en va pas de même des travaux de Wiles et un mathématicien qui les a bien dominés ne peut être qualifié d'amateur qu'au sens premier du terme !

À quel public ce livre s'adresse-t-il donc et quel en est le projet ?

Si le terme d'« amateurs » est celui qui est le plus souvent associé aux lecteurs, la Préface semble retoucher cette description en mentionnant aussi les enseignants (*teachers*) et les mathématiciens curieux du développement du sujet, mais à l'exclusion des professeurs (*professors*) qui semblent constituer une classe à part de gens moins curieux du sujet que de l'exactitude des preuves, ce qui est une amusante opinion.

L'auteur nous propose une charte des droits du Lecteur et affirme d'entrée de jeu que parmi ceux-ci se trouve le droit inaliénable de produire une preuve personnelle de FLT.

Mais ce droit est ensuite encadré par deux articles destinés à en limiter la portée :

Article 1 : *Aucune preuve de FLT ne doit jamais reproduire une preuve antérieure.*

Article 2 : *Soumettre de fausses preuves de FLT à des professeurs qui gagnent difficilement leur croûte en enseignant comment faire pour les éviter est une offense criminelle.*

L'article 2 pourrait paraître vide de sens si l'on pensait qu'il n'existe pas de professeurs répondant à la description donnée, mais il ne faut pas oublier qu'il y a beaucoup plus de sortes de professeurs dans le monde que dans l'imagination des lecteurs de la Gazette.

Si l'article 1 paraît peu impressionnant, l'article 2 est beaucoup plus contraignant puisqu'il interdit de reproduire la preuve de Wiles et que, si l'on désire produire une preuve inexacte, celle-ci doit être originale. Or on sait que le nombre de preuves inexactes qui ont été proposées dans l'histoire dépasse l'entendement ! Heureusement l'Appendice A donne un certain nombre de références pour celles-ci et constitue une sorte d'ébauche du grand répertoire des preuves inexactes qui serait nécessaire pour donner un sens précis à l'article 2.

Malgré le droit inaliénable qui lui a été généreusement accordé, le pauvre lecteur se trouve donc en situation difficile s'il veut être créatif. Que peut lui apporter ce livre ?

La Préface nous avertit que son but n'est pas de présenter la preuve de FLT, mais de donner des exemples de preuves partielles obtenues à l'aide d'arguments strictement élémentaires. Et l'auteur ajoute que « laisser ces pierres précieuses sombrer dans l'oubli serait une erreur impardonnable ». Ce que l'on peut fort bien concevoir, et ceci pour des raisons esthétiques renforcées par le charme nostalgique des paradigmes obsolètes.

En dehors de ce salut élégant à la défunte science établie (antérieure à Wiles), le livre nous indique aussi des chemins à éviter puisque l'auteur affirme que, « aussi loin qu'il puisse voir, les méthodes présentées ici ne conduisent pas à une preuve de FLT » (on aurait aimé savoir pourquoi, mais on ne nous le dira pas dans ce livre). Ce que l'on trouvera en revanche, page 366 dans l'Epilogue, est l'opinion qu'il est « légitime d'essayer de trouver une autre preuve, plus simple que celle de Wiles, pour FLT ».

L'auteur attache donc une importance toute particulière aux preuves élémentaires de résultats partiels et, de ce point de vue, le livre remplit admirablement son objectif (ou presque) car l'auteur possède une érudition considérable et ses démonstrations sont impeccables (à de trop nombreuses erreurs typographiques près, par exemple p. 277 et 278).

Si j'émets une légère réserve concernant les preuves, c'est parce que le souci de l'auteur de ne pas déborder le cadre d'un exposé élémentaire et minimal me laisse souvent sur ma faim.

Par exemple on peut regretter que dans la première partie du chapitre 1 (cas de l'exposant 2 qui remonte à la nuit des temps) l'auteur ne laisse cours à son imagination et ne mentionne pas le lien avec les paramétrisations rationnelles du cercle (ou du groupe orthogonal du plan euclidien). Les lecteurs qui sont des enseignants y trouveraient sans doute matière à développements.

