

# SOMMAIRE DU N° 81

---

Mot de la présidente .....	3
Vie de la société .....	3
<b>TRIBUNE LIBRE</b>	
Le débat sur les « maths modernes, <i>F. Pham</i> .....	5
Le bogue de l'an 2000. Est-ce bien sérieux? <i>M. Otter</i> .....	19
<b>MATHÉMATIQUES</b>	
Gammes naturelles I, <i>Y. Hellegouarch</i> .....	25
Peter Shor, Prix Nevanlinna 1998, <i>F. Leprévost</i> .....	40
<b>HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES</b>	
Kronecker. Sur le concept de nombre, <i>J. Boniface</i> .....	49
<b>ENSEIGNEMENT</b>	
Sur l'enseignement des mathématiques en DEUG, <i>J.-J. Risler</i> .....	71
Mathématiques pour physiciens, <i>J. Bok</i> .....	77
Un nouveau paradigme de l'enseignement des mathématiques, <i>F. Weissler</i> .....	78
<b>INFORMATIONS</b>	
CIRM, <i>J.-P. Labesse &amp; R. Moussu</i> .....	81
Compte rendu du CNRS, <i>P. Polo</i> .....	86
Compte rendu du CNU, <i>D. Robert</i> .....	89
Information CNRS .....	90
3 <sup>e</sup> congrès européen de mathématiques .....	90
<b>CARNET</b>	
Moshé Flato (1937-1998) .....	91
André Lichnérowicz (1915-1998) .....	94
Gian-Carlo Rota (1932-1999) .....	95
<b>LIVRES</b> .....	97

Dates limites de soumission des articles  
pour parution dans le n° 82 : 1<sup>er</sup> septembre 1999  
pour parution dans le n° 83 : 1<sup>er</sup> novembre 1999



## Mot de la présidente

Chers Collègues,

Dans le dernier numéro de la *Gazette*, je vous ai parlé du lancement par les associations APMEP, SMF, SMAI et UPS d'un projet de rénovation en profondeur de l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux et d'une demande que nous avons faite en ce sens auprès du ministre Claude Allègre. Au moment où j'écrivais cet éditorial, nous étions en pleine négociation avec le ministère et il m'était difficile d'en dire plus sans risquer d'être contredite par les faits.

Aujourd'hui je peux vous confirmer la création d'une commission, présidée par Jean-Pierre Kahane (commission dont vous trouverez la composition exacte dans la rubrique « Vie de la Société »), qui a commencé à travailler sur ce qui devrait être un des grands chantiers des années à venir.

J'arrive à la fin d'une année de mandat à la présidence de la SMF, pendant laquelle je me suis efforcée de poursuivre l'action de mes prédécesseurs. Je tiens à remercier tous mes collègues qui ont travaillé avec moi, les membres du conseil d'administration – et en particulier du bureau –, les membres des comités de rédaction des revues et tous ceux et celles qui ont donné un peu ou beaucoup de leur temps pour des actions plus ponctuelles.

*Mireille Martin-Deschamps*

\* \* \*

## Vie de la société

### *Commission sur l'enseignement des mathématiques*

La commission sur l'enseignement des mathématiques, dont la présidente avait évoqué la création dans le dernier numéro de la *Gazette* a été installée fin avril et a eu sa première séance de travail le 5 juin dernier. La *Gazette* et le serveur de la SMF donneront très prochainement des informations plus complètes à ce sujet. Mais dès maintenant, voici quelques éléments d'information.

*Composition de la commission* : Président : Jean-Pierre Kahane. Membres : Michèle Artigue, Roger Balian, Frédéric Bonnans, Michel Broué, Guy Brousseau, Claude Deschamps, Jean-Claude Duperret, François Dusson, Olivier Faugeras, Sylviane Gasquet, Rémi Langevin, Michel Merle, Daniel Perrin, Antoine Petit, Jean-Pierre Richeton, Claudine Robert, Claudine Ruget.

*Un extrait de la lettre de mission du ministre :*

« Vous m'avez demandé de mettre en place une réflexion globale et à long terme sur l'ensemble des programmes de mathématiques, de l'école élémentaire à l'université. Je vous informe de mon accord avec cette perspective et de ma décision de mettre en place les structures nécessaires à cette réflexion, qui doit déboucher progressivement, en plusieurs années, sur une réforme générale de l'enseignement des mathématiques ».

*Extrait d'une adresse de la commission aux mathématiciens (dans le sens le plus large du terme) :*

« Le besoin se fait sentir d'une meilleure communication entre les chercheurs et tous ceux qui enseignent les mathématiques. Les mathématiques, comme les arts, les lettres et les autres sciences, doivent contribuer à la culture de tous. Nous souhaitons que ceux qui participent à leurs progrès aient le souci de les faire mieux connaître, en s'adressant aux enseignants à tous les niveaux et qu'ils contribuent ainsi à la formation des élèves.

En vue de l'année mathématique 2000, la commission s'adresse aux associations professionnelles, aux sociétés savantes, aux institutions et aux auteurs potentiels pour qu'ils s'associent avec leurs moyens propres à cet objectif.

La commission souhaite que soient produits, publiés, distingués et récompensés éventuellement par des prix, des textes et documents intéressants et accessibles aux professeurs de mathématiques des lycées et collèges ».

*Quelques aspects du programme de travail initial de la Commission :*

l'informatique, la géométrie, les statistiques, le calcul ; réflexion sur la préparation des enseignants ; l'histoire des réformes.

#### ***Assemblée générale de la smf***

L'Assemblée générale de la SMF a lieu le samedi 19 juin. Les textes des divers rapports (rapport moral, rapport financier) se trouvent in extenso sur le serveur de la SMF. Le rapport financier montre un très net redressement de notre société : après plusieurs exercices nettement déficitaires, l'exercice 1998 se traduit par un bénéfice significatif. Le nombre de membres est stationnaire, autour de 1800.

#### ***Serveur <http://smf.emath.fr>***

Le développement du serveur, qui permet de faire connaître très rapidement un certain nombre de nouvelles importantes et de donner une information détaillée sur nos publications, est en plein essor. Le nombre de connexions sur le serveur a doublé entre octobre 98 et avril 99, pour atteindre 62 000 connexions par mois. Nous encourageons vivement les membres de la SMF à mettre un lien sur leur page personnelle vers le serveur SMF.

*Martin Andler*

## Le débat sur les « maths modernes » est-il dépassé ?

Frédéric PHAM (*Laboratoire J.-A. Dieudonné et IREM de Nice*)

---

« *Ouvrons-nous sans frilosité* », nous recommandait Jean-Pierre Bourguignon dans un article de cette *Gazette* ([5]), auquel je ne peux qu'applaudir. Mais comment et depuis quand sommes-nous frileux ? Était-il frileux, celui qui écrivait<sup>1</sup>

*L'irruption des ensembles dans la mathématique y fait souffler une pensée nouvelle, chaude, subtile et attrayante, tout empreinte d'humanisme et d'humanité. (...) Impossible de parler sans recourir à la démarche ensembliste : le substantif le plus primitif définit l'ensemble des objets auquel il s'applique. Ainsi les ensembles sont présents dès les débuts de la vie culturelle de l'humanité et de l'individu. (...) La mathématique est partout. C'est en tout qu'il faut apprendre à la découvrir.*

Un tel texte fait sourire aujourd'hui et on aura vite fait de le cataloguer au musée des illusions d'une époque révolue. Vraiment révolue ? J'avoue que la belle unanimité avec laquelle on condamne aujourd'hui les « excès », les « erreurs pédagogiques » de l'époque dite des « maths modernes » me paraît fort suspecte. Et l'empressement des collègues à déclarer « je ne suis pas bourbakiste » me semble davantage relever de l'exorcisme que d'un usage raisonné du langage. En chargeant le nom de Bourbaki de tous les péchés, en faisant de lui le prototype du mauvais-pédagogue-qui-dévide-un-discours-hypergénéral-sans-expliquer-les-motivations-ni-faire-de-dessins, on se dispense à bon compte d'analyser une vision des mathématiques qui, quoi qu'on en dise, est encore solidement implantée dans l'esprit de chacun d'entre nous, mathématiciens d'aujourd'hui. Et quand je dis *nous*, je m'inclus dans le lot ! Sauf que le physicien théoricien que j'étais à mes débuts n'a jamais cessé de bousculer le confort du bourbakiste que j'ai appris à devenir<sup>2</sup> ! C'est ce physicien qui a inspiré beaucoup des questions qui vont suivre. Collègues qui savez ce que c'est que les mathématiques, veuillez excuser sa naïveté !

---

<sup>1</sup> G. Papy (1975), cité par D. Nordon dans [13].

<sup>2</sup> Extrait de mes archives personnelles : « Je dois vous avouer que comme très ancien (École centrale 1905) je ne pénètre pas facilement le super-bourbakisme de vos écrits » (lettre de Solomon Lefschetz datée du 18/6/68).

## Les étonnements d'un huron

*On lui expliqua ce que c'était que le pape et l'Ingénu fut encore plus étonné qu'auparavant.*

(Voltaire, l'Ingénu, chap.5)

Alors que la filière maths-physique est depuis longtemps réputée filière « noble » à l'université, tous les professeurs et leurs étudiants savent pourtant que « les différentielles du mathématicien ne sont pas celles du physicien ». Il y a dix ans, profitant de ce que j'enseignais dans une filière moins « noble » (Sciences pour l'Ingénieur), j'ai pris la liberté de glisser en douce à mes étudiants de première année un peu du calcul différentiel que j'aime : pour calculer la tangente à une courbe  $C$ , – disons, le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 + 2x + y = 10 \quad (1)$$

je leur ai appris à « différentier » l'équation, c'est-à-dire à écrire

$$2x dx + 2y dy + 2dx + dy = 0 \quad (2)$$

et à interpréter  $dx$ ,  $dy$  comme des « accroissements le long de la tangente » (au point  $(x, y)$  choisi).

« La méthode est drôlement simple », — m'ont dit les étudiants. — « Pourquoi est-ce qu'on ne nous l'a pas apprise en Terminale ? »

« Recette de physicien », m'ont dit mes collègues, « manque de rigueur », « dissimulation d'un théorème profond » (le théorème des fonctions implicites)... J'avoue que moi-même à l'époque je n'aurais sans doute pas osé enseigner ainsi dans la « filière noble ». Car le bourbakiste en moi pensait, comme mes collègues, que « la bonne façon » de comprendre l'équation (2) est de considérer que  $x$  et  $y$  « sont » les fonctions  $C \rightarrow \mathbb{R}$ , restrictions à  $C$  de la première et deuxième projection canonique de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , de sorte que  $dx$  et  $dy$  « sont » les *différentielles* de ces fonctions (notion qui n'a de sens que parce que  $C$  est une *sous-variété* de  $\mathbb{R}^2$ ).

Mais comment comprendre ainsi l'écriture différentielle de la dérivée d'une fonction composée

$$(dz = g'(y) dy, \quad dy = f'(x) dx) \Rightarrow dz = g'(y) f'(x) dx \quad ? \quad (3)$$

Va-t-il falloir, pour comprendre le  $dy$ , considérer  $y$  comme la restriction au graphe de  $f$  de la deuxième projection de  $\mathbb{R}^2$ ? ou bien comme la restriction au graphe de  $g$  de la première projection? ou bien faut-il se placer dans  $\mathbb{R}^3$ , sur la courbe d'équations  $(y = f(x), z = g(y))$ ? Devant la difficulté de choisir, faut-il renoncer aux notations différentielles dans (3), les considérant comme de vieilles reliques à jeter aux poubelles de l'histoire des mathématiques (ou à laisser aux physiciens, qui-ont-sans-doute-leurs-raisons-certainement-fort-estimables-de-tenir-à-ces-vieilleseries)?

Il y a pourtant une réponse très simple, aussi simple que l'œuf de Christophe Colomb, que je suis stupéfait de n'avoir vraiment comprise que tout récemment : *il ne faut pas demander « ce que c'est » que  $y$  et  $dy$ , etc., car le formalisme différentiel de Leibniz tire justement sa force de la possibilité d'interpréter une même variable de diverses façons.*

C'est d'ailleurs à cela que servent les variables, *dans n'importe quel formalisme mathématique* ! Par exemple un collégien qui apprend pour la première fois à calculer avec des *lettres* ne se demande-t-il pas avec inquiétude « ce que c'est que  $x$  », et ne voit-il pas comme une sorte de miracle ces calculs qui resteront valides *quelle que soit l'interprétation de  $x$*  ? (ici, « interprétation » = attribution d'une valeur numérique).

« Halte-là, tu triches ! » — me dira Purtheuma<sup>3</sup>. « Dans le cas du calcul algébrique du collègue on peut déclarer  $x$  comme une variable *de type nombre réel* (par exemple) et les calculs sur  $x$  se font selon les règles bien codifiées attachées à ce type de variables. *Quel est le type des  $dx$  du calcul différentiel de Leibniz ?* »

J'avoue ne pas être aussi savant que Purtheuma sur la « théorie des types ». Mais je n'en ai pas moins le sentiment de comprendre le calcul littéral du collègue (sans doute pas assez pour pouvoir implanter ma compréhension sur un ordinateur, mais assez pour pouvoir me dire mathématicien !). Et je crois être enfin parvenu, tout récemment, à une compréhension aussi solide du calcul différentiel de Leibniz. Mais en discuter ici m'entraînerait trop loin (cf. [15]). Aussi n'est-ce pas de différentielles que je veux parler ici, mais de *l'usage des variables en mathématiques*.

### « En toute rigueur j'aurais dû écrire des Hom »

Depuis que j'enseigne les mathématiques, l'un de mes principaux sujets de perplexité est la difficulté qu'ont les étudiants à interpréter géométriquement des calculs, ou inversement à traduire sous forme « calculatoire » des énoncés géométriques. Constatant l'étendue du désastre en Maîtrise, nous sommes nombreux à diagnostiquer une compréhension insuffisante de l'algèbre linéaire, prenant sa source dès la première année d'université. J'ai longtemps pensé que le nœud de la difficulté se trouvait dans la notion de *dualité* : en effet, que sont les « coordonnées »  $x_1, \dots, x_n$  dans la traduction « calculatoire » d'un problème de géométrie vectorielle, sinon des *fonctions linéaires sur l'espace  $E$  considéré*, formant une *base de l'espace dual* ? Après de nombreuses tentatives pour « faire passer en douceur » cette idée en DEUG 1ère année (dont une particulièrement désastreuse en 96-97), il m'apparaît aujourd'hui que

(1) la notion de *fonction linéaire sur un espace vectoriel* exige, pour être maîtrisée sous tous ses aspects, un long temps de maturation et il est illusoire d'espérer la circonscrire dans le cadre d'un enseignement semestriel ;

(2) ne pas maîtriser cette notion n'empêche pas les étudiants de savoir raisonner sur les *coordonnées*.

**Exercice n° 1.** — *On donne explicitement un changement de base et l'on demande d'expliciter les coordonnées dans une base en fonction des coordonnées dans l'autre.*

<sup>3</sup> L'ethnie des *Purtheumas* a été étudiée par Didier Nordon ([14]).

Dans le cas  $n = 2$  (vecteurs du plan) cet exercice peut être posé tel quel à un lycéen, qui saura le résoudre sans rien savoir sur les « fonctions linéaires » et sur « l'espace dual » ! (les coordonnées d'un vecteur dans une base sont des *nombres* et le fait que ces nombres « soient fonctions linéaires du vecteur » n'a pas besoin ici de focaliser l'attention).

J'ai repensé à cet exemple un jour où j'écoutais en séminaire un jeune et brillant géomètre nous parler de...<sup>4</sup>. Le séminaire ne se déroulait pas du tout selon le rituel décrit par Didier Nordon dans [14] : aucun signe de somnolence sur les bancs, échanges *non incantatoires* entre l'orateur et l'auditoire (pourtant composé de non spécialistes)... Soudain l'orateur s'est arrêté devant l'équation qu'il venait d'écrire et a proféré ces mots :

*J'ai fait là un abus de notation. En réalité, devant cette équation il faudrait un quantificateur « pour tout  $u$  », et les  $v, w, \dots$  sont fonctions linéaires de  $u$ . En toute rigueur j'aurais dû écrire des Hom.*

Il m'est alors venu une bouffée de reconnaissance pour l'orateur : ton équation a été très bien amenée (ai-je pensé), merci, mille fois merci de ne pas avoir « écrit des Hom » ! Mais de quel « abus » t'excuses-tu et en quoi as-tu ainsi failli à la rigueur ? Ton équation n'était-elle pas juste ? Bien sûr il y manquait une information, que tu as rajoutée au moyen d'un commentaire « méta », en langage non formalisé. Mais mettre en forme le commentaire «  $v$  est fonction linéaire de  $u$  » est à la portée du premier mathématicien venu, de sorte que tu es d'avance absous par Bourbaki ([6]) :

« l'emploi des ressources de la rhétorique devient dès lors légitime, pourvu que demeure inchangée la possibilité de formaliser le texte ».

Ce n'est donc pas un impératif de « rigueur » qui aurait pu t'inciter à « écrire des Hom » (incitation à laquelle ton flair pédagogique t'a fait résister). C'est l'idée qu'en principe *la bonne formalisation* de ton idée doit s'écrire avec des « Hom ». Mais *quel* principe et qu'entend-on par *la bonne formalisation* ?

### Variables muettes et mathématiques aveugles

Les mathématiciens d'aujourd'hui ont une curieuse tendance à s'excuser à tout bout de champ de leurs « abus de langage » ou « abus de notation », comme s'ils voulaient détourner notre attention de ce qu'ils disent ou écrivent *réellement* pour la diriger vers un texte formalisé virtuel qu'ils nous demandent de deviner « à l'horizon » (cf. l'Introduction du traité de Bourbaki [6], p.7). Certes, cette aspiration à une « formalisation complète » a fait accomplir durant ce siècle de grands progrès à la pensée mathématique et par exemple l'exercice consistant à « restituer », dans un fragment de texte mathématique en langage courant, les « quantificateurs sous-entendus » est certainement très formateur pour l'esprit.

Mais il peut être instructif *aussi* de s'interroger sur les textes mathématiques *tels qu'ils sont écrits en réalité* ! Voici quelques questions que l'on peut se poser pour analyser un tel texte, ou lorsqu'on se propose d'en écrire un.

<sup>4</sup> Le sujet importe peu pour mon propos. En fait il s'agissait des singularités des champs de vecteurs holomorphes.



– Niveau de formalisation : de quelle façon le texte est-il ventilé entre *formules* d'une part, *discours en langage courant* d'autre part ?

– Choix des variables : comment le choix des variables contribue-t-il à rendre les formules *lisibles* (formellement simples) et à rendre le texte *parlant* (porteur de sens) ?

Cette question du *sens* fait référence à un *contexte*, qui peut être celui du texte lui-même, ou aussi le *contexte culturel* du public visé et l'un des rôles des variables est de *renvoyer à ce contexte* : soit qu'elles aient déjà joué un rôle important dans la partie précédente du texte, soit qu'elles renvoient à la culture du lecteur (variables ayant un « sens physique » si l'exposé s'adresse à des physiciens, etc.).

Derrière ces deux questions se profile la délicate question de *l'abstraction* : le texte met-il en jeu plusieurs *niveaux d'abstraction* et par quels procédés fait-il passer d'un niveau à l'autre ? A cet égard, le mot *fonction* me paraît jouer un rôle charnière : par exemple comparez les expressions

«  $u$  est fonction sinusoidale de  $t$  »,

et

« la fonction sinus est périodique ».

Dans la première, le mot « fonction » joue un rôle « méta », et sert à nous informer sur une *relation* entre les variables. La seconde *fait abstraction des variables*, ce qui permet de *s'affranchir du contexte*. Le mot « fonction » y perd son rôle « méta » pour devenir un *concept mathématique*, dont on pourra trouver la définition dans n'importe quel dictionnaire moderne de mathématiques. Mais pourquoi donc n'y a-t-il aujourd'hui que les *dictionnaires de langue* pour mentionner le *premier* usage du mot « fonction » (l'usage « méta ») ? Je ne peux m'empêcher de voir là un effet pervers du succès de la théorie des ensembles, qui a permis aux mathématiciens de « chasser le méta de leur science ». Au lieu de s'interroger sur le rôle sémantique des variables et sur l'opportunité éventuelle de faire parfois *abstraction du sens*, on dispose grâce à la théorie des ensembles d'un procédé automatique pour faire abstraction des variables, à savoir la *collectivisation* : au lieu de raisonner sur une propriété  $\mathcal{P}(x)$  on introduit l'ensemble  $P$  (si c'en est un) des valeurs de  $x$  vérifiant la propriété  $\mathcal{P}$ . Ainsi par exemple dans l'interprétation « bourbakiste » de la formule (1) du §1  $x$  et  $y$  ne sont plus des *variables numériques* mais des *fonctions sur  $C$* , fonctions qui sont d'ailleurs *fixées*, de sorte que la formule (1) cesse d'être une formule ouverte (à valeur de vérité dépendant des valeurs des variables) pour devenir une formule *close* (et vraie!).

Mesure-t-on bien tout le chemin dans l'abstraction qu'il a fallu parcourir pour en arriver là ? Est-elle si innocente, la démarche « collectivisante » consistant à poser

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 + 2x + y = 10\}$$

de façon à *rendre muettes les variables numériques  $x$  et  $y$* , puis à *ré-utiliser les lettres  $x$  et  $y$  dans un sens plus abstrait* ?

Certes, ce type de « collectivisation » procure au mathématicien qui la maîtrise un grand confort dans l'abstraction ; mais s'il n'y prend pas garde, il risque

ainsi *sans même s'en rendre compte* de travailler à un niveau d'abstraction inutilement élevé, privant son auditoire ou son lecteur des *fenêtres ouvertes sur le sens* que sont les variables de bas niveau et lui demandant ainsi des efforts que la nature du problème ne justifiait peut-être pas.

Donnons un autre exemple : quand pour discuter les solutions d'un système d'équations linéaires on passe par la notion d'*application linéaire* (avec les notions corrélatives de « noyau » et d'« image »), il faut être conscient du fait qu'on a transformé en « variables muettes » les inconnues du système, c'est-à-dire peut-être *les seuls objets qui (dans le contexte étudié) étaient parlants pour le public visé!* (lire à ce sujet le très intéressant article de P. Lombard [11], sur lequel je reviendrai plus loin).

Loin de moi l'idée de faire le procès de l'abstraction, démarche mathématique par excellence! Mais décider *en toute conscience* de fermer momentanément certaines fenêtres est tout autre chose que de s'enfermer définitivement, par crainte des courants d'air, dans un monde où toutes les fenêtres sont murées — ce monde des Purtheumas dont Didier Nordon nous dit que bien peu de gens en reviennent, une fois qu'ils ont réussi l'exploit d'y pénétrer!

*Petit test : êtes-vous Purtheuma ?*

(1) Pensez-vous que dans le polynôme à une indéterminée  $X^2 + X + 1$  la lettre  $X$  « désigne » la suite  $(0, 1, 0, 0, \dots)$ , tandis que le « 1 » est un « abus de notation » pour la suite  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ ?

(2) Une *relation* est-elle pour vous un couple formé par un ensemble produit et un sous-ensemble de ce produit? Etes-vous d'accord pour dire<sup>5</sup> qu'« en toute rigueur il n'est de relation qu'entre ensembles »?

**Exemple.** — Expliquez ce qu'est pour vous une *relation de dépendance linéaire*.

(3) En feuilletant un polycopié niçois d'algèbre linéaire de DEUG 1ère année vous tombez sur l'énoncé suivant ([16], §5) :

**Théorème 5.1.** — *Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  un  $n$ -uplet de vecteurs tel que  $r$  d'entre ses membres soient linéairement indépendants et pas davantage. Alors parmi les relations vérifiées par ce  $n$ -uplet on peut en trouver  $n-r$  qui soient linéairement indépendantes et pas davantage.*

Vous dites-vous

— Cet énoncé ne mérite pas d'être appelé « théorème ». Il s'agit tout au plus d'une paraphrase, en langage intuitif, du théorème  $\dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f$  pour une application linéaire  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow E$

ou bien

— Tiens! Voyons un peu comment l'auteur s'y est pris pour donner un statut mathématique précis à cet énoncé!?

## Le regard de la logique

95% des mathématiciens se moquent éperdument de ce que peuvent faire tous les logiciens... Cela ne les intéresse absolument pas.

(J. Dieudonné [7])

<sup>5</sup> (avec Stella Baruk [3])

Depuis quelques années on entend souvent les enseignants de mathématiques se plaindre de ce que les étudiants « ne savent plus raisonner », « manquent de logique »... A vrai dire ils se plaignent de bien d'autres « manques » encore et à les entendre on peut penser que les étudiants d'aujourd'hui n'apprennent plus rien au lycée ! Mais cette plainte du « manque de logique » me semble mériter une attention particulière, car on ne l'entend pas seulement chez les mathématiciens mais aussi chez les collègues d'autres disciplines scientifiques (par contre, je n'ai jamais entendu un physicien se plaindre de ce que nos étudiants maîtrisent mal la théorie des ensembles !). En rapprochant ce constat de la phrase lapidaire de Dieudonné rappelée ci-dessus, un ingénu pourrait être tenté de penser que si les étudiants d'aujourd'hui « manquent de logique », c'est la faute des mathématiciens ! Pour leur défense, ceux-ci pourront rétorquer que le mot « logique » recouvre en fait plusieurs choses assez différentes :

- (1) Un *art* de « raisonner juste », bien commun de tous les scientifiques mais que les mathématiciens pensent maîtriser au plus haut degré.
- (2) Une *discipline mathématique*, née des efforts des mathématiciens pour transformer « l'art » ci-dessus en une *science*.
- (3) Un *système* érigé au début du vingtième siècle, réputé garantir le « bien-fondé » des mathématiques.

Il ne viendrait à l'idée d'aucun mathématicien de déprécier la logique au sens 1. Quant à la logique au sens 3, on apprend en lisant la suite du texte de Dieudonné que « ce système répond exactement aux besoins de tous les mathématiciens » (j'aurais pourtant aimé lire quelque chose sur le rôle purement académique de « mythe fondateur » que ce système joue dans la communauté des mathématiciens : n'est-il pas vrai que *dans leurs pratiques* les mathématiciens se soucient fort peu de Zermelo-Frankel et que s'il leur arrive d'y faire allusion ce n'est que de façon incantatoire, histoire d'impressionner les étudiants ?).

Mais que dire de la logique au sens 2 ? Depuis l'époque où Dieudonné écrivait, elle a sans doute gagné en respectabilité, nourrie comme elle l'a été par les problèmes concrets posés par l'informatique. Mais je ne suis pas sûr que tous les mathématiciens soient bien conscients de la différence fondamentale qui sépare les acceptions 2 et 3 du mot « logique », *indépendamment de toute considération historique* : c'est la différence entre une *science* et un *système*. Un système se veut *fermé*, alors que la démarche scientifique se veut *ouverte*, sous-entendant l'existence de « réalités » qu'il s'agit de « modéliser », l'idée que nous nous faisons de ces réalités pouvant évoluer, de sorte que l'adéquation du modèle à la réalité n'est jamais acquise définitivement. Il serait intéressant de faire un sondage parmi les mathématiciens, pour leur demander de répondre à la question suivante :

*les mathématiques sont-elles une science au sens précédent ?*

Les partisans du OUI seront-ils minoritaires<sup>6</sup>? J'aurai au moins le réconfort de pouvoir y compter quelques grands noms, comme en témoignent les citations suivantes.

V. Arnold [2] :

Le schéma de construction d'une théorie mathématique ressemble tout à fait à celui de n'importe laquelle des autres sciences naturelles. Au début nous étudions certains objets, nous faisons des observations dans différentes circonstances. Puis nous cherchons à trouver les limites d'applications de nos observations, nous cherchons des contre-exemples, en évitant de trop généraliser...

Y. Manin [12] :

In this book mathematical logic is presented both as part of mathematics and the result of its self-perception. (...) Foundational problems are for the most part passed over in silence. Most likely, logic is capable of justifying mathematics to the same extent than biology is capable of justifying life.

Dès lors que l'on regarde la pensée mathématique (et les textes qui la traduisent) comme une *réalité vivante*, on devrait tout naturellement s'intéresser à la logique (au sens 2) et aux outils conceptuels qu'elle nous fournit pour mettre en relation les divers niveaux de formalisation qui constituent la pratique des mathématiques<sup>7</sup>. Encore faut-il comprendre ici la logique comme *science* au plein sens du mot, sans la réduire à son seul aspect *formel*. Une lecture très éclairante à ce sujet est celle de Quine ([17]), dont je vous propose d'encadrer en lettres d'or l'extrait suivant :

*La tâche qui consiste ainsi à paraphraser un énoncé et à isoler sa structure significative est tout aussi capitale pour la logique que le test, ou preuve, d'implication auquel cette tâche préliminaire ouvre la voie.*

J'ai découvert Quine grâce à la thèse de Viviane Durand-Guerrier [9], qui contient d'intéressantes analyses du « manque de logique » des étudiants, ainsi que des non-dits ou incohérences qui sous-tendent la « logique » de leurs professeurs. Un exemple universellement répandu de « non-dit » consiste à *sous-entendre les quantificateurs*, comme lorsque l'on écrit « si  $x > 0$ , alors  $x^3 + x > 0$  » (le quantificateur  $\forall x$  est sous-entendu). V. Durand-Guerrier donne l'exemple d'un manuel dont les auteurs, plus scrupuleux, édictent la règle suivante : « quand une proposition, notamment une implication ou une équivalence, est donnée sans quantificateurs, c'est le quantificateur universel qui est sous-entendu ». Elle fait remarquer que cinq pages avant, le même manuel

<sup>6</sup> Parmi les partisans du NON, on peut compter notre actuel ministre [1]. Il est vrai qu'il n'est pas mathématicien, mais son opinion doit sans doute quelque chose aux professeurs de mathématiques qu'il a eus sur les bancs de l'université! Le texte de Dieudonné déjà cité nous apprend que les 5% de mathématiciens qui s'intéressent à la logique sont notamment « ... les constructivistes américains, tels Bishop et ses élèves, qui sont fortement troublés par les difficultés des rapports des mathématiques avec le réel, etc., toutes choses dont les mathématiciens, les autres 95%, se moquent éperdument ».

<sup>7</sup> Par exemple lorsque l'on fait un « calcul en coordonnées » un premier niveau de formalisation est celui du calcul lui-même, qui porte sur des variables *numériques*; le passage à l'interprétation géométrique se fait via une *interprétation des variables* (notion de « système de coordonnées »). Ainsi comprise comme une notion « méta », la notion de système de coordonnées est tout à fait accessible à un débutant. C'est d'avoir voulu la mathématiser trop tôt qui m'a valu les déboires auxquels je faisais allusion au début du §2.

proposait des exercices dont les énoncés violaient cette règle (le signe  $\Rightarrow$  y apparaissait dans des énoncés ouverts, où aucun quantificateur ne pouvait raisonnablement être sous-entendu)! De telles contradictions me paraissent très révélatrices d'une tension entre la *pratique réelle* des mathématiques, où comme dans toute science on doit souvent travailler sur des énoncés *ouverts* et un *désir de fermeture* que résume le slogan (longuement discuté dans [9], chap.5) :

*un énoncé mathématique est soit vrai soit faux!*

J'ai fait l'expérience de cette tension l'an dernier en préparant avec un collègue une feuille d'exercices d'algèbre linéaire : je lui proposais une batterie d'exercices portant sur des triplets de vecteurs  $(u, v, w)$  non donnés explicitement mais sur lesquels on donnait certaines informations ; l'énoncé se terminait par la phrase : « les vecteurs  $(u, v, w)$  sont-ils linéairement indépendants ? » — suivie d'une phrase que j'avais rajoutée par égard pour les étudiants (pour ne pas les prendre en traître!) : « dans chacun des cas proposés, cochez l'une des trois cases  oui,  non,  l'information donnée ne permet pas de conclure ». Le collègue chargé de rédiger la feuille n'a pas aimé cette façon de poser la question, qu'il a trouvée trop insolite. Après d'intenses cogitations il a fini par adopter la formulation suivante :

la famille  $(u, v, w)$  est-elle nécessairement libre, ou nécessairement liée ?

Bravo! Il avait trouvé une façon élégante de *fermer la question*, de façon à ce qu'on ne puisse répondre que par oui ou par non!

Certes, sa formulation avait sur la mienne l'avantage de la concision. Mais le vrai problème que soulève cette anecdote est le suivant : *pourquoi évitons-nous de poser à nos étudiants des questions auxquelles la seule réponse raisonnable serait « on ne peut pas savoir, ça dépend<sup>8</sup> » ?* Est-ce ainsi que nous allons former leur esprit scientifique? Ou alors, « l'esprit mathématique » se distinguerait-il de l'esprit scientifique en général par sa plus grande propension à « fermer les énoncés », de façon à obtenir des vérités simples et définitives? Le classement des mathématiques en numéro 1 dans la classification d'Auguste Comte signifierait alors qu'en fait « La Mathématique » est la *reine de toutes les scolastiques* (ce que confirme l'étymologie grecque : « mathêtès » = élève). De ce point de vue, il est incontestable que la théorie mathématique par excellence est la théorie des ensembles, *cette merveilleuse machine à fermer les énoncés* (relire le §3)! Qu'il est confortable, ce formalisme qui « recouvre la totalité des mathématiques » et permet ainsi de ne plus se poser de questions sur les liens entre divers niveaux de formalisation! Plus question *d'interpréter* des variables<sup>9</sup>! Plus question de parler de « modèle », on vit sous le règne du *formalisme unique, réputé s'identifier à la réalité*, de sorte que « La Mathématique » toute entière est fermée sur elle-même!

<sup>8</sup> Voir à ce sujet les expériences pédagogiques de Marc Legrand[10].

<sup>9</sup> Le mot « variable » a-t-il d'ailleurs sa place dans l'édifice mathématique moderne? Voyez comme le dictionnaire de Bouvier et Georges [4] est pudique et embarrassé à son sujet!

Alors, quand on vient nous parler de la logique du premier et du deuxième ordre<sup>10</sup>, de fonctions récursives et de modèles, théories très gentilles et très belles qui ont obtenu des résultats remarquables, nous, mathématiciens, nous ne voyons aucune objection à ce qu'on s'en occupe, mais cela nous laisse entièrement froids [7].

### Dessine-moi un mouton

Aux temps bénis du « bourbakisme pur et dur » tout professeur de mathématiques qui se respectait mettait un point d'honneur à ne pas faire de dessins. Aujourd'hui au contraire il est de bon ton de dire « je ne suis pas bourbakiste, je fais des dessins »— et de s'étonner du peu d'empressement des étudiants à suivre le bon exemple : « on a beau leur dire, ils s'obstinent à ne pas faire de dessins ». Nos étudiants seraient-ils plus « bourbakistes » que leurs professeurs ?

Une expression familière me revient en mémoire, souvent entendue dans mon enfance, dans la bouche d'une aïeule agacée que ses paroles ne soient pas suivies d'effet : « on leur dit ça, c'est comme si on chantait ! ». Et si au lieu d'illustrer nos démonstrations par des dessins, nous essayions de les agrémenter par des chansons ? J'ai l'air de plaisanter, mais vous-êtes vous déjà interrogés sur le statut *réel* des dessins dans notre enseignement ? Vous arrive-t-il souvent de tenir un discours où *les dessins jouent un rôle clef*, c'est-à-dire qu'en supprimer les dessins lui ferait perdre toute cohérence ? Vous arrive-t-il parfois de proposer un exercice *dont la donnée est un dessin* ? A propos d'une notion comme celle de *produit scalaire*, vous arrive-t-il de faire travailler les étudiants sur le *produit scalaire de la géométrie du lycée, celui qui se mesure avec la règle et l'équerre* ? Non bien sûr, car cela obligerait à sortir du schéma « définition-théorème-démonstration » pour suivre le schéma « expérience-modèle-étude du modèle-conclusions-vérfications par l'expérience » (cf. Arnold [2] p.25) !

« Faire des dessins » n'est pas seulement un *art* que l'on pourrait apprendre par simple imitation. C'est une véritable *science*, qui met en jeu des *concepts* ! Quelle richesse de « non-dits » se cache dans la phrase « faisons un dessin dans  $\mathbb{R}^2$  », devenue aujourd'hui si courante dans la bouche des universitaires qu'ils ne se rendent même plus compte de ce qu'elle a de comiquement absurde ! De grâce, acceptons de faire des dessins *dans le plan* (ou *au tableau*, ou *sur le papier*) et n'ayons pas peur de discuter *scientifiquement* de ce que cela signifie !

Vous voulez un exemple ? Voici, résumée en quelques lignes, une activité assez riche pour nourrir toute une séance de travaux dirigés de DEUG (on peut la voir comme une introduction géométrique à la réduction de Gauss des formes quadratiques, ou comme un introduction à « l'oubli de la structure euclidienne » en géométrie affine).

<sup>10</sup> Une logique du deuxième ordre est une logique où les quantificateurs peuvent porter non seulement sur les *variables* de la théorie mais aussi sur des *relations* (au sens métamathématique) entre ces variables. Par exemple le chap.3 du livre de Manin [12] utilise une théorie logique où toutes les variables sont exclusivement *numériques*, mais où l'on peut néanmoins quantifier sur les *fonctions*. Il me semble que réfléchir à de telles logiques pourrait nous éclairer sur certaines des difficultés qu'ont nos étudiants à faire des raisonnements quelque peu généraux sur les fonctions (pour un étudiant frais émoulu du lycée, la notion de « fonction » n'est-elle pas une notion métamathématique, associée dans son esprit à certains types de *formules* ?).

*Les avatars d'un cercle*

a) Dessiner la courbe  $x^2 + y^2 = 1$ , d'abord en interprétant  $x, y$  comme coordonnées dans un repère orthonormé du plan, puis comme coordonnées dans un repère quelconque (on pourra s'aider en coloriant d'abord la zone ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ )).

b) Dans le repère dessiné ci-dessous, dessiner la courbe d'équation  $x^2 - 6xy + 13y^2 = 1$  (idée : remarquer que le premier membre s'écrit  $(x - 3y)^2 + 4y^2$ , et se ramener au cas a) par un changement de coordonnées).

N.B. L'exercice b) peut être vu comme une illustration de la « dualité » *changement de repère/changement de coordonnées* : cf. l'exercice du n° 1.

J'ai été très frappé d'entendre l'an dernier deux collègues du secondaire discuter de la façon dont en classe de seconde elles montraient à leurs élèves comment dessiner la courbe  $y = x^2 - x + 2$  : « je me ramène au cas  $y = x^2$  par une translation du plan » — disait l'une ; « moi, je préfère un changement de repère » — disait l'autre. Je me suis demandé en les écoutant ce qu'en penseraient nos collègues universitaires qui « dessinent dans  $\mathbb{R}^2$  » ! J'ai pensé à ces cours de calcul différentiel de licence qui énoncent froidement :

Définition : on appelle *difféomorphisme*, ou *changement de coordonnées*,...

Voilà comment le refus des considérations « méta » (joint au souci louable de ne pas introduire de concepts trop sophistiqués comme ceux de « variété », etc.) conduit les universitaires à *tout mélanger, effaçant des distinctions dont l'importance pratique apparaît dès la classe de seconde* ! Si telle est notre conception des maths, alors soyons honnêtes et faisons comme ce collègue qui commence son premier cours de DEUG 1ère année en déclarant à ses étudiants : « ce que vous avez appris au lycée n'est pas des maths, maintenant vous allez commencer à faire des maths !<sup>11</sup> »

Loin de moi l'idée de proposer les « maths du lycée » comme un idéal à suivre à l'université ! Mais avant de nous lamenter sur le niveau des étudiants qui nous arrivent du lycée, nous ferions mieux de nous interroger sur notre propre responsabilité (à nous universitaires) dans la rupture secondaire/université. Quinze ou seize ans nous séparent aujourd'hui de la contre-réforme qui a consacré l'abandon des « maths modernes » au lycée. A mi-parcours, Philippe Lombard[11] écrivait ces lignes que je trouve tragiquement prémonitoires :

Les conditions sont ainsi réunies, soit d'une nouvelle crise, soit d'un nouveau rendez-vous manqué. Et ceux qui voudraient en apercevoir les causes les trouveraient sans peine : (...) on a formé — et (...) l'on forme toujours — des promotions entières de professeurs pour enseigner les mathématiques dans l'état d'esprit des programmes de 1970, alors que les programmes que l'on se propose de mettre en place supposent, pour fonctionner efficacement, une rupture presque totale avec cet état d'esprit.

En quoi la vision des mathématiques qui prévaut aujourd'hui à l'université est-elle *fondamentalement* différente de celle de l'époque dite « bourbakiste » ? Certes, on fait des dessins et peut-être (?) davantage de commentaires qu'autrefois, mais « comme si on chantait », car il ne faudrait surtout pas que ces « ornements » viennent entamer la solidité du bloc monolithique qu'est l'édifice formel. Changer *vraiment* d'état d'esprit, ce serait reconnaître pleinement

<sup>11</sup> Air connu : « ce traité prend les mathématiques à leur début » [6] !

aux mathématiques leur statut de *science expérimentale*, dont les concepts servent (comme dans toute autre science) à *interpréter ou prévoir des résultats d'expériences* (qu'elles soient graphiques, numériques,... ou expériences de manipulation de formules!).

Qu'on me comprenne bien : il ne s'agit pas de vider les mathématiques de leur caractère conceptuel, mais bien au contraire de *redonner aux concepts tout leur sens!*

« ... il n'est pas d'expérience (...), même simple et transparente au premier abord, qui ne se situe à l'intérieur d'un cadre théorique précis, hors duquel elle perdrait toute signification tant soit peu générale : il ne s'agit pas seulement d'observer, très attentivement et dans les moindres détails, ce qui se passe dans telle situation concrète que l'on a construite (...); l'important est de tenter d'identifier ce qui *va* se passer dans une *autre situation*, serait-elle très proche de la première. Et cette parcelle d'universalité que porte en elle une expérience (...) ne peut être perçue, dégagée et éventuellement délimitée qu'à travers les concepts introduits par la théorie, et les relations qu'elle postule entre eux<sup>12</sup>.

Si les maths du lycée ont perdu tout caractère conceptuel, si la démarche qu'elles proposent aux élèves se réduit trop souvent à « observons..., constatons..., admettons... », n'est-ce pas parce que l'enseignement universitaire n'a su transmettre en fait de concepts mathématiques que des coquilles vides, déconnectées de toute expérimentation? Si les lycéens « ne savent plus raisonner », n'est-ce pas en partie parce que les mathématiques universitaires ont propagé une vision intégriste de la rigueur, inexportable au lycée car excluant toute réflexion sur les « formalisations partielles et incomplètes...<sup>13</sup> » qui constituent la pratique des mathématiques? Ne restons-nous pas prisonniers d'une idéologie qui refuse de s'intéresser à la *réalité* des pratiques formelles, en dehors du *modèle* qu'en fournit la théorie des ensembles?

Je suis effaré de voir qu'aujourd'hui comme il y a vingt ans on continue commencer des cours de première année d'université par une semaine (sic) de « rappels de logique-et-de-théorie-des-ensembles »! Le mot « rappels » doit-il être compris ici comme « rappels de ce que les étudiants savaient autrefois en entrant à l'université, au bon vieux temps où on leur enseignait la théorie des ensembles dès la maternelle »? Dans le même état d'esprit, un enseignant de  $n$ -ième année commencera son cours par une semaine de « rappels de... » (insérer ici ce que les étudiants d'autrefois étaient censés savoir en entrant en  $n$ -ième année). L'avantage de cette scolastique est évident : les programmes sont d'une cohérence sans faille, du moins sur le papier, sans que les enseignants aient besoin de se fatiguer à se concerter pour harmoniser leurs enseignements! Le

<sup>12</sup> Bernard Diu[8] : il s'agit d'un ouvrage de vulgarisation racontant l'histoire des concepts de la thermodynamique. J'aime bien (entre autres) les réflexions sur l'enseignement par lesquelles commence le premier chapitre « Qu'est-ce que la physique? » (1er paragraphe : science théorique ou science expérimentale?).

<sup>13</sup> Suite de la citation (Bourbaki[6]) : « ... dont le calcul algébrique usuel est l'exemple le plus connu ». Pour la version « intégriste » du « calcul algébrique usuel », cf. la question 1 du petit test : « Etes vous Purtheuma? ».

Autre exemple « d'intégrisme ensembliste », d'autant plus désolant qu'il est devenu réflexe conditionné chez la plupart des collègues : le concept de « relation d'équivalence » est automatiquement associé à ceux de « partition d'un ensemble » et d'« ensemble-quotient » : cf. la question 2 du petit test : « Etes vous Purtheuma? ».



professeur n'a pas besoin de se soucier de ce que les élèves savent vraiment, puisque de toutes façons il « rappelle » tout ce dont il va avoir besoin ! Au terme d'une scolarité ainsi conçue, nos étudiants auront « vu » toutes les mathématiques — comme ces touristes à qui un voyage organisé a fait « voir » toute la Chine (Pékin, la grande muraille, Canton, Shanghai...) en sept jours. Pourvu qu'on n'aie pas l'idée saugrenue de se demander ce qu'ils en ont *compris*, le système est d'une stabilité à toute épreuve. Sa seule source immédiate de fragilité est la possibilité de malentendus entre profs et élèves sur ce que ces derniers doivent faire pour être reçus à l'examen : sur ce point nous avons encore des progrès à faire et l'enseignement secondaire est en avance sur nous, avec son « bac » aux taux de réussite garantis !

Mais qui acceptera de croire qu'en empilant des caisses sur lesquelles on a collé l'étiquette « mouton » on fait un travail de berger ? Comment nos « petits princes », qu'on force à accepter ce jeu de « faire semblant », peuvent-ils y trouver un intérêt quelconque ? Réjouissons-nous si nombre d'entre eux trouvent le jeu stupide ! Peut-être est-ce grâce à eux que nous allons apprendre à faire évoluer notre vision des mathématiques. Mais notre collectivité saura-t-elle se donner la *liberté* indispensable à une telle évolution ? Ou faudra-t-il d'abord que tout le système implose, à l'instar de tel système politique qui s'est effondré en raison même de sa surstabilité ?

### Références

- [1] C. ALLÈGRE *La défaite de Platon*, Fayard 1995
- [2] V. ARNOLD *Gazette des Mathématiciens* n° 78 (Octobre 1998)
- [3] S. BARUK *Dictionnaire des mathématiques élémentaires*
- [4] A. BOUVIER, M. GEORGES *Dictionnaire des mathématiques*, PUF 1979
- [5] J.-P. BOURGUIGNON *Gazette des Mathématiciens* n° 74 (Octobre 1997)
- [6] N. BOURBAKI *Théorie des Ensembles* Introduction.
- [7] J. DIEUDONNÉ in *Penser les mathématiques* (Séminaire de philosophie et mathématique de l'École normale supérieure, F. Guénard et G. Lelièvre éd.), Seuil 1982
- [8] B. DIU *Les atomes existent-ils vraiment ?*, Odile Jacob 1997
- [9] V. DURAND-GUERRIER *Logique et raisonnement mathématique* (Thèse, Univ. de Lyon I, 1996)
- [10] M. LEGRAND *Repères-IREM* 10, janv.1993 ; *Repères-IREM* 20 et 21, juil. et oct.1995
- [11] P. LOMBARD *Repères-IREM* 2, janvier 1991.
- [12] Y. MANIN *A course in mathematical logic* (english translation), Springer Verlag 1977.
- [13] D. NORDON *Les mathématiques pures n'existent pas* Actes Sud éd., 1981.
- [14] D. NORDON *Gazette des Mathématiciens* n° 67 (Janvier 1996).
- [15] F. PHAM *Calcul différentiel à l'ancienne* (chap.1 de la nouvelle édition de *Géométrie et calcul différentiel sur les variétés*), Dunod-Masson 1999
- [16] F. PHAM *Les mécanismes fondamentaux de l'algèbre linéaire* (prétirage PUPÉ n° 30, Nice, février 1998)
- [17] W. QUINE *Méthode de logique* Armand Colin 1972 (traduit par M. Clavelin)



# Le bogue de l'an 2000

## Est-ce bien sérieux ?

Martine OTTER (*Directeur Qualité & An2000 - Experian*)

---

### Que risque-t-il réellement de se passer ?

Les problèmes sont identifiés. Les professionnels sont alertés. Des dizaines de milliers de programmeurs travaillent dans tous les pays du monde à la correction du bogue. Des techniques de tests sophistiquées sont mises en œuvre.

Alors, que va-t-il vraiment se passer ?

**Première hypothèse :** Il ne va rien se passer, ou rien que l'on pourra réellement imputer au passage à l'an 2000. Seulement le taux ordinaire de pannes et dysfonctionnements divers lié à la non qualité résiduelle de nos technologies. Cette hypothèse est quand même très optimiste compte tenu, non pas de la complexité du problème qui est finalement techniquement assez trivial, mais plutôt compte tenu de l'impossibilité de procéder à temps à l'ensemble des modifications et vérifications nécessaires sur l'ensemble des composants matériels et logiciels potentiellement concernés.

**Deuxième hypothèse :** Celle du scénario catastrophe.

- Quelques missiles russes, n'ayant pas reçu le signal convenu d'ordinateurs distants dans les bons délais, se déclenchent intempestivement et nous empêchent de nous poser d'autres questions,
- Quelques centrales nucléaires ne détectent plus convenablement la température des réacteurs et explosent.

**Troisième hypothèse intermédiaire,** celle de l'accumulation de perturbations diverses et erreurs de calcul dont la résolution nous demandera un peu de patience, d'énergie et d'humour :

- Retards dans le paiement des salaires, dans le versement des indemnités de chômage ou des remboursements de Sécurité Sociale,
- Commandes perdues, livrées en retard,
- Factures fausses,
- Intérêts mal composés,
- Cartes bancaires bloquées,
- Coupures intempestives d'électricité ou de téléphone,
- Quelques ruptures dans la chaîne du froid,
- Cloches des églises refusant de sonner le dimanche 2 janvier (elles croiront que c'est un mardi),
- Avions ne décollant pas, parce que les vérifications d'usage avant décollage détecteront des anomalies incongrues,
- Contrôleurs du ciel interdisant le décollage par erreur,
- Trains et métros s'interrompant brusquement à minuit.

Cette liste à la Prévert n'est sûrement pas la bonne. Il faudrait la compléter par les effets des festivités en tout genre, des risques de panique et par l'imagination sans borne des escrocs du monde entier.

## **A l'origine du bogue : La représentation informatique des dates**

### *Qu'est-ce qu'une date ?*

Question simple et complexe à la fois.

La date est une fonction croissante du temps utilisée pour repérer et classer les événements. Depuis le début de l'histoire, les civilisations humaines ont inventé diverses formes de notation de la date, fondées sur un décompte de jours solaires, de cycles solaires ou lunaires. Bien que subsistent des systèmes parallèles tels que le calendrier chinois, le calendrier arabe ou le calendrier juif, le plus répandu actuellement parmi ces systèmes de notation est celui utilisé dans notre calendrier Grégorien depuis 1582, date où Grégoire XIII, par l'effet d'une bulle papale réforma le vieux calendrier Julien en usage en Occident depuis Jules César, au prix d'une discontinuité de dix jours (on passa directement du 4 au 15 octobre 1582 à Rome, en Espagne et au Portugal, les autres pays d'Europe faisant disparaître ces dix jours à des dates s'étalant entre 1582 et 1752 pour l'Angleterre et la Suède). A l'époque dix jours d'écart dans les calendriers des différents pays d'Europe ne gênaient pas grand monde. Nous ne nous référerons donc dans la suite de cet article qu'au calendrier Grégorien.

La mesure du temps suppose le choix d'une origine et d'une unité de mesure. L'unité de mesure est la journée de 24 heures correspondant à l'intervalle entre 2 passages du soleil à son point le plus élevé dans le ciel. Le point 0 des années n'a été choisi qu'en 532 par le moine Denys Le Petit qui proposa de se référer à la date supposée de naissance du Christ comme début de l'ère chrétienne.

La date peut être représentée par un triplet de 3 nombres entiers :

Année, Mois, Jour\_du\_mois

Jour\_du\_mois est un entier qui varie de 1 à 28, 29, 30 ou 31, suivant le mois où l'on se situe.

Le mois, de Janvier à Décembre, est un entier variant cycliquement de 1 à 12.

L'année est un nombre entier qui vaut aujourd'hui 1999, que nous représenterons par aaaa. Les années ont 365 jours ou 366 pour les années bissextiles.

### *Représentation informatique de la date*

La date est un type de données particulier utilisé par les ordinateurs et équipements électroniques divers.

Depuis le début de l'informatique, dans les années 1950, le stockage des dates sous forme numérique dans les fichiers ou dans la mémoire des ordinateurs a été effectué en ne prévoyant que 2 chiffres pour l'année, ce qui nous donne une valeur d'année modulo 100. Le coût de la mémoire et du stockage des données, sur bande magnétique puis sur disque magnétique, était si élevé que personne ne pouvait envisager de façon sérieuse de stocker la valeur d'une année sur 4 caractères. Jusque dans les années 70-80 on pensait d'ailleurs que la durée

de vie d'un logiciel ne dépasserait pas 20 ans et donc qu'aucune application existante ne fonctionnerait encore en l'an 2000.

Cette représentation quasi générale de l'année sur 2 chiffres est à l'origine de ce que nous appelons aujourd'hui le bogue (ou bug) de l'an 2000 : Le passage de 1999 à 2000 nous fera revenir à l'année 0 de ce cycle de 100 ans.

### *Des erreurs surviennent déjà*

Une date représentée de façon interne par 6 chiffres : aammjj est en effet parfaitement ambiguë si l'on ne connaît pas son domaine de validité, c'est-à-dire les deux premiers chiffres de l'année. Dans les années 50, 60, voire 70, l'ambiguïté était rare. Les seuls logiciels s'intéressant à des événements futurs suffisamment éloignés dans le temps étaient les logiciels de calcul d'échéances de prêt, utilisés par les actuaires. Ces logiciels ont été modifiés ou réécrits les premiers pour éviter les erreurs de calcul :

Supposons que nous sommes le 1<sup>er</sup> octobre 1980. Nous souscrivons un emprunt pour 20 ans. La date de fin prévue est donc le 1<sup>er</sup> octobre 2000, représentée sur 6 chiffres en informatique sous la forme aammjj par 001001

A la fin du premier mois, le programme de calcul mensuel des échéances commence par un test de ce type :

Si date\_du\_jour < Date\_de\_fin

Prélever montant-échéance Sinon Clore le prêt.

Date\_du\_jour 801101 (1<sup>er</sup> novembre 1980) est alors supérieur à  
Date\_de\_fin 001001 (1<sup>er</sup> octobre 2000) puisque 80 > 00  
et le prêt sera clos sans être remboursé. Amusant.

Les banquiers avaient (heureusement ou malheureusement suivant le point de vue auquel on se place) prévu le problème et les calculs de nos échéances se sont correctement effectués. L'intervalle de temps nous séparant du 1<sup>er</sup> janvier 2000 diminue de jour en jour et des problèmes similaires apparaissent aujourd'hui lorsqu'une date calculée dans le futur atteint 00. Ceci concerne un nombre croissant de type d'événements divers :

— c'est le cas d'une date de péremption de produit frais ou de médicaments. Des stocks importants de médicaments ont été mis au pilon en 1998 du fait que la date du jour était supposée supérieure à la date de péremption indiquée sur l'emballage, lue automatiquement par un lecteur de code barre.

— C'est également le cas d'une date de fin de validité de carte bancaire. Certains terminaux commerçants ont refusé des paiements provenant de cartes dont la date de fin de validité était 00.

— De même, des permis de conduire accordés dans certains états des Etats-Unis pour 5 ans en 1995 ont dû être refaits car réputés périmés.

***D'autres erreurs n'apparaîtront qu'à partir du 1<sup>er</sup> janvier 2000***

Un autre type de problème apparaîtra lorsque la date du jour passera à l'année 00 :

◊ Calculons l'âge d'une personne née le 3 février 1965. Si nous effectuons ce calcul le 3 février 1999, nous obtenons tout à fait normalement :

$$\text{Age} = \text{valeur\_absolue\_entière}(\text{Date\_du\_jour} - \text{Date\_de\_naissance}) = 99 - 65 = 34 \text{ ans}$$

Lorsque nous effectuerons ce calcul le 3 février 2000, nous obtiendrons cette fois, avec le même algorithme :

$$\text{Age} = \text{valeur\_absolue\_entière}(00 - 65) = 65 \text{ ans}$$

Décisions possibles entraînées par ce calcul :

- surprime d'assurance-vie
- droits liés à l'ancienneté dans le calcul du salaire
- calcul automatique des droits à la retraite
- envoi de publipostages ciblant le 3<sup>e</sup> âge

◊ Lorsque la date du jour fournie par l'ordinateur passera à 00, les licences de certains logiciels peuvent être déclarées périmées et les dits logiciels se retrouver inutilisables si le fournisseur n'a délivré aucun correctif (ou patch).

◊ Au passage du 31 décembre à minuit, des durées calculées, telles que des durées de communication téléphonique, passées à l'heure de pointe de souhait du nouvel an, pourront donner de bien curieux résultats :

Début d'appel : 31 décembre 1999 23h59mn

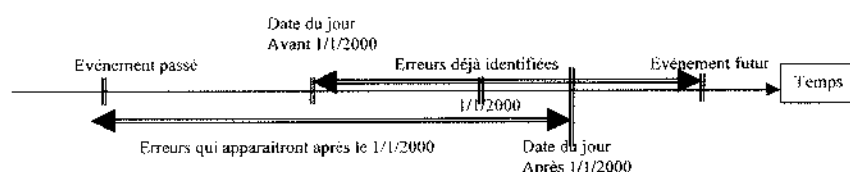
Fin d'appel : 1<sup>er</sup> janvier 2000 00h1mn

Durée calculée d'appel : Fin d'appel – Début d'appel = 100ans – 2mn

Soit un coût d'environ 9 Millions de francs.

On voit que des erreurs de calcul subsisteront pour les calculs de durée faisant intervenir des dates passées antérieures au 1<sup>er</sup> janvier 2000.

Le schéma suivant fait apparaître les deux types d'erreur rencontrées suivant que l'on se situe avant ou après le premier janvier 2000.



### *La question du domaine de validité*

Pour résumer le problème, utiliser une représentation de l'année sur 2 chiffres suppose que l'on travaille sur un intervalle de validité de 100 ans. L'hypothèse implicite faite par les informaticiens était qu'il s'agissait de l'intervalle 1900-1999.

2 solutions sont envisageables pour éviter ou corriger les erreurs :

- stocker l'année sur 4 chiffres au lieu de 2,
- prévoir pour chaque donnée de type date un mode d'emploi qui définisse l'intervalle de validité. Par exemple pour une date de péremption de médicament :

si  $aa < 20$  alors Année = 20aa

si  $aa > = 20$  alors Année = 19aa

La valeur pivot, égale ici à 20 peut se décaler de 1 chaque année. On suppose alors que le logiciel ou l'automate n'aura jamais à examiner de médicaments datant de plus de 80 ans.

Un tel algorithme, dit de fenêtrage, n'est pas applicable aux événements pour lesquels le domaine de validité couvrirait une période de plus de cent ans. Les dates de naissance des personnes vivantes rentrent dans cette catégorie. On ne peut décider sans autre information si quelqu'un né en 98 a un an ou 101 ans. Tout dépend du contexte.

### *Et le jour de la semaine risque aussi d'être faux*

Le 1<sup>er</sup> janvier 2000 sera-t-il un lundi, un mardi ... ou un dimanche ?

■ Nous savons qu'il s'agira d'un samedi, jour à horaire d'ouverture particulier  
 ■ pour certaines activités. Or le 1<sup>er</sup> janvier 1900 était un lundi. Un ordinateur  
 ■ non encore « compatible an 2000 » pourra considérer que le 1<sup>er</sup> janvier 2000 est  
 ■ également un lundi (et pas un samedi).

■ Des dispositifs d'accès automatisés suivant les jours de la semaine (type  
 ■ digicode) risquent de fonctionner « comme un lundi » si leur horloge interne  
 ■ ne connaît que l'intervalle 00-99. Un système de contrôle sur une voie ferrée  
 ■ pourrait régler les aiguillages sur les horaires du lundi alors que les trains  
 ■ rouleraient suivant l'horaire du samedi.

### *Il n'y a pas que les logiciels*

Le problème de l'an 2000 ne concerne malheureusement pas que les logiciels. L'ensemble des ordinateurs et équipements électroniques fonctionne en utilisant une ou plusieurs horloges internes qui rythment le fonctionnement et fournissent une « date système » qui peut être utilisée à des fins diverses.

— Certains équipements peuvent déclencher une alarme si un signal particulier n'est pas détecté depuis un certain nombre de minutes, heures ou jours. On peut citer un ascenseur qui s'arrêterait le 31 décembre à minuit du fait qu'il n'aurait pas subi d'intervention de maintenance depuis plus de 100 ans.

— De même un TGV s'arrêterait brusquement du fait que son conducteur n'aurait pas actionné le dispositif de contrôle depuis plus du nombre de secondes normales.

Le fonctionnement d'un équipement électronique conditionnant un automatisme est beaucoup plus difficile à vérifier que celui d'un logiciel de gestion. Les tests de vieillissement sont la plupart du temps impossibles à réaliser.

### **En conclusion, quelques conseils de bon sens :**

— avoir des relevés de comptes sur papier, des traces écrites de tous ses avoirs dématérialisés,

— diversifier ses moyens de paiement (si possible plusieurs comptes en banque dans des banques différentes, plusieurs cartes bancaires, des cartes de paiement multiples),

— éviter, voire supprimer, les autorisations de prélèvement automatiques,

— détenir quelques piles électriques, bougies et allumettes, un poste de radio fonctionnant sur pile,

— ne pas prévoir de déplacement en avion entre le 31 décembre et le premier janvier,

— se méfier des escrocs en tout genre.

### **Bibliographie :**

Jean LEFORT *La saga des calendriers ou le frisson millénariste*, Bibliothèque pour la science, 1998

Quelques sites Internet français à consulter :

<http://www.an2000.gouv.fr/> Site officiel du gouvernement français sur le problème de l'an 2000.

<http://www.clusif.asso.fr> Position du CLUSIF (Club de la sécurité des systèmes d'information français) sur la Politique Gouvernementale Française.

<http://www.cigref.fr> Club informatique des Grandes Entreprises Françaises (Lobbying, aspects juridiques).

<http://blanche.polytechnique.fr/lactamme/Mosaic/descripteurs/An2000.01.Fra.html> Jean-François Colonna (Article sur les causes et conséquences).

<http://www.themis-rd.fr> Société THEMIS R&D (Commercial, aspects juridiques).



# MATHÉMATIQUES

---

## Gammes naturelles I

Yves HELLEGOUARCH (*Université de Caen*)

---

*Si votre idée des gammes et de la justesse est basée sur l'accord du piano vous trafiquez dans la supercherie, pour dire les choses crûment ! Cette supercherie fut partiellement approuvée par J.-S. Bach et reçut l'appui total de son fils C.P.E. Bach, mais je ne pense pas que la seule vertu de ce nom illustre la préserve de toute critique !*

Christopher Bunting [2]

### Préambule

**A** lors que la théorie officielle de la musique est basée sur la notion d'échelle tempérée et est incapable de donner un fondement à l'attraction en musique ni même de justifier une distinction entre un  $la^b$  et un  $sol^\sharp$ , les praticiens du même art enseignent que le  $la^b$  est plus bas que le  $sol^\sharp$  et que le premier est attiré vers le « sol » alors que le second est attiré vers le « la ».

Le texte qui suit est une version révisée d'une tentative déjà assez ancienne [15] de construction d'un modèle destiné à rapprocher la « musique théorique » de la « musique pratique » (comme aurait dit Euler [12]) tout en préservant la structure de groupe qui fait le succès populaire des échelles tempérées ( $\mathbb{Z}$  doit agir sur les gammes abstraites).

Nous allons maintenant rappeler quelques faits bien connus de la pratique des instruments à cordes qui nous serviront de guide.

Quand on déplace l'index de la main gauche sur une corde de violoncelle, en appuyant, et que l'on met la corde en vibration (entre le doigt et le chevalet) on obtient un son dont la fréquence mesurée dans une unité convenable est

$\frac{1}{x}$ ,  $x$  étant l'abscisse de l'index comptée de 0 pour le chevalet à 1 pour le sillet ( $x \in ]0, 1[$ ).

En revanche lorsque l'on déplace l'index de la main gauche sans appuyer et que l'on essaie de mettre la corde en vibration on peut :

- 1: soit échouer,
- 2: soit obtenir une harmonique naturelle du son de la « corde à vide » ( $x = 1$ ) qui est déterminée de manière univoque lorsque  $x = \frac{p}{q} \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$ , fraction irréductible « simple » et  $q > 0$ . Mesurée dans la même unité, la fréquence de cette harmonique est égale à  $q$ .

Lorsque  $x$  n'est pas rationnel mais simplement « proche » d'une fraction  $\frac{p}{q}$  assez « simple » ( $q$  est un entier positif pas trop « grand ») l'harmonique naturelle sort quand même comme si  $x = \frac{p}{q}$ , mais plus ou moins « difficilement ».

Il serait épineux de préciser les notions topologiques qui sont en cause ici : « proximité de  $x$  et de  $\frac{p}{q}$  », « simplicité de  $\frac{p}{q}$  », « facilité de la production de l'harmonique », car elles dépendent de données « physiques » dont nous voulons justement faire abstraction (hauteur de l'index au-dessus de la corde, forme de l'index, nature de la corde, position de l'archet, vitesse de l'archet, pression de l'archet, etc.).

Nous modéliserons la situation en disant que la fonction qui donne la hauteur  $h(x)$  de l'harmonique naturelle associée à  $x \in ]0, 1[ \cap \mathbb{Q}$  est définie par :

$$\begin{array}{ccc} ]0, 1[ \cap \mathbb{Q} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* \\ \frac{p}{q} & \longmapsto & q \end{array}$$

étant entendu que  $\frac{p}{q}$  est irréductible et  $q \geq 1$ .

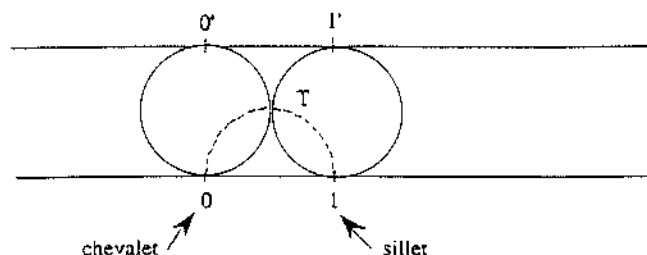
**Remarque:**

- 1: Si les conditions « physiques » étaient parfaites, on pourrait remplacer  $\mathbb{Q}$  par sa complétion non-standard  ${}^*\mathbb{Q}$  et estimer que si  $x$  est la partie standard de  $\frac{p}{q}$ , alors  $h(x) = q$  si  $q$  est limité et  $h(x) = \infty$  si  $q$  est infiniment grand (donc une harmonique « qui ne sort pas » serait celle d'un  $x \in ]0, 1[$  qui serait irrationnel). Si l'on considère maintenant un instrument réel et une corde réelle, on constate que les « infiniment grands » ne sont pas très grands et que les harmoniques ne « sortent » plus en dehors d'une certaine suite de Farey  $\mathcal{F}_n$  (voir [13 p. 23]). Pour mon instrument  $n = 13$ .

Remarquons en passant que c'est l'étude des tempéraments musicaux qui a conduit Farey à la définition de ses suites et non ses activités de géologue [13] et [21]!

- 2: Il existe une interprétation géométrique de la fonction  $h$  qui rend compte des difficultés pratiques (qui semblent les mêmes en dessin et en musique) de la production des harmoniques naturelles et qui peut donner une intuition de la situation aux non-musiciens.

Dans un plan euclidien muni d'un repère traçons deux cercles de diamètre 1 situés au-dessus de l'axe des abscisses et touchant celui-ci en 0 et 1 :



Ces deux cercles se touchent en  $T$  et déterminent avec l'axe des abscisses un triangle curviligne  $OT1$  dont le cercle inscrit touche l'axe des abscisses en  $1/2$  et a pour diamètre  $\frac{1}{2^2}$  ; ce cercle inscrit est l'inverse de la droite  $O'1'$  par rapport au cercle de diamètre  $01$  qui est orthogonal à l'axe des abscisses, et aux deux cercles précédents.

En itérant cette construction on obtient les *cercles de Ford* des points de  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  : ils sont tangents à l'axe des abscisses en  $\frac{p}{q}$  (fraction irréductible,  $q > 0$ ), de diamètre  $\frac{1}{q^2}$  et situés dans le demi-plan supérieur (voir [18]).

La difficulté de dessiner ces cercles croît très vite et semble analogue à la difficulté de produire les harmoniques correspondantes.

### 1. Introduction musicale

Comme les motivations des définitions et constructions de ce travail peuvent paraître mystérieuses aux non-musiciens, je vais présenter un certain nombre de remarques préliminaires qui conduiront au point de vue que les paragraphes suivants vont développer de manière abstraite.

1.1. Nous allons commencer par modéliser la notion d'intervalle entre deux notes de fréquences  $x$  et  $y$ . Ces fréquences dépendent du choix de l'unité de fréquence, mais leur quotient  $\frac{y}{x} \in \mathbb{R}_+^*$  est un *invariant* : c'est l'*intervalle* entre  $x$  et  $y$  (souvent les traités officiels préfèrent prendre le logarithme de ce nombre).

**Exemples :** Dire que l'intervalle entre  $x$  et  $y$  est une *octave* signifie que  $\frac{y}{x} = 2$ , dire que c'est une *quinte pure* signifie que  $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ , dire que c'est une *quinte tempérée* signifie que  $\frac{y}{x} = 2^{7/12}$ .

Remarquons toutefois que l'*octave de S. Cordier* est  $\left(\frac{3}{2}\right)^{12/7}$ , voir [4].

Il est clair que la théorie de la musique est beaucoup plus concernée par l'étude des intervalles (qui est en lien direct avec l'*oreille relative*) que par celle des fréquences absolues (qui est en lien direct avec l'*oreille absolue*) qui dépend des conventions sociales, des lieux et des époques (voir [7]).

**1.2.** On s'efforce depuis plusieurs millénaires (voir [8] et [11]) de réduire l'ensemble des intervalles de la théorie de la musique à un sous-groupe propre de  $\mathbb{R}_+^*$  : c'est ce que l'on appelle une *échelle musicale*.

**Exemples:** 1) L'*échelle officielle*, dite « échelle tempérée » ou « échelle de Werckmeister » ou « échelle de Bach » est  $\langle 2^{1/12} \rangle$ , c'est-à-dire le sous-groupe multiplicatif de  $\mathbb{R}_+^*$  engendré par  $2^{1/12}$  : c'est un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}_+^*$ .

2) L'*échelle de Serge Cordier* est  $\langle \left(\frac{3}{2}\right)^{1/7} \rangle$ , c'est aussi une « échelle tempérée » mais il ne faut pas la confondre avec la précédente bien qu'il s'agisse encore d'un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}_+^*$ .

3) L'*échelle de Pythagore* est  $\langle 2, 3 \rangle$ , c'est-à-dire le sous-groupe de  $\mathbb{R}_+^*$  engendré par 2 et 3 : ce n'est pas un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}_+^*$ .

4) L'*échelle de Zarlino* est  $\langle 2, 3, 5 \rangle$ , c'est-à-dire le sous-groupe de  $\mathbb{R}_+^*$  engendré par 2, 3 et 5 : ce n'est pas un sous-groupe discret de  $\mathbb{R}_+^*$ .

5) L'*échelle mésotonique* est  $\langle 2, 5^{1/4} \rangle$  sous-groupe de  $\mathbb{R}_+^*$  engendré par 2 et  $5^{1/4}$  : il n'est pas discret.

6) Dans un travail célèbre [12] L. Euler a estimé que l'échelle  $\langle 2, 3, 5, 7 \rangle$  n'était pas intéressante pour les musiciens.

Nous dirons qu'une échelle musicale  $E$  est *naturelle* lorsque  $E \subset \mathbb{Q}_+^*$  et  $2 \in E$ .

**Exemples:** Les échelles de Pythagore et Zarlino sont naturelles, les échelles tempérées et l'échelle mésotonique ne le sont pas.

**1.3.** Il n'est pas question de répéter ici tout le mal qui a été dit de l'échelle tempérée officielle [21]. Bornons-nous à signaler qu'un piano accordé selon cette échelle sonne tout à fait faux ([24] p. 134) et que cette échelle paraît inadéquate pour modéliser les théories de l'harmonie pour la raison qu'elle ne contient pas les intervalles correspondants aux harmoniques les plus simples (quinte pure redoublée par exemple).

Les difficultés ont été très bien formulées par L. Euler en 1766 lorsqu'il affirmait que « l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible ». On pourrait ajouter que les instruments, eux aussi, « aiment » les fractions simples. Nous appellerons « *principe d'Euler* » cette affirmation.

**1.4.** Les fractions (supérieures ou égales à 1) les plus simples sont  $\frac{1}{1}$  (unisson),  $\frac{2}{1}$  (octave),  $\frac{3}{2}$  (quinte),  $\frac{4}{3}$  (quarte juste), etc.

Selon une étude du psychologue C. Stumpf (1848-1936) 75 % des auditeurs sans formation perçoivent comme un son unique deux sons simultanés à l'octave,

50 % réagissent de même à la quinte, 33 % à la quarte, 25 % à la tierce, 20 % au triton, 10 % à la seconde ([6] p. 187).

Si l'on appelle « hauteur » de la fraction irréductible de dénominateur positif  $\frac{p}{q}$ , le nombre  $h\left(\frac{p}{q}\right) := \sup(p, q)$  et si l'on applique le *principe d'Euler* on obtient ainsi :

nom	fraction	hauteur	pourcentage de C. Stumpf
octave	$\frac{2}{1}$	2	75%
quinte	$\frac{3}{2}$	3	50%
quarte	$\frac{4}{3}$	4	33%
tierce	$\frac{5}{4}$	5	25%
triton	$\frac{7}{5}$	7	20%
seconde	$\frac{9}{8}$	9	10%

Il est difficile de ne pas remarquer que si l'on désigne par  $\pi(x)$  le nombre de la dernière colonne situé sur la ligne  $x$ , le produit  $(h(x) - 1)\pi(x)$  reste à peu près constant ! On est donc conduit à définir une *distance harmonique* sur  $\mathbb{Q}_+^*$  en posant :

$$d(x, y) := \text{Log } h\left(\frac{y}{x}\right)$$

On constate aisément en vérifiant les axiomes de la distance (c'est un cas particulier d'un résultat plus général [14]) que :

**Théorème 1.** — *La fonction  $(x, y) \mapsto \text{Log } h\left(\frac{y}{x}\right)$  est une distance invariante sur  $\mathbb{Q}_+^*$ .*

Il en résulte que sa restriction à une échelle naturelle  $E$  est encore une distance invariante sur  $E$  (voir l'annexe pour les autres échelles).

**1.5.** Etant donnée une échelle naturelle  $E$  nous allons chercher un moyen de donner des *noms* aux éléments de  $E$  et pour cela il faut construire un morphisme de groupes :

$$\varphi : E \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \text{tel que } \varphi(2) > 0.$$

Si  $x$  est un élément de  $E$ , le *degré* de  $x$  sera  $\varphi(x)$ . Une « *gamme naturelle* » associée à  $E$  sera une partie  $\Gamma$  de  $E$  telle que l'on ait une bijection  $j : \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma$  vérifiant la condition suivante :

$$j(n) \text{ est un élément de hauteur minimale de } \varphi^{-1}(n).$$

Alors se pose la question du choix des morphismes  $\varphi$  qui conduisent à des gammes utiles à la théorie de la musique. . .

**1.6.** La méthode d'accord des pianos par quintes et octaves [24] fournit l'idée de base, nous allons la préciser. Supposons que l'on veuille accorder un piano dont le «  $la_3$  » est juste. Un procédé consiste à parcourir le « cycle » des quintes (intervalles de  $\langle \frac{3}{2} \rangle$ ) :

$$\begin{array}{cccccccc} la, & ré, & sol, & do, & fa, & si^b & mi^b & \\ la^b, & ré^b, & sol^b, & do^b, & fa^b, & si^{bb} & = ? & \end{array}$$

En fait, si les quintes sont « justes » (égales à  $\frac{3}{2}$ ) et non « tempérées » (égales à  $2^{7/12}$ ) on ne peut pas retomber sur un « la », car l'équation :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 2^x$$

n'admet pas de solution  $x \in \mathbb{N}$ .

Deryck Cooke ([3] p. 44) exprime ce fait de manière frappante en disant : « alors que l'équation désirée musicalement est  $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1$ , l'équation mathématique correcte est  $\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,013642\dots$  »

Traduit en termes mathématiques, ce que le musicien souhaite c'est imposer la relation :

$$r = \frac{3^{12}}{2^{19}} \equiv 1$$

dans le groupe abélien libre  $\langle 2, 3 \rangle \subset \mathbb{Q}_+^*$  ; le groupe quotient n'étant alors rien d'autre que  $\mathbb{Z}$ . Si, finalement, on applique le principe d'Euler pour trouver un système de représentants des classes de  $\langle 2, 3 \rangle$  modulo  $\langle r \rangle$  on trouve (miraculeusement !) la « gamme chromatique de Pythagore » telle qu'elle est décrite dans les livres d'Histoire de la musique [7].

## 2. Commas

Soient des nombres de  $\mathbb{Q}_+^*$  que l'on note  $p, q, r$ , etc. Nous dirons que  $p, q, r$ , etc. sont des nombres multiplicativement indépendants dans  $\mathbb{Q}_+^*$  si  $\text{Log } p, \text{Log } q, \text{Log } r$ , etc. sont linéairement indépendants sur  $\mathbb{Q}$  et nous noterons par  $\langle p, q \rangle, \langle p, q, r \rangle$ , etc. les sous-groupes de  $\mathbb{Q}_+^*$  engendrés par  $\{p, q\}, \{p, q, r\}$ , etc. En fait nous penserons plus particulièrement à la suite :

$$\mathcal{S} \quad \langle 2, 3 \rangle, \quad \langle 2, 3, 5 \rangle, \dots$$

dont nous désignerons l'élément général par  $G$ .

Il est bien connu que tous ces sous-groupes sont denses dans  $\mathbb{Q}_+^*$  (voir [13]). Nous avons montré dans l'introduction l'intérêt des approximations de 1 dans les groupes  $G \in \mathcal{S}$  : nous appelons « *commas* » de  $G$  les meilleures de ces approximations et nous en donnons la définition suivante.

**Définition.-** Soit  $G \in \mathcal{S}$  et  $a \in G$ . Nous dirons que  $a$  est un comma de  $G$  (ou meilleure approximation de 1 dans  $G$ ) si et seulement si :

- i)  $a \neq 1$   
 ii)  $b \in G \setminus \{1\}$  et  $|\operatorname{Log} b| < |\operatorname{Log} a|$  entraînent  $h(b) > h(a)$

**Remarques :**

- 1) Si  $a = p_1^{n_1} \dots p_h^{n_h}$  est un comma de  $G$ , alors p.g.c.d.  $(n_1, \dots, n_h) = 1$ .  
 2) Un comma de  $G$  ne reste pas toujours un comma dans un groupe  $G' \supset G$ .  
 Par exemple  $a = \frac{2^8}{3^5}$  est un comma de  $\langle 2, 3 \rangle$ , mais ce n'est pas un comma de  $\langle 2, 3, 5 \rangle$ .  
 3) Le critère suivant permet de construire un nombre fini de commas de  $G$ .

**Critère :** Si  $G \in \mathcal{S}$  et si  $a = \frac{b+1}{b} \in G$  avec  $b \in \mathbb{Q}^*$ , alors  $a$  est un comma de  $G$ .

**Preuve** – Soit  $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^*$  telle que  $\frac{m}{n} > 1$  et  $\operatorname{Log} \frac{m}{n} < \operatorname{Log} \frac{b+1}{b}$ , nous voulons montrer que  $m > b+1$ .

Comme la fonction  $x \mapsto \frac{x+1}{x}$  est décroissante sur  $]0, +\infty[$  et que  $\frac{n+1}{n} \leq \frac{m}{n} < \frac{b+1}{b}$ , on voit que  $n > b$  et comme  $m \geq n+1 > b+1$ , on a le résultat. ■

Le fait qu'il n'existe qu'un nombre fini de « commas absolus » de ce type dans un groupe de type fini, résulte du théorème des  $S$ -unités de Siegel ([20] ou [26]) qui est infiniment plus profond.

### 3. Commas des groupes de rang 2

Nous revenons à la situation du paragraphe 2 en prenant un sous-groupe *quelconque* de rang 2 de  $\mathbb{Q}_+^*$  que l'on notera encore  $G$ . Si  $\{p, q\}$  est une base de  $G$ ,  $p$  et  $q$  sont multiplicativement indépendants et la recherche des commas de  $G$  équivaut à la recherche des couples  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ , tels que  $(x, y) \neq (0, 0)$  et tels que  $x \operatorname{Log} p + y \operatorname{Log} q$  soit voisin de 0. Ainsi  $-\frac{x}{y}$  doit être une « bonne

approximation » de l'irrationnel  $\alpha = \frac{\operatorname{Log} q}{\operatorname{Log} p} = \operatorname{Log}_p(q)$  que l'on suppose  $> 1$ .

La recherche des bonnes approximations de  $\alpha$  se fait habituellement par l'algorithme des fractions continues [27] : on construit ainsi une suite de fractions  $\frac{p_n}{q_n}$ , les « convergentes » de  $\alpha$ , convergeant vers  $\alpha$  selon le schéma :

$$\frac{q_0}{p_0} < \frac{q_2}{p_2} \dots < \alpha < \dots < \frac{q_3}{p_3} < \frac{q_1}{p_1}.$$

En posant (un peu arbitrairement) :

$$(x_n, y_n) = ((-1)^{n-1} p_n, (-1)^n q_n)$$

on obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.** — *La suite des rationnels  $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$  est monotone décroissante et tend vers 1. De plus, on a :*

$$p^{\frac{1}{2|y_{n+1}|}} < r_n < p^{\frac{1}{|y_{n+1}|}}$$

**Preuve** —

1) On sait que  $p_n - q_n \alpha$  a le signe de  $(-1)^{n-1}$ , [27], donc :

$$x_n + y_n \alpha = (-1)^{n-1} [p_n - \alpha q_n] > 0$$

soit  $r_n > 1$ .

2) Maintenant :

$$\frac{\text{Log } r_{n+1}}{\text{Log } r_n} = \frac{x_{n+1} + \alpha y_{n+1}}{x_n + \alpha y_n} = -\frac{p_{n+1} - \alpha q_{n+1}}{p_n - \alpha q_n}.$$

Or on sait [27] que :

$$\left| \frac{p_{n+1} - \alpha q_{n+1}}{p_n - \alpha q_n} \right| < 1$$

d'où :

$$\frac{\text{Log } r_{n+1}}{\text{Log } r_n} < 1.$$

3) Les deux inégalités de l'énoncé équivalent à :

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < x_n + \alpha y_n < \frac{1}{q_{n+1}}$$

soit encore à :

$$\frac{1}{2q_{n+1}} < |p_n - \alpha q_n| < \frac{1}{q_{n+1}}$$

ce qui est bien connu [27]. ■

**Exemple:** Le calcul des convergentes de  $\alpha = \frac{\text{Log } 3}{\text{Log } 2} = \text{Log}_2(3)$  donne la suite de rationnels :

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{2^2}{3} > \frac{3^2}{2^3} > \frac{2^8}{3^5} > \frac{3^{12}}{2^{19}} > \frac{2^{65}}{3^{41}} > \frac{3^{53}}{2^{84}} > \dots > 1.$$

Si nous posons :  $r_{-1} = \frac{2}{1}$ ,  $r_0 = \frac{3}{2}$ ,  $r_1 = \frac{2^2}{3}$ , etc. nous constatons que nous avons ainsi construit la suite des commas du groupe  $G = \langle 2, 3 \rangle$ .

Ce fait est général en un certain sens.



**Théorème 3.** — *On suppose que  $p$  et  $q$  sont des entiers positifs premiers entre eux et tels que  $1 < p < q$ . Alors les commas supérieurs à 1 du groupe  $G = \langle p, q \rangle$  sont obtenus par le procédé décrit ci-dessus à partir des convergentes du nombre irrationnel  $\alpha = \text{Log}_p q$ .*

**Preuve** —

1) Nous allons décrire un algorithme extrêmement élémentaire (il ne nécessite pas la connaissance de  $\alpha$ !) pour construire les commas de  $\langle p, q \rangle$ .

La première étape consiste à déterminer un entier  $a_0 \geq 1$  tel que  $p^{a_0} < q < p^{a_0+1}$ ; un tel entier existe parce que  $p < q$ .

Si on pose  $r_0 = \frac{q}{p^{a_0}}$  et si nous comparons à l'algorithme classique ([27] p. 187) nous voyons que  $r_0$  est associé à la première convergente  $\frac{a_0}{1}$  de  $\alpha$ . Supposons maintenant que nous ayons construit  $r_{n-2}$  et  $r_{n-1}$  (c'est le cas si  $n = 1$  en prenant  $r_{-1} = \frac{p}{1}$ ) alors on cherche  $a_n \geq 1$  vérifiant la condition :

$$(r_{n-1})^{a_n} < r_{n-2} < (r_{n-1})^{a_n+1}$$

ceci est encore possible parce que  $r_{n-1} < r_{n-2}$  et que  $r_{n-1}$  et  $r_{n-2}$  sont multiplicativement indépendants.

2) Une comparaison avec [27] p. 187-188, montre que l'on obtient un algorithme identique à l'algorithme classique, ce qui justifie a priori l'indépendance multiplicative de  $r_{n-1}$  et  $r_{n-2}$  et montre que  $G = \langle r_{n-2}, r_{n-1} \rangle$ .

3) Montrons que  $r_n := r_{n-2} r_{n-1}^{-a_n-1}$  est un comma.

Soit  $b = p^x q^y \in G \setminus \{1\}$  tel que :

$$|\text{Log}_p(b)| = |x + y \text{Log}_p q| < \text{Log}_p(r_n) = x_n + y_n \text{Log}_p q$$

avec  $(x_n, y_n) = ((-1)^{n-1} p_n, (-1)^n q_n)$ .

Puisque l'on sait que  $\frac{p_n}{q_n}$  est une meilleure approximation de  $\text{Log}_p q$  on a :  $|y| > q_n$  et  $|x| > p_n$  (la seconde inégalité résulte de la première et de  $|\text{Log} b| < \text{Log} r_n$ ). On voit aussi que  $x$  et  $y$  ont des signes opposés et on en déduit que  $h(b) > h(r_n)$  puisque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux.

4) Montrons que tout comma est un  $r_n$ .

Il suffit de reprendre le point de vue ci-dessus : si  $a = p^x q^y$  est un comma,  $x$  et  $y$  doivent avoir des signes opposés et  $\left| \frac{x}{y} \right|$  doit être une meilleure approximation de  $\text{Log}_p(q)$ . D'après la théorie classique des fractions continues,  $\left| \frac{x}{y} \right|$  est une convergente de  $\text{Log}_p(q)$ . ■

#### 4. Groupes quotients et gammes pour le rang 2

Nous considérons un groupe  $G = \langle p, q \rangle$  où  $p$  et  $q$  sont des entiers multiplicativement indépendants et premiers entre eux et nous nous donnons un commma  $r_n$  de  $G$ . Nous nous proposons en premier lieu d'étudier le groupe quotient  $G / \langle r_n \rangle$  et en second lieu d'étudier sa gamme.

**4.1.** Comme dans le paragraphe 3) on écrit  $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$  et on introduit aussi  $r_{n-1} = p^{x_{n-1}} q^{y_{n-1}}$ . On utilisera la relation classique :

$$(*) \quad x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = (-1)^{n-1}$$

**Théorème 4.** — *Désignons par  $N$  le groupe  $\langle r_n \rangle$ . Alors  $G/N$  est un groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}$  qui est engendré par la classe de  $r_{n-1}$ .*

**Preuve** — Il est équivalent de démontrer, en notation additive, que  $\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}(x_n, y_n)$  est un groupe sans torsion qui est engendré par la classe de  $(x_{n-1}, y_{n-1})$ .

1) Groupe sans torsion.

Montrons que si  $h > 0$  la relation :

$$h(x, y) \in \mathbb{Z}(x_n, y_n)$$

entraîne que  $(x, y) = k(x_n, y_n)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

Notre hypothèse équivaut à :

$$\begin{cases} hx = \ell x_n \\ hy = \ell y_n \end{cases}$$

pour un certain  $\ell \in \mathbb{Z}$  et comme  $x_n$  et  $y_n$  sont premiers entre eux d'après la relation rappelée ci-dessus, on voit que  $h$  divise  $\ell$ . Si l'on pose  $\ell = hk$  et si l'on simplifie par  $h$ , on a le résultat.

2) Générateur.

Dire que  $(a, b)$  est un générateur de  $\mathbb{Z}^2 / \mathbb{Z}(x_n, y_n)$  revient à dire que tout  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  s'écrit :

$$(x, y) = h(a, b) + k(x_n, y_n)$$

donc que  $(a, b)$  et  $(x_n, y_n)$  constituent une base de  $\mathbb{Z}^2$ , ce qui est bien le cas si  $(a, b) = (x_{n-1}, y_{n-1})$ . ■

**Théorème 5.** — *Dans  $G/N$  la classe de  $p$  (resp.  $q$ ) est égale à  $|y_n|$  fois (resp.  $|x_n|$  fois) la classe du générateur  $r_{n-1}$ .*

**Preuve** — Il suffit de démontrer cette propriété pour la classe de  $p$ , ce qui équivaut à :

$$p \equiv r_{n-1}^{|y_n|} \pmod{N}$$

ou bien (en notation additive) :

$$(1, 0) \equiv |y_n| (x_{n-1}, y_{n-1}) \pmod{\mathbb{Z}(x_n, y_n)}.$$

Il résulte de (\*) que  $|y_n| x_{n-1} + (-1)^{n+1} x_n y_{n-1} = 1$  ce qui prouve le résultat. ■

Dorénavant nous supposons que  $p < q$ . Puisque  $r_{n-1}$  est déterminé de manière canonique nous avons déterminé un *générateur canonique*  $g_n$  (la classe de  $r_{n-1}$ ) dans le quotient  $G / \langle r_n \rangle \cong \mathbb{Z}$  (« gamme abstraite »).

**Définition.-** Soit  $\varphi_n$  l'application canonique :

$$G \rightarrow H_n := G / \langle r_n \rangle$$

Le degré d'un intervalle  $x$  de l'échelle  $G$  est le nombre  $h \in \mathbb{Z}$  tel que  $\varphi_n(x) = g_n^h$ .

**Définition.-** La gamme chromatique  $\Gamma_n$  associée à la gamme abstraite  $H_n := G / \langle r_n \rangle$  est une famille doublement infinie de représentants de plus petite hauteur des éléments de  $G$  modulo  $\langle r_n \rangle$ .

La première octave de cette gamme est formée par les représentants des classes de  $g_n^0, g_n^1, \dots, g_n^{|y_n|}$ .

**Remarques :**

1) On voit de même que la classe de  $r_{n+1}$  engendre  $H_n$  et que l'on a en fait  $r_{n-1} \equiv r_{n+1} \pmod{\langle r_n \rangle}$ . Mais ceci ne nous intéresse pas puisque  $h(r_{n+1}) > h(r_{n-1})$ .

2) Les musiciens s'intéressent surtout aux fréquences des intervalles de la première octave. Pour les octaves supérieures (ou inférieures) ils multiplient ces fréquences par une puissance adéquate de  $p$ , ce que nous ne ferons pas.

3) On montre facilement que si  $r_n$  est un comma ces représentants sont uniques.

**Exemples:** Gammes de Pythagore.

On considère l'échelle  $G = \langle 2, 3 \rangle$  et on rappelle que ses commas sont :

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2} > \frac{2^2}{3} > \frac{3^2}{2^3} > \frac{2^8}{3^5} > \frac{3^{12}}{2^{19}} > \frac{2^{65}}{3^{41}} > \frac{3^{53}}{2^{84}} > \dots > 1$$

$$1) r_{-1} = \frac{2}{1}, \quad H_{-1} = G / \langle r_{-1} \rangle \cong \langle 3 \rangle, \quad \Gamma_{-1} = \{3^n; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$2) r_0 = \frac{3}{2}, \quad H_0 = G / \langle r_0 \rangle, \quad \Gamma_0 = \{2^n; n \in \mathbb{Z}\}$$

$$3) r_1 = \frac{2^2}{3}, \quad H_1 = G / \langle r_1 \rangle, \quad \Gamma_1 = \dots 3^{-1}, 2^{-1}, 1, 2, 3, 6, 9, 18, \dots$$

4)  $r_2 = \frac{3^2}{2^3}$ ,  $H_2 = G / \langle r_2 \rangle$ , la première octave de  $\Gamma_2$  est  $(1, \frac{3}{2}, 2)$ . On voit que dans ce cas  $r_1$  n'est pas l'élément de plus petite hauteur de la classe de  $g_2$ .

5)  $r_3 = \frac{2^8}{3^5}$ ,  $H_3 = G / \langle r_3 \rangle$  est la *gamme pentatonique*, la première octave de  $\Gamma_3$  est  $(1, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2^2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2^4}{3^2}, 2)$ .

6)  $r_4 = \frac{3^{12}}{2^{19}}$ ,  $H_4 = G / \langle r_4 \rangle$  est la *gamme de Pythagore* proprement dite, la première octave de  $\Gamma_4$  est :

$$\left(1, \frac{2^8}{3^5}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{2^5}{3^3}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{2^2}{3}, \frac{3^6}{2^9}, \frac{3}{2}, \frac{2^7}{3^4}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{2^4}{3^2}, \frac{3^5}{2^7}, 2\right)$$

7)  $r_5 = \frac{2^{65}}{3^{41}}$ ,  $H_5 = G / \langle r_5 \rangle$  est la gamme de Janko (à 41 degrés dans une octave).

8)  $r_6 = \frac{3^{53}}{2^{84}}$ ,  $H_6 = G / \langle r_6 \rangle$  est la gamme de Mercator (à 53 degrés dans une octave).

GAMME DE PYTHAGORE A 41 DEGRES :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	$\frac{2^{13}}{3^8}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$
	<u>C</u>		<u>D<sup>b</sup></u>				<u>D</u>			<u>E<sup>b</sup></u>				<u>E</u>			<u>F</u>			
	do		ré <sup>b</sup>				ré			mi <sup>b</sup>				mi			fa			

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$	$\frac{2^{15}}{3^9}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^7}$	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	$\frac{2}{3}$
<u>F<sup>#</sup></u>			<u>G</u>			<u>A<sup>b</sup></u>				<u>A</u>			<u>B<sup>b</sup></u>				<u>B</u>			<u>C</u>
fa <sup>#</sup>			sol			la <sup>b</sup>				la			si <sup>b</sup>				si			do

## GAMME DE PYTHAGORE A 53 DEGRES :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\frac{1}{C}$ do	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$	$\frac{3^{24}}{2^{38}}$	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$	$\frac{2^8}{3^5}$ $\overline{D^b}$ ré <sup>b</sup>	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$	$\frac{2^{35}}{3^{22}}$	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$	$\frac{3^2}{2^3}$ $\overline{D}$ ré	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$	$\frac{3^{26}}{2^{41}}$	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$	$\frac{2^5}{3^3}$ $\overline{E^b}$ mi <sup>b</sup>	$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^{21}}{2^{33}}$	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$	$\frac{2^{13}}{3^8}$
18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
$\frac{3^4}{2^6}$ $\overline{E}$ mi	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$	$\frac{2^{40}}{3^{25}}$	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$	$\frac{2^2}{3}$ $\overline{F}$ fa	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^{23}}{2^{36}}$	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$	$\frac{3^6}{2^9}$ $\overline{F\#}$ fa <sup>#</sup>	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$	$\frac{2^{37}}{3^{23}}$	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$	$\frac{3}{2}$ $\overline{G}$ sol	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$	$\frac{3^{25}}{2^{39}}$	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$	$\frac{2^7}{3^4}$ $\overline{A^b}$ la <sup>b</sup>
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$	$\frac{2^{34}}{3^{21}}$	$\frac{2^{15}}{3^9}$	$\frac{3^3}{2^4}$ $\overline{A}$ la	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$	$\frac{2^{42}}{3^{26}}$	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$	$\frac{2^4}{3^2}$ $\overline{B^b}$ si <sup>b</sup>	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^{22}}{2^{34}}$	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$	$\frac{2^{31}}{3^7}$	$\frac{3^5}{2^7}$ $\overline{B}$ si	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$	$\frac{2^{39}}{3^{24}}$	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$	2 $\overline{C}$ do

Les exemples précédents conduisent à conjecturer que  $\Gamma_n$  est une suite croissante (au moins pour les gammes de Pythagore et la première octave!). Nous allons prouver cette conjecture dans le cas où  $G = \langle p, q \rangle$  avec  $1 < p < q$ ,  $p$  et  $q$  entiers premiers entre eux. On utilise la relation  $r_n = r_{n-2} r_{n-1}^{-a_n}$  du paragraphe 3.

**Théorème 6.** — *Les commas  $r_m$  pour  $m < n - 1$  sont les représentants de plus petite hauteur de leurs classes modulo  $\langle r_n \rangle$ . Ces commas sont dans la première octave de  $\Gamma_n$  et apparaissent par ordre décroissant.*

*Si  $a_n \geq 2$ ,  $r_{n-1}$  apparaît également au premier degré avant  $r_{n-2}$ .*

*Les degrés des commas  $r_{n-1}, r_{n-2}, \dots, r_{-1}$  dans  $H_n = G / \langle r_n \rangle$  sont les dénominateurs des convergentes successives de  $[1, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1]$ .*

*De plus, la gamme  $\Gamma_n$  est croissante.*

**Preuve** – Les premières assertions résultent facilement de la relation rappelée ci-dessus.

Montrons que si  $\nu_i$  est l'élément général de  $\Gamma_n$  on a  $\nu_i < \nu_{i+1}$ .

On se borne au cas où  $i > 0$ , car  $\nu_{-i} = \nu_i^{-1}$  si  $i > 0$ , et on procède par récurrence sur  $i$ .

Si  $i = 1$ , cela résulte des premières assertions.

Soit  $r = \nu_1$  : on passe de  $\nu_i$  à  $\nu_{i+1}$  en multipliant  $\nu_i$  par  $r$  et en effectuant éventuellement une correction soit par  $r_n$  soit par  $r_n^{-1}$  (en fonction de  $a_n$ ) : désignons par  $r'$  cette correction.

Puisque  $\nu_i$  est de plus petite hauteur dans sa classe  $h(r'\nu_i) > h(\nu_i)$ .

Maintenant on voit que soit  $r\nu_i$  est de plus petite hauteur dans sa classe, soit  $r'\nu_i$  est l'élément de plus petite hauteur car  $r'\nu_i$  et  $rr'^{2r}\nu_i$  sont de même type c'est-à-dire qu'ils ont tous les deux une puissance de  $p$  en numérateur ou tous les deux une puissance de  $q$  en numérateur. Il en résulte que  $h(r'^{2r}\nu_i) > h(r'\nu_i)$ . ■

**Remarque.** Le nombre de corrections dans la première octave est égal à  $|x_{n-1}|$  si  $a_n > 1$  et à  $|x_{n-2}|$  si  $a_n = 1$ .

*La seconde partie de l'article Gammes naturelles paraîtra dans le prochain numéro de la Gazette.*

# Peter W. Shor, Prix Nevanlinna 1998

Franck LEPRÉVOST (*Institut de Mathématiques de Jussieu*)

---

## Introduction

**L**e prix Nevanlinna 1998 a été remis à Peter W. Shor au cours du congrès international des mathématiciens qui s'est tenu à Berlin. Les travaux de Shor concernent l'informatique quantique (13 publications), la géométrie discrète et combinatoire (15 publications), la compression (11 publications), les probabilités appliquées (3 publications), la combinatoire (9 publications), la théorie de la complexité (3 publications). A ces travaux s'ajoutent 11 autres publications qui ne se rangent dans aucun des domaines précédents. Le lecteur aura compris que Peter Shor a un prisme scientifique particulièrement impressionnant. Et encore, les informations ci-dessus ne reflètent-elles que la version de janvier 1998 de sa liste de publications. Avant d'aller plus loin, nous suggérons au lecteur intéressé de « surfer » à partir de [11]. Nous avons pris dans ce rapport un point de vue particulièrement réducteur : comment faire autrement en quelques pages ? Nous décrivons ici une partie des travaux de Shor relatifs à l'informatique quantique (voir [1], [13]), à la cryptanalyse quantique (voir [14]) et aux codes correcteurs d'erreurs quantiques (voir [2], [3]). Cet article fait en quelque sorte suite à [9].

*Peter Shor*

## Informatique quantique

### *Circuits quantiques*

En termes très informels, l'unité d'information « atomique » de base est appelée bit en informatique classique et qubit en informatique quantique. Par analogie avec un bit classique, dont la valeur est 0 ou 1, un bit quantique ou qubit est un système quantique à deux états et se voit comme élément de  $\mathbf{C}^2$  (en fait, les états quantiques sont invariants par multiplication par des scalaires et vivent donc dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ ). Soient  $V_0$  et  $V_1$  une base orthogonale de  $\mathbf{C}^2$ . Un des principes de la mécanique quantique implique que l'espace des états quantiques de  $n$  qubits est  $\mathbf{C}^{2^n}$ . C'est en quelque sorte cette dimension exponentielle qui fournit la « surpuissance » de calcul. Les vecteurs de base sont paramétrés par les suites binaires de longueur  $n$  et on note

$$V_{b_1 \dots b_n} = V_{b_1} \otimes \dots \otimes V_{b_n}.$$



Les vecteurs de base peuvent naturellement être normalisés et seront dans la suite supposés unitaires.

Un ordinateur prend une donnée en entrée, agit dessus par des calculs et renvoie un résultat en sortie. Qu'est-ce que cela signifie pour un ordinateur quantique ? Pour un ordinateur quantique, l'entrée est une suite binaire  $S$  de longueur  $k$ . Elle est codée pour donner l'état initial de l'ordinateur sous la forme d'un vecteur de  $\mathbf{C}^{2^n}$ . Pour cela, on concatène  $S$  avec  $n-k$  0 :  $S0 \cdots 0$ , et l'ordinateur quantique est initialisé à  $V_{S0 \cdots 0}$ .

À la fin du calcul, l'ordinateur quantique est dans un état égal à un vecteur unitaire de  $\mathbf{C}^{2^n}$  :

$$W = \sum_s \alpha_s V_s,$$

où  $|s| = n$ ,  $\alpha_s \in \mathbf{C}$  et  $\sum_s |\alpha_s|^2 = 1$ . On dit alors que  $W$  est la superposition des vecteurs de base  $V_s$ , et que  $\alpha_s$  est leur amplitude probabiliste. En mécanique quantique, le principe d'incertitude de Heisenberg dit que nous ne pouvons pas mesurer l'état quantique complet du système. Il y a cependant un grand nombre de mesures possibles : par exemple, toute base orthogonale de  $\mathbf{C}^{2^n}$  définit une mesure, dont les résultats possibles sont les éléments de cette base. Nous supposons cependant que le résultat est obtenu par projection de chaque qubit sur la base  $\{V_0, V_1\}$ . Si on applique cette projection à l'état  $W$ , elle produit la suite  $s$  avec probabilité  $|\alpha_s|^2$ . Comme les mesures quantiques sont probabilistes, on n'exige pas que le calcul donne toujours la bonne réponse, mais seulement les 2/3 du temps. En fait, on peut choisir d'avoir un résultat valide pour une proportion  $x$  du temps, où  $\frac{1}{2} < x < 1$ , sans changer ce qui peut être calculé en temps polynômial sur un ordinateur quantique. On peut augmenter la confiance que l'on a en un résultat en répétant plusieurs fois les calculs et en prenant le résultat qui revient le plus souvent.

Qu'en est-il du calcul proprement dit ? En d'autres termes, quelles sont les règles de manipulation d'un état dans un circuit quantique ? Dans un circuit classique, on dispose de trois portes logiques : AND, OR et NOT. Ils forment un ensemble universel de portes logiques dans le sens où ils suffisent pour décrire tout circuit classique. La situation est similaire pour un circuit quantique : les transformations physiques possibles d'un système quantique sont les transformations unitaires et chaque porte logique quantique est une matrice unitaire. Ainsi, une porte logique quantique sur un qubit est une matrice  $2 \times 2$ , et sur deux qubits, une matrice  $4 \times 4$ . Comme les matrices unitaires sont inversibles, le calcul est réversible. De plus, la dimension de l'espace de sortie est égale à celle de l'espace d'entrée. Les portes logiques quantiques qui agissent sur un ou deux qubits ( $\mathbf{C}^2$  ou  $\mathbf{C}^4$ ) induisent naturellement une transformation de l'espace des états de l'ordinateur quantique ( $\mathbf{C}^{2^n}$ ). Par exemple, si  $A$  est une matrice  $4 \times 4$  agissant sur les qubits  $i$  et  $j$ , l'action induite sur un vecteur de base de  $\mathbf{C}^{2^n}$  est

$$A^{[i,j]} V_{b_1 \cdots b_n} = \sum_{s=0}^1 \sum_{t=0}^1 A_{b_i b_j st} V_{b_1 \cdots b_{i-1} s b_{i+1} \cdots b_{j-1} t b_{j+1} \cdots b_n}.$$

Cette action est en fait donnée par  $A \otimes I$ , où  $A$  agit sur les qubits  $i$  et  $j$  et  $I$  sur les autres qubits.

Là encore, on dispose d'un ensemble universel de portes logiques pour les circuits quantiques, c'est-à-dire suffisants pour construire les circuits pour tout calcul quantique. Un tel ensemble utile est fourni par exemple par toutes les portes logiques à 1 bit auxquelles on adjoint CNOT (Controlled NOT), qui est une porte logique à 2 bits. cnot envoie  $V_{XY}$  sur  $V_{XZ}$  où  $Z = X + Y \pmod{2}$ . Ces portes peuvent simuler tous les circuits quantiques dont les portes agissent seulement sur un nombre constant de qubits (voir [1]).

### **La classe BQP**

Depuis l'avènement des ordinateurs, la distinction entre fonction calculable et pas calculable est devenue trop grossière (bien que nous ne définissions pas ces termes ici). La « bonne » notion est celle de fonction calculable en temps polynômial. Il s'agit des fonctions dont la valeur est calculable en un nombre d'étapes polynômial en la taille des données d'entrée. L'ensemble des langages correspondants (fonctions à valeur dans  $\{0, 1\}$ ) est noté **P** (ou **P**TIME). Dans le cadre des ordinateurs quantiques, on a besoin de définir des notions analogues. C'est pourquoi on introduit la classe de complexité **BQP** (ces initiales signifient *bounded-error quantum polynomial time*). C'est la classe des langages (les fonctions à valeur dans  $\{0, 1\}$ ) qui peuvent être calculés en temps polynômial sur un ordinateur quantique, où la réponse donnée par l'ordinateur est correcte au moins les  $2/3$  du temps. Plus précisément : tout circuit quantique spécifique peut seulement calculer une fonction qui prend en entrée une suite binaire de taille spécifique. Pour utiliser le modèle des circuits quantiques en vue d'implémenter des fonctions dont l'entrée est de taille arbitraire, on prend une famille de circuits quantiques, avec un circuit par taille. Sans conditions supplémentaires sur cette famille de circuits, il serait possible de cacher une fonction non calculable dans le protocole ! Pour éviter que des fonctions non calculables appartiennent à **BQP**, on ajoute des conditions d'*uniformité* sur la famille de circuits. Nous n'entrons pas davantage dans les détails ici et nous contentons de définir les fonctions calculables en temps polynômial sur un ordinateur quantique comme les fonctions calculables par une famille *uniforme* de circuits dont la taille (égale au nombre de portes logiques) est polynômiale en la longueur de l'entrée et donne la bonne réponse au moins les  $2/3$  du temps. L'ensemble des langages (les fonctions à valeur dans  $\{0, 1\}$ ) correspondants est noté **BQP**.

### **Propositions expérimentales**

Les ordinateurs quantiques sont des machines dont l'existence est encore hypothétique. Ils utilisent les principes de la mécanique quantique pour leurs opérations de base. Même si aucune loi physique ne semble obstruer la possibilité de les construire, ils ne sont pas du tout aisés à mettre en œuvre. Il s'agit d'utiliser des systèmes quantiques relativement stables qui ont les deux propriétés suivantes :

- Ils interagissent fortement entre eux, ceci afin de transporter rapidement les portes logiques quantiques.

– Ils interagissent faiblement avec tout le reste, afin d'éviter les erreurs causées par l'interaction avec l'environnement.

Quelles sont les propositions actuelles pour l'implémentation expérimentale des ordinateurs quantiques ? Il y en a trois à l'heure où nous écrivons ces lignes :

– utiliser comme qubits les états électroniques des ions dans un piège électromagnétique à ions et les manipuler avec des lasers (voir [4]).

– utiliser comme qubits les spins nucléaires d'atomes dans une molécule complexe et les manipuler à l'aide de résonance magnétique nucléaire (voir [5] et [6]).

– utiliser comme qubits les spins nucléaires des impuretés d'une puce à silicium et les manipuler à l'aide de l'électronique de cette puce (voir [8]).

Aucune de ces propositions n'a été réalisée expérimentalement pour plus que quelques qubits.

## Algorithme polynômial de factorisation

### *Idée générale*

Soit  $N$  un nombre de taille  $L$  bits. Le meilleur algorithme classique de factorisation est NSF (Number Field Sieve), dont la complexité est en  $O(\exp(cL^{1/3} \text{Log}^{2/3} L))$ . La complexité de l'algorithme quantique de factorisation de Shor est, lui, en  $O(L^2 \text{Log} L \text{Log} \text{Log} L)$ .

L'idée utilisée ici pour factoriser  $N$  consiste à trouver  $s \not\equiv \pm t \pmod{N}$  tels que  $s^2 \equiv t^2 \pmod{N}$ . En ce cas,

$$(s+t)(s-t) \equiv 0 \pmod{N}$$

et  $s+t$  (resp.  $s-t$ ) contient un facteur de  $N$ . Par l'algorithme d'Euclide, on calcule (sur un ordinateur classique) en temps polynômial le pgcd( $s \pm t, N$ ) qui est l'un des facteurs de  $N$ .

### *Algorithme de factorisation quantique*

L'algorithme de factorisation quantique permet de trouver (si elle existe) la période multiplicative d'un résidu  $x \pmod{N}$ , qui est le plus petit entier  $r \geq 1$  tel que :

$$x^r \equiv 1 \pmod{N}.$$

Avec de la chance,  $r$  est pair et  $x^{r/2} \not\equiv \pm 1 \pmod{N}$ . En ce cas, l'équation

$$(x^{r/2} - 1)(x^{r/2} + 1) \equiv 0 \pmod{N}$$

permet de conclure que  $\text{pgcd}(x^{r/2} \mp 1, N)$  est un facteur de  $N$ . En général, au bout de quelques essais, on obtient un tel  $x$ .

L'avantage d'un ordinateur quantique est que l'on peut trouver cette période en temps polynômial en exploitant la dimension égale à  $2^{2L}$  des espaces d'états de  $2L$  qubits, et en prenant la transformée de Fourier sur cet espace. Comme la dimension de l'espace est exponentielle, on peut prendre la transformée de Fourier d'une suite de longueur exponentielle.

Qu'est-ce que la transformée de Fourier quantique ? Elle agit sur les qubits en transformant l'état  $V_a$  (où  $a$  est un entier  $0 \leq a \leq 2^k - 1$ ) en la superposition des états  $V_b$  :

$$V_a \longrightarrow \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{b=0}^{2^k-1} \exp(2i\pi ab/2^k) V_b.$$

Cette transformation définit une matrice unitaire et s'implémente comme une suite de portes logiques quantiques à 1 ou 2 bits.

Quelles sont les étapes de l'algorithme ? Il faut commencer par faire le schéma d'un circuit de taille polynômiale placé au départ dans l'état quantique  $V_{0\dots 0}$  et dont le résultat  $r$  renvoyé en sortie permet, pour une probabilité raisonnable, de factoriser  $N$  de longueur  $L$ -bits en temps polynômial sur un ordinateur classique. Le circuit en question possède deux registres principaux. Le premier (resp. le second) est composé de  $2L$  (resp.  $L$ ) qubits, auxquels s'ajoutent quelques qubits qui fournissent l'espace de travail nécessaire à l'étape 2 ci-dessous.

(1) On commence par mettre l'ordinateur dans l'état représentant la superposition de toutes les valeurs possibles du premier registre :

$$\frac{1}{2^L} \sum_{a=0}^{2^{2L}-1} V_a \otimes V_0.$$

(2) On utilise ensuite la valeur de  $a$  dans le premier registre pour calculer la valeur  $x^a \pmod{N}$  dans le second registre. Pour cela, on peut se servir d'un circuit réversible classique. L'ordinateur est alors dans l'état :

$$\frac{1}{2^L} \sum_{a=0}^{2^{2L}-1} V_a \otimes V_{x^a \pmod{N}}.$$

(3) On prend la transformée de Fourier du premier registre. L'ordinateur est alors dans l'état :

$$\frac{1}{2^{2L}} \sum_{a=0}^{2^{2L}-1} \sum_{b=0}^{2^{2L}-1} \exp(2i\pi ab/2^{2L}) V_b \otimes V_{x^a \pmod{N}}.$$

(4) Enfin, on mesure l'état. Cela donne en sortie  $V_b \otimes V_{x^j \pmod{N}}$ , pour une probabilité égale au carré du coefficient de ce vecteur dans l'équation précédente. Comme beaucoup de valeurs de  $x^a \pmod{N}$  sont égales, de nombreux termes dans cette somme contribuent à chaque coefficient. Explicitement, cette probabilité est égale à :

$$\frac{1}{2^{4L}} \left| \sum_{\substack{a \equiv j \pmod{r} \\ 1 < a < 2^{2L}}} \sum_{b=0}^{2^{2L}-1} \exp(2i\pi ab/2^{2L}) \right|^2.$$

Cette somme géométrique est très petite sauf quand il existe un entier  $d$  tel que  $rb \sim d2^{2L}$ . Par conséquent, on a des grandes chances d'observer seulement les valeurs de  $b$  telles que

$$\frac{b}{2^{2L}} \sim \frac{d}{r}.$$

Connaissant  $b$  et  $2^{2L}$ , on veut trouver  $r$ . Comme  $2L$  est la taille du premier registre,  $\frac{d}{r}$  est vraisemblablement la fraction la plus proche de  $\frac{b}{2^{2L}}$  avec dénominateur  $\leq N$ . Par conséquent, pour trouver  $r$ , il faut approcher  $\frac{b}{2^{2L}}$  par une fraction à dénominateur  $\leq N$ , ce qui est réalisable en temps polynomial avec l'algorithme des fractions continues.

Actuellement (voir [16]),  $3L + o(L)$  qubits sont nécessaires pour la mise en œuvre de cet algorithme, qui est d'ailleurs parallélisable.

### **Autres résultats**

Les idées de Shor (voir [12]) permettent également de résoudre le problème du logarithme discret en temps polynomial. Dans sa version la plus courante, ce problème s'exprime de la manière suivante : soit  $p > 2$  un nombre premier et  $g$  un générateur du groupe multiplicatif cyclique  $\mathbf{F}_p^*$ . Le logarithme discret d'un élément  $x \in \mathbf{F}_p^*$  est l'entier  $0 \leq r < p - 1$  tel que  $g^r \equiv x \pmod{p}$ . L'algorithme classique de résolution de ce problème est l'adaptation du NSF décrit dans [7], dont la complexité est de  $\exp(O((\text{Log}p)^{1/3}(\text{LogLog}p)^{2/3}))$ . Dans [12], Shor montre comment résoudre ce problème sur un ordinateur quantique avec deux exponentiations modulaires et deux transformations de Fourier quantiques. Shor est également en mesure de résoudre en temps polynomial le problème du log discret formulé pour les variétés abéliennes sur un corps fini ([14]).

## **Codes correcteurs d'erreurs quantiques**

Les premières réactions à ces algorithmes ont été pessimistes : en effet, ces algorithmes n'ont d'utilité que si on peut réduire la décohérence et les erreurs à des niveaux très faibles. En fait, sans corrections d'erreurs, il serait impossible en pratique de construire des ordinateurs quantiques assez puissants pour, par exemple, factoriser des nombres de 100 chiffres : en gros, une telle tâche nécessite des milliards d'étapes et la précision de chacune devrait donc être juste à des milliards de chiffres après la virgule près. Cependant, il est possible de faire le schéma de circuits quantiques tolérant des erreurs, ce qui, en théorie, permet d'effectuer des calculs de taille arbitraire, mais à l'aide de portes logiques « justes à seulement une constante près » (à l'heure actuelle, cette constante est  $10^{-4}$ , voir [10]). Ceci étant, il y a loin de la coupe aux lèvres ; un argument contre l'existence de codes correcteurs d'erreurs quantiques est basé sur le théorème suivant, lié au principe d'incertitude d'Heisenberg : un état quantique inconnu ne peut pas être dupliqué. Par conséquent, si on ne peut pas dupliquer l'information quantique, on ne peut pas avoir plus qu'une copie d'un qubit à chaque instant et donc il serait impossible de protéger les qubits des erreurs ! En effet, déjà le plus simple des codes correcteurs d'erreurs classiques est le code à trois répétitions, qui utilise trois copies de chaque bit : est-ce la fin de l'aventure ? Eh bien non ! Des codes correcteurs d'erreurs quantiques existent (voir [3] et [15]), dont le plus simple est une variante quantique du

code 7-bit de Hamming. Ces codes, appelés CSS du nom de leurs auteurs ([3], [15]), protègent les informations quantiques des erreurs et de la décohérence, non pas en les dupliquant, mais en les cachant dans des sous-espaces de  $\mathbf{C}^{2^n}$ , qui, eux, sont très peu affectés par la décohérence et les erreurs.

### Conclusion

Shor a prouvé qu'un ordinateur quantique pouvait factoriser des grands nombres premiers ou résoudre le problème du log discret en temps polynomial. Par rapport aux algorithmes connus jusqu'alors, c'est un progrès quasi-exponentiel ! Si les différents problèmes pratiques liés à la décohérence et aux erreurs sont un jour résolus et permettent de construire des ordinateurs quantiques, ces algorithmes auront un impact planétaire révolutionnaire immédiat en ce qui concerne les communications sécurisées. En effet, c'est précisément sur la difficulté à résoudre ces problèmes que sont basés tous les algorithmes de cryptographie à clef publique (voir [9] pour un résumé des activités actuelles de standardisation). Donc, au delà de l'intérêt scientifique, on imagine aisément les conséquences politiques, diplomatiques et financières des travaux de Shor. Peter W. Shor est un mathématicien particulièrement fécond et dont les idées très variées peuvent un jour révolutionner la façon dont nous vivons l'informatique et la cryptographie au quotidien.

### Bibliographie

- [1] A. BARENCO, C. H. BENNETT, R. CLEVE, D. P. DI VINCENZO, N. MARGOLUS, P. W. SHOR, T. SLEATOR, J. A. SMOLIN, H. WEINFURTER : Elementary gates for quantum computation, *Phys. Rev. A* **52**, p. 3457-3467 (1995)
- [2] A. R. CALDERBANK, E. M. RAINS, P. W. SHOR, N. J. A. SLOANE : Quantum error correction via codes over GF(4), *IEEE Transactions on Information Theory* **44**, p. 1369-1387 (1998)
- [3] A. R. CALDERBANK, P. W. SHOR : Good quantum error-correcting codes exist, *Phys. Rev. A* **54**, p. 1098-1106 (1995)
- [4] J. I. CIRIAC, P. ZOLLER : Quantum computations with cold trapped ions, *Phys. Rev. Lett.* **74**, p. 4091-4094 (1995)
- [5] D. G. CORY, A. F. FAHMY, T. F. HAVEL : Ensemble quantum computing by nuclear magnetic resonance spectroscopy, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **94**, p. 1634-1639 (1997)
- [6] N. A. GERSHENFELD, I. L. CHUANG : Bulk spin resonance quantum computation, *Science* **275**, p. 350-356 (1997)
- [7] D. M. GORDON : Discrete logarithms in GF(p) using the number field sieve, *SIAM J. Discrete Math.*, **6**, p. 124-139 (1993)
- [8] B. E. KANE : A silicon-based nuclear spin quantum computer, *Nature* **393**, p. 133-137 (1998)
- [9] F. LEPRÉVOST : Les standards cryptographiques du XXI-ème siècle : AES et IEEE-P1363, à paraître à la *Gazette des Mathématiciens*
- [10] J. PRESKILL : Fault-tolerant quantum computation, à paraître dans *Introduction to quantum computation*, H.-K. Lo, S. Popescu and T. P. Spiller, eds (1998), LANL e-print quant-ph/9712048 (1997), accessible online via <http://xxx.lanl.gov/>
- [11] P. W. SHOR : <http://www.research.att.com/~shor/>
- [12] P. W. SHOR : Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer, *SIAM Journal of Computing* **26**, p. 1484-1509 (1997)
- [13] P. W. SHOR : Quantum Computing, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berlin, Documenta Mathematica, Journal der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1998)

- [14] P. W. SHOR : Communication personnelle (1998)
- [15] A. STEANE : Multiple particle interference and quantum error correction, Proc. Roy. Soc. London Ser. **A 452**, p. 2551-2577 (1996)
- [16] C. ZALKA : Fast versions of Shor's quantum factoring algorithm, LANL e-print quant-ph/9806084 (1998), accessible online via <http://xxx.lanl.gov/>





# HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

---

## Kronecker. Sur le concept de nombre

Jacqueline BONIFACE

---

### Introduction

L'article de Leopold Kronecker (1823-1891) « Sur le concept de nombre » (« Über den Zahlbegriff ») a été publié en 1887 dans le *Journal de Crelle*. Il s'agit du remaniement d'un texte paru, sous le même titre et la même année, dans le recueil pour le jubilé de doctorat d'Edouard Zeller, historien de la philosophie grecque. Helmholtz avait invité Kronecker à y participer en exposant sa conception du nombre ; le recueil commençait d'ailleurs par une dissertation de Helmholtz sur le même sujet.

Kronecker n'avait jamais auparavant rendu publique sa conception du nombre. Contrairement à sa manière habituelle de procéder : élaborer ses textes à l'occasion de ses cours à l'université, il écrit l'article sur le concept de nombre *avant* la série de cours, du semestre d'été 1891, donnée sur ce sujet<sup>1</sup> et qui fut la dernière qu'il professa. Le sujet l'intéresse pourtant depuis de nombreuses années, mais il suscite de violentes polémiques et Kronecker sait que ses idées sont déjà combattues avec vigueur par ses adversaires.

En effet, bien que Kronecker se situe dans le courant d'« arithmétisation » des mathématiques, selon lequel il s'agit de donner à l'ensemble des mathématiques la rigueur, reconnue par tous, de l'arithmétique, sa position cependant diffère de celle de la plupart de ses contemporains. Si tous partent des mêmes éléments de base, les nombres entiers, la démarche de Kronecker se fait en sens inverse de celle de Weierstrass, Cantor, Dedekind, ou Frege. A un processus d'*inclusion* de l'arithmétique dans l'analyse, qui caractérise les travaux de ces derniers et dont le but est de fonder l'analyse sur l'arithmétique, Kronecker oppose un mouvement de *rapatriement* de l'analyse au sein d'une arithmétique considérée comme *la* (seule) science du nombre. Loin de vouloir donner un fondement arithmétique aux concepts analytiques, il prétend écarter de la mathématique tous les concepts non arithmétiques, établissant entre ceux-ci et les concepts purement arithmétiques une différence *ontologique*. Il ne s'agit

---

<sup>1</sup> Kronecker souligne dans le premier cours de ce semestre d'été (cours du 6 mai 1891) qu'il n'avait jamais auparavant abordé ce thème dans un de ses cours.

donc pas pour Kronecker, comme c'est le cas pour Weierstrass ou Cantor, de redéfinir les concepts de l'analyse et des autres disciplines mathématiques en utilisant le nombre entier comme outil, ni comme c'est le cas pour Frege ou pour Dedekind, de donner un fondement au nombre entier qui permette, à partir de ce sol ferme et sûr, de reconstruire toute la mathématique. S'il s'accorde avec le projet d'arithmétisation de ses contemporains, c'est cependant dans un but tout différent, celui de *réduire* les mathématiques pures, c'est-à-dire l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse, à une « arithmétique générale », en redonnant au nombre son sens restreint d'*arithmos*, de nombre entier positif. Cette réduction a pour raison de conserver au concept de nombre sa pureté originelle et sa signification liée au dénombrement, et devrait avoir pour stricte conséquence de ne conserver à l'intérieur de l'arithmétique que les nombres entiers positifs, et de rejeter à l'extérieur (c'est-à-dire, selon Kronecker de rapatrier vers les autres disciplines mathématiques, notamment la géométrie) toutes les autres grandeurs. Toutefois, Kronecker ne réserve pas le même sort à chacune de ces dernières.

Si les seuls *vrais* nombres sont bien pour Kronecker les nombres entiers positifs, les nombres négatifs et les nombres fractionnaires ne sont cependant pas absolument exclus de l'arithmétique ; ils sont appelés *grandeurs* plutôt que *nombres*, mais leur usage est toléré. Kronecker veut seulement éviter d'introduire les *concepts* de nombre négatif ou de nombre fractionnaire ; il montre que l'introduction de ces concepts peut être remplacée par l'utilisation des congruences et des indéterminées<sup>2</sup>, qui va de plus *fonder* les règles de calcul des fractions.

Le sort réservé aux grandeurs irrationnelles est tout autre. Non seulement ces grandeurs ne sont pas des nombres, n'ont pas d'*existence arithmétique*, mais, à la différence des grandeurs négatives ou fractionnaires, elles n'ont pas droit de cité dans l'arithmétique. Les grandeurs irrationnelles sont des objets de la *géométrie* non de l'arithmétique et, selon Kronecker, il ne faut pas que les différents domaines scientifiques empiètent les uns sur les autres. Ce qui sépare radicalement les grandeurs irrationnelles des objets de l'arithmétique, est qu'elles ne peuvent être définies de façon constructive, c'est-à-dire par un nombre fini d'opérations arithmétiques, à partir de nombres entiers positifs. En effet, les définitions qui en ont été données nécessitent un recours soit à la notion de suite infinie (Heine, Cantor), soit à la notion de coupure (Dedekind), notions toutes deux non arithmétiques. Cependant, Kronecker réserve un sort particulier aux irrationnels de type algébrique. C'est bien sûr par l'introduction d'indéterminées qu'il est conduit aux fonctions entières, puis aux grandeurs algébriques et c'est avec une certaine réserve qu'il propose d'introduire ces grandeurs : cette introduction sera en effet jugée « superflue » dans tous les cas où il n'est pas nécessaire d'isoler les racines conjuguées d'une équation algébrique et Kronecker se donne pour tâche de montrer que l'« isolement lui-même peut aussi bien se faire sans l'introduction de nouveaux concepts »<sup>3</sup>.

<sup>2</sup> Cf. infra p. 60-61.

<sup>3</sup> Cf. infra p. 63.

Il est intéressant de noter que plus de la moitié de l'article est consacrée au problème de la « séparation »<sup>4</sup> des racines réelles d'une équation algébrique.

L'intérêt pour les racines réelles des équations algébriques est partagé par de nombreux mathématiciens du XIX<sup>ème</sup> siècle. Kronecker cite d'ailleurs la méthode de Sturm<sup>5</sup> qui, en 1829, donne un procédé particulièrement simple pour trouver le nombre exact de racines réelles d'une équation algébrique et une méthode de résolution numérique (c'est-à-dire de calcul approché des racines) inspirée de la procédure de Fourier<sup>6</sup>. C'est à partir de ses travaux sur les équations différentielles que Sturm avait été amené à étudier ce problème et l'on comprend que Kronecker ne se soit pas contenté de la résolution numérique de Sturm qui utilise la continuité des fonctions. Il rejette comme non purement mathématiques (c'est-à-dire comme non arithmétiques) les méthodes du calcul infinitésimal, mais par ailleurs, ne peut se satisfaire des résolutions algébriques, telles qu'elles avaient été établies notamment par Lagrange. En effet, la résolution générale des équations par les méthodes algébriques consiste à exprimer les racines comme fonctions des coefficients de l'équation. Une telle résolution ne se limite évidemment pas aux solutions entières ou même rationnelles, mais exprime également les solutions irrationnelles que Kronecker exclut par principe. C'est donc une troisième voie que recherche Kronecker : voie *arithmétique* qu'il cherche à tracer en remplaçant les théorèmes issus de la continuité des fonctions par de simples inégalités qui lui permettent d'obtenir, non une valeur, exacte ou approchée, de chaque racine réelle, mais une « séparation » de ces racines, c'est-à-dire des intervalles qui contiennent, chacun, une des racines et elle seule.

Soulignons encore la subtilité de la méthode de Kronecker et notamment de l'usage des deux nombres entiers notés «  $r$  ». Le premier donne, par un calcul immédiat, un intervalle contenant toutes les racines réelles de l'équation proposée<sup>7</sup>. Le deuxième, que nous avons noté  $\mathbf{r}$ , fournit un *analogon* arithmétique au fameux «  $\varepsilon$  » weierstrassien. En effet, étant choisi arbitrairement grand, son inverse donne un majorant « aussi petit que l'on veut » de la fonction  $f(x)$  sur un intervalle aux bornes duquel la fonction  $f(x)$  change de signe<sup>8</sup> et dont l'amplitude est aussi fonction de l'inverse de  $\mathbf{r}$ .

Aujourd'hui, les idées de celui qui fut, aux côtés de Kummer et de Weierstrass, membre influent de l'Académie de Berlin, de 1860 jusqu'en 1891 (année de sa mort) et notamment sa philosophie mathématique, restent encore peu connues. On retient en général de Kronecker, outre son conflit avec Cantor et Weierstrass<sup>9</sup>, son projet de réduction des mathématiques aux nombres entiers

<sup>4</sup> Cf. §suivant.

<sup>5</sup> Pour une analyse très détaillée du théorème de Sturm, de ses sources et de son actualité, cf. Sinaceur 1991.

<sup>6</sup> La méthode de Fourier était basée sur l'utilisation de fonctions dérivées de la fonction associée à l'équation à résoudre et sur des considérations géométriques. Pour plus de précisions cf. H. Sinaceur, op. cit., particulièrement chap. 4.

<sup>7</sup> Cf. infra p. 63.

<sup>8</sup> Notons que Kronecker ne dit pas que la fonction  $f(x)$  s'annule sur cet intervalle. Il évite ainsi toute considération de continuité et se contente d'identifier une racine réelle d'une équation algébrique à un intervalle sur lequel la fonction change de signe une fois et une seule et dont les bornes sont des rationnels, voire des entiers.

<sup>9</sup> Nous n'insisterons pas sur ces conflits et renvoyons aux nombreux articles de H. Edwards.

naturels et son finitisme<sup>10</sup>. Mais une connaissance souvent trop superficielle de sa position la fait paraître comme dogmatique et dépassée, tout comme la disparition de la majeure partie de sa correspondance ne nous laisse, des conflits qu'il a eus avec eux, que la version de ses adversaires. Une analyse attentive de la démarche de Kronecker en montre toutefois la très grande rigueur et le regain d'intérêt pour les méthodes algorithmiques, dû au développement des ordinateurs, s'accompagnera peut-être d'un retour à son arithmétique finitaire. Il paraissait donc opportun de proposer la traduction française<sup>11</sup> d'un texte dans lequel Kronecker développe ses idées sur le concept de nombre et qui constitue une des seules sources éditées de ses vues sur le sujet<sup>12</sup>.

### Bibliographie

EDWARDS (H. M.) [1987] An appreciation of Kronecker, *The mathematical Intelligencer*, vol. 9, n° 1, Springer, New-York.

[1988] Kronecker's Place in History, *Minnesota Studies in the Philosophy of Science*, vol. XI : History and Philosophy of Modern Mathematics, University of Minnesota Press, Minneapolis.

FOURIER (J.) [1831] Remarques générales sur l'application des principes de l'analyse algébrique aux équations transcendentes, *Mémoires de l'Académie royale des sciences* 9, F. Didot, Paris. Œuvres II, pp. 185-219.

KRONECKER (L.) *Werke*, 5 vols, éd. par K. Hensel, Leipzig, 1895-1930, réimp. New-York, 1968.

[1887] Über den Zahlbegriff, *Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 101, p. 337-355, *Werke* vol. 3, p. 249-74.

[1891] Cours du semestre d'été 1891, manuscrit inédit, Strasbourg, *Bibl. Univ. L. Pasteur*.

LAGRANGE (J.L.) [1767] Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, t. 23, p. 311-352.

[1770-71] Réflexions sur la résolution algébrique des équations. Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences de Berlin, dans *Œuvres* III, pp. 205-424

MARGENSTERN (M.) [1995] L'école constructive de Markov, *Revue d'histoire des mathématiques*, T1, F.2.

SIEG (W.) [1984] Foundations for analysis and proof theory, *Synthese* 60, 159-200.

SINACEUR (H.) [1991] *Corps et Modèles*, Vrin Mathesis, Paris.

[1993] Du formalisme à la constructivité : le finitisme, *Revue internationale de Philosophie*, 4, pp. 251-284.

WEEB (J.C.) [1980] *Mechanism, mentalism, and metamathematics. An essay on finitism*. D. Reidel Publ. Co, Dordrecht-Boston-London.

<sup>10</sup> Margenstern, par exemple, [Margenstern 1995, p. 272, n. 2], situe Kronecker comme « l'un des précurseurs du courant constructiviste » et Hourya Sinaceur [Sinaceur 1993, p. 259, n. 39] parle de la réduction « effective », par Kronecker, des mathématiques aux nombres entiers et cite également Webb [1980, p. 72-73] et Sieg [1984, p. 169-70, 1988, p. 339] qui, écrit-elle, « ont souligné le fait que chez Kronecker, la restriction des objets légitimes aux nombres entiers s'accompagnait d'une restriction des méthodes aux méthodes effectives ».

<sup>11</sup> A notre connaissance, ce texte n'a été traduit ni en français, ni en anglais.

<sup>12</sup> Je remercie Karine Chemla et Pierre Pinel pour leurs remarques et suggestions.

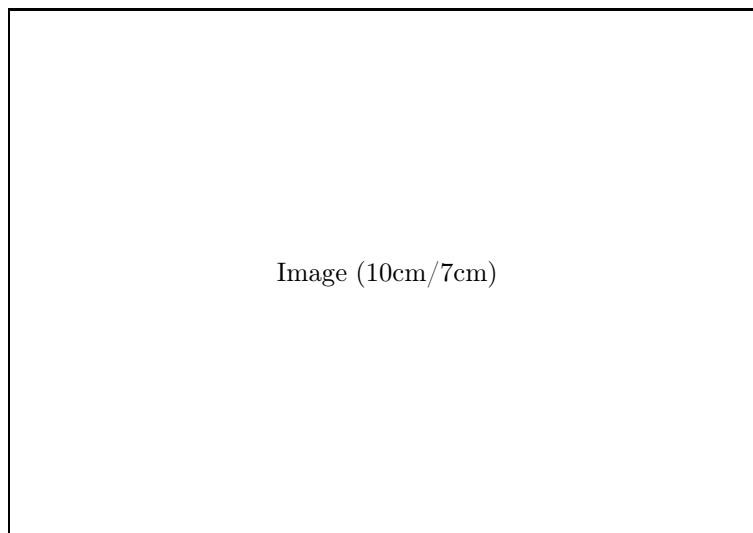


Image (10cm/7cm)

*Leopold Kronecker*

### Sur le concept de nombre<sup>13</sup>

**C**'est sur le plan libre d'un travail philosophique préparatoire, à partir duquel on entre dans les domaines clos des différentes sciences, qu'il faut aussi développer les concepts de nombre, d'espace et de temps, dont on fait usage dans les mathématiques. Et il paraît approprié d'y conduire le développement de ces concepts aussi loin qu'il faudra pour qu'ils soient déjà dotés de leurs propriétés fondamentales lorsque commence leur traitement spécifiquement scientifique.

C'est ainsi que l'on va procéder ici en ce qui concerne le concept de nombre qui, des trois, est le plus simple et dont la position dominante a été soulignée, de très belle manière, par Jacobi dans une de ses lettres à Alexander von Humboldt<sup>14</sup>.

« Un Ancien — c'est ainsi que commence une des lettres — compare les mathématiciens à des lotophages. Qui, une fois, dit-il, a goûté la douceur des idées mathématiques ne peut plus s'en passer. Portez donc au compte de la fureur ma lettre précédente<sup>15</sup>, fureur qui submerge les goinfres de lotus quand ils croient que l'on néglige le culte de ces idées ou qu'on les estime seulement

<sup>13</sup> Cet article est le fruit du remaniement partiel et de l'enrichissement de celui imprimé sous le n° VIII dans les articles philosophiques dédiés à Monsieur Edouard Zeller pour son cinquantième jubilé de Doctorat.

<sup>14</sup> Les lettres ont été trouvées dans le fonds de G. Lejeune Dirichlet.

<sup>15</sup> Cette « lettre précédente » est datée « Berlin, ce 26 décembre 1846 » et couvre trois feuillets in octavo de l'écriture petite et étroite de Jacobi. Sur la première page Jacobi écrit : « C'est donc cela que vous voulez savoir : quel processus de pensée devait amener Leverrier, en 1846, à pouvoir découvrir par le calcul la planète derrière Uranus ? ». Et sur la troisième page : « Dans ces circonstances, il est vraiment extraordinaire que Leverrier, par son habileté à calculer, ait la clairvoyance mathématique nécessaire pour oser aborder, de façon habile, un vaste problème entièrement nouveau. Mais on ne peut juger du travail de l'esprit humain à la dose homéopathique qui est nécessaire pour cela » ...

pour leurs applications occasionnelles. Et Schiller ne dit-il pas déjà, dans les « Xénies », semblable chose, dans son épigramme :

Archimède et le jeune homme.  
 Chez Archimède vint un jeune homme avide de savoir,  
 Initie-moi, lui dit-il, à l'art divin  
 Qui rend de si merveilleux services à l'astronomie,  
 Et qui découvre derrière Uranus encore une planète.  
 Cet art que tu nommes divin l'est en effet, répliqua le sage,  
 Mais il l'était déjà avant même d'explorer le cosmos,  
 Avant de rendre de si merveilleux services à l'astronomie,  
 Et de découvrir derrière Uranus encore une planète.  
 Ce que tu vois dans le cosmos n'est que le reflet des dieux,  
 Parmi les Olympiens trône le Nombre éternel.

Dans cette parodie pleine d'esprit du poème de Schiller « Archimède et l'élève », Jacobi indique, de façon tout à fait poétique mais aussi absolument exacte, la position du concept de nombre dans l'ensemble des mathématiques ; ce qu'il dit est tout à fait semblable à l'opinion que Gauss exprime ainsi : « La mathématique est la reine des sciences et l'arithmétique la reine de la mathématique. Celle-ci condescend de temps en temps à rendre service à l'astronomie et aux autres sciences de la nature, mais le premier rang lui revient en toutes circonstances »<sup>16</sup>.

En réalité, l'arithmétique est aux deux autres disciplines mathématiques, géométrie et mécanique, dans un rapport semblable à celui de l'ensemble des mathématiques à l'astronomie et aux autres sciences de la nature ; l'arithmétique rend aussi tout un éventail de services à la géométrie et à la mécanique et reçoit en retour de ses disciplines-sœurs une foule d'inspirations. Le mot « arithmétique » ne doit cependant pas être compris dans son sens usuel limité, mais on doit comprendre sous ce terme toutes les disciplines mathématiques à l'exception de la géométrie et de la mécanique, donc nommément, l'algèbre et l'analyse. Et je crois aussi que l'on parviendra un jour à « arithmétiser » le contenu entier de ces disciplines mathématiques, c'est-à-dire à le fonder purement et simplement sur le concept de nombre pris dans son sens le plus étroit et donc à dépouiller à nouveau ce concept des modifications et élargissements<sup>17</sup> le plus souvent provoqués par les applications à la géométrie et à la mécanique. La différence principielle entre la géométrie et la mécanique d'une part et d'autre part l'ensemble des autres disciplines mathématiques rassemblées ici sous la dénomination d'arithmétique, tient selon Gauss en ce que l'objet de la dernière, le nombre, est une production de notre esprit seul, alors que l'espace,

<sup>16</sup> Cf. « en commémoration de Gauss » de W. Sartorius V. Waltershausen, Leipzig 1856, p. 79. A la page 97 de ce même écrit, « *Ὁ θεὸς ἀριθμητίζει* » est cité comme une sentence de Gauss, authentifiée comme telle par une lettre du médecin de Gauss, Baum, adressée à Humboldt et trouvée dans le fonds de G. Lejeune-Dirichlet.

<sup>17</sup> Je pense ici nommément à l'adjonction des grandeurs irrationnelles ainsi que des grandeurs continues

de la même manière que le temps, a aussi une réalité en dehors de notre esprit, réalité à laquelle nous ne pouvons a priori dicter entièrement ses lois<sup>18</sup>.

### Définition du concept de nombre

Le point de départ naturel pour le développement du concept de nombre, je le trouve dans les nombres ordinaux. Avec eux, nous possédons une réserve de certaines désignations, ordonnées selon une succession fixe, que nous pouvons attribuer à une collection d'objets différents et en même temps différenciables pour nous<sup>19</sup>. Nous rassemblons la totalité des désignations utilisées à cette occasion dans le concept de « quantité des objets » dont la collection est constituée et nous relierons de manière non ambiguë l'expression de ce concept à la dernière des désignations utilisées, puisque leur ordre est déterminé d'une manière fixe. Ainsi, par exemple, dans la collection des lettres  $(a, b, c, d, e)$ , à la lettre  $a$  on peut attribuer la désignation « premier », à la lettre  $b$  la désignation « deuxième », etc., et enfin à la lettre  $e$  la désignation « cinquième ». L'ensemble des nombres ordinaux utilisés ici ou la « quantité » des lettres  $a, b, c, d, e$  peut de cette manière être désignée, en liaison avec le dernier des nombres ordinaux utilisés, par le nombre « cinq »<sup>20</sup>.

<sup>18</sup> Les mots de Gauss (dans une lettre à Bessel du 9 avril 1830 [Correspondance entre Gauss et Bessel, Leipzig 1880, p. 497 sq.]) sont les suivants :

« Selon ma plus intime conviction la théorie de l'espace a une position par rapport à notre savoir a priori tout à fait différente de la théorie pure des grandeurs ; il manque tout à fait à notre connaissance de la première *cette* entière conviction de sa nécessité (donc aussi de son absolue vérité) qui est propre à la *dernière* ; nous devons avouer en toute humilité que si le nombre est une production de notre esprit *seul*, l'espace a aussi *en dehors* de notre esprit une *réalité* à laquelle on ne peut a priori entièrement dicter ses lois ».

cf. Discours solennel pour M. Ernst Schering, tenu lors de la séance publique de la Société Royale des Sciences de Göttingen le 30 avril 1877, p. 9.

<sup>19</sup> Les objets peuvent être en un certain sens égaux entre eux et différenciables seulement dans l'espace, dans le temps ou par la pensée, comme par exemple deux longueurs égales ou deux intervalles de temps égaux.

<sup>20</sup> La réserve de désignations que nous possédons dans les nombres ordinaux est toujours suffisante car elle ne représente pas tant une réserve effective que, bien plus, une réserve idéale. C'est dans les lois de la formation de nos désignations des nombres par des mots ou des chiffres que nous possédons bien en réalité la « capacité » de satisfaire toutes les exigences. Certes seulement dans la mesure où, dans l'expression d'un nombre, certaines désignations puissent être répétées un nombre quelconque de fois. Mais si l'on admet les répétitions, un signe unique suffit déjà pour exprimer chaque nombre : le seul signe est répété aussi souvent que l'indique le nombre. Un tel moyen aussi primitif de représentation par un signe unique manquerait cependant entièrement de clarté et il est évident que l'autre mode de représentation, tout aussi primitif, utilisant un tas de signes différents, serait évidemment impraticable. On est donc certainement parti, en ce qui concerne les désignations des nombres par des mots, du désir d'exprimer autant de nombres que possible à l'aide d'aussi peu de radicaux spécifiques que possible et on y est arrivé en disposant le schéma des désignations comme un tableau à deux entrées. Ainsi, en marquant des points dans les 45 cases d'un tableau formé par 5 colonnes et 9 lignes, on peut représenter tous les nombres jusqu'à 99 999 exactement, comme le montrent les appellations grecques. Si on marque les unités dans la colonne I, les dizaines dans la colonne II, les centaines dans la colonne III, les milliers dans la colonne IV et les dizaines de mille dans la colonne V, alors le nombre 32 456 par exemple est représenté par cinq points qui se trouvent respectivement :

dans les lignes 3, 2, 4, 5, 6

On peut, avec les ordinaux eux-mêmes, former une collection d'objets. Pour la collection qui est constituée par un ordinal déterminé (*n*ième) et tous ceux qui le précèdent, la « quantité » sera exprimée, conformément à la définition donnée plus haut, par le « nombre cardinal » *n* qui correspond au *n*ième ordinal et ce sont ces cardinaux qui sont désignés tout simplement par « nombres ». Un nombre *m* est dit « plus petit » qu'un autre nombre *n* quand le nombre ordinal appartenant à *m* précède le nombre ordinal appartenant à *n*. La suite dite naturelle des nombres n'est rien d'autre que la suite des ordinaux correspondants.

### L'indépendance du nombre par rapport à l'ordre suivi pendant le comptage

Lorsque l'on « compte » une collection d'objets, c'est-à-dire lorsque l'on désigne les objets, pris un à un, en leur attribuant les nombres ordinaux pris selon leur succession, on donne aux objets eux-mêmes un certain ordre. Si maintenant cet ordre des objets est conservé, mais qu'une nouvelle suite des ordinaux utilisés comme désignations est fixée (par une permutation quelconque de ceux-ci), et qu'ensuite on désigne le premier objet en lui attribuant le premier ordinal de la nouvelle suite, le deuxième objet en lui attribuant le deuxième ordinal et ainsi de suite chaque objet suivant en lui attribuant l'ordinal suivant, les objets obtiennent de cette manière à nouveau un ordre, déterminé par les ordinaux attribués et différent de l'ancien et ils sont ainsi « comptés » dans un autre ordre<sup>21</sup>. Mais l'« ensemble » des ordinaux utilisés comme désignations, qui selon la définition ci-dessus fournit le concept de « quantité des objets », reste ce faisant inchangé et cette quantité, c'est-à-dire le résultat du comptage, est par suite indépendant de l'ordre suivi dans le comptage ou fourni par celui-ci. La « quantité » des objets d'une collection est ainsi une propriété de la collection en tant que telle, c'est-à-dire de l'ensemble des objets pensé indépendamment d'un ordre déterminé quelconque.

Si on rassemble mentalement, en un système, des éléments quelconques pouvant être désignés par les lettres *a, b, c, d, ...*, mais de sorte que la succession des éléments soit ce faisant aussi fixée, les deux systèmes (*a, b, c*) et (*c, a, b*), par exemple, seront différents. Et en effet, si on prend pour *a, b, c* des nombres quelconques différents, puis si on désigne par le système (*a, b, c*) un point de l'espace

---

dans les colonnes V, IV, III, II, I

La désignation par le nom grec *τρισμύριοι δισχίλιοι τετρακόσιοι πενήκοντα ἑξ* découle immédiatement d'un tel tableau en prenant comme début de chacun des cinq noms de nombres la désignation de la ligne et comme fin la désignation de la colonne. Ainsi faut-il former, pour le premier point qui se trouve sur la ligne 3 (*τρεις*) et dans la colonne V (*μύριοι*), le nom de nombre *τρισμύριοι*, pour le deuxième point, qui se trouve sur la ligne 2 (*δύο*) et dans la colonne IV (*χίλιοι*), le nom de nombre *δισχίλιοι*, etc., et pour le cinquième point, qui se trouve sur la ligne 6 (*ἕξ*) et dans la colonne I, le nom de nombre *ἕξ* sans ajout d'une terminaison. La formation grecque des noms de nombres permet donc d'exprimer de façon clairement différenciable, à l'aide de seulement 13 désignations différentes, nommément neuf débuts et quatre terminaisons, tous les nombres jusqu'à 99 999.

<sup>21</sup> Pour présenter la possibilité de compter des objets dans des ordres différents, on a volontairement utilisé non la permutation des objets eux-mêmes, mais seulement celle des désignations numériques. De cette manière, on n'avait pas besoin d'autres conditions sur les objets que celles du §1, selon lesquelles ils sont « différenciables ».



dont les trois coordonnées orthogonales sont déterminées par les valeurs  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ , alors les deux points  $(a, b, c)$  et  $(c, a, b)$  seront également différents. Mais si maintenant deux systèmes quelconques  $(a, b, c, d, \dots)$  et  $(a', b', c', d', \dots)$  sont dits « équivalents » dès lors qu'il est possible de les transformer l'un en l'autre en remplaçant successivement chaque élément du premier par un élément du deuxième, alors la condition nécessaire et suffisante de l'équivalence de deux systèmes consiste en l'égalité de la quantité de leurs éléments et la quantité des éléments d'un système  $(a, b, c, d, \dots)$  se caractérise en conséquence comme le seul « invariant » de tous les systèmes équivalents entre eux<sup>22</sup>.

### L'addition des nombres

On peut prendre les nombres eux-mêmes comme objets du comptage. On peut ainsi, par exemple, continuer à compter  $n_2$  de plus à partir du nombre  $n_1 + 1$ , c'est-à-dire rassembler exactement autant de nombres suivant immédiatement  $n_1$  qu'il le faut pour former une collection dont la quantité s'élève à  $n_2$ . Ce « continuer à compter » s'appelle « ajouter *le nombre  $n_2$  au nombre  $n_1$*  » ; le nombre  $s$  auquel on arrive par ce « continuer à compter » s'appelle « le résultat de l'addition » ou la « somme de  $n_1$  et  $n_2$  » et on le représente par  $n_1 + n_2$ . Mais on arrive aussi précisément à ce même résultat  $s$  quand on additionne le nombre  $n_1$  au nombre  $n_2$ , c'est-à-dire quand, à partir du nombre  $n_2 + 1$ , on continue à compter  $n_1$  de plus, et c'est pour cela que l'on a :  $n_1 + n_2 = n_2 + n_1$ . De même on a de façon générale :  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \dots + n_\rho$ , si  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$  signifient  $1, 2, 3, \dots, r$  dans un ordre quelconque. Car, quand on forme toute la collection des systèmes de deux nombres  $(h, k)$ , qui apparaît en posant successivement :

$$\begin{aligned} h = 1 \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_1 \\ h = 2 \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_2 \\ h = 3 \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_3 \\ \dots \\ \dots \\ h = r \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_r \end{aligned}$$

---

<sup>22</sup> Cela permet de mieux préciser, me semble-t-il, le contenu de la phrase par laquelle débute le manuel d'Analyse de M. Lipschitz. Cette phrase énonce : « Quand on néglige, en considérant des choses distinctes, les caractères par lesquelles elles se différencient, il reste en dernier lieu le concept de la *quantité* des choses considérées ».

il s'ensuit que le nombre  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r$  est produit comme quantité des systèmes de la collection, dès qu'on compte ceux-ci dans l'ordre dans lequel ils ont été formés. Mais si on les ordonne de sorte que ceux pour lesquels on a :

$$h = \alpha \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\alpha$$

$$h = \beta \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\beta$$

$$h = \gamma \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\gamma$$

...

...

$$h = \rho \text{ et } k = 1, 2, \dots, n_\rho$$

se suivent, alors il s'ensuit que le nombre  $n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \dots + n_\rho$  est produit comme quantité des systèmes de la collection et c'est donc cette même quantité qui est représentée d'une part par la somme  $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r$  et d'autre part par la somme  $n_\alpha + n_\beta + n_\gamma + \dots + n_\rho$ .

### La multiplication des nombres

Si tous les termes,  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$  de la somme sont égaux à un même nombre  $n$ , alors on désigne l'addition comme « multiplication du nombre  $n$  par le multiplicateur  $r$  » et on pose :

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_r = rn.$$

Le résultat de la multiplication ainsi définie est désigné comme produit des nombres  $r$  et  $n$ . Mais on obtient exactement le même résultat quand on multiplie le nombre  $r$  par le multiplicateur  $n$ , et par conséquent, le produit d'autant de nombres qu'on voudra  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$  est indépendant de l'ordre dans lequel les multiplications successives sont effectuées. Car quand on se représente formés tous les systèmes de  $r$  nombres  $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$ , qui résultent du fait de prendre :

pour  $h_1$  toutes les valeurs  $1, 2, 3, \dots, n_1$

pour  $h_2$  toutes les valeurs  $1, 2, 3, \dots, n_2$

pour  $h_3$  toutes les valeurs  $1, 2, 3, \dots, n_3$

...

...

pour  $h_r$  toutes les valeurs  $1, 2, 3, \dots, n_r$

on peut ordonner ces systèmes en fonction de la taille des valeurs de

$$h_r + h_{r-1}g + h_{r-2}g^2 + \dots + h_1g^{r-1}$$

où  $g$  désigne un nombre plus grand que chacun des nombres  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ . Les systèmes se succèdent alors comme ils se succèderaient selon leur taille si  $h_1h_2h_3\dots h_r$  représentait un nombre écrit avec les chiffres  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_r$  dans le système de numération de base  $g$ . Le principe d'un tel ordre n'est autre, d'ailleurs, que le principe lexicographique dans lequel on remplace les nombres  $1, 2, 3, \dots$  par les lettres de l'alphabet.

Les différents groupes de systèmes  $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$  caractérisés par les différentes valeurs de  $h_1$  et dont la quantité est  $n_1$  se succèdent, dans l'ordre défini ci-dessus, selon la taille des valeurs de  $h_1$  ; à l'intérieur de chaque groupe, les  $n_2$  différents sous-groupes caractérisés par les valeurs de  $h_2$  se succèdent de nouveau selon la taille de ces valeurs, etc. Si on désigne la quantité des systèmes pour lesquels  $h_1 = 1$  par  $s_1$ , alors  $s_1$  est aussi la quantité des systèmes de chacun des  $n_1$  groupes qui sont caractérisés par les valeurs  $h_1 = 1, 2, 3, \dots, n_1$ . La quantité totale de tous les systèmes est ainsi exprimée par le produit  $n_1 s_1$ . Si on désigne de plus maintenant la quantité des systèmes pour lesquels  $h_1 = 1$  et  $h_2 = 1$  par  $s_2$ , alors  $s_2$  est aussi la quantité des systèmes de chacun des  $n_2$  sous-groupes caractérisés, en fixant la valeur  $h_1 = 1$ , par les  $n_2$  valeurs  $h_2 = 1, 2, 3, \dots, n_2$ . La quantité, désignée par  $s_1$ , de tous les systèmes du groupe pour laquelle  $h_1 = 1$  est ainsi exprimée par le produit  $n_2 s_2$ , et la quantité totale de tous les systèmes sera donc égale à  $n_1 n_2 s_2$ . Si on continue de cette manière, on obtient le produit  $n_1 n_2 \dots n_r$  comme expression de la quantité de tous les systèmes  $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$ .

Si maintenant, comme ci-dessus,  $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$  signifient  $1, 2, 3, \dots, r$  dans un autre ordre quelconque et si on ordonne tous les systèmes  $(h_1, h_2, h_3, \dots, h_r)$  comme ils se succéderaient selon leur taille si  $h_\alpha h_\beta h_\gamma \dots h_\rho$  représentait un nombre écrit avec les chiffres  $h_\alpha, h_\beta, h_\gamma, \dots, h_\rho$  dans le système de numération de base  $g$ , alors on obtient, par le processus exposé, le produit  $n_\alpha n_\beta n_\gamma \dots n_\rho$  comme expression de la quantité de tous les systèmes  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_r$  et donc il faut ainsi que :  $n_1 n_2 n_3 \dots n_r = n_\alpha n_\beta n_\gamma \dots n_\rho$ . Le produit d'autant de nombres qu'on voudra est ainsi indépendant de la succession des facteurs, c'est-à-dire de l'ordre dans lequel les multiplications successives sont effectuées.

### Le calcul littéral

Les lois de l'addition et de la multiplication des nombres sont ainsi entièrement établies à partir des définitions. Ces mêmes lois durent être admises comme valables pour les calculs dits littéraux, dès que l'on commença à prendre les lettres comme désignations de nombres dont la détermination peut ou doit être réservée. Mais avec l'introduction *principielle* de l'« indéterminée » (*indeterminatae*), qui remonte à Gauss, la théorie particulière des nombres entiers s'est élargie à la théorie arithmétique générale des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers. Cette théorie générale permet de se passer de tous les concepts étrangers à l'arithmétique véritable : les nombres négatifs, fractionnaires, réels et algébriques imaginaires.

I. Le concept de nombre *négatif* peut être évité en remplaçant, dans les formules, le facteur  $-1$  par une indéterminée  $x$  et l'égalité par le signe de congruence de Gauss *modulo*  $(x + 1)$ . Ainsi l'égalité :

$$7 - 9 = 3 - 5$$

se change en la congruence :

$$7 + 9x \equiv 3 + 5x \pmod{x + 1};$$

elle gagne par là aussi en contenu car la congruence a une signification pour chaque nombre entier positif  $x$ , à savoir que  $7 + 9x$  a dans la division par  $x + 1$

le même reste que  $3+5x$ , et d'autre part, cette congruence se transforme immédiatement en l'égalité dès que l'on conçoit  $x$  non plus comme une indéterminée, mais comme une « grandeur » définie par l'égalité  $x+1=0$  et que l'on introduit donc l'« unité négative ». Sur le fait que, du reste, la signification de la formule  $7-9=3-5$  demande une explication plus précise et qu'il est fait là « en réalité un nouvel usage du signe d'égalité », on trouve un exposé clair dans le manuel de M. le Dr. Hermann Schubert<sup>23</sup>.

**II.** Le concept de nombre *fractionnaire* est à éviter, en remplaçant dans les formules le facteur  $\frac{1}{m}$  par une indéterminée  $x_m$  et le signe d'égalité par le signe de congruence de Gauss modulo  $(mx_m-1)$ . Les trois règles de calcul des fractions, soit celle de l'addition :

$$(1) \quad \frac{a}{m} + \frac{b}{n} = \frac{an+bm}{mn}$$

celle de la multiplication :

$$(2) \quad \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn}$$

et celle de la division

$$(3) \quad \frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

---

<sup>23</sup> *Système de l'Arithmétique et de l'Algèbre*, comme guide pour l'enseignement dans les écoles secondaires. Du Dr. Hermann Schubert\*, professeur à l'école secondaire Johanneum à Hambourg. Postdam, 1885. Edition d'Aug.Stein, p. 26. Mains aspects du développement du « concept de nombre » contenu précisément dans le §5 de cet ouvrage ont été utilisés dans les explications qui précèdent.

\*Schubert explique que lorsque  $a$  est inférieur ou égal à  $b$ ,  $a-b$ , qui n'est alors qu'une association de signes (*Zeichenvereinigung*) ne représentant aucun nombre — Schubert n'a pas encore, à ce stade, défini les nombres négatifs, ni le nombre nul —, doit cependant obéir (*gehörchen*) à la formule de définition de la soustraction :  $(a-b)+b=a$ . Ainsi pour  $(7-9)$  on doit avoir  $(7-9)+9=7$ . Par suite lorsque l'on écrit  $7-9=3-5$ , on entend seulement que  $(3-5)+9=9+(3-5)=9+3-5=12-5=7$ . Ce n'est donc pas l'égalité de deux nombres que l'on a posée, mais seulement l'identité de deux associations de signes, à partir desquelles, en ajoutant 9 à chacune, on obtient des nombres égaux. Signalons en outre que H. Schubert a aussi écrit un article, paru en 1898 dans l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* sous le titre « Grundlagen der Arithmetik », qui lui a valu de sévères critiques de la part de G. Frege (N.d.T.).

sont alors complètement justifiées par les trois congruences correspondantes<sup>24</sup> :

(1)

$$ax_m + bx_n \equiv (an + bm)x_{mn} \pmod{d \cdot mx_m - 1, nx_n - 1, mnx_{mn} - 1}$$

(2)

$$ax_m \cdot bx_n \equiv abx_{mn} \pmod{d \cdot mx_m - 1, nx_n - 1, mnx_{mn} - 1}$$

(3)

$$ax_mx_{bx_n} \equiv anx_{bm} \pmod{d \cdot mx_m - 1, nx_n - 1, bmx_{bm} - 1, bx_nx_{bx_n} - 1}$$

Ces trois congruences résultent elles-mêmes des trois identités suivantes :

$$(I) \quad ax_m + bx_n = (an + bm)x_{mn} + anx_{mn}(mx_m - 1) + bmx_{mn}(nx_n - 1) \\ - (ax_m + bx_n)(mnx_{mn} - 1)$$

$$(II) \quad ax_m \cdot bx_n = abx_{mn} + abnx_nx_{mn}(mx_m - 1) \\ + abx_{mn}(nx_n - 1) - abx_mx_n(mnx_{mn} - 1)$$

$$(III) \quad ax_mx_{bx_n} = anx_{bm} + anx_{bm}(mx_m - 1) - ax_mx_{bm}x_{bx_n}(nx_n - 1) \\ - abmx_mx_{bx_n}(bmx_{bm} - 1) + amnx_mx_{bm}(bx_nx_{bx_n} - 1)$$

Les comparaisons « plus grand » et « plus petit » entre fractions peuvent être considérées comme données par les règles d'addition dans la mesure où la fraction obtenue par l'addition de deux fractions est déclarée plus grande que chacun des deux termes de la somme. De cette manière, l'ordre des fractions rationnelles est non seulement défini mais aussi fondé<sup>25</sup>.

<sup>24</sup> Kronecker utilise ici le concept de congruence dans un sens élargi, admettant un système de modules à la place du simple module de congruence. Selon ce concept élargi, on dira que deux entiers  $a$  et  $b$  sont congrus moduli plusieurs modules, si la différence  $a - b$  est égale à une combinaison linéaire de ces modules. Ainsi par exemple :  $a \equiv b \pmod{m, n}$  si  $a - b = km + ln$ , où  $k$  et  $l$  sont des entiers quelconques. On peut, par ailleurs, souligner le manque d'analogie entre l'introduction des nombres négatifs et celle des fractions. Alors que la formation des nombres négatifs nécessite l'adjonction d'une seule indéterminée et un calcul de congruences « simple », modulo  $(x + 1)$ , celle des fractions nécessite une infinité d'indéterminées (dont un nombre fini seulement est utilisé pour chaque fraction) et un calcul de congruences moduli plusieurs modules. Cette dernière remarque nous a été suggérée par Norbert Schappacher (N.d.T.).

<sup>25</sup> Dans l'avant-propos de son œuvre : « Introduction à la théorie des fonctions d'une variable » M. Jules Tannery énonce p. VIII : « On peut constituer entièrement l'Analyse avec la notion de nombre entier et les notions relatives à l'addition des nombres entiers ; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience ; [...] une fraction, du point de vue que j'indique, ne peut pas être regardée comme la réunion de parties égales de l'unité ; ces mots "parties de l'unité" n'ont plus de sens ; une fraction est un ensemble de deux nombres entiers, rangés dans un ordre déterminé ; sur cette nouvelle espèce de nombres, il y a lieu de reprendre les définitions de l'égalité, de l'inégalité et des opérations arithmétiques » (en français dans le texte, N.d.T.). Il a été montré ci-dessus comment ce dernier point peut être réalisé dans la pratique — même si c'est dans un ordre différent.

**III.** Le fait que l'on peut se dispenser d'introduire et d'utiliser les nombres *algébriques* partout où l'isolement des conjugués réciproques n'est pas exigé, je l'ai montré dans un article précédent<sup>26</sup> ; le fait que cet isolement lui-même peut aussi bien se produire sans l'introduction de nouveaux concepts et que c'est seulement s'il se produit ainsi qu'il fait clairement apparaître l'essence de la chose, c'est ce que l'on va expliquer ici de la même manière que j'ai l'habitude de le faire depuis dix ans dans mes cours à l'université et on va donner avec cela également cette « analyse plus précise du concept des racines réelles des équations algébriques » que j'ai annoncée à la fin de la première partie des « Eléments d'une théorie arithmétique des grandeurs algébriques »<sup>27</sup>. Soit  $f(x)$  une fonction entière de  $x$  à coefficients entiers, qui n'a aucun diviseur commun avec sa dérivée  $f'(x)$ , alors il existe des fonctions entières à coefficients entiers pour lesquelles on a l'égalité :

$$(A) \quad f(x)\varphi(x) + f'(x)\varphi_1(x) = D$$

$D$  est ici la valeur absolue du discriminant de  $f(x)$ , c'est-à-dire un nombre entier positif. Soit maintenant :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n,$$

et  $a_g$  le plus grand en valeur absolue des  $n$  coefficients  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ . Désignons maintenant la fraction rationnelle  $\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|}$  par  $r$ , on a alors :

$$\left| \frac{f(x)}{a_n} - x^n \right| < (r-1) \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1}$$

et donc pour chaque valeur de  $x$  non comprise entre  $-r$  et  $r$  :

$$\left| f(x) - a_nx^n \right| < \left| a_nx^n \right| \text{ et par conséquent : } \operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(a_nx^n)$$

Il s'ensuit que  $f(x)$  peut changer de signe seulement dans l'intervalle  $(-r, r)$ . Si on pose pour abrégé :

<sup>26</sup> « Une proposition fondamentale de l'Arithmétique générale » vol. 100, p. 490 de ce journal. On renvoie notamment à la fin de l'article op. cit. p. 510\*. A ce qui y est dit, il faut ajouter que dans certains domaines de l'Algèbre l'utilisation des modules et des systèmes de modules à la place des nombres algébriques n'est pas seulement permise mais même nécessaire. Ainsi la question de savoir si une fonction irréductible à coefficients entiers  $F(x)$  devient réductible par adjonction d'une racine d'une équation irréductible à coefficients entiers  $\Phi(y) = 0$ , ne peut être décidée que sous la forme de savoir si  $F(x)$  peut être représentée *modulo*  $\Phi(y)$  comme produit de fonctions entières de  $x$  et  $y$  à coefficients rationnels.

\*: Vol. III, p. 209-240 de cette édition. Cf. en particulier p. 240.

C'est la théorie des systèmes de modules et la notion de congruence élargie qui permettent à Kronecker d'éviter d'introduire et d'utiliser les nombres algébriques lorsque l'on n'a pas à les isoler, en tant que racines d'une équation algébrique. Nous dirions aujourd'hui qu'il substitue à un corps de nombres algébriques le corps des restes  $\mathbf{Q}[X]/f$  (où  $f$  est un polynôme irréductible sur  $\mathbf{Q}$ ) qui lui est isomorphe (N.d.T.).

<sup>27</sup> Vol. 92, p. 44 de ce journal\*\*.

\*\* : Vol. II, p. 296 de cette édition.

$$f(x + \sigma) - f(x) = \sigma f_1(x), \quad \left( f_1(x, \sigma) - f'(x) \right) \varphi_1(x) = \sigma \psi(x, \sigma),$$

alors,  $f_1(x, \sigma)$  et  $\psi(x, \sigma)$  sont des fonctions entières de  $x$  et de  $\sigma$  à coefficients entiers et si l'on désigne respectivement par  $\bar{f}_1(x, \sigma)$ ,  $\bar{\varphi}(x)$ ,  $\bar{\varphi}_1(x)$  et  $\bar{\psi}(x, \sigma)$  les fonctions obtenues à partir de  $f_1(x, \sigma)$ ,  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_1(x)$  et  $\psi(x, \sigma)$  en remplaçant les coefficients par leur valeur absolue, alors on a clairement les inégalités suivantes :

$$|f_1(x, \sigma)| < \bar{f}_1(r, 1), \quad |\varphi(x)| < \bar{\varphi}(r), \quad |\varphi_1(x)| < \bar{\varphi}_1(r), \quad |\psi(x, \sigma)| < \bar{\psi}(r, 1)$$

dès que la valeur de  $x$  se trouve entre  $-r$  et  $r$  et celle de  $\sigma$  entre  $-1$  et  $1$ . Appelons maintenant  $s$  le nombre entier qui dépasse d'au moins une unité la plus grande des quatre valeurs rationnelles :

$$\frac{\bar{f}_1(r, 1)}{D}, \quad \frac{\bar{\varphi}(r)}{D}, \quad \frac{\bar{\varphi}_1(r)}{D}, \quad \frac{\bar{\psi}(r, 1)}{D}$$

et posons alors :

$$\varphi(x) = (s - 1)D\theta(x), \quad \varphi_1(x) = (s - 1)D\theta_1(x), \quad \psi(x, \sigma) = (s - 1)DH(x, \sigma)$$

l'égalité (A) se transforme ainsi en l'égalité :

$$(B) \quad \theta(x)f(x) + \theta_1(x) \frac{f(x + \sigma) - f(x)}{\sigma} = sH(x, \sigma) + \frac{1}{s - 1}$$

et les valeurs des fonctions  $\theta(x)$ ,  $\theta_1(x)$ ,  $H(x, \sigma)$  sont en valeur absolue inférieures à 1 pour les valeurs de  $x$  et de limitées par les inégalités :

$$-r < x < r, \quad -1 < \sigma < 1$$

Si  $\sigma$  est en valeur absolue inférieure à  $\frac{1}{s}$ , il suit de l'inégalité (B), l'inégalité :

$$|f(x)| + \left| \frac{f(x + \sigma) - f(x)}{\sigma} \right| > \frac{1}{s(s - 1)}$$

et par conséquent, pour deux valeurs quelconques  $x'$  et  $x''$  de l'intervalle  $(-r, r)$ , dont la différence est en valeur absolue inférieure à  $\frac{1}{s}$ , on a l'inégalité :

$$(C) \quad |f(x')| + \left| \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \right| > \frac{1}{s(s - 1)}$$

On doit à présent montrer que, lorsque  $x$  reste dans un intervalle de taille  $\frac{1}{s}$ , la fonction  $f(x)$  ou bien ne change pas de signe, ou bien en change seulement une fois, c'est-à-dire que, lorsque :

$$x' < x'' < x''' \text{ et } x''' - x' \leq \frac{1}{s}$$

on ne peut avoir :

$$\text{sgn}.f(x') = -\text{sgn}.f(x'') = \text{sgn}.f(x''').$$

Supposons que la valeur de  $f(x)$  au début d'un intervalle, noté  $(J)$ , de taille inférieure ou égale à  $\frac{1}{s}$ , soit de signe opposé à celui de sa valeur à la fin de l'intervalle, alors il faut que ce soit aussi le cas au moins pour un des sous-intervalles en lesquels l'intervalle  $(J)$  peut être divisé. Soit maintenant un nombre entier  $\mathbf{r}^{28}$  quelconque et imaginons que l'intervalle  $(J)$  soit divisé en  $\mathbf{r}D$  parties égales. Soit alors  $(J')$  un tel sous-intervalle, dans lequel les valeurs initiale et finale de  $f(x)$  ont des signes opposés. Enfin, soient  $x'$  et  $x''$  deux valeurs quelconques de  $x$  prises dans l'intervalle  $(J')$ , pour lesquelles on ait :

$$x' < x'', \text{sgn}.f(x') = -\text{sgn}.f(x'')$$

Comme on a alors :

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x')f_1(x', x'' - x')$$

et donc :

$$(D) \quad : \quad |f(x'') - f(x')| < (x'' - x')\bar{f}_1(r, 1) \leq (x'' - x')(s - 1)D$$

il s'ensuit, en tenant compte de l'inégalité :  $x'' - x' \leq \frac{1}{\mathbf{r}sD}$ , que :

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{1}{\mathbf{r}},$$

et donc, puisque  $f(x')$  et  $f(x'')$  ont des signes opposés, il faut aussi avoir :

$$(E) \quad : \quad |f(x')| < \frac{1}{\mathbf{r}} \text{ et } |f(x'')| < \frac{1}{\mathbf{r}}.$$

*Dans chaque intervalle de taille  $\frac{1}{s}$  aux bornes duquel les valeurs de  $f$  ont des signes contraires, on peut donc trouver, si on choisit un nombre entier quelconque  $\mathbf{r}$ , au moins un intervalle de taille  $\frac{1}{\mathbf{r}sD}$  aux bornes duquel  $f(x)$  change aussi de signe et sur lequel toutes les valeurs de  $f(x)$  sont en valeur absolue inférieures à  $\frac{1}{\mathbf{r}}$ .*

Lorsque  $f(x)$  a le même signe au début et à la fin d'un intervalle de taille inférieure ou égale à  $\frac{1}{s}$ , alors  $f(x)$  garde ce signe sur tout l'intervalle. En effet, si on note  $(J^0)$  cet intervalle,  $x_0$  son point initial,  $x_4$  son point final ; et si on suppose que pour une valeur  $x_2$  comprise entre  $x_0$  et  $x_4$ , la fonction  $f(x)$  prenait un signe différent de celui de  $f(x_0)$  et de  $f(x_4)$ , on pourrait alors déterminer aussi deux valeurs  $x_1$  et  $x_3$  de part et d'autre de  $x_2$  et encore à l'intérieur de  $(J^0)$  par les égalités :

$$(F) \quad : \quad x_1 = x_2 - \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D} \text{ et } x_3 = x_2 + \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

pour lesquelles on aurait :

$$\text{sgn}\dot{f}(x_0) = -\text{sgn}\dot{f}(x_1) = \text{sgn}\dot{f}(x_4) = -\text{sgn}\dot{f}(x_3).$$

<sup>28</sup> Il ne s'agit pas du même «  $r$  » que précédemment ; nous avons utilisé pour les distinguer, comme le fait Kronecker lui-même, deux polices et deux caractères différents ; cf. introduction p. 51.



Car, premièrement, on déduit que les valeurs  $x_1$  et  $x_2$  sont encore dans l'intervalle  $(J^0)$ , c'est-à-dire que les inégalités suivantes sont valables :

$$x_2 - x_0 > \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}, \quad x_4 - x_2 > \frac{|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

à partir des inégalités :

$$|f(x_2) - f(x_0)| < (x_2 - x_0)(s-1)D, \quad |f(x_4) - f(x_2)| < (x_4 - x_2)(s-1)D$$

qui découlent de l'inégalité (D) ci-dessus, dès qu'on prend en compte que, selon l'hypothèse, on a :

$$\text{sgn}.f(x_2) = -\text{sgn}.f(x_0) = -\text{sgn}.f(x_4).$$

On a aussi, deuxièmement, conformément à l'inégalité (D) :

$$|f(x_2) - f(x_1)| < (x_2 - x_1)(s-1)D, \quad |f(x_3) - f(x_2)| < (x_3 - x_2)(s-1)D,$$

et donc, par suite des égalités (F) :

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |f(x_2)|, \quad |f(x_3) - f(x_2)| < |f(x_2)|,$$

et ces inégalités exigent que  $f(x_1)$  aussi bien que  $f(x_3)$  aient le même signe que  $f(x_2)$  et donc le signe opposé à celui des valeurs  $f(x_0)$  et  $f(x_4)$  de la fonction. Autant l'intervalle  $(x_0, x_1)$  que l'intervalle  $(x_3, x_4)$  seraient ainsi tels que  $f(x)$  ait au début et à la fin des signes opposés et donc, d'après ce que l'on a montré plus haut, on pourrait alors déterminer des valeurs  $x'$  et  $x''$  pour lesquelles on aurait :

$$x_0 < x' < x_1, \quad x_3 < x'' < x_4, \quad |f(x')| < \frac{1}{r}, \quad |f(x'')| < \frac{1}{r},$$

pour  $r$  quelconque. Mais il faudrait alors avoir, conformément à l'inégalité (C) :

$$|f(x')| + \left| \frac{f(x'') - f(x')}{x'' - x'} \right| > \frac{1}{s(s-1)}$$

et comme :

$$|f(x')| < \frac{1}{r} \text{ et } |f(x'') - f(x')| < |f(x'')| + |f(x')| < \frac{2}{r},$$

on aurait aussi :

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{r(x'' - x')} > \frac{1}{s(s-1)},$$

et finalement comme :

$$x'' - x' > x_3 - x_1 = \frac{2|f(x_2)|}{(s-1)D}$$

on aurait :

$$\frac{1}{r} + \frac{(s-1)D}{r|f(x_2)|} > \frac{1}{s(s-1)},$$

ou bien :

$$r < (s(s-1)) \left( 1 + \frac{(s-1)D}{|f(x_2)|} \right).$$

Mais comme le nombre  $\mathbf{r}$  peut être choisi arbitrairement grand, cette inégalité ne peut avoir lieu et, en réalité, il faut en déduire que dans un intervalle de taille inférieure ou égale à  $\frac{1}{s}$ , la fonction  $f(x)$  garde le même signe d'un bout à l'autre, dès que l'on sait seulement qu'il en est ainsi pour les deux points extrêmes.

Il s'ensuit maintenant immédiatement que dans un intervalle de taille  $\frac{1}{s}$ ,  $f(x)$  ne peut changer de signe *plus* d'une fois. Car, si pour trois valeurs  $x_0, x_1, x_2$  de l'intervalle telles que  $x_0 < x_1 < x_2$  on avait :

$$\operatorname{sgn}.f(x_0) = -\operatorname{sgn}.f(x_1) = \operatorname{sgn}.f(x_2),$$

alors, l'intervalle  $(x_0, x_2)$  serait bien tel que sa taille soit inférieure à  $\frac{1}{s}$ , et  $f(x)$  aurait le même signe aux deux points extrêmes. Mais dans un tel intervalle, comme on vient de le voir, le signe de  $f(x)$  ne peut changer ; on ne peut donc avoir :

$$\operatorname{sgn}.f(x_0) = -\operatorname{sgn}.f(x_1)$$

Le résultat développé dans ce qui précède peut se formuler de la manière suivante :

- : *Premièrement*, soit  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  une fonction de  $x$  à coefficients entiers, que l'on peut désigner par  $f(x)$  ;  $D$  la valeur absolue du discriminant de la fonction  $f(x)$  ; et  $f'(x)$  sa dérivée.
- : *Deuxièmement*, soient  $\varphi(x), \varphi_1(x)$ , des fonctions de  $x$  à coefficients entiers, de degrés respectivement  $n-2$  et  $n-1$ , pour lesquelles on a l'équation :

$$\varphi(x)f(x) + \varphi_1(x)f'(x) = D,$$

et soit :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \alpha_k x^k, \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha'_k x^k.$$

- : *Troisièmement*, soient les fonctions  $f_1(x, y)$  et  $\psi(x, y)$  définies par les égalités :

$$f(x+y) - f(x) = yf_1(x, y), [f_1(x, y) - f'(x)]\varphi(x) = y\psi(x, y)$$

telles que dans les développements suivants :

$$f_1(x, y) = \sum_{h,k} b_{h,k} x^h y^k \quad (h, k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$\psi(x, y) = \sum_{h,k} c_{h,k} x^h y^k \quad (h, k = 0, 1, \dots, 2n-4),$$

les coefficients  $b$  et  $c$  désignent des nombres entiers.

: *Quatrièmement*, soit  $|a_g|$  la plus grande des valeurs  $|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|$ , et soit  $s$  le plus petit nombre entier positif qui satisfait aux inégalités suivantes :

$$(s-1)D \geq \sum_h |\alpha_h| \cdot \left( \frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h = 0, 1, \dots, n-2),$$

$$(s-1)D \geq \sum_h |\alpha'_h| \cdot \left( \frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(s-1)D \geq \sum_{h,k} |b_{h,k}| \cdot \left( \frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h, k = 0, 1, \dots, n-1),$$

$$(s-1)D \geq \sum_{h,k} |c_{h,k}| \cdot \left( \frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|} \right)^h \quad (h, k = 0, 1, \dots, 2n-4).$$

Alors, on ne peut pas avoir  $\text{sgn}.f(x') = -\text{sgn}.f(x'') = \text{sgn}.f(x''')$  lorsque :

$$x' < x'' < x''' \text{ et } x''' - x' \leq \frac{1}{s}.$$

La fonction  $f(x)$  conserve donc son signe dans chaque intervalle de taille  $\frac{1}{s}$  pour lequel elle a le même signe aux points initial et final et elle change son signe seulement une unique fois dans chaque intervalle de taille pour lequel elle a des signes différents aux points initial et final. Dans un intervalle de ce dernier type on peut de plus,  $r$  étant un nombre entier positif quelconque, déterminer un sous-intervalle de taille  $\frac{1}{rsD}$  de telle manière que la fonction  $f(x)$  ait des signes différents aux points initial et final et que sur tout le sous-intervalle sa valeur absolue reste inférieure à  $\frac{1}{r}$ . Finalement, la fonction  $f(x)$  conserve le signe de  $a_n x^n$  dès que la valeur absolue de  $x$  est supérieure à  $\frac{|a_g| + |a_n|}{|a_n|}$ .

Par conséquent, si le nombre entier  $t$  est déterminé par la condition donnée par l'inégalité suivante :

$$s(|a_g| + |a_n|) \leq t|a_n| \leq |a_n| + s(|a_g| + |a_n|),$$

la fonction  $f(x)$  peut changer de signe seulement dans un intervalle  $\left(\frac{k-1}{s}, \frac{k}{s}\right)$  pour lequel  $k$  a une des valeurs :  $-t+1, -t+2, \dots, t-1, t$ . Il suffit donc de déterminer les signes des  $2t$  valeurs :

$$f\left(\frac{k}{s}\right) \quad (k = -t+1, -t+2, \dots, t-1, t)$$

pour trouver parmi les  $2t-1$  intervalles de taille  $\frac{1}{s}$  ceux pour lesquels la fonction  $f(x)$  change de signe et cela seulement une fois. La quantité de ces intervalles est en même temps celle que l'on désigne par quantité des racines réelles de l'équation  $f(x) = 0$ , et donc, on peut remplacer parfaitement par ce procédé celui que fournit le théorème de Sturm. Mais aussi ce qu'on appelle le calcul

des racines réelles lui-même est remplacé par le procédé indiqué ; car lorsque l'on peut démontrer que pour un nombre déterminé  $k$  :

$$\operatorname{sgn}.f\left(\frac{k-1}{s}\right)f\left(\frac{k}{s}\right) = -1,$$

alors on a seulement besoin de disposer des valeurs de  $f(x)$  initiales et finales dans les sous-intervalles de taille  $\frac{1}{rsD}$ , c'est-à-dire donc du calcul des  $rsD + 1$  valeurs :

$$f\left(\frac{k}{s} - \frac{h}{rsD}\right) (h = 0, 1, \dots, rsD)$$

et de la détermination du nombre  $h$  pour lequel :

$$\operatorname{sgn}\left(f\left(\frac{k}{s} - \frac{h}{rsD}\right) \cdot f\left(\frac{h}{s} - \frac{h-1}{rsD}\right)\right) = -1$$

pour déduire que la fonction  $f(x)$  change de signe et reste, d'un bout à l'autre, en valeur absolue inférieure à  $\frac{1}{r}$  dans l'intervalle :

$$\frac{k}{s} - \frac{h}{rsD} \leq x < \frac{k}{s} - \frac{h-1}{rsD}.$$

La prétendue existence des racines réelles irrationnelles d'équations algébriques est uniquement fondée sur l'existence d'intervalles dont on a indiqué les caractéristiques ; la recevabilité du calcul sur les différentes racines d'une équation algébrique repose entièrement sur la possibilité de les isoler, donc de déterminer un nombre, comme celui qui a été désigné précédemment par  $s$ . Ayant déterminé un tel nombre  $s$  ayant la propriété que les intervalles de taille  $\frac{1}{s}$  sont suffisamment petits pour isoler les différentes racines de l'équation, les comparaisons « plus grand » et « plus petit » entre les racines seront définies simplement par la succession des intervalles d'isolement respectifs. Par là, les comparaisons « plus grand » et « plus petit » entre deux nombres algébriques irrationnels quelconques sont également déterminés, lorsque l'on pense les deux nombres algébriques à comparer selon leur taille — comme cela est manifestement licite — comme deux racines d'une même équation. L'essence propre de la chose n'apparaît de façon parfaitement nette dans la déduction ci-dessus que si on y évite l'utilisation des fractions et qu'on y fait usage exclusivement des nombres entiers.

Si on introduit dans ce but à la place de  $a_0 + a_1x + a_2x^2 \dots + a_nx^n$  la fonction entière homogène :

$$a_0y^n + a_1y^{n-1}z + a_2y^{n-2}z^2 + \dots + a_nz^n$$

et qu'on la désigne par  $F(y, z)$ , on a alors :

$$f\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{1}{y^n}F(y, z).$$

On a donc :

$$\operatorname{sgn}(F(rsD, krD - h) \cdot F(rsD, krD - h + 1)) = -1,$$

et lorsque  $q$  désigne un nombre entier positif indéterminé, alors, pour toute valeur entière de  $z$  comprise entre :

$$(k\mathbf{r}D - h)q \text{ et } (k\mathbf{r}D - h + 1)q$$

on a :

$$|F(q\mathbf{r}sD, z)| < \mathbf{r}^{n-1}(qsD)^n$$

en même temps que le *signe* de  $F(q\mathbf{r}sD, z)$  pour  $z = (k\mathbf{r}D - h)q$  est l'opposé de son signe pour  $z = (k\mathbf{r}D - h + 1)q$ .

Le nombre  $s$  est déterminé, selon la manière indiquée plus haut, par les coefficients de la fonction  $F(x, y)$ . Puis on détermine les différentes valeurs entières de  $k$  qui caractérisent les différentes racines réelles de l'équation  $f(x) = 0$  par la condition :

$$\text{sgn}.F(s, k - 1).F(s, k) = -1.$$

Soit encore un nombre  $\mathbf{r}$  quelconque ; à partir d'une valeur déterminée de  $k$ , on définit alors le nombre  $h$  positif et ne dépassant pas  $\mathbf{r}D$  par la condition :

$$\text{sgn}(F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h).F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h + 1) = -1;$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned} |F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h)| &< \mathbf{r}^{n-1}(sD)^n, \\ |F(\mathbf{r}sD, k\mathbf{r}D - h + 1)| &< \mathbf{r}^{n-1}(sD)^n \end{aligned}$$

Chacune des racines réelles de l'équation  $f(x) = 0$  est alors parfaitement caractérisée par un nombre  $k$  déterminé ; mais alors à chaque nombre  $\mathbf{r}$  quelconque correspond aussi un nombre  $h$  déterminé et on peut alors comprendre les nombres  $h$  comme « fonctions du nombre entier indéterminé  $\mathbf{r}$  » définies par la fonction à coefficients entiers  $F(y, z)$ .

Dans les résultats de l'« Arithmétique générale » ou de la « théorie arithmétique des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers », on ne peut que voir un rassemblement de tous les résultats obtenus en attribuant des valeurs entières aux indéterminées. Dans cette mesure, les résultats de l'Arithmétique *générale* appartiennent donc aussi à la théorie des nombres spécifique usuelle et tous les résultats de la recherche mathématique la plus profonde doivent finalement pouvoir être exprimés dans ces formes simples utilisant les propriétés des nombres entiers. Mais pour laisser apparaître ces formes simplement, il fallait en premier lieu une façon appropriée et claire d'exprimer et de représenter les nombres eux-mêmes et à ceci l'esprit humain a certainement travaillé constamment et avec peine depuis les temps les plus reculés, avec plus ou moins de succès selon les époques et de manières toutes différentes selon les différents peuples<sup>29</sup>. Le fruit de ce travail, nos désignations des nombres par des

<sup>29</sup> Cf. la dissertation d'Alexander v. Humboldt : Sur les systèmes usuels de signes numériques chez différents peuples et sur la source des valeurs de position dans les nombres indiens. (Lue au cours d'une séance de l'Académie royale des sciences de Berlin, le 2 mars 1829 ; imprimée dans le vol. 4 de ce journal p. 205 sq.) Dans cette dissertation la remarque suivante de Laplace\* est citée (traduite en allemand) : « C'est de l'Inde que nous vient l'ingénieuse méthode d'exprimer tous les nombres avec dix caractères, en leur donnant une valeur absolue et une valeur de position ; idée fine et importante, qui nous paraît maintenant si simple, que nous en sentons à peine le mérite. Mais cette simplicité même et l'extrême facilité qui en résulte

noms et des chiffres, fut aussi bien la condition préalable à la découverte des trésors de la connaissance dont l'arithmétique aujourd'hui dispose, comme pour l'établissement des « lois dans lesquelles nous appréhendons notre connaissance du mouvement des corps célestes » ; mais il fut aussi la condition préalable à l'établissement de la physionomie actuelle de la vie pratique tout entière, pour l'immense développement et la formation du commerce et des échanges, qui différencie aussi essentiellement le monde moderne de l'ancien.

---

pour tous les calculs, placent notre système d'arithmétique au premier rang des inventions utiles ; et l'on appréciera la difficulté d'y parvenir, si l'on considère qu'il a échappé au génie d'Archimède et d'Apollonius, deux des plus grands hommes dont l'antiquité s'honore. » \* Laplace, Exposition du système du monde, sixième édition p. 376. Œuvres complètes de Laplace t. VI p. 404-405.

# ENSEIGNEMENT

---

## Sur l'enseignement des mathématiques en deug

Jean-Jacques RISLER (*Université Paris 6*)

---

**A**u cours de l'année 1997–1998 une commission inter-Sociétés Savantes SMF-SFP (Société Mathématique de France—Société Française de Physique) a été créée dans le but de réfléchir à l'enseignement des mathématiques en DEUG et dans les CPGE (classes préparatoires aux grandes Écoles). Le texte ci-dessous est une déclaration des principes qui se sont dégagés au cours des premières discussions de cette commission.

Il a été rédigé par Jean-Jacques Risler. Certaines phrases proviennent de textes préparatoires (en particulier ceux de A. Bellaïche, A. Pommellet, J.-J. Risler, S. Rémy). Il reflète évidemment les opinions personnelles de l'auteur, mais a été approuvé par les autres membres de la commission.

Les membres mathématiciens de la commission sont : André Bellaïche, Michel Broué, Elisha Falbel, Ivan Kupka, Alain Pommellet, Jean-Jacques Risler.

Les membres physiciens de la commission sont : Bernard Jancovici, Dominique Mouhanna, Sophie Rémy, Ferial Terky.

### 1. Remarque préliminaire

Par souci d'efficacité, les travaux de la commission se sont limités à considérer le cas des DEUG et des CPGE. De plus, nous n'avons considéré que le cas des DEUG autre que MIAS, c'est-à-dire non spécifiquement mathématiques<sup>1</sup> et des CPGE, filières PC et PSI. Nous pensons cependant que les principes énoncés dans ce texte sont aussi valables (avec quelques indispensables modifications) pour l'enseignement dans les autres DEUG, au lycée et bien sur aussi en licence-maîtrise de mathématiques où sont formés les futurs enseignants.

---

<sup>1</sup> Les DEUG de « Sciences exactes » sont : MIAS, Mathématiques, informatique et applications aux sciences ; SM, Sciences de la matière ; SPI, Sciences pour l'ingénieur.

Les filières correspondantes en classes préparatoires ont pour nom : MP, Mathématiques et physique ; PC, Physique et chimie ; PSI, Physique et sciences de l'ingénieur.

## 2. La situation actuelle dans les DEUG

Le programme mathématique des DEUG (SM et SPI essentiellement) et des classes préparatoires filières PC et PSI, consiste à prendre le programme des filières « nobles » du point de vue des mathématiciens (MIAS et MP) et à le simplifier en lui gardant le même esprit et le même cadre théorique autrement dit à le vider d'une partie de son contenu. C'est ainsi que le programme de mathématiques (première année, premier semestre) que l'on enseigne par exemple aux futurs ingénieurs (section SPI) fraîchement sortis du lycée est traditionnellement à peu près :

groupes, anneaux, corps, anneaux de polynômes, espaces vectoriels, bases, dimension, suites de nombres réels, théorème de Bolzano-Weirstrass.

Tout enseignant ayant un peu d'expérience de ces sections peut mesurer le fossé qu'il y a entre ce programme et ce que sont prêts à absorber des étudiants (moyens par définition, puisque les meilleurs vont en CPGE) sortant de terminale.

Même si cet exemple représente un cas extrême et que dans beaucoup d'universités les programmes sont devenus plus réalistes et raisonnables, la tendance générale semble être d'enseigner un programme de mathématiques qui se préoccupe avant tout de sa cohérence interne, sans véritable concertation avec les physiciens, chimistes, mécaniciens, voire informaticiens. Bien entendu, ce tableau comporte des exceptions et des expériences intéressantes ont été et sont tentées çà et là ; mais faute d'une dynamique de l'ensemble de la communauté mathématique, elles restent isolées, à la fois dans l'espace et dans le temps. Ces affirmations reposent sur de nombreux témoignages de collègues ; elles mériteraient d'être confirmées par une enquête approfondie et précise que nous n'avons pas eu le temps de mener.

Quant aux physiciens, ils déclarent enseigner et utiliser, des mathématiques assez sophistiquées, principalement le calcul différentiel à plusieurs variables : fonctions implicites, dérivées partielles, équations différentielles, intégrales multiples, intégrales de surfaces..., sujets qui ne sont abordés au cours des études de mathématiques qu'en licence ou maîtrise pour la plupart (ou même pour certains pas du tout avant le troisième cycle). Un résultat comme la formule de Stokes, utilisé (en dimension  $\leq 3$ ) sans complexe par les physiciens dès la première année de DEUG, n'est en général pas traité dans les premiers et seconds cycles de mathématiques car réputé trop difficile (on dit qu'une des motivations de la création du groupe Bourbaki était de créer les bases suffisantes pour pouvoir in fine obtenir une présentation rigoureuse de la formule de Stokes!).

On voit donc qu'il y a un net décalage (de deux ans en général, ou plus) entre le cours de mathématiques et les mathématiques utilisées dans le cours de physique. En raccourci, on peut dire que les élèves des DEUG scientifiques (et CPGE) reçoivent deux cours de mathématiques pendant leur scolarité (voire trois, car les chimistes s'y mettent aussi), cours d'intersection vide deux à deux et sans interaction entre eux.

Cette situation est dénoncée aussi bien par les mathématiciens que par les physiciens.



Il semble malheureusement que la situation décrite ci-dessus aille plutôt en empirant avec les années : la licence de mathématiques des années 60 (deuxième et troisième année d'université) comportait un certificat obligatoire de physique, sans compter la mécanique obligatoire elle aussi et des enseignements spécifiques de mathématiques pour physiciens existaient au niveau des premier et second cycles, appelés « Techniques mathématiques de la physique » et « Méthodes mathématiques de la physique » (ce dernier plutôt suivi par des mathématiciens), dans lesquels Laurent Schwartz par exemple faisait merveille.

### 3. Le point de vue des mathématiciens

Il faut d'abord noter que l'enseignement des mathématiques dites pures (dans les CPGE MP, dans les magistères des Écoles normales et dans une certaine mesure à l'École polytechnique) a été et est encore remarquable ; il a en particulier formé des générations de mathématiciens qui ont fait le succès de l'école mathématique française, internationalement très bien cotée. Les CPGE (ancienne manière) ont aussi été une excellente formation pour les ingénieurs en « recherche-développement », comme en témoigne entre autres une récente interview du PDG de la firme Netscape, polytechnicien : les ingénieurs français sont très appréciés dans les entreprises de la côte ouest des Etats-Unis ; ils réussissent mieux que leurs collègues américains et cela est dû (toujours d'après la même source) à la formation théorique, en particulier mathématique, qu'ils ont reçue en Classe Préparatoire. Cependant, cet enseignement relativement abstrait et formel est mal adapté aux DEUG scientifiques, surtout aux sections non spécifiquement mathématiques, c'est-à-dire autres que les sections MIAS, ainsi qu'aux filières PC et PSI des CPGE.

Même au niveau de la recherche, la domination de l'école de pensée disons formaliste (sans mettre dans ce mot une quelconque intention péjorative) commence à être remise en cause : on assiste à des convergences de nouveau très importantes entre mathématiques et physique.

Pour illustrer ce fait, citons la définition iconoclaste et un brin provocatrice suivante des mathématiques donnée par V. Arnold, dont nous laissons la responsabilité à son auteur<sup>2</sup> :

« Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques peuvent se définir comme la partie de la physique pour laquelle les expériences ne coûtent pas cher ».

On voit donc qu'aussi bien au niveau de la recherche que de l'enseignement, un retour au concret et aux fondements physiques des mathématiques se dessine ; cette attitude est évidemment spécialement pertinente pour l'enseignement dans les DEUG et CPGE à dominante physique ; c'est en tous cas le point de vue de l'auteur de ce texte et des mathématiciens de la commission.

<sup>2</sup> La Gazette des Mathématiciens, 78, octobre 1998

#### 4. Le point de vue des physiciens

Ce point de vue est développé dans l'article de R. Balian « Mathématiques et sciences de la nature » paru dans la *Gazette*<sup>3</sup>. Les physiciens sont demandeurs de cours de mathématiques faits par des mathématiciens. Ils reconnaissent le côté indispensable des mathématiques pour la formation scientifique générale (cf. le point 5 ci-dessous). Ils demandent donc à la fois une formation à la rigueur de raisonnement et une présentation mathématique des notions dont ils ont besoin qui insiste sur la compréhension intuitive et les relations avec le monde physique. Il se trouve que, même pour l'enseignement des mathématiques en tant que telles, les mathématiciens de la commission pensent que ce point de vue est pertinent (pour ce fait précis, ils sont d'accord avec l'article d'Arnold cité plus haut).

Les physiciens déclarent avoir besoin que les concepts mathématiques utilisés en physique soient compris (et reconnus en tant que tels) par les étudiants et reconnaissent que l'enseignement mathématique qu'ils dispensent actuellement dans les cours de physique n'atteint pas ce but (cf. le point 5 ci-dessous).

Écoutons un professeur de physique en CPGE, membre de la commission : « Il semble indispensable que l'étudiant comprenne le sens des mots tels que dérivée, différentielle, intégrale, primitive, gradient, divergence ». Cela semble aller de soi en effet... et ne paraît donc pas être tout à fait le cas, même dans les classes CPGE qui représentent pourtant une certaine élite ; et plus loin :

« Les enseignants de physique sont, je crois, favorables à laisser aux mathématiciens cet apprentissage. Ils préfèrent consacrer leur temps d'enseignement à faire assimiler des concepts de physique, plutôt qu'à entraîner à l'acquisition de simples techniques de calculs (qui se veulent efficaces), que les étudiants ne reconnaissent d'ailleurs pas dans leur cours de mathématiques » [...] « Même si les enseignants de physique ont conscience des difficultés mathématiques rencontrées par leurs étudiants, il faut bien, malgré tout, enseigner quelque chose. La mécanique a besoin de vecteurs à trois dimensions, l'optique d'un peu de géométrie, la thermodynamique et l'électromagnétisme de dérivées partielles et d'intégrales multiples, l'électrocinétique de nombres complexes et de transformée de Fourier, partout des équations différentielles, etc. »

D'autre part, le fait d'être déchargé peu ou prou de l'obligation d'enseigner des mathématiques pourrait leur permettre de mieux développer et faire comprendre le côté expérimental de leur discipline, souvent occulté par manque de temps.

#### 5. Conséquences de la situation actuelle

La situation décrite ci-dessus a des conséquences graves, non seulement évidemment pour les étudiants, mais même pour les mathématiciens eux-mêmes, ce dont ils ne sont pas toujours conscients : beaucoup d'enseignements de mathématiques dans les premiers cycles (sciences physiques, géologie, biologie, médecine) et dans les écoles d'ingénieurs échappent aux mathématiciens, ce qui est à terme une menace pour le nombre de postes de mathématiques. Cette situation ne pourra que s'aggraver si les mathématiciens dans leur ensemble

<sup>3</sup> La *Gazette des Mathématiciens*, **76**, Avril 1998

s'obstinent dans leur attitude trop formaliste et refusent de prendre en compte les spécificités des autres disciplines.

On peut se demander si la tendance qui se dessine actuellement à savoir, la suppression des cours spécifiquement mathématiques (dans les formations scientifiques d'autres disciplines)<sup>4</sup> est positive du point de vue de ces disciplines ; la réponse de la commission a été unanimement négative, en particulier pour les raisons suivantes :

– C'est une erreur grave que de sous-estimer le temps d'assimilation d'un formalisme mathématique. Il ne suffit pas d'admettre une formule, puis de la faire suivre de quelques illustrations classiques pour que le champ d'application de ladite formule soit couvert, tant s'en faut. Toute méthode mathématique (et plus généralement scientifique) comporte ses pièges, ses errances et demande pour être assimilée que soit dégagé un point de vue véritable sur son mode d'utilisation. Observons en passant que les scientifiques ont, avec l'âge, tendance à sous-estimer fortement le temps qu'il leur a fallu pour maîtriser les concepts et formalismes mathématiques, ce qui explique que les recommandations pédagogiques de certains soient perçues comme aberrantes par les enseignants de terrain.

En pratique, il apparaît que seul un spécialiste connaissant parfaitement les rouages des mécanismes à utiliser peut les présenter efficacement et donc construire un cours apte à les faire assimiler par les étudiants. Prenons l'exemple de la notation complexe en propagation des ondes : peut-on espérer qu'un étudiant qui n'aura pas été convenablement exercé à des manipulations d'exponentielles complexes pourra prendre la moindre initiative en vue d'étudier un problème de superposition d'ondes, de battements, ou autre ? Insistons : si la maîtrise des outils n'est pas suffisante, l'étudiant reste confiné à la répétition des cas d'école et sa capacité d'initiative est réduite (cf. le dernier paragraphe).

– Une des caractéristiques des méthodes mathématiques est leur universalité. Or les formalismes du calcul infinitésimal perdent cette universalité s'ils sont présentés dans un contexte trop particulier. C'est un fait que tout enseignant a pu constater au moins une fois : pour la plupart, les étudiants sont incapables de reproduire le même calcul d'une branche de la physique à l'autre. Les raisons en sont multiples ; disons pour simplifier que les symboles manipulés se chargent d'un sens précis en physique et que, ce sens changeant avec la branche étudiée, les repères disparaissent, plongeant l'étudiant dans le doute. Il est clair, en revanche, qu'un cours de mathématiques adapté peut donner une idée du caractère transdisciplinaire des calculs et méthodes utilisés. Les équations différentielles linéaires du second ordre en fournissent une illustration simple : la connaissance précise de la structure de l'ensemble des solutions permet de saisir immédiatement l'analogie entre le comportement d'un oscillateur linéaire avec frottement et celui d'un circuit L-R-C. A un niveau plus élevé, les identités de la thermodynamique demeurent mystérieuses tant que

---

<sup>4</sup> Le cas des sciences économiques et de l'informatique est différent et n'entre pas dans le cadre de ce texte, mais pour ces matières aussi un cours de mathématiques spécifique et professé par un mathématicien est indispensable ; il appartient aux mathématiciens de quitter leur point de vue quelque peu sectaire et de faire l'effort d'adaptation nécessaire.

les rouages mathématiques du calcul des dérivées partielles et des fonctions implicites ne sont pas démontés.

– Enfin il va sans dire qu’une telle attitude est une négation absolue du rôle formateur des mathématiques : ces dernières amènent, notamment, la capacité à juger de la validité d’une proposition dans un système logique abstrait fondé sur un petit nombre d’axiomes. On se demande comment on peut espérer former des ingénieurs, qui pour un grand nombre d’entre eux travailleront en informatique, sans leur donner cette faculté.

## 6. En guise de conclusion

A ce stade de la réflexion, il n’est pas question de faire des suggestions précises. La mise en œuvre des idées esquissées ci-dessus demandera beaucoup plus d’imagination, de concertation et d’efforts, ne serait-ce que pour faire évoluer la mentalité de beaucoup de nos collègues, aussi bien mathématiciens que physiciens. Nous nous contenterons donc de dire que les mathématiques et la physique devraient être enseignées en parallèle (et ceci dès le collège et le lycée – cela demanderait évidemment aussi une réforme de la formation des maîtres, en particulier de la licence), ou du moins en étroite collaboration.

Au niveau des DEUG, il faudrait au moins que le contenu des enseignements soit décidé de manière pluri-disciplinaire, avec des ouvrages de référence choisis en commun.

Il est clair que pour les études scientifiques à orientation autre que mathématiques ou physique (par exemple informatique, biologique, économique, etc.) il faut moduler l’enseignement des mathématiques en fonction de la matière principale et du but recherché et que des réflexions analogues à celle menée par notre commission doivent être entreprises avec d’autres disciplines, les principes exposés ci-dessus restant cependant à notre avis toujours valables pour l’enseignement scientifique de base.

## Mathématiques pour physiciens

Julien BOK (ESPCI)

---

**L**es physiciens ont besoin de mathématiques pour exercer leur métier. La physique cherche à donner une description quantitative de la nature vérifiable par des expériences et donc des mesures de grandeurs physiques comme la masse, la position, la vitesse des particules, le temps, etc. La plupart des lois physiques s'expriment donc sous forme d'équations reliant ces grandeurs. On peut citer Galilée : « Les mathématiques sont le langage naturel d'une description quantitative de la nature ». Henri Poincaré se méfiait même des sciences qui n'utilisent pas les mathématiques : « Les mathématiques sont le langage avec lequel les idées imprécises ou vagues ne peuvent s'exprimer ».

Le physicien chaque fois qu'il veut modéliser un phénomène nouveau, cherche ses outils dans les mathématiques existantes mais n'hésite pas à créer des nouveaux outils mathématiques qui lui sont utiles. On peut citer les groupes de symétrie pour les cristallographes, les distributions pour les électriciens et plus récemment le groupe de renormalisation en physique statistique et la théorie des cordes en physique des hautes énergies. De nombreux scientifiques comme Newton, Huygens, Gauss et H. Poincaré étaient à la fois physiciens et mathématiciens.

Un problème plus pratique et concret se pose aux enseignants de physique : faut-il attendre que les collègues mathématiciens aient traité un sujet pour enseigner la physique utilisant ces outils ? Par exemple, faut-il attendre que les étudiants aient vu les équations différentielles pour enseigner la mécanique et les circuits électriques ? ou qu'ils aient vu la théorie des champs de vecteurs pour enseigner l'électrostatique et le magnétisme ? C'est évidemment impossible. Nous avons fait récemment une enquête à l'ESPCI, auprès de tous les laboratoires, pour leur demander quelles mathématiques ils voudraient voir enseigner aux élèves. Le résultat a été impressionnant, l'ensemble des mathématiques y est passé, des probabilités aux tenseurs, à l'algèbre linéaire, les espaces de Hilbert et les transformations de Fourier, etc. Pour tout traiter, il ne fallait enseigner que des maths à l'ESPCI, ce qui n'est pas très raisonnable pour une école d'ingénieur.

Je propose la stratégie suivante : l'enseignant de la physique ne suppose connu des étudiants, que le programme de mathématiques de l'année précédente, (ceci nécessite, bien sûr, que ce programme ait été bien assimilé par les élèves, ce qui est un autre problème). Il essaie dans la mesure du possible, de traiter son programme avec ces bases. Lorsqu'il a besoin d'une notion nouvelle, il l'introduit lui-même de la façon la plus simple possible et en utilisant des exemples concrets. Il n'est pas besoin d'avoir étudié la théorie complète et rigoureuse des équations différentielles pour trouver les solutions d'une équation différentielle du second ordre, linéaire et à coefficients constants. De même on peut calculer des intégrales, par primitives ou en utilisant des astuces simples comme l'intégration par parties ou les changements de variable sans avoir fait la théorie complète de l'intégration. Le physicien doit être avant tout proche

des réalités, il doit utiliser des modèles mathématiques pour faire des prédictions quantitatives qui sont soumises à l'expérience qui reste le juge suprême. Il faut se rappeler que l'expérience a toujours des limites de précision et qu'il suffit de trouver une solution approchée qui satisfait à ces limites. Une bonne approximation, qui simplifie les calculs, est toujours préférable à une théorie très compliquée.

La physique fournit souvent des exemples concrets pour certaines démarches mathématiques. Il y a évidemment toutes les méthodes de calcul avec approximations, comme les solutions sinusoidales pour les oscillations d'un pendule qui ne sont valables que pour les faibles amplitudes d'oscillation. On peut aussi citer le passage du discret au continu, qu'on peut illustrer par la propagation d'ondes de types sonores dans les cristaux. Pour les courtes longueurs d'ondes, de l'ordre de quelques distances interatomiques, il faut tenir de la nature discrète de la matière, formée d'atomes. On modélise le cristal par des atomes ponctuels reliés entre eux par des ressorts. On montre que pour des longueurs d'ondes grandes devant la distance interatomique, le cristal se comporte comme un milieu continu élastique.

Enfin, le physicien ne doit pas non plus oublier que toutes les théories ne sont valables que dans un certain domaine expérimental. La mécanique newtonienne avec toute son élégance et sa généralité n'est plus valable lorsque la vitesse des particules s'approche de celle de la lumière.

\* \* \*

## Un nouveau paradigme de l'enseignement des mathématiques

Fred WEISSLER (*Université Paris-Nord*)

---

**O**n est confronté au fait que les enseignements de niveau DEUG des matières scientifiques, telles que la physique, la chimie et l'économie, utilisent de manière fondamentale des outils mathématiques que la communauté mathématique considère être du niveau licence ou maîtrise de mathématiques. Cette situation est générale et incontournable. Pour y faire face, on doit développer un nouveau paradigme d'enseignement des mathématiques qui permet de traiter en DEUG les sujets nécessaires pour les autres matières scientifiques, tout en restant fidèle aux mathématiques.

L'enseignement « relativement abstrait et formel », dont les avantages ont été évoqués dans l'article de Risler, correspond bien à la forme des articles de recherche mathématique publiés dans les journaux. Mais nous savons, nous les mathématiciens, que les articles de recherche publiés ne décrivent pas le processus de recherche. Faire de la recherche, c'est faire des essais, étudier les cas particuliers, comprendre un exemple type. Si on pense qu'un certain lemme est vrai, mais on n'en trouve pas sa démonstration, on essaie de voir si ce lemme, supposé vrai, peut amener au résultat cherché, ou bien on le teste sur des exemples représentant différents cas de figures. C'est uniquement quand

on a tout compris que l'article est écrit, l'article qui, d'ailleurs, ne met pas en évidence tous les essais et toutes les tentatives nécessaires pour mener la recherche à sa fin.

Faire des enseignements uniquement « abstraits et formels » cache aux étudiants une partie importante des mathématiques. Au niveau du DEUG, je pense qu'il faut apprendre aux étudiants tout le spectre du processus de mathématiques : du concret à l'abstrait, de l'intuition aux démonstrations formelles.

A titre exemple, je recommande très vivement l'ouvrage (en anglais) *Calculus* Vol. I et II, par Tom Apostol, dont les premières éditions sont sorties en 1961 et 1962 respectivement. Les sujets traités, ainsi que le niveau d'abstraction utilisée, conviennent très bien au besoins des physiciens. En particulier, le volume II traite le théorème de Stokes en dimensions 2 et 3. En revanche, les livres sont écrits pour leur plus grande part avec une rigueur mathématique suffisante pour satisfaire la communauté mathématique.

*Suite du dossier dans le prochain numéro de la Gazette.*





# INFORMATIONS

---

## Le CIRM : un bel outil au service de la communauté mathématique

Jean-Pierre LABESSE & Robert MOUSSU

---

### I - Présentation

#### *Historique et structures*

Il y a près de 20 ans que le Centre de Rencontres Internationales de Mathématiques est né. Cette naissance avait été précédée de longues années de gestation. Songez que dès 1971 un poste d'ingénieur avait été créé par le CNRS pour préparer cette naissance. Le lieu lui-même, une « bastide » – ancienne demeure des seigneurs de Luminy – alors en ruine, avait été découvert par Poitou. Mais il fallait convaincre de l'utilité d'une telle opération et trouver beaucoup d'argent pour réhabiliter la bastide. Que de rapports, de lettres et d'entrevues à l'initiative de Aragnol, Dieudonné, Godbillon, Koszul, Poitou, Verdier et bien d'autres, ont été nécessaires au démarrage de cette aventure ! Enfin au printemps 1981 le CIRM a ouvert ses portes. Il a fallu attendre encore 10 ans pour que le bâtiment scientifique abritant la bibliothèque, la salle de conférences et les salles de travail informatique, soit inauguré.

Le CIRM est situé sur une parcelle de terrain au cœur du campus de Luminy dont la SMF a signé un bail emphytéotique jusqu'en 2004. C'est un établissement de la SMF sous contrat avec le MENRT et le CNRS. Du point de vue du CNRS c'est une unité mixte de service : l'UMS 822.

De 1981 à 1995 le CIRM a été dirigé successivement par Aragnol, Lachaud, Brasselet et depuis 1995 par Labesse ; son conseil scientifique est présidé depuis 1995 par Moussu.

#### *Moyens scientifiques et hôteliers*

Le CIRM dispose d'une salle de conférences de 74 places. Outre les classiques tableaux à craie (les chouchous des mathématiciens) elle est aussi équipée de moyens audio-visuels (BARCO) permettant la projection de documents préparés par ordinateur (visualisation graphique de simulations numériques, etc.) ou la projection de la vidéo-cassette du Lapin de Douady !

Sa bibliothèque, sans être complète, est très riche. Elle abrite 70 000 volumes : environ 20 000 ouvrages et des collections de revues (plus de 300). Tous les visiteurs sont séduits par son architecture originale. C'est une belle réussite à mettre au crédit de Lachaud, directeur lors de la construction, et de Galeski, responsable de la bibliothèque.

Le CIRM offre des moyens informatiques en constante évolution et d'une grande diversité : stations de travail, Macintosh, PC. Chaque participant peut ainsi trouver un type de matériel et des ressources, sinon identiques à celles qui lui sont familières, du moins suffisamment proches pour qu'il s'y retrouve assez vite.

Le CIRM dispose d'un restaurant d'une contenance maximale de 94 couverts. La bastide abrite 30 chambres permettant de loger 42 participants. Les locaux du centre de formation du CNRS, à quelques mètres du CIRM, vont être bientôt mis à sa disposition. Cela fournira 20 chambres supplémentaires et 4 studios. Au total on aura un hébergement sur place pour 54 participants en chambre simple et pour un maximum de 85 participants avec les 32 chambres doubles. Cela devrait permettre d'organiser deux rencontres en parallèle.

Situé dans un parc de 4 hectares le CIRM est aux portes des Calanques, au pied du Mont Puget. C'est un lieu magnifique permettant des activités de détente diverses : la marche et l'escalade dans les Calanques ainsi que les plaisirs de la plage dans un cadre sauvage et somptueux, protégé par un accès qui demande quelques efforts.

## II - Activité Scientifique

### *Missions*

Il est instructif de comparer les activités scientifiques du CIRM à celles de son illustre aîné, le centre de mathématiques d'Oberwolfach. Si le CIRM a été créé à l'imitation de ce dernier, certaines rencontres du CIRM sont organisées sur un mode très différent qui en font sa spécificité.

Voyons tout d'abord les ressemblances. En majorité, les rencontres du CIRM sont des colloques du même type que celles d'Oberwolfach. Ce sont des conférences sur un thème pointu de mathématiques pures ou appliquées, rassemblant pendant une semaine une cinquantaine de participants.

Seul un tiers des colloques sont récurrents avec une périodicité de deux ou trois ans. Ces colloques s'appuient en général sur des équipes, des groupes de recherche bénéficiant d'une reconnaissance nationale ou internationale et sont le plus souvent d'un très bon niveau.

Les colloques non récurrents représentent environ la moitié des rencontres du CIRM. Ils répondent en général à une préoccupation mathématique d'actualité. Leur qualité scientifique est moins uniforme que celle des colloques récurrents, mais c'est parmi eux que se trouvent les rencontres de niveau scientifique exceptionnel. Il est à craindre que l'âge de la maturité arrivant pour le CIRM, la proportion de ces rencontres plus spontanées ne diminue. En effet un colloque de grande qualité donne souvent l'idée aux participants d'organiser d'autres colloques sur des thèmes voisins et la rencontre devient récurrente. Il faudra

veiller à ce que ce phénomène de vieillissement naturel ne nuise pas à la qualité et au renouvellement des thèmes des rencontres.

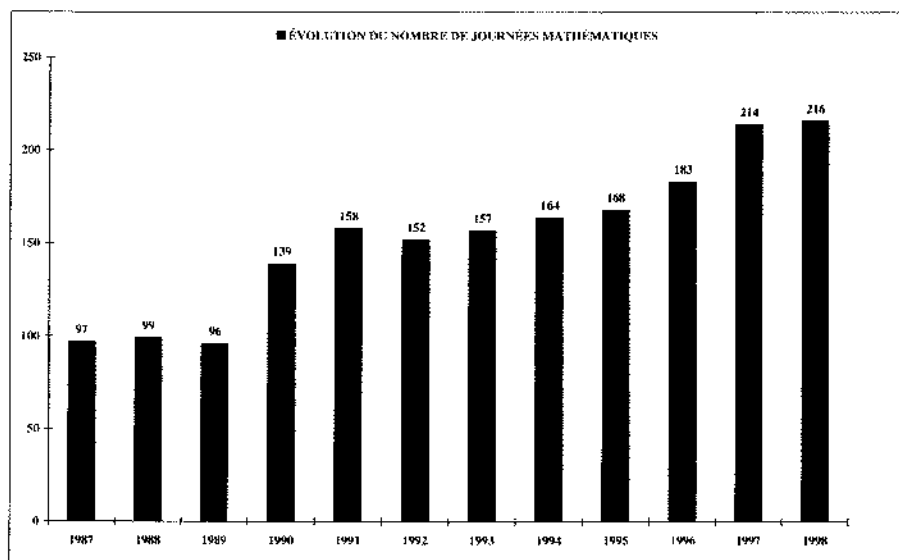
Par ailleurs, comme Oberwolfach, le CIRM offre à des petits groupes de chercheurs, la possibilité de venir travailler pendant plusieurs jours sur un problème précis, sur la rédaction d'un mémoire, etc. La taille d'un petit groupe n'est pas rigide et on peut même imaginer un « petit groupe » réduit à un chercheur qui vient résider au CIRM pour travailler dans de bonnes conditions (en particulier grâce à sa bibliothèque) pendant une ou plusieurs semaines.

Il convient de souligner un des points faibles du CIRM : les colloques ne se répartissent pas assez uniformément entre les différentes branches des mathématiques. Singulièrement, le nombre de rencontres en analyse est trop faible (de l'ordre de cinq par an). Par exemple, en 1999 il y aura plus de rencontres en algèbre et géométrie qu'en analyse, analyse appliquée, physique mathématique, probabilités, statistique et calcul scientifique. Les causes de ce déséquilibre sont anciennes. On y retrouve l'ancienne coupure du CCU en 16e, 17e section, la coupure actuelle des sections 25 et 26 du CNU ou encore la division SMAI-SMF. Cependant, on remarque une amélioration depuis trois ans. Par exemple, 1998 fut une bonne année pour les probabilités-statistiques avec huit rencontres dans ce domaine.

Passons aux rencontres d'un autre type ! A côté des colloques traditionnels, le CIRM accueille des rencontres basées sur des cours intensifs d'une semaine, destinés principalement aux jeunes chercheurs (DEA en résidence etc.) Il y a aussi des écoles d'été. Par exemple cette année, il y aura deux écoles d'été de mathématiques pures (« Analyse complexe et géométrie de Cauchy-Riemann » et « Symétrie et application moment »), chacune de deux semaines. Enfin le CIRM abrite depuis 1996 le Centre Méditerranéen de Recherche Avancée en Calcul Scientifique, le CEMRACS. Il s'agit d'une « période spéciale » de 6 semaines pour de jeunes chercheurs encadrés par des chercheurs confirmés, consacrée à des problèmes de calcul scientifique, en liaison avec des projets ou problèmes industriels. Des moyens de calcul importants sont mis à la disposition des participants.

L'activité scientifique est en progression constante qualitativement et quantitativement depuis le début du CIRM. Par exemple de 90 à 96 le nombre de rencontres mathématiques était compris entre trente et trente-cinq. Il est aujourd'hui nettement supérieur à quarante. L'ouverture au mois d'août du CIRM

pour le CEMRACS depuis 96 contribue à l'augmentation de la fréquentation du CIRM (voir tableau ci-dessous).



*Évolution du nombre de journées mathématiques*

Cet accroissement a des conséquences directes sur la qualité scientifique des manifestations. La demande étant plus forte, il est possible de sélectionner les rencontres et d'encourager les meilleures. Toutefois tant la fréquentation que la qualité des rencontres peuvent et doivent encore augmenter. Un des objectifs est de combler le déficit de rencontres en Analyse pure et appliquée.

#### *Comment organiser ou participer à une rencontre*

Pour connaître les modalités de dépôt de dossier de candidature et les dates libres pour organiser une rencontre, les organisateurs peuvent consulter le site web :

<http://www.cirm.univ-mrs.fr>

ou s'adresser directement au secrétariat des colloques par téléphone ou, de préférence, par courrier électronique :

[colloque@cirm.univ-mrs.fr](mailto:colloque@cirm.univ-mrs.fr)

Compte tenu de l'augmentation du nombre de demandes, il est conseillé de déposer ce dossier dix-huit mois avant la date prévue de la rencontre. Le dossier

est examiné par le conseil scientifique qui se réunit deux fois par an, fin avril et fin octobre.

Les organisateurs doivent programmer leurs rencontres longtemps à l'avance s'ils souhaitent pouvoir choisir leurs dates dans un éventail large. On notera toutefois que c'est une prérogative du conseil scientifique de fixer les dates des rencontres ; la qualité scientifique est un critère de choix plus décisif que l'antériorité de la demande.

Le conseil scientifique attribue à chaque rencontre une subvention qui dépasse rarement 40 000 F. Ce soutien financier prend en compte plusieurs critères : la qualité scientifique, le nombre de participants, le caractère international de la rencontre... Le budget présenté par les organisateurs doit prévoir la façon dont les frais de séjours, de voyages seront pris en charge. Il est recommandé aux organisateurs d'utiliser la subvention du CIRM pour financer principalement des frais de séjours de participants.

Pour les participants, il existe des formulaires d'inscription sous forme papier, e-mail et, bientôt, une version sera disponible sur le site web. En tout état de cause ce sont les organisateurs qui acceptent ou refusent les demandes de participation dans la limite de la capacité d'accueil du CIRM bien entendu.

### III - Perspectives, Conclusion

Le CIRM est en bonne santé. Son activité scientifique a augmenté au fil des années en quantité et en qualité. Il fonctionne désormais près de 45 semaines par an et offre des services scientifiques en constante amélioration. Mais beaucoup reste à faire, par exemple il convient de poursuivre le rééquilibrage vers l'analyse et les mathématiques appliquées, encourager l'organisation de « petits groupes » et de séjours de plus longues durées.

Il est souhaitable que les organisateurs et l'ensemble de la communauté soient conscients des coûts de fonctionnement d'un organisme tel que le CIRM. La quote part exigée des participants ne couvre qu'une partie des charges de fonctionnement de l'hôtellerie-restauration. On laissera le lecteur imaginer ce que représentent par ailleurs les investissements scientifiques (bibliothèque, informatique) et en personnel d'assistance scientifique, de gestion et de secrétariat. Il est souhaitable que les organisateurs titulaires de contrats TMR ainsi que les responsables de GDR utilisent une partie des fonds à leur disposition pour participer à la prise en charge de ces coûts.

Divers problèmes financiers et structurels subsistent. La SMF, comme de très nombreuses autres associations relevant de Loi de 1901, a essuyé récemment un contrôle fiscal. Son issue favorable ne doit pas faire oublier que la plus grande prudence reste de mise et que des erreurs dans la gestion du CIRM pourraient être catastrophiques pour la SMF eu égard aux sommes en jeu.

En guise de conclusion, nous dirons que le CIRM est un très bel outil au service de la communauté mathématique. C'est un outil vivant, encore un peu fragile qui doit recevoir toute notre attention.

*Renseignements pratiques*

CIRM, case 916 – 13288 Marseille Cedex 9  
 téléphone : 04 91 83 30 00  
 fax administration : 04 91 83 30 05  
 fax hôtellerie : 04 91 41 27 86  
 mél administration : cirm@cirm.univ-mrs.fr  
 mél colloque : colloque@cirm.univ-mrs.fr  
 site web : <http://www.cirm.univ-mrs.fr/>

\* \* \*

## Compte rendu de la session de printemps 1999 de la commission 01 du CNRS

08-10 mars 1999

Patrick POLO

---

**L**a commission accueille les nouveaux membres élus : Rosita Monchanin, Olivier Biquard et Emmanuel Peyre. **C**ette Doctot, victime d'une entorse, est excusée.

Le procès verbal de la session d'automne 1999 est approuvé par 16 oui, 3 absents.

Une discussion s'engage au sujet de la diffusion des noms des rapporteurs avant les sessions de printemps et d'automne. Certains y sont favorables, mais l'opinion majoritairement exprimée est la suivante. Lors de la session d'automne, on examine individuellement l'activité des chercheurs, tandis que lors de la session de printemps ont lieu des classements pour les promotions de Directeurs de recherche et les accueils en délégation/détachement qui sont longuement discutés et qui expriment l'avis de la commission et non celui du rapporteur. Après un bref débat, la commission passe au vote sur la question « Etes-vous favorables à la diffusion des noms des rapporteurs avant les sessions ? » La réponse est 13 non, 5 oui, 2 absents pour la session de printemps et de 15 oui, 5 non pour la session d'automne.

Puis a lieu une discussion au sujet du déroulement des auditions DR2 sont ensuite discutées. La durée retenue, pour chaque candidat, est de 15mn d'exposé plus 3mn de questions.

François Ledrappier sollicite des idées pour le projet Université 2000.

Puis la commission discute des projets de mise en place de comités d'audit pour les unités. Elle estime que les présidents de ces comités doivent être indépendants de la Direction scientifique. D'autre part, Patrick Dehornoy observe que les règles proposées sont très proches des formes déjà utilisées en section 01 pour les comités scientifiques. Maurice Galeski juge indispensable la présence d'un représentant du collège C dans le comité d'audit, qui soit en charge des ITA ; Pierre Degond estime que cela dépend de la taille des unités.

La commission aborde ensuite les questions d'éthique. La question des candidatures à promotion de membres de la commission est d'abord examinée.

Il ressort de la discussion que la commission est évidemment sensible à cette question et vigilante sur ce point. Toutefois elle estime que des règles strictes ne sauraient être appliquées, sans quoi il sera difficile de trouver des personnes motivées pour faire ce travail si c'est se couper tout espoir de promotion pour 4 voire 5 ans.

En ce qui concerne les affectations des chargés de recherche, la commission souligne que la notion de laboratoire joue en mathématiques un rôle moins prépondérant que dans d'autres disciplines. Elle rappelle que depuis de très nombreuses années le fonctionnement de la commission de mathématiques a été de choisir les meilleurs candidats sur la base de leur dossier scientifique et de discuter seulement ensuite de leurs affectations. De plus, la commission a cherché à satisfaire dans une large mesure les premiers choix d'affectation des candidats retenus, en tenant compte des perspectives scientifiques pour ces jeunes chercheurs et chercheuses, ainsi que pour la communauté mathématique française. Le bilan des recrutements de chargés de recherche pour les trois années écoulées est le suivant. Durant ces trois ans, la commission a recruté 44 chargés de recherche, dont 20 ont été affectés dans des laboratoires représentés dans le jury.

Puis, en réponse à une question de Claude Michel Brauner sur le bilan de la session d'automne 98, Jean-Michel Lemaire indique qu'en ce qui concerne les unités les évolutions principales sont les suivantes. Les EP de Chambéry et de Montpellier ont été créées, la configuration de l'UMR 5585 (Schatzman) est en cours de négociation avec les établissements concernés sur la base des conclusions du comité national, le regroupement d'une partie de l'ex-ESA 7055 (Jeulin) avec l'UMR 7599 (Jacod) a été effectué, cependant que la demande de Deheuvels n'a pas été retenue. A Pau, l'ESA 5033 (Amara) est mise en restructuration (sans crédits).

D'autre part, Jean-Michel Lemaire rappelle l'existence du statut de *Directeur de recherche associé*. Il concerne des chercheurs travaillant dans le secteur privé, qui continuent à être rémunérés par leur entreprise, tout en consacrant 20% de leur temps à des activités de recherche et de formation au sein du CNRS, avec un complément de salaire. Jean-Michel Lemaire a été saisi d'une telle demande, transmise par J.-Y. Girard, pour laquelle il sollicite l'avis de la section. La section 42 doit également donner un avis.

### Intervention de Jean-Paul Pouget

Une brève intervention de Jean-Paul Pouget a lieu. Il donne les chiffres suivants. Pour l'ensemble du CNRS, il y aura en 1999 : 284 promotions CR1, 59 promotions DR1, 11 promotions DRCE1 et 11 promotions DRCE2. Il y aura l'équivalent de 177 postes en possibilités d'accueil en détachement ou délégation. A ce sujet, Jean-Paul Pouget confirme que le coût financier d'un accueil en détachement (qui dépend du niveau de détachement) correspond en moyenne à 3 ou 4 accueils en délégation.

Il suggère de classer les demandes en trois groupes A, B, C. Dominique Bakry et Patrick Polo relèvent l'augmentation du nombre de postes d'accueil, gagée par la diminution du nombre de postes au concours DR2. A ce titre, ils estiment que l'attribution des postes d'accueil est un élément central des

activités de la commission. Pour cette raison ils sont favorables à un classement ordonné des demandes. Un consensus s'établit au sein de la commission sur cette proposition.

En réponse à une question de Patrick Polo, Jean-Paul Pouget explique que les concours ouverts au recrutement de DR1 extérieurs dans le département SPM sont motivés par l'intégration de chercheurs du CNET. Dominique Bakry estime que le blocage au passage DR2  $\rightarrow$  DR1 est dommageable pour le recrutement DR2.

Jean-Paul Pouget annonce que la campagne de recrutement ITA 1999 sera très moyenne. Les postes attribués seront l'équivalent du nombre des départs à la retraite, 30 postes pour le département SPM. Une seule session de concours est prévue, elle devrait avoir lieu avant l'été. Il y aura aussi une vingtaine d'AFIP (Affichage de Fonction d'Intérêt Prioritaire).

Maurice Galeski intervient au sujet des concours ITA. Il explique que le président de chaque jury est nommé par la Délégation régionale qui organise le concours, puis désigne les autres membres du jury. Maurice Galeski estime qu'il y a parfois des abus dans le déroulement des concours, il a reçu plusieurs plaintes à ce sujet et des pétitions circulent pour demander des enquêtes sur certains concours. Il encourage les mathématiciens à participer à ces jurys pour défendre les chances des ITA en mathématiques.

François Ledrappier soulève la question de l'évaluation des ingénieurs par le comité national. Incidemment, Jean-Michel Lemaire signale que la demande présentée par un chercheur (Hervé Gilquin) de passer dans le corps des ingénieurs a pu aboutir, suite aux efforts menés par le département SPM.

Puis Jean-Paul Pouget donne les chiffres du budget du Département pour 1999 : il sera de 137 MF, soit une diminution de 0,8% par rapport à 1998. La dotation pour les mathématiques est inchangée, soit 15 MF. Il y aura aussi des actions en faveur des jeunes chercheurs ( $\leq 40$  ans). Il leur est réservé, au niveau du Département, un budget de 43 MF, ventilé en 3 parties. La 1ère concerne la poursuite d'actions déjà engagées. La 2ème servira à financer des projets spécifiques à l'intérieur des laboratoires SPM. Enfin, la 3ème est un appel d'offres, à hauteur de 1,5 MF, ouvert à des projets innovants au niveau scientifique. Ceci est conçu comme une boîte à idée, un projet à caractère incitatif et devrait être récurrent. Pierre Degond demande quelle sera la durée de cette procédure. Jean-Paul Pouget répond que cela sera discuté en fonction des retombées de ce projet. Puis, en réponse à une question de Alain Grigis, il précise que les enseignants-chercheurs peuvent participer à ces appels d'offre.

Enfin, Jean-Paul Pouget indique que le mandat du comité national sera probablement prolongé de 6 mois ou 1 an. Puis il parle brièvement du groupe de réflexion CNRS Avenir et passe la parole, sur ce sujet, à Jean-Michel Lemaire, qui participe au comité de pilotage.

Jean-Michel Lemaire indique que le projet vise à cerner le devenir du CNRS et de la recherche scientifique en France à l'horizon 2005-2010. Il explique que les évolutions de société, tant au plan français qu'européen ou mondial, rendent nécessaires l'élaboration de différents scénarios et de critères de choix entre ces différents scénarios. Pour bâtir ces scénarios et ces critères, il est nécessaire de disposer d'échelles de valeur de la recherche ; les indices d'impact sont



une réponse parmi d'autres, à définir. Pour faire évoluer un système de façon pertinente, il faut d'abord savoir mesurer ses performances. L'étape en cours consiste en la rédaction d'un cahier des charges.

\* \* \*

## Analyse des recrutements des Professeurs et Maîtres de Conférences en Mathématiques (sections 25 et 26 du CNU) en 1998

Didier ROBERT

---

**R**emarque préliminaire : l'analyse ci-dessous repose sur des données partielles. Les conditions de travail à la direction de la recherche pendant le 2<sup>ème</sup> semestre 98 d'une part et le manque de coopération de quelques établissements d'autre part, ne m'ont pas permis d'avoir la totalité des informations. Le taux de réponse à l'enquête est voisin de 90%.

### Professeurs

- Nombre de postes PR (25+26) publiés en 98 : **73** (rappel 97 : 58)
- Nombre de réponses à l'enquête : **64**
- Nombre de postes non pourvus : 8
- Nombre de mutations : 12
- Nombre de femmes promues : 3
- Age moyen des recrutés (hors mutations) : 37,4 ans

#### Provenance statutaire

Professeurs (mutants)	12
MCF ou assimilés	26
CNRS ou assimilés	6
Etrangers	12

#### Nationalité

France	43
Europe	11
Autres Pays	2

**Commentaire** 12 MCF ont été promus sur place. On observe une tendance à un recrutement local excessif dans certaines universités. Le pourcentage de femmes promues professeur reste faible (3 sur 44 soit 7%). L'âge moyen des nouveaux recrutés demeure stable entre 37 et 38 ans.

### Maîtres de Conférences

- Nombre de postes MCF (25+26) publiés en 98 : **164** (rappel 97 : 115)
- Nombre de réponses à l'enquête : **148**
- Nombre de postes non pourvus : 3
- Nombre de mutations : 3
- Nombre de femmes nommées : 44
- Age moyen des recrutés (hors mutations) : 30,6 ans

#### Provenance statutaire

ATER-Post-Docs	86	AMN-Allocs	13
Agreg-Prep	3	PRAG	8
Etrangers	30	Chomeurs	2
Divers	3		

**Commentaire** 26 MCF ont été recrutés dans l'université où ils ont fait leur thèse. Le taux de recrutement local est donc de 18% cette année contre 25% en 97. Cependant quelques universités ont tendance à faire du recrutement local systématique. Le pourcentage de femmes nommées est de 30%, ce qui est mieux que l'an dernier (20%). L'âge moyen des nouveaux recrutés demeure stable entre 30 et 31 ans.

\* \* \*

## Information CNRS

---

La lettre n° 5 de la CPCM (Conférence des présidents du comité national) est parue. Pour vous abonner à la lettre de la CPCM envoyez un message à : [listserv@lmd.ens.fr](mailto:listserv@lmd.ens.fr)

Les précédents numéros de la lettre sont accessibles sur : <ftp://gershwin.ens.fr/pub/cpcn/lettre>

Site de la mission parlementaire sur la recherche menée par Pierre Cohen et Jean-Yves Le Deaut : [www.mission-cohen-ledeaut.org](http://www.mission-cohen-ledeaut.org)

\* \* \*

## 3<sup>e</sup> congrès européen de mathématiques

---

Le 3<sup>e</sup> congrès européen de mathématiques aura lieu à Barcelone du 10 au 14 juillet 2000 : <http://www.iec.es/3ecm>

# CARNET

---

## Moshé Flato (1937-1998)

---

Né en 1937 à Tel-Aviv, Moshé Flato est décédé le 27 novembre 1998 à Paris. Il fait en Israël des études de physique et de mathématiques et acheva en 1963 la préparation de sa thèse de Ph.D. sous la direction de G. Racah. La suite de sa carrière se déroule en France, avec de nombreux séjours à l'étranger (USA, Japon, Suède...). De janvier 1968 à sa mort il a été professeur à l'université de Dijon, franchissant toutes les étapes de la carrière. Il y a développé une activité exceptionnelle dans le domaine de la recherche : création du laboratoire de physique mathématique, direction de plusieurs dizaines de thèses (troisième cycle et Doctorat d'état).

*Moshé Flato*

Il avait reçu à Jérusalem une formation de physicien et de mathématicien. Ses premiers travaux portent sur des applications de la théorie des groupes à la physique théorique : spectroscopie des cristaux avec Racah (thèse de maîtrise de 1960, publiée en 1965 [1]), physique nucléaire avec Racah puis physique des particules dans l'équipe de Louis de Broglie à l'IHP, où il arriva en 1963 avec une bourse « ASTEF » française et où son indépendance d'esprit et de parole fut bien accueillie. Plus tard il s'est tourné vers les mathématiques, sans perdre de vue la motivation physique, de sorte que ses articles sont publiés majoritairement dans des revues de physique mathématique ou théorique. Il avait une très large connaissance des mathématiques et de la physique et beaucoup d'idées, que son caractère ouvert et même extraverti lui faisait propager très vite dans la communauté et il a été le créateur et l'animateur principal de la revue *Letters in Mathematical Physics*. En

1974 il fut un des principaux initiateurs de l'Association Internationale de Physique Mathématique (qu'il aurait, prématurément, voulu appeler Européenne). Un bref coup d'œil à sa bibliographie donne une petite idée du grand nombre de ses collaborateurs et interlocuteurs.

Il était doué d'une énergie inépuisable et a suivi jusqu'au bout avec passion tout ce qui touchait à son domaine, privilégiant avant tout les qualités d'imagination. Il laisse une œuvre foisonnante, à laquelle un colloque, à Dijon en septembre 1999, rendra hommage.

Les premiers travaux mathématiques de Moshé Flato ont surtout porté sur la théorie des groupes et plus précisément sur l'étude des représentations (de dimension infinie) des groupes de Lie, représentations qui interviennent dans la physique quantique et des hautes énergies. L'une des difficultés rencontrées à cette époque était le passage des représentations du groupe à celles de son algèbre de Lie et inversement la question de l'intégration d'une représentation de l'algèbre en une représentation du groupe. C'est sur ce dernier point que les contributions de Moshé Flato ont été les plus significatives. Avec ses collaborateurs il compare les notions de vecteurs séparément et « globalement » analytiques [2] et obtient un critère d'intégrabilité [3].

Dès 1975, en particulier dans des notes avec D. Sternheimer et A. Lichnerowicz, Moshé Flato s'est intéressé aux « déformations ou quantifications de structures symplectiques » (« star-produits »), question à laquelle il a travaillé pendant de nombreuses années depuis, en particulier avec A. Lichnerowicz, C. Frønsdal et plus récemment avec A. Connes. Ses deux grands articles de 1978 [4], avec F. Bayen, C. Frønsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer, sont une très bonne présentation du sujet et des problèmes qu'il pose et ont beaucoup contribué à les faire connaître, en particulier l'importance du rôle joué par le complexe de Hochschild et de sa cohomologie dans cette théorie<sup>1</sup>.

Le problème d'existence d'un star-produit a été résolu quelques années plus tard par M. De Wilde et P. Lecomte dans le cas « semi-classique symplectique » ; une preuve plus géométrique est due à Fedosov, avec une classification en termes de déformations de la structure de Poisson que l'on retrouve dans le magistral travail de Kontsevich. M. Flato est revenu à plusieurs reprises sur les problèmes posés par les star-produits. Une contribution particulièrement intéressante est l'article [5] avec A. Connes et D. Sternheimer dans LMP en 1992, où sont étudiées les traces sur ces star-algèbres et indiqués les liens avec les théorèmes de l'indice et la géométrie non commutative.

M. Flato a fait plusieurs autres travaux touchant aux représentations et à la physique, dans ce cadre des déformations, qui reflétait bien pour lui la relation entre une théorie physique (p.ex. classique) et ses extensions (quantique ou autre). Ainsi dans [6], utilisant la déformation qui fait passer de l'univers de

---

<sup>1</sup> Note de LBdM — C'est aussi une des premières choses que M. Flato m'a montré quand nous avons commencé, beaucoup plus tard, à avoir des échanges sur les star-produits. Il est piquant que, bien que ma théorie des opérateurs de Toeplitz de 1979 rentre presque dans le même cadre, nous n'ayions guère perçu le lien avant les années 1990. En fait en 1979 je ne connaissais des star-produits que ce que m'en avait dit J. Vey : qu'il s'agissait de calculs horribles servant à construire des algèbres associatives à grands coups de cochaînes et que je serais bien avisé de ne pas regarder cela de près ; je n'avais sur le moment pas du tout vu qu'il s'agissait identiquement du même formalisme que celui des opérateurs pseudo-différentiels.

Minkowski à un univers de De Sitter, il donne un cadre pour réaliser l'électrodynamique quantique au moyen de photons composés de deux « singletons » de Dirac [6]; il espérait, en poursuivant dans cette voie, résoudre ainsi plusieurs énigmes de la physique des particules.

Il a écrit plusieurs articles sur des EDP qui intéressent immédiatement la physique : équations de Yang-Mills, Navier-Stokes, Maxwell-Dirac [7]. Il s'est d'abord surtout intéressé à des aspects formels de ces équations, montrant par exemple qu'après un changement de coordonnées, formel ou dans un espace fonctionnel convenable suggéré par les symétries sous-jacentes, le problème est linéarisable ou complètement intégrable, un peu dans l'esprit de cette « philosophie » des déformations (sans toutefois perdre de vue que la physique ne se contente pas toujours de développements asymptotiques formels). Cela n'est évidemment pas toujours la fin du problème et a souvent eu pour effet d'irriter prodigieusement certains mathématiciens spécialistes des EDP, mais c'est évidemment une des premières choses à regarder, d'autant plus que c'est non trivial. Le traitement approfondi des équations de Maxwell-Dirac [7] (électrodynamique classique) en est un exemple typique. En tout cas ces articles sont aussi une source d'inspiration, tant pour les mathématiques que pour la physique théorique.

A son arrivée en France, dans les années 60, le milieu des jeunes scientifiques français est dominé par les normaliens de la rue d'Ulm, milieu policé, structuré par des hiérarchies établies dès l'entrée à l'école et dont l'avenir montrera quelquefois la fragilité. Le tempérament explosif de Moshé Flato, son indépendance d'esprit, son franc-parler, son peu de respect des conventions sociales, lui ont alors valu quelques déboires, notamment avec la communauté des physiciens. Jusqu'à la fin il suscitera des réactions contradictoires, y compris avec un des auteurs (LBdM), avec qui son opuscule populaire sur les mathématiques [8] engendra un échange animé à propos du rôle de Bourbaki dans la pandémie des mathématiques modernes.

Il n'avait pas toujours raison, tant s'en faut, mais jamais tout à fait tort non plus et ceux qui ont fait l'effort de dépasser le caractère abrupt, excessif, de certains propos se sont aperçus (quelquefois rétrospectivement!) de l'intelligence et de la finesse de bien de ses analyses. Peu sensible aux modes et difficilement influençable, il savait à merveille démonter les alibis scientifiques et mettre à nu le caractère politique de telle ou telle position.

Voyageur infatigable, il avait beaucoup d'amis, dans le monde entier et bien au-delà des milieux scientifiques. Avec eux il s'est toujours montré d'une générosité sans limites, ne demandant rien en retour.

Personnage inclassable de son vivant il serait bien présomptueux de vouloir aujourd'hui figer son image.

## Bibliographie

- [1] M. Flato : Ionic energy levels in trigonal and tetragonal fields. *Journal of Molecular Spectroscopy* **17** (1965), 300-324.
- [2] M. Flato, J. Simon : Separate and joint analyticity in Lie groups representations *Journal of Functional Analysis*, **13** (1973), 268-276.

- [3] M. Flato, J. Simon et al. : Simple facts about analytic vectors and integrability, *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure*, 4<sup>e</sup> série, **5** (1972), 432-434.
- [4] M. Flato, F. Bayen, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, D. Sternheimer : Deformation theory and quantization, I Deformations of symplectic structures, II Physical Applications, *Ann. Physics* **111** (1978), 61–110 & 111–151.
- [5] M. Flato, A. Connes, D. Sternheimer : Closed star-products and cyclic cohomology, *Lett. Math. Phys.* **24**, (1992) 1–12.
- [6] M. Flato, C. Fronsdal : Composite Electrodynamics, *Journal of Geometry and Physics* **5** (1988), 37-61 (en l'honneur d'I.M. Gelfand).
- [7] M. Flato, J. Simon, E. Taflin : The Maxwell-Dirac equations : the Cauchy problem, asymptotic completeness and the infrared problem (x + 312 pages), *Memoirs of the American Mathematical Society*, **127**, n° 606 (1997).
- [8] M. Flato : *Le Pouvoir des Mathématiques*. Hachette (1990).

*L. Boutet de Monvel, O. Mathieu, G. Schiffmann*

## André Lichnérowicz (1915–1998)

---

André Lichnérowicz est né le 21 janvier 1915 à Bourbon l'Archambault. Ses parents enseignent l'un les lettres, l'autre les mathématiques. En dépit de son nom, il comptait beaucoup plus d'ascendants auvergnats que polonais.

Il entre à 18 ans à l'ENS de la rue d'Ulm et fut avec Jacques Dufresnoy l'un des caciques de la promotion 1933. à la fin de l'année scolaire 1936-1937, il assura au pied levé la suppléance d'une classe de Spéciales au lycée St Louis. Mais dès avant de passer l'agrégation, il avait entrepris des recherches sous la direction d'Elie Cartan et il soutenait sa thèse d'état dès 1939.

*André Lichnérowicz*

En 1941, il est nommé maître de conférences de mécanique à la faculté des sciences de Strasbourg, qui continue à porter ce nom mais est repliée à Clermont-Ferrand et est fort mal vue de l'occupant, qui y effectue en novembre 1943 une rafle au cours de laquelle Lichnérowicz est arrêté mais, Dieu merci, en réchappe.

à la fin de la guerre, la faculté retourne à Strasbourg et c'est en 1947 qu'il publie son premier traité : *Algèbre et analyse linéaires* présentant des théories fort peu enseignées à cette époque.

En 1949, il est nommé à la faculté des sciences de Paris, où il crée le certificat de « Méthodes mathématiques de la physique » et en 1952 il est nommé au Collège de France dans une chaire de Physique mathématique où il enseignera jusqu'en 1986, mais il reste scientifiquement actif jusqu'à sa mort le 11 décembre 1998.

Mathématicien particulièrement brillant, il eut parmi ses collègues la singularité de ne pas s'enfermer dans la tour d'ivoire des mathématiques, si ensorcelante soit-elles et de montrer un intérêt actif pour le rôle des sciences et particulièrement des mathématiques dans la vie de la cité : sans appartenir à aucune formation politique, il fit de la politique au sens le plus noble du terme.

Il fut en particulier, l'organisateur des congrès de Caen (1956) et d'Amiens (1960) dont l'objet était de sensibiliser à l'indispensable réforme des universités et il fut de décembre 1966 à juin 1973 le président de la fameuse « commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques » que tout le monde appela « commission Lichnérowicz ».

*André Revuz*

*Un dossier sur l'œuvre scientifique d'André Lichnérowicz et sur sa participation à la réforme des mathématiques des années 60 paraîtra dans le prochain numéro de la Gazette.*

★ ★ ★

## Gian-Carlo Rota (1932–1999)

---

Gian-Carlo Rota, professeur au MIT, est décédé brutalement durant le week-end du 18 avril 1999. Il est né en 1932 à Vigevano (Italie) et a immigré aux Etats-Unis en 1950. Il était titulaire de deux chaires au MIT, l'une en mathématiques depuis 1959 (devenue récemment la chaire Norbert Wiener), l'autre en philosophie (depuis 1972). C'était en effet un spécialiste reconnu d'Husserl et d'Heidegger. Au département de mathématiques du MIT où il enseignait souvent

SMF – Gazette – 81, Juillet 1999

les probabilités et la combinatoire, il était très aimé par ses collègues et respecté de ses étudiants. En tant que mathématicien, il a su, dès les années soixante, promouvoir les méthodes et le point de vue combinatoires. Comme l'explique Richard Stanley, un de ses anciens élèves, il restera, depuis ses travaux fondateurs sur les fonctions de Möbius et les ensembles partiellement ordonnés, l'un des principaux artisans du passage, dans les années soixante, de la combinatoire « d'un passe-temps pour mathématiciens » à une branche solide des mathématiques, comme l'attestent les nombreux développements actuels. Ses dernières 30 années ont été consacrées à des recherches en théorie des invariants, algèbres de Hopf en combinatoire et à la théorie des opérateurs linéaires (calcul ombra) Il était rédacteur fondateur des trois revues :

- *Journal of Combinatorial Theory* (depuis 1966),
- *Advances in Mathematics* (depuis 1967) et
- *Advances in Applied Mathematics* (depuis 1979) ;

et de plusieurs séries de livres comme *Mathematicians of our time* (MIT Press) ; *Contemporary mathematician* (Birkhäuser Boston) et *Encyclopedia of mathematics* (Cambridge University Press). La commémoration qui a réuni au MIT le 31 avril plusieurs centaines de ses collègues et étudiants (anciens et récents), a été un moment d'hommage, empreint d'une émotion intense, à un grand enseignant et un homme de grande culture. Le meilleur hommage à rendre à la mémoire de Gian-Carlo Rota est sans doute de renvoyer à ses publications récents, de et sur les mathématiques.

#### ***Lectures recommandées :***

- *Discrete thoughts*, by Mar Kac, Jack Schwartz, Gian-Carlo Rota, Birkhäuser 1992.
- *Indiscrete thoughts*, by Gian-Carlo Rota, Birkhäuser 1997.
- Les ambiguïtés de la pensée mathématique, (ici même, sept.1990, pp.54-64), traduit du journal *Synthesis*, où G.-C. Rota a publié de nombreux articles sur la philosophie des mathématiques.
- Introduction aux travaux combinatoires : plusieurs articles dans *The Mathematical Intelligencer*
- Interview de G.C. Rota pour le congrès international des mathématiciens, Berlin, 1999, Journal de la DMV.

*Jean-Michel Kantor*



# LIVRES

---

---

## **Gröbner Bases an Applications**

EDITEURS B. BUCHBERGER ET F. WINKLER  
London Mathematical Society, LNS 251, 1998

Ce livre est d'une certaine façon l'aboutissement des événements qui ont eu lieu durant l'année 97-98 où a été organisé le « Special year on Gröbner Bases ».

Durant cette année a eu lieu en particulier un cours intensif destiné aux jeunes chercheurs et une conférence : « 33 years of Gröbner bases ».

On trouve donc dans ce volume, outre une partie disons pédagogique (tutorials) sur les bases de Gröbner, introduites (à tout seigneur tout honneur) par B. Buchberger, et qui donne un aperçu sur les nombreux champs d'application de ces bases de Gröbner, un certain nombre d'articles qui décrivent des travaux récents de recherche sur ces sujets.

C'est donc un livre de référence sur les bases de Gröbner, varié et intéressant.

*A. Szpirglas, Université de Poitiers*

---

## **Théorie de Galois, 122 exercices corrigés, niveau 1 . Théorie de Galois, 115 exercices corrigés, niveau 2**

MOHAMED AYARD  
Ellipses, 1997

Le premier s'adresse aux étudiants de second cycle de mathématiques (licence ou maîtrise), le second aux étudiants de maîtrise.

L'ensemble des deux tomes est recommandable à tous ceux qui préparent l'agrégation de mathématiques.

Chacun des tomes contient un chapitre central de théorie de Galois proprement dite, précédé de généralités sur les extensions (corps de décomposition, normalité, séparabilité).

Le tome 1 se conclut par un dernier quart traitant de cyclotomie, d'extensions abélienne, d'extensions par radicaux et d'extensions transcendentes.

Le tome 2 reprend ces derniers thèmes auxquels s'ajoutent un peu de théorie de Kummer, puis des exercices sur les extensions linéairement disjointes et les polynômes à plusieurs indéterminées. Il se termine par un chapitre traitant d'éléments entiers sur un anneau.

Les livres d'exercices sur ce sujet sont rares ; cela rend ces livres précieux. Les exemples nombreux permettent une approche solide et rapide des problématiques de la théorie. Certains exercices sont faits de résultats importants, ce qui permet d'insister sur l'importance de leurs preuves.

A la fin de chaque tome est consignée une dizaine de problèmes permettant à l'étudiant de faire le point.

*N. Pouyanne, Université de Versailles, Saint-Quentin*

---

## **Introduction to Functional Analysis**

REINHOLD MEISE-DIETMAR  
Oxford Science, 1997

Ce livre est plus qu'une introduction à l'analyse fonctionnelle. Après quelques rappels de topologie dans une première partie, la deuxième traite des grands théorèmes, Hahn-Banach,

SMF - Gazette - 81, Juillet 1999

Baire et ses conséquences. Dans cette partie les définitions des espaces de Banach, de Hilbert, du dual, de la réflexivité sont données. Ces notions sont appliquées dans l'étude des espaces  $L^p$ , des fonctions continues, des espaces de Sobolev (après des rappels sur la transformée de Fourier).

La troisième partie traite de l'analyse spectrale. Naturellement, les auteurs traitent d'abord des opérateurs compacts, puis des opérateurs normaux bornés via la théorie de Gelfand, enfin le cas des opérateurs auto-adjoint non bornés est présenté.

La quatrième partie est une étude des espaces vectoriels topologiques. Différents cas sont considérés, espaces de Fréchet, espaces nucléaires, étude de l'espace dual. Les espaces de suites (à poids) sont étudiés assez extensivement. Ce cadre n'est pas purement abstrait puisqu'il contient comme cas particulier les fonctions  $C^\infty$  sur le tore et la classe de Schwartz. C'est la partie qui amuse le plus les auteurs et elle contient certains de leurs résultats récents et inédits.

Chaque chapitre se termine par une dizaine d'exercices de niveaux variés.

Les trois premières parties sont classiques, les preuves m'ont semblé claires et concises. La dernière partie peut servir de référence sur un sujet qui n'est pratiquement plus enseigné en France.

*L. Robiano, Université de Versailles, Saint-Quentin*

### **Eléments d'analyse fonctionnelle, Cours et exercices**

FRANCIS HIRSCH ET GILLES LACOMBE

Masson, Enseignement des Mathématiques, 1997

Issu d'un cours de maîtrise, ce livre, très agréable à lire aborde les bases essentielles de l'analyse fonctionnelle en s'appuyant sur un minimum de prérequis (programme de licence). La première partie, espaces fonctionnels et leurs duals, est organisée en quatre chapitres : espace des fonctions continues sur un compact, espaces localement compacts et mesures de Radon, espaces de Hilbert, espaces  $L^p$ . La deuxième partie est consacrée aux opérateurs (partout définis) : théorie spectrale, opérateurs compacts. La troisième partie aborde la théorie des distributions en quatre chapitres : définitions et exemples, multiplication et dérivation, convolution, Laplacien sur un ouvert (borné de  $R^d$ ). Les solutions fondamentales des opérateurs différentiels classiques sont étudiées et le dernier chapitre est consacré au problème de Dirichlet. De nombreux résultats des deux premières parties sont ainsi réinvestis.

De nombreux exercices détaillés, applications et aussi compléments de cours, sont proposés à la fin de chaque chapitre.

Cet ouvrage destiné à des étudiants de maîtrise devrait intéresser les agrégatifs et peut aussi servir de première référence pour des étudiants de troisième cycle.

*J. Pian, Université de Versailles, Saint-Quentin*

### **Topologie**

H. QUEFFÉLEC

Masson, 1998

Dans son nouveau livre, Hervé Queffélec présente de manière concise et efficace les outils de topologie contenus dans le programme du deuxième cycle universitaire de mathématiques. L'auteur a choisi de restreindre le nombre de notions de topologie générale étudiées en se plaçant le plus souvent dans le cadre des espaces métriques. Cette restriction lui a permis d'approfondir à travers les exemples la compréhension des outils introduits et d'aller relativement loin dans les applications. Ce choix rend le livre facilement accessible et agréable à lire. A ceci s'ajoute une présentation claire et précise du cours et de nombreux exercices divers, intéressants et complètement corrigés. Il s'agit d'une excellente introduction à la topologie générale donnant les bases nécessaires pour aborder les ouvrages plus spécialisés ou développant les applications classiques en analyse fonctionnelle comme l'ouvrage récent de Hirsch et Lacombe dans la même collection.

*M. Besbes, Université de Versailles, Saint-Quentin*

---

**An Invitation to Arithmetic Geometry**

DINO LORENZINI

Graduate Studies in Mathematics, vol. 9, American Mathematical Society, 1996–97

Ce livre se situe au confluent de la théorie algébrique des nombres, de l'algèbre commutative, de la géométrie algébrique et de la géométrie arithmétique : en guise d'invitation à la géométrie arithmétique, Dino Lorenzini propose dans ce livre l'étude comparée des anneaux d'entiers de corps de nombres et des courbes algébriques. C'est la fameuse analogie entre « corps de nombres » et « corps de fonctions » (d'une variable). Le concept central est ici celui d'anneau de Dedekind. Leurs propriétés élémentaires sont étudiées : factorisation des idéaux, extensions, valuations, discriminant et ramification, groupe de classes d'idéaux.

Comme ce livre se veut introductif, aucun bagage de géométrie algébrique n'est supposé connu du lecteur et l'auteur la présente de manière à mon avis un peu surprenante : d'un côté, la plupart des courbes (affines ou projectives) sont planes, et donc définies par une équation polynomiale ; d'un autre, la définition générale de courbe (lisse) qu'il donne est celle d'un corps  $K$  (de degré de transcendance 1 sur un corps de base  $k$ ) et d'un ensemble de valuations de  $K$  triviales sur  $k$ . Cette dernière définition n'est pas si géométrique que cela...

Le théorème de Riemann–Roch pour les courbes complètes lisses est démontré, ainsi que le théorème de dualité et la formule de Riemann–Hurwitz. Deux chapitres sont consacrés aux fonctions zêta. Le premier traite à la fois des corps de fonctions et des corps de nombres. L'équation fonctionnelle et la formule (analytique) du nombre de classes sont énoncées et démontrées dans le cas géométrique : l'auteur n'est pas allé jusqu'à donner les démonstrations d'analyse nécessaires en théorie algébrique des nombres. De même, le théorème des unités de Dirichlet n'est qu'énoncé alors que son analogue géométrique (comparaison des groupes de classes d'une courbe complète et d'un ouvert non vide) est démontré. Le second chapitre prouve l'hypothèse de Riemann pour les courbes algébriques selon la méthode de Stepanov. L'auteur donne aussi quelques cas explicites à base de sommes de Jacobi (certaines courbes hyperelliptiques).

Un chapitre final survole quelques sujets plus avancés (conjecture de Mordell, variétés abéliennes, jacobiniennes, représentations galoisiennes, conjectures de Weil et problème de Galois inverse). Un appendice rappelle essentiellement sans démonstration quelques résultats de théorie des corps (lemme de Gauß, théorie de Galois, corps finis). Enfin, la plupart des chapitres se termine par de nombreux exercices, environ 200 au total. Un index clôt les 397 pages d'un livre très riche, parfois touffu et fatalement un peu trop gros pour nos cours de DEA semestriels.

*A. Chambert-Loir, Université Paris 6*

---

**Topics in Classical Automorphic Forms**

H. IWANIEC

Graduate Studies in Math., 17, A.M.S., 1997

Notons  $\mathbb{H}$  le demi-plan de Poincaré des nombres complexes de parties imaginaires  $> 0$ . Soit  $k$  un entier pair  $\geq 2$ . Une forme modulaire cuspidale (ou parabolique) de poids  $k$  pour le groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  est une fonction  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ , holomorphe, vérifiant la relation

$$(*) \quad f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)$$

pour tous  $z \in \mathbb{H}$  et  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ , et telle que  $f(z)$  tende vers 0 quand  $Im(z)$  tend vers  $+\infty$ .

Cette définition classique peut être généralisée de diverses manières. On peut remplacer le groupe  $SL_2(\mathbb{Z})$  par un groupe de congruence ou même un groupe « fuchsien », glisser un caractère dans la relation (\*), élargir la condition de croissance, ce qui introduit les séries d'Eisenstein. On peut introduire des formes de poids demi-entier ou remplacer la condition d'holomorphicité par celle d'être fonction propre du laplacien, ce qui conduit aux formes de Maass. On peut considérer les formes modulaires comme des fonctions sur  $SL_2(\mathbb{R})$ , puis

remplacer  $SL_2$  par un groupe réductif quelconque, cadre dans lequel se développe la « philosophie » de Langlands.

Ce qui confère à l'étude des formes modulaires un intérêt considérable est qu'elles sont intimement liées à d'autres objets de nature arithmétique. Citons-en trois : les formes quadratiques définies positives sur un  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel (théorie des séries thêta), les courbes elliptiques définies sur  $\mathbb{Q}$ , les représentations de dimension 2 du groupe de Galois de  $\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ , où  $\bar{\mathbb{Q}}$  est une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ . Hecke a introduit des opérateurs  $T_n$  pour tout entier  $n \geq 1$  qui agissent sur l'espace des formes modulaires cuspidales. Ces opérateurs se diagonalisent dans une même base. A tout élément  $f$  de cette base est donc associée une famille de valeurs propres  $(\lambda_f(n))_{n \geq 1}$ . L'étude de ces familles et de leurs propriétés arithmétiques est le cœur du problème.

Après bien d'autres, le livre d'Iwaniec nous offre un large panorama de la théorie classique des formes modulaires. Il évoque ainsi les groupes fuchsien, les séries d'Eisenstein, les séries de Poincaré, les opérateurs de Hecke, les fonctions  $L$  attachées aux formes modulaires et leurs équations fonctionnelles, les théorèmes réciproques, les courbes elliptiques, les séries thêta, les formes modulaires de poids 1 et leur connexion avec les fonctions  $L$  d'Artin, les fonctions  $L$  de paires etc. Tout cela n'est pas très nouveau et plusieurs questions sont seulement survolées. Néanmoins, le caractère un peu exhaustif de ce recensement des divers aspects de la théorie rendent ce livre utile au lecteur désireux de s'investir dans ce domaine. L'ouvrage est facile à lire et possède une qualité appréciable : les énoncés sont précis.

Mais l'originalité de ce livre vient des deux ou trois chapitres concernant la spécialité de l'auteur, à savoir les questions d'estimations, de majorations. La plus célèbre question dans ce registre est la conjecture de Ramanujan-Petersson. Soit  $f$  une forme modulaire cuspidale de poids  $k \geq 2$  pour un groupe de congruence. Notons  $a_f(n)_{n \geq 1}$  ses coefficients de Fourier.

Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $n \geq 1$ ,  $|a_f(n)| \leq cn^{\frac{k-1}{2} + \varepsilon}$ . Ceci a été prouvé par Deligne, la démonstration nécessite des résultats profonds de géométrie algébrique. Mais la généralisation à d'autres situations (par exemple les formes de Maass) reste ouverte. D'autre part, de nombreuses questions du même genre se posent, qui justifient le développement de méthodes spécifiques. Il arrive fréquemment que certaines majorations soient inaccessibles, mais que l'on puisse les attraper « en moyenne ». Par exemple, pour le problème ci-dessus, s'il est très difficile d'estimer  $|a_f(n)|$ , il l'est nettement moins d'estimer

$$\sum_{n \leq N} |a_f(n)|^2.$$

Iwaniec est un spécialiste de ces questions, ce qui nous vaut deux chapitres particulièrement intéressants sur les estimations des sommes de Kloosterman et des coefficients des formes modulaires. Il y revient un peu plus tard à propos des séries thêta avec une brève échappée sur la méthode du cercle. On regrette un peu que l'auteur n'ait pas développé davantage ces questions. En tout cas, ces passages confèrent à ce livre une singularité qui le distingue de bon nombre de ses prédécesseurs.

*J.-L. Waldspurger, CNRS/Université de Paris 7*

### **Brownian motion, obstacles and random media**

ALAIN-SOL SZNITMAN

Springer Monographs in Mathematics, 1998

Il s'agit d'un livre d'un niveau très avancé qui présente des résultats récents concernant des problèmes liés à l'évolution aléatoire d'une particule dans un environnement qui est lui-même aléatoire. Ce sujet a connu de nombreux développements durant ces dernières années (en grande partie dûs à l'auteur et à ses élèves). Ce livre est particulièrement bien venu dans la mesure où il commençait à devenir difficile pour un « non-spécialiste » d'avoir une vue d'ensemble sur ce sujet, en l'absence de livre de référence (ce que celui-ci est appelé à devenir).

Un des modèles étudiés est le suivant. On répartit des obstacles aléatoirement dans l'espace de telle sorte que la présence d'un obstacle ou non à un certain lieu est indépendante de cet endroit et n'influence pas la présence ou non d'un autre obstacle à un autre endroit (on dit

alors que ces obstacles sont poissonniens en référence à la loi de Poisson). Une fois que cet environnement aléatoire est déterminé, on fait partir un mouvement brownien d'un certain point fixé et l'on conditionne (en un sens bien précis) par exemple sa trajectoire à éviter tous les obstacles. On souhaite alors étudier le comportement (par exemple le comportement asymptotique lorsque le temps tend vers l'infini) de la trajectoire de la particule.

Malgré le fait qu'il s'agisse de questions très naturelles et de prime abord simples, les problèmes deviennent vite très complexes. Afin de pouvoir les étudier, il faut d'abord comprendre et combiner un certain nombre d'outils mathématiques élaborés (par exemple le calcul stochastique et la formule de Feynman-Kac, la théorie du potentiel, des estimations de valeurs propres principales du Laplacien dans des domaines compliqués, la théorie des grandes déviations etc.). La première partie du livre présente de manière claire, autonome et didactique ces différents outils. Cette partie est particulièrement utile car elle regroupe de manière concise des résultats variés qu'il était jusqu'à présent nécessaire d'aller piocher dans divers ouvrages spécialisés.

Dans une seconde partie un peu plus longue, l'auteur s'intéresse à l'étude proprement dite du mouvement brownien en présence d'obstacles poissonniens. Il a choisi une approche didactique (en insistant sur les idées et techniques principales) plutôt qu'une vision encyclopédique. Sans sacrifier la précision nécessaire à la compréhension des démonstrations compliquées, les preuves sont toujours commentées par explications des idées sous-jacentes. L'auteur présente tout d'abord des techniques et outils (comme la méthode d'« agrandissement des obstacles » et les exposants de Lyapounov) puis il s'intéresse aux phénomènes dits de « localisation » et de « confinement » : On peut dire par exemple heuristiquement qu'une particule « typique » aura tendance à rester longtemps dans certaines parties « favorables » de l'espace. Le livre s'achève avec un court chapitre présentant une vue d'ensemble sur les résultats et certains problèmes ouverts reliés à la thématique de l'environnement aléatoire.

*W. Werner, Université Paris-Sud*

### **Birational geometry of algebraic varieties**

J. KOLLAR ET S. MORI

Cambridge Tracts in Mathematics 134, Cambridge University Press, 1998

Ce livre expose la théorie des modèles minimaux de la géométrie algébrique complexe, issue essentiellement des travaux de S. Mori, Y. Kawamata, V. Shokurov et Y. Miyaoka durant la décennie 1980-90. En dimension deux, elle se réduit aux assertions classiques suivantes : si  $X$  est une surface projective complexe lisse et si son fibré canonique  $K_X$  n'est pas « nef » (ie : s'il existe sur  $X$  une courbe effective  $C$  telle que  $K_X \cdot C < 0$ ), alors  $X$  admet une « contraction extrême »  $\varphi : X \rightarrow Y$  sur  $Y$ , possédant les propriétés suivantes :  $Y$  est une variété projective lisse, telle que :  $\rho(X) = \rho(Y) + 1$ , et  $(-K_X)$  est  $\varphi$ -ample. Il y a trois types de telles contractions : une fibration birationnelle (la contraction d'une (-1)-courbe) et deux fibrantes (le réglage de  $X$  sur une courbe et l'application constante si  $X = \mathbb{P}_2$ ).

Les contractions non fibrantes peuvent être itérées ( $X$  reste une surface lisse) et après un nombre fini de contractions de (-1)-courbes on obtient une surface  $X'$ ,  $X' = \mathbb{P}_2$ , réglée ou « minimale » (ie :  $K_{X'}$  est nef, auquel cas  $K_{X'}$  est engendré par ses sections globales).

Le programme des modèles minimaux consiste alors en toute dimension à :

- A. Construire une contraction extrême si  $K_X$  n'est pas nef.
- B. Itérer (si possible) ces contractions pour aboutir en un nombre fini d'étapes à  $X'$  birationnelle à  $X$  telle que : ou bien  $K_{X'}$  est nef, ou bien :  $X'$  admet une contraction extrême fibrante  $\varphi' : X' \rightarrow Y'$  (à fibres génériques Fano avec  $Y'$  de dimension plus petite).

En dimension trois déjà, deux phénomènes apparaissent, qui introduisent des complications considérables, à la fois techniques et conceptuelles, dans la réalisation de ce programme :

- (1)  $Y$  n'est plus lisse, en général ; elle peut avoir des singularités dites « terminales ». Ceci conduit naturellement à se placer dans la catégorie des variétés  $\mathbb{Q}$ -factorielles (à singularités terminales). Ces notions sont introduites au §2 de manière détaillée, ainsi que l'importante notion de « discrédance » due à M. Reid, qui mesure les singularités de manière adéquate dans ce contexte. Pour  $X$ , variété  $\mathbb{Q}$ -factorielle terminale avec  $K_X$  non nef, il existe une contraction extrême  $\varphi : X \rightarrow Y$ , ce qui réalise en toute dimension la partie A du programme dans ce

cadre. Les démonstrations sont exposées de manière transparente aux §§ 2 et 3 du livre, basées sur l'approche cohomologique de Kawamata, qui procède par récurrence sur la dimension de  $X$ , par une utilisation subtile de raffinements du théorème d'annulation de Kodaira. Le §1 expose l'approche géométrique originale de S. Mori, basée sur la théorie des déformations des courbes en caractéristique  $p > 0$ , qui permet de construire des courbes rationnelles contractées par  $\varphi$ .

(2) Il existe des contractions extrémales birationnelles « petites » (ie : dont le lieu exceptionnel dans  $X$  est de codimension deux ou plus. Ce cas n'existe donc pas pour les surfaces). Alors  $Y$  n'est plus  $\mathbb{Q}$ -factorielle et on ne peut itérer le processus. Le programme consiste alors dans la construction du « flip »  $\varphi^+ : X^+ \rightarrow Y$  de  $\varphi : X \rightarrow Y$ ; il s'agit d'une transformation birationnelle  $\psi : X \rightarrow X^+$  isomorphe en codimension 1, avec  $X^+$  est une variété  $\mathbb{Q}$ -factorielle terminale et où  $K_{X^+}$  est  $\varphi^+$ -ample. On continue le programme en remplaçant  $X$  par  $X^+$ .

L'existence des « flips » et l'aboutissement du programme en un nombre fini d'étapes ne sont connus qu'en dimension trois, grâce à la classification par S. Mori des petites contractions, basée sur la connaissance fine des singularités elliptiques et canoniques des surfaces. Cette partie est la plus difficile du programme.

Les §§ 4-7 du livre exposent la construction des « flips » (dans le cas « semi-stable », du moins, mais en version « log » où l'on considère, non  $K_X$ , mais plus généralement un diviseur du type  $(K_X + \Delta)$ , nécessité dans les récurrences sur la dimension.

Plus précisément, le §4 (resp. 5) établit les résultats utilisés sur les singularités canoniques et elliptiques des surfaces (resp. en dimension trois où ces singularités apparaissent comme sections hyperplanes génériques locales des singularités canoniques de Gorenstein). Le §6 construit les « flops » terminaux d'abord, puis canoniques ensuite par descente « crépante » (les « flops » sont les flips dans le cas particulier où  $K_X$  est  $\mathbb{Q}$ -trivial, relativement à  $\varphi$  et servent d'intermédiaires dans la construction de ces derniers en général). Le §7 enfin construit les flips semi-stables (cette hypothèse permet de traiter  $X$  comme une famille de surfaces) et en fournit trois applications à des problèmes de modules.

Pour la première fois, la totalité des techniques utilisées à ce jour dans la théorie des modèles minimaux est exposée dans un livre, en ne supposant connus que les résultats réellement standards de la géométrie algébrique.

Par exemple, les résultats sur les singularités des surfaces sont établis en détail, sans admettre aucun résultat « bien connu ». Les démonstrations sont rédigées avec un soin extrême, de manière transparente et sont aussi simples que possible. Ce livre rend donc enfin accessibles à un large public ces développements spectaculaires, mais dont la difficulté technique et les préliminaires dispersés dans la littérature avaient empêché (en particulier en France qui a accumulé un retard notable en ce domaine) la diffusion au-delà d'un cercle beaucoup trop restreint de spécialistes.

*F. Campana, Université de Nancy*

---

### Interpolation, Identification and Sampling

JONATHAN R. PARTINGTON

Oxford, LMS monographs, 1997

---

Comme l'indique le titre, les trois mots clés de l'ouvrage de J.R. Partington sont : interpolation, reconstruction, échantillonnage ; on pourrait y ajouter les mots robustesse, robustesse restreinte comme nous le verrons plus loin. Le contexte est toujours le suivant : on a un espace de Banach  $X$  de fonctions analytiques d'une variable, définies sur un domaine  $E$  et vérifiant des conditions de croissance ou de régularité quand la variable tend vers la frontière du domaine (typiquement  $X$  est l'espace de Hardy  $Y_p$  à spectre de fréquence limité) ; on a également une suite  $(z_k)$  de points de  $E$  (quelquefois une partie plus compliquée de  $E$ ) ; l'interpolation consiste à trouver la ou les  $f \in X$  ayant des valeurs imposées sur les  $z_k$  ; la reconstruction (quand on sait que les  $f(z_k)$  déterminent  $f$ ) consiste à trouver des algorithmes (linéaires ou non) permettant de reconstituer  $f$  à partir des  $f(z_k)$ , et si possible de façon robuste, c'est-à-dire qu'une erreur sur les valeurs observées  $f(z_k)$  n'affectera pas trop l'algorithme ; un algorithme peut manquer de robustesse mais avoir cependant une robustesse restreinte au sens suivant : si on sait déjà que  $f \in K$ , une sous-classe de  $X$ , alors l'algorithme est robuste sur  $f$  ; un exemple typique donné par Partington est celui de l'interpolation de

Lagrange  $L_n$  : la norme de  $L_n$  explose lentement vers l'infini, si bien que, quand  $f$  appartient à une certaine sous-classe  $K$  de  $H_\infty$ , la forte petitesse (selon une estimation de Babenko) de la  $n$ -ième largeur (width) de  $K$  vient compenser la faible explosion de  $L_n$  et que  $L_n(f) \rightarrow f$  dès que  $f \in K$ . Enfin, l'échantillonnage est une variante de la reconstruction dans le cas où  $E = \mathbb{R}$  et où les points  $z_k$  sont régulièrement espacés :  $z_{k+1} - z_k$  est constant ; la généralisation au cas où  $z_{k+1} - z_k$  est à peu près constant (à la fois majoré et minoré) est également traitée.

L'ouvrage est divisé en huit chapitres ; les deux premiers chapitres exposent un matériel plus ou moins classique sur les espaces de Hardy et les opérateurs entre ces espaces : produits de Blaschke, théorème de factorisation de Riesz, théorème de Fatou et sa généralisation par Rudin-Carleson (un compact de mesure nulle du bord du disque est d'interpolation isométrique pour l'algèbre du disque  $A$ ), fonctions intérieures et extérieures.

Ensuite sont décrits les opérateurs de Toeplitz et de Hankel : le point de vue choisi pour ces derniers est qu'ils agissent de  $H_2$  vers son orthogonal  $H_2^\perp$  et que si  $(a_{ij})$  est leur matrice sur les bases canoniques,  $(a_{ij})$  ne dépend que de  $i + j$  ; l'auteur démontre les théorèmes fondamentaux de Nehari et Hartman :  $\Gamma$  est de Hankel si et seulement si  $a_{ij} = \tilde{\psi}(-i - j)$ , où le symbole  $\psi$  est dans  $L_\infty$  et peut être choisi de manière que  $\|\psi\|_\infty = \|\Gamma\|$  ;  $\Gamma$  est compact si et seulement si le symbole  $\psi$  peut être somme d'une fonction analytique bornée et d'une fonction continue ; le théorème de Nehari intervient à son tour dans la preuve d'un théorème auquel Partington (s'inspirant du livre de Nikolskii sur le shift) fait jouer un rôle central : le théorème de commutation de Sarason. Ce théorème permet d'obtenir simplement plusieurs résultats : par exemple, les théorèmes d'interpolation de Nevanlinna-Pick ou de Carathéodory-Fejér, ou bien la caractérisation des suites  $(z_k)$  du disque unité pour lesquelles la suite normalisée des noyaux reproduisants (dans  $H_2$ ) correspondants est une base inconditionnelle de l'espace qu'elle engendre : ce sont exactement les suites d'interpolation au sens de Carleson.

Dans la suite de l'ouvrage, les opérateurs de Toeplitz ou de Hankel continuent à jouer un grand rôle ; par exemple, les opérateurs de Toeplitz interviennent dans la preuve d'un théorème de Patil : si  $K$  est un compact de mesure positive du bord du disque (donc un ensemble déterminant pour  $H_2$ ), la formule de reconstruction de Goluzin-Krylov de  $f$  à partir de ses valeurs observées sur  $K$  converge non seulement sur les compacts du disque mais encore au sens de la norme  $H_2$ . Comme on l'a déjà dit, la robustesse est une préoccupation constante : elle peut avoir lieu avec des algorithmes linéaires, comme la formule d'interpolation de Jackson (qui jouait déjà un rôle important dans les travaux de S. Bernstein sur les séries de Fourier absolument convergentes) ; mais ces derniers se révèlent parfois insuffisants et l'auteur développe une méthode robuste non linéaire de reconstruction basée sur un principe de minimax abstrait : étant donné une suite uniformément bornée  $(\psi_n)$  de formes linéaires sur un espace normé  $X$ , on peut reconstruire de façon robuste  $x \in X$  à partir des « valeurs observées »  $\psi_n(x)$  si et seulement si la suite  $(\psi_n)$  norme presque l'espace  $X$ . Dans les cas qui nous intéressent, cela fait jouer un rôle privilégié aux suites  $(z_n)$  du disque telles que  $\sup_n |f(z_n)|$  soit de l'ordre de grandeur de  $\|f\|_\infty$  pour  $f \in A$ , l'algèbre du disque.

L'échantillonnage enfin pour les fonctions à spectre de fréquence limité est abordé au chapitre 7, avec l'outil du théorème de Paley-Wiener et la formule de Whittaker-Kotelnikov-Shannon dont le caractère robuste s'exprime par une inégalité du type « frame » :

$$A\|f\|^2 \leq \sum |f(t_k)|^2$$

où les  $t_k$  régulièrement espacés sont les points d'observation et  $A$  une constante positive. Le dernier chapitre est consacré à des applications (notamment aux systèmes différentiels linéaires retardés) et prétend infirmer la célèbre phrase de Hardy dans son apologie d'un mathématicien : « I have never done something "useful". »

L'ouvrage de J.R. Partington, rédigé avec la qualité qu'on retrouve dans toutes les monographies d'Oxford, mérite de grands éloges : on y trouve les idées directrices, l'historique, des preuves claires et complètes ; le lecteur pourra y apprendre une foule de résultats et aussi de techniques empruntées à des domaines variés : théorie des opérateurs, méthodes probabilistes ou algébriques (théorie des corps finis) pour évaluer le coût de certains algorithmes, méthodes hilbertiennes (frames, ondelettes) variées, méthodes non linéaires (minimax, théorème antipodal de Borsuk), etc. De plus, une bibliographie de 211 titres, presque « up-to-date », vient compléter le livre ; même si l'on peut faire la (petite) réserve que l'ouvrage paraît parfois

un peu décousu d'un chapitre à l'autre et qu'on ne voit pas toujours clairement où l'on va, cette monographie est à recommander chaudement aussi bien au thésard débutant qu'au mathématicien expérimenté.

*H. Queffélec, Université de Lille 1*

---

### Geometry of sets and measures in Euclidean Spaces

PERTTI MATTILA

Cambridge studies in advanced mathematics, 44, 1995 réédité 1999

---

Quel est le sujet principal de la théorie géométrique de la mesure ? Il pourrait se décrire, dans un sens classique, par les mots-clé : rectifiabilité, projections, intersections. Les mesures, et surtout les mesures de Hausdorff, servent d'outil d'analyse. Auparavant on cherchait surtout à obtenir certaines propriétés géométriques des ensembles à partir de leur analyse en termes de mesure. On fait plus maintenant : on généralise tous les acquis précédents aux mesures elles-mêmes, qui d'outils d'analyse sont devenues le véritable objet de la théorie. Après le livre de Mattila, le titre du prochain livre sur ces questions sera peut-être : *Géométrie des mesures*. Voici, en gros, le programme. Et c'est bien celui de l'ouvrage en question, dont je dois dire qu'il comble un vide qui devenait de plus en plus important avec les années. De plus, c'est enfin un livre que l'on peut mettre dans toutes les mains...

Le sujet lui-même a déjà été traité. Tout le monde a vu le livre *Geometric Measure Theory* (1975), de H. Federer. Ce fut un peu le Bourbaki de cette théorie, un ouvrage exhaustif pour l'époque, complètement auto-suffisant et totalement hermétique. Je ne veux pas discuter l'utilité de cet ouvrage, ce n'est pas mon propos et comme telle célèbre collection d'ouvrages mathématiques, c'est un bel ornement de bibliothèque. Je n'ose m'étendre sur l'impact négatif de ces œuvres si habilement écrites. Equipées d'une redoutable machinerie de notations et de symboles derrière lesquels se dissimulent les concepts, ils ont découragé bien des jeunes chercheurs de se frayer des pistes plus originales. Je soupçonne même que c'était l'effet visé. De l'ordre ! enfin, dans la matière concernée. Comme dans une Cité interdite, que nul n'ose y pénétrer sans en adopter tout d'abord les traditions évoluées et le langage sophistiqué, inconnus du peuple. Pour y entrer il faut presque changer de nature.

Quel rapport pouvait-il y avoir, par exemple, entre la théorie à la Federer et les conceptions de B. Mandelbrot, à qui l'on a longtemps reproché d'être imaginatives, de susciter un certain enthousiasme et de ne pas reposer sur un corps de doctrine suffisamment précis ? Aucun, apparemment... Pourtant nos articles des années 1980 étaient catalogués 28A75 dans le classement de l'AMS, il devait bien y avoir un point commun...

C'est tout le mérite de Pertti Mattila d'avoir réussi à publier un ouvrage extrêmement rigoureux et pourtant simple et facile à lire. Il ne faut pas sous-estimer la quantité de travail qu'il peut y avoir derrière la transparence des méthodes et la limpidité du style. Je ne peux dire que les articles de Mattila eux-mêmes soient simples et amusants. Ils sont techniquement très solides. Mais ce mathématicien finlandais a travaillé une vingtaine d'années sur les problèmes les plus ardues sans jamais céder à la facilité et de ce long mûrissement il est sorti ce livre agréable et réduit à l'essentiel. Tout ou presque s'y trouve des développements récents, les théorèmes mais encore mieux les nouvelles techniques de démonstration (qui font grand usage des transformations de Fourier de mesures). Ce n'est pas le livre de G.A. Edgar : *Measure, Topology and Fractal Geometry* (1990) qui reste introductif, ni ceux de K. Falconer : *Geometry of Fractal Sets* (1985) et *Fractal Geometry* (1990), beaucoup plus tournés vers l'analyse des objets fractals. Il est représentatif d'une nouvelle école de théorie géométrique de la mesure telle que la fondent D. Preiss, K. Falconer, L. Olsen et P. Mattila lui-même (cette courte liste n'est pas exhaustive). Avoir rassemblé l'essentiel à l'intérieur de 300 pages est une performance digne d'être notée.

Dans les premiers chapitres Mattila rappelle les notions de base, en particulier les lemmes de recouvrement (Vitali, Besicovitch), les mesures invariantes par des groupes de transformations (essentiel pour des énoncés du type : cette propriété est vraie pour *presque toute* droite, ou *presque toute direction* d'hyperplan, etc.). Les mesures et dimension de recouvrement (Hausdorff), les mesures et dimension d'empilement (Tricot), les théorèmes de densité locale (Chap. 6), les capacités et le lemme de Frostman (chap. 8) constituent la base de ce qui va suivre et permettent tout de suite de parler des propriétés de projection d'un ensemble de



$\mathbb{R}^n$  sur un hyperplan de dimension  $m$ , et d'intersection d'un ensemble par des hyperplans. Les chapitres suivants constituent le noyau solide de l'ouvrage : on y trouve d'abord une étude de la *porosité*, une notion de lacunarité due à l'auteur et on y introduit des techniques d'analyse de Fourier pour la dimension de l'ensemble *distance*  $D(A) = \{|x - y|/x, y \in A\}$ . Ces techniques permettent aussi de parler d'*intersection de mesures* (chap. 13), appliquée au problème de la dimension de l'intersection de deux ensembles. On y donne les limites de validité de la formule

$$\dim(A \cap f(B)) = \dim A + \dim B - n$$

dans un espace euclidien de dimension  $n$ , où  $f$  est une similitude. Le chapitre 14 introduit la notion de *mesure tangente* et démontre le fameux théorème de Marstrand :

*Soit  $s > 0$ . On suppose qu'il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que la densité*

$$\Theta^s(\mu, a) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{(2r)^s}$$

*existe, avec une valeur finie non nulle,  $\mu$ -presque partout. Alors  $s$  est un entier.*

Les chapitres suivants traitent de la rectifiabilité et plus précisément de la  $m$ -rectifiabilité. Un ensemble de  $\mathbb{R}^n$  est  $m$ -rectifiable s'il existe une suite au plus dénombrable  $(f_i)$  d'applications lipschitziennes  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que la  $m$ -mesure de Hausdorff  $H^m(E \cup f_i(\mathbb{R}^m))$  est nulle. L'ensemble  $E$  est *totalelement non  $m$ -rectifiable* si pour tout  $F$   $m$ -rectifiable,  $H^m(E \cap F) = 0$ . Le chapitre 15 caractérise la  $m$ -rectifiabilité par l'existence de  $m$ -plans tangents (à préciser dans le texte!). Le chapitre 16 généralise aux *mesures  $m$ -rectifiables* et aux *mesures tangentes*. Le chapitre 17 traite du problème le plus difficile : relier la  $m$ -rectifiabilité à l'existence presque partout de la densité locale. Une ancienne conjecture proposait l'équivalence suivante :

*Si  $H^m(E) < +\infty$ , alors  $E$  est  $m$ -rectifiable si et seulement si la limite  $\Theta(E, x)$  existe pour  $H^m$ -presque tout  $x \in E$ .*

Cette limite est alors, presque partout, égale à 1. La conjecture a été finalement démontrée en toute généralité par D. Preiss dans un article considérable (dans le fond et dans la forme) qui ne pouvait être résumé dans ce livre, mais les principaux arguments y sont. Enfin, le chapitre 18 reprend le résultat de Besicovitch et Federer sur les projections d'ensembles irréguliers :

*Si  $H^m(E) < +\infty$ ,  $E$  est totalelement non  $m$ -rectifiable si et seulement si la mesure  $H^m$  de sa projection sur presque toute variété de dimension  $m$  est nulle.*

Les deux derniers chapitres relient cette notion de rectifiabilité avec la capacité analytique et les intégrales singulières.

On voit que dans cet ouvrage la problématique reste très classique. Un grand mérite est d'avoir rassemblé ces résultats en un exposé clair. Un autre grand mérite est d'avoir réduit les techniques de démonstration à l'essentiel, de façon très élégante parfois. Il prépare bien la voie aux idées dominantes actuelles : par exemple, l'utilisation intensive des mesures et dimension d'empilement pour reconstruire une théorie semblable dans un autre système de mesures. Ou encore, effectuer le passage, assez difficile, de la géométrie des ensembles à celle des mesures. Ce dernier point mérite d'être souligné. Depuis l'existence de mesures invariantes liées aux propriétés ergodiques d'un système itéré de fonctions (J.E. Hutchinson 1982) et l'introduction des *dimensions de mesures* (L.S. Young 1986), la théorie s'est presque entièrement tournée vers les propriétés dimensionnelles des mesures et de la définition des mesures projections, mesures intersections, mesures  $m$ -rectifiables... On peut partir de là soit pour travailler sur la *désintégration* des mesures, soit pour étudier les *spectres multifractals* dont la dimension de mesure n'est qu'une des valeurs caractéristiques. Je ne saurais trop recommander la lecture de l'ouvrage de Mattila à ceux qui possèdent un bon bagage sur la théorie de la mesure et intégration. Il reste encore beaucoup de sujets de recherche intéressants dans ce domaine ; cet ouvrage en balise parfaitement les contours. Ajoutons que Mattila montre une honnêteté scrupuleuse dans ses références et que la bibliographie a une trentaine de pages. Un ouvrage de bibliothèque indispensable, donc. Mais pas pour la décoration.

*C. Tricot, Université de Clermont-Ferrand II*

---

**Mathematical Theory of Thermodynamic Limits Thomas-Fermi Type Models**

 I. CATTO, C. LE BRIS ET P.L. LIONS  
 Oxford, 1998
 

---

A priori le sujet de ce livre peut paraître marginal pour un mathématicien, puisqu'il s'agit de donner une justification rigoureuse à des procédures de moyennisation lors du passage de l'étude de systèmes physico-chimiques finis de molécules à des systèmes infinis. Ce passage a pour nom la théorie de la limite thermodynamique. Les modèles dont il s'agit sont issus de la chimie moléculaire quantique et la problématique est très simplement schématisée dans les premières lignes de l'introduction : soit une molécule à  $N$  électrons et  $N$  noyaux de charge unitaire, à niveau fondamental d'énergie et à densité minimisante d'énergie ; quand  $N$  tend vers l'infini l'énergie par unité de volume et la densité admettent-elles des limites ? Que décrivent ces limites ? Pour pouvoir aborder ce problème il faut à la fois disposer d'un modèle spatial qui permet de dire comment se répartit l'augmentation du nombre de molécules et d'un modèle physique qui décrit les interactions entre les molécules. Le modèle spatial est on ne peut plus simple puisqu'il consiste à remplir les points du réseau  $\mathbb{Z}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$ , le mode de remplissage étant régulier (une définition exacte en est donnée). Le modèle physique qui décrit les interactions moléculaires est beaucoup plus complexe. Sous sa forme la plus simple il s'agit du modèle de Thomas-Fermi (TF). Introduit pour la première fois à la fin des années 20, ce modèle avait fait l'objet d'une étude mathématique très poussée de la part de Lieb et Simon en 1977. Dans ce modèle l'énergie moléculaire s'écrit alors

$$E_{\Lambda}^{TF}(\rho) + 1/2 \sum_{y \neq z \in \Lambda} \frac{1}{|y-z|} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{5/3} d^3x - \int_{\mathbb{R}^3} \left( \sum_{k \in \Lambda} \frac{1}{|x-k|} \right) \rho(x) d^3x \\ + 1/2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} d^3x d^3y + 1/2 \sum_{y \neq z \in \Lambda} \frac{1}{|y-z|}$$

(dans la formule précédente  $\Lambda$  est un sous-ensemble « raisonnablement distribué » de  $\mathbb{Z}^3$  de cardinal  $|\Lambda|$ , quantité qui représente le volume à une constante près). L'expression ci-dessus contient à la fois un terme cinétique pour les électrons et les termes de répulsion coulombienne entre électrons  $1/2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} d^3x d^3y$ , et entre nucléons  $1/2 \sum_{y \neq z \in \Lambda} \frac{1}{|y-z|}$ . Lieb et Simon ont d'abord établi l'existence d'un densité minimisante  $\rho_{\Lambda}$  à savoir

$$I_{\Lambda}^{TF} = \inf \left\{ E_{\Lambda}^{TF}(\rho) + 1/2 \sum_{y \neq z \in \Lambda} \frac{1}{|y-z|} : \rho \geq 0, \rho \in L^1 \cap L^{5/3}, \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x = |\Lambda| \right\}.$$

Puis ils ont montré l'existence d'une limite thermodynamique, c'est-à-dire

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} I_{\Lambda}^{TF} = I_{per}^{TF} + 1/2M$$

et  $\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \rho_{\Lambda} = \rho_{per}$  dans  $L_{loc}^1 \cap L_{loc}^{5/3}$  où  $I_{per}^{TF}$  et  $\rho_{per}$  sont les énergies et densité correspondant à des problèmes  $\mathbb{Z}^3$ -périodiques sur  $\mathbb{R}^3$  et où  $M$  est une constante positive calculable à partir des données (en fait  $M$  a les caractéristiques d'une masse). Le modèle de Thomas-Fermi, s'il est d'une relative simplicité mathématique, présente un défaut fondamental au niveau de l'existence (ou plutôt la non-existence) des liaisons moléculaires stables (condition liée à un résultat de Teller). Le modèle développé dans ce livre est le modèle de Thomas-Fermi-von Weizsäcker (TFW). L'énergie dans un tel système s'exprime de la façon suivante

$$E_{\Lambda}^{TF}(\rho) = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \sqrt{\rho}|^2 d^3x + \int_{\mathbb{R}^3} \rho^{5/3} d^3x \\ - \int_{\mathbb{R}^3} \left( \sum_{k \in \Lambda} \frac{1}{|x-k|} \right) \rho(x) d^3x + 1/2 \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(x)\rho(y)}{|x-y|} d^3x d^3y$$

ce qui conduit à un nouveau problème de minimisation :

$$I_{\Lambda}^{TF} = \inf \left\{ E_{\Lambda}^{TF}(\rho) + 1/2 \sum_{y \neq z \in \Lambda} \frac{1}{|y-z|} : \rho \geq 0, \sqrt{\rho} \in H^1(\mathbb{R}^3), \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3x = |\Lambda| \right\}.$$

Ce problème admet une unique densité minimisante. Les trois questions auxquelles les auteurs tentent de répondre sont les suivantes :

- (i) Existe-t-il une limite ( $|\Lambda| \rightarrow \infty$ ) à l'énergie par unité de volume  $|\Lambda|^{-1}I_{\Lambda}^{TF}$  ?
- (ii) La densité  $\rho_{\Lambda}$  a-t-elle une limite  $\rho_{\infty}$  ?
- (iii) La densité asymptotique  $\rho_{\infty}$  a-t-elle la même périodicité que les noyaux ?

Dans la première partie du livre les auteurs remplacent l'interaction coulombienne (à longue portée, ce qui la rend difficile à maîtriser) par une interaction à courte portée, dite de Yukawa, c'est à dire que partout le potentiel coulombien  $|x|^{-1}$  est remplacé par le potentiel de Yukawa  $V(x) = |x|^{-1}exp(-a|x|)$  ( $a > 0$ ). Cette approche permet de mettre en avant les techniques qui permettent de traiter les difficultés mathématiques induites par l'ajout du terme  $\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \sqrt{\rho}|^2 d^3x$  à l'énergie de Thomas-Fermi. L'étude de ce modèle TFW simplifié permet d'apporter des réponses positives aux trois questions énoncées plus haut. Le reste du livre traite du cas coulombien et les résultats de convergence présentent des similarités d'énoncés avec ceux de Lieb et Simon, à savoir

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} I_{\Lambda}^{TF} = I_{per}^{TF} + 1/2M$$

et  $\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \sqrt{\rho_{\Lambda}} = \sqrt{\rho_{per}}$  dans  $H_{loc}^1(\mathbb{R}^3) \cap L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$  où  $I_{per}^{TF}$ ,  $\rho_{per}$  et  $M$  ont la même interprétation que dans le cas du modèle de Thomas-Fermi. Les techniques utilisées sont cependant incomparablement plus élaborées et reposent essentiellement sur la théorie des équations (voire systèmes) elliptiques non-linéaires et les méthodes variationnelles. Un exemple typique est le résultat d'existence et d'unicité pour le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + cu^{7/3} - \Phi u = 0 \\ u \geq 0 \\ -\Delta \Phi = 4\pi(\mu - u^2) \end{cases}$$

où  $c > 0$  et  $\mu$  est une mesure de Radon positive sur  $\mathbb{R}^3$  vérifiant des conditions de bornitude locale et de croissance uniformes. En résumé ce livre, de prime abord assez pointu, rassemble avant tout de beaux résultats de mathématiques et il est essentiellement à la portée de tout mathématicien rompu à l'étude des équations elliptiques. Même si on n'est pas obsédé par le problème de la stabilité de la matière, la perspective de voir s'ériger une imposante construction mathématique associée à un ensemble de réflexions sur les aspects importants de la physique atomique contemporaine, peut inciter à lire cet ouvrage qui, n'en doutons pas, réjouira tous ceux qui pensent que le champ d'application de l'analyse des équations elliptiques semi-linéaires ne se limite pas à des problèmes académiques. La lecture de ce livre pourrait aussi être très utile à tout physicien intéressé par la justification du passage des systèmes finis aux systèmes à nombres infinis de molécules. Notons enfin que les auteurs préparent une suite logique à cet ouvrage, à savoir l'étude de la limite thermodynamique dans le modèle plus élaboré de Hartree-Fock.

*L. Véron, Université François Rabelais à Tours*

### Fourier créateur de la physique mathématique

JEAN DHOMBRES, JEAN-BERNARD ROBERT  
Belin, 1998

Etant mathématicien et habitant Auxerre, je me suis naturellement intéressé à Fourier, le plus illustre de ses fils, mais dont la notoriété dans sa ville natale ne dépasse pas le cercle minuscule de quelques initiés. Par hasard j'ai acquis, au milieu d'un lot, l'*Annuaire historique du département de l'Yonne* de l'année 1871/72 qui contient un article de E. Duché (ancien membre du conseil général de l'Yonne) intitulé *Joseph Fourier sa vie son œuvre* qui résume en une vingtaine de pages la vie de son héros, j'ai aussi consulté divers manuscrits de Fourier conservés précieusement à la bibliothèque de la ville et édités en 1858 par l'archiviste et érudit auxerrois A. Challe. Surtout, j'ai profité de ma présence à Auxerre pour lire dans leur édition originale quelques œuvres de Fourier. Découvrir les séries de Fourier dans le bel exemplaire de la *Théorie de la chaleur* que l'auteur a offert à son ingrate cité avec sa dédicace « *offert par l'auteur à la bibliothèque de la ville d'Auxerre* » calligraphiée d'une écriture légèrement tremblée, suivre avec Fourier les incroyables calculs qui l'ont conduit à l'égalité

$$\pi/4 = \cos y - \frac{1}{3} \cos 3y + \frac{1}{5} \cos 5y - \frac{1}{7} \cos 7y + \frac{1}{9} \cos 9y + \dots$$

pour  $] -\pi/2, \pi/2[$ , lire les 92 pages *in folio* de sa Préface historique, *Description de l'Égypte* qui est la relation officielle de « l'Expédition d'égypte » et à la suite continuer en consultant les quelque vingt ouvrages gravés relatant la découverte des monuments de l'antiquité égyptienne par les savants que le général Bonaparte a emmenés avec lui, est un rare bonheur.

Ainsi familiarisé avec la vie et l'œuvre du grand savant par mes quelques « recherches » d'amateur, j'attendais avec impatience et curiosité la parution annoncée du *Fourier* des éditions Belin dans leur collection *un Savant, une époque*.

La tâche n'était pas aisée, tant est riche la vie de Fourier, tant est complexe le personnage sous une apparence assez linéaire, et tant il est difficile d'analyser en profondeur son œuvre scientifique dans son époque, à l'interface des XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles et se prolongeant vigoureusement jusqu'à nos jours. *A priori* c'était d'ailleurs une gageure de réunir dans un seul ouvrage homogène la biographie d'un homme extraordinaire, une histoire des mathématiques et de la physique de son temps et une réflexion philosophique sur l'évolution des sciences. Il a fallu 750 pages aux auteurs pour mener leur projet à bien et pas une n'est de trop.

De fait, il y a trois niveaux de lecture dans ce *Fourier*, non juxtaposés, mais se complétant harmonieusement, se mêlant intimement au fur et à mesure que le lecteur progresse dans l'ouvrage. Le premier nous raconte comment un enfant issu d'une famille très pauvre, rapidement orphelin, a réussi, après des aventures dignes des romans populaires et qui pourraient inspirer un cinéaste désireux de donner un éclairage original de la Révolution française, à obtenir les plus hautes distinctions du monde de l'esprit, élu à l'Académie des sciences dont il a été le secrétaire perpétuel, puis à l'Académie française. Mais dès le premier chapitre nous sommes prévenus que là ne se borne pas l'ambition des auteurs, ce qui aurait d'ailleurs pu être une ambition raisonnable. En effet avant même de nous présenter le héros de l'histoire, ou de nous introduire dans le monde de l'Ancien Régime finissant que le lecteur est sensé connaître (ou qu'il découvrira en lisant la suite), c'est dans la science que nous sommes conviés à pénétrer, à travers notamment une série de portraits des figures marquantes de ce temps. Le lecteur mathématicien dont l'intérêt ne s'était pas encore porté sur l'histoire de sa discipline, ou sur certains de ses chapitres, découvrira dans le deuxième niveau de lecture une science passionnante dont il ne soupçonnait pas la richesse, il verra comment sont nés, comment ont été compris et vécus par les contemporains quelques-uns des plus célèbres théorèmes de l'analyse. Les mathématiques et la physique âgées de deux cents ans surgissent alors dans notre monde actuel comme pourvues d'une éternelle jeunesse. Enfin J. Dhombres et J.-B. Robert conduisent leurs lecteurs à un troisième niveau de lecture qui est de réflexion, domaine ordinaire du mathématicien certes, mais cependant peut-être dépayssant pour beaucoup dans la mesure où ici la réflexion porte en quelque sorte sur le domaine usuel de leur réflexion ordinaire. L'avantage d'une telle écriture, c'est qu'elle permet, si elle est réussie, ce qui est le cas ici comme je l'ai déjà indiqué, de faire découvrir au lecteur intéressé par l'un des niveaux, que les deux autres, qui lui sont intimement liés dans la présentation, méritent aussi son attention. Le « lecteