SOMMAIRE DU N^{o} 84

Dates limites de soumission des articles
pour parution dans le n^{o} 85 : *1er mai 2000*
pour parution dans le n^{o} 86 : *1er juillet 2000*

Mot de la présidente

La réunion-débat du 15 janvier, que nous avions intitulée « Quelles mathématiques pour la formation des étudiants dans les années à venir » a attiré beaucoup de monde, ce qui prouve que les problèmes liés à l'enseignement sont aujourd'hui ressentis comme cruciaux dans notre communauté. Le but de cette réunion était de mieux faire connaître les objectifs de la commission Kahane :

– permettre à l'enseignement des mathématiques d'accompagner et de préparer l'évolution des sciences et techniques dans tous les domaines,

– élargir le champ en fonction des outils informatiques,

– veiller au rôle de formation à la rigueur et au raisonnement,

– participer à la culture scientifique,

et de présenter l'état de ses réflexions dans certains domaines :

– calcul, démonstrations,

– quelles mathématiques en relation avec les autres sciences ?

– informatique et mathématiques.

Les débats ont largement dépassé ce cadre, ils ont exprimé des inquiétudes profondes et unanimement partagées sur le devenir de l'enseignement de notre discipline, à l'heure où on constate un affaiblissement de la formation mathématique dans l'enseignement secondaire, en contenu et en horaires, et où les étudiants semblent se détourner des études scientifiques. Ces débats ont montré aussi que, sur les questions plus précises (par exemple contenu des programmes, place de l'informatique, ...), nous ne sommes pas encore arrivés à un consensus et que la réflexion et la discussion doivent se poursuivre.

Plusieurs articles de ce numéro de la *Gazette*, ainsi que le serveur `http://smf.emath.fr/Enseignements/` rendent compte de cette réunion.

Nous voici donc dans l'Année Mondiale des Mathématiques. Cet évènement suscite de la curiosité et des interrogations envers les mathématiques de la part de certains médias, en-dehors du cercle restreint des mathématiciens, ou de celui un peu plus large des scientifiques. Répondre à ces interrogations de manière sérieuse et argumentée, pour assurer la promotion des mathématiques, est un des objectifs de la SMF. Nous travaillons actuellement à développer notre communication, en particulier avec le soutien du CNRS et celui du MENRT. Chacun de vous peut également y contribuer en acceptant de participer à des conférences, des débats, ou en écrivant des articles.

Il est plus que jamais nécessaire que la SMF bénéficie du soutien de toute la communauté et que sa représentativité soit reconnue, ainsi que celle des membres de son Conseil. Je vous rappelle que les prochaines élections au Conseil auront lieu au printemps (8 sièges seront à pourvoir) et je vous invite à y participer, comme candidat ou comme électeur.

Mireille Martin-Deschamps

Vie de la société

Salon du Livre

Le Salon du Livre organise un Bar des Sciences et nous invite à y participer le 19 mars, de 17h30 à 19h. Nous avons choisi pour thème « Les mathématiques aujourd'hui : une science omniprésente ». Les participants seront Michèle Artigue, Michel Broué, Mireille Martin-Deschamps, mathématiciens « professionnels », et Alain Bamberger, mathématicien de l'Institut Français du Pétrole.

Journée thématique

Dans le cadre des journées thématiques SMF, et faisant suite à celles de Saint-Malo (mathématiques et robotique, juin 98) et de Marseille (mathématiques et génétique, mars 99), une journée « Mathématiques et protection de l'information », organisée par J.-M. Couveignes aura lieu à l'IUFM de Toulouse le 5 mai. Vous trouverez dans ce numéro de la *Gazette* un texte de présentation de cette journée.

Renouvellement du Conseil

Les prochaines élections auront lieu le 17 juin 2000, lors de l'assemblée générale de la SMF ; les candidatures doivent être adressées au secrétariat de la SMF avant le 15 avril. Tous les détails pratiques se trouvent sur le serveur.

Serveur

Vous trouverez sur le serveur de la SMF `http://smf.emath.fr/` l'analyse de la campagne PEDR 99 rédigée par Jean-Marc Deshouillers.

Carnet

Nous félicitons Nathalie Christiaën, secrétaire à la SMF s'occupant d'Astérisque, du Bulletin et des Mémoires et de Panoramas & Synthèses, pour la naissance d'Adrien le 9 février 2000.

Image (9.5cm/13cm)

Henri Cartan (1996)

TRIBUNE LIBRE

Un entretien avec Henri Cartan

Propos recueillis par Allyn Jackson

Henri Cartan a accordé cet entretien à Allyn Jackson, rédactrice-en-chef et adjointe à la direction des Notices de l'American Mathematical Society, à Paris les 19 et 20 mars 1999. Françoise Adam-Cartan, fille de Henri et Nicole Cartan, et Dieter Kotschick, professeur de mathématiques à l'université de Munich, ont prêté leur concours à cet entretien. Françoise Adam et sa sœur, Suzanne Cartan, ont collaboré à la rédaction de la version définitive du texte en langue anglaise. Nous devons cette (re)traduction française à Pierre Bellemare, traducteur, qui a travaillé en collaboration avec Liliane Beaulieu, chercheur au centre de recherches mathématiques de l'université de Montréal. Nous les remercions tous de leur aide. Nous remercions également Anthony W. Knapp, directeur des Notices, qui nous a autorisés à traduire et à publier cet entretien[1].

Les premières années

Commençons par votre enfance et votre jeunesse. A quand remonte votre intérêt pour les mathématiques ?

Je me suis toujours intéressé aux mathématiques mais je ne crois pas que cet intérêt tienne au fait que mon père était lui-même mathématicien. Je n'ai jamais douté que je puisse devenir mathématicien. J'ai eu plusieurs professeurs, des bons et des moins bons. Je ne pense pas que ma vocation soit attribuable à l'influence de tel enseignant plutôt que de tel autre. Bien sûr, j'ai eu des conversations avec mon père. Je me souviens de ma surprise le jour où il m'a dit que le postulat d'Euclide n'était pas nécessaire.

Quel âge aviez-vous lorsqu'il vous a dit cela ?

Je ne sais pas, peut-être 14 ans.

[1] « *Interview with Henri Cartan* » , *Notices* of the American Mathematical Society, **46** (août 1999), n° 7, pages 782-788. Traduction française revue par Henri Cartan en octobre 1999.

Vous souvenez-vous d'autres occasions où vous avez discuté de sujets mathématiques avec votre père ?

Mon père était un homme réservé. Il n'a jamais tenté de m'influencer, je pouvais toujours lui poser des questions. Mais lesquelles ai-je posées ? Je ne m'en souviens pas. Beaucoup plus tard, nous avons travaillé ensemble sur certains problèmes. Par exemple, comme il en savait davantage que moi sur les groupes de Lie, j'ai fait appel à lui pour déterminer les domaines cerclés bornés qui admettent un groupe transitif d'automorphismes. Nous avons donc publié un article sur le sujet en collaboration (« Les transformations des domaines cerclés bornés », *C. R. Acad. Sci. Paris* **192** (1931), 709-712). Mais, en règle générale, mon père travaillait dans son coin et moi dans le mien.

La musique vous intéressait.

Oui. J'ai eu un frère, mon cadet de deux ans, qui est devenu compositeur. Il est mort à 25 ans, de la tuberculose. Ce fut une grande perte. Bien sûr, j'ai joué beaucoup de piano mais je ne peux plus maintenant, parce que je ne vois plus.

Et que dire du reste de votre famille ? Aviez-vous d'autres frères ?

Oui, un frère plus jeune, qui est devenu physicien. Mais il a été tué pendant la guerre par les Allemands, parce qu'il était dans la Résistance. Il a été déporté en Allemagne en février 1943, condamné à mort en août et décapité en décembre de la même année. Depuis février 1943 jusqu'à la fin de mai 1945, nous sommes demeurés dans l'ignorance de son sort. Étant donné les circonstances, nous ne pouvions pas nous attendre à recevoir de nouvelles. Des collègues allemands ont eu la bonté d'essayer de découvrir ce qui lui était arrivé, mais sans succès.

Qui étaient ces collègues allemands ?

L'un d'eux était Heinrich Behnke. Bien qu'un peu plus âgé que moi, Behnke était l'un de mes amis. C'est de lui que j'avais reçu ma première invitation à me rendre en Allemagne en mai 1931. Behnke enseignait alors à Münster, en Westphalie, et il avait beaucoup d'étudiants, environ une quarantaine. J'ai reçu cette invitation parce que je venais de publier une note sur les domaines cerclés dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences (« Les transformations analytiques des domaines cerclés les uns dans les autres », *C. R. Acad. Sci. Paris* **190** (1930), 718-720), dans laquelle j'avais démontré assez facilement un théorème déjà démontré plus tôt par Behnke, mais seulement sous certaines conditions et dans un cas particulier. J'ai donc été invité à donner plusieurs conférences à Münster. C'était en 1931. Behnke m'a invité une deuxième fois en 1937. A cette époque, Hitler était au pouvoir.

Avant la guerre, à compter de novembre 1931, j'avais enseigné à l'université de Strasbourg. Mais, en septembre 1939, les habitants de Strasbourg ont dû évacuer la ville. L'université s'est repliée à Clermont-Ferrand, où j'ai enseigné pendant un an, avant ma nomination comme professeur à la Sorbonne, en novembre 1940 (en fait, j'étais chargé de m'occuper des étudiants en mathématiques de l'École normale supérieure).

Pendant toute la durée de la guerre, on m'a refusé l'autorisation de retourner à mon appartement de Strasbourg. Un jour, Behnke m'a proposé d'aller y chercher quelques documents mathématiques que j'y avais laissés. Il s'est effectivement rendu à Strasbourg, mais sans succès. Puis, il a essayé à nouveau et, cette fois-là, il a réussi. Il est parvenu à mettre la main sur certains documents qu'il a ensuite déposés à la bibliothèque de l'université de Fribourg. En 1945, des membres des Forces françaises alors présentes en Allemagne les y ont découverts et me les ont rendus. Parmi ces documents se trouvaient les comptes rendus, ou procès-verbaux, des premières réunions de ceux qui devaient par la suite former le groupe Bourbaki. Ils témoignent du tout début des travaux de Bourbaki. Je ne sais pas s'il existe quelque part d'autres exemplaires de ces comptes rendus.

Je suis retourné à l'université de Strasbourg après la guerre, à la fin de 1945, pour une période de deux ans. En novembre 1946, je me suis rendu à l'institut de recherche de Oberwolfach. Il faisait très froid, il y avait de la neige et de la glace. J'y ai rencontré le professeur Süss (fondateur de cet institut), son épouse et Behnke. Je me souviens qu'on m'a demandé de jouer du piano. C'était un piano magnifique. En fait, il y avait là deux pianos. Le vieux château d'Oberwolfach n'existe plus. J'y suis retourné à plusieurs reprises par la suite : j'étais très reconnaissant envers mes collègues allemands de ce qu'ils avaient fait pour moi pendant la guerre.

Vos relations avec vos collègues allemands n'avaient donc pas du tout souffert de la guerre ?

Avec certains d'entre eux tout au moins, mais pas avec tous.

La première fois que vous avez rendu visite à Behnke, avant la guerre, aviez-vous constaté l'existence de différences importantes dans le climat mathématique en France et en Allemagne ?

Il m'est difficile de répondre à cette question, parce que cela dépend. Bien sûr, il y avait moins de mathématiciens en France qu'en Allemagne pour s'intéresser aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

Mais il existait une longue tradition d'étude de la théorie des fonctions d'une variable en France.

Oui. C'était sans doute là le sujet qui avait retenu l'attention du plus grand nombre de mathématiciens français ; les travaux de mon père constituaient alors une exception à cet égard.

Mais n'êtes-vous pas le premier mathématicien français à avoir travaillé sur les fonctions de plusieurs variables complexes ?

Je crois que c'est André Weil qui m'a suggéré que cela pourrait être intéressant. Il m'a parlé des travaux de Carathéodory sur les domaines cerclés. C'est comme cela que j'ai commencé à m'intéresser à la question.

Peter Thullen, qui était l'assistant de Behnke en 1931, devait devenir l'un de mes meilleurs amis. Nous avons travaillé en collaboration et nous avons publié un article qui a paru dans les *Mathematische Annalen* (« Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer Komplexen Veränderlichen », *Math. Ann.* **106** (1932), 617-647). J'ai toujours entretenu des relations très cordiales avec Thullen. Au début de 1933 ou 1934, il a quitté l'Allemagne, non parce qu'il était juif, car il était catholique, un catholique aux convictions profondes.

Grâce à Richard Courant, il a obtenu un poste en Équateur. Thullen a créé le système de sécurité sociale de l'Équateur, avant d'aller mettre sur pied celui de la Colombie. En 1951, je crois, il est revenu en Europe. Je m'en félicitai. Il s'est rendu à Genève pour travailler au Bureau international du travail (B.I.T.), où il a été chargé de la responsabilité des systèmes de sécurité sociale de tous les pays d'Amérique latine. Quand il a pris sa retraite du B.I.T., il a été nommé à l'université de Zürich grâce à Bartel Van der Waerden ; puis il a occupé une chaire à l'université de Fribourg, en Suisse. Après sa mort, j'ai gardé des liens d'amitié avec son fils aîné, qui travaillait pour les Nations unies à Genève et qui a maintenant pris sa retraite. Il nous rend visite chaque année.

Quand vous êtes-vous rendu aux États-Unis pour la première fois ?

Je me suis rendu aux États-Unis pour la première fois en 1948. En fait, pendant la guerre (je pense que c'était en 1942), j'avais été invité aux États-Unis parce que des collègues américains souhaitaient soustraire certains français à l'oppression allemande. Mais je ne pouvais pas accepter cette invitation, à cause de ma famille et parce que mon père vieillissait.

Après la guerre, j'ai été invité pour un séjour à l'université Harvard, du début de février jusqu'à la fin de mai 1948. Mais, auparavant, en janvier de la même année, André Weil m'avait invité à Chicago. Ainsi donc, avant mon départ, j'avais dû apprendre un peu d'anglais, parce que pour pouvoir donner des conférences dans cette langue, je devais en connaître quelques mots ! Pour mes premières conférences, j'étais obligé d'en écrire le texte en anglais, par avance. Par la suite, je me suis contenté de rédiger des résumés. Lorsque je suis arrivé à New York, en décembre 1947, Samuel Eilenberg m'a accueilli à l'aéroport. C'était ma première rencontre avec « Sammy ». Ce premier séjour aux États-Unis a été très important pour moi. J'ai beaucoup appris.

Les débuts de Bourbaki

Vous avez fait la connaissance d'André Weil quand vous étudiiez ensemble à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm à Paris.

Oui. Nous y étions à la même époque, mais il y était entré un an avant moi en 1922, à l'âge de 16 ans.

Vous-même et Weil vous trouviez à l'École normale en même temps que des gens comme Jean Dieudonné, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Leray...

Dieudonné y est entré un an après moi et je n'étais plus à l'École normale lorsque Leray y est entré : il est de la même promotion que Chevalley (1926).

C'était là quelques-uns de ceux qui devaient par la suite former le groupe Bourbaki. Y avait-il quelque chose à l'École normale, ou dans vos antécédents communs, qui vous a amenés à fonder Bourbaki ?

Après la première guerre mondiale, il n'y avait pas beaucoup de scientifiques (je veux dire de bons scientifiques) en France, parce que la plupart avaient été tués. Nous étions la première génération à venir après la guerre. Devant nous, il y avait un grand vide et il était nécessaire de tout renouveler. Certains de mes amis sont partis pour l'étranger, et notamment pour l'Allemagne, afin de voir ce qui s'y faisait. Ce fut là le début d'un renouveau mathématique. Ce renouveau a été dû à des gens tels que Weil, Chevalley, de Possel... Les mêmes personnes, répondant à l'initiative d'André Weil, se sont réunies pour former le groupe Bourbaki. Chez Bourbaki, j'ai beaucoup appris. Presque tout ce que je sais en mathématiques, je l'ai appris avec et au sein du groupe Bourbaki.

Leray ne faisait pas partie de Bourbaki.

Pas exactement. En réalité, Leray avait fait partie du tout premier groupe, au début : ce groupe s'est réuni entre décembre 1934 et juin 1935. A cette époque, nous songions à la rédaction d'un traité d'analyse. Mais deux des membres de ce premier groupe l'ont quitté avant le début de l'été. Ils ne voulaient pas continuer. Leray était l'un de ceux-là. Le groupe plus définitif s'est formé en juillet 1935 lors du « congrès de fondation » de Besse-en-Chandesse (département du Puy-de-Dôme) et c'est ce groupe-là qui a arrêté la liste des matières à traiter.

Ce sont les comptes rendus des réunions tenues essentiellement dans la première moitié de 1935, qui étaient restés dans votre appartement de Strasbourg ?

Oui.

Qui rédigeait ces comptes rendus ?

Ils étaient alors toujours rédigés par Delsarte. Comme il avait un poste à l'université de Nancy, il pouvait les faire dactylographier par sa secrétaire. Bien sûr, la dactylographie n'était pas à l'époque une affaire aussi simple qu'aujourd'hui.

Lors de ces premières rencontres, y avait-il quelqu'un qui dominait le groupe ?

Ma réponse est « André Weil », mais vous devez comprendre que la plupart des membres de Bourbaki avaient de fortes personnalités. Nous étions souvent en désaccord, nous avons eu bien des discussions animées, mais nous sommes demeurés de bons amis. Un « rédacteur » était nommé pour chaque sujet auquel nous décidions de nous intéresser. Par la suite, sa « rédaction » était lue à haute voix et soumise à un examen minutieux. Le rédacteur suivant recevait les directives appropriées et ainsi de suite. Pour chaque chapitre, il pouvait y avoir jusqu'à neuf rédactions. Mais, à la fin, tout le monde était fatigué. Et Dieudonné disait alors : « C'est maintenant terminé. C'est moi qui me chargerai de la rédaction définitive ». Ce qu'il faisait. En somme, même quand il avait semblé impossible d'aboutir à un accord complet, une certaine entente finissait par se dégager. Mais cela prenait du temps. Ce n'était peut-être pas la meilleure façon de faire un travail d'équipe, mais c'est la façon dont nous nous y sommes pris pour mener nos travaux.

Pensez-vous que le style Bourbaki domine en France à l'heure actuelle ?

Je ne crois pas. Vous savez, il s'agit d'un mode de présentation de certaines théories mathématiques mais qui ne prétend pas être la seule façon de faire des mathématiques. D'ailleurs, chaque membre de Bourbaki poursuivait toujours ses travaux personnels, chacun à sa façon. Quand je travaillais à mes propres articles, je n'écrivais pas de la même façon que lorsque je rédigeais pour Bourbaki.

Et pourtant Bourbaki a exercé une influence énorme sur les mathématiques françaises.

Pas seulement en France. Certains grands mathématiciens étrangers en ont également subi l'influence. Par exemple, Sir Michael Atiyah a accompli un travail magnifique et sa familiarité avec le mode de pensée de Bourbaki l'a certainement aidé. Aujourd'hui, les choses sont totalement différentes. Je ne pense pas que Bourbaki exerce une influence importante sur les mathématiciens d'aujourd'hui. Mais il a certainement joué un rôle important dans l'évolution des mathématiques pendant plusieurs décennies.

Vous êtes donc en train de dire que l'influence de Bourbaki n'est plus aussi forte qu'elle a pu l'être.

Ce que Bourbaki devait faire a été fait. Bourbaki n'est pas éternel. Mais le Séminaire Bourbaki existe toujours et certains membres actuels de Bourbaki en assurent l'organisation. Il m'est difficile d'en mesurer l'influence parce que je n'ai pas de vision d'ensemble sur l'état actuel des mathématiques.

Vos travaux concernent plusieurs domaines des mathématiques. C'est là chose inhabituelle parce qu'aujourd'hui, les gens sont beaucoup plus spécialisés. Vous semblez vous être intéressé à la plupart des domaines des mathématiques pures.

Je ne peux pas être d'accord avec ce que vous venez de dire. Je me suis intéressé à divers domaines, certes, par exemple à l'algèbre homologique, à cause d'Eilenberg. Ensemble, nous avons découvert la généralité de cette notion. Comme nous devions donner un titre à notre livre, nous nous sommes dit : « C'est de l'algèbre, mais c'est de **l'algèbre homologique**. Nous intitulerons donc notre livre *Homological Algebra* ». Ce qui me surprend, c'est que ce livre continue à être réédité et à se vendre. Je crois que c'est assez remarquable pour un ouvrage publié pour la première fois il y a 43 ans. La totalité de ce livre a été rédigé par Sammy — je l'appelle « Sammy » parce que c'est ainsi que tout le monde l'appelait. Sammy a tout rédigé : je n'ai rien écrit. Bien sûr, nous en avons discuté ensemble, mais ensuite, c'est Sammy qui rédigeait. Et moi, je me chargeais de corriger les fautes d'orthographe... en anglais ! Je ne sais pas bien l'anglais, mais je connais l'orthographe. C'était très facile et très agréable de travailler et de discuter avec Sammy.

Enseigner à l'École normale, et apprendre les mathématiques, là comme ailleurs

Comment choisissiez-vous les problèmes sur lesquels vous travailliez ?

Ils venaient d'eux-mêmes. Mais il y aussi des personnes qui m'ont amené à m'intéresser à certaines questions. Ce fut le cas, par exemple, de Marcel Brelot qui était un grand spécialiste de la théorie du potentiel. Il m'a posé des questions et des problèmes et je suis parvenu à les résoudre. C'était pendant la guerre.

Après la guerre, lorsque j'ai commencé à donner mon Séminaire à l'École normale, Jean-Pierre Serre me posait un très grand nombre de questions. Ses questions m'ont amené à découvrir de nouveaux horizons. Ce fut très important pour moi d'avoir connu Serre. Pendant qu'il travaillait sur sa thèse, il ne cessait de me poser des questions qui me poussaient à réfléchir. J'ai beaucoup appris de mes étudiants à l'École normale. Plusieurs ont fait leur thèse « sous ma direction » ; c'est le terme que l'on emploie d'habitude, mais, dans mon cas, cette « direction » se limitait à comprendre ce qu'ils avaient à l'esprit. Ainsi ai-je pu collaborer avec Roger Godement, qui fut l'un de mes étudiants à l'École normale. Il y était entré en 1940, lorsque j'ai commencé à y enseigner. Jean-Louis Koszul faisait partie de la même promotion que Godement. Par la suite, il devait aussi rédiger sa thèse « sous ma direction ». Mais il savait ce qu'il voulait faire. Certes, ces étudiants avaient besoin d'aide, mais ils avaient leurs propres idées. Chacun avait sa propre personnalité et il était important de la respecter, d'aider chacun à découvrir cette personnalité ; je ne devais surtout pas essayer de leur imposer les idées de quelqu'un d'autre.

Lorsque j'enseignais aux étudiants de première année, je leur demandais de résoudre certains problèmes à la maison puis je corrigeais leurs travaux. Mais je leur demandais aussi de venir au tableau et je les aidais ainsi à découvrir diverses théories mathématiques.

Vous pratiquiez donc un enseignement très individualisé. Vous travailliez avec chaque étudiant séparément.

Oui, de cette façon, je parvenais à voir ce qu'ils étaient capables de comprendre. Pour les élèves de deuxième année, je donnais un cours magistral sur un sujet qui changeait tous les ans. En troisième année, il y avait la préparation à l'agrégation. Les étudiants devaient faire des exposés et subir les critiques de leurs camarades, ainsi que les miennes, bien sûr. Les étudiants de quatrième année devaient choisir un domaine de recherche. J'avais des discussions avec chacun d'entre eux. En première année, les classes comptaient environ une vingtaine d'étudiants. Mais, en deuxième année, il n'y en avait pas autant, parce que si certains avaient choisi les mathématiques, d'autres avaient choisi la physique. Ainsi donc, ils n'étaient guère plus de dix ou douze en deuxième année et autant en troisième année.

Y avait-il des différences entre l'enseignement que vous aviez reçu quand vous étiez vous-même étudiant à l'École normale et la façon dont vous enseigniez quand vous y étiez devenu professeur ?

Oh, oui. Il était indispensable de changer ce mode d'enseignement ! Je l'ai changé.

Parmi vos professeurs, y en avait-il un dont le style d'enseignement vous plaisait plus particulièrement ?

J'aimais certains professeurs, oui, bien sûr. Gaston Julia, par exemple, ou mon père, qui a donné des cours à l'École normale, et dont je fus ainsi l'étudiant. Les élèves de l'École normale devaient également assister aux cours de licence qui étaient dispensés à la Sorbonne.

Quant à votre Séminaire, quel rapport avait-il avec votre enseignement ?

Je voulais amener plusieurs de mes étudiants de quatrième année à s'intéresser à certains sujets, notamment la topologie. Très tôt, Jean-Pierre Serre m'a dit : « Mais il faudrait que les exposés soient rédigés ! » J'ai donc rédigé les exposés ou parfois je demandais à l'un des participants de le faire. Au début, je n'avais pas de projet à long terme, mais, d'une façon ou d'une autre, un processus irréversible s'est enclenché, d'où émergea le « Séminaire Cartan ». Chaque année, le nombre de personnes qui assistaient au Séminaire ne cessait d'augmenter, et non pas seulement des étudiants, mais aussi des mathématiciens, français ou étrangers. Bien sûr, il n'existait pas d'autre Séminaire de ce genre à l'époque à Paris. Je dactylographiais moi-même les exposés, mais, par la suite, une secrétaire de l'Institut Henri Poincaré s'est chargée de ce travail. Et puis, de fil en aiguille, il est même arrivé que je confie à d'autres personnes la responsabilité du Séminaire pendant plusieurs mois. C'est ce qui s'est produit, par exemple, lorsque Grothendieck a passé la moitié d'une année à expliquer et développer ses idées.

Quel souvenir Grothendieck vous a-t-il laissé ?

C'est un homme exceptionnel, bien sûr. Il a exercé une influence considérable sur certaines parties des mathématiques, notamment la géométrie algébrique. Son approche était novatrice, sans être tout à fait nouvelle, parce que par exemple, au début, il a subi lui-même l'influence de Serre. Grothendieck est un homme très particulier, vous savez. A l'heure qu'il est, personne ne sait ni où il se trouve ni ce qu'il fait.

Quel est le mathématicien que vous admirez le plus ?

Je ne veux pas répondre à cette question. J'ai admiré plusieurs mathématiciens quand j'étais capable de faire des mathématiques et de les comprendre. Aujourd'hui, c'est autre chose...

Quelle est selon vous votre réalisation la plus importante en mathématiques ?

Je laisse à d'autres le soin d'en décider.

Mais il y avait peut-être certaines choses que vous aimiez tout particulièrement ?

Le lien entre la topologie algébrique et les fonctions analytiques. J'ai découvert là des théorèmes généraux qui jouent un rôle important. Mais, pour ceci, Serre m'a aidé. Au fait, voilà un exemple de mathématicien que j'admire sans réserve : Serre.

Vous avez travaillé dans plusieurs domaines des mathématiques. Vous sentez-vous autant à l'aise en analyse, en algèbre, en géométrie... ?

En géométrie, non, pas exactement la géométrie : la topologie plutôt. Mais je pouvais saisir leurs relations mutuelles. Un jour, je me suis rendu compte que des notions de topologie, et en particulier la théorie des faisceaux, pouvaient s'appliquer aux fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. C'était très important. On peut se servir de résultats de topologie pour obtenir des résultats qui s'appliquent aux fonctions analytiques. Je pense que c'est intéressant.

Vous avez toujours travaillé dans le domaine des mathématiques pures et, de nos jours, les mathématiques appliquées ont une grande importance. Qu'en pensez-vous ?

Vous savez, il est bien difficile de prévoir quelles sont les parties des mathématiques qui sont applicables — non pas appliquées mais « applicables » —. Lorsque j'ai été invité à Münster pour la première fois, en 1931, mes hôtes avaient organisé un grand dîner à la fin de mon séjour et, à cette occasion, une discussion animée eut lieu. Il y avait là un philosophe qui nous parlait des parties des mathématiques qui peuvent être appliquées. « De toute façon », a dit quelqu'un, « cela ne saurait être le cas des fonctions analytiques de plusieurs variables ! » En réalité, c'est là une partie des mathématiques dont on a pu tirer des applications par la suite. C'est vous dire combien il est difficile de prévoir ce genre de choses. Pourquoi les mathématiques peuvent-elles s'appliquer à autre chose, à la physique par exemple ? Ça, c'est un mystère.

La politique et les droits de l'homme

Vous avez œuvré dans le domaine de la politique. Pouvez-vous nous en dire quelque chose ?

Ce serait s'éloigner du domaine des mathématiques !

N'y aurait-il pas de rapport entre la politique et les mathématiques ?

Peut-être y en a-t-il... Vous voyez, un mathématicien pense : « Quelle est la question ? De quoi s'agit-il ? Pourquoi en est-il ainsi et non pas autrement ? Quelle en est la raison ? Quelles conséquences logiques tirer de tout cela ? » J'applique ce mode de raisonnement à la politique. J'ai tenté d'analyser des situations et d'en tirer des conséquences logiques. C'est ainsi que je suis devenu un fédéraliste européen parce que j'ai compris qu'il n'y avait pas d'autre solution. Pour moi, ce qui se passe maintenant démontre la nécessité du fédéralisme, pourvu que l'on comprenne bien le sens du terme « fédéralisme ». Certaines personnes n'en comprennent pas bien le sens. Car, en France, tout se décide au sommet : personne, à l'exception du gouvernement, n'est responsable de quoi que ce soit. Voyez ce qui se passe aujourd'hui au Kosovo. Vous entendez les gens dire : « Ah, l'Europe devrait adopter une politique étrangère commune ». Ce ne sont là que de vaines paroles : comment pourrait-on jamais y parvenir sans une autorité qui puisse prendre des décisions et les mettre en œuvre, tout en demeurant sous un contrôle démocratique ? On ne réalisera rien, à moins qu'une Constitution européenne ne donne naissance à une autorité fédérale qui serait pleinement responsable dans des domaines d'intérêt commun explicitement définis. Bien entendu, cette autorité fédérale ne devrait en rien empiéter sur les domaines de compétence des États, régions ou communes.

Je ne crois en tout cela que parce que je suis un mathématicien qui réfléchit à la situation actuelle et aux conséquences logiques de cette situation.

Diriez-vous que le fait d'avoir vécu à Strasbourg et d'être passé par toutes les expériences qui ont été les vôtres pendant la guerre peut vous avoir influencé et amené à adopter ces points de vue ?

Oui, mais je n'étais pas encore un fédéraliste à la fin de la deuxième guerre mondiale. Je ne le suis devenu que quelques années plus tard.

A propos des élections européennes, les premières ont eu lieu en 1979. Il avait été très difficile d'obtenir ces élections. Le premier Parlement européen ne disposait pas de grands pouvoirs. Après ces élections, je me suis rendu à Strasbourg pour assister à chacune des sessions du Parlement européen. Cinq ans plus tard, lors des élections qui ont eu lieu en 1984, j'ai été candidat (en France, bien entendu). En fait, j'étais en tête de liste. Nous n'étions soutenus par aucun parti ; notre liste était intitulée : « Pour les États-Unis d'Europe ». Malheureusement, lorsque en 1979 le Parlement français avait eu à choisir un mode de scrutin pour les élections européennes, il s'était prononcé en faveur de listes nationales, de sorte que les représentants français furent choisis par les partis politiques et non par les électeurs de base. Par ailleurs, il ne faut pas oublier que de telles campagnes électorales coûtent des sommes énormes, de sorte que seuls les partis politiques constitués (et qui sont officiellement subventionnés par l'État) peuvent se permettre d'y prendre part.

L'Académie des sciences de New York vous a décerné le Pagels Award. Pourquoi vous l'a-t-elle accordé ?

Parce que je suis venu en aide à des dissidents. Je me suis impliqué dans la défense de certains dissidents, surtout de collègues mathématiciens, en Union soviétique et dans d'autres pays. Un comité connu sous le nom de « Comité des mathématiciens » a été formé pour défendre les mathématiciens dissidents. J'ai pris une part active à ce Comité. Le plus célèbre mathématicien dissident de l'époque était Leonid Pliouchtch. Il était enfermé dans un hôpital psychiatrique « spécial ». L'affaire remonte à 1973 et c'est Andrei Sakharov qui avait attiré notre attention sur son cas. Nous avons commencé par des visites à l'ambassade soviétique à Paris, chose encore possible à l'époque mais qui devint bientôt impossible. Lors du congrès des mathématiciens qui se tint en 1974 à Vancouver, nous avons essayé de mobiliser les participants pour la défense de Pliouchtch. Nous les avons invités à signer une pétition et nous avons réuni un millier de signatures de personnes qui réclamaient sa libération. On m'a alors demandé d'envoyer un télégramme aux autorités soviétiques. En conséquence, lorsque nous sommes revenus à Paris, nous avons créé ce Comité des mathématiciens dont je vous ai parlé et nous avons tenu plusieurs réunions au siège de la Ligue des Droits de l'Homme à Paris. Nous avons organisé une grande manifestation dans la salle de la Mutualité à Paris et des milliers de personnes y ont participé.

Finalement, le gouvernement soviétique a décidé de libérer Pliouchtch en janvier 1976. Nous avions remporté là une grande victoire.

Par la suite, nous nous sommes intéressés à d'autres personnes. Le mathématicien uruguayen Luis Massera, qui était communiste, était une victime de la dictature militaire qui gouvernait son pays. Le Comité des mathématiciens — où l'on retrouvait des gens comme Laurent Schwartz — s'est occupé de son cas. Aujourd'hui, nous disposons d'un autre comité très actif, le « Comité de défense des hommes de science » (CODHOS), créé par l'Académie des sciences de Paris. Son président actuel est François Jacob, prix Nobel de médecine. Des comités analogues existent en Suède, en Grande-Bretagne, en Italie et aux États-Unis et ils forment maintenant un réseau dont toutes les composantes œuvrent la main dans la main en poursuivant les mêmes objectifs.

Notice biographique

Henri Cartan est l'un des plus grands mathématiciens du vingtième siècle. Il a exercé une influence profonde par ses recherches, qui ont couvert des domaines très variés, de même que par son enseignement, ses étudiants et le réputé Séminaire Cartan. Il est l'un des fondateurs du groupe Bourbaki. Son livre, *Homological Algebra*, qui a été conçu en collaboration avec Samuel Eilenberg et a paru pour la première fois en 1956, demeure un ouvrage de référence incontournable.

Fils d'Elie Cartan, lui-même considéré comme le fondateur de la géométrie différentielle moderne, Henri Cartan est né le 8 juillet 1904, à Nancy. Il a étudié à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm et il a passé l'agrégation en 1926 ; puis il a obtenu un Doctorat ès sciences mathématiques de la faculté des sciences de Paris en 1928. Après avoir occupé des postes d'enseignant à Caen, à Lille et à Strasbourg, il est revenu à Paris où il a été chargé de l'enseignement des mathématiques à l'École normale de 1940 à 1965 (à l'exception d'un séjour à l'université de Strasbourg entre 1945 et 1947). Il a été nommé professeur à l'université de Paris-Sud (Orsay) en 1969. Il a pris sa retraite de l'enseignement en 1975.

Henri Cartan est membre de l'Académie des sciences de Paris ainsi que de douze académies étrangères en Europe, aux États-Unis et au Japon. Plusieurs universités lui ont accordé des doctorats honoris causa. Il a également reçu le prix Wolf de mathématiques en 1980.

Compte rendu de la réunion Bourbaki du 14 janvier 1935

Présents : André Weil, Jean Delsarte, Szolem Mandelbrojt, René de Possel, Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Leray.

Sur une question de Delsarte, on fixe la composition du comité rédacteur. Après un rapide échange d'idées on établit une liste <u>maximum</u> de neuf membres, qui sont : Weil, Delsarte, Mandelbrojt, Dubreil, Dieudonné, de Possel, Cartan, Chevalley, Leray.

Il est entendu que la liste définitive, extraite de la précédente, sera composée des noms des membres présents à la réunion plénière d'août ou septembre prochain, réunion dans laquelle sera dressé le plan définitif et précis du traité.

Il est entendu aussi que le comité rédacteur a dans la plus large mesure, la faculté de s'adjoindre tel ou tel spécialiste qualifié pour aider à la rédaction de fascicules particulièrement techniques. (A ce propos le nom de Coulomb est prononcé, au sujet de fascicule concernant les fonctions spéciales).

La parole est ensuite donnée à Delsarte qui indique brièvement ce que Dubreil et lui désirent particulièrement voir figurer dans le traité, à savoir : de l'algèbre moderne ; à propos des équations intégrales, des indications étendues sur l'espace de Hilbert ; la théorie des équations aux dérivées partielles dans ses progrès les plus récents et enfin une large part faite aux fonctions spéciales.

L'énoncé de ces desiderata ne suscite aucun commentaire.

La parole est alors donnée à Mandelbrojt qui énonce assez péniblement un principe de généralité qu'il désire voir adopter. En bref, il s'agit de convenir qu'en aucun cas on n'exposera, dans le cours même de la rédaction et dans le but d'énoncer une proposition déterminée avec son maximum de généralité, des théories trop particulières ou trop spéciales demandant des développements étendus. L'idéal, pour l'orateur, serait que toutes les théories générales et abstraites nécessaires, soient présentées dès le début du traité. C'est en somme l'idée du paquet abstrait initial qui a longuement été évoquée dans la précédente réunion. L'exemple indiqué par Mandelbrojt est celui du théorème de Cauchy, perfectionné par Goursat, perfectionné par X ; etc. Tout le monde est d'accord sur la justesse du principe précité.

Mandelbrojt dit ensuite qu'il lui semble opportun de s'occuper le moins possible des fonctions entières ; à ce moment le désordre naît dans l'assemblée, et très vite un certain nombre de questions sont posées, dont la plupart d'ailleurs, restent sans réponse : fera-t-on le théorème de Picard, fera-t-on la fonction modulaire, fera-t-on la représentation conforme ; fera-t-on les fonctions elliptiques, les fonctions abéliennes, les fonctions algébriques, les produits infinis, etc.

Après quelque temps le calme renaît, Weil prend la parole et expose les idées suivantes.

Il faut faire un traité utile à tous : aux chercheurs (patentés ou non), aux « trouveurs », aux candidats aux fonctions de l'enseignement public, aux physiciens et à tous les techniciens. Comme criterium, il faut qu'on puisse, sans mercantilisme, conseiller la fréquentation du traité, ou tout au moins de ses fascicules essentiels, à un étudiant obligé de travailler seul, présumé d'ailleurs d'intelligence médiocre.

Image (12cm/9cm)

Congrès de Besse en chandesse, juillet 1935,
H. Cartan, R. de Possel, J. Dieudonné, A. Weil, X (chauffeur),
A. Mirlesse, C. Chevalley, S. Mandelbrojt.

Il faut ôter de l'esprit d'un certain nombre de mathématiciens et de presque tous les physiciens, un certain préjugé de rigueur. Beaucoup de physiciens font des calculs d'intégration, de sommation de série, calculs qui leur donnent d'ailleurs des résultats numériques exacts, avec l'intime conviction qu'ils font à tout instant des hérésies mathématiques. Cela provient de ce que, dans la plupart des traités classiques, les théorèmes fondamentaux : moyens de calculs, théorèmes d'existence, etc. sont présentés avec un luxe de précautions assez impressionnant ; les hypothèses demandées sont dans bien des cas surabondantes et il y aura lieu, dans bien des cas, de revenir sur tous ces théorèmes. Il importe donc de donner aux usagers une collection d'outils, ces outils devant être aussi robustes et aussi universels que possible. C'est le principe d'utilité et de commodité qui doit servir de guide. Il va sans dire que le comité est seul juge de ce qui est utile aux gens et de ce qui leur est commode. Comme le dit Cartan dans une formule saisissante, c'est le principe du « despotisme éclairé ».

Weil ajoute, toujours dans le même ordre d'idées, qu'en ce qui concerne les fonctions spéciales, il faut se garder de tomber dans la monographie. En principe elles devront être exposées, beaucoup plus en application des théorèmes et des principes généraux, qu'en elles-mêmes.

Tout ce qui précède a naturellement été dit de façon plus touffue. Signalons qu'en passant on a décidé que : la véritable intégration, l'intégration « tout court » serait celle de Lebesgue ; il y a à côté, l'intégration de Riemann qui marche pour les fonctions continues, mais qui se détraque souvent.

Il a été dit aussi à propos des séries de Fourier, que, pour nous, le théorème essentiel sera le théorème de Fischer-Riesz ; qu'elles convergent quelquefois autrement qu'en moyenne, cela sera regardé comme un peu secondaire (ce n'est pas l'avis de Mandelbrojt).

On parle ensuite du théorème de Stokes. Il paraît décidé qu'on fera les formes différentielles extérieures et donc le théorème de Stokes général. Il s'agit ensuite de savoir si ce théorème est local ou global. Chevalley et Delsarte sont du premier avis. Weil ne sait à quoi se résoudre. Cartan change d'avis deux ou trois fois. Aucune décision n'est prise. En même temps on parle de topologie, de méthodes simpliciales, tout le monde les juge nécessaires mais peu esthétiques. On parle aussi de linéarisation, de différentiation. Chevalley a des idées extraordinaires, très généralement improuvées. Enfin, Dieudonné étant présent, on reparle des théorèmes d'existence, en particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz. Weil trouve les hypothèses demandées, anti-naturelles ; Leray critique vivement la démonstration donnée par Goursat et attire l'attention sur l'intérêt qu'il y aurait à donner avant tous les théorèmes de ce type, théorèmes maintenant classiques, des théorèmes généraux, de caractère topologique, qui sont des théorèmes d'existence purs et non des théorèmes de calcul, mais qui permettent de prévoir quand il est possible d'énoncer un théorème de calcul.

Delsarte termine en critiquant la désinvolture avec laquelle chacun est arrivé à la présente séance. Il faut préparer ce qui a été demandé et ne pas se fier à ses facultés d'improvisation, si brillantes qu'on les estime.

Chacun doit préparer et envoyer à Weil, trois jours au moins avant la prochaine réunion, un plan complet soigneusement rédigé. Weil décantera ensuite.

Tout le monde approuve ces fortes paroles, il est même entendu que de graves sanctions pénaliseront les contrevenants.

MATHÉMATIQUES

Nouveaux résultats de transcendance de réels à développement non aléatoire

Jean-Paul ALLOUCHE (*CNRS, LRI, université d'Orsay*)

Introduction

Le développement d'un nombre algébrique irrationnel dans une base entière semble « au hasard ». Il semble que cela ait été formulé pour la première fois par Borel [11]. De manière plus formelle on conjecture généralement le résultat suivant.

Conjecture 1. — *La suite des chiffres du développement en base entière b d'un nombre irrationnel algébrique positif est une suite* normale.

Rappelons que cela signifie que chaque chiffre apparaît avec la fréquence $1/b$, chaque couple de chiffres avec la fréquence $1/b^2$, ..., chaque blocs de k chiffres avec la fréquence $1/b^k$ ... Pour donner une idée du peu de résultats connus dans la direction de cette conjecture, indiquons qu'on ne sait même pas si le développement décimal de $\sqrt{2} = 1,4142...$ contient une infinité de chiffres 4 par exemple.

Cet aspect « aléatoire » de la représentation d'un nombre algébrique « non trivial » se retrouve dans son développement en fraction continue. Par exemple les quotients partiels d'un tel nombre peuvent-ils être bornés ? Il semble que ce soit Khintchine qui ait posé le premier cette question (voir [26] cité dans [48]). Nous rappelons que le développement en fraction continue (ou plus correctement en *fraction continuée*) d'un réel x s'écrit

$$x = [a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

et que les a_j, appelés les *quotients partiels* du nombre x (ou de la fraction continue du nombre x), vérifient $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ pour $j \geqslant 1$. On admet généralement la conjecture suivante.

Conjecture 2. — *Les quotients partiels du développement en fraction continue d'un nombre réel algébrique positif qui n'est ni rationnel ni quadratique ne sont pas bornés.*

Rappelons qu'on sait depuis Lagrange qu'un nombre réel est quadratique si et seulement si la suite de ses quotients partiels est ultimement périodique (c'est-à-dire périodique à partir d'un certain rang), et qu'on ne connaît explicitement *aucun* développement en fraction continue de nombre réel algébrique de degré supérieur ou égal à 3.

Nous nous proposons de résumer ici des travaux récents qui donnent des résultats très partiels sur ces conjectures, et de montrer que, bien qu'obtenus de manière indépendante, ces résultats correspondent en fait à une même « philosophie ».

Nombres dont le développement dans une base entière n'est pas *normal*

Définition 1. — *On appelle* complexité *(ou* complexité par blocs*) d'une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *à valeurs dans un ensemble fini* $\mathcal{A}$ *la fonction* $k \to p(k)$*, où, pour chaque entier* $k \geqslant 1$*, la quantité* $p(k)$ *est le nombre de blocs (distincts) de longueur* k *qui apparaissent dans la suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *:*

$$p(k) = \mathrm{Card}\{(a_0, \dots, a_{k-1}) \in \mathcal{A}^k;\ \exists j \geqslant 0,\ \forall i \in [0, k-1],\ u_{j+i} = a_i\}$$

Remarque 1. —

– Il est clair que, quel que soit k, on a $1 \leqslant p(k) \leqslant (\mathrm{Card}\ \mathcal{A})^k$.

– On peut caractériser les suites ultimement périodiques par leur complexité [33, p. 830]. Il est facile de voir que la fonction p est croissante. Donc soit elle est strictement croissante et, par conséquent, quel que soit k, on a $p(k) \geqslant p(1) + k - 1$, d'où $p(k) \geqslant k + 1$ si l'alphabet a au moins deux éléments, soit il existe un entier k pour lequel $p(k) = p(k + 1)$, et on se convainc aisément que p est constante à partir de l'entier k (tout mot de longueur k admet un unique prolongement à droite en un mot de longueur $k+1$). Ainsi, s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $p(k) \leqslant k$, alors la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est ultimement périodique et donc à complexité ultimement constante (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

– Il résulte de ce qui précède que les suites les plus « simples » non ultimement périodiques vérifient $p(k) \geqslant k + 1$. Il existe des suites de complexité exactement $k+1$. Elles sont nécessairement définies sur un alphabet binaire, et Morse et Hedlund [34] ont montré que ce sont exactement les suites qui codent les trajectoires de billard sur un carré avec une pente initiale irrationnelle, en convenant de coder par deux lettres différentes les rebonds sur un côté vertical et ceux sur un côté horizontal. Ces suites sont appelées suites *sturmiennes*, voir par exemple [34, 8].

– Il est clair qu'une suite normale sur l'alphabet fini $\mathcal{A}$ est de complexité maximale, c'est-à-dire $(\mathrm{Card}\ \mathcal{A})^k$. D'une certaine manière cette observation et la deuxième remarque ci-dessus justifient le choix du mot « complexité ». Ce terme semble avoir été introduit pour la première fois par Ehrenfeucht, Lee et Rozenberg [20] en 1975. Pour d'autres résultats sur la complexité par blocs et des variantes de cette notion le lecteur pourra consulter les survols [4] et [22].

Nous pouvons formuler en termes de complexité une nouvelle conjecture, plus faible que la conjecture 1.

Conjecture 3. — *Si la complexité du développement en base entière* b *d'un nombre réel positif vérifie* $\forall k \geqslant 0$, $p(k) < b^k$*, alors ce nombre est rationnel ou transcendant.*

Nous pouvons même formuler une conjecture encore plus faible.

Conjecture 4. — *Si la complexité du développement en base entière b d'un nombre réel positif vérifie $p(k) = O(k)$, alors ce nombre est rationnel ou transcendant.*

Un premier théorème

En 1997, Ferenczi et Mauduit [23] ont démontré le théorème suivant.

Théorème 1. — *Soit x un nombre réel appartenant à $[0, 1]$, dont le développement en base $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ ait la propriété suivante : pour tout $n \geqslant 1$, il existe des mots U_n, V_n, V'_n sur l'alphabet $\{0, 1, \ldots, b-1\}$ (c'est-à-dire des blocs de chiffres en base b) tels que, en notant $|V|$ la longueur (c'est-à-dire le nombre de chiffres) du mot V, les cinq conditions suivantes soient vérifiées*

– *le développement en base b du nombre x est de la forme $x = 0, U_n V_n V_n V'_n \ldots$*
– *V'_n est un préfixe de V_n,*
– *$|V_n|$ tend vers l'infini,*
– $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{|V'_n|}{|V_n|} > 0$,
– $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{|U_n|}{|V_n|} < \infty$.

Alors le nombre x est rationnel ou transcendant.

La preuve est une astucieuse mais simple (moins d'une page, voir ci-dessous) reformulation combinatoire du théorème de Ridout (contrairement à ce qu'on pourrait penser, prononcer *Raille-da-oute*). Comme l'on sait, le théorème de Ridout [43], voir aussi [30, p. 147] est une amélioration du théorème de Roth [45] lorsque l'on peut contrôler les facteurs premiers des numérateurs et dénominateurs des approximations rationnelles d'un nombre donné.

Théorème 2 (Ridout). — *Soit $x \neq 0$ un nombre réel algébrique positif. Soient ρ, c_1, c_2, c_3 des constantes strictement positives, et soient λ et μ tels que $0 \leqslant \lambda, \mu \leqslant 1$. Soient $r', r'' \geqslant 0$ des entiers, et soit $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{r'+r''}\}$ un ensemble fini de nombres premiers distincts. Supposons qu'il existe une infinité de fractions irréductibles p_n/q_n telles que*

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| \leqslant c_1 \left|q_n\right|^{-\rho}.$$

Supposons de plus que p_n et q_n soient non nuls et s'écrivent sous la forme

$$p_n = p'_n \prod_{j=1}^{r'} \omega_j^{e_j}, \qquad q_n = q'_n \prod_{j=r'+1}^{r'+r''} \omega_j^{e_j},$$

où les e_i sont des entiers positifs qui peuvent dépendre de n, et les (p'_n) et (q'_n) des entiers strictement positifs qui peuvent dépendre de n. Supposons enfin que

$$0 < |p'_n| \leqslant c_2 \left|p_n\right|^{\lambda}, \qquad 0 < |q'_n| \leqslant c_3 \left|q_n\right|^{\mu}.$$

pour tout $n \geqslant 0$. Alors

$$\rho \leqslant \lambda + \mu.$$

Notons que les mêmes hypothèses sans l'irréductibilité des fractions p_n/q_n (c'est-à-dire il existe une infinité de fractions p_n/q_n mais elles ne sont pas nécessairement irréductibles) entraînent la même conclusion.

Avant de donner la preuve du théorème 1 ci-dessus, indiquons la « philosophie » qui la sous-tend. La condition sur U_n, V_n et V'_n signifie qu'on a une infinité de « presque cubes » $(V_n V_n V'_n)$ dans le développement du nombre x en base b (un « cube » serait $V_n V_n V_n$, et le « presque » est justifié par la condition avec une $\liminf$ traduisant que V'_n est un préfixe « significatif » du mot V_n), et qu'ils « n'apparaissent pas trop loin » à droite de la virgule. L'idée est alors d'approximer le nombre

$$x = 0, U_n V_n V_n V'_n \ldots$$

par le nombre rationnel de développement ultimement périodique

$$x_n = 0, U_n V_n V_n V_n V_n \ldots$$

Pour définir x_n on a juste eu besoin de U_n et V_n, et on a « périodisé », de sorte que, au moins en apparence, la précision de l'approximation du nombre x par x_n est

$$\begin{array}{llllll} x & = 0, & U_n & \underbrace{V_n} & | & \ldots \\ x_n & = 0, & U_n & \underbrace{V_n} & | & \underbrace{V_n}\ \underbrace{V_n} \ldots \end{array}$$

alors qu'en fait l'approximation est bien meilleure (ne pas oublier que V'_n est un préfixe de V_n)

$$\begin{array}{lllllll} x & = 0, & U_n & \underbrace{V_n} & \underbrace{V_n} & \underbrace{V'_n\,|} & \ldots \\ x_n & = 0, & U_n & \underbrace{V_n} & \underbrace{V_n} & \underbrace{V'_n\,|} & \ldots \end{array}$$

L'approximation est alors « trop bonne » et le nombre x est soit rationnel soit transcendant.

Remarque 2. — Si les mots U_n sont tous vides, autrement dit si le développement du nombre x commence par des presque cubes arbitrairement grands, le théorème de Roth [45] suffit. Cela m'a été indiqué indépendamment par Shallit et par Zamboni ; les auteurs de [23] l'avaient peut-être remarqué, mais ils n'y font pas allusion dans leur article.

Démonstration du théorème 1

Posons $r_n = |U_n|$, $s_n = |V_n|$, et $s'_n = |V'_n|$. Il existe donc deux nombres réels α et β strictement positifs tels que

$$\limsup_{n\to\infty} r_n/s_n = \alpha \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} s'_n/s_n = \beta.$$

Soit x_n le nombre rationnel dont le développement en base b est donné par

$$x_n = 0, U_n V_n V_n V_n \cdots .$$

Autrement dit, $x_n = \dfrac{p_n}{b^{r_n}(b^{s_n}-1)}$, pour un certain entier p_n. Notons que

$$|x - x_n| < \frac{1}{b^{r_n+2s_n+s'_n}}.$$

On vérifie que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n+s_n} = \left(\limsup_{n\to\infty} \frac{r_n+s_n}{s_n}\right)^{-1} = \frac{1}{1+\alpha}$$

et que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{r_n+2s_n+s'_n}{r_n+s_n}\right) &\geqslant 1+\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n+s_n}\right)+\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{s'_n}{r_n+s_n}\right)\\ &\geqslant 1+\left(1+\liminf_{n\to\infty}\frac{s'_n}{s_n}\right)\left(\liminf_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n+s_n}\right)\\ &= 1+\frac{1+\beta}{1+\alpha} > 1+\frac{1}{1+\alpha}.\end{aligned}$$

Quitte à restreindre n à une sous-suite strictement croissante d'entiers, on peut supposer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{r_n+s_n} = \frac{1}{1+\alpha}$$

et donc trouver deux nombres réels strictement positifs μ et ρ tels que

$$1+\frac{s_n}{r_n+s_n} < 1+\mu < \rho < \frac{r_n+2s_n+s'_n}{r_n+s_n} \tag{1}$$

pour une infinité d'entiers n. Pour ce choix de μ et ρ, prenons $p'_n = p_n$, $\lambda = 1$, $c_2 = 1$, $q'_n = b^{s_n} - 1$. Choisissons comme nombres premiers $\omega_{r'+1}, \cdots, \omega_{r'+r''}$ les facteurs premiers de b. Enfin, définissons $e_{r'+1}, \cdots, e_{r'+r''}$ par $b^{r_n} = \prod_{i=r'+1}^{r'+r''} \omega_j^{e_j}$. Si x était algébrique et si les x_n étaient en nombre infini, nous pourrions appliquer le théorème de Ridout, et obtenir l'inégalité $\rho \leqslant 1+\mu$, qui contredit l'équation (1). Donc soit x est transcendant, soit les x_n sont en nombre fini. Dans ce cas x est rationnel car la suite $(x_n)_n$ converge vers x.

Une conséquence pour les suites de très basse complexité

Les auteurs de l'article [23] donnent comme conséquence du théorème 1 : *les nombres réels dont la complexité vérifie* $\exists a \geqslant 1$, $\forall k \geqslant 1$, $p(k) = k+a$ *sont transcendants.* On peut améliorer un tout petit peu leur énoncé. (Comparer à la conjecture 4.)

Théorème 3. — *Soit x un nombre réel positif dont la suite des chiffres après la virgule dans la base entière $b \geqslant 2$ vérifie $\exists a \geqslant 1$, $\exists k_0 \geqslant 1$, $\forall k \geqslant k_0$, $p(k) \leqslant k+a$. Alors le nombre x est rationnel ou transcendant.*

Démonstration

Nous donnons une esquisse de la démonstration. D'abord il n'est pas difficile de voir que, si une suite vérifie $\exists a \geqslant 1$, $\exists k_0 \geqslant 1$, $\forall k \geqslant k_0$, $p(k) \leqslant k+a$, et si elle n'est pas ultimement périodique, alors elle vérifie aussi $\exists a' \geqslant 1$, $\exists k_1 \geqslant 1$, $\forall k \geqslant k_1$, $p(k) = k+a'$. Une preuve simple est donnée dans [15] ; Cassaigne m'a indiqué la variante suivante : d'après la remarque 1, comme la suite n'est pas ultimement périodique, sa complexité p est une fonction strictement croissante, et $p(k) > k$ pour tout $k \geqslant 1$. Donc la suite $(p(k)-k)_{k\geqslant 1}$ est croissante au sens large. Comme elle est majorée et à valeurs entières, elle est donc constante à partir d'un certain rang.

Ensuite si une suite vérifie $\exists k_1 \geqslant 1, \forall k \geqslant k_1, p(k) = k+a'$, c'est l'image lettre à lettre d'une suite (sur un alphabet plus gros) qui vérifie $\forall k \geqslant 1, p(k) = k+a''$. Cela se prouve en utilisant une technique classique (voir [33, p. 843–844] pour l'un des premiers usages d'une telle technique, voir aussi [27]) en regroupant les lettres par blocs : si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite de départ sur l'alphabet $\mathcal{A}$, on définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sur l'alphabet $\mathcal{A}^{k_1}$ par

$$v_n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+k_1-1}).$$

Il est clair que connaître $v_j, v_{j+1}, \ldots, v_{j+k}$ c'est exactement connaître les termes $u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{j+k+k_1-1}$ d'où, si p' est la complexité de la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$, la relation : $\forall k \geqslant 1$, $p'(k) = p(k+k_1)$.

L'étape suivante est soit de montrer le résultat pour les suites de complexité $p(k) = k + a$ pour tout $k \geqslant 1$ comme dans [23], soit de montrer que l'on peut se ramener aux suites sturmiennes, c'est-à-dire aux suites (nécessairement binaires) de complexité $k+1$ pour tout $k \geqslant 1$ (voir la remarque 1), auquel cas on peut même se dispenser de la deuxième étape. Pour cela on utilise un résultat dû à Paul [39] pour les suites uniformément récurrentes (c'est-à-dire telles que que tout bloc qui apparaît une fois apparaît une infinité de fois, et avec des lacunes bornées entre deux apparitions consécutives) et à Coven [15] pour les suites non uniformément récurrentes. Ce résultat ou des variantes ont été énoncés à nouveau plusieurs fois (voir remarque ci-dessous). Nous donnons ici la formulation de Cassaigne [13].

Proposition. — *Une suite* $\mathbf{u}$ *à valeurs dans l'alphabet* Σ *et de complexité* $p(n)$ *vérifie* $\exists k_1 \geqslant 1$, $\forall k \geqslant k_1$, $p(k) = k + a$ *si et seulement si on peut écrire* $\mathbf{u} = w\psi(\mathbf{v})$, *où* w *est un mot fini,* $\mathbf{v}$ *est une suite sturmienne sur l'alphabet* $\{0, 1\}$, *et* ψ *est un morphisme de* $\{0, 1\}^*$ *vers* Σ^*, *tel que* $\psi(01) \neq \psi(10)$.

Il ne reste plus alors qu'à montrer qu'on peut appliquer le théorème 1 aux suites sturmiennes. Nous ne donnerons pas le détail de la preuve ici (voir [23]) : elle repose sur une étude combinatoire des blocs finis qui apparaissent dans les suites sturmiennes.

Remarque 3. —

– Le résultat de Paul [39] et Coven [15] cité dans la troisième étape de l'esquisse de preuve ci-dessus a été retrouvé par Alessandri [3]. Il est énoncé à nouveau dans [23] mais il ne sert pas dans la preuve de transcendance, il sert seulement à donner une expression explicite des réels considérés. Ce résultat a été redécouvert par Didier [19], puis par Cassaigne [13] qui appelle *quasi-sturmiennes* les suites de complexité ultimement égale à $k + \alpha$, pour un entier $\alpha \geqslant 1$. Sur ce sujet on pourra lire aussi [2] et [25].

– La transcendance de certains nombres réels à développement binaire sturmien était connue depuis au moins 1927 (voir [10]). Pour des résultats partiels (par exemple pour les suites sturmiennes *caractéristiques*, c'est-à-dire, en termes de billard sur un carré, celles qui commencent au coin inférieur gauche du billard), le lecteur pourra se reporter à [10, 16], puis aux articles [1, 35, 12, 28, 49], ainsi qu'à la discussion dans [23].

– Un exemple « populaire » de suite sturmienne est la *suite de Fibonacci* dont la définition est donnée dans le paragraphe suivant et qui commence ainsi

$$0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,\ldots$$

– D'autres suites de complexité au plus linéaire ont été étudiées, renforçant la conjecture 4. Le lecteur pourra lire par exemple [44] qui donne une classe de nombres transcendants dont les développements ont une complexité affine arbitrairement grande.

Suites engendrées par morphismes

À défaut de prouver la conjecture 4 dans toute sa généralité, on peut espérer démontrer qu'un nombre réel dont le développement est à la fois de complexité $O(k)$ et soumis à une condition supplémentaire est rationnel ou transcendant. Nous étudions ici la condition : être point fixe d'un morphisme (primitif ou de longueur constante) d'un monoïde libre, ou image d'un tel point fixe.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini (alphabet). Nous notons $\mathcal{A}^*$ le monoïde libre engendré par $\mathcal{A}$ muni de la *concaténation*. Le monoïde libre $\mathcal{A}^*$ peut être décrit comme l'ensemble des *mots* sur $\mathcal{A}$ (y compris le mot vide), c'est-à-dire l'ensemble des suites finies d'éléments de $\mathcal{A}$. La concaténation du mot $a_1a_2\ldots a_j$ et du mot $b_1b_2\ldots b_k$ est définie par

$$(a_1a_2\ldots a_j).(b_1b_2\ldots b_k) := a_1a_2\ldots a_jb_1b_2\ldots b_k$$

Définition 2. — *On appelle morphisme du monoïde libre $\mathcal{A}^*$ dans le monoïde libre $\mathcal{B}^*$ un homomorphisme pour la concaténation. Un tel morphisme est défini par les images des éléments de $\mathcal{A}$. Il peut être prolongé à $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) par continuité.*

Deux classes particulières de morphismes sont très étudiées, la première à cause de ses liens avec les développements en base entière, la seconde à cause de la simplicité des systèmes dynamiques associés :

Définition 3. — *On dit qu'un morphisme est* uniforme de longueur d *(ou encore* de longueur constante d*) si les images de toutes les lettres sont des mots de même longueur d. Un morphisme σ sur $\mathcal{A}^*$ est dit* primitif *s'il existe un entier k tel que l'image de chaque lettre par l'itéré σ^k contienne au moins une fois chacune des lettres de l'alphabet $\mathcal{B}$.*

Deux dernières définitions nous seront utiles.

Définition 4. — *Une suite est dite d-automatique si elle est l'image* lettre à lettre *(c'est-à-dire par un morphisme de longueur constante égale à 1) d'une suite point fixe d'un* morphisme de longueur constante d*. La dénomination « automatique » provient de l'équivalence de cette définition avec celle de* suite engendrée par automate fini.

Une suite est dite morphique *si elle est l'image* lettre à lettre *d'une suite point fixe d'un morphisme.*

Exemple 1. —

– La suite de Fibonacci est le point fixe du morphisme $0 \to 01$, $1 \to 0$. Elle commence par

$$0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ldots$$

– La suite de Thue-Morse est le point fixe commençant par 0 du morphisme $0 \to 01$, $1 \to 10$. Elle commence par

$$0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ \ldots$$

Une conjecture très raisonnable est

Conjecture 5. — *Si le développement dans une base entière d'un nombre réel positif est morphique, alors ce nombre est rationnel ou transcendant.*

Cette conjecture recoupe la conjecture 4 si le morphisme est uniforme ou primitif puisque dans les deux cas on sait que la complexité de la suite est $O(k)$ (voir respectivement [14] et [31, 32, 38]). Dans le cas des suites automatiques, le résultat a été annoncé par Loxton et van der Poorten mais il y a un trou dans la preuve comme me l'a confirmé van der Poorten il y a deux ans. Un pas dans la direction de cette conjecture est donné par le théorème suivant [23] (c'est une conséquence facile du théorème 1 ci-dessus).

Théorème 4. — *Si le développement dans une base entière d'un nombre réel positif est point fixe d'un morphisme primitif et contient un chevauchement (c'est-à-dire un bloc de la forme $awawa$ où a est une lettre et w un mot), alors ce nombre est rationnel ou transcendant.*

Démonstration

On peut supposer que le nombre x est compris entre 0 et 1 et que la partie fractionnaire de son développement est point fixe d'un morphisme primitif σ. Écrivons x sous la forme

$$x = 0, zawawa \ldots$$

où z est un mot. Posons $U_0 = z$, $V_0 = aw$ et $V_0' = a$. Comme la partie fractionnaire du développement du nombre x est point fixe du morphisme σ, elle commence aussi par

$$0, \sigma(z)\sigma(aw)\sigma(aw)\sigma(a) \ldots$$

et plus généralement par

$$0, \sigma^n(z)\sigma^n(aw)\sigma^n(aw)\sigma^n(a) \ldots$$

quel que soit $n \geqslant 1$. Nous allons pouvoir appliquer le théorème 1 avec $U_n = \sigma^n(z)$, $V_n = \sigma^n(aw)$, $V_n' = \sigma^n(a)$, si nous savons qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que pour tout mot v, il existe une constante $c(v) > 0$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\sigma^n(v)|}{\lambda^n} = c(v).$$

Or c'est précisément le cas pour les morphismes primitifs (voir [40, Proposition V.7 p. 94] par exemple), la condition $\lambda > 1$ étant satisfaite pour la valeur propre dominante d'une matrice primitive à coefficients dans $\mathbb{N}$ naturellement associée à σ, la *matrice de transition* de σ.

Ce théorème a été un peu étendu par Zamboni et l'auteur [6]. On remarque d'abord au vu de la démonstration ci-dessus que l'on peut remplacer dans le théorème 4 ci-dessus « morphisme primitif » par « morphisme primitif ou morphisme uniforme ». En effet si le morphisme est de longueur d, en reprenant les notations de la preuve qui précède on a $|\sigma^n(v)| = d^n|v|$. Énonçons maintenant l'extension proposée par Zamboni et l'auteur pour les suites binaires [6], où l'on peut s'affranchir de l'hypothèse qu'il existe un chevauchement.

Théorème 5. — *Si le développement binaire d'un nombre réel positif est point fixe d'un morphisme primitif ou de longueur constante* $\geqslant 2$, *ce nombre est rationnel ou transcendant.*

Démonstration

La preuve est simple mais inattendue. On suppose comme ci-dessus que le nombre est compris entre 0 et 1 et que la partie fractionnaire de son développement binaire est point fixe d'un morphisme primitif ou de longueur constante $\geqslant 2$. Si ce développement contient un chevauchement on est dans le cas du théorème 1 pour les morphismes primitifs ou de la remarque ci-dessus pour les morphismes de longueur constante.

Si le développement ne contient pas de chevauchement, on invoque un très joli résultat de Séébold [46] (voir aussi l'article de Berstel et Séébold [9]) suivant lequel *si une suite binaire point fixe d'un morphisme différent de l'identité ne contient pas de chevauchement, alors cette suite est soit la suite de Thue-Morse, soit la suite déduite de celle de Thue-Morse en remplaçant les* 0 *par des* 1 *et les* 1 *par des* 0.

Il ne reste donc plus qu'à prouver la transcendance du « nombre de Thue-Morse ». Mais ce résultat est la conséquence d'un résultat plus général de Mahler [29, p. 363] et il a été aussi redémontré directement par Dekking [18].

Remarque 4. — Un récent article de Nishioka, Tanaka et Wen [36] aborde cette question par une autre méthode. On peut montrer que leur résultat est contenu dans le théorème 5 ci-dessus.

Nombres dont le développement en fraction continue est à quotients partiels bornés

Des résultats partiels pour la conjecture 2 ont été obtenus pour certaines classes de suites par Davison [17] et par Queffélec [41], ainsi que dans un article de Davison, Queffélec, Zamboni et l'auteur [5]. Avant de donner un aperçu de ces résultats, nous nous proposons de montrer comment ils relèvent – *a posteriori* – de la même « philosophie » que ceux du paragraphe précédent.

Supposons que nous ayons un nombre réel positif dont la fraction continue

$$x = [a_0, a_1, a_2, \dots]$$

soit à quotients partiels bornés. Supposons de plus que la suite des quotients partiels présente des propriétés de « répétition » comme précédemment. Ici nous ferons l'hypothèse que cette suite contient des préfixes arbitrairement longs qui sont des « presque carrés » :

$$a_0a_1a_2\dots = V_nV'_n\dots$$

où $|V_n|$ tend vers l'infini, et où V'_n est un « gros » préfixe de V_n. Approchons la suite $(a_\ell)_{\ell\geqslant 0}$ par la suite périodique $V_nV_nV_n\ldots$, et soit x_n le nombre réel (quadratique) dont les quotients partiels sont donnés par les « lettres » de la suite de « mots » $V_nV_nV_n\ldots$. Alors, en confondant la notation d'une suite et celle du nombre réel ayant les éléments de cette suite comme quotients partiels, la précision de l'approximation du nombre x par le nombre x_n est en apparence

$$\begin{array}{rcl} x & = & \underbrace{V_n} \;\; | \;\; \ldots \\ x_n & = & \underbrace{V_n} \;\; | \;\; \underbrace{V_n} \;\; \underbrace{V_n} \ldots \end{array}$$

alors qu'en fait elle est meilleure (ne pas oublier que V'_n est un préfixe de V_n)

$$\begin{array}{rcl} x & = & \underbrace{V_n} \;\; \underbrace{V'_n \,|} \;\; \ldots \\ x_n & = & \underbrace{V_n} \;\; \underbrace{V'_n \,|} \;\; \ldots \end{array}$$

L'approximation est alors « trop bonne » et on pourra conclure si l'on sait quelque chose sur l'approximation des nombres algébriques non quadratiques par les quadratiques. Mais nous disposons *justement* du théorème de Schmidt [47] qui stipule que si un nombre irrationel positif est trop bien approché par les nombres quadratiques, alors il est soit quadratique soit transcendant.
Plus précisément, notons $H(x)$ la *hauteur* d'un nombre quadratique x : si x est racine de l'équation $ax^2+bx+c=0$, où ax^2+bx+c est un polynôme irréductible à coefficients entiers, et $\mathrm{pgcd}(|a|,|b|,|c|)=1$, alors $H(x) := \max(|a|,|b|,|c|)$.

Théorème 6. — *Soit x un nombre réel dans $[0,1]$, qui n'est ni rationnel, ni quadratique. S'il existe un nombre réel $B>3$, et une infinité de nombres quadratiques irrationnels ξ_k tels que*

$$|x-\xi_k| < H(\xi_k)^{-B}$$

alors x est transcendant.

On peut déduire alors de ce théorème la transcendance de fractions continues ayant des « propriétés de répétition ». Le théorème qui suit se trouve « entre les lignes » dans [17] et [41]. Il est donné explicitement dans [5].

Théorème 7. — *Soit $x \in]0,1[$ un nombre irrationnel non quadratique. Notons*

$$x = [0, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$$

son développement en fraction continue. Supposons qu'il existe une infinité d'entiers k tels que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ commence par le mot U_kV_k, où

– $\lim\limits_{k\to\infty} |U_k| = +\infty$ *(rappelons que $|U_k|$ est la longueur du mot U_k),*
– *le mot V_k est un préfixe de U_k,*
– *on a* $\liminf\limits_{k\to\infty} \dfrac{|U_k|+|V_k|}{|U_k|} = \gamma > 0.$

Soient $M = \limsup\limits_{k\to\infty} q_{|U_k|}^{1/|U_k|}$ et $m = \liminf\limits_{k\to\infty} q_{|U_kV_k|}^{1/|U_kV_k|}$. Si l'inégalité $\gamma > \dfrac{3\log M}{2\log m}$ est vérifiée, alors le nombre x est transcendant.

Pour prouver ce théorème nous avons besoin de deux petits lemmes.

Lemme 1. — *Soit $x \in]0,1[$ un nombre réel dont le développement en fraction continue est périodique*

$$x = [0, a_1, a_2, \cdots, a_k, a_1, a_2, \cdots, a_k, \cdots].$$

Alors le nombre x (qui est irrationnel quadratique) vérifie $H(x) \leqslant q_k$.

Lemme 2. — *Si les développements en fraction continue des nombres $x, y \in]0,1]$ ont les mêmes k premiers quotients partiels $a_1 a_2 \cdots a_k$, alors*

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{q_k^2}.$$

Démonstration

1. On a $x = [0, a_1, a_2, \cdots, a_k, x]$. Donc $x = \dfrac{xp_k + p_{k-1}}{xq_k + q_{k-1}}$, ce qui implique

$$q_k x^2 + x(q_{k-1} - p_k) - p_{k-1} = 0.$$

Comme $x \in]0,1[$, on a $p_n \leqslant q_n$ pour tout $n \geqslant 1$, donc

$$H(x) \leqslant \max(q_k, |q_{k-1} - p_k|, p_{k-1}) \leqslant q_k.$$

2. Comme $\dfrac{p_k}{q_k} = [0, a_1, a_2, \cdots, a_k]$, on a

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad \text{et} \quad \left| y - \frac{p_k}{q_k} \right| \leqslant \frac{1}{q_k q_{k+1}}.$$

De plus $x - \dfrac{p_k}{q_k}$ et $y - \dfrac{p_k}{q_k}$ ont le même signe et ce signe ne dépend que de k. Donc

$$|x - y| = \left| \left|x - \frac{p_k}{q_k}\right| - \left|y - \frac{p_k}{q_k}\right| \right| \leqslant \frac{1}{q_k^2}.$$

Démonstration du théorème 7

Soit ξ_k le nombre réel défini par la fraction continue périodique

$$\xi_k = [0, a_1, a_2, \cdots, a_{|U_k|}, a_1, a_2, \cdots, a_{|U_k|} \cdots].$$

D'après le lemme 1 on a $H(\xi_k) \leqslant q_{|U_k|}$. Mais le développement en fraction continue de ξ_k commence par $[0, a_1, a_2, \cdots, a_{|U_k|}, a_1, a_2, \cdots, a_{|V_k|}, \cdots]$, comme celui de x. Donc, d'après le lemme 2, on a $|x - \xi_k| \leqslant \dfrac{1}{q_{|U_k V_k|}}$.

Pour appliquer le théorème de Schmidt, il suffit de montrer qu'il existe $B > 3$, tel que $q_{|U_k|}^B < q_{|U_k V_k|}^2$. En effet on aura alors

$$|x - \xi_k| \leqslant \frac{1}{q_{|U_k V_k|}^2} < \frac{1}{q_{|U_k|}^B} \leqslant H(\xi_k)^{-B}.$$

Pour montrer l'existence d'un tel B, il suffit de montrer que $3\log q_{|U_k|} < 2\log q_{|U_kV_k|}$. Mais c'est une conséquence des inégalités

$$\begin{aligned}2\liminf_{k\to\infty}\frac{\log q_{|U_kV_k|}}{\log q_{|U_k|}} &= 2\liminf_{k\to\infty}\frac{\log q_{|U_kV_k|}}{|U_kV_k|}\frac{|U_k|}{\log q_{|U_k|}}\frac{|U_kV_k|}{|U_k|}\\ &\geqslant 2\liminf_{k\to\infty}\frac{\log q_{|U_kV_k|}}{|U_kV_k|}\liminf_{n\to\infty}\frac{|U_kV_k|}{|U_k|}\left(\limsup_{n\to\infty}\frac{\log q_{|U_k|}}{|U_k|}\right)^{-1}\\ &\geqslant \frac{2\gamma\log m}{\log M} > 3.\end{aligned}$$

On peut déduire de ce théorème, en étudiant soigneusement les suites de quotients partiels correspondantes, les résultats suivants respectivement dus à Davison [17] et à Queffélec [41].

Théorème 8. — *Soit α un nombre réel irrationnel compris entre* 0 *et* 1. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par*

$$a_n = 1 + ([n\alpha] \bmod 2)$$

et soit $x(\alpha) = [0, a_1, a_2, \ldots]$ le nombre réel dont la fraction continue a pour quotients partiels les a_n. Si la fraction continue du nombre α a une infinité de réduites d'indices pairs dont les numérateurs sont pairs, alors le nombre $x(\alpha)$ est transcendant.

Théorème 9. — *Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de Thue-Morse définie sur l'alphabet $\{u, v\}$ où u et v sont des entiers strictement positifs distincts (voir les exemples 1) :*

$$(a_n)_{n\geqslant 1} = u\ v\ v\ u\ v\ u\ u\ v\ v\ u\ u\ v\ u\ v\ v\ u\ \ldots$$

Alors le nombre $[0, a_1, \ldots]$ est transcendant.

Remarque 4. — Davison demande dans [17] si presque tous les α irrationnels ont la propriété utilisée dans le théorème 8, à savoir avoir une infinité de réduites d'indices pairs dont les numérateurs sont pairs. Harman et Wong répondent par l'affirmative dans [24]. Le théorème ci-dessous montre qu'en fait, le nombre $x(\alpha)$ est transcendant *pour tout α irrationnel*.

En utilisant le théorème 2, et des estimations que nous ne donnerons pas ici, Davison, Queffélec, Zamboni et l'auteur obtiennent dans [5] le résultat suivant.

Théorème 10. — *Soit x un nombre irrationnel appartenant à $]0, 1[$, et soit $x = [0, a_1, a_2, \ldots]$ son développement en fraction continue.*

– Si la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est image (non triviale) lettre à lettre d'une suite sturmienne, alors le nombre x est transcendant.

– Si la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est image (non triviale) lettre à lettre de la suite donnée par $a_n = 1 + ([n\alpha] \bmod 2)$, où α est irrationnel, alors le nombre x est transcendant.

Exemple 2. — Le théorème ci-dessus s'applique par exemple à la suite de Fibonacci (voir les exemples 1 pour la définition) sur un alphabet binaire quelconque.

Remarque 5. — Dans [5] les auteurs ont un résultat sur les fractions continues dont la suite des quotients partiels a des propriétés de répétition. Ce résultat s'applique à certains points fixes de morphismes, par exemple à la suite « de doublement de période » sur l'alphabet $\{u, v\}$, où u et v sont des entiers strictement positifs distincts. Cette suite est le point fixe du morphisme $u \to uv$, $v \to uu$, elle est bien connue des itérateurs de fonctions continues quand elle est à valeurs $0, 1$. Un résultat récent de Queffélec permet de raffiner l'exposant de répétition pour les suites points fixes de morphismes primitifs. Elle démontre en effet [42] :

Théorème 11. — *Si la suite* $(a_n)_{n\geqslant 1}$ *est point fixe d'un morphisme uniforme primitif, et qu'elle commence par* UV *où* U *et* V *sont deux mots tels que* V *soit un préfixe du mot* U *avec* $\frac{|V|}{|U|} > \frac{1}{2}$*, alors le nombre* $x = [0, a_1, a_2, \ldots]$ *est quadratique ou transcendant.*

Ce théorème est une conséquence du résultat suivant [42].

Théorème 12. — *Si* $x = [0, a_1, a_2, \ldots]$ *est un irrationnel non-quadratique dont la suite des quotients partiels est point fixe d'un morphisme primitif, alors la limite* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n^{1/n}$ *existe.*

Il est intéressant de comparer ce dernier résultat à un théorème de Faivre [21] qui montre que *pour tout nombre réel* $\lambda \geqslant (1+\sqrt{5})/2$*, on peut trouver un nombre réel* α *dont les quotients partiels* $q_n(\alpha)$ *vérifient* $\lim\limits_{n\to\infty} q_n(\alpha)^{1/n} = \lambda$, ainsi qu'à une généralisation due à Baxa [7] : *si* λ *et* μ *sont deux nombres réels tels que* $(1+\sqrt{5})/2 \leqslant \lambda \leqslant \mu$*, alors il existe une infinité non-dénombrable de nombres irrationnels* α *non équivalents tels que* $\liminf\limits_{n\to\infty} q_n(\alpha)^{1/n} = \lambda$ *et* $\limsup\limits_{n\to\infty} q_n(\alpha)^{1/n} = \mu$.

Remarque. — Le lecteur pourra trouver dans [37] une approche différente du caractère « désordonné » du développement en fraction continue des nombres réels algébriques de degré au moins égal à 3.

Remerciements. L'auteur remercie chaleureusement S. Ferenczi et M. Mendès France pour d'intéressantes remarques, V. Berthé et L. Zamboni pour leurs commentaires détaillés sur une précédente version de ce texte et J. Shallit pour ses suggestions et de précieux compléments bibliographiques.

Références

[1] W. W. Adams, J. L. Davison, A remarkable class of continued fractions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **65** (1977) 194–198.

[2] P. Alessandri, Classification et représentation des suites de complexité $n+2$, *Manuscrit non publié*, 1995.

[3] P. Alessandri, *Codages de rotations et basses complexités*, Thèse de Doctorat, Marseille, 1996.

[4] J.-P. Allouche, Sur la complexité des suites infinies, *Bull. Belg. Math. Soc.* **1** (1994) 133–143.

[5] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, L. Q. Zamboni, Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions, *Preprint*, 1999.

[6] J.-P. Allouche, L. Q. Zamboni, Algebraic irrational binary numbers cannot be fixed points of non-trivial constant length or primitive morphisms, *J. Number Theory* **69** (1998) 119–124.

[7] C. Baxa, On the growth of the denominators of convergents, *Acta Math. Hungar.* **83** (1999) 125–130.

[8] J. Berstel, Recent results on Sturmian words, in : *Developments in Language Theory II*, World Scientific, Singapour, 1996, pp. 13–24 ; voir aussi M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, Chapitre 3, [par J. Berstel, P. Séébold], (à paraître).

[9] J. Berstel, P. Séébold, A characterization of overlap-free morphisms, *Disc. Appl. Math.* **46** (1993) 275–281.

[10] P. E. Böhmer, Über die Transzendenz gewisser dyadischer Brüche, *Math. Annalen* **96** (1927) 367–377. Erratum p. 735.

[11] É. Borel, Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950) 591–593. Réédité dans : *Œuvres d'É. Borel*, vol. 2, Éditions du CNRS, Paris, 1972, pp. 1203–1204.

[12] S. Bullett, P. Sentenac, Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil's staircase, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **115** (1994) 451–481.

[13] J. Cassaigne, Sequences with grouped factors, in : *DLT'97, Developments in Language Theory III, Thessaloniki, Aristotle University of Thessaloniki*, 1998, pp. 211–222. Disponible aussi par ftp :
`ftp ://iml.univ-mrs.fr/pub/cassaigne/publis/grouped.ps.gz`

[14] A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972), 164–192.

[15] E. M. Coven, Sequences with minimal block growth, II, *Math. Syst. Theory* **8** (1975) 376–382.

[16] L. V. Danilov, Some classes of transcendental numbers, (en russe), *Mat. Zametki* **12** (1972) 149–154. Traduit dans : *Math. Notes Acad. Sci. USSR* **12** (1972) 524–527.

[17] J. L. Davison, A class of transcendental numbers with bounded partial quotients, in : *Number theory and applications, Proc. NATO ASI, Banff/Can. 1988, NATO ASI Ser., Ser. C* **265** 356–371.

[18] F. M. Dekking, Transcendance du nombre de Thue-Morse, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I* **285** (1977) 157–160.

[19] G. Didier, Caractérisation des N-écritures et application à l'étude des suites de complexité ultimement $n + c^{ste}$, *Theoret. Comput. Sci.* **215** (1999) 31–49.

[20] A. Ehrenfeucht, K. P. Lee, G. Rozenberg, Subword complexities of various classes of deterministic developmental languages without interaction, *Theoret. Comput. Sci.* **1** (1975) 59–75.

[21] C. Faivre, The Lévy constant of an irrational number, *Acta Math. Hungar.* **74** (1997) 57–61.

[22] S. Ferenczi, Z. Kása, Complexity for finite factors of infinite sequences, *Theoret. Comput. Sci.* **218** (1999) 177–195.

[23] S. Ferenczi, C. Mauduit, Transcendence of numbers with a low complexity expansion, *J. Number Theory* **67** (1997) 146–161.

[24] G. Harman, K. C. Wong, A note on the metrical theory of continued fractions, *Preprint*, 1998.

[25] A. Heinis, On low complexity Z-words and their factors, *Report MI 02-99, Mathematical Institute, University of Leiden*, 1999.

[26] A. Y. Khintchine, *Continued Fractions*, (en russe), Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad, 2nd edition, 1949.

[27] B. G. Klein, Homomorphisms of symbolic dynamical systems, *Math. Systems Theory* **6** (1972) 107–122.

[28] T. Komatsu, A certain power series and the inhomogeneous continued fraction expansions, *J. Number Theory* **59** (1996) 291–312.

[29] K. Mahler, Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen, *Math. Annalen* **101** (1929) 342–366. Corrigendum **103** (1930) 532.

[30] K. Mahler, *Lectures on Diophantine approximations, Part I, g-adic numbers and Roth's theorem*, University of Notre Dame, 1961.

[31] P. Michel, *Sur les ensembles minimaux engendrés par les substitutions de longueur non constante*, Thèse de troisième cycle, université de Rennes, 1975.

[32] P. Michel, Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitution, in : *Théorie Ergodique : Actes des Journées Ergodiques, Rennes 1973/1974*, Éd. J.-P. Conze, M. S. Keane, Springer Verlag, Lect. Notes Math. **532** (1976) 189–201.

[33] M. Morse, G. A. Hedlund, Symbolic dynamics, *Amer. J. Math.* **60** (1938) 815–866.

[34] M. Morse, G. A. Hedlund, Symbolic dynamics II, Sturmian trajectories, *Amer. J. Math.* **62** (1940) 1–42.

[35] K. Nishioka, J.-i. Tamura, I. Shiokawa, Arithmetical properties of a certain power series, *J. Number Theory* **42** (1992) 61–87.

[36] K. Nishioka, T.-A. Tanaka, Z.-Y. Wen, Substitution in two symbols and transcendence, *Tokyo J. Math.* **22** (1999) 127–136.

[37] V. P. Orevkov, On the complexity of the expansion of algebraic irrationalities in continued fractions, (en russe), Problems in the constructive trend in mathematics **6**, *Trudy Mat. Inst. Steklov* **129** (1973) 24–29, 267. Traduit dans : *Proc. Steklov Inst. Math.* **129** (1973) 20–24 (1976).

[38] J.-J. Pansiot, Complexité des facteurs des mots infinis engendrés par morphismes itérés, in : *ICALP84*, Ed. J. Paredaens, Springer Verlag, Lect. Notes Comput. Sci. **172** (1984) 380–389.

[39] M. E. Paul, Minimal symbolic flows having minimal block growth, *Math. Systems Theory* **8** (1975) 309–315.

[40] M. Queffélec, *Substitution Dynamical Systems — Spectral Analysis*, Springer Verlag, Lect. Notes Math. **1294**, 1987.

[41] M. Queffélec, Transcendance des fractions continues de Thue-Morse, *J. Number Theory* **73** (1998) 201–211.

[42] M. Queffélec, Irrational numbers with automaton-generated continued fraction expansion, in : *Actes du colloque : Systèmes dynamiques, du cristal au chaos*, CIRM, Marseille, 1998.

[43] D. Ridout, Rational approximations to algebraic numbers, Mathematika **4** (1957) 125–131.

[44] R. N. Risley, L. Q. Zamboni, A generalization of Sturmian sequences ; combinatorial structure and transcendence, *Acta Arith.* (à paraître).

[45] K. F. Roth, Rational approximations to algebraic numbers, *Mathematika* **2** (1955) 1–20. Corrigendum p. 168.

[46] P. Séébold, *Propriétés combinatoires des mots infinis engendrés par certains morphismes*, Thèse de troisème cycle, université P. & M. Curie, Institut de Programmation, Paris, 1985. Voir aussi : Sequences generated by infinitely iterated morphisms, *Disc. Appl. Math.* **11** (1985) 255–264.

[47] W. Schmidt, On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals, *Acta Math.* **119** (1967) 27–50.

[48] J. Shallit, Real numbers with bounded partial quotients : a survey, *Enseign. Math.* **38** (1992) 151–187.

[49] P. Shiu, A function from Diophantine approximations, *Publications de l'Institut Mathématique* **65** (1999) 52–62.

L'approximation par des polynômes à coefficients entiers

Laurent BERGER (*Université Paris 6*)

Introduction

Soit K un compact de $\mathbf{R}$; le théorème de Weierstrass nous dit que toute fonction $f : K \to \mathbf{R}$ continue est limite uniforme d'éléments de $\mathbf{R}[T]$. L'objet de cet exposé est de déterminer, étant donné un compact de $\mathbf{R}$, quelles sont les fonctions qui sont limite uniforme d'éléments de $\mathbf{Z}[T]$. Par exemple, si $0 \in K$ et si une telle fonction existe, elle doit être entière en 0.

Dans la suite, K désignera un compact de $\mathbf{R}$ de cardinal infini. Si $f : K \to \mathbf{R}$ est une fonction continue, $|f|_K$ désignera le maximum de f sur K. Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant vaut 1.

Compacts de R et polynômes de Chebychev

Commençons par définir les polynômes de Chebychev d'un compact $K \subset \mathbf{R}$.

Théorème. — *Soit K un compact de $\mathbf{R}$ et $n \geqslant 1$; alors il existe un polynôme unitaire de degré n, noté $T_n(K)$, qui réalise le minimum de $|P_n|_K$ où P_n parcourt l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.*

Ce polynôme s'appelle le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Chebychev pour K. Si $K = [-1; 1]$, on retombe sur les polynômes de Chebychev classiques (ceci sera démontré plus loin).

L'existence vient du fait que dans $\mathbf{R}_n[T]$, la boule de centre T^n et de rayon $|T^n|_K$ coupe $\mathbf{R}_{n-1}[T]$ selon un compact non vide, et la fonction $P \mapsto |T^n - P(T)|_K$ y est continue et admet donc un minimum.

Le polynôme $T_n(K)$ est unique ; pour une démonstration de ce fait, voir [3, p.140].

Proposition. — *Si $K = [-1; 1]$, alors $T_n(K) = 2^{1-n}T_n$, les polynômes de Chebychev classiques. Par suite,*

$$T_n([a; b]) = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n T_n\left(\frac{2T-a-b}{b-a}\right)$$

On se ramène à la première assertion par translation et homothétie. Rappelons que T_n est défini par $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$, et que $|T_n|_K$ est réalisé par $n+1$ réels de $[-1; 1]$. Soit Q de degré $< n$ tel que $|T^n - Q(T)|_K < 2^{1-n}$; alors $2^{1-n}T_n(T) - (T^n - Q(T))$ est un polynôme de degré $< n$ qui s'annule entre deux extremas consécutifs de T_n sur K, c'est à dire en au moins n points. Il est donc nul.

Rayon de capacité des compacts

Nous allons définir le rayon de capacité (ou diamètre transfini, ou capacité logarithmique, ou exterior mapping radius) d'un compact.

Proposition. — *La suite* $|T_n(K)|_K^{1/n}$ *est convergente ; on note* $d_1(K)$ *sa limite.*

Soit $\alpha_n = \log(|T_n(K)|_K^{1/n})$. Si $\alpha_n \to -\infty$ alors $d_1(K) = 0$; sinon soit $\alpha = \limsup(\alpha_n)$. Comme $T_n(K)T_m(K)$ est un polynôme unitaire de degré $m+n$, on a

$$\alpha_{m+n} \leqslant \alpha_n \frac{n}{n+m} + \alpha_m \frac{m}{n+m}$$

fixons $\varepsilon > 0$ et n assez grand. On voit que $\alpha_{qn+r} \leqslant \alpha_n + \varepsilon$ quand q est assez grand (r est entre 0 et n), et donc $\alpha_n \geqslant \alpha - \varepsilon$ ce qui montre que la suite α_n converge vers sa limite supérieure.

Proposition. — *Soit*

$$\delta_n(K) = \sup_{x_i \in K} \prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} |x_i - x_j|^{1/n(n-1)}$$

alors la suite $\delta_n(K)$ *est décroissante et converge vers un réel noté* $d_2(K)$*.*

On a

$$\delta_{n+1}^{(n-1)n(n+1)} = \prod |x_i - x_j|^{n-1} = \prod_k \prod_{1 \leqslant \hat{k}, i \neq j \leqslant n} |x_i - x_j| \leqslant \delta_n^{(n-1)n(n+1)}$$

ce qui établit la décroissance et donc la convergence.

Théorème. — *Les deux constantes* $d_1(K)$ *et* $d_2(K)$ *ainsi définies sont égales et on notera* $\operatorname{cap}(K)$ *leur valeur commune (rayon de capacité).*

Tout d'abord, soient n points x_i qui réalisent le sup qui définit δ_n, et $P(T) = \prod (T - x_i)$. On a $\delta_n = \prod |x_i - x_j|^{1/n(n-1)} = |\prod P'(x_i)|^{1/n(n-1)} \geqslant d_1 - \varepsilon$ pour n assez grand ce qui montre que $d_2 \geqslant d_1$.

Ensuite, on a pour tout P unitaire de degré n,

$$\delta_{n+1}^{n(n+1)/2} = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & x_1^{n-1} & P(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & x_{n+1}^{n-1} & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} \leqslant (n+1)\delta_n^{n(n-1)/2} |P|_K$$

comme on le voit en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne. Soit $c_n = ((n+1)|T_n(K)|_K)^{2/n}$; on trouve $\delta_{n+1}^{n+1} \leqslant c_n \delta_n^{n-1}$, et en multipliant ces inégalités pour $n = 1, \cdots, k$, on a $\delta_{k+1}^{(k+1)/k} (\delta_k \cdots \delta_2)^{1/k} \leqslant (c_2 \cdots c_k)^{1/k}$. On conclut que $d_2 \leqslant d_1$ en utilisant le théorème de Cesàro.

Par exemple, $\operatorname{cap}([a;b]) = (b-a)/4$.

Proposition. — *Soit K compact ; alors* $\operatorname{cap}(K) \geqslant 1$ *si et seulement si pour tout polynôme unitaire P on a $|P|_K \geqslant 1$. Dans ce cas,* $\mathbf{Z}[T]$ *est discret dans* $\mathcal{C}^0(K, \mathbf{R})$.

S'il existe P unitaire tel que $|P|_K = \alpha < 1$ alors $|P^k|_K^{1/k} \leqslant \alpha$ et donc $\operatorname{cap}(K)$ aussi.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbf{R})$ et P_n une suite de polynômes à coefficients entiers qui converge vers f. Pour $n > n_0$ assez grand on aura $|f - P_n| < 1/2$, et alors $P_m - P_n$ sera un polynôme entier de norme < 1 si $m, n > n_0$, et $P_m - P_n$ divisé par son coefficient dominant sera unitaire de norme < 1 ; c'est impossible et donc $P_m = P_n = f$ pour m, n assez grand. Si de plus P et Q sont distincts à coefficients entiers, le même argument montre que $|P - Q|_K \geqslant 1$.

Polynômes entiers de petite norme

On vient de voir que si $\operatorname{cap}(K) \geqslant 1$, on n'a pas de résultat intéressant d'approximation. À partir de maintenant, on va s'intéresser aux compacts K tels que $\operatorname{cap}(K) < 1$; la situation est radicalement différente.

Par la proposition précédente, on dispose d'un polynôme Q unitaire de norme < 1.

Proposition. — *Il existe un polynôme P à coefficients entiers qui vérifie* $|P|_K < 1$.

Cette proposition est vraiment importante, on passe d'une information analytique ($\operatorname{cap}(K) < 1$) à une information algébrique.

Soit $\delta > 0$, $\alpha = |Q|_K < 1$, d le degré de Q, $C = 1 + |T| + \cdots + |T^{d-1}|$, ℓ_0 tel que $\alpha^{\ell_0} C/(1-\alpha) < \delta$, $m = \ell_0 d$ et $\varepsilon = \delta / C^{m+1}$.

Soit k assez grand et

$$R_k(T) = Q(T)^k - \sum_{\ell \geqslant \ell_0, i = 0 \cdots d-1} b_{i,\ell} T^i Q(T)^\ell$$

où les $b_{i,\ell}$ sont des réels compris entre 0 et 1 choisis tels que l'on puisse écrire $R_k(T) = Z_k(T) + P_k(T)$, avec Z_k à coefficients entiers et P_k de degré $< m$ avec des coefficients entre 0 et 1 (un instant de réflexion montre que c'est toujours possible).

Remarquons que $|R_k - Q^k|_K < \delta$, et que si $k' > k$, $Z_k - Z_{k'}$ est un polynôme unitaire de degré k' et de norme $|Z_k - Z_{k'}|_K < |R_k - R_{k'}|_K + |P_k - P_{k'}|_K$. Reste à utiliser le principe des tiroirs pour trouver deux entiers k et k' tels que les coefficients de P_k et $P_{k'}$ diffèrent d'au plus ε.

En sommant les erreurs, on trouve que $P = Z_k - Z_{k'}$ est unitaire et entier de norme $|P|_K < 6\delta$.

Noyau de Fekete

Muni du polynôme P construit précédemment, nous sommes en mesure d'approcher des fonctions f vérifiant certaines conditions ; dans cette section, nous énonçons ces conditions. Le compact K est toujours supposé être de rayon de capacité < 1. On dira que $f : K \to \mathbf{R}$ est $\mathbf{Z}[T]$-approximable si elle est limite uniforme sur K de polynômes à coefficients entiers. Si $X \subset K$ est un ensemble, on dit que f est X-interpolable s'il existe un polynôme $R \in \mathbf{Z}[T]$ tel que $f = R$ sur X.

Soit $B(K) = \{P \in \mathbf{Z}[T], |P|_K < 1\}$ (on sait maintenant que $B(K)$ est non vide), et soit

$$J(K) = \{x \in K, P(x) = 0 \ \forall P \in B(K)\}$$

notons que $J(K)$ est fini, car il est contenu dans l'ensemble des zéros d'un polynôme non nul.

Théorème. — *Soit K un compact tel que* $\operatorname{cap}(K) < 1$. *Alors $f : K \to \mathbf{R}$ continue est $\mathbf{Z}[T]$-approximable si et seulement si f est $J(K)$-interpolable.*

Si f est $\mathbf{Z}[T]$-approximable, alors $P_n \to f$ et on suppose que $|P_n - f|_K < 1/2$. Alors $|P_n - P_m|_K < 1$, et donc $P_n - P_m$ est nul sur $J(K)$. Par suite, $f = P_n$ sur $J(K)$.

Pour l'implication contraire, on peut toujours supposer que $f = 0$ sur $J(K)$. Soit Q_0 à coefficients entiers de norme < 1. Soient $x_1, \cdots, x_r$ les zéros de Q_0 qui sont dans K mais pas dans $J(K)$: pour chaque i il existe donc $Q_i \in B(K)$ qui ne s'annule pas en x_i. On pose $Q = \sum_{i \geqslant 0} Q_i^{2n}$ où n est un entier suffisamment grand. Il est clair que les zéros de Q qui sont dans K sont exactement les éléments $J(K)$.

On prend $\delta > 0$ et n assez grand pour que $\max\{|Q(T)|_K, |TQ(T)|_K\} < \delta$. Soit $\varepsilon > 0$ et k tel que $\sum_{j \geqslant k} (j+1)\delta^j < \varepsilon$.

Soit K_0 le compact obtenu en identifiant tous les points de $J(K)$ à un seul, x_0. Les fonctions f, $Q(T)^k$, et $TQ(T)^k$ sont continues sur K_0. De plus l'algèbre engendrée par $Q(T)^k$ et $TQ(T)^k$ sépare les points de K_0. Par le théorème de Stone-Weierstrass, il existe donc un polynôme à deux variables, $\tilde{S}$, tel que $|f - \tilde{S}(Q(T)^k, TQ(T)^k)| < \varepsilon$, et on peut supposer que le terme constant de $\tilde{S}$ est nul (car $f(x_0) = 0$). Soit S le polynôme obtenu en prenant les parties entières des coefficients de $\tilde{S}$. Alors $|S - \tilde{S}|_K < \sum_{i,j \geqslant 0, i+j=k} \delta^{i+j} < \varepsilon$ et par suite $S(Q(T)^k, TQ(T)^k)$ approche f à 3ε près.

Détermination du noyau de Fekete

Dans cette section, nous indiquons des résultats qui permettent de simplifier le calcul de $J(K)$; dans la section suivante, nous appliquons cela au calcul de $J([-a; a])$.

Soit $J_0(K)$ l'ensemble des $\alpha \in J(K)$ qui ont la propriété : tous les conjugués de α sont réels et appartiennent à K.

Notre objectif est de démontrer le

Théorème. — *Les ensembles $J_0(K)$ et $J(K)$ sont égaux.*

Pour cela, nous allons démontrer que

Proposition. — *Une fonction continue est $\mathbf{Z}[T]$-approximable $\Leftrightarrow$ elle est $J_0(K)$-interpolable.*

Cela entraîne notamment que f est $J(K)$-interpolable si et seulement si elle est $J_0(K)$-interpolable, et donc que $J(K) = J_0(K)$.

La preuve de la proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme. — *Soit $\{x_1, \cdots, x_r\}$ un ensemble d'entiers algébriques, tel que chacun d'entre eux a un conjugué qui n'est pas dans cet ensemble. Alors $\{Q(x_1), \cdots, Q(x_r)\}$, pour Q parcourant $\mathbf{Z}[T]$, est dense dans $\mathbf{R}^r$.*

On montre tout d'abord le cas où les x_i sont racines d'un même polynôme irréductible P. Alors soit $x_{r+1} = 1$ et $V = V(x_i)$ la matrice de Vandermonde construite sur les x_i. Soit $E = \mathbf{R}^{r+1}$. La matrice V définit une transformation linéaire inversible de E dans lui-même, et l'image de $\mathbf{Z}^{r+1}$ par V est un réseau de E, disons Λ.

Soit $P(R)$ l'ensemble des vecteurs de E dont les r premières coordonnées sont de valeur absolue < 1 et la dernière $< R$. Le théorème de Minkowski nous fournit, pour R assez grand, un élément non-nul $q \in \Lambda \cap P(R)$. Il est facile de voir que $V^{-1}((q_i)_i)$ correspond à un polynôme Q de $\mathbf{Z}[T]$ tel que $|Q(x_i)| < 1$ pour $i = 1 \cdots r$; enfin $Q(x_i) \neq 0$ pour tout i sinon Q serait nul (il est de degré $<$ à celui de P).

Soient y_i des réels, $k > 1$, et $\tilde{P}$ le polynôme de Lagrange qui interpole les $y_i/Q(x_i)^k$. Soit P le polynôme dont les coefficients sont les parties entières de ceux de $\tilde{P}$.

Alors $|Q^k P(x_i) - y_i| \leqslant |Q^k(x_i)|(|P(x_i) - y_i/Q(x_i)^k| + |P(x_i) - \tilde{P}(x_i)|) \leqslant |Q(x_i)|^k C$ où C ne dépend pas de k. Cela établit le résultat (on prend k assez grand).

Si les x_i proviennent de différents polynômes, alors on pose $x_{i,j}$ provenant de P_j irréductible. On se donne $y_{i,j}$ des réels et $\varepsilon > 0$. Soit $Q'_j = \prod_{i \neq j} P_i$. Il existe Q''_j qui vérifie $|Q''_j(x_{i,j}) - y_{i,j}/Q'_j(x_{i,j})| < \varepsilon/|Q'_j(x_{i,j})|$. Soit alors $Q = \sum Q'_j Q''_j$. On a $Q(x_{i,j}) = Q'_j Q''_j(x_{i,j})$ qui vaut $y_{i,j}$ à ε près.

Soit maintenant $J(K) = J_0(K) \cup \{x_1, \cdots, x_r\}$, $\varepsilon > 0$, et P le produit des polynômes minimaux des éléments de $J_0(K)$. Soit f une fonction nulle sur $J_0(K)$.

Par le lemme, il existe Q tel que $|Q(x_i) - f(x_i)/P(x_i)| < \varepsilon/|P|_K$. Alors $f - QP$ est à ε d'une fonction g, nulle sur $J(K)$. Comme g est interpolable, il existe R qui l'approche à ε près et $QP + R$ approche f à 2ε près.

Exemple : le cas de $[-a; a]$

Soit $I_a = [-a; a]$. Alors $\operatorname{cap}(I_a) = a/2$. Si $a \geqslant 2$, il ne se passe rien d'intéressant. Soit donc $a < 2$.

Soit $x \in J_0(I_a)$ et $z \in \mathbf{C}$ tel que $x = z + z^{-1}$. Le complexe z est un entier algébrique dont tous les conjugués sont de norme 1. Par le théorème de Kronecker, c'est une racine de l'unité. Il existe donc des entiers j et k, premiers entre eux, tels que $x = x_j = 2\cos(2\pi j/k)$. Les conjugués de x sont les x_j pour $j \in (\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^*$, et doivent être dans I_a eux aussi, c'est à dire que l'on doit avoir $x_1 < a$ ce qui nous donne $k \leqslant 2\pi/\arccos(a/2)$.

On a donc :

$$J_0([-a;a]) \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant \frac{2\pi}{\arccos(a/2)}} \left\{ 2\cos\left(\frac{2\pi j}{k}\right), (j,k)=1 \right\}$$

Le lecteur est invité à traiter le cas des intervalles $[a;b]$ puis à s'essayer à des unions disjointes d'intervalles.

Références

[1] P. Borwein, T. Erdélyi, *Polynomials and polynomial inequalities.* Springer Verlag, GTM 161

[2] Le Baron O. Ferguson, *Approximation by polynomials with integral coefficients.* Mathematical Surveys 17, AMS

[3] S. Gonnord & N. Tosel, *Topologie et Analyse Fonctionelle.* Ellipses

ENSEIGNEMENT

Sur l'enquête timss

Alain POMMELLET

Le résultat de l'enquête TIMSS, présenté avec une fierté légitime par Michèle Pécal, membre de l'APMEP dans l'article *À propos de l'étude internationale* TIMSS[1], a certainement surpris tous ceux qui voient de jour en jour se dégrader le niveau d'arrivée de leurs étudiants. La France première aux tests d'évaluation des élèves scientifiques en fin d'études secondaire ! ce serait donc l'indice d'une bonne tenue de notre enseignement mathématique. On ne peut cependant s'empêcher d'être surpris par l'écart de ce résultat avec celui des Olympiades Internationales et donc de s'interroger sur la nature du test.

Évoquer la réussite ou l'échec des étudiants français à une épreuve donnée ne signifie rien si l'on ne dispose pas des questions effectivement posées aux étudiants. Les problèmes des olympiades internationales sont régulièrement publiés dans des revues accessibles à tous, de même que les problèmes de bac ; ce n'est pas le cas des questions de TIMSS et nous avons eu quelques difficultés à nous procurer celles qui sont fournies en annexe.

Évaluer un niveau, ce n'est pas mesurer une taille ou une température : il n'y a évidemment pas ici d'étalon international, ni de SUI[2]. Il est donc indispensable de préciser avec soin la liste des qualités que l'on a voulu détecter, comme la pertinence des moyens employés au regard du test. Or rien de tout cela n'apparait dans l'article précité de Michèle Pécal ; d'où la nécessité de combler cette lacune par une étude directe des questions posées.

Les énoncés que nous avons pu nous procurer semblent, selon les rapporteurs de TIMSS, représentatifs du niveau général du test. Les observations suivantes, fondées sur les textes fournis en annexe, nous paraissent donc pertinentes quant aux limites de la fiabilité del'évaluation :

— Il s'agit, à de rares exceptions près, d'un QCM. Or ce type d'interrogation ne prend jamais en compte l'aptitude au raisonnement des candidats. L'essentiel de la démarche mathématique, surtout en *spécialité mathématique* — puisque rapellons-le, ce sont les étudiants spécialisés en mathématiques qui sont ici notés — consiste à étayer par une preuve ce que l'intuition fait pressentir ; on n'en trouve pas trace ici.

— Le niveau des questions, semble-t-il adapté à un vague tronc commun mathématique mondial, est très faible. Ce qui prime avant tout, c'est de pouvoir répondre vite à des questions standards ; à une exception près, il n'y a guère d'imagination là-dedans.

— Les qualités développées par l'enseignement des pays de l'est, notamment en arithmétique, dans la manipulation des inégalités, ne sont pas prises en

[1] paru dans la *Gazette des mathématiciens* n° 82
[2] système d'unité international.

compte. Pour la plupart, les questions sont très proches de celles qui sont indéfiniment répétées dans les problèmes de l'enseignement secondaire français : inégalités linéaires, études de fonctions.

— Enfin, est-il nécesssaire de consacrer, en première et terminale, 5 puis 6 heures (6+8 respectivement, avec l'enseignement de spécialité) par semaine au cours de mathématiques pour répondre à des QCM de ce niveau ? Et quel est le temps consacré aux mathématiques par les étudiants étrangers ? Sans réponse à ces questions, l'étude perd sa valeur comparative.

Les conclusions que l'on peut tirer en ayant pris connaissance de la nature des épreuves TIMSS sont donc fort différentes de celles que l'on pouvait émettre *ex abrupto* : la terminale S réussit fort bien lorsqu'il s'agit de former les élèves à répondre à des questions simples et stéréotypées choisies dans des domaines techniques et répétitifs. Le bac le montrait déjà clairement, avec ses moyennes de notes élevées, notamment en mathématiques. Elle échoue en revanche à former ce que nous considérons comme des mathématiciens ; voire même à donner à la majorité des futurs scientifiques une idée juste de ce qu'est le raisonnement mathématique. Le vrai défi à relever est de restaurer en France la promotion des jeunes talents, sans pour autant sacrifier la majorité. Un pays de taille moyenne comme le nôtre, et qui n'a pas les moyens d'acheter massivement ailleurs ses élites scientifiques, doit résoudre ce problème ou accepter de n'exister qu'à l'ombre des grandes coalitions économiques.

Image (12cm/ 18cm)

Énoncé 1

Image (12cm/ 18cm)

Énoncé 2

Image (12cm/ 18cm)

Énoncé 3

Image (12cm/ 18cm)

Énoncé 4

Image (12cm/ 18cm)

Énoncé 5

Image (12cm/ 18cm)

Énoncé 6

Perspectives de l'enseignement de la statistique et des probabilité

Michel HENRY (*Université de Franche-Comté, IREM*)

1. Les objets d'un débat abusivement présenté comme une querelle entre anciens et modernes

La publication au B.O. du nouveau programme de seconde, applicable à la rentrée 2000, dont la partie statistique a été adoptée « sans réserve » par le conseil national des programmes, a soulevé une émotion visible (pétitions...) dans la communauté des enseignants de mathématiques. Un débat a posteriori s'est développé sur la faisabilité de l'enseignement proposé par ce programme et des comptes rendus de nombreuses expérimentations commencent à être diffusés. Leur analyse pourrait apporter un peu de sérénité, tout en ne réglant ni le problème de fond sur la place relative de l'initiation à l'observation statistique et de l'enseignement plus théorique des probabilités, ni celui de la formation massivement nécessaire des enseignants confrontés à des démarches assez nouvelles pour eux, dans un contexte de réductions horaires et d'alourdissement des contraintes de l'enseignement des mathématiques dans des classes de seconde très hétérogènes.

Le caractère très limité de cet article ne permet pas de développer comme il serait souhaitable cette problématique qui oppose une approche purement expérimentale de cet enseignement à une conception plus théorisante de l'initiation aux probabilités. Il ne semble pas y avoir de divergence profonde quant à l'appréhension du statut théorique de la probabilité, en tant qu'objet mathématique défini dans le cadre de la modélisation de phénomènes aléatoires. La discussion porte surtout sur les objectifs qu'il convient d'assigner à cet enseignement au lycée.

L'option retenue par le programme de seconde est de se limiter à l'observation de l'aléatoire, sous la forme des « fluctuations d'échantillonnage » et à l'étude des « distributions des fréquences » des issues d'une expérience répétée, variables suivant les échantillons obtenus. Seules les situations d'équiprobabilité, ramenées à des jeux de hasard simples (pièces, dés...) sont envisagées comme exemples de manipulations, simulées ensuite grâce aux performances des outils informatiques.

J'ai peur d'avoir par trop caricaturé l'esprit de cette introduction à la statistique, une lecture du programme lui-même me semble tout à fait nécessaire. Un des éléments les plus importants de la controverse, me semble-t-il, est l'évitement délibéré et systématique du concept de probabilité, remplacé par la notion floue de « chances », interdisant la possibilité d'une prise de recul un peu théorique dans l'explicitation de ces faits d'observation. Il semble que ce point de vue s'impose également dans les projets actuellement en débat des programmes de première et terminale S, où la notion de loi de probabilité est dégagée de l'étude empirique des distributions de fréquences. Nous divergeons donc sur la place et la nature de l'enseignement des probabilités au lycée.

La dialectique statistique-probabilité me semble devoir faire l'objet d'un enseignement coordonné, prenant ses racines dès le collège. C'est pourquoi, je ne suis pas vraiment satisfait du programme actuel de probabilités, introduites tardivement en première, sans lien explicite avec les démarches de la décision statistique. Les travaux contemporains sur cet enseignement[1] mettent en avant l'importance de l'initiation aux processus de modélisation à partir de situations aléatoires simples, soit d'équiprobabilité légitimement postulée, soit sous des hypothèses issues de l'observation des fréquences.

Mais le nouveau programme de seconde me semble prendre un contre-pied trop systématique à l'enseignement actuel, fruit d'une évolution progressive positive et non achevée. Pour replacer ces changements dans leur perspective, il n'est pas inutile de revenir sur trente cinq années d'enseignement des probabilités au lycée.

2. Évolution de l'enseignement des probabilités dans le secondaire français de 1965 à 1991

L'enseignement des probabilités dans le secondaire est relativement récent[2]. À l'exception de certaines séries techniques économiques de la fin des années 50, il remonte au milieu des années 60. Pour se faire une idée de son évolution au cours de ces 30 dernières années, on peut reprendre quelques extraits des programmes des séries scientifiques classiques (terminales C et D), qui ont précédé le changement de point de vue des programmes de 1991, adapté ensuite aux filières actuelles L, ES et S en 93 :

— *1965 (TD) : « 1° Préliminaires d'analyse combinatoire... 2° Principe du calcul des probabilités. Variable aléatoire... 3° Statistique appliquée ».*
— *1970 (TC) : « 1° Espaces probabilisés finis* $(\Omega, \mathrm{B}(\Omega), p)$*. Applications mesurables... 2° Espérance mathématique,... 3° loi faible des grands nombres ».*
— *1982 (TD) : « a) Combinatoire. b) Exemples de situations où le hasard intervient. Ensemble fini d'épreuves* Ω*... Probabilité uniforme sur* Ω*, calcul des probabilités par dénombrement... c) Aléa numérique... d) statistiques ».*
— *1986 (TC) : « 1. Combinatoire ; probabilités... En probabilités, l'objectif est d'entraîner les élèves à décrire grâce au langage élémentaire des événements, quelques expériences aléatoires simples, et à employer les techniques de dénombrement pour calculer des probabilités ».*

On peut y remarquer un dénominateur commun : mis à part les années 70 des « maths modernes », où la structure d'espace probabilisé servait de toile de fond à l'introduction des probabilités comme objets abstraits définis dans un modèle mathématique, le calcul des probabilités est a priori présenté comme application de la combinatoire. La notion de probabilité est en effet introduite

[1] Notamment publiés dans le livre coordonné par R. Kapadia et M. Borovcnik *Chance encounters : Probability in Education*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
[2] Pour une étude plus complète sur l'évolution des programmes de l'enseignement secondaire français, on pourra se reporter à l'article de Bernard Parzysz *Les probabilités et la statistique dans le secondaire d'hier à aujourd'hui*, publié dans le livre de la commission inter-IREM *« Statistique et probabilités » : enseigner les probabilités au lycée*, ed. IREM de Reims, 1997.

par le premier principe de Laplace qui donne comme définition de la probabilité d'un événement décrit par un système de cas supposés équiprobables, le rapport $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Cette définition est restrictive, adaptée aux situations d'équiprobabilité idéales des jeux de hasard. En posant que toute situation aléatoire peut se ramener à un système de cas équiprobables, elle réalise difficilement le lien avec l'observation de la réalité : phénomènes d'attente, fiabilité en technologie, modèles économiques... Sur le plan de l'enseignement, elle a eu surtout pour effet d'enfermer les élèves dans des exercices délicats de combinatoire, ce qui fut la source de l'échec de cet enseignement pour bon nombre d'entre eux.

Citons Jacques Bernoulli[3] :

> *« On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose, il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard... En effet lorsqu'il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'œuvre de nature soit de l'arbitre des hommes, cela n'a pas du tout lieu ».*

Et Bernoulli cite les phénomènes climatiques, la propagation des épidémies, les choix stratégiques entre adversaires.

3. L'enseignement des probabilités dans les années 90 au lycée

La réforme du programme de première en 1991 tente un rapprochement avec l'observation de la réalité aléatoire pour introduire la notion de probabilité à partir de l'observation des fréquences :

> *« L'objectif est d'entraîner les élèves à décrire quelques expériences aléatoires simples et à calculer des probabilités. On évitera tout développement théorique. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois ».*

Puis le concept mathématique de probabilité est introduit par la définition empruntée au deuxième principe de Laplace :

> *« La probabilité d'un événement est définie par addition de probabilités d'événements élémentaires ».*

Cette définition, très générale dans le cas discret, laisse la porte ouverte sur l'introduction des probabilités élémentaires : hypothèses de modèle (équiprobabilité ou répartition théorique donnée), estimation fréquentiste, ajustements de lois, appréciations subjectives...

---

[3] *Ars Conjectandi*, chapitre IV de la 4e partie : La double manière de rechercher les nombres de cas...

Quelques remarques sur ce programme de 1991[4] :

— Le choix d'introduire la notion de probabilité par l'observation de la « relative » stabilisation des fréquences lors de la répétition d'une même expérience aléatoire, induit un regard expérimental sur cette notion. Cela suppose la mise en œuvre dans la classe d'expériences concrètes (répétées par l'accumulation des observations de chacun des élèves) et de simulations sur ordinateur. Il faut reconnaître que cette partie de la découverte de cette nouvelle notion n'est pas suffisamment prise en compte par les enseignants qui sont souvent en manque de temps (mais ce n'est pas la seule raison : des arguments épistémologiques et didactiques plus profonds seraient éclairants).

— La définition proposée est la bonne, car elle correspond à l'idée plus générale de mesure : sous-additivité de la probabilité. Le cas particulier de l'équiprobabilité est introduit seulement ensuite dans le programme. Cela n'empêche pas les manuels de le mettre massivement en avant dans les « activités introductives » et les exercices proposés, et les enseignants de se rabattre très vite sur des exercices de combinatoire simple.

— La rédaction de ce programme comporte certaines faiblesses, voire ambiguïtés. En faisant l'impasse sur tout processus de modélisation (on s'en tient à la « description d'expériences aléatoires simples » sans proposer de l'interpréter en un modèle théorique), le programme autorise la confusion entre fréquence expérimentale et probabilité conçue alors à tort comme une fréquence limite (quelle sorte de limite entre des relevés d'observations et un nombre théorique ?).

— L'existence même de la probabilité (son unicité objective) est source de questionnement épistémologique. Si elle n'est généralement pas niée dans le cadre de situations relevant de la « géométrie du hasard », elle suppose une inférence dans les cas où l'équiprobabilité n'a pas de sens[5].

En fait la confusion entre modèle et réalité est omniprésente dans l'enseignement des mathématiques et à l'origine de difficultés didactiques essentielles. Le projet de programme de première L de 1993 avait tenté de pallier à cet obstacle, mais il n'a pas été retenu :

> *« Il s'agit, comme dans les autres programmes, d'aborder la notion de probabilité à partir de la fréquence, mais on a choisi dans cette série d'affiner l'explicitation du processus de modélisation. L'objet de cette partie de la formation est donc de faire découvrir, en s'appuyant sur l'expérimentation numérique, quelques notions qualitatives et quantitatives liées à la modélisation mathématique des phénomènes aléatoires ».*

— Le programme de 1991 présente une réelle disjonction entre l'introduction expérimentale de la notion et l'usage ultérieur théorique qui en est fait. La simulation n'est pas évoquée, le vocabulaire ensembliste, délaissé jusque là, est appelé pour combiner formellement les événements sans références à leurs significations logiques, ni retour au contrôle expérimental. La notion de loi est

---

[4] On trouvera une critique plus étoffée sur les plans épistémologiques et didactiques dans *L'enseignement des probabilités*, M. Henry, ed. IREM de Besançon, ainsi que dans *Enseigner les probabilités au lycée*, Commission Inter-IREM « Statistique et probabilités », ed. IREM de Reims.

[5] Cf. le raisonnement d'Hélène Ventsel cité dans l'article : *L'enseignement du calcul des probabilités dans le second degré*, M. Henry, Repères-IREM n° 14, janvier 1994.

introduite formellement en terminale, sans la dégager de situations concrètes lui donnant sens et induisant une certaine cohérence dans la répartition des probabilités élémentaires. La mise hors programme de toute loi standard enlève à cette notion toute utilité à ce niveau.

Ainsi, de nombreuses critiques, notamment dans les publications des IREM, émergeaient après sept ans d'enseignement de ces programmes de probabilités. En 1991 ils avait représenté une réelle avancée, mais ils demandent aujourd'hui à être améliorés pour mieux atteindre les objectifs de formation scientifique dans laquelle l'enseignement de la statistique et des probabilités prend toute sa place.

4. L'enseignement des outils de la statistique descriptive

Les programmes des collèges de 1985 introduisent très progressivement les outils de la description statistique sous le titre « organisation et gestion des données » : populations statistiques et caractères, séries statistiques, séries classées, effectifs et fréquences, représentations graphiques, diagrammes, paramètres de position (médiane, moyennes), notion de dispersion. L'ancien programme de seconde proposait une synthèse des notions et du vocabulaire de base de cette description statistique, prolongée dans certaines séries de premières et terminales par les outils d'étude de statistiques à deux caractères conjoints.

L'acquisition de ces notions et leur utilisation critique est essentielle pour la formation des futurs citoyens : lecture de tableaux, de graphiques, d'analyses économiques, sociologiques... Or il apparaît que cet apprentissage n'est pas spontané, il s'appuie sur une bonne compréhension des pourcentages et de la proportionnalité, ainsi que sur une certaine pratique des articulations logiques (disjonction, conjonction, négation) mettant en jeu un peu du vocabulaire des ensembles. Il me semblerait désastreux de faire l'impasse sur cette partie des connaissances de base, qui sont loin d'être maîtrisées à l'entrée en seconde.

Cependant, les programmes des collèges et de seconde des années 85–99 évitaient soigneusement de présenter les données statistiques comme provenant d'un échantillonnage (aléatoire ou systématique) ou plus généralement d'un ensemble de résultats aléatoires. Elles étaient présentées comme exhaustives, ce qui ne permet pas dans ces conditions de soulever des questions d'inférence, de jugement statistique. Ainsi les élèves ne pouvaient réellement comprendre la fonction d'aide à la décision de la statistique moderne. On peut donc penser que limiter cet enseignement aux seuls outils de la description statistique, occultait le sens profond des démarches en statistique. Dans le domaine de l'enseignement de la statistique, une mise à jour paraissait également s'imposer.

5. Un regard critique sur le nouveau programme de seconde

Les intentions affichées dans le projet de document d'accompagnement me semblent excellentes :

— acquérir une expérience de l'aléatoire ;

— comprendre ce qu'est une question statistique et le type de réponse que l'on peut proposer ;

— voir dans un cas simple ce qu'est un modèle probabiliste.

Concernant l'expérience de l'aléatoire, on peut remarquer qu'il est grand temps en classe de seconde de travailler sur un sujet qui semble tabou au collège : l'aléatoire dont les élèves sont familiers depuis longtemps dans leur vie quotidienne. Des expérimentations (doctorat en cours) montrent que la variabilité des issues d'une expérience aléatoire est facilement acceptée, et dans les situations simples de succès-échec, peut être modélisée par des tirages dans une urne de Bernoulli dont le statut théorique ne semble pas poser de problème.

Mais aborder l'aléatoire par l'observation des fluctuations d'échantillonnage me semble ambitieux pour un démarrage. À l'étape actuelle, en attendant que les futurs programmes de collèges intègrent cette familiarisation avec l'aléatoire, ne vaudrait-il pas mieux se limiter en seconde à l'observation des fréquences de réalisation d'un événement dans plusieurs séries d'épreuves, comme les programmes des classes de première le proposaient jusqu'à présent ?

Cela amène à s'interroger sur les conditions didactiques permettant de travailler sur la simulation d'expériences aléatoires, sans introduire la notion de probabilité en tant que concept théorique. Quel lien en effet établir entre une simulation et l'expérience réelle sans passer par la référence à un modèle théorique commun ?

Je partage entièrement la critique du risque des programmes de première actuels de faire passer la probabilité pour une fréquence limite, ce qui effectivement n'a pas beaucoup de sens. Or n'est-ce pas multiplier ce risque que de proposer l'étude et même la comparaison des distributions de fréquences d'événements associés à une épreuve répétée, comme préfigurant la « distribution théorique » de la probabilité ?

Je pense qu'il conviendrait de limiter la complexité de ces premiers pas : les travaux en didactique des probabilités montrent que la notion même d'expérience aléatoire nécessite un certain travail, faute duquel des confusions rédhibitoires sont monnaie courante. De ce point de vue, il me semble essentiel de bien séparer dans le vocabulaire ce qui relève de l'observation statistique de ce qui permet la description d'un modèle probabiliste interprétatif. Quel sens donner par exemple à la locution « événement associé à une série statistique » ? De manière générale, il ne me semble pas judicieux de réduire l'outil statistique à la seule description des issues d'une épreuve aléatoire répétée.

Pour revenir au nouveau programme de statistique en seconde, si la variabilité des résultats obtenus dans un échantillonnage en est un des objectifs, les moyens d'exprimer cette variabilité doivent en être les outils. L'argumentation présentée pour l'étendue ne me paraît pas convaincante, ne traduisant pas suffisamment l'idée de dispersion. L'intervalle interquartile, très facilement accessible aussi bien pratiquement que conceptuellement (sans interpolations !), en donne une meilleure idée, tout en relativisant le poids des valeurs extrêmes. Sa représentation simple en boîtes à pattes (ou à moustaches) permet des comparaisons visuelles. Le concept étant ainsi introduit, la critique du caractère grossier de l'intervalle interquartile étant faite, son raffinement peut aboutir à l'écart type.

Mais le lien de ce paramètre avec les répartitions gaussiennes me semble impossible à présenter en seconde. Qu'est-ce qu'un « phénomène gaussien » ? Qu'en est-il pour un élève, mais aussi pour un enseignant qui n'a reçu qu'une formation élémentaire en probabilités ? Remarquons, pour répondre à certains arguments, que l'écart type intervient aussi comme outil théorique en dehors de situations gaussiennes (par exemple dans l'inégalité de Tchebychev) : si Bernoulli en avait disposé, sa démonstration de son « théorème d'or » en aurait été grandement raccourcie.

J'en viens à ce qui a fait le plus réagir les collègues qui enseignent en classe de seconde : l'introduction en thèmes d'étude aux situations de sondages (répartition d'un fort pourcentage des fréquences observées sur des échantillons de taille suffisante dans un intervalle calculable a priori). Ce thème d'étude introduit la notion de « fourchette de sondage », toujours en l'absence de la notion de probabilité. L'intention me semble tout à fait intéressante, ne serait-ce que pour parler sérieusement des résultats d'un sondage par exemple. Mais elle suppose beaucoup de travaux didactiques pour aboutir à l'installation d'un savoir à ce niveau. Je ne sais pas si cela est accessible. Sans une claire compréhension du caractère aléatoire des échantillons observés et du caractère probabiliste des indications que l'on peut en tirer, on ne peut s'en tenir qu'à un aperçu empirique. Il faudra beaucoup d'exemples pour dégager une idée transférable et en faire un outil de décision dans le cadre de l'observation statistique. Le programme va jusqu'à faire remarquer que l'écartement de cette « fourchette » est en $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Je ne vois pas ce qui dans ce contexte empirique peut le valider, pourquoi pas en $\frac{1}{\ln(n)}$? Comment, dans ces conditions, éviter un enseignement dogmatique auquel les élèves ne peuvent donner du sens ?

D'autres thèmes d'étude proposés (promenades aléatoires) me semblent maladroits par l'effet d'incompréhension qu'ils provoquent chez les lecteurs du programme que sont les enseignants. Intéressants en soi, ils me semblent plutôt convenir pour l'illustration de modèles probabilistes à un niveau post-bac que pour un enseignement de la statistique.

Je conclurai ces quelques remarques introductives à un débat d'ordre épistémologique et didactique, par des préoccupations de nature à la fois psychologiques et institutionnelles.

Nous avons déjà connu (période des maths modernes) cette sorte de volontarisme prétendant pousser les enseignants à compléter leur formation par l'obligation de s'adapter à une réforme des programmes. Pour louable qu'il soit, il se heurte aux réalités : on n'enseigne vraiment que ce qui est profondément compris. Il faut que l'objet d'enseignement puisse vivre dans une relation didactique contrainte par une culture scolaire dont l'évolution est lente et complexe. Combien de professeurs de seconde auront compris les objectifs de ce programme au point d'en faire leur affaire personnelle ? Combien sauront aménager ces objectifs avec les réductions d'horaires dont ils disent être victimes en fonction de leur propre conception de l'enseignement des mathématiques ? Il y aura à vaincre des résistances sur le plan même du rapport au savoir.

L'enjeu profond de ce programme, qu'au fond je partage, est de prendre en charge la dimension expérimentale des outils mathématiques et d'en tirer une didactique. La meilleure méthode n'est pas forcément de bousculer les pratiques enseignantes au point de déstabiliser un système de transposition, même sous la promesse d'une formation continue dont la mise en œuvre laisse aujourd'hui sceptiques la plupart des collègues, qui par ailleurs vivent leur métier avec beaucoup d'investissement. Le projet de programme proposé dans sa formulation a provoqué d'emblée une levée de boucliers, ce qui n'induit pas un contexte très favorable pour engager un progrès souhaitable de l'enseignement de la statistique et des probabilités.

Pour tout ce qui touche à l'enseignement, on ne peut ignorer les contraintes didactiques et la prise en compte des travaux de recherche sur le sujet ne peut être négligée. C'est un des messages que j'ai souhaité faire passer à nos collègues chargés de la réforme des programmes et au-delà à tous ceux qui se sentent concernés par l'avenir de l'enseignement des mathématiques dans notre pays.

A propos des programmes de Statistique de seconde

Texte adopté le 1er février 2000 par le conseil du laboratoire de probabilités et modèles aléatoires des universités de Paris 6 et Paris 7 et le 3 février 2000 par le centre de mathématiques de Paris 12 (Créteil).

Les documents sur lesquels nous nous sommes fondés sont les suivants :

1. Nouveau programme applicable à compter de l'année scolaire 2000-2001 en classe de seconde (B.O. n° 6 du 12 août 1999, Hors-série).
2. L'article de la présidente du groupe de travail disciplinaire de mathématiques (Claudine Robert) paru dans la *Gazette des mathématiciens* (n° 82, pp. 61-64, octobre 1999).

Il ressort de ces documents, après une analyse succincte, que :

– La statistique est enseignée au collège et au lycée depuis la classe de sixième.

– Cet enseignement est entièrement concentré durant le collège et jusqu'en seconde, sur un corpus de connaissances relevant de la « statistique descriptive » (représentation de données, indicateurs statistiques divers : moyenne, médiane, classe modale, « moyenne élaguée », etc), incluant l'initiation à l'usage statistique de tableurs-grapheurs.

– En seconde l'accent est mis sur la notion de « simulation » et de « fluctuation » d'un échantillon, effleurant ainsi les aspects probabilistes de la statistique. Le lien statistique-probabilités sera abordé en première (apparemment dans toutes les filières).

– Les « capacités (calculatoires) attendues » portent sur la linéarité de la moyenne, calcul de moyennes sous forme de moyennes de sous-moyennes et le calcul de moyennes à partir des diagrammes de fréquences.

Les programmes de statistique des classes antérieures à la seconde ont donc pour but avoué d'initier les élèves à la lecture d'informations statistiques de la vie courante ou professionnelle. C'est un but louable. En tant que citoyens nous sommes tous submergés par un flot sans cesse croissant d'informations synthétisées sous forme statistique (des basiques « camemberts » aux sondages « par la méthode des quota »).

En seconde, s'ébauche un glissement insensible d'une statistique descriptive « compresseuse de données » vers une statistique plus probabiliste (sans que le mot ne soit jamais prononcé). Glissement insensible mais à haut risque : la moyenne et l'écart-type de la répartition exhaustive du nuage de notes obtenues par les élèves d'une classe à un contrôle sont-ils de même nature que ces mêmes quantités calculées lors de simulations de nombres au hasard ou de la répétition « indépendante » d'une même expérience de mesure pour en accroître la précision ? Où, quand, comment passe-t-on de la statistique descriptive à la statistique probabiliste (communément appelée « mathématique ») ? Il nous semble que dans les faits cette transition a lieu lorsque l'on modélise la situation étudiée. Or, les mots « modèles », « modélisation » ne sont jamais prononcés dans le programme (Claudine Robert les évoque indirectement lorsqu'elle évoque au détour d'une phrase des « données gaussiennes » en biologie). En quoi consiste une modélisation élémentaire en statistique mathématique ? Pour l'essentiel à introduire des variables aléatoires décrivant un phénomène aléatoire, à en fixer les lois avec plus ou moins de précision et à faire des hypothèses d'indépendance entre certaines de ces variables (typiquement : répétition d'expériences indépendantes). Une modélisation statistique est par nature probabiliste.

Nous ne méconnaissons pas toutes les difficultés inhérentes à la modélisation. Nous savons qu'elles sont pour beaucoup dans les difficultés rencontrées par l'enseignement des probabilités à tous les niveaux. Pour autant, le souci de contourner cette difficulté conduit à des résultats paradoxaux.

– La notion de hasard en tant que tel n'est jamais abordée : celui-ci n'apparaît que comme un outil non défini mais néanmoins « efficace » permettant de simuler (de façon parfaitement déterministe et reproductible d'ailleurs) des suites de nombres... au hasard avec une machine. Devant un tel niveau d'utilitarisme sur un sujet de nature à exciter la curiosité des élèves, on reste un peu perplexe.

– Le programme privilégie l'étude (empirique) de la fluctuation d'échantillonnage, plus connue des spécialistes sous le nom de théorème de la limite centrale. Il s'agit de la mesure de la vitesse à laquelle la fréquence empirique converge vers la moyenne théorique (l'espérance mathématique). Cette convergence est, elle, plus connue sous le nom de « loi des grands nombres ». Il s'agit du résultat fondateur des probabilités et de la statistique. Or la loi des grands nombres n'est pas mentionnée en tant que telle dans le programme. En fait, elle n'apparaît que comme point de départ à l'étude empirique des « fluctuations d'échantillonnage ». L'embarras des concepteurs du programme est certes compréhensible : sans probabilités, il est impossible d'énoncer la version dite « faible » de la loi des grands nombres et sans notion de limite, il est impossible d'énoncer la version dite « forte ». Il reste qu'une exploration de la loi des grands nombres paraît s'imposer en amont de celle de ses fluctuations. Disons que, *a minima*, sur ce point, le programme n'a pas toute la progressivité (ou toute la clarté) requise.

Sur un mode plus trivial, il est proposé dans le cadre des thèmes d'étude de procéder à des simulations manuelles (jets de pièce, lancers de dés,...). Il nous semble que, à l'heure des jeux vidéo, impliquer les élèves dans un tel processus est une vue de l'esprit. À tout prendre une coordination avec un professeur de sciences physiques sur un problème effectif de mesure nous paraîtrait au moins aussi efficace (mais peut-être est-ce prévu). Autre option possible, parmi d'autres, analyser l'historique de séries statistiques disponibles : on peut penser aux tirages du loto, au risque il est vrai de conforter certains collègues dans leur assimilation hasardeuse des probas-stats à la Française des Jeux (lu sur la toile)...

Dans ce contexte, le programme proposé s'appuie donc essentiellement sur la simulation informatique. Soit. Nous sommes nous-mêmes profondément convaincus et depuis longtemps de l'intérêt de la simulation numérique et des bouleversements réels et irréversibles qu'elle a provoqués dans les domaines des probabilités appliquées et de la statistique. Son introduction dès le lycée nous paraît tout à fait opportune, notamment pour les extraordinaires possibilités de visualisation des phénomènes qu'elle offre. Mais, en l'absence de tout corpus théorique et accompagnée de recommandations expresses du type « la notion de fluctuation d'échantillonnage et de simulation ne doit faire l'objet d'aucun cours », nous nous prenons à douter. Non seulement du bien-fondé d'une telle introduction mais aussi des buts poursuivis à travers elle. Demanderait-on aux mathématiciens de transmettre l'idée selon laquelle on perd son temps (et son argent) à échafauder des modèles et bâtir des théories quand on peut arriver plus vite au même résultat, et pour moins cher, à l'aide d'une simple simulation ?

Sur un plan pratique, où, dans le programme proposé, un enseignant puisera-t-il les arguments de nature à dissuader ses élèves de faire des statistiques sur les tirages du Loto pour jouer les numéros « en forme » ou en « retard » ? Ou encore, sachant qu'au moins deux fois sur trois un tirage de ce même loto comporte deux numéros consécutifs, comment les convaincra-t-il, de ne pas jouer préférentiellement de telles combinaisons ? Incidemment, sur quelle notion se fondera-t-il pour les convaincre... de ne pas jouer du tout ? Devra-t-il, à chaque question, prescrire une simulation préliminaire ? N'aboutit-on pas là à une certaine négation de l'essence même des mathématiques ?

En conclusion, ce qui se dégage de ce programme c'est une volonté affichée de classer la statistique comme une science exclusivement expérimentale, trouvant ses fondements et son cheminement dans la simulation informatique. L'absence voulue de toute référence probabiliste et de toute modélisation ne laissait, il est vrai, guère d'autre choix. Or, c'est à notre avis transmettre une idée fausse de la statistique, notamment aux élèves qui ne poursuivront pas des études scientifiques. Pour les autres, ce n'est guère mieux, car il ne faut pas mésestimer les effets négatifs de cette première vision radicalement utilitariste et instrumentale du monde stochastique sur l'opinion finale qu'ils s'en formeront.

Quelles mathématiques pour la formation des étudiants, dans les années à venir ?

Nous présentons ci-dessous un dossier qui réunit des contributions écrites au débat organisé par la Société Mathématique de France le 15 janvier dernier à l'ENS. Ce dossier contient : un compte-rendu succinct rédigé par Nicole Berline qui anime la commission enseignement de la SMF, deux exposés des intervenants (Jean-Pierre Kahane et Michel Artigue) et deux réactions de collègues présents au débat (Gilles Pagès et Laurent Mazliak). D'autres thèmes ont été abordés. La SMF met à disposition sur son serveur `http://smf.emath.fr/` une rubrique « débat sur l'enseignement des mathématiques » pour accueillir les contributions ultérieures.

⋆ ⋆ ⋆

Compte-rendu de la réunion du 15 janvier 2000

Nicole BERLINE (*École polytechnique*)

Mireille Martin Deschamps, présidente de la SMF, explique les buts de la réunion : la SMF a souhaité manifester son intérêt pour les questions d'enseignement à tous les niveaux et offrir l'occasion d'un débat entre la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) et l'ensemble de la communauté mathématique.

Cette initiative a été bien reçue : la salle Dussane à l'ENS est pleine.

M. Didier Dacunha-Castelle n'ayant pas pu venir, la parole est donnée à Jean-Pierre Kahane, président de la CREM. J.-P. Kahane rappelle l'histoire de la mise en place de la CREM, par le ministre Claude Allègre, à la demande des associations scientifiques de mathématiciens et professeurs de mathématiques (APMEP, SMAI, SMF, UPS). Il explique en détail les modes de fonctionnement et de communication, interne et externe, de la CREM[1], il présente ses objectifs et les travaux en cours. On trouvera le texte de son intervention ci-dessous.

Nous écoutons ensuite l'exposé de François Dusson : *Évolution de l'enseignement des mathématiques dans le second degré*. F. Dusson précise quels sont les horaires de mathématiques et comment ils sont utilisés au collège et au lycée depuis la réforme Bayrou en 1996.

Pour que les débats de l'après-midi soient constructifs, trois thèmes seulement ont été retenus, il a donc fallu en laisser d'autres de côté. Chaque thème est introduit par un bref exposé d'un membre de la CREM. La SMF souhaite que le débat soit prolongé par des contributions écrites. A cet effet, une rubrique

[1] NDR : voir l'article de R. Langevin paru dans la *Gazette* n° 82 (octobre 1999)

« Débat sur l'enseignement des mathématiques » est ouverte sur son serveur internet. Deux de ces contributions se trouvent ci-dessous. Ce qui suit est un compte-rendu personnel des débats, très abrégé.

Calcul et démonstration
Exposé de Michèle Artigue[2]

Il y a plusieurs interventions sur la difficulté à enseigner la logique abstraite, alors que les étudiants la comprennent mieux en situation, dans les sytèmes experts ou les programmes.

Suivent de nombreuses interventions sur l'utilisation des calculettes et logiciels de calcul, les compétences souhaitées en matière de calcul et celles qui sont effectivement obtenues par les élèves.

Plusieurs collègues pensent qu'il est intéressant et même indispensable d'apprendre aux élèves et aux étudiants à tirer partie des calculettes puissantes dont ils disposent presque tous. Cependant dans la plupart des premiers cycles universitaires leur usage dans les examens est interdit, pour pouvoir exiger un minimum de compétences et poser des questions de cours et pour ne pas introduire de différences de nature sociale.

Plusieurs interventions portent sur l'évolution sociale et culturelle des lycéens en ce qui concerne l'origine sociale et les intérêts extra-scolaires. Catherine Dufossé, présidente de l'APMEP, observe que la réduction des horaires d'enseignement est aggravée par le fait que la majorité des lycéens n'a pas de soutien scolaire dans la famille. On insiste aussi sur la difficulté d'adapter les programmes aux objectifs politiques et économiques et aux changements trop rapides de notre temps : il est difficile de changer son point de vue, de donner un autre enseignement que celui qui nous a été donné.

On fait remarquer que, quels que soient les programmes et les recommandations pédagogiques, le souci premier des élèves, de leur famille et de leurs professeurs c'est « le bac ». Des commissions travaillent à le faire évoluer.

Les mathématiques et les sciences de la nature
Exposé de Roger Balian[3]

De nombreuses interventions portent sur l'intérêt et la difficulté pour les enseignants de mathématiques à s'informer sur les applications des mathématiques, prendre des exemples d'applications vraiment extérieurs, aider les élèves à transférer les notions d'un domaine dans un autre, enseigner la modélisation.

Il y a plusieurs interventions sur l'opposition supposée entre mathématiques, science déductive et sciences de la nature inductives. L'évaluation est faite surtout sur l'aptitude à la déduction.

Il serait souhaitable que les meilleurs mathématiciens consacrent du temps à la transmission du savoir, même au niveau élementaire, et à s'efforcer de simplifier des théories mathématiques de manière à pouvoir les exposer aux étudiants.

---

[2] Le texte de cet exposé se trouve ci-dessous.

[3] Les thèmes abordés par R. Balian ont été rédigés dans l'article « Mathématiques et sciences de la nature » (*Gazette* n° 76, avril 1998).

Les mathématiques et l'informatique
Exposé de Michel Merle

Michel Merle apporte des éléments de réponse à la question : quels contenus relevant de l'informatique faut-il introduire dans l'enseignement des mathématiques ?

Les interventions soulignent que la relation info-math dans l'enseignement se joue à trois niveaux : la calculette, un outil simple, comparable à la règle à calcul, l'ordinateur, qu'il faut savoir exploiter pour en faire un outil pédagogique, enfin l'informatique comme science. Les mathématiciens qui n'y sont pas spécifiquement formés enseigneront mal l'informatique, d'autant plus que la science informatique ne se réduit pas aux mathématiques de l'informatique. Elle investit le web, l'imagerie, les systèmes complexes etc., encore qu'il y ait beaucoup de mathématiques dans les « systèmes enfouis ».

Le débat revient sur l'utilisation des calculatrices et des logiciels de calcul dans l'enseignement. Cela peut être l'occasion d'introduire de nouvelles pratiques dans l'enseignement des math au niveau secondaire : algorithme d'Euclide et fractions continues, par exemple. Cependant il faut garder du temps pour apprendre aux élèves à savoir s'exprimer et se créer eux-mêmes des outils. Michele Artigue raconte des expériences de démonstrations mises au point en interaction par des classes qui communiquaient par courrier électronique. Les élèves ont expérimenté les difficultés à communiquer à propos de mathématiques et ils ont ainsi mieux compris l'utilité de la rigueur dans le langage.

La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques

Jean-Pierre KAHANE (*Université de Paris-Sud*)

Historique et mission

L'idée de la commission revient à Michel Broué et la première pièce écrite est sa lettre du 21 octobre 1998, adressée à la SMF, la SMAI, l'APMEP et l'UPS ; comme membre du comité national des programmes (CNP) il ressent l'urgence d'une réflexion globale sur l'ensemble des programmes de mathématiques. La seconde étape est une lettre des quatre associations au ministre, demandant la mise en place d'une telle commission. La réponse positive du ministre, en date du 8 avril 1999, constitue l'acte de naissance de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques.

La lettre expose les objectifs (permettre à l'enseignement des mathématiques d'accompagner et de préparer l'évolution des sciences et techniques dans tous les domaines, élargir le champ en fonction des outils informatiques, veiller au rôle de formation à la rigueur et au raisonnement, participer à la culture scientifique) et la décision :

> « *Je décide de mettre en place, auprès du* CNP*, une commission chargée de faire des propositions pour faire évoluer, de manière progressive et concertée, les objectifs et les contenus de l'enseignement des mathématiques, de l'école élémentaire à l'université. Une fois ces objectifs fixés, il faudra faire évoluer, là encore de manière progressive mais anticipée par rapport aux modifications des contenus d'enseignement, la formation initiale des enseignants et les contenus des concours de recrutement et simultanément imaginer et jeter les bases d'une formation continue des enseignants de mathématiques liée à ces évolutions.*
>
> *La commission pourra disposer du concours de l'administration de l'Éducation nationale.*
>
> *Les membres de la commission seront nommés pour deux ans (renouvelables). La commission devra rendre compte de son travail par des rapports d'étape, publiés régulièrement à destination de tous les acteurs du système éducatif. Elle consultera les sociétés savantes et les associations de spécialistes, dont la démarche est à l'origine de cette initiative* ».

Composition et fonctionnement

La commission est constituée de Michèle Artigue, Roger Balian, Frédéric Bonnans, Michel Broué, Guy Brousseau, Claude Deschamps, Jean-Claude Duperret, François Dusson, Olivier Faugeras, Sylviane Gasquet, Jean-Pierre Kahane, Rémi Langevin, Michel Merle, Daniel Perrin, Antoine Petit, Jean-Pierre Richeton, Claudine Robert, Claudine Ruget, soit 18 membres intéressés pour des raisons diverses à l'enseignement des mathématiques et appartenant ou ayant appartenu au corps enseignant des universités et des lycées, à l'inspection générale et aux organismes de recherche (CNRS, CEA, INRIA).

Elle s'est mise en place le 17 avril 1999 et s'est réunie les 5 juin, 11 septembre et 27 novembre. Ses prochaines réunions plénières sont prévues les 11 mars et 3 juin 2000. A la suite de chaque réunion plénière est produit un communiqué, signé par J.-C. Duperret et J.-P. Kahane, éventuellement accompagné de résolutions ou d'annexes. Le premier rapport d'étape, consacré à la géométrie, vient d'être adressé au ministre et aux associations. Le responsable de la diffusion des communiqués, pièces annexes et rapports est Jean-Claude Duperret.

La commission communique aussi avec l'extérieur par chacun de ses membres. L'impulsion et la coordination sont confiés à Rémi Langevin.

Nous avions en juin, à l'initiative de Claude Deschamps, le projet de fonctionner sur un grand pied et avec une grande facilité de gestion. Ce projet n'a pas abouti. Claude Deschamps reste responsable du fonctionnement.

Les réunions plénières du samedi sont peu nombreuses. La communication entre les membres de la commission se fait surtout par courriel et courrier, quelquefois de manière très animée. Nous recevons beaucoup de messages de l'extérieur et les plus importants — parmi lesquels un courriel du 8 novembre de G. Debeaumarché, président de l'UPS et un courrier du 7 janvier de Catherine Dufossé, présidente de l'APMEP — sont communiqués à tous les membres.

L'adoption des résolutions (je pense à l'adresse aux mathématiciens, adoptée en juin 1999), des communiqués et des rapports se fait au terme d'un échange par courrier. C'est ainsi que nous avons adopté le rapport d'étape sur la géométrie, dont les différentes versions ont été rédigées par Daniel Perrin en tenant compte des observations nombreuses et importantes (je pense à un fax de Roger Balian, de 19 pages, lorsque nous pensions le travail essentiellement terminé) suscitées par les versions précédentes. Ce rapport a été adressé au ministre le 11 janvier, puis aux associations initiatrices. Nous attendons les réactions.

Des groupes de travail ont été constitués sur les thèmes principaux. Il s'agit de la géométrie avec Daniel Perrin, de l'informatique avec Michel Merle et du calcul avec Michèle Artigue. Michel Merle introduira le débat sur notre approche des relations entre informatique et enseignement des mathématiques, en insistant sur le contenu des enseignements. Michèle Artigue évoquera la mise en place du travail sur le calcul, suivant trois axes principaux qui traversent les niveaux et les programmes : mesure des grandeurs, calcul approché, calcul exact. Des rapports d'étapes sur ces thèmes complèteront le rapport sur la géométrie. La commission se préoccupe également des enseignements de statistique et probabilités et Claudine Robert nous en a parlé dès le 5 juin.

Les réunions plénières sont essentiellement consacrés à ces thèmes principaux. Mais elles sont aussi, systématiquement, l'occasion d'une ouverture et d'un appel à l'extérieur. Le 5 juin, suivant une idée de Claudine Ruget, Michel Merle a organisé l'audition de François Bacelli, J.-D. Boissonnat et Olivier Faugeras, sur les problèmes mathématiques issus de l'informatique. Le 11 septembre, nous avons entendu Hélène Gispert sur l'histoire des réformes depuis deux siècles et M.-T. Lacroix-Saunier et Marc Fort, respectivement présidente du jury du CAPES et président du jury du CAPES interne ; Sylviane Gasquet avait la responsabilité de la partie historique et J.-P. Richeton du rapport aux examens. Le 27 novembre, Claudine Robert a organisé l'audition d'Edmond Malinvaud, Marc Yor et Lucien Birgé sur statistique et probabilités et introduit le débat. Le 11 mars, Frédéric Bonnans a la charge des invitations et du débat sur les mathématiques industrielles.

Ainsi, le 11 mars, notre temps sera partagé entre informatique (le plus gros morceau), mathématiques industrielles et calcul. Les thèmes de l'informatique et du calcul reviendront à la séance du 3 juin.

Optique et perspective

Cette partie de mon intervention est moins factuelle et j'y exprimerai mes idées personnelles. Elle n'engage donc pas la commission, mais les membres de la commission y reconnaîtront leurs propres idées dont je me suis emparé. J'examinerai nos rapports avec le GTD (le groupement technique disciplinaire auprès du CNP), le temps et l'époque, mathématique et informatique, les interactions des sciences mathématiques et enfin la signification de l'appel aux mathématiciens publié dans le dernier numéro de la *Gazette*.

Le GTD, que préside Claudine Robert, a la mission de rédiger les programmes et la commission de réfléchir aux programmes. Cela peut engendrer un conflit de compétence, mais nous l'avons évité et nous l'éviterons. D'abord en précisant que nos rapports ne sont ni d'inspirateur à exécutant, ni de réalisateur à censeur et j'expliquerai à propos du « temps » quelle est notre différence d'approche. Ensuite parce que le GTD est largement présent au sein de la commission, par sa présidente et par des membres très actifs. Claudine Robert ne nous a pas seulement parlé de statistique en stimulant notre curiosité (l'imitation du hasard, ou la répartition des chiffres initiaux et la loi de Benford), mais elle nous a exposé dès le 5 juin l'orientation des nouveaux programmes de seconde. Rémi Langevin nous a fait parvenir les projets en cours, en sollicitant les avis individuels des membres de la commission.

Lors de sa première intervention, Claudine Ruget a fait une importante remarque : notre époque privilégie la rapidité et le rendement à court terme, alors que l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques exigent de la continuité, de la patience et du temps. Ici se situe la différence principale entre le GTD et la commission. Le GTD se trouve doublement sous l'emprise du temps : il doit rédiger des programmes pour une date fixée et dans le cadre d'horaires qui ont décru au cours du temps. Une parenthèse sur les horaires : dans le texte de Sylviane Gasquet sur « l'enseignement des mathématiques dans le secondaire, de 1900 à nos jours », on voit qu'en 1902, dans les sections latin-sciences et langues-sciences, les horaires en seconde, première et terminale étaient 5+2, 5+2, 8+2, les deux heures hebdomadaires additionnelles étant consacrées au dessin géométrique. Qu'est-ce qui devrait aujourd'hui remplacer le dessin géométrique ? La réponse est assez évidente. Venons-en à la commission. Son rôle est de mener une réflexion de fond, à long terme, sans contrainte de temps, sinon qu'elle doit donner ou suggérer des signes d'évolution visibles immédiatement et que l'année 2000 est propice à cet égard.

Nous sommes à une époque charnière, comme l'observe Catherine Dufossé, à deux points de vue : enseignement secondaire à toute la classe d'âge et introduction de l'informatique. Tous les enfants sont lycéens, mais les parents n'ont pas tous été lycéens. L'informatique est partout, mais les professeurs n'ont pas été formés à l'informatique.

C'est le moment de parler de mathématique et informatique. Il y a entre les deux une solidarité fondamentale, qui repose sur l'histoire (Turing, von Neumann) et sur les pratiques actuelles, mais cette solidarité ne va pas sans contradictions. Beaucoup de mathématiciens ont ignoré longtemps ce que l'informatique apporte comme nouveaux moyens et comme nouveaux points de vue. Beaucoup d'informaticiens ont eu le sentiment d'être méconnus et entravés par les mathématiciens. Mais il faut dire aussi que les communautés ne sont jamais homogènes, et que les instances les plus représentatives des mathématiciens, en France et dans le monde, n'ont pas pris de retard pour reconnaître et stimuler l'essor de l'informatique. Au CNRS, c'est sur la section de mathématiques que l'informatique a pu prendre appui, et cela, dès le rapport de conjoncture de 1969 (citation : « les recherches en informatique se sont beaucoup développées et atteignent maintenant un niveau manifestant l'existence en France d'une science jeune et dynamique ») ; à partir de 1970, le recrutement des chercheurs informaticiens a été accéléré au sein de la section mathématiques-informatique et les mathématiciens ont poussé à la roue. Au sein de l'Union mathématique internationale, c'est le prix Nevanlinna, décerné pour la première fois en 1982 en même temps que les médailles Fields, qui a manifesté la volonté des mathématiciens d'honorer ce qui vient de l'informatique. En 1983 la commission internationale de l'enseignement mathématique a lancé une étude internationale sur l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques et leur enseignement ; le rapport préliminaire, en français, a été publié en primeur par la *Gazette des mathématiciens* en avril 1984. On trouve dans ce rapport et a fortiori dans l'étude qui a suivi, publiée par Cambridge University Press, beaucoup d'idées et de questions qui restent d'actualité. Je ne vais pas les détailler, puisque leur actualisation est précisément l'objet de l'intervention de Michel Merle. Mais je crois bon d'insister sur un point. Lorsque la CIEM a lancé cette étude, ce qui était très légèrement provocateur était d'affirmer l'influence des ordinateurs et de l'informatique sur les mathématiques elles-mêmes et c'est maintenant une idée banale. Par contre, ce qui nous paraissait mûr à réaliser dans l'enseignement des mathématiques n'est pas encore passé, ni en France, ni ailleurs. Ce retard peut avoir une vertu, à savoir d'éviter l'engouement pour les techniques passagères et de nous attacher à ce qu'il y a de permanent et fondamental dans le lien entre informatique et mathématique.

Ce nouveau lien ne rend pas secondaire, au contraire, ce qui lie depuis des siècles mathématique et physique. C'est la première remarque sur nos communiqués que nous a adressée Gérard Debeaumarché et elle est très importante. Le lien entre la physique et la recherche mathématique s'était distendu au milieu du siècle, surtout en France. Il s'affirme maintenant de façon éclatante. Mais le lien entre la physique et l'enseignement mathématique reste à tisser. A cet égard, la participation très active de Roger Balian au rapport sur la géométrie, comme sa présence à cette réunion de la SMF, est un bon signe. La place de la physique dans la formation des professeurs de mathématiques méritera examen.

Au cours de ce siècle la dynamique interne des mathématiques a pu dissimuler pendant un certain temps ce qu'il y a d'essentiel dans ses rapports aux autres sciences et au monde extérieur. Cela a créé chez les mathématiciens, en France surtout, une certaine myopie et un appauvrissement. J'évoquais tout à l'heure la fin des années 1960, pour dire qu'au CNRS les mathématiciens n'avaient pas pris de retard pour reconnaître l'essor de l'informatique. Mais à la même époque, au CNRS, les probabilités étaient dans la section de physique théorique, et non dans celle de mathématiques. Dans les enseignements universitaires et dans les cursus de mathématiques, les mathématiciens avaient abandonné la mécanique. A partir des années 1970, heureusement les probabilités et l'analyse numérique se sont développées au sein des départements de mathématiques des universités. Plus tard, des tensions sont apparues, dont la création de la SMAI porte témoignage. Il est très réconfortant de voir aujourd'hui la SMF et la SMAI agir de concert sur tous les plans et en particulier, sur les questions de l'enseignement, avec l'UPS et l'APMEP.

C'est là, au plan des organisations, la traduction d'un souci constant des mathématiciens : l'unité de leur discipline. A la suite de Bourbaki, l'expression graphique de cette unité a été la mathématique sans s. J'ai pris soin d'écrire moi aussi mathématique sans s en rédigeant quelques passages de cette intervention, dans un souci de continuité en même temps que d'élégance orthographique. Mais, tout en rendant hommage à l'œuvre monumentale de Bourbaki, il n'est plus question aujourd'hui de fonder l'unité des mathématiques sur la théorie des ensembles et les structures. Nous savons que l'unité des mathématiques est faite de la communication entre leurs branches et parfois leurs rameaux extrêmes. Nous savons aussi que ces interactions internes s'accompagnent plus que jamais d'interactions externes, avec la physique et l'informatique comme je viens de le dire, avec la mécanique évidemment, avec les industries et les services, avec l'économie et la finance, la biologie, la chimie et pratiquement toutes les sciences. Les rapports de conjoncture du CNRS de 1989 et 1992, établis sur une base interdisciplinaire, sont significatifs à cet égard : les mathématiques sont considérées avec leurs interactions, externes et internes et, de ce fait, c'est la seule discipline qui fasse l'objet d'un chapitre spécial. Dans les autres chapitres d'ailleurs, on trouve quasiment partout la modélisation mathématique.

Cela nous a amenés à donner comme cadre de réflexion à notre commission l'ensemble des sciences mathématiques, s'alimentant des autres sciences et les alimentant. Le terme de « sciences mathématiques » nous paraît plus adapté à notre travail que « la mathématique » et que « mathématiques pures et appliquées ». En effet, le mouvement actuel des mathématiques résulte non seulement de leur dynamisme interne et de leur capacité à s'appliquer, de façon parfois imprévue, mais de la contribution active, à côté des mathématiciens, de spécialistes d'autres disciplines et d'ingénieurs. Il y a maintenant des physiciens, des informaticiens, des chimistes, des biologistes, des économistes, des ingénieurs, dont une partie de l'activité est mathématique, et qui élaborent des notions et des méthodes proprement mathématiques. Ils sont partie prenante des sciences mathématiques.

Cet élargissement me paraît garantir l'avenir de la recherche mathématique, parce que tous ces participants aux sciences mathématiques savent que, pour jouer pleinement leur rôle de noria, s'alimentant à quantité de sources et irriguant quantité de domaines, les mathématiques ont besoin de mathématiciens actifs dans tous les domaines. C'est ainsi que le développement des mathématiques est considéré par les physiciens américains comme une priorité. Mais l'utilité universelle des mathématiques pose de sérieuses questions en matière d'enseignement. La tendance existe déjà, et elle est naturelle, à ce que les spécialistes enseignent au fur et à mesure les mathématiques dont ils ont besoin. Si cela devenait la voie principale d'apprentissage des mathématiques, ce qui fait la valeur des mathématiques dans la formation générale disparaîtrait : on aurait, juxtaposées, les mathématiques des physiciens, des informaticiens, des économistes etc. Il y a un risque dans l'enseignement de divorce entre mathématiques utilitaires, enseignées par les utilisateurs, et mathématiques désincarnées, enseignées par les mathématiciens. En revanche, la possibilité existe plus que jamais de faire sentir la puissance et la beauté des mathématiques en articulant leur enseignement avec celui des disciplines où elles sont utilisées.

L'adresse aux mathématiciens, votée par la commission le 5 juin, vise à combler le fossé entre recherche mathématique et culture générale. En cela, elle s'inscrit bien dans les objectifs de l'année internationale des mathématiques. La commission demande aux mathématiciens, sur des exemples qui leur paraissent pertinents, de fournir aux professeurs de mathématiques des lycées et collèges des éléments pour leur culture personnelle sous la forme de textes ou documents intéressants et accessibles. Je renvoie au texte de l'adresse pour les modalités que recommande la commission. Claudine Ruget fera le point sur les réalisations en décembre 2000. Les collègues intéressés peuvent s'adresser à elle ou à Rémi Langevin pour avoir une idée des possibilités d'édition. Il me semble utile de souligner un point important : parmi les éléments de culture les plus importants, nous devons compter tout ce qui vient de l'extérieur des mathématiques et qui contribue à l'élaboration des sciences mathématiques. L'appel s'adresse donc non seulement aux mathématiciens au sens strict, mais à tous ceux, informaticiens, physiciens, ou autres, dont une part de l'activité créatrice est de nature mathématique. Nous savons qu'une réponse de leur part est difficile, mais elle serait pour nous de grande valeur.

⋆ ⋆ ⋆

Calcul et démonstration

Michèle ARTIGUE (*Université Paris 7*)

La commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques a choisi de faire du « calcul » un de ses thèmes de réflexion prioritaires et Jean Pierre Kahane m'a chargé de piloter le travail de la commission sur ce thème. C'est sans aucun doute à ce titre que j'ai été sollicitée par la SMF pour introduire la partie du débat concernant calcul et démonstration. Le travail de la commission sur le calcul n'en est cependant qu'à ses débuts. Je me bornerai donc à préciser les axes selon lesquels nous avons choisi d'organiser la réflexion ainsi que quelques principes directeurs susceptibles de la guider, avant d'envisager les rapports entre calcul et démonstration. Il s'agit là d'un sujet extrêmement vaste. Je souhaiterais l'aborder sous un angle précis : celui de la transition lycée/université qui nous pose aujourd'hui à tous problème.

I. Quelques axes et principes directeurs pour organiser la réflexion sur le thème « calcul »

Précisons que ce qui suit correspond à une réflexion préliminaire et n'engage en aucun cas la commission dans son ensemble. Toutes les critiques, suggestions et contributions seront pour nous les bienvenues.

1. Articuler dans la réflexion deux dimensions complémentaires : la première que je qualifierai « d'épistémologique », la seconde de « didactique »

La dimension épistémologique du travail visera à élucider la place, les fonctions du calcul dans les mathématiques actuelles, la diversité des pratiques qui s'y rattachent suivant les domaines mathématiques concernés, suivant aussi le type de travail que l'on effectue dans ces domaines. Elle visera aussi à comprendre comment l'évolution des instruments du calcul influence le champ des problèmes relevant du calcul, la façon de les poser, la manière de les résoudre. Il va sans dire que la réflexion, ici, rencontrera celle menée par ailleurs sur les rapports entre mathématiques et informatique. La dimension didactique du travail visera à élucider la façon dont cette réflexion épistémologique peut être exploitée pour interroger l'enseignement de ce qui relève du calcul, de l'école élémentaire à l'université, pour penser des évolutions souhaitables et/ou nécessaires de ce dernier, pour penser aussi les moyens nécessaires à ces évolutions, notamment en termes de formation des enseignants. Il me semble important, dans cette seconde dimension tout particulièrement, de savoir tirer les leçons du passé. La réflexion épistémologique peut et doit nourrir la réflexion sur l'enseignement, mais il ne faut pas non plus en surestimer les apports. Elle ne nous informe pas sur la viabilité des choix qu'elle peut inspirer, sur les conditions de cette viabilité. Quand j'ai étudié l'évolution de l'enseignement de l'analyse au lycée sur ce siècle [1], j'ai été frappée de voir comment les choix faits, au début des années 80, de promouvoir une entrée progressive des élèves dans le champ de l'approximation, en évitant à la fois une formalisation prématurée et une analyse réduite à des pratiques algébriques, tout à fait séduisants sur le plan épistémologique, s'étaient vus peu à peu dénaturés dans la réalité de l'enseignement, faute en particulier d'avoir mesuré le coût de la maîtrise technique de l'approximation requise. Il me semble du ressort de cette commission de réfléchir sérieusement aux conditions de viabilité de tel ou tel choix, en prenant en compte à la fois les enseignants et les élèves, sans pessimisme ni idéalisations excessives. Je voudrais préciser que ceci ne signifie en aucun cas pour moi renoncer à avoir des ambitions pour l'enseignement des mathématiques, loin de là, mais souligner que le travail d'étude des moyens de réaliser telle ou telle ambition, a priori légitime, est aussi important que celui de déterminer les ambitions.

2. Structurer la réflexion selon les deux axes calcul exact – calcul approché

S'agissant d'un thème aussi vaste, il est nécessaire de trouver des fils conducteurs pour structurer la réflexion. On pourrait les chercher dans la distinction des grands domaines mathématiques rencontrés progressivement au fil de la scolarité, qui organisent le rapport à cette entité complexe qu'est le calcul. Il nous a semblé préférable de les choisir plus transversaux, tout en ménageant un espace spécifique pour les premiers contacts avec le monde du calcul, à l'école élémentaire et au début du collège, centré autour des notions de nombre, grandeur, mesure et dimension. Nous avons de fait choisi comme fils conducteurs les deux axes du « calcul exact » et « du calcul approché ». Le choix d'éléments transversaux tels ceux évoqués ci-dessus me semble présenter plusieurs avantages :

• Ils nous évitent de nous laisser obnubiler trop prématurément par des questions locales liées à l'actualité de l'enseignement et de ses problèmes.

• Ils permettent de prendre en charge les questions d'enseignement et d'apprentissage dans la durée, car l'un et l'autre sont présents tout au long de la scolarité, de l'enseignement élémentaire à l'université.

Cette question de la prise en charge de la durée des apprentissages me semble essentielle et je pense que, sans rentrer dans le détail de la programmation de l'enseignement, ce qui ne saurait être notre rôle, nous devons marquer, de façon forte, notre attention à ces questions. Il me semble que nous vivons aujourd'hui dans un système qui, sous couvert de prendre en compte les difficultés des élèves, prend vis à vis de ces questions des décisions contraires à leur intérêt même. Ce qui est reconnu comme difficile n'est pas forcément reconnu comme quelque chose dont l'apprentissage doit être pensé dans le long terme mais comme quelque chose dont l'apprentissage doit être repoussé à des jours meilleurs avec, implicite sans doute, la conviction loin d'être justifiée qu'en s'y prenant plus tard, on économisera du temps d'apprentissage.

• Ils permettent de décloisonner la réflexion pour penser l'enseignement des mathématiques en termes de problématiques ou champ de problèmes que l'on se donne progressivement les moyens techniques et conceptuels de maîtriser.

3. Accorder une grande importance à la façon dont les instruments actuels du calcul influent sur les pratiques de calcul, sur les besoins mathématiques du calcul

Cette question des instruments de l'activité mathématique est sans aucun doute une question cruciale aujourd'hui et elle se pose des débuts de l'école élémentaire à l'université. Le domaine du calcul y est particulièrement sensible car une vision étroite de ce dernier peut laisser penser que les instruments étant aujourd'hui susceptibles de prendre en charge une partie du travail technique qui nous était dévolu, il n'est plus besoin d'apprendre. Il importe sans aucun doute à la commission de montrer que, si des équilibres nouveaux doivent se constituer, si les besoins mathématiques changent, une pratique mathématique instrumentée intelligente, efficace et contrôlée est une pratique qui nécessite des connaissances mathématiques substantielles.

4. Etre attentifs à la diversité des formes que prend le calcul suivant les domaines et aux questions que pose cette diversité à l'enseignement

Derrière le terme « calcul » se cachent des mondes différents qui partagent bon nombre d'objets mais ne les traitent pas de façon identique. On sait que ceci pose aux élèves des difficultés résistantes, dans la transition entre arithmétique et algèbre, entre algèbre et analyse. Il importe sans doute à la commission d'être sensible à ces changements dans les rapports aux objets du calcul, aux reconstructions que ces changements nécessitent et que l'enseignement oublie trop souvent de prendre en charge.

5. Etre sensible enfin à la diversité des rapports possibles au monde du calcul et des besoins mathématiques dans ce domaine des différentes catégories d'élèves et étudiants, au delà de la scolarité commune

Il me semble en effet nécessaire de s'interroger, en particulier au niveau de l'université mais sans aucun doute dès le lycée, sur les formes de validation du calcul, sur les niveaux de formalisation qui nous semblent souhaitables, raisonnables, compte-tenu des publics auxquels nous nous adressons, compte-tenu des enjeux différents qu'aura nécessairement l'enseignement des mathématiques, pour ces différents publics. A mes yeux, il n'y a pas un rapport idéal au calcul dont tous les autres seraient des affaiblissements, voire des dénaturations, même si le monde de l'enseignement tend à nous enfermer dans le piège de cette vision. Il existe une multiplicité de rapports, avec des fonctionnalités, des efficacités diverses qu'il serait vain voire nocif de vouloir organiser dans des rapports hiérarchiques.

II. Calcul et démonstration dans la transition lycée/post-bac

Je n'ai pas la prétention, dans cette brève introduction, de présenter une analyse approfondie de la question des rapports entre calcul et démonstration, même en me limitant à la transition lycée/post bac. Je me bornerai à soulever un certain nombre de problèmes qui, du fait de mon expérience d'enseignante mais aussi de chercheur en didactique, me semblent pertinents pour lancer ce débat.

1. Les décalages entre la culture mathématique du lycée et la culture universitaire du calcul

Nous sommes de plus en plus sensibles à ces décalages qui nous semblent s'accroître d'année en année. Ils ne se posent pas de la même façon dans tous les domaines, par exemple en algèbre comme en analyse. En algèbre, les étudiants rencontrent un monde totalement nouveau : celui des structures algébriques et les calculs nouveaux, tant dans leurs objets que leurs techniques, qui lui sont associés. En analyse, le dépaysement est moindre, beaucoup d'objets sont déjà familiers mais les rapports à ces objets vont rapidement bouger. Pourtant, il faut éviter le schématisme. Si l'on considère la majorité des enseignements actuels de DEUG première année, on ne peut dire que l'on passe brutalement d'une analyse intuitive et algébrisée à une analyse formelle, centrée sur l'approximation. Comme le montre bien la thèse récente de Frédéric Praslon sur la notion de dérivée [2], le décalage culturel que nous ressentons résulte plus d'un amoncellement de micro-ruptures que d'une seule rupture fondamentale. Ces micro-ruptures s'expriment notamment en termes d'autonomie nécessaire de l'étudiant dans la résolution des tâches qui lui sont proposées, en termes d'éclatement des problèmes et des méthodes permettant de les résoudre, en termes de rythme d'introduction d'objets ou questions nouvelles, en termes de complexité technique du calcul et de rapport à la généralité. Tout ceci s'oppose au monde du lycée, peuplé de tâches bien calibrées portant sur des objets particuliers, de techniques bien routinisées, où le guidage est présent dès que l'on s'écarte des sillons tracés. Cela crée entre les exercices de terminale S et ceux de première année de DEUG un véritable saut, même lorsque les exercices concernent des objets a priori connus, même lorsque, ne s'engageant pas dans une analyse des ε, η, on s'appuie, comme au lycée, sur de solides théorèmes relais pour justifier et conduire le calcul. Là où, selon la terminologie introduite par Aline Robert [3], des connaissances de niveau technique ou mobilisable à la rigueur suffisaient, on exige maintenant des connaissances disponibles.

2. Le rapport aux instruments de calcul

L'enseignement des mathématiques au lycée est un enseignement avec calculatrices. Mais l'intégration de ces outils à l'enseignement reste pour l'instant marginale : il s'agit plus d'une utilisation sauvage, tolérée que d'une intégration, avec tous les vices que cela induit. Les élèves qui arrivent à l'université ont l'habitude de fonctionner avec des calculatrices mais ils ne contrôlent pas, dans leur très grande majorité, cette utilisation. L'enquête faite il y a trois ans pour la SMF avec Pierre Jarraud montrait que d'une part, la réaction de l'université à cet état de fait était majoritairement de bannir les calculatrices et que, d'autre part, l'introduction d'outils logiciels de calcul correspondant mieux à la pratique professionnelle des mathématiciens restait marginale. Personnellement, ceci ne me semble pas raisonnable. On calcule avec les instruments de calcul de son temps. Ceci d'autant plus que les recherches menées au niveau du lycée ces dernières années montrent bien comment la question du contrôle et d'une pratique mathématique efficace avec les outils graphiques et formels dont on dispose aujourd'hui est génératrice de questions mathématiques riches, à la portée des élèves et de besoins en connaissances [4].

On sent poindre aujourd'hui une évolution, notamment parce que les enseignements de méthodologie, parfois par défaut d'autres idées vis à vis de contenus possibles, sont utilisés pour une initiation à des outils de calcul comme Maple ou Mathematica. Mais il y a sans doute à penser sérieusement ces initiations en prenant en compte la culture machine des élèves de lycée et en essayant d'amener les étudiants, de façon plus globale, à une gestion plus contrôlée de leurs instruments de calcul.

3. L'opposition calcul/démonstration

Pour nos étudiants, le monde du calcul et le monde de la preuve, de la démonstration sont deux mondes en opposition et ceci a des conséquences pour le moins fâcheuses. Le monde de la démonstration est culturellement pour eux associé à la géométrie. C'est dans cet univers qu'au collège ils ont commencé à apprendre à démontrer, c'est dans cet univers que, tout au long du lycée, ils ont produit, rencontré des démonstrations. Il est significatif de ce point de vue de considérer les enseignants débutants en deuxième année d'IUFM. Comme le montre bien la thèse en cours d'Agnès Lenfant [5], quand on demande à ces débutants de préciser quelles fonctions ils voient à l'algèbre, l'idée que ce domaine puisse servir à prouver, notamment des propriétés numériques, n'est jamais spontanément évoquée. Le fait que l'on puisse exploiter d'autres domaines que la géométrie pour initier les élèves à la rationalité mathématique semble pour eux une réelle découverte. Nous venons de citer le cas de l'algèbre mais le calcul au sens large est un domaine où, dès l'école élémentaire, le raisonnement, la planification des actions, l'argumentation peuvent être mobilisés pour préparer et amorcer cette entrée dans la rationalité mathématique ; l'ouvrage que vient de publier l'équipe ERMEL de l'INRP [6] le montre bien.

Nous entendons souvent dire que les étudiants qui arrivent à l'université ne savent pas démontrer, qu'ils manquent complètement de logique. Ce diagnostic me semble pour le moins rapide. Les étudiants qui nous arrivent savent peut-être produire des démonstrations, mais dans un monde mathématique qui ne vit plus pour eux à l'université : celui de la géométrie synthétique. Il leur faut à l'université élargir leurs pratiques de démonstration à d'autres domaines, en particulier à l'univers ensembliste. Jean Luc Dorier et Marc Rogalski ont bien montré dans leurs recherches [7] combien un certain nombre de difficultés des étudiants en algèbre linéaire tenait à leur méconnaissance de ce monde ensembliste, des techniques spécifiques de preuve qui s'y développent, si loin pour eux de celles qu'ils ont eu l'habitude de pratiquer. On peut penser que la réintroduction de l'arithmétique, en terminale, peut aider à faire bouger la situation, en ouvrant d'autres espaces à l'activité de preuve dans le secondaire. Encore faut-il que les potentialités ainsi offertes soient réellement exploitées par le système et que le travail en arithmétique ne se réduise pas rapidement à la résolution stéréotypée de quelques exercices types.

4. Les besoins logiques de l'activité mathématique

Nous avons insisté dans ce qui précède sur la dépendance des techniques de démonstration des domaines mathématiques concernés, sur la difficulté qu'ont nos étudiants à prendre la mesure de ce phénomène et du travail à effectuer pour s'y adapter, vu la coupure qui existe pour eux entre le monde de la géométrie où l'on démontre et les mondes du calcul (algèbre, analyse, probabilités, statistiques). Il n'en demeure pas moins que des problèmes plus fondamentaux sont loin d'être résolus à l'entrée en DEUG, comme l'ont bien montré les travaux de Marc Legrand par exemple [8]. Les techniques de débat scientifique qu'il utilisait en début de DEUG l'ont en effet amené à constater que bon nombre d'étudiants débutants n'avaient pas une claire compréhension des distinctions entre logique quotidienne et logique mathématique, puis à élaborer des situations permettant de travailler cette distinction. La logique quotidienne obéit par exemple au principe du maximum d'information, l'exception y confirme la règle, le vrai se doit d'y être utile et le contraire y joue souvent le rôle de négation, on y change pragmatiquement les énoncés en fonction du sens véhiculé.

Cette logique imprègne notre fonctionnement culturel et social, elle ne s'efface pas miraculeusement derrière la logique mathématique.

Les besoins en logique de nos étudiants ne se résument pas cependant à une sensibilisation à cette distinction entre logique quotidienne et logique mathématique. Et, sur ce point, je voudrais insister sur le fait que ces besoins logiques ne relèvent pas du seul calcul propositionnel. Les démonstrations de la géométrie du secondaire peuvent conforter dans cette illusion car la structure des énoncés y est peu complexe mais, comme l'a bien montré notamment Viviane Durand Guerrier dans sa thèse [9], les besoins logiques des mathématiques universitaires relèvent du calcul des prédicats. Comment remplir ces besoins ? Les réponses à cette question sont loin d'être évidentes car il semble bien qu'il ne suffise pas d'enseigner la logique correspondante pour qu'elle soit injectée dans un contrôle des raisonnements. Nos raisonnements sont contextualisés. La nature des objets concernés, ce que nous en connaissons, le caractère plausible ou non des résultats obtenus prime dans le contrôle exercé et le contrôle logique joue un rôle second. Il est d'autant plus difficile pour nos étudiants débutants que les énoncés formalisés sur lesquels il s'exerce sont pour eux des objets très peu familiers, compte-tenu des limitations de l'enseignement secondaire dans ce domaine.

J'ai dans ce qui précède, choisi ces quelques points pour ouvrir le débat sur calcul et démonstration. Je ne prétends en aucun cas avoir fait le tour de la question, ni avoir fait les choix les plus judicieux, j'ai simplement cherché à soulever quelques questions, affiché des points de vue, dont je pense qu'ils peuvent susciter un débat utile au sein de notre communauté.

Références :

[1] Artigue M. (1996) Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994), in B. Belhoste, H. Gispert, N. Hulin (eds), Les sciences au lycée — un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger, p. 195-216, Vuibert, Paris.

[2] Praslon F. (2000) Continuités et ruptures dans la transition terminale S/deug Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement, Thèse de doctorat, université Paris 7 Denis Diderot.

[3] Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 18.2, p. 139-190.

[4] Guin D. (ed) (1999) Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques, Actes du colloque européen de la Grande Motte, mai 1998, irem de Montpellier.

[5] Lenfant A. La construction de la professionnalité enseignante en algèbre chez les enseignants débutants, Thèse de doctorat en cours, université Paris 7 Denis Diderot. [6] Douaire J. & Hubert C. (eds) (1999) Vrai ? Faux ? . . . On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3, inrp, Paris.

[7] Dorier J.L. (ed) (1997) L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, La Pensée Sauvage, Grenoble.

[8] Legrand M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, Repères irem n° 10, p. 123-158.

[9] Durand Guerrier V. (1996) Logique et raisonnement mathématique, Thèse de doctorat, université de Lyon 1.

Réactions au débat

Les mathématiques sont-elles un savoir fondamental ?

Gilles PAGÈS (*Université Paris 12*)

Lorsque j'ai été contacté en tant que membre de la communauté des probabilistes et statisticiens pour réagir aux nouveaux programmes de statistique de seconde, je suis d'abord parti en quête d'informations auprès de mes collègues, enseignants du secondaire et universitaires, j'ai consulté le web, assisté à quelques rencontres et surtout pris connaissance de l'ensemble des programmes de mathématiques de la seconde et des classes environnantes. J'ai d'abord appris que le volume horaire hebdomadaire de mathématiques allait être réduit de trois quarts d'heure pour se caler sur deux heures hebdomadaires (hors soutien et « module ») en seconde. La nouvelle m'a paru d'une autre ampleur, notamment au niveau symbolique, que de décortiquer tel ou tel point du programme. Je me suis néanmoins acquitté de ma tâche. Peu à peu, un sentiment de malaise général m'a gagné : j'ai acquis la conviction que les questions que suscite ce programme ne concernent pas prioritairement la statistique ni aucune autre partie du programme, mais bien les mathématiques dans leur ensemble et leur enseignement. Pour sacrifier à une périphrase, je dirais que rien ne semble plus aujourd'hui devoir arrêter le retour d'un balancier qui, il est vrai, revenait de très (trop) loin...

Ces programmes, parus durant les vacances d'été 1999 au B.O. avec la réduction horaire qui les accompagne, ont provoqué une mobilisation importante chez nos collègues de l'enseignement secondaire. Il est vrai que ceux-ci sont en première ligne. En revanche, il est regrettable que ces bouleversements et les questions qu'ils induisent n'aient suscité, jusqu'à une date récente, que bien peu d'interêt et de passion chez les mathématiciens « professionnels ». Au debat de la Société Mathématique de France du 15 janvier 2000, faute de temps ou d'occasion, ces questions n'ont pas été posées. Pourtant elles existent bel et bien et d'aucuns sont en train d'y répondre, y ont déja répondu, à notre place. En vrac :

— Qu'est-ce qu'un savoir fondamental ? Les mathématiques en font-elles partie ? Doit-on réserver cette dénomination à la lecture de sa langue maternelle, son écriture et au calcul ?

— En quoi les mathématiques sont-elles susceptibles d'être un « savoir fondamental » ? Quelle est leur spécificité à ce titre ?

— Culture et mathematiques ont-elles une intersection non vide ?

— Quelle est la part des mathématiques dans la formation d'un citoyen ? D'un ingénieur ? D'un décideur ?

— Jusqu'où peut-on s'acommoder de l'usage du mot « mathématiques » au risque de se faire taxer un jour de publicité mensongère ?

— L'émergence de l'informatique modifie-t-elle ou non la position des mathématiques sur l'échiquier éducatif ? Si oui, ces dernières en sortent-elles renforcées ou affaiblies ? Quelles conclusions en tirer pour l'avenir ?

Terminons par une question subsidiaire pour départager les parents d'élèves :

— Quelle est l'attitude à adopter face à l'émergence de filières éducatives (prestigieuses et publiques et, bientôt, discrètes et privées) garantissant, face à l'arrivée des nouveaux programmes, un cursus mathématique garanti « à l'ancienne » (bien que non exempt de « mathématiques modernes ») ? S'en réjouir en catimini car ces filières assureront l'avenir de la recherche en mathématiques dans notre pays ? Tenter par tous les moyens d'y inscrire nos enfants ? Supprimer la raison d'être d'un tel comportement par une réévaluation drastique des programmes de mathématiques des concours d'entrée dans nos plus prestigieuses écoles d'ingénieurs ?

Loin de moi l'idée de prétendre répondre à toutes ces questions. Mais risquons cependant quelques réflexions, notamment sur les premières d'entre elles. Lire, écrire, compter et calculer ne sont pas des savoirs fondamentaux comme on l'entend trop souvent, ce sont des savoirs vitaux. Sans eux, dans un pays comme la France, l'intégration dans la vie sociale est impossible. Ces savoirs, pour une large part, sont censés être acquis à l'école primaire.

L'enseignement secondaire est lui, en schématisant un peu, le berceau des savoirs que l'on peut qualifier de « fondamentaux ». C'est un lieu où s'acquiert à la fois une part de la culture générale propre à chacun et un patrimoine culturel commun constitutif de l'unité de la nation : citons, pêle-mêle, le Cid, la structure de la matière, Albert Camus, la dérive des continents, la Révolution, etc. Un dernier exemple : le fait que la Terre tourne autour du Soleil est un savoir fondamental, mais qui d'entre nous peut raisonnablement soutenir qu'il est vital ? Pourtant il ne viendrait à l'idée d'aucun ministre d'œuvrer à la suppression de l'enseignement de l'héliocentrisme, sous prétexte d'« inutilité » ! Or, à la lecture des programmes de mathématiques du secondaire, j'ai parfois l'impression que, plutôt que de s'assumer comme discipline fondamentale, les mathématiques tentent de se maintenir tant bien que mal en arguant d'un hypothétique caractère vital. Ceci est une escroquerie intellectuelle et, accessoirement, une impasse pédagogique. Les mathématiques sont effectivement présentes partout dans la vie quotidienne à travers leurs applications mais sous forme cachée, comme le sont à des degrés divers l'informatique, la physique, la chimie, la biologie, etc. L'absence spécifique de connaissances mathématiques n'est — heureusement — pas un obstacle majeur à l'intégration sociale ! En revanche, l'absence globale de culture générale tend à devenir un handicap chaque jour un peu plus lourd. Le champ que les mathématiques se doivent d'investir est donc bien celui de la culture générale. Être inculte en mathématiques doit être un signe d'inculture, pas de raffinement ! Pour y parvenir, il me semble qu'elles doivent mettre en avant ce qui constitue une valeur commune aux connaissances fréquentant ce cercle fermé : la beauté. Or, depuis quelques années, dans le sillage de la physique, les mathématiques ont surtout misé sur leur puissance, valeur technologique par excellence. Il se trouve que nous avons beaucoup de chance : les mathématiques sont à la fois belles et puissantes. Profitons-en ! Les nombres complexes sont d'abord une formidable construction élargissant l'horizon du calcul algébrique, accessoirement ils permettent de trouver rapidement les régimes stationnaires en électricité. Et quelle est la source commune de cette beauté et de cette puissance ? La démonstration ; ou plus exactement un mode de raisonnement, une quête de rigueur qui, au fil des temps, a abouti à la démonstration formalisée telle que nous la connaissons. Quoi qu'il en soit, nous touchons là à la véritable cheville ouvrière de notre discipline. La démonstration n'est pas toutes les mathématiques, mais sans démonstration, il n'y a tout simplement plus de mathématiques. Partant de ce double constat, il n'est pas question de préconiser un retour à une démarche entièrement axiomatisée et purement hypothético-déductive de la sixième à la terminale. Intégrer dans l'enseignement le fait que les idées mathématiques ne jaillissent jamais sous la forme formalisée qu'elles prendront *in fine* est un travail pédagogique aussi essentiel que délicat. Pour rendre à notre discipline une dimension humaine qu'on lui dénie trop souvent et, plus simplement, parce que c'est la vérité. À cette fin, les moyens modernes de calcul, de simulation et de visualisation sont des aides précieuses, mais en liaison avec un cadre formalisé et, s'il y a lieu, une modélisation. Replacer le raisonnement au cœur de l'enseignement des mathématiques, de toutes les mathématiques, c'est notre seule chance de continuer à faire aimer les mathématiques à nos élèves. C'est aussi redonner à cette discipline ses vertus formatrices et structurantes, c'est enfin et surtout une occasion – la dernière ? – de lui faire intégrer le champ de cette culture générale hors de laquelle elle verra, à terme, sa survie même dans les programmes de l'enseignement secondaire menacée.

Précisons pour conclure et éviter tout malentendu, que les mathématiques sont une science parmi d'autres, j'ajouterai *avec* les autres. Que si les vertus des mathématiques sont réelles dans la formation scientifique, elles n'en sont pas pour autant l'*alpha* et l'*oméga*. Quiconque s'est trouvé un jour confronté à un processus global de modélisation sait que toutes les qualités d'un bon scientifique y sont indispensables : sens de l'observation, intuition et pratique expérimentale, capacités d'abstraction et de généralisation (ajoutons-y sur un autre registre : passion, imagination et obstination sans lesquelles rien ne se fait). Il ne s'agit donc pas de privilégier telle ou telle aptitude par rapport à telle autre ou de réduire une discipline à un mode de fonctionnement exclusif. Il s'agit de rendre à chacune ce qui fait sa personnalité, sa spécificité. Par souci d'honnêteté, d'efficacité et pour donner aux jeunes le goût des sciences telles qu'elles sont et se font.

⋆ ⋆ ⋆

Réactions au débat

Leçon de choses ou mathématiques réactionnaires

Laurent MAZLIAK (*Université Paris 6*)

La réunion de samedi dernier organisée par la SMF à l'École normale au sujet des programmes de mathématiques dans l'enseignement français a réuni un nombre important de participants, signe de l'intérêt porté au sujet et du malaise actuel. Mais je pense, au vu de discussions que j'ai pu avoir ultérieurement avec d'autres participants, traduire le sentiment de plusieurs d'entre nous en affirmant que nous étions venus inquiets et sommes repartis désespérés. Car dans cette après-midi, qu'avons nous entendu ? Beaucoup d'auto-satisfaction d'abord et, beaucoup plus grave à mon sens, l'affirmation récurrente qu'il faut faire autre chose que des mathématiques pour intéresser les élèves : comment comprendre autrement cette insistance pour faire ce qui est utile à la physique, à la biologie, à l'informatique... Le mot *utile* dans ce contexte fait toujours siffler les oreilles et semble trop s'inscrire dans la logique d'une transformation des heures de mathématiques en leçon de choses. Aurait-on d'ailleurs la même idée dans d'autres contextes : enseigner l'italien à des élèves en leur parlant allemand ?

Il se trouve par hasard que cette année, en charge d'un des cours de méthodologie de première année de DEUG à Paris VI (cours dont, il est bon de le rappeler, le quota horaire a été, pour ainsi dire, entièrement « financé » par la diminution des heures de mathématiques en première année de DEUG, diminution grandement facilitée par la passivité méprisante qu'on montrée bien des mathématiciens), passablement agacés par le fait que la plupart des quatorze ou quinze options proposées insistaient sur l'usage d'internet ou autres gadgets, nous avions choisi d'essayer de mettre en place une véritable initiation à la démarche mathématique, « avec sa tête, un papier et un crayon » (aurions-nous dû l'appeler « mathématiques réactionnaires » ?) et cela était clairement spécifié aux étudiants. Or la demande a dépassé les capacités d'accueil. Interrogés par un questionnaire sur les raisons pour lequelles ils avaient choisi cette option, les étudiants ont fait dans leur immense majorité des réponses éloquentes : « j'adore les maths et j'aimerais approfondir », « je veux mieux comprendre comment on fait une démonstration », « j'ai des problèmes de rédaction pour les démonstrations » etc. Donc la demande existe et ces étudiants qui sortent du secondaire pour venir à l'université, que depuis des années je vois traiter avec mépris parce qu'ils n'ont pas pu ou voulu suivre la Via Sacra des classes préparatoires, présentent en tous cas pour beaucoup un potentiel d'intérêt et d'intelligence que nous massacrons à tour de bras en voulant à tout crin, comme l'a courageusement manifesté une participante l'autre jour, reproduire ce que nous avons vécu.

Il ne faut pas se fourvoyer : si ce n'est pas pour enseigner des mathématiques, comment justifier un enseignement dit « de mathématiques » ? Evidemment, tant qu'on aura l'idée que les programmes de Licence ou autres que nous avons connus il y a n années nous ont été donnés comme les Tables de la Loi et qu'on commettrait un acte sacrilège en en modifiant le contenu, on placera les étudiants face à une paroi verticale et il sera toujours commode ensuite de les vitupérer alors que la responsabilité du désastre nous incombe de A à Z.

INFORMATIONS

L'avenir des mathématiques

1- Rome 1999

Jean-Michel KANTOR (*CNRS, I.M. Jussieu*)

À l'annonce du nouveau millénaire les mathématiciens ont été pris d'un besoin frénétique de bilans et de prospective, inspirés par la célèbre conférence de David Hilbert en 1900 (Annexe 1) : après Rome, Kyoto, Tel-Aviv, bientôt Singapour, Los Angeles,... Un joli programme de voyages est à la disposition des amateurs, constitué par des séminaires qui s'égrènent sur ces deux années. Après ces conférences, vous saurez sans aucun doute « tout » [1] sur le bilan des mathématiques en l'an 3000, en tout cas sur le point de vue des meilleurs mathématiciens, qui se dévouent souvent à participer à plusieurs de ces conférences. Pour avoir participé à la première, dans un printemps romain propice aux rêves et aux conjectures, l'auteur de ces lignes ne recommande pas aux mathématiciens « lambdas » d'assister à trop de ces conférences, sous peine d'un tournis métaphysique à l'écoute des visions globalisantes et euphoriques des médailles Fields d'hier et avant-hier. Nous donnons le programme des rencontres de Rome et Tel-aviv qui ont marqué le printemps et l'été (Annexe 2) et esquissons le bilan de la rencontre de Rome, avec le modeste point de vue d'un rameur de fond de cale qui s'est aventuré sur le pont.

1. Rome : Sous l'étendard du hasard !

Comme le chantier des fouilles romaines, au tournant du siècle, les mathématiques ont paru dans une grande effervescence pleine de charmes à l'image des sept mathématiciennes organisatrices de la conférence, grâce leur soit rendue (aux mathématiques et aux mathématiciennes romaines). Nous mettrons trois points en avant dans le bilan de la conférence :

— la place des probabilités et statistiques

— l'accélération des débouchés (B. LEWIS : *High technology is mathematical technology*).

— les rapprochements avec la physique

[1] Ne pas oublier cependant la remarque de Von Neumann à qui on demandait en 1928 ce qu'il connaissait des mathématiques : « 28% » répondit-il ; à ne pas utiliser cette année !

1.1. La place des probabilités et statistiques

Le point marquant de la conférence de Rome, c'est la place des probabilités et statistiques : Gromov, Talagrand et surtout Mumford donnent un rôle capital à cette partie des mathématiques, David Mumford dont le provocant discours, titré « The dawning of the age of stochasticity » (l'aube de l'âge de la stochasticité) propose de tourner la page d'Aristote ! Pour lui, le paradigme dominant du siècle qui vient sera celui du modèle stochastique, et non-content de nous montrer l'état de la question pour les modèles de comportement intelligent il évoque les tentatives de placer la notion de variable aléatoire au centre des mathématiques. Venant d'un autre mathématicien ces idées passeraient pour une provocation gratuite, mais on sait que la carrière de Mumford symbolise le tournant des mathématiques de la seconde partie du vingtième siècle : spécialiste renommé de la géométrie algébrique (élève de Oscar Zariski, médaille Fields) il s'est tourné dans les années 80 vers les applications des mathématiques et a quitté l'abstraction et Harvard — avec fracas — pour Brown et les problèmes de vision artificielle (l'une de ses idées-clefs : modéliser l'intelligence grâce à l'inférence bayésienne). Son intervention, qui restera sans doute comme un point fort de cette conférence et de ces diverses commémorations, traçait un vaste panorama des mathématiques d'Aristote au XXI^e^ siècle.

On peut voir la prégnance du point de vue « probabiliste » dans la géométrie vue par Mikhael Gromov : variétés aléatoires, graphes et groupes aléatoires, le hasard envahit la géométrie (voir les remarquables développements qui approfondissent la loi des grands nombres avec le regard des diamètres observables [G].

L'exposé de Michel Talagrand portait sur ses travaux mathématiques sur les verres de spins, mettant en évidence les enjeux probabilistes [T1].

Le hasard est au cœur de la réalité avant même que nous cherchions à la comprendre, c'est la leçon de la découverte majeure du siècle qui se termine. Les travaux de Connes en donnent un écho éloigné et grandiose, où les notions de la géométrie classique sont étendues à un cadre non-commutatif : variétés, courbures, classes fondamentales ; en retour l'approche de Connes apporte de nouveaux éclairages prometteurs en théorie des nombres (fonctions multizêta, regard idélique sur les zéros de la fonction zêta). Indépendamment, Maxime Kontsevich et ses collaborateurs développent une géométrie algébrique non-commutative avec pour outils le langage de l'algèbre actuelle (catégories dérivées) comme des éclairs d'intuition des physiciens comme Witten. Un nouveau chapitre des mathématiques avec déjà de belles pages (théorème de Kontsevich sur la déformation des structures de Poisson) [T2].

1.2. L'accélération des débouchés

D'autres exposés avaient à voir avec les sciences physiques, dont celui d'Uhlenbeck et de Lieb. C'est aussi l'aspect quantique qui apparaît dans les travaux de Lieb, qui concernent l'étude de la stabilité de la matière en présence d'interaction avec un champ électromagnétique (le cas sans radiation est traité par l'équation de Schrödinger et mieux connu). Dans le domaine des mathématiques appliquées aux techniques de pointe, l'un des exemples les plus marquant des dernières années est certainement celui des ondelettes : de la reconnaissance des empreintes (algorithme adopté par le FBI) jusqu'aux techniques de compression d'images fixes (nouveaux standards JPEG), il est difficile de surestimer l'importance de cette théorie des séries de Fourier du XXI^{e} siècle.

1.3. Les rapprochements avec la physique

Autour des années 80 les mathématiques ont connu un véritable tournant marqué par le renouveau en profondeur des relations avec la physique. Si l'époque du chaos renvoyait aux travaux de Poincaré et au développement de la théorie des systèmes dynamiques en mêlant « tout ce qui est complexe », ici il s'agit d'une étape vraiment nouvelle, sans doute comparable à l'ouverture du calcul différentiel et intégral — lui aussi stimulé par la physique. Pensons au retournement insensé qui fait que les problèmes les plus abstraits posés par Grothendieck sont dépassés et que de nouveaux problèmes auxquels il n'avait pas même songés sont abordés et résolus avec des méthodes issus de la physique théorique, donc « indirectement » de la physique tout court. On a pu parler, à propos de la théorie quantique des champs, de découverte de la caverne d'Ali Baba par les mathématiciens, mais ne négligeons pas par exemple les immenses problèmes posés par la biologie

2. Réflexions temporaires :

– Faut-il parler de tournant ou de révolution ?

– Le nouveau discours que les mathématiques portent sur elles-mêmes.

Les mathématiciens portent sur leur discipline un regard nouveau, où l'activité de faire des mathématiques s'intègre à la réflexion méta-mathématique. L'ironie trouve même parfois son compte. Cette évolution est évidente par exemple dans les textes d'accompagnement du congrès de Berlin (Lovasz, Manin, Mumford) ou ceux des logiciens ; ceci mérite d'être approfondi. Cette transformation profonde des courants porteurs de notre discipline relègue au magasin des antiquités les querelles vieillies sur l'enseignement, encore engluées dans la gangue bourbakiste. Il est clair que notre tâche urgente est de faire passer cet air stimulant venu du large dans l'enseignement et faire entrer dans les cours un peu du monde réel et de ses hasards.

Espérons que d'éminents chercheurs à la pointe de cette avancée exaltante viendront témoigner ici.

Références

Annexe 1

Edited by F.E. Browder, Mathematical developments arising from Hilbert problems. *Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics* **Vol. XXVIII** American Mathematical Society, Providence, R.I., 1976.

Kantor J.M. *Hilbert's problems and their sequels* Math. Intelligencer 18, **n^{o} 1**, 1996, p.21–30.

Annexe 2

Actes du colloque :

Mathematics towards the third millenium Rome, May 27-28-29. À paraître aux Rendiconi dell accademia dei Lincei

Conférenciers et titres des exposés :

A. Connes – *Noncommutative Geometry*

Y. Meyer – *New Interactions between Mathematics and Image Processing*
M. Gromov – *What about Geometry and Geometrization ?*
C. Fefferman – *The Euler and Navier Stokes Equations*
M. Kontsevitch – *Towards Non-commutative Algebraic Geometry*
D. Vogan – *Unitary Representations of Reductive Lie Groups*
K. Uhlenbeck – *Geometry and Partial Differential Equations*
M. Talagrand – *Probability and Spin Glass*
P. Griffiths – *Mathematics and Sciences : Is Interdisciplinary Research Possible ?*
D. Mumford – *The Displacement of Logic by Probability in Pure and Applied Mathematics*
E. Lieb – *The Mathematics of Quantum Mechanics and the Stability of Matter*
E. Bombieri – *Diophantine Equations in Low Dimension : Past, Present and Future*

Conférences à Tel Aviv :
`http://www.math.tau.ac.il/~rudnick/visions/program.html`

Enregistrements vidéo à la bibliothèque de l'institut Henri Poincaré

[G] Gromov M. *Metric structures for riemaniann and non-riemaniann spaces* Progress in Mathematics, **vol 152**, Birkhaüser 1999.
[T1] Talagrand M. *Concentration of measures and isoperimetric inequalities in product spaces* Publications mathématiques de l'IHES, **n° 81**, 1995, p.733-204.
[T2] Taubes C. *The work of Maxim Kontsevich*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **vol I**, Berlin, 1998.

⋆ ⋆ ⋆

Le prix Wolf 2000

Le prix Wolf 2000 en mathématiques a été décerné à Raoul Bott, Harvard University, Cambridge, Mass., États-Unis, pour ses decouvertes profondes en topologie et géométrie différentielle et leurs applications à groupes de Lie, operateurs différentiels et physiques mathematiques, et à Jean-Pierre Serre, Collège de France, Paris, France, pour ses nombreuse contributions fondamentales en topologie, géométrie algébrique, algèbre, et théorie de nombres et pour ses conférences et écrits inspirants.

Mathématiques et protection de l'information

Journée thématique SMF — Toulouse le 5 mai 2000

Après le courrier, le télégraphe, le téléphone et la télévision, les réseaux informatiques et plus particulièrement l'internet (réseau des réseaux) convoient de grandes quantités d'information parfois sensible qu'il convient de protéger contre toutes sortes d'altérations intentionnelles ou non.

Si cette nécessité n'est pas nouvelle, le développement des technologies de l'information a motivé l'essor de disciplines informatiques telles que la cryptologie ou la théorie des codes correcteurs d'erreurs, voisines des mathématiques discrètes.

La notion d'algorithme (méthode de calcul), dont l'origine se confond avec celles de l'arithmétique, a trouvé à cette occasion une nouvelle jeunesse et les notions même de preuve ou de connaissance sont interrogées.

Au delà d'une preuve supplémentaire de l'importance pratique des mathématiques et de l'informatique, cet exemple nous montre comment ces disciplines fondamentales évoluent et produisent de nouveaux concepts pour répondre à la sollicitation du réel.

Cette journée mathématique se propose d'illustrer divers aspects de cette question. Elle est organisée à l'initiative de la Société Mathématique de France dans le cadre du cycle de conférences « Pourquoi un 's' à "Mathématiques" ? » donnèes à l'IUFM de Toulouse à l'occasion de l'opération Maths 2000. L'organisation scientifique est assurée par le groupe de recherche en mathématiques et informatique du Mirail, université de Toulouse II.

Quatre intervenants illustreront divers aspects de cette question.

Michel Carral est professeur à l'IUFM de Toulouse. Il a mené des travaux de recherche tant sur les fondements mathématiques de la théorie des codes que sur la pédagogie des mathématiques. Il présentera la théorie des codes et la cryptologie, distinguant le propos de chacune.

David Pointcheval est chargé de recherche au CNRS, en poste au département d'informatique de l'École normale supérieure. Il est l'auteur de nombreux travaux dans divers domaines de la cryptographie et plus particulièrement sur les preuves de connaissance, un des apports les plus originaux de la cryptographie contemporaine.

François Morain est maître de conférences à l'École polytechnique et ingénieur de l'armement. Il travaille au sein du laboratoire d'informatique de l'École polytechnique. Au delà des nombreux records qui l'ont rendu fameux (grands nombres premiers en particulier) on lui doit de nombreuses contributions à l'algorithmique des nombres. Il parlera de nombres premiers et de factorisation d'entiers et du lien entre ces questions d'arithmétique et la cryptographie à clés publiques.

Jean-Jacques Quisquater est professeur à l'université catholique de Louvain (Belgique) et directeur du groupe de cryptographie de cette université. Ses travaux portent sur tous les aspects théoriques et pratiques de la cryptographie et de la sécurité informatique. Il intervient dans un grand nombre de projets européens. Sa compétence et son expérience embrassent tous les aspects de la sécurité informatique. Il fera un tour d'horizon des questions de sécurité sur l'internet.

Accès et organisation

La journée aura lieu à l'IUFM de Toulouse, site de Rangueil.

9h30 Ouverture
10h00 Exposé de Michel Carral
11h30 Exposé de François Morain
12h30 Repas à l'IUFM
14h30 Exposé de David Pointcheval
16h00 Exposé de Jean-Jacques Quisquater
17h00 Conclusion

Inscription et renseignements auprès de Véronique Lizan :
IUFM de Toulouse, site de Rangueil, 118 route de Narbonne 31078 Toulouse cedex 04.
téléphone : 0562252124 et 0562252122, télécopie : 0562252158, mél : vlizan@cict.fr

Informations sur le site du Rectorat :
http ://www.ac-toulouse.fr/math/annee2000.htm

Appel pour la bibliothèque des mathématiciens et informaticiens du Kosovo

Voici un appel d'aide aux mathématiciens et informaticiens de l'université de Pristina au Kosovo, où je me suis rendu en mission du 3 au 10 octobre 1999 :

Si l'université de Pristina n'a pas subi de destructions massives comme de nombreux lycées et écoles, néanmoins tous les livres sans aucune exception, ont été brûlés ou volés, le moindre matériel a été emporté durant les mois de guerre. Les bibliothèques sont vides, le matériel de travaux pratiques ou de recherche est pratiquement inexistant. Après des années d'enseignements d'abord parallèles puis clandestins pour les albanophones, les facultés se reconstituent et les cours se mettent en place, malgré les fréquentes coupures d'électricité et le manque de chauffage. L'équipe de mathématiques et informatique compte 22 enseignants dont 13 docteurs. Les doctorats ont été attribués par cette université « souterraine » après évaluation de publications dans des revues internationales. 60 étudiants sont inscrits en première année, 30 en seconde, une dizaine en troisième et seulement 3 en quatrième année.

Grâce à des aides apportées par le WUS-Austria (World University Service) et la Fondation Soros, ils sont équipés de cinq ordinateurs branchés sur internet. Leur besoin immédiat est de recevoir de la littérature mathématique de tout niveau, avec possibilité de télécharger et reproduire les textes ce qui, pour le moment est le plus simple. Il y a besoin de cours de tous niveaux (premier, deuxième et troisième cycle, séminaires), ainsi que d'informations sur les écoles, colloques, congrès, thèses... Compte tenu du dénuement actuel, les livres et polycopiés de base en français ou anglais sont indispensables, s'ils sont récents et en bon état. Les abonnements électroniques sont espérés.

Le coordinateur de la commission de reconstruction de l'université de Pristina est le vice-doyen de la faculté des sciences, spécialiste d'analyse numérique (valeurs singulières), Dukaglin Pupovci, très sympathique et dynamique. Il est parfaitement anglophone : `Fshmn@uni-pr.edu` Déjà lui envoyer l'adresse de vos sites web est intéressant, surtout s'il peut y trouver vos publications et se mettre en rapport avec vous. N'hésitez pas à lui écrire.

Il est souhaitable de mettre en copie de vos échanges à Mme Michèle Duby en poste à Skopje, qui suit la coopération éducative et linguistique au Kosovo (`michelle.duby@diplomatie.fr`), M. Michel Tarran, diplomate en poste à Pristina (`michel.tarran@diplomatie.fr`), M. Reinhard Sterlika (autrichien anglophone) directeur du centre WUS basé à l'université de Pristina (`Pristina@wus-austria.org`). Voici aussi pour la *Kosovo foundation for an open society* (Soros) qui cofinance de nombreux projets, Mlle Terrice Bassler (`terrice@ibm.net`).

La poste n'est pas rétablie et il est impossible d'envoyer directement du courrier. Mais il y a deux possibilités pour cela :

— soit via l'ambassade de France a Skopje d'où Mme Duby se rend souvent à Pristina : Mme Michèle Duby, pour la faculté des sciences de l'université de Pristina (Pr. Pupovci), Ambassade de France en Macédoine, Salvador Allende 73, 91000 Skopje, Macédoine.

— soit en me les adressant directement à Paris. Dans ce cas me faire d'abord connaître votre proposition par e-mail, pour éviter les doublons. Après nous être mis d'accord, vous m'enverrez les publications et je ferai ensuite suivre les colis par le courrier de l'armée. `Christian.duhamel@education.gouv.fr`

— enfin, l'université de Pristina est prête a accueillir en leur offrant le logement (rudimentaire mais correct) des enseignants pour implanter de nouveaux cours. Si vous êtes intéressés, me le faire savoir.

Merci par avance pour votre aide. Nous pouvons en espérer des retours dans quelques années : des mathématiciens qui ont réussi durant dix ans à enseigner de façon plus ou moins clandestine et à maintenir leurs activités ont déjà fait la preuve de leur motivation. Il leur reste à renouer les contacts internationaux.

Christian Duhamel
Université Paris-Sud – Bâtiment 425 – 91405 Orsay cedex
Chargé de mission « Balkans » à la délégation aux relations internationales du MENRT.

Les mathématiques méritent considération

Ci-dessous un texte proposé par certains membres de l'Académie des sciences.

Les interventions de M. le ministre de l'Éducation nationale, de la recherche et de la technologie au sujet des mathématiques et de leur enseignement, dans la presse (France-Soir, 23 novembre 1999 : *les mathématiques sont en train de se dévaluer, de façon quasi inéluctable. Désormais, il y a des machines pour faire les calculs. Idem pour les constructions de courbes...* [1]) et devant la National Academy of Sciences (1er décembre 1999, voir la lettre de l'Académie et du CADAS n° 31, 2000), nous amènent à quelques remarques.

L'imprimerie, la machine à écrire, les logiciels de traitement de texte ou correcteurs d'orthographe ont-ils dévalué la littérature ? Des esprits pénétrants, il y a plus de 50 ans, avaient comparé le rôle de l'informatique naissante à celui de l'imprimerie pour valoriser et pour faire émerger des concepts mathématiques. Fonctions, équations, solutions exactes ou approchées, ces notions ont toujours été tributaires de moyens d'écriture et de calcul. Elles n'en sont pas pour autant dévalorisées. Aujourd'hui l'informatique, et son usage universel dans la modelisation, sont indissociablement liés aux mathématiques, qui conditionnent leurs progrès.

Les concepts mathématiques, par leur généralité, leur simplicité et leur puissance, constituent un apport précieux, et parfois une base essentielle, à toutes

[1] Nous reproduisons ci-dessous in extenso la réponse du ministre à la question du journaliste de *France Soir* **Et qu'en est-il de la domination des maths ?** — « Les maths sont en train de se dévaluer de manière quasi inéluctable. Désormais, il y a des machines pour faire les calculs. Idem pour la construction des courbes. D'ailleurs, c'est une interrogation pour les enseignants en maths. Ce que je souhaite, c'est qu'on reconnaisse la diversité. L'enseignement traditionnel consistait à dire « Ou bien t'es bon en maths, ou bien t'es bon en français ». C'est bien d'être bon en maths, mais on peut aussi être bon en sciences naturelles, en géographie. Chacun doit trouver sa palette ? C'est un changement difficile ».

les sciences. Sciences, industries et services font appel aux mathématiques à des degrés divers.

D'ailleurs, les mathématiques émergent de toutes les sciences et les alimentent de façon parfois imprévue. Ce mouvement, constant au cours de l'histoire, s'accélère aujourd'hui.

Développant à la fois imagination et rigueur, l'enseignement mathématique a un rôle important à jouer dans la culture de notre temps.

De nombreux pays sont conduits à encourager le développement des mathématiques. Il serait dommage qu'une vision caricaturale de cette science conduise à faire de notre pays une exception notable.

Il est urgent que le Ministre renonce à ses appréciations déconcertantes et infondées sur la dévaluation des mathématiques.

CARNET

Nicole Desolneux-Moulis (1943–1999)

Nicole Desolneux-Moulis

Professeur à l'université Lyon-I, Nicole Desolneux-Moulis est décédée le 23 novembre dernier, à l'âge de 56 ans.

Ancienne élève de l'École normale supérieure de jeunes filles, agrégée de mathématiques en 1965, elle se lance dans la recherche et n'hésite pas à faire plusieurs séjours prolongés aux Pays-Bas pour pouvoir effectuer son travail de thèse sous la direction de N. Kuiper (grand spécialiste des variétés hilbertiennes, et qui sera plus tard directeur de l'IHES). Elle est nommée professeur à Poitiers en 1971, puis à Lyon en 1973, où elle effectue toute la suite de sa carrière.

Au cours de la préparation de sa thèse et dans les années qui ont suivi, Nicole Desolneux-Moulis s'est intéressée aux variétés hilbertiennes et banachiques de dimension infinie. Sa thèse porte sur le problème de l'approximation des fonctions différentiables sur ces espaces par des fonctions continues ; ensuite, dans un travail important, elle donne une démonstration complète de la classification des structures de Fredholm sur les variétés hilbertiennes annoncée par Eells et Elworthy dans leur conférence au congrès mondial des mathématiciens à Nice en 1970. Elle s'est tournée ensuite vers les systèmes dynamiques hamiltoniens et la théorie des feuilletages ; elle fait en 1980 un exposé remarqué au séminaire Bourbaki sur les orbites périodiques dans les systèmes hamiltoniens. Les applications à la mécanique céleste retiennent aussi son intérêt, comme le prouvent ses publications en collaboration avec P. Cartigny, G. Galletta et A. Hayli.

Nicole Desolneux-Moulis a toujours su prendre sa part, et parfois beaucoup plus que sa part, dans les lourdes tâches d'administration et d'organisation qui pèsent sur la vie universitaire. C'est ainsi qu'elle s'est dépensée sans compter pour l'organisation de deux grandes conférences internationales tenues à Lyon en 1983 et 1986 dans le cadre du séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, qui regroupe depuis maintenant près de vingt ans les géomètres du Grand Sud (Marseille, Montpellier, Lyon, Avignon puis Chambéry, et jusqu'à Barcelone) et qui a été l'un des premiers GDR du CNRS. Elle a d'ailleurs dirigé le SSGR du début 1994 à la fin 1997 et a notamment organisé une très belle école d'été à Sophia-Antipolis pendant l'été 1996.

Depuis le milieu des années 80, elle a pris la responsabilité de la bibliothèque de mathématiques et a beaucoup fait pour son développement et pour l'amélioration de sa gestion. C'est elle qui a veillé sur l'installation de la bibliothèque dans ses nouveaux locaux début 1996 et nous lui sommes grandement reconnaissants pour l'atmosphère chaleureuse qu'elle a su y créer.

Mais notre plus grande dette envers Nicole Desolneux-Moulis vient du rôle essentiel qu'elle a joué lors de l'installation à Lyon de l'École normale supérieure, ex-Saint Cloud. Elle a infatigablement travaillé et parfois dans des conditions difficiles, pour que la chance unique que l'arrivée de l'ENS représente pour le développement des mathématiques à Lyon ne soit pas manquée. Dès le début, elle est responsable du magistère mathématiques et applications, où elle mène une politique généreuse d'ouverture des enseignements vers les étudiants non-normaliens (ouverture rendue malheureusement de plus en plus difficile par le fossé grandissant qui se crée entre les meilleures classes préparatoires et le DEUG.) Ce n'est que lorsque les forces lui ont manqué qu'elle a dû renoncer à cette tâche qui lui était chère.

Nicole Desolneux-Moulis laisse beaucoup d'amis à Lyon, aussi bien à l'université qu'à l'ENSL, ainsi qu'à Paris, en particulier au séminaire de Michel Herman, à l'École polytechnique, qu'elle fréquentait assidûment. Au cours de son long combat contre la maladie, elle a fait preuve d'un courage et d'une dignité exemplaires, dont le souvenir nous accompagnera longtemps.

F. du Cloux & Y. Kerbrat

Raymond Gérard (1932–2000)

Raymond Gérard, professeur retraité de l'université Louis Pasteur de Strasbourg, est décédé subitement le mercredi 5 janvier 2000. Il était né le 24 mai 1932 à Wissembourg.

De 1958 à 1968, il fut assistant, chef de travaux, puis maître-assistant de mathématiques à la faculté des sciences de Strasbourg. L'année 1968 vit la soutenance de sa thèse de doctorat d'État intitulée « Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe », sous la direction de Jean Leray. Les autres membres du jury étaient les Strasbourgeois Jean Frenkel et Georges Reeb.

En 1968, il fut nommé professeur à l'université de Metz, où il s'empressa de créer un centre mathématique vivant. En 1972, de retour à Strasbourg, il rapatrie le déjà célèbre séminaire d'équations différentielles dans le champ complexe, qui devient l'arrêt obligé pour tout ce qui compte dans le monde dans ce domaine mathématique. Il assume aussi la direction de la R.C.P., c'est-à-dire la gestion scientifique de ces deux réunions annuelles à Strasbourg entre mathématiciens et physiciens. Il assure également la direction de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée.

La qualité de ses travaux sur les équations différentielles lui ouvre les portes du Japon en 1977. Il y fera plusieurs séjours. Il organise à Strasbourg, en octobre 1985, un colloque Franco-Japonais, intitulé « Equations différentielles dans le champ complexe ».

On lui doit notamment la réédition des leçons de Stockholm de Painlevé et la publication avec Hidetoshi Tahara de la monographie « Singular Nonlinear Partial Differential Equations », parue chez Vieweg. On lui doit surtout d'avoir su créer à Strasbourg un pôle vivant d'analyse qui a attiré de nombreux étudiants de doctorat.

On ne peut parler de Raymond Gérard sans mentionner le nom de Blancherupt, la plus petite commune d'Alsace, mais l'un des haut-lieux de la coopération franco-japonaise ! Il aimait y faire de longs séjours, surtout depuis son départ à la retraite. Il y était devenu adjoint du maire.

La tradition mathématique dans la famille Gérard se poursuit avec son fils Christian, directeur de recherche à l'École polytechnique et sa fille Anne, professeur de classes préparatoires au lycée Lakanal à Sceaux.

Dominique Foata

Jürgen Moser (1928–1999)

Déclin des Mathématiques (après la mort de Jürgen Moser)

« Les nombres, les rangées, les séries – le cauchemar et la malédiction se faisaient les bourreaux de la pensée pure... » Vladmimir Nabokov, Ada ou l'ardeur, III, 1.

« An astronomer must be a cosmopolitan, because ignorant statesmen cannot be expected to value their services ». Tycho Brahe (cité par Arthur Koestler, Les Somnambules)

Jürgen Moser, disparu le 19 décembre 1999, est né en 1928 à Königsberg. Il a participé à 14 ans à la guerre, dans les batteries antiaériennes. Son éducation mathématique s'est faite en grande partie en Amérique, surtout avec Carl Siegel (qui m'a dit en 1968 que Moser a été le rare exemple d'un étudiant américain capable de comprendre Henri Poincaré).

L'institut Courant à New York (dont Moser a été le directeur de 1967 à 1970) fut un centre mathématique exceptionnel, préservant miraculeusement l'unité entre les mathématiques pures et appliquées (Courant, John, Nirenberg, Moser, Lax, Moravetz...).

L'équilibre entre analyse, géométrie et théorie des nombres est manifeste dans les travaux de Moser et sert à résoudre des problèmes ayant des applications directes en physique, astronomie et technique des accélérateurs et des tokamaks. C'est un phénomène qu'on rencontre rarement de nos jours.

A partir de 1980, Moser a habité à Zürich (en Suisse) et volait beaucoup en paraplane, mais il est toujours resté très lié à l'institut Courant.

Les travaux les plus célèbres de Moser se situent dans le prolongement des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* de Poincaré.

En suivant Poincaré, George Birkhoff a formulé le problème le plus simple de la stabilité. Considérons une application du plan dans lui-même ayant un point fixe et préservant les aires. Supposons que la linéarisée de cette application au point fixe soit une rotation du plan (d'angle incommensurable à π). Considérons la suite des images d'un point voisin du point fixe par les itérations de l'application.

Question : Est-ce que les points de cette suite restent voisins du point fixe ?

C'est sûrement le cas si l'application est simplement une rotation : tous les points de la suite sont situés sur un petit cercle centré au point fixe. Mais dans le cas général, le problème est plus difficile tout en ressemblant aux problèmes classiques de la mécanique céleste : la Lune va-t-elle tomber sur la Terre, ou bien restera-t-elle pour toujours sur son orbite au voisinage de la Terre ?

En combinant

(a) une méthode d'Andrei Kolmogorov, élaborée pour l'étude des systèmes hamiltoniens comme ceux de la mécanique céleste,

(b) la technique de lissage, inventée par John Nash, Moser a démontré en 1962 la stabilité dans le problème de Birkhoff pour les applications différentiables à un ordre fini (333 dans les premiers articles de Moser, mais réduit actuellement à l'ordre 3). Ce résultat, présenté par Moser au congrès international des mathématiciens à Stockholm était complètement inattendu : Kolmogorov conjecturait :

– La stabilité dans le cas analytique,
– l'instabilité dans le cas générique.

Peu de temps après, les épigones américains de Moser ont publié des articles qui « généralisent » les résultats de Moser dans le cas analytique. Mais Moser a immédiatement arrêté ces tentatives de lui attribuer les résultats de Kolmogorov (1954). C'est sa méthode qu'il a développé.

Le premier travail de Moser en 1961 où il a combiné les méthodes de Kolmogorov et de Nash était déjà tout à fait remarquable. Il a considéré le problème classique de la réalisation d'une métrique riemannienne sur une variété lisse comme l'image réciproque par un plongement lisse dans l'espace euclidien de la métrique induite sur la sous-variété image.

Pour ce faire, Moser a déformé une sous-variété réalisant une métrique approximant la métrique donnée par la méthode de Kolmogorov. Cette construction abîme la sous-variété : elle devient moins lisse. La méthode de Nash la rend plus lisse, l'approximation de la métrique restant améliorée par rapport à l'approximation initiale. En itérant cette construction, Moser obtient la sous-variété voulue (dans un espace euclidien de dimension suffisamment grande) comme limite des approximations précédentes.

Le problème des déformations isopérimétriques (lisses ou analytiques) d'une surface lisse ou analytique de l'espace euclidien de dimension trois (par exemple d'un tore) reste, semble-t-il, ouvert, en dépit de l'importance évidente de ce problème en ingénierie, par exemple dans la construction d'appareils cosmiques avec parties non convexes. Les constructeurs ont fabriqué des coques non convexes qu'on peut expérimentalement déformer, mais l'analyse mathématique de cette situation rencontre les mêmes difficultés d'arithmétique diophantienne et d'analyse que les problèmes de Birkhoff de la mécanique céleste. Le rôle des résonances de la mécanique céleste est joué ici par la possibilité de lignes asymptotiques brisées fermées sur la partie hyperbolique de la surface. La présence de telles résonances rend possible la déformation en première approximation. Mais pour en déduire une déformation finie, il reste à surmonter des difficultés plus grandes que celles avec lesquelles Moser a lutté (avec succès)

Parmi le grand nombre de résultats mathématiques de Moser, un des plus simples à formuler est son théorème remarquable de stabilité des formes de volume et des structures symplectiques.

Considérons deux domaines plans de même aire bornés chacun par une courbe lisse fermée. Il existe un difféomorphisme préservant les aires et transformant ces domaines l'un en l'autre. Le théorème de Moser est une extension de ce résultat aux variétés de dimension arbitraire munies d'éléments de volume, ou bien de 2-formes fermées non dégénérées, appelées structures symplectiques.

Naturellement les deux variétés considérées sont supposées être difféomorphes et on suppose que les conditions topologiques nécessaires évidentes aient lieu : les variétés sont de même volume et les intégrales des 2-formes le long des surfaces correspondantes sont égales.

La méthode homotopique utilisée par Moser pour la démonstration de son théorème est très puissante et on l'a ensuite utilisé dans un grand nombre de travaux consacrés à des objets de nature tout à fait différente, par exemple dans la théorie des applications différentiables, où John Mather a utilisé la méthode de Moser pour ses extensions des théorèmes de René Thom.

Les résultats de Moser en théorie des systèmes hamiltoniens complètement intégrables sont, eux aussi, d'une grande beauté. Je veux souligner sa géométrisation et symplectisation de la théorie des coordonnées elliptiques de Jacobi. Il a transformé des centaines de pages de calculs aveugles en des raisonnements simples et naturels de la géométrie projective et de la géométrie symplectique des espaces de droites. Cette théorie de Moser ouvre une voie vers l'exposé de la théorie intrinsèque des coordonnées elliptiques, en permettant de passer des ellipsoïdes en espaces euclidiens en dimension finie aux opérateurs symétriques dans les espaces de dimension infinie. Il me semble que la théorie correspondante des équations aux dérivées partielles complètement intégrables, tout en étant la version de dimension infinie de l'intégration par Jacobi des équations des géodésiques des ellipsoïdes de dimension finie, n'a pas été construite ni dans le cas des spectres discrets, ni dans celui de spectres continus. Les formules algébriques de la théorie de Jacobi doivent fournir des relations intégrales analytiques qui ne semblent pas être écrites dans la théorie de transformation d'Hilbert.

Un des traits de caractère de Moser a toujours été sa passion pour la culture européenne (non-américaine), pour l'urbanisme médiéval des petites villes d'Europe Centrale qui lui donnait une inspiration mathématique originale. Son respect profond des valeurs humaines universelles (qui disparaissent malheureusement aujourd'hui dans le monde mathématique) ; le respect des grands problèmes, le goût pour les idées plutôt que pour les machines, pour les « Colomb » plutôt que pour les « Amerigo », tous ces traits de caractère faisaient de Moser un point singulier de notre monde mathématique.

Vladimir Arnold

Nous avons le regret de vous annoncer le décès de Pierre Dugac mathématicien, historien des mathématiques et membre correspondant de l'Académie des sciences survenu le 7 mars 2000.

LIVRES

Sur les œuvres complètes de Witt

Gesammelte Abhandlungen von Ernst Witt (Œuvres de Ernst Witt)
Edité par I. Kersten, avec un essai de G. Harder sur les vecteurs de Witt
Springer-Verlag, Berlin, 1998

Ce volume contient tous les articles de Witt, quelques fac-similés (Witt aimait les démonstrations d'une page, comme celle qu'il donne du théorème des nombres premiers, p. 397), ainsi que quelques articles non publiés (dont certains reconstitués à partir de notes manuscrites). De nombreux commentaires de l'éditrice et de ses collègues mettent les articles en perspective. Certains, comme celui de U. Rehmann sur la contribution de Witt à la classification des algèbres de Lie simples, sont particulièrement instructifs. Les textes de Witt sont en allemand, sauf deux en espagnol. La loi du marché fait que la plupart des commentaires sont écrits (ou traduits) en anglais.

Un complément utile au volume est l'article d'Ina Kersten dans *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **95** (1993). Elle y passe en revue les contributions de Witt, et évoque sa personnalité.

Witt publia ses principaux articles entre sa vingt-troisième et sa trentième année, entre 1934 et 1941. La plupart de ces articles sont devenus des classiques. Ces résultats s'insèrent dans les travaux algébriques et arithmétiques de l'école allemande des années vingt et trente (Artin, Schreier, Brauer, Hasse, E. Noether, H. L. Schmid, F. K. Schmidt, Tsen, Arf, Teichmüller).

Les résultats obtenus par Witt après la guerre sont moins impressionnants, mais ils témoignent encore d'une grande ouverture d'esprit et d'un sens aigu de la démonstration élégante.

À un titre ou un autre, le lecteur algébriste a rencontré des résultats de Witt. Mais on peut gager que tout comme nous, qui connaissions bien certains de ses travaux, il sera surpris de découvrir dans combien de domaines Witt a laissé des traces et il appréciera l'élégance de ses rédactions (et de la langue), qui n'ont guère vieilli.

Voici, sommairement regroupés, les principaux domaines auxquels Witt a contribué :

1) Théorie du corps de classes, géométrie algébrique en caractéristique positive (matrice de Hasse-Witt), cohomologie galoisienne (particulièrement en caractéristique positive).

2) Corps locaux (invention des vecteurs de Witt).

3) Formes quadratiques sur un corps arbitraire (classification, théorème de simplification de Witt).

4) Courbes algébriques réelles.

5) Algèbres de Lie et systèmes de Coxeter (théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt ; classification des algèbres de Lie simples).

6) Groupes finis et combinatoire (groupes de Mathieu et systèmes de Steiner), réseaux unimodulaires.

En préparant ce rapport, nous avons parcouru de nombreux articles et ouvrages. Il n'est pas question ici d'en faire un bilan systématique. Nous renvoyons le lecteur à l'article d'Ina Kersten cité plus haut et aux divers commentaires inclus dans les Œuvres. Nous nous contenterons ici de rappeler les principales contributions de Witt et de donner de brèves indications sur l'influence qu'ont eue ces contributions. Cette influence a été importante.

Cela tient d'une part à la profondeur des résultats, d'autre part à la perfection de l'exposé (« umfassend und in gewisser Weise abschließend », comme l'écrit P. Roquette). Plusieurs des articles de Witt servirent de référence pendant de nombreuses années.

Pour citer un article, nous utilisons la numérotation adoptée dans les Œuvres.

1) Théorie du corps de classes, géométrie algébrique en caractéristique positive, cohomologie galoisienne (particulièrement en caractéristique positive)

Le résultat de Witt le plus connu dans ces domaines se trouve dans **14** (1936), *Zyklische unverzweigte Erweiterungskörper vom Primzahlgrade p über einem algebraischen Funktionenkörper der Characteristik p* (travail commun avec Hasse), où est introduite la « matrice de Hasse-Witt », qui permet de déterminer le groupe des $\mathbf{Z}/p$-revêtements non ramifiés d'une courbe projective et lisse X définie sur un corps k de caractéristique p. L'interprétation moderne de cette matrice a été donnée par Serre, dans l'article où il introduit la cohomologie à valeurs dans des faisceaux de vecteurs de Witt (Serre, *Œuvres*, article **38** (1958)). Considérons la suite dite d'Artin-Schreier sur le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ de la courbe. Lorsque k est séparablement clos, le groupe $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{Z}/p)$ des $\mathbf{Z}/p$-revêtements non ramifiés apparaît comme le noyau de $\mathfrak{p} = \text{Frob}^* - \text{id}$ agissant sur $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ (cohomologie étale ou cohérente). La matrice de Hasse-Witt est l'application additive définie par Frob^* sur le k-vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, lequel est de dimension le genre g de X. Cette application est p-linéaire. Le noyau de $\mathfrak{p}$ est un groupe $(\mathbf{Z}/p)^\rho$ avec $1 \leqslant \rho \leqslant g$ (le résultat est plus précis). Le cas $g = 1$ avait été considéré antérieurement par Hasse. L'étude des revêtements non ramifiés de groupe $\mathbf{Z}/p^n$ pour $n > 1$ (Schmid et Witt, **15** (1937)) requiert l'usage des vecteurs de Witt (**23**, voir ci-dessous). Ce fut d'ailleurs là leur première application. Les mêmes arguments valent en dimension arbitraire (Serre, *Œuvres*, article **38** (1958) ; cf. Milne, *Étale Cohomology*, p. 127-128). L'usage de la cohomologie à valeurs dans les faisceaux de vecteurs de Witt a connu des développements extrêmement importants : voir Illusie, *Ann. Sc. E.N.S.* **12** (1979) 501-561.

Dans **8** (1934), *Riemann-Rochscher Satz und Z-Funktion im Hyperkomplexen*, Witt établit, sur une courbe projective et lisse C sur un corps k, un théorème de Riemann-Roch pour des cas particuliers de ce que l'on appellera plus tard des fibrés vectoriels sur C (l'article de Witt a été réexaminé de ce point de vue par Brzezinski, *Math. Ann.*, **276**). La recherche d'un théorème de Riemann-Roch pour de telles entités avait à l'époque fait l'objet de quelques travaux, en particulier de Weil (*Œuvres Scientifiques*, articles **1935a**, **1938c** et Commentaires). Lorsque k est un corps fini et A une algèbre simple centrale sur le corps $K = k(C)$ des fonctions rationnelles sur C, Witt définit une fonction zêta attachée à A. En utilisant son théorème de Riemann-Roch, il établit l'équation fonctionnelle de cette fonction zêta. Witt en déduit une démonstration (dans le cas fonctionnel) de l'énoncé suivant de la théorie du corps de classes : Sur le corps K des fonctions rationnelles d'une courbe sur un corps fini, une algèbre simple centrale qui en chaque complétion de K devient une algèbre de matrices est elle-même une algèbre de matrices. Sur les corps de nombres une telle démonstration avait été donnée par K. Hey en 1929 ; pour une version plus récente, voir A. Weil, *Basic Number Theory* (1967).

En utilisant les propriétés de la fonction zêta, Witt obtient également (sans argument spécifique pour la p-torsion) la description du groupe de Brauer d'un corps de fonctions d'une courbe sur un corps fini en termes d'invariants locaux dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, de somme nulle.

L'article **10** (1935), *Der Existenzsatz für abelsche Funktionenkörper*, complète les travaux de Herbrand et Hasse en théorie du corps de classes, dans le cas fonctionnel. Il s'agit ici du « théorème d'existence », dont la p-partie n'était pas alors connue. La théorie d'Artin-Schreier, formalisée ici, et le théorème de Riemann-Roch sont les outils. On note au passage une démonstration de l'analogue additif $H^i(G, K^+) = 0$ du théorème 90 de Hilbert pour K/k une extension galoisienne de groupe G, du moins pour $i = 1, 2$, seuls cas utiles ici (à l'époque on parlait de systèmes de facteurs, c'eût été plus compliqué à écrire pour $i \geqslant 3$). Dans **11** (1936, non publié) Witt traite la question de l'équation fonctionnelle des fonctions L, question mentionnée dans **10**.

L'article **20** (1936), *Konstruktion von galoisschen Körper der Charakteristik p zu vorgegebener Gruppe der Ordnung p^f*, concerne les extensions de groupe $\mathbf{Z}/p^n$ d'un corps k de caractéristique p. Le Corollaire 1, chap. II, 2.2, du livre de Serre, *Cohomologie galoisienne*, Springer LNM **5** (1994) disant que le plus grand pro-p-quotient du groupe de Galois absolu est un pro-p-groupe libre, et la remarque subséquente sur le rang de ce groupe en termes de $k/\mathfrak{p}(k)$, en sont une version à peine modernisée. Les ingrédients de la démonstration sont les mêmes : annulation des groupes $H^1(g, k_s^+)$, $H^2(g, k_s^+)$ (cf. **10**), donc de $H^2(g, \mathbf{Z}/p)$ via la suite d'Artin-Schreier (ici k_s est une clôture séparable de k et g le groupe de Galois de k_s sur k).

Cet article laissait ouverte la question d'un analogue pour $H^1(k, \mathbf{Z}/p^n), n \geqslant 2$, de la formule $k/\mathfrak{p}(k) \simeq H^1(k, \mathbf{Z}/p)$ déduite de la suite d'Artin-Schreier. Pour k parfait, l'article **23** (1937) sur les vecteurs de Witt résoud ce problème (**23**, §5).

Dans **22** (1958), *p-Algebren und Pfaffsche Formen*, Witt montre, « auf völlig neue Weise », que la partie p-primaire du groupe de Brauer d'un corps k de caractéristique p non parfait peut s'exprimer en termes de différentielles de Kähler. Un tel résultat suit aussi des travaux de Cartier (1958), comme le remarquera K. Kato (1980). Ce dernier établira en 1982 la généralisation de ce résultat aux groupes de cohomologie supérieure. Il donnera aussi une description très précise de la partie p-primaire de la cohomologie d'un corps local, lorsque le corps résiduel, non parfait, est de caractéristique p.

L'article **9** (1935), *Über ein Gegenbeispiel zum Normensatz*, a été souvent cité. Il commence (§1) par une démonstration du fait que toute courbe C (géométriquement intègre) sur un corps F fini possède un diviseur de degré 1 (un théorème dû à F. K. Schmidt (1931)). La démonstration de Witt est plus algébrique. Elle utilise des arguments généraux sur la cohomologie galoisienne des courbes sur un corps quelconque. L'hypothèse de finitude de F est utilisée ainsi : elle assure la surjectivité de la norme sur les extensions de F, et elle assure la finitude du groupe des classes de degré nul.

Le §2 de l'article expose ce qu'on appellerait maintenant la théorie des variétés de Severi-Brauer (formes tordues de l'espace projectif) en dimension un : correspondance entre classes de k-isomorphie d'algèbres de quaternions et de coniques.

Notant $k(C)$ le corps des fonctions d'une conique C sur un corps k (car.$(k) \neq 2$), le noyau de l'application de groupes de Brauer $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(C))$ est d'ordre au plus 2, engendré par la classe de l'algèbre de quaternions attachée à C.

Parmi les travaux qui prolongèrent cette partie, citons tout d'abord la thèse de F. Châtelet (*Ann. Sc. E.N.S.*, 1945), à qui l'on doit la théorie des variétés de Severi-Brauer en dimension quelconque, puis des travaux d'Amitsur (1955) et de Roquette (1963). Ces variétés ont joué un rôle considérable chez Merkur'ev et Suslin (1982), et des généralisations devraient continuer à jouer un tel rôle, comme dans les travaux en cours de Rost et de Voevodsky.

C'est pour son §3 que cet article est souvent cité : Witt exhibe une conique C sur le corps des rationnels $\mathbf{Q}$, de corps des fonctions $K = \mathbf{Q}(C)$ et un élément non-nul du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(K)$ (provenant en fait de $\mathrm{Br}(\mathbf{Q})$) d'image nulle dans $\mathrm{Br}(K_v)$ pour tout complété K_v de K (en une valuation v de K). Ceci peut être vu comme le premier d'une série d'exemples. Pour des courbes de genre plus grand que un avec un point rationnel, on obtient de tels exemples au moyen d'éléments non-triviaux du groupe de Tate-Shafarevich.

Comme le montra Kato (*Crelle*, 1986), pour K un corps de fonctions de d variables sur un corps de nombres k, le groupe de cohomologie pour lequel il doit y avoir un principe local-global est le groupe $H^{d+2}(K, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(d+1))$. Pour $d = 0$, ce groupe est le groupe de Brauer de K. Pour les courbes ($d = 1$), cette conjecture est prouvée par Kato dans l'article cité.

2) Théorie des corps locaux (invention des vecteurs de Witt)

Cette section des Œuvres regroupe deux articles :

23 (1937) *Zyklische Körper und Algebren der Characteristik p vom Grad p^n (Struktur diskret bewerteter Körper mit vollkommenen Restklassenkörper der Characteristik p).*

24 (non publié, 1969) *Vektorkalkül und Endomorphismen der Einspotenzreihengruppe.*

Le travail **23** est à la base de très importants travaux de géométrie arithmétique contemporaine. L'introduction est très instructive, elle décrit les contributions antérieures d'Artin, Artin-Schreier, Albert, Hasse, F. K. Schmidt, H. L. Schmid, Teichmüller, Witt. Witt définit les composantes fantômes (*Nebenkomponenten*) et établit les propriétés fondamentales d'intégralité des formules d'addition et de multiplication sur les vraies composantes (*Hauptkomponenten*). Pour tout anneau commutatif unitaire A, ces formules définissent une structure d'anneau sur l'ensemble $W(A)$ des suites $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$, avec $x_i \in A$. Soit p un nombre premier ; supposons A de caractéristique p. Soit $F : A \to A$ l'application qui à $(x_0, x_1, ..., x_n, ...)$ associe

$(x_0^p, x_1^p, ..., x_n^p, ...)$. Witt introduit l'opération de *Verschiebung* (qui a gardé ce nom), envoyant $(x_0, x_1, ...)$ sur $(0, x_0, x_1, ..)$. Il établit les formules $p.x = VFx = FVx$ (pour tout $x \in W(A)$) et $V^i x.V^j x = V^{i+j}(F^j x.F^i y)$. Il suppose ensuite que A est un corps de caractéristique p, soit $\mathfrak{k}$. Il montre qu'alors $W(\mathfrak{k})$ est un anneau local intègre, de corps résiduel $\mathfrak{k}$, muni d'une valuation (indice du premier vecteur non nul) induisant une topologie pour laquelle $W(\mathfrak{k})$ est complet. Si de plus $\mathfrak{k}$ est parfait ($\mathfrak{k} = \mathfrak{k}^p$; à l'époque un tel corps est appelé *vollkommen*, alors que ce que nous appelons complet est appelé *perfekt*!), alors $W(\mathfrak{k})$ est un anneau de valuation discrète absolument non ramifié, i.e. d'idéal maximal engendré par p, et de corps des fractions de caractéristique nulle.

Witt décrit ensuite le résultat de Teichmüller : pour tout anneau de valuation discrète R complet, de corps résiduel $\mathfrak{k}$ parfait de caractéristique p, il existe un unique système de représentants $S \subset R$ satisfaisant $S^p = S$, multiplicativement clos. Si R est de caractéristique p, alors S est additivement clos : c'est alors un corps de représentants, et R s'identifie à l'anneau des séries formelles en une variable sur $\mathfrak{k}$.

Si R est de caractéristique nulle, $W(\mathfrak{k})$ se plonge naturellement dans R et fait de ce dernier une extension totalement ramifiée (Eisenstein) de $W(\mathfrak{k})$.

Au §5, Witt étudie les extensions cycliques de degré p^n d'un corps k de caractéristique $p > 0$. Soit $W_n(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n.

Le noyau de l'application $\mathfrak{p} = F - 1 : W_n(k) \to W_n(k)$ s'identifie à $W_n(\mathbf{F}_p) = \mathbf{Z}/p^n$. De la suite exacte

$$0 \to \mathbf{Z}/p^n \to W_n(k_s) \to W_n(k_s) \to 0$$

et de $H^1(k, W_n(k_s)) = 0$ (version généralisée de Hilbert 90 additif) Witt déduit l'isomorphisme $W_n(k)/\mathfrak{p}(W_n(k)) \simeq H^1(k, \mathbf{Z}/p^n)$, ce qui est la généralisation cherchée de l'isomorphisme d'Artin-Schreier (cas $n = 1$).

Au §6, Witt étudie les algèbres simples centrales de degré p^n d'un corps k de caractéristique p. En substance, il définit l'accouplement $k^* \times H^2(k, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Br}(k)$, plus précisément pour tout n l'accouplement $k^* \times H^1(k, \mathbf{Z}/p^n) \to \mathrm{Br}(k)_{p^n}$, à valeurs dans le sous-groupe des éléments de p^n-torsion du groupe de Brauer. Que cet accouplement soit surjectif (toute p-algèbre est semblable à une somme d'algèbres cycliques) sera montré par Teichmüller (1936).

L'article **24** traite des « grands vecteurs de Witt », découverts semble-t-il indépendamment par Witt et par plusieurs autres auteurs (sous le nom d'« anneau universel », voir l'introduction du livre de Demazure-Gabriel).

L'essai de Harder décrit les principaux développements auxquels l'article de Witt a donné lieu. Nous nous contenterons ici de mentionner les noms de Cohen, Lazard, Dieudonné, Cartier, Manin, Serre, Barsotti, Grothendieck, Berthelot, Ogus, Illusie, Messing, Fontaine (dont les — gros — anneaux de périodes constituent un développement formidable des constructions de Witt), ses élèves, Kato et ses élèves. Les développements de la cohomologie p-adique ces dernières années (cf. *Astérisque* **223** (1994)) ne sauraient être résumés en quelques mots.

3) Classification des formes quadratiques sur un corps arbitraire

L'article **1** (1937), *Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern*, a fait couler beaucoup d'encre. Il met en place la théorie des formes quadratiques sur un corps k quelconque ($\mathrm{car}(k) \neq 2$). Il établit le théorème de simplification de Witt, et le théorème de structure : toute forme est somme d'une forme anisotrope, d'une hyperbolique et de son noyau. Witt montre que deux formes diagonales isomorphes le sont par une suite de transformations n'affectant que deux coordonnées à la fois. Il définit le groupe de Witt des formes quadratiques et le munit d'une structure d'anneau. A toute forme quadratique sur un corps k on savait associer son discriminant à valeurs dans $k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbf{Z}/2)$. Généralisant ce que Minkowski (sur $\mathbf{Q}$) et Hasse (sur un corps de nombres quelconque) avaient fait, E. Artin avait défini un second invariant, à valeurs dans la 2-torsion $H^2(k, \mathbf{Z}/2)$ du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(k)$. C'est une variante de cet invariant que l'on trouve, sous le nom d'invariant de Hasse, de Hasse-Witt ou de Clifford, dans la littérature (voir T.Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, p. 122). Cet invariant était défini en termes d'une diagonalisation d'une forme. Dans son article, Witt définit directement ce qu'il appelle l'algèbre de Clifford d'une forme quadratique sur un corps quelconque, en étudie le comportement sur une somme orthogonale et établit le lien avec l'invariant proposé par Artin.

Dans la suite de l'article, Witt passe en revue la théorie des formes sur un corps local et sur un corps de nombres (son article servira par la suite de référence, quand bien même les résultats dans ce cas sont essentiellement dus à Minkowski et Hasse) et termine par un joli théorème sur les formes quadratiques sur les corps de fonctions d'une variable sur les réels (voir **4** ci-après).

À la fin des années 60, Witt reviendra sur ce sujet. Il donnera des démonstrations simplifiées de résultats de Pfister sur les formes multiplicatives (**6**, voir F. Lorenz, Springer LNM **130**) et du théorème de norme de Knebusch (**7**).

Parmi les développements ultérieurs, citons :

1) La notion de groupe algébrique anisotrope : A Witt-type theorem for the semisimple groups, p. 43 de l'article de J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, 33-62, in *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol IX, Amer. Math. Soc. 1966.

2) La « théorie algébrique des formes quadratiques », principalement sur un corps : Formes multiplicatives (Pfister, aussi Witt), théorèmes de norme de Knebusch et de Scharlau, théorème d'Arason-Pfister selon lequel l'intersection des puissances de l'idéal fondamental $I(k) \subset W(k)$ (idéal des classes de formes de rang pair) est nulle, suite exacte de Milnor (et Tate) calculant le groupe de Witt du corps $k(t)$ des fractions rationnelles en une variable. On consultera le livre de Lam, déjà cité, et le livre de W. Scharlau pour les développements principaux antérieurs aux travaux fondamentaux de Merkur'ev et Suslin.

3) La recherche des invariants supérieurs sur un corps k : Liens entre la K-théorie de Milnor de k, l'anneau de Witt de k et la cohomologie galoisienne à coefficients $\mathbf{Z}/2$ de k (questions posées dans un article de Milnor). Travaux de Arason, Merkur'ev, Suslin, Rost, résultats annoncés par Voevodsky *et al.*

4) Définition des groupes de Witt et de L-théorie des anneaux et des schémas, étude de ces groupes.

4) Courbes algébriques réelles

Les contributions de Witt se trouvent dans les articles **1** (cité ci-dessus) et **12** (1934), *Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper*. Le sujet avait été considéré au dix-neuvième siècle par Hurwitz, Klein, Weichold, Harnack (inégalité $s \leqslant g+1$ pour le nombre s de composantes connexes réelles d'une courbe réelle de genre g). Hilbert (dix-septième problème) avait soulevé la question des sommes de carrés dans les corps de fonctions. Après les travaux de Hilbert et de Landau, le travail d'Artin et Schreier sur les corps réels clos et la caractérisation des sommes de carrés dans un corps comme éléments totalement positifs avait mené au brillant résultat d'E. Artin en 1926 : si une fonction rationnelle f sur une variété irréductible réelle X ne prend que des valeurs positives sur l'ensemble $X(\mathbf{R})$ des points réels de X, alors f est une somme de carrés dans le corps des fonctions $\mathbf{R}(X)$.

En Italie, Comessatti avait obtenu des résultats intéressants dans d'autres directions (variétés abéliennes réelles, surfaces rationnelles réelles). On consultera à ce sujet l'article de C. Ciliberto et C. Pedrini, Annibale Comessatti and real algebraic geometry, *in* Algebra e geometria (1860-1940) : il contributo italiano, Brigaglia, A. (ed.) *et al.*, Suppl. Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. **36** (1994), 71-102.

En termes modernes, Witt exploite d'une part les résultats de Weichold, d'autre part le théorème de Tsen et la cohomologie galoisienne. Notons $C/\mathbf{R}$ une courbe algébrique réelle, projective, lisse, géométriquement connexe, et $\mathbf{R}(C)$ son corps des fonctions rationnelles. Witt obtint les résultats suivants :

1) Toute fonction rationnelle qui est positive sur $C(\mathbf{R})$ est somme de deux carrés.

2) Si l'on se donne une décomposition de $C(\mathbf{R})$ comme union finie d'intervalles deux à deux disjoints (aux extrémités près), et si l'on se donne sur chaque intervalle un signe ($\pm$), il existe une fonction rationnelle qui prend sur ces intervalles ces signes (là où elle est définie). Parmi les conséquences de ce résultat, citons : Pour la jacobienne J d'une courbe C telle que $C(\mathbf{R})$ ait $s \geqslant 1$ composantes connexes, les groupes $\hat{H}^0(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ et $\hat{H}^1(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ ont le même ordre 2^{s-1}.

3) Pour qu'une forme quadratique en au moins trois variables sur $\mathbf{R}(C)$ soit isotrope, il faut et il suffit que, sur un ensemble dense de points $P \in C(\mathbf{R})$, la forme évaluée en P soit isotrope.

Là encore, l'influence de Witt fut importante. Parmi les directions qui furent explorées, citons :

1) Etude, pour un corps formellement réel k, de l'application signature (Sylvester) $W(k) \to \mathrm{Cont}(X, \mathbf{Z})$, où X est l'espace des ordres du corps k muni d'une topologie convenable et $\mathrm{Cont}(X, \mathbf{Z})$ l'espace des applications continues de X à valeurs dans $\mathbf{Z}$ (travaux de Becker, Bröcker (*Stabilitätsindex*), Prestel, Arason, Elman, Lam).

2) Généralisations des résultats de Witt aux corps de base réels clos (Geyer, Pfister, Delfs-Knebusch).

3) Sommes de carrés dans les corps de fonctions (Ax, Pfister). C'est un résultat de Pfister (1967) que toute somme de carrés dans un corps de fonctions de d variables sur $\mathbf{R}$ (et plus généralement sur un corps réel clos) est somme d'au plus 2^d carrés. Des extensions aux sommes de puissances n-ièmes sont dues à Becker.

4) Etude des « applications cycles » allant du groupe de Chow d'une variété X algébrique réelle dans l'homologie de $X(\mathbf{R})$.

5) Fibrés vectoriels sur une variété algébrique réelle et fibrés topologiques induits sur l'espace des points réels.

6) Séparation des composantes connexes par les fibrés quadratiques (question de Knebusch résolue par Mahé).

7) Cohomologie étale des variétés réelles (voir C. Scheiderer, *Real and étale Cohomology*, Springer LNM **1588**).

8) Etude des espaces (principaux) homogènes sous un groupe linéaire sur un corps k lorsque la dimension cohomologique de $k(\sqrt{-1})$ est 1 ou 2.

9) Interprétation de l'énoncé $\hat{H}^0(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C})) \simeq \hat{H}^1(\mathbf{C}/\mathbf{R}, J(\mathbf{C}))$ comme analogue réel du théorème de dualité de Tate (1957) pour les variétés abéliennes sur un corps p-adique (voir l'étude subséquente de Lichtenbaum sur la cohomologie des courbes sur les corps p-adiques).

Terminons par une question intéressante, soulevée par Pfister : Soit $\mathbf{R}(X)$ le corps des fonctions d'une $\mathbf{R}$-surface algébrique X sans point réel. On sait que toute forme quadratique en au moins 7 variables sur le corps $\mathbf{R}(X)$ possède un zéro non-trivial. Est-ce vrai pour toute forme en au moins 5 variables ?

5) Algèbres de Lie et systèmes de Coxeter

Witt semble avoir donné, parallèlement à Jacobson, les premiers exemples d'algèbre de Lie non standard en caractéristique p (voir article **30**, p. 276). C'est un sujet qui a connu de nombreux développements (p-algèbres de Lie).

Dans **25** (1937), *Treue Darstellung Liescher Ringe*, Witt introduit d'abord l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie sur un corps — qu'il caractérise par sa propriété universelle — et établit le théorème maintenant connu sous le nom de théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt. Ensuite, il étudie l'algèbre de Lie libre à q générateurs L_q et son algèbre enveloppante A_q. Il démontre que l'espace des éléments homogènes de degré n de L_q est de dimension

$$\psi_n = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot q^{\frac{d}{n}},$$

où μ est la fonction de Möbius, et que A_q est une algèbre libre à q générateurs. Dans la dernière partie de son article, s'inspirant des travaux de Magnus, il applique ces résultats à l'étude des quotients $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ où F est le groupe libre à q générateurs et $F^{(2)} = [F, F]$, $F^{(3)} = [F, F^{(2)}]$, *etc.* Il démontre que $F^{(n)}/F^{(n+1)}$ est un groupe abélien libre de rang ψ_n, que l'intersection de tous les $F^{(n)}$ est réduite à l'élément neutre, et que le centre de $F/F^{(n+1)}$ est $F^{(n)}/F^{(n+1)}$.

Il reprendra ces questions dans **26** (1953), *Treue Darstellung beliebiger Liescher Ringe*, où il démontre l'existence d'une Ω-algèbre enveloppante A pour tout algèbre de Lie L sur un anneau commutatif Ω et l'injectivité de $L \to A$ pour une classe d'anneaux Ω qui inclut les anneaux principaux. Ce résultat a aussi été démontré par Širšov, qui a également donné un contre-exemple à l'injectivité dans le cas général. Dans **29** (1956), *Die Unterringe der* *freien Lieschen Ringe*, il étudie les générateurs et relations d'une sous-algèbre de Lie U d'une Ω-algèbre de Lie L donnée par générateurs et relations. Il arrive à déterminer, sous certaines conditions (toujours satisfaites lorsque Ω est un corps), un ensemble de générateurs et relations pour U. En particulier, si L est libre, U est aussi libre, ce qui est l'analogue, pour les algèbres de Lie sur un corps, du théorème de Schreier sur les groupes. Si Ω est l'anneau des entiers, il démontre que toute sous-algèbre U homogène est libre, pourvu que L/U soit un groupe abélien libre ou que L soit de génération finie et L/U sans torsion.

Il n'est pas opportun, ici, de s'étendre sur le développement des algèbres enveloppantes. Pour en avoir une idée il suffira de consulter, par exemple, le livre de J. Dixmier *Algèbres enveloppantes* (Gauthier-Villars, 1974). Les relations entre les quotients de la suite centrale descendante et les algèbres de Lie ont été étudiées dans la thèse de Lazard (*Ann. Sci. ENS* **71** (1954)) et ensuite, entre autres, par des mathématiciens russes, comme le montre la bibliographie du livre de J.A. Bahturin *Lectures on Lie Algebras*, Berlin, 1978.

L'article **27** (1937), *Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe* fait suite à une série de travaux antérieurs : Killing, Elie Cartan, Weyl, Schouten, van der Waerden, Coxeter. La démarche de Witt se retrouvera dans les rédactions de Tits et de Bourbaki sur les systèmes de racines.

Van der Waerden avait montré que la classification des algèbres de Lie simples complexes est équivalente à celle des systèmes de racines réduits, ou plutôt montré qu'à un système de racines donné correspondait au plus une algèbre de Lie simple complexe. Coxeter avait étudié et classifié les groupes qui portent son nom. Witt mit tout ensemble. Tout d'abord il donne une démonstration élégante des résultats de Coxeter. Ensuite il classifie des « diagrammes de vecteurs » qui sont des généralisations des systèmes de racines réduits (on omet la condition $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$). À ceux-ci il associe un groupe de Coxeter, auquel il associe, comme Coxeter, des *Figuren* (une variante évidente des diagrammes dits maintenant de Coxeter, donnant une présentation des groupes de Coxeter). Il classifie ces *Figuren*. Il y en a de deux types, celles correspondant à un groupe fini (il retrouve la liste de Coxeter) et celles correspondant à un groupe infini : la liste qu'il obtient est entièrement nouvelle. Se servant de résultats de E. Cartan et H. Weyl, il associe à toute algèbre de Lie simple complexe un *Vektordiagramm*. Il donne ensuite la liste des *Figuren* qui peuvent correspondre à de tels diagrammes. Enfin, il établit l'existence d'algèbres pour chaque type de diagramme. Witt fut ainsi le premier à utiliser des diagrammes pour classifier les algèbres simples. Le travail de Dynkin (années 1944/1947) est indépendant mais postérieur. Le travail de Witt concerne aussi des groupes de Coxeter infinis.

6) Théorie des groupes finis (groupes de Mathieu et systèmes de Steiner), théorie des réseaux unimodulaires

En 1861, Émile Mathieu avait publié la construction de son groupe M_{12} et annoncé sans démonstration l'existence de M_{24}. Cette découverte ne semble pas avoir soulevé beaucoup d'intérêt chez les contemporains, bien que Jordan donne les générateurs de M_{12} dans son *Traité des substitutions* et que Frobenius, dans son article sur les caractères des groupes plusieurs fois transitifs, parle de M_{24} comme s'il s'agissait d'un groupe bien connu. La première construction digeste des groupes de Mathieu est sans doute celle de **32** (1938), *Die 5-fach transitiven Gruppen von Mathieu*. Dans cet article, Witt démontre d'abord un critère pour construire un groupe t-transitif sur $s+t$ éléments, à partir d'un groupe 2-transitif sur $s+2$ éléments. Ensuite il applique ce critère au groupe $SL(3,\mathbb{F}_4)$ qui agit de façon doublement transitive sur les 21 points de $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_4)$ et obtient un groupe M_{24} qui agit de façon quintuplement transitive sur un ensemble de 24 points. Il déduit facilement de la simplicité de $SL(3,\mathbb{F}_4)$ celle de M_{24}. La construction de M_{12} est basée sur le même principe.

Dans ce même article il montre comment on peut associer à un groupe t-transitif sur n points des systèmes de Steiner du type $S(t,m,n)$. Il s'agit de construire un système de $\binom{n}{t}/\binom{m}{t}$ blocs à m points de telle façon que tout ensemble de t points soit contenu dans un unique bloc. En utilisant ce résultat général, il associe à M_{24} un système de Steiner $S(5,8,24)$ et à M_{12} un $S(5,6,12)$. Pour terminer il démontre que M_{24} et M_{12} sont, respectivement, le groupe des automorphismes des systèmes $S(5,8,24)$ et $S(5,6,12)$ qu'il a construits.

L'article **33** (1938), *Über Steinersche Systeme*, publié dans le même journal à la suite de **32**, traite des systèmes de Steiner. Il contient, entre autres, la démonstration de l'unicité de $S(4,5,11)$, $S(5,6,12)$, $S(4,7,23)$, et $S(5,8,24)$ et les deux principales conjectures sur les systèmes de Steiner :

(a) Les $S(2,q^2,q)$ et les $S(2,q^2+q+1,q+1)$ n'existent que si q est une puissance d'un premier.

(b) Tout $S(q^2,q,2)$ (respectivement tout $S(q^2+q+1,q+1,2)$) est un plan affine (respectivement projectif) sur $\mathbb{F}_q$, les blocs étant, dans les deux cas, les droites.

Ces conjectures sont encore ouvertes.

Ces articles ont eu une influence considérable. Celui sur les groupes de Mathieu est resté une des plus agréables introductions au sujet. Les groupes de Mathieu ont été mis en relation avec les codes de Golay (M_{24}, par exemple, est le groupe d'automorphismes du code binaire étendu de Golay) et les systèmes de Steiner ont été étudiés dans le cadre plus général des « block designs » (on demande que t points appartiennent exactement à un nombre fixé λ de blocs). Toutefois les systèmes particuliers étudiés par Witt restent, dans toute théorie, des singularités d'une envoûtante beauté.

Il faut féliciter l'éditrice du livre d'avoir mis tant de soin dans la publications des papiers inédits. À propos des systèmes de Steiner, elle nous révèle que Witt, en étudiant le système $S(5,8,24)$, découvrit, en 1940, le réseau de Leech (étudié par ce dernier en 1967) et détermina l'ordre de son groupe d'automorphismes. Il en interrompit l'étude parce qu'il ne contribuait qu'en très petite mesure à la densité de Minkowski-Siegel des réseaux unimodulaires de dimension 24.

Dans **37** (1941), *Eine Identität zwischen Modulformen zweiten Grades*, Witt étudie les classes de formes unimodulaires paires définies positives en dimension 16. Il décrit celles qu'aujourd'hui on note d'habitude E_8^2 et D_{16}. Il calcule l'ordre de leurs groupes d'automorphismes et démontre, à l'aide de la formule « des masses » de Minkowski-Siegel, qu'elles sont les seules. Il trouve aussi une condition pour qu'une forme modulaire de degré 2 soit identiquement nulle et utilise ce résultat pour démontrer que non seulement tous les entiers naturels sont représentés le même nombre de fois par E_8^2 que par D_{16}, mais que ceci vaut également pour toutes les formes binaires. Le même résultat pour les formes ternaires sera démontré indépendamment par Igusa et Kneser en 1967.

Une conséquence intéressante de l'existence de ces deux formes est la remarque, faite par Milnor en 1964, que les variétés riemanniennes $\mathbf{R}^{16}/E_8^2$ et $\mathbf{R}^{16}/D_{16}$ sont isospectrales pour le laplacien, mais ne sont pas isométriques.

Dans ce même travail, Witt dit avoir trouvé plus de 10 classes de formes unimodulaires paires positives définies de dimension 24. Il ajoute que la détermination de leur nombre exact semble être un problème difficile. En effet, ce problème ne sera résolu qu'en 1973, par Niemeier. Il est impossible de s'étendre sur les développements de ces questions. Le lecteur pourra se référer au livre de Conway et Sloane, (*Sphere Packings, Lattices and Groups*, Grundlehren **290**, Springer-Verlag) qui décrit aussi les liens avec les codes autocorrecteurs.

Un autre article délicieux est **36** (1955), *Über die Kommutatorgruppe kompakter Gruppen*, dans lequel Witt démontre que dans tout groupe compact qui possède un sous-groupe abélien d'indice fini, le sous-groupe des commutateurs est fermé. La démonstration n'est pas difficile, mais l'exemple qu'il donne, d'un groupe compact avec un groupe dérivé non fermé, est un bijou.

J.-L. Colliot-Thélène, CNRS/Université de Paris-Sud
M. Ojanguren, Université de Lausanne

Philosophie des mathématiques et de la modélisation (du chercheur à l'ingénieur)
N. Bouleau
l'Harmattan, 1999

Ce livre foisonnant suit assez fidèlement le programme annoncé dans le titre et le sous-titre. L'auteur donne tout d'abord une description bien venue de l'activité du mathématicien. Il essaye ensuite de faire sentir la différence entre ce que sont les mathématiques pures et appliquées (l'auteur préfère les appeler mathématiques mixtes suivant en cela Francis Bacon). Il se termine après un long détour philosophique et historique par des réflexions sur l'utilité des mathématiques pour les ingénieurs et comment elles devraient leur être enseignées.

Le passé de l'auteur, ingénieur, mathématicien pur frotté aux applications, urbaniste et enseignant, et son intérêt pour la philosophie et l'histoire des mathématiques, lui permettent de dresser un vaste panorama sur les buts des mathématiques (inventer des concepts simplificateurs et unificateurs), sur leur utilité, sur la signification des résultats (en particulier sur les nombreuses interprétations possibles d'une théorie), sur la modélisation mathématique (hiérarchie des modèles, modèles concurrents, importance des hypothèses à la base du modèle,...) et sur l'apport de l'informatique. Il insiste sur l'importance du passage des « mathématiques modernes » des année 1960 aux « mathématiques post-modernes » et estime que les débats actuels sur l'utilité des mathématiques sont biaisés par la méconnaissance de cette évolution chez les décideurs et les citoyens, au passage il procède à une réhabilitation de Bourbaki qu'il distingue du bourbakisme.

Un livre qui se prête à plusieurs lectures. On peut le lire en mathématicien pour avoir une vue d'ensemble sur l'évolution de sa discipline d'un point de vue philosophique. On peut le lire en honnête homme pour comprendre les buts et les méthodes des mathématiciens purs et appliqués. On peut aussi le lire en citoyen pour saisir l'apport des mathématiques pures à la science et la technologie, pour percevoir l'utilisation omniprésente des modèles mathématiques par les décideurs et les ingénieurs et pour découvrir les dangers d'une modélisation débridée non soumise à la discussion et à la critique.

D. Barsky, CNRS/Université de Paris-Nord

Petits problèmes de géométries et d'algèbre
F. Sauvageot
Collection scopos, vol. 7, Springer, 2000

Face à la tentation de reproduire ici l'avant-propos de l'auteur et au risque de le paraphraser, j'en extrais cette phrase : *Il ne s'agit donc ni d'un livre d'exercices, ni d'un livre de cours, mais plutôt d'un manuel pour « apprendre des mathématiques »*.

Le livre présente vingt-neuf *petits problèmes* – le choix de ce terme au lieu de celui d'*exercices* est on ne peut plus judicieux, même s'il s'agit de sujets d'oraux posés au concours d'entrée à l'École normale supérieure de Cachan – et un problème, sujet d'écrit du même concours en 1995 (complété par deux parties non posées alors).

Les petits problèmes sont regroupés en six thèmes (exemple : *Problèmes de densité*). Pour chacun un petit préambule permet de mettre en perspective les problèmes proposés, aussi bien du point de vue historique que de celui des buts, méthodes et modes de raisonnement en mathématiques. Suivent des énoncés appétissants, certains de quelques lignes (*Soit f une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives. À quelle(s) condition(s) $g = \sqrt{f}$ est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}$?*), d'autres plus longs qui introduisent les outils de la démonstration, comme « Le théorème de Brouwer en dimension 2 » qui procède par découpage d'un triangle équilatéral en n^2 triangles équilatéraux puis coloriage des sommets.

Après avoir erré quelque temps et avoir pris connaissance des indications en fin de volume, comme le suggère l'auteur, ou plus vite pour ceux que la curiosité rend impatients, on se reporte aux solutions. Elles sont complètes et claires, et leur rédaction est tout simplement accueillante : le lecteur est guidé tout au long du raisonnement et découvre que ses connaissances mathématiques lui permettent vraiment de résoudre les jolis problèmes posés. (Noter que les connaissances requises sont celles d'un programme de classes préparatoires ou de *deug* bien assimilé et qu'elles sont entièrement exploitées : c'est bien l'utilisation des concepts et résultats découverts dans ces classes qui mène à la solution.)

La plupart des solutions sont complétées par des commentaires qui sont autant de passerelles vers les mathématiques de la recherche car ils les « racontent » ; c'est une invitation au voyage, avec références à la clé. Les commentaires du petit problème 6, « Transcendance de e », donnent une démonstration de la transcendance de π. Ceux du petit problème 4, « Théorème de Fermat pour les polynômes », donnent, pour la bonne bouche, la résolution dans le cas $n = 3$ du théorème de Fermat telle que l'a donnée Gauss.

En plus de tout ceci, ce qui fait de cet ouvrage un *manuel pour apprendre des mathématiques*, c'est la grande variété des méthodes utilisées et leur décloisonnement : algèbre, analyse, géométrie, arithmétique s'enrichissent de leur interaction. Ainsi le treizième petit problème, « Polygones à sommets entiers », est résolu grâce à l'étude des propriétés arithmétiques de $\mathbb{Z}[i]$. Le deuxième, « Résolution des équations de degré 4 », est basé sur l'étude de l'intersection de deux coniques et la recherche de coniques dégénérées dans un faisceau de coniques ; ne pas manquer les commentaires : ils décrivent la méthode fort élégante de résolution des équations de degré 3 qui a obtenu le prix Fermat junior il y a quelques années.

Quant au problème, il est en lui-même un modèle de décloisonnement : il s'agit d'une démonstration du « grand théorème de Poncelet » utilisant les fonctions elliptiques. On y rencontre donc équations différentielles, géométrie plane, algèbre linéaire...

S'il est destiné en premier lieu aux étudiants des classes préparatoires, qui y trouveront aussi quelques conseils relatifs aux épreuves orales, ce livre réjouira tout amoureux des mathématiques : pour le plaisir !

C. Blondel, CNRS/Université de Paris 7

La collection scopos dirigée par J.-M. Ghidaglia (de chez Springer), est précisément destinée à publier des livres de travail sur les mathématiques (ainsi que la physique et l'informatique). À partir de questions posées au concours d'entrée de l'ens Cachan, soit à l'oral soit à l'écrit, les étudiants sont amenés à mettre en place des raisonnements qui allient réflexion théorique et calculs. Le numéro 4 de cette collection est écrit par J.-M. Ghidaglia et est consacré à l'analyse : *petits problèmes d'analyse*. On y trouve 40 questions d'oral regroupées par thèmes : inégalités fonctionnelles, fonctions implicites, équations différentielles, séries de Fourier... et 4 « vrais » problèmes. Dans les solutions, l'auteur a essayé de prévenir les erreurs éventuelles des étudiants, en expliquant à l'aide de contre-exemples ce dont il faut se méfier. Les commentaires à la fin de chaque démonstration, révèlent les énoncés mathématiques (généraux) qui sont à l'origine de la question. Les candidats aux concours de recrutement de professeurs auront grand intérêt à s'exercer avec ce livre comme avec celui qui est recensé ci-dessus.

Exercices de Probabilités
M. Cottrel, V. Genon-Catalot, C. Duhamel, T. Meyre
Cassini, Paris, 1999

Ce recueil d'exercices recouvre le programme de probabilités de la maîtrise de mathématiques : formalisme de la théorie des probabilités, lois de probabilités usuelles, différents types de convergence, espérances conditionnelles, vecteurs aléatoires gaussiens, martingales à temps discrets et chaînes de Markov.

Chaque chapitre débute par un rappel de cours et comporte une vingtaine d'exercices variés : applications, contre-exemples, démonstrations de résultats importants... Les corrigés des exercices sont détaillés et souvent enrichis d'une deuxième solution ou de remarques d'ordre général.

Cet ouvrage permet donc aux étudiants de maîtrise et aux agrégatifs ayant choisi l'option de probabilités d'acquérir une bonne pratique et d'approfondir leurs connaissances sur les notions fondamentales de la théorie des probabilités. Les premiers chapitres peuvent également servir de référence aux étudiants de licence ayant suivi un cours de théorie de la mesure et d'intégration, ainsi qu'à ceux qui préparent le CAPES.

M. Pelletier, Université de Versailles-Saint Quentin

New Directions in Dirichlet Forms
J. Jost, W.S. Kendall, U. Mosco, M. Röckner, K.T. Sturm
Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, AMS, 1998

La théorie des formes de Dirichlet trouve son origine dans l'utilisation de méthodes liées à l'*énergie* en théorie classique du potentiel. C'est ainsi que Gauss, guidé par le modèle électrostatique, avait introduit l'énergie d'une « mesure » μ comme $E(\mu) = \int U^\mu d\mu$ où U^μ est le potentiel engendré par μ. Un peu plus tard, Riemann introduisait l'*intégrale de Dirichlet* $I(f) = \int |\nabla f|^2 dx$ pour résoudre le *problème de Dirichlet* par une méthode de minimisation. Les deux intégrales précédentes sont liées (à constante multiplicative près et sous des hypothèses de régularité) par l'égalité : $I(U^\mu) = E(\mu)$. Les méthodes d'énergie en théorie du potentiel ont été ensuite utilisées de façon systématique, dans des cadres de plus en plus généraux, dans les travaux de O. Frostman (1935), H. Cartan (1945) et J. Deny (1950). C'est en 1958-1959 que A. Beurling et J. Deny ont introduit, dans deux articles fondamentaux, une théorie axiomatique de l'intégrale de Dirichlet basée sur la remarque que, si φ est une fonction lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ de rapport 1, $I(\varphi \circ f) \leqslant I(f)$. Cette propriété de l'intégrale de Dirichlet d'être diminuée par les contractions est l'un des axiomes fondamentaux de la théorie de Beurling et Deny des *espaces de Dirichlet*. Ils ont montré qu'elle suffisait pour retrouver, via la théorie des espaces de Hilbert, de nombreuses propriétés de la théorie classique du potentiel. Une nouvelle impulsion décisive a été donnée par la théorie probabiliste des espaces de Dirichlet, dans la lignée des travaux de G.A. Hunt, E.B. Dynkin,... Elle est dûe, pour l'essentiel, à M.L. Silverstein (1976) et à M. Fukushima (1971). La théorie générale des formes de Dirichlet, sous son double aspect analytique et probabiliste, est exposée de façon magistrale dans le livre de M. Fukushima, *Dirichlet forms and Markov processes*, paru en 1980 et qui a fait l'objet d'une édition augmentée, avec la collaboration de Y. Oshima et M. Takeda, en 1994. À partir de 1975, et surtout après la parution du livre de Fukushima, les idées et les méthodes de la théorie des formes de Dirichlet ont été appliquées avec succès dans des domaines très variés, notamment en dimension infinie (théorie des champs, espace de Wiener, analyse stochastique), dans l'étude des équations aux dérivées partielles dégénérées à coefficients irréguliers ou dans celle des opérateurs pseudo-différentiels, en théorie de l'homogénéïsation...

Le livre *New Directions in Dirichlet Forms* fait le point sur de nouveaux champs d'application de la théorie des formes de Dirichlet. Il est constitué de cinq exposés basés sur des mini-cours donnés dans le cadre d'une école d'été qui s'est tenue à Anogia (Crète) en 1997.

Dans « Nonlinear Dirichlet Forms », J. Jost présente des travaux récents motivés par la théorie des applications harmoniques entre variétés. Celles-ci peuvent être définies comme minimisant une intégrale de Dirichlet dont l'axiomatisation conduit à une théorie des *formes* *de Dirichlet non linéaires.* Ces formes, sous des hypothèses adéquates de convexité et de courbure négative, conservent une partie des propriétés des formes classiques. Par exemple, la méthode de Crandall et Liggett de construction de semi-groupes peut être adaptée. On peut ainsi démontrer, dans des cadres généraux contenant celui de la géométrie riemannienne, des résultats d'existence et de régularité de fonctions minimisantes.

Dans le deuxième exposé intitulé « From stochastic parallel transport to harmonic maps », W.S. Kendall entend montrer comment développer le calcul stochastique sur les variétés sous forme intrinsèque et utiliser ce calcul pour étudier l'influence de la géométrie sur le comportement des processus. L'aspect proprement « formes de Dirichlet » n'est pas véritablement présent dans ce texte qui débute par un exposé général et très bien fait sur plusieurs aspects fondamentaux de la géométrie différentielle stochastique telle qu'elle s'est développée au cours de ces vingt dernières années. À la base, figure la théorie du développement stochastique défini en utilisant le transport parallèle stochastique et qui permet notamment de définir la notion de martingale sur les variétés et de donner une *formule d'Itô géométrique.* D'autres outils probabilistes (convergence de martingales, méthode de couplage) permettent à l'auteur de donner des exemples de résultats d'analyse et géométrie pouvant être obtenus par cette approche probabiliste, en particulier dans la théorie des fonctions harmoniques entre variétes pour lesquelles il montre des théorèmes du type théorème de Liouville ou de Picard ainsi que des résultats concernant la résolution du problème de Dirichlet.

U. Mosco, dans son exposé intitulé « Dirichlet forms and self-similarity », développe une théorie des *fractals variationnels*, c'est-à-dire des structures fractales auto-similaires homogènes sur lesquelles est définie une forme de Dirichlet locale ayant les propriétés d'auto-similarité correspondantes. Le problème de l'existence d'une telle forme est un problème difficile qui n'est pas abordé dans ces notes. Il faut signaler que parmi les méthodes analytiques ou probabilistes de construction, la principale consiste à approximer le fractal par des structures discrètes, voire finies ; or c'était précisément l'idée originale de Beurling et Deny d'approximer toute forme de Dirichlet par des formes sur les ensembles finis, ce qu'ils ont appelé « le cas élémentaire ». La théorie des fractals variationnels exposée dans ces notes a plusieurs points communs avec celle de l'homogénéïsation. Différentes notions de dimension sont définies, notamment une *dimension homogène* (ou *intrinsèque*) qui permet de donner une formule asymptotique du type de celle de H. Weyl sur le spectre du générateur de la forme ainsi que des propriétés de plongement du type Morrey-Sobolev.

Dans « Stochastic analysis on configuration spaces : basic ideas and recent results », M. Röckner brosse un tableau des résultats qu'il a obtenus avec divers collaborateurs au cours des dernières années sur l'*espace des configurations* d'une variété riemannienne X, c'est-à-dire sur l'espace Γ des mesures de Radon ponctuelles sur X. Le point central est l'étude de formes de Dirichlet sur Γ du type $\int\langle\nabla^\Gamma F, \nabla^\Gamma G\rangle d\mu$ où μ est une mesure sur Γ et ∇^Γ un gradient défini par « relèvement ». Les résultats les plus complets sont obtenus quand μ est une mesure de Poisson d'intensité proportionnelle à la mesure de volume de la variété ou une intégrale de telles mesures. Dans ce cas, la forme est associée à une diffusion conservative qui peut être vue comme un processus constitué d'une infinité de browniens de la variété indépendants. L'auteur étudie plus généralement le cas où μ est une mesure de Gibbs associée à un potentiel d'interaction. Dans ce cas aussi, il établit le lien avec les systèmes infinis de particules.

Le dernier exposé, « The geometric aspect of Dirichlet forms », est dû à K.T. Sturm. Il y montre notamment différentes utilisations de la notion de *distance intrinsèque* associée à une forme de Dirichlet (notion introduite par Biroli et Mosco (1991)). Un résultat typique est le suivant : soit $v(r) = m(B_r(x_0))$ où m est la mesure de référence et $B_r(x_0)$ la boule intrinsèque de centre x_0 et de rayon r. Alors, si $\int_1^\infty [v'(r)]^{-1} dr = +\infty$, la forme est récurrente. L'exposé contient beaucoup d'autres résultats et estimations, notamment en termes de *fonctions d'exhaustion* et s'achève par l'étude détaillée de plusieurs exemples significatifs.

En conclusion, ce livre correspond bien à son titre. Il montre comment la théorie des formes de Dirichlet, développée à l'origine pour éclairer la théorie du potentiel, s'est révélée bien adaptée à l'étude de domaines nouveaux et comment ces nouveaux champs d'application ont conduit en retour à un renouvellement de la théorie, de ses concepts et de ses outils fondamentaux. De plus, écrit de façon vivante, sa lecture en est agréable et stimulante.

F. Hirsch, Université d'Evry-Val-d'Essonne

Partial Differential Equations
L.C. Evans
Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, édité par l'AMS

Auriez-vous osé traiter, dans un seul ouvrage, du thème des équation aux dérivées partielles dans son ensemble, c'est-à-dire des EDP linéaires et non-linéaires, des relations avec le calcul des variations, l'optimisation et le contôle, des systèmes de lois de conservation et des ondes de choc, des méthodes d'analyse fonctionnelle et des espaces de Sobolev. Le tout accessible au niveau licence et s'appuyant sur les approches les plus récentes à ce vaste sujet qui progresse rapidement dans de multiples directions. Relever ce défi est impossible si vous n'avez pas élaboré vos propres principes généraux sur les développements modernes et les fondements historiques de ce domaine. Ces principes, L.C. Evans les énonce clairement à travers des choix explicites. Tout d'abord, cet ouvrage traite des EDP comme un sujet unifié des mathématiques et les notations sont consistantes à travers le texte, parfois en contradiction avec les conventions de certains domaines. Le second principe est que les solutions représentent bien la question centrale du sujet et on peut l'aborder du point de vue des formules de représentations aussi bien que par des théories d'existence. Un autre principe fort est que les solutions généralisées sont inévitables pour les équations non-linéaires (un chapitre important est ainsi consacré aux ondes de choc par exemple) et forment donc un sujet fondamental. Enfin, les EDP ne sont pas une branche de l'analyse fonctionnelle, bien que certaines EDP posent naturellement des questions en terme d'espaces de Banach ou d'analyse convexe. Ceci dit cet ouvrage est constitué de notes de cours, il est donc destiné aux enseignants et étudiants. Son contenu et son style correspondent bien à cet objectif.

Ainsi, il est très significatif qu'une première partie du livre est entièrement consacrée aux formules de représentations des solutions et différentes méthodes permettant de « calculer » des solutions particulières (y compris les méthodes de Fourier), d'obtenir des formules asymptotiques. Une seconde partie traite des espaces de Sobolev et des applications aux équations linéaires (elliptiques du second ordre y compris la théorie spectrale, d'évolution parabolique ou hyperbolique). Viennent ensuite les EDP non-linéaires. Cette troisième et dernière partie est considérée par l'auteur comme la matière la plus moderne du livre. Elle contient une introduction au calcul des variations (jusqu'au « mountain pass lemma »), aux théorèmes de point fixe et méthodes de monotonie, aux équations de Hamilton-Jacobi, à la théorie du contrôle et aux lois de conservation. Des choix drastiques ont donc été effectués, il ne s'agit pas, pour l'auteur, de faire une encyclopédie.

Chacun des onze chapitres se termine par quelques exercices ainsi que par quelques références récentes complémentaires. On voit donc que, même s'il contient une matière neuve et utile aux chercheurs, ce livre est avant tout destiné à l'enseignement : la clarté est toujours privilégiée plutôt que des versions pointues des résultats et théorèmes (auxquelles on peut facilement arriver via les références, quoique de nombreux sujets abordés dans cet ouvrage progressent toujours). Les démonstrations sont toujours complètes et, quelque soit le sujet recherché, les notations sont toujours simples et accessibles directement.

Il s'agit de toute évidence d'un ouvrage de référence qui a sa place dans toutes les bibliothèques de mathématiques d'enseignement et de recherche.

B. Perthame, ENS, Paris

Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations
J. Malý & W.P. Ziemer
Mathematical Surveys and Monographs, Volume 51, AMS, 1998

Second order equations of elliptic and parabolic type
E.M. Landis
Translations of mathematical monographs, volume 171, AMS, 1998

Second order elliptic equations and elliptic systems
Y.Z. Chen & L.C. Wu
Translations of mathematical monographs, volume 174, AMS, 1998

Trois livres de l'A.M.S. traitant de sujets voisins ont été publiés presque simultanément. Le livre de Y.Z. Chen et L.C. Wu est le plus abordable des trois et fournit une introduction très complète et très agréable à lire à la théorie classique des équations elliptiques. Il reprend la théorie depuis son point de départ (théorème de Lax Milgram, principe du maximum, théorie de Schauder, estimations L^p) avant d'expliquer les estimations de De Giorgi-Nash-Moser et leurs applications aux équations quasilinéaires sous forme divergence. La première partie se termine sur le principe du maximum d'Alexandroff Bakelman Pucci et les estimations de Krylov Safonov. Une seconde partie étudie les systèmes elliptiques et leurs théories L^2, Schauder et L^p.

Le livre de E.M. Landis est la transcription de notes d'un cours donné en 1968, cours antérieur en particulier aux travaux de Krylov et Safonov. Certaines parties du livre sont donc dépassées, mais on peut y trouver une approche non traditionnelle des équations elliptiques (construction de fonctions barrières particulières, utilisation de la capacité pour les équations qui ne sont pas sous forme divergence).

Le dernier livre se concentre sur les problèmes de régularité et développe des articles récents de R. Gariepy, W.P. Ziemer, T. Kilpeläinen et J. Malý. Il débute par un chapitre conséquent de rappels sur les espaces de Sobolev, la fonction maximale, le théorème de Rademacher avant de détailler dans le second chapitre les notions de $p-$capacité, de sur-solution, de potentiels de Green et de critère de Wiener pour le Laplacien en passant par les résultats de De Giorgi Nash. La suite du livre est consacrée à l'étude de principes de maximum faibles, d'inégalités de Harnack faibles et d'estimations par des moyennes intégrales de solutions d'équations quasilinéaires.

E. Grenier, ENS Lyon

Théorie asymptotique des processus aléatoires faiblement dépendants
E. Rio
Mathématiques et Applications, 31, Springer, 1999

La statistique des séries chronologiques se développe en raison de l'utilisation de modèles de suites de variables aléatoires dépendantes dans des domaines variés tels la biologie, l'économie, la finance. Tout résultat de statistique asymptotique est construit à partir de conditions de dépendance précises. Quand on désire considérer des statistiques robustes, il y a lieu de ne pas se limiter à l'étude du simple modèle de référence mais de considérer des classes de modèles très larges. Les propriétés de mélange donnent un cadre agréable pour de telles études car beaucoup de modèles de séries chronologiques satisfont de telles conditions. Un avantage des conditions de dépendance faible est leur totale hérédité au travers de fonctionnelles mesurables. Durant les dernières années, la théorie des processus mélangeants a été transfigurée par le travail d'Emmanuel Rio. En particulier une nouvelle inégalité de covariance ainsi qu'un lemme de couplage, très originaux et puissants, lui ont permis d'envisager des énoncés optimaux. Cette littérature, pourtant fondamentale, est souvent peu accessible aux statisticiens. L'objet de l'ouvrage d'Emmanuel Rio est de transmettre les techniques les plus modernes et les plus performantes de la théorie des suites mélangeantes de manière progressive possible sans, toutefois, en farder les difficultés. De très nombreux résultats nouveaux y sont prouvés sans oublier leur illustration par des énoncés statistiques. L'ouvrage est divisé en 9 chapitres qui traitent des thèmes suivants.

(1) L'inégalité de covariance de Rio pour des variables fortement mélangeantes, qui s'écrit en termes de quantiles, donne d'abord lieu à des estimées de variance pour des sommes de variables aléatoires mélangeantes. D'autres conditions de mélange sont aussi envisagées en même temps que des applications à l'estimation fonctionnelle.

(2) Les moments d'ordre entier de telles sommes sont ensuite considérés. Des théorèmes limites en loi sont ainsi accessibles via la « méthode des moments ».

(3) Des inégalités maximales donnent lieu à des énoncés puissants de lois fortes de grands nombres.

(4) Le théorème central limite est ensuite obtenu sous des conditions (quasi-)optimales.

(5) Les méthodes de couplage sont ensuite exposées en détails. Elles permettent de reconstruire des variables aléatoires proches de celles initialement considérées par des variables aléatoires indépendantes.

(6) Une nouvelle inégalité de type « Nagaev-Fuk » permet d'accéder à la loi du logarithme itéré sous les conditions assurant le théorème de limite central.

(7) Des utilisations de ces méthodes constituent la fin de l'ouvrage.

Le théorème centrale limite fonctionnel est ensuite traité, d'abord pour la fonction de répartition empirique, puis pour la mesure empirique sous des conditions entropiques. Un dernier chapitre traite l'exemple le plus important de suites mélangeantes, celui des suites markoviennes. Sans donner une revue de modèles mélangeants, l'auteur lie de manière originale et puissante les différentes propriétés de mélanges utilisables dans ce cadre (il y montre par exemple l'équivalence du mélange fort et de l'absolue régularité). Enfin des appendices précisent des résultats de base utiles, en probabilité, ou sur les inégalités standards relatives aux suites indépendantes, facilitant ainsi l'usage de techniques mises en œuvre dans le corps du texte (notions de dualité, espace d'Orlicz, calcul fonctionnel sur les quantiles). Ces annexes permettent ainsi une lecture autonome du texte pour un lecteur non spécialisé.

Ce texte, écrit en français, est l'outil pratique (et inévitable) de toute personne soucieuse d'obtenir des énoncés de nature asymptotique sous des hypothèses de dépendance faible. Ecrit de manière précise et assez dense, ce livre est remarquablement bien construit et sa lecture est facilitée par des appendices utiles et clairs.

P. Doukhan, Université de Cergy-Pontoise

Un nouveau mensuel pour jeunes futurs scientifiques
COSINUS
Edition Faton

À quel âge peut-on commencer à s'intéresser à la science en général et aux mathématiques en particulier ? Comment peut-on éveiller chez les jeunes l'esprit scientifique ? Il semble admis que l'esprit de finesse, plus traditionnellement lié aux disciplines littéraires soit plus naturel que l'esprit de géométrie, alors que les formes géométriques figurent naturellement dans l'univers qui nous entoure ! L'inspiration et la créativité en littérature seraient-elles innées alors que la construction et l'inventivité en sciences résulteraient de processus d'initiation et de formation ? Si l'apprentissage de la lecture est l'un des premiers à faire l'objet d'un enseignement de base, la plupart des systèmes éducatifs introduisent l'éveil de l'esprit scientifique beaucoup plus tard même si tous les enfants apprennent très tôt à compter ; apprendre à lire serait plus proche de la littérature qu'apprendre à compter ne le serait des mathématiques. Actuellement, l'univers des émotions l'emporte sur le monde de la rationalité, même si nous savons aujourd'hui qu'il n'existe pas de frontières nettes entre les deux. Il est clair que de nos jours, dans les médias quels qu'ils soient, la science passe bien après la littérature. Cependant notre environnement quotidien baigne dans la science : les communications seraient-elles aussi développées si la théorie du signal ne bénéficiait pas de l'apport des ondelettes ? Cette introduction veut saluer le lancement d'un nouveau mensuel : « Cosinus » dont le premier numéro porte la date du 1er novembre 1999. Le public visé : « à partir du collège ». Le sommaire du numéro 1 donnera une idée des contenus développés dans les disciplines qui sont clairement répertoriées sur la première page de couverture : Maths, Physique, Chimie, Astronomie, Biologie, Sciences de la Terre ; ce premier numéro est le reflet du souci des fondateurs de ratisser large les domaines de la science. Dans le détail quels sont les articles signalés sur la première page de couverture :

— les maths !

— les métiers de la science

— France, terre des dinosaures

— Voir venir la foudre

— Pourquoi l'école empêche de dormir.

Si on se limite à la partie mathématique, on relève plusieurs articles signés J.-M. Kantor qui développe des sujets qui le passionnent :

— l'astuce du futur prince des mathématiciens, consacré à Gauss

— Un métier : professeur de mathématiques ; dans cette rubrique est expliquée simplement la méthodologie qui conduit au choix de la carrière de mathématicien

— Kepler et l'empilement des boulets de canons, problème dont une solution vient d'être découverte récemment et qui a fait l'objet d'un exposé de J. Oesterlé au séminaire Bourbaki

— La longueur d'une géodésique

— Pascal et la naissance des probabilités, cet article est accompagné d'une lettre de Pascal à Fermat.

Le langage utilisé est simple et accessible à de jeunes enfants, le vocabulaire nouveau ou technique fait l'objet d'un glossaire qui figure à côté de chaque article. Pour un jeune esprit ce mensuel est riche en connaissances et données nouvelles, mais un moins jeune le lira avec plaisir, il y prendra autant de plaisir qu'à la lecture des bandes dessinées qu'il déroberait au plus jeune ou qu'il achète en cachette !

L'année 2000, Année Mondiale des Mathématiques, est une bonne occasion de redonner un peu de dynamisme à la formation scientifique qui n'a pas actuellement la faveur du grand public, même si le prestige des grande écoles scientifiques attirent toujours les meilleurs esprits. Mais pourquoi ces futurs cadres de la nation éprouvent-ils la nécessité de compléter leur formation scientifique par un passage obligé à l'ENA ? Au cours de ces derniers siècles des scientifiques se sont engagés dans des actions politiques avec comme seul bagage leur formation ; Fourrier, Painlevé, Borel, Hadamard, pour ne citer que quelques mathématiciens, ont été fortement impliqués dans la vie politique de leur époque. Il faut souhaiter que Cosinus participe à l'éveil des jeunes aux sciences tout en gardant une large ouverture sur le monde contemporain au sens large. Le style littéraire des articles à fort contenu scientifique que l'on trouve dans Cosinus peut contribuer à créer une nouvelle génération d'honnête homme.

L'analyse précédente concernait le numéro 1, depuis les numéros 2 et 3 ont été publiés ; pour ces derniers la présentation par grandes rubriques a été conservée, l'équilibre entre les différentes disciplines respecté. Toutefois il faut souligner une déception pour la partie mathématique du numéro 2 : l'article sur les caractères de divisibilité manque de clarté et de rigueur, il comporte des erreurs dues sans doute à l'usage de métaphores inadaptées aux calculs mathématiques. Il ne faut pas oublier que ce mensuel s'adresse à de jeunes lecteurs et que des connaissances acquises, surtout si elles ne sont pas correctes, peuvent avoir des conséquences graves tant au plan méthodologique qu'au plan éthique. Par contre le numéro 3 est de bonne facture et peut-être même de meilleure qualité que les précédents. À l'avenir ce magazine pour jeunes corrigera sans doute ses erreurs de jeunesse !

G. Tronel, Université de Paris 6

Deux et deux font-ils quatre ? sur la fragilité des mathématiques[1]
D. Nordon
Pour la science, 1999

« Notre société attache plus de prix à l'acquisition de connaissances qu'à la réflexion sur le savoir [...] »

[1] Texte paru dans la *Quinzaine littéraire* 01-15 décembre 1999

« Il existe pourtant un bon moyen de ne pas se laisser écraser par un savoir : c'est d'affirmer que nous en connaissons bien assez pour avoir le droit de critiquer [...] »

Serait-ce du Montaigne ? Cela aurait pu l'être. Non, C'est du Nordon. Un récent petit livre *Deux et deux font-ils quatre ?* met immédiatement le lecteur à l'aise : un constat, puis une méthode que l'auteur suivra tout au long de ces neufs chapitres dans lesquels il va analyser ces maths d'un point de vue qui n'est pas tout à fait celui du philosophe, ni du sociologue, ni même celui du mathématicien... On va « mélanger les genres » et même y inclure des nouvelles dont le but est d'apporter un éclairage souriant, voire peut-être un semblant de réponse aux questions débattues.

Première question : qu'est-ce que l'évidence ? Première réponse : ce n'est pas simple. Pour parodier Edgar Morin, on pourrait parler de la non-évidence de l'évidence. Nordon argumente et on se rend compte que rien n'est absolument évident, on s'interroge sur le rez-de-chaussée fuyant sur lequel on voudrait fonder les maths.

Autres questions : les vérités mathématiques sont-elles immuables ? Sont-elles universelles ? Non, répond l'auteur aux deux questions. Puis de poursuivre ses interrogations. Qu'est-ce que le vrai ? Qu'est-ce que la rigueur ? Qui sont les mathématiciens ? Les professeurs sont-ils des robots à dire des mathématiques aux étudiants ? Ne seraient-ils pas des acteurs qui, au travers des mathématiques, montrent leur propre personnalité ? Ne seraient-ils pas des interprètes ? Ce thème est développé dans l'un des chapitres « Paradoxes sur les professeurs » dont le titre rappelle le « Paradoxe sur le comédien » de Diderot.

On arrive au bout de ce livre, avec le sentiment que les maths ne sont pas un domaine étranger, ni même étrange. Comme l'annonce l'auteur dès la fin de son introduction, « ce livre va considérer les mathématiques d'un point de vue "littéraire" ».

M. Mendès-France, Université de Bordeaux