Un autre exemple (parmi beaucoup d'autres) concerne la non existence de solutions polynomiales non constantes et primitives à l'équation de Fermat pour $n \geq 3$. Ce sujet n'est qu'effleuré p. 269 et 270 alors qu'il constitue un cas particulier d'un théorème de Mason et Stothers (cité p. 364) que l'on peut démontrer très élémentairement par une méthode qui remonte au moins à Korkine (1880). Par ailleurs le résultat de Korkine (anticipé par Liouville) montre que la courbe de Fermat n'est pas rationnelle pour $n \geq 3$, ce qui peut encore intéresser les enseignants qui aiment paramétrer les cubiques.

Comme l'auteur semble souffrir lui-même des limitations qu'il s'impose, il se donne un peu d'oxygène à l'aide de 10 interludes qui constituent une des originalités du livre.

Les interludes sont présentés comme des développements de sujets importants de la théorie des nombres élémentaire destinés à rendre le livre « self-contained ».

Ils sont souvent intéressants car le point de vue est original. Mais parfois (comme dans l'étude des polynômes à coefficients p-adiques) on passe de l'originalité à l'excentricité. En effet les propriétés démontrées ne sont que les propriétés classiques des polynômes à coefficients dans un anneau principal, plus quelques propositions trivialement fausses (propriété (1D) page 146, plusieurs assertions pages 150 et 151). Il est clair que l'auteur n'a rien gagné ici en se plaçant dans ce cadre trop étroit.

De plus les regroupements de sujets paraissent parfois bien artificiels : y a-t-il le moindre rapport entre le résultat quelque peu trivial de Christilles (p. 237) et les courbes de Frey (p. 247) présentées sous le même chapeau ?

Par ailleurs il y a parfois beaucoup d'imprécision dans le propos. Nulle part l'auteur ne prend le soin de définir une courbe elliptique, ce qui ne l'empêche pas d'en parler souvent. On peut regretter que ces imprécisions tournent parfois à l'inexactitude. Ainsi (p. 246) on trouve *deux* (et non pas une seule) courbes elliptiques associées à une solution de l'équation de Fermat d'exposant $2p^h$ et (p. 247) l'assertion sur la finalité de cette construction est absolument erronée. Dans la même page (un peu plus loin) il n'est pas dit non plus que la courbe de Frey est l'une des deux courbes précédentes (choisie pour être semi-stable) lorsque $n = 2p^h$.

Le livre s'achève par un Epilogue adressé aux « lecteurs qui sont encore courageux » et qui présente de manière succincte des résultats *non élémentaires* : théorème de Kummer (pour le cas général), théorème de Wieferich (pour le premier cas), théorème d'Adleman, Heath-Brown et Fouvry (pour le premier cas), théorème de Faltings (pour le cas général), conjecture $.abc/$ et, finalement, le théorème de Wiles (pour le cas général !). On peut encore regretter quelques omissions et imprécisions dans ce chapitre.

Le paragraphe sur le théorème de Faltings aurait pu être l'occasion de présenter une idée très élémentaire beaucoup plus ancienne (antérieure à 1971, voir [H1]) qui est beaucoup plus générale que celle de Christilles et qui conduit aux applications de Granville et Heath-Brown.

Quant aux imprécisions on en trouve encore p. 370 (définition des « nouvelles formes ») et p. 373 où l'absence de définition des courbes elliptiques fait sentir ses inconvénients : peut-on parler *du* point à l'infini s'il y en a plusieurs ?

Il est difficile de conclure au sujet d'un livre dont le projet est aussi ambigu. Présente-t-il les outils qui conduiront à la preuve « différente, plus simple, de FLT » ? On peut en douter. S'agit-il d'archéologie artistique destinée à sauver de l'oubli « d'admirables exemples d'ingéniosité » ? On peut encore en douter. S'agit-il de présenter la preuve de Wiles ? certainement pas !

Il reste que ce livre est éminemment vivant et sympathique et que l'auteur fait preuve d'une érudition remarquable et d'une clarté très agréable.

Remarque. — Je ne pense pas que cet ouvrage puisse être considéré comme un livre d’histoire des mathématiques : l’auteur a ses préférences et ne les cache pas, c’est d’ailleurs ce qui fait le charme de ce livre très personnel. On a déjà noté qu’il ne parle pas de Liouville et de Korkine p. 270, ajoutons qu’il aurait été agréable d’enrichir le chapitre X d’une allusion aux travaux de Conway et Jones [H2] et renvoyons au numéro de la Gazette de juillet 2000 (p. 31 et 32) pour les pages 246 et 247.

Yves Hellegouarch, Université de Caen

Références

- [K] J.S. KUHN, *La structure des révolutions scientifiques*, Flammarion, 1983
 [E] H.M. EDWARDS, *Fermat’s Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1977
 [H1] Y. HELLEGOUARCH, « Sur l’équation diophantienne $x_1^{ph} + x_2^{ph} = q^a x_3^{ph}$ », *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 273, p. 194–1196, 1971
 [H2] Y. HELLEGOUARCH et F. RECHER, « Défaut d’additivité des chiffres de Teichmüller », *Comptes rendus Ac. Sc. Paris*, t. 318, p. 401–406, 1994

Duality and Supersymmetric theories

DAVID OLIVE, PETER WEST, éditeurs

Newton Inst. series, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. 473 p. ISBN 0-521-64158-6

Les deux éditeurs de cette série de cours de Physique théorique sont spécialistes de systèmes hamiltoniens intégrables et de théorie des cordes pour le premier et de supersymétrie et de théorie quantique des champs pour le second. Ils ont rédigé une introduction historique retraçant le parcours scientifique d’une communauté à forte culture mathématique de la physique théorique des hautes énergies qui l’a conduite des modèles de cordes duales (en 1967 le fait que l’on parlait de cordes n’était pas encore établi et les découvertes de Kac et de Moody encore virtuelles) aux modèles de supercordes en passant par quelques évolutions radicales : en 1973-74 l’acceptation de dimensions supplémentaires de l’espace-temps et surtout un changement d’échelle de 19 ordres de grandeur, en 1977-78 la construction de la théorie de Yang-Mills maximale en dimension 10 et d’une théorie de supergravité maximale en dimension 11 (un temps et dix directions spatiales) qui réalisent les plus grandes supersymétries possibles dans une théorie ayant un nombre fini de champs, en 1984 la restriction à 5 du nombre de modèles de supercordes (avant compactification des dimensions supplémentaires) sans anomalie de jauge et dont la quantification est possible et surtout en 1994-5 la conjecture d’une théorie « M » contenant la supergravité à 11 dimensions comme limite classique si on inclut ses solitons qui ne sont plus des cordes (ou vortex) mais des objets de dimension spatiale 2 ou 5. Une bonne partie de cette communauté s’est impliquée dans l’étude des théories supersymétriques et en particulier dans leur version de jauge les supergravités. Jusqu’en 1984 les succès du modèle dit standard des quarks, des leptons et des interactions faibles et électromagnétiques ont occupé le devant de la scène. Les problèmes des interactions forte et gravitationnelle à savoir le couplage fort à basse énergie et les divergences quantiques ont causé le regain d’intérêt que chacun connaît depuis. Bien sûr les retombées mathématiques plus immédiates ont aussi transformé la sociologie, les technologies et la communication dans ce domaine.

En France il n’existe pas de formation universitaire spécifique et les semestres thématiques et autres Instituts d’été sont très importants pour une éducation réciproque. Ce livre propose 10 cours initialement destinés par des physiciens à d’autres physiciens débutant en recherche.

Le premier thème : Solitons (BPS) et supersymétrie est couvert par N. Manton (espace des modules de solutions multimonopoles des équations self-duales de Yang-Mills/Higgs/Bogomolny/Prasad/Sommerfield) puis de façon plus approfondie par D. Olive (Dualité

quantique entre formulations électrique et magnétique, aspects non-perturbatifs rôle de la supersymétrie, brisure de la symétrie continue de dualité en un groupe discret par la quantification); J. Gauntlett (approximation de l'espace des modules dans le cas non-abélien général, dualité de Seiberg-Witten pour le cas de la supersymétrie « $N = 2$ » et réseau de dyons avec charges électriques et magnétiques associé). Enfin T. Eguchi présente les résultats de dualité « $N = 2$ » qui ont suivi la percée de Seiberg et Witten en 1994 : il s'agit de l'analyse en couplage fort de la théorie de Yang-Mills supersymétrique en supposant l'analyticité maximale en la constante de couplage. L'espace des modules a une structure de Kähler qui permet des déformations quantiques intéressantes (cas non invariant conforme). En fait on trouve des solutions exactes pour des théories quantiques des champs en dimension 4 ! Ce chapitre se termine par une discussion des théories (4d) invariantes conformes pour lesquelles on peut conjecturer une dualité exacte.

Une référence pour certains aspects mathématiques est le livre de Atiyah et Hitchin : *The geometry and dynamics of magnetic monopoles*, on peut avoir besoin aussi d'un ouvrage de base de supersymétrie (ou utiliser le début du cours de P. West, cf. ci-dessous).

Le cours de B. Zumino donne quelques bases sur la relation entre supersymétrie et structures kähleriennes ou hyperkähleriennes qui sont fondamentales pour beaucoup de problèmes mathématiques actuels. Son autre cours avec M. Gaillard fait aussi référence pour la compréhension des symétries noncompactes dans des théories unitaires, celles-ci ont été d'abord comprises en supergravité mais sont maintenant d'usage courant jusqu'en physique des solides.

Le deuxième thème est la supergravité. Le cours de P. West (120 pages) part des superalgèbres dites de Poincaré qui contiennent comme sous-algèbre de Lie les symétries de l'espace de Minkowski pour construire les représentations utiles et en particulier les « petites représentations » ainsi appelées car elles apparaissent lorsque la représentation de la superalgèbre de Clifford qui les induisent est dégénérée et donc de dimension plus petite ; c'est le cas pour les particules de masse nulle et pour certaines représentations massives avec charges centrales bien choisies (condition BPS-version fermionique). Les théories avec invariance par supersymétrie locale contiennent la gravitation et son invariance par difféomorphismes ordinaires, ce sont les supergravités elles sont construites par déformation de théories libres à supersymétrie rigide (méthode dite de Noether et comme remarquerait Arnold due à Gupta-Fronsdal-Deser-Ferrara-Freedman-van Nieuwenhuizen...). Les actions de ces théories ne sont en fait invariantes par supersymétrie que modulo les équations du mouvement dans les cas maximaux (Yang-Mills 4d $N = 4$ et Supergravité 4d $N = 8$). Ces équations admettent des symétries de dualité exceptionnelles, par exemple dans le deuxième cas (*i.e.* M-GRA=SUGRA $N = 8$) un groupe $E_{7.7}$ / encore surprenant. Le cours se termine par une discussion des p-branes (généralisation des cordes — 1-branes — au cas de p dimensions spatiales) et leurs versions supersymétriques. Le point clef de la discussion est qu'en dimension 11 à savoir la dimension maximale de la M-GRA les solitons sont des 2-branes singulières et des 5-branes régulières, les cordes sont en fait des descendantes des 2-branes lorsqu'une des dimensions spatiales s'enroule sur elle-même et une des dimensions de la 2-brane enroulée également est ainsi cachée aux yeux de l'observateur de basse énergie qui croit vivre à 10 dimensions. Et enfin une première discussion des dualités des théories de supercordes et de la M-théorie qui les unifie entre elles et avec la M-GRA, peut servir de motivation au cours de A. Sen qui suit. Le cours de G. Gibbons traite des solitons dans les théories des champs contenant la gravitation (condition BPS et trous noirs extrêmes, groupes de dualité, instantons (−1-branes) et autres p-branes gravitationnelles). Ce cours est bref et renvoie à une littérature florissante.

Le dernier thème est celui des cordes et de leurs solutions non-perturbatives les D-branes de Polchinski. Ces dernières font l'objet du cours de C. Bachas (D-branes comme bords de cordes ouvertes, leurs charges, tensions et interactions, les actions effectives avec le terme de Dirac-Born-Infeld pour le volume généralisé et le terme de Wess-Zumino pour le couplage à leurs champs de jauge dits de Ramond-Ramond..., les relations de quantification de charge et autres effets topologiques et finalement une discussion des dualités T). Les dualités T méritent un

commentaire car elles montrent bien la nature approchée et semi-classique de l'espace-temps : typiquement les théories des cordes sont invariantes par échange d'une coordonnée cyclique et de sa conjuguée cyclique également sur un cercle de rayon inverse dans les bonnes unités. Ceci est le prototype de la symétrie miroir et est perturbatif dans la constante de couplage des cordes mais non perturbatif du point de vue de la théorie conforme bidimensionnelle associée.

On terminera par les monumentales 120 pages de A. Sen qui couvrent la théorie perturbative des cordes en 11 pages avec de nombreuses références, les dualités non perturbatives et leur vérifications au niveau des actions effectives de basse énergie (ce sont des actions de supergravité à 10 dimensions), relations entre dualités perturbatives et non-perturbatives et groupe de U-dualité associé. Puis il généralise les dualités de Seiberg Witten et de Seiberg dans le cas où le nombre de charges de supersymétrie est plus petit, il discute également la théorie F (encore mal comprise car elle n'a pas de modèle F-GRA qui serait une sorte de supergravité avec deux temps et sans « dilatations »). Il conclut l'étude des dualités par une analyse de la théorie M, i.e. la version quantique et encore mal définie de la supergravité M-GRA avec ses solitons. Puis il traite d'un des succès récents des D-branes : le calcul microscopique dans des cas limites de l'entropie des trous noirs quantiques (grâce aux supercordes). Le cours et cette revue se terminent par un chapitre sur un candidat pour la théorie M : la théorie des matrices $N \times N$ pour N grand comme discrétisation des 2-branes fondamentales.

Avec 475 pages et beaucoup plus de références le lecteur pourra donc se plonger dans le Far West de la Physique moderne, on peut penser qu'il aura intérêt et plaisir à consulter ses collègues physiciens pour le guider et le protéger. Il y a un côté ruée vers l'or particulièrement saillant actuellement et les difficultés de langage et de communication déjà évoquées. Je partage cette exaltation.

Bernard Julia, Laboratoire de physique théorique, ÉNS, Paris

Several Complex Variables

MICHAEL SCHNEIDER, YUM-TONG SIU, éditeurs

MSRI Publications 37, Cambridge Univ. Press, 1999, 564 p., ISBN 0-521-77086-6

Ce recueil d'articles est dédié à Michael Schneider. Il présente un panorama des mathématiques en plusieurs variables complexes. Il explicite certaines interactions avec la théorie des équations aux dérivées partielles, la géométrie différentielle, la géométrie algébrique et un peu avec la théorie des nombres (dans l'article de Paul Vojta « Nevanlinna Theory and Diophantine Approximation »). La plupart des articles sont généraux et donnent l'historique, l'état actuel et quelques perspectives d'un domaine.

Sans parler de tous, je vais présenter les articles en les regroupant par thèmes.

1) *La géométrie analytique complexe*. — L'article de Frédéric Campana et Thomas Peternell « Recent developments in classification theory of compact kähler Manifolds » donne d'abord la problématique de la théorie de Mori (en particulier le rôle des courbes rationnelles) pour la géométrie projective. Les auteurs développent ensuite des outils de substitution (famille non-scindées de courbes rationnelles) dans le cadre de la géométrie kählérienne générale.

L'article contient aussi une synthèse des résultats de Campana sur les groupes fondamentaux de variétés kählériennes. Des questions voisines sont abordées dans « Rigidity theorems in Kähler geometry and the fundamental groups of varieties » (Domingo Toledo), par la géométrie différentielle et plus précisément par la théorie harmonique.

Comme il est apparu dans l'article de Campana et Peternell, les espaces de cycles donnent un outil pour la classification des variétés. L'article « How to use cycle space in complex geometry » (Daniel Barlet) présente une bonne introduction aux problèmes concernant les espaces de cycles, et en particulier aux questions de transfert de propriétés : quelles propriétés de l'espace X se transmettent à l'espace des cycles sur X ?

À propos maintenant des courbes entières, l'article de Yum-Tong Siu « Recent techniques in hyperbolicity problems », présente les idées et les calculs de l'auteur pour la résolution des conjectures sur l'hyperbolicité dans l'espace $\mathbb{P}^2$.

L'article de Christian Okonek et Andrei Teleman « Recent development in Seiberg-Witten theory and complex Geometry » expose l'évolution de cette théorie. Malheureusement, ni les motivations ni les difficultés ne sont explicitées.

2) *Résolution des singularités*. — La longue introduction avec exemples, remarques et figures de l'article « Resolution of singularities » (Edward Bierstone et Pierre D. Milman) donne un bon aperçu de la nature des problèmes dans ce domaine. La suite est l'explication de leur algorithme de choix des lieux d'éclatement pour rendre lisse un ensemble analytique.

3) *Action de groupe*. — L'article de Peter Heinzner et Alan Huckleberry « Analytic Hilbert quotient » donne des méthodes de construction du quotient d'un espace de Kähler par l'action d'un groupe réductif. Les outils présentés ici viennent de la géométrie symplectique et de l'analyse complexe.

4) *Régularité du $\bar{\partial}$* — Les trois articles « Global regularity of the $\bar{\partial}$ -Neumann Problem : a survey of the L^2 -Sobolev theory » (Harold P. Boas et Emil J. Straube), « Remarks on global irregularity in the $\bar{\partial}$ -Neumann Problem » (Michael Christ) et « Subelliptic estimates and finite type » (John P. D'Angelo et Joseph J. Kohn) donnent une vue intéressante et complète des liens pour le système de $\bar{\partial}$ -Neumann d'équations aux dérivées partielles entre la régularité (régularité des solutions en fonction de la régularité des données et des conditions au bord), les estimations a priori des dérivées d'ordre supérieur des solutions, et les propriétés de convexité du bord.

Globalement, l'intérêt principal de cet ouvrage est qu'il regroupe de grandes problématiques actuelles, et y ajoute des remarques, des références historiques et des problèmes ouverts. En recoupant plusieurs articles, apparaissent quelques tendances comme le rôle des techniques de déformation, la géométrie symplectique, l'importance de la recherche des courbes.

Christophe Mourougane, Université Paris 6

On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks

LLUIS PUIG

Progress in Math. **178**, Birkhäuser, Basel, 1999. 261 p. ISBN 3-7643-6156-5

Le sujet de ce livre est la théorie des blocs, qui est l'une des parties principales de la théorie des représentations modulaires des groupes finis. Il y a quatre notions différentes d'équivalences entre blocs et, afin de donner une idée du sujet, il semble souhaitable d'expliquer d'abord ce qu'est une équivalence de Morita, une équivalence de Rickard, une équivalence stable et une équivalence de Puig. Les résultats principaux du livre montrent de combien chaque équivalence est éloignée du quatrième type, qui est l'équivalence la plus forte.

Bien que le lien entre représentations en caractéristique zéro et représentations en caractéristique p soit crucial, nous n'allons considérer, pour simplifier, que des représentations sur un corps K fixé, supposé algébriquement clos. Soit G un groupe fini et KG l'algèbre du groupe. Dans la théorie classique, K est de caractéristique zéro, KG est semi-simple, donc se décompose comme produit d'algèbres de matrices, et par conséquent la catégorie $\mathbf{mod}.KG/$ de tous les KG -modules (de dimension finie sur K) est isomorphe à un produit de catégories de modules sur des algèbres de matrices. Chacune d'entre elles est facile à comprendre car il n'y a qu'un seul module simple S (à isomorphisme près) et tout module est isomorphe à une somme directe de copies de S . En fait la catégorie des modules sur une algèbre de matrices est équivalente à la catégorie des K -espaces vectoriels.

Supposons désormais que la caractéristique de K est un nombre premier p . Soit $KG \cong \prod_{j=1}^m B_j$ la décomposition la plus fine possible de KG comme produit (qui est unique à isomorphisme près). Chaque algèbre B_j s'appelle une *algèbre de bloc*, ou simplement

un *bloc*. On cherche à comprendre la structure de la catégorie $\mathbf{mod}.B/$ des B -modules, où B est un bloc. Il y a en général une infinité de B -modules indécomposables non isomorphes et $\mathbf{mod}.B/$ peut être très compliquée. Néanmoins, et c'est là une idée cruciale de la théorie des blocs, on constate que lorsque le groupe G varie (par exemple dans une certaine classe de groupe finis), il y a de nombreux exemples de familles infinies de blocs qui se ressemblent : ils ont par exemple des catégories de modules équivalentes, ou bien ils ont des comportements identiques concernant les valeurs de caractères. En fait, plusieurs notions d'équivalences entre blocs se présentent.

Deux algèbres A et A' sont *Morita équivalentes* si leurs catégories de modules $\mathbf{mod}.A/$ et $\mathbf{mod}.A'/$ sont équivalentes. Elles sont *Rickard équivalentes* si leurs catégories dérivées sont équivalentes, où la catégorie dérivée est une certaine catégorie de complexes de modules. Finalement elles sont *stablement équivalentes* si leurs catégories stables sont équivalentes, où la catégorie stable est définie comme le quotient de la catégorie des modules obtenu en annulant tous les modules projectifs. Chaque équivalence implique la suivante. On a des exemples importants d'algèbres de blocs pour lesquelles il y a une équivalence qui ressemble à une équivalence de Morita sauf que des signes apparaissent (un module est envoyé sur une différence de modules) et il s'est avéré qu'il s'agissait d'équivalences de Rickard : la différence de modules doit être interprétée comme la somme alternée des modules apparaissant dans un complexe. Cela explique brièvement pourquoi les équivalences de Rickard se sont imposées en théorie des blocs (cf. [B1], [B2], [Ri], [KZ]). D'ailleurs, l'un des problèmes ouverts les plus intéressants dans le sujet est une conjecture de Broué, qui prédit l'existence d'une certaine équivalence de Rickard pour les blocs à groupe de défaut abélien (cf. [B1], [B2]).

Alors que les trois définitions précédentes valent pour des algèbres quelconques, la notion suivante d'équivalence, qui est la plus forte, n'a un sens que pour les blocs, car elle fait intervenir la structure de groupe. Il nous faut tout d'abord introduire les algèbres de source. Un premier invariant qui mesure la complexité d'un bloc de KG est son *groupe de défaut*, introduit par Richard Brauer dans les années cinquante, et qui est un p -sous-groupe de G (unique à conjugaison près). L'invariant suivant est l'*algèbre de source* du bloc, qui est unique à isomorphisme près, et qui est une algèbre de dimension finie dans laquelle le groupe de défaut P est plongé (si bien qu'en particulier P agit sur l'algèbre de source par conjugaison). Cet invariant a été introduit par Lluís Puig il y a vingt ans (cf. [P1] ainsi que le livre [Th]). L'algèbre de source est une sous-algèbre de l'algèbre du groupe KG (avec un autre élément unité), mais l'idée principale est que G a disparu et que seule de l'information p -locale (c'est-à-dire concernant les p -sous-groupes) subsiste dans l'algèbre de source. Un bloc est Morita équivalent à son algèbre de source et de plus tous les invariants p -locaux du bloc qu'on est capable de définir peuvent être détectés dans son algèbre de source. Ainsi l'algèbre de source reflète fidèlement la structure du bloc.

Deux blocs sont appelés *Puig équivalents* s'ils ont même groupe de défaut et des algèbres de source isomorphes. La question de la classification des blocs à équivalence de Puig près (c'est-à-dire la classification des algèbres de source possibles pour un groupe de défaut donné) est une question difficile qui est loin d'être résolue. Beaucoup de propriétés des algèbres de source sont connues mais elle ne suffisent pas à les caractériser (cf. [Th] pour une introduction). Une conjecture de Puig affirme que, pour un groupe de défaut P donné, il n'y a qu'un nombre fini d'algèbres de source possibles, donc un nombre fini de classes d'équivalences de Puig pour les blocs de groupe de défaut P . Pour les blocs avec un groupe de défaut cyclique, la conjecture de Puig a été récemment démontrée par M. Linckelmann [L1], à l'aide de théorèmes de structure obtenus par E.C. Dade il y a plus de 30 ans. La structure des algèbres de source a aussi été décrite lorsque le groupe de défaut est un groupe de Klein [L2], lorsque le bloc est nilpotent [P2] (cf. aussi [Th]), lorsque le groupe est p -résoluble, et pour certains blocs de groupes de Chevalley [P3]. Des formes plus faibles de la conjecture de Puig ont aussi été démontrées, par exemple pour les blocs des groupes p -résolubles seulement, ou pour les groupes symétriques seulement [P4].

Pour les algèbres de bloc, nous avons ainsi quatre types d'équivalences, chacune impliquant

la suivante : l'équivalence de Puig, l'équivalence de Morita, l'équivalence de Rickard et l'équivalence stable. Il y a des exemples importants de paires de blocs pour lesquelles on sait que seule la seconde, ou la troisième, ou la quatrième équivalence est vérifiée. On est donc amené à se demander de combien chacun de ces cas est éloigné du tout premier, qui est le plus exigeant.

Le livre de L. Puig répond à cette question en montrant comment mesurer la distance qui sépare une équivalence de Morita (ou une équivalence de Rickard, ou une équivalence de Morita stable) et une équivalence de Puig. Un peu plus précisément, l'algèbre de source de l'un des blocs est obtenue à partir de l'algèbre de source d'un bloc équivalent et d'invariants provenant de l'équivalence elle-même (une équivalence de Morita est obtenue en tensorisant par un bimodule, une équivalence de Rickard en tensorisant par un complexe de bimodules et une équivalence de Morita stable, par définition, en tensorisant par un bimodule). Dans le cas d'une équivalence de Rickard, il est nécessaire de considérer des DG-modules au lieu de KG-modules, où D est une algèbre dans laquelle est encodée à la fois la graduation des complexes et la différentielle entre les termes successifs de la graduation.

Les énoncés précis des résultats sont trop techniques pour être donnés explicitement et bien sûr ils dépendent du type d'équivalence qui entre en jeu. L'idée principale est de plonger l'une des algèbres de source dans une algèbre construite à partir de l'autre algèbre de source. La construction comprend entre autres une notion générale d'induction d'algèbres, qui fonctionne pour un homomorphisme arbitraire de groupes $H \rightarrow G$ plutôt que pour une inclusion $H \subset G$. Dans le cas d'une équivalence de Morita (stable), la construction utilise aussi le produit tensoriel avec l'algèbre d'endomorphismes d'un certain module N (une source du bimodule qui induit l'équivalence). En fait, le module N s'avère être un module d'endo-permutation dans un cas spécial d'équivalence, appelée équivalence *basique*, qui est apparemment le cas le plus commun. Dans le cas d'une équivalence de Rickard, tout ceci fonctionne aussi mais une autre construction remplace celle du module N.

Comme conséquence des résultats, l'auteur montre que deux blocs sont Puig équivalents si et seulement s'ils sont Morita équivalents à l'aide d'un bimodule qui est facteur direct d'un module de permutation (appelé module de source triviale), et aussi qu'un bloc qui est (stablement) Morita équivalent à un bloc nilpotent doit être à nouveau nilpotent.

Le style du livre est celui d'un long article de recherche. Ce n'est pas un traité qui expose le sujet ou qui fournit un compte rendu de travaux récents dans le domaine. C'est un livre basé sur les articles précédents de l'auteur, si bien que la lecture demande une bonne connaissance du travail de Puig ainsi que quelques idées sur les travaux d'autres auteurs, au moins pour la motivation. Des idées générales, des résultats préliminaires et des motivations concernant le sujet du livre, en particulier sur les méthodes, sont assez bien expliquées dans l'introduction, où on peut aussi trouver le lien avec certains travaux récents d'autres mathématiciens.

Jacques Thévenaz, Université de Lausanne

Références

- [B1] M. BROUÉ, « Equivalences between block algebras : an introduction », in *Finite dimensional algebras and related topics*, Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands, 1994, p. 1–26.
- [B2] M. BROUÉ, « Rickard equivalences and block theory », in *Groups '93 Galway - St. Andrews*, London Math. Soc. Lecture Notes Series **211**, Cambridge Univ. Press, 1995, p. 58–79.
- [KZ] S. KÖNIG et A. ZIMMERMANN, *Derived equivalences for group rings*, Lecture Notes in Math. **1685**, Springer Verlag, Berlin, 1998.
- [L1] M. LINCKELMANN, « The isomorphism problem for cyclic blocks and their source algebras », *Invent. Math.* **125** (1996), p. 265–283.
- [L2] M. LINCKELMANN, « The source algebras of blocks with a Klein four defect group », *J. Algebra* **167** (1994), p. 821–854.
- [P1] L. PUIG, « Pointed groups and construction of characters », *Math. Z.* **176** (1981), p. 209–216.
- [P2] L. PUIG, « Nilpotent blocks and their source algebras », *Invent. Math.* **93** (1988), p. 77–116.

- [P3] L. PUIG, « Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley », *Astérisque* **181-182** (1990), p. 221–236.
- [P4] L. PUIG, « On Joanna Scopes' criterion of equivalence for blocks of symmetric groups », *Algebra Colloq.* **1** (1994), p. 25–55.
- [Ri] J. RICKARD, « Splendid equivalences : Derived equivalences and permutation modules », *Proc. London Math. Soc.* **72** (1996), p. 331–358.
- [Th] J. THÉVENAZ, *G-algebras and modular representation theory*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1995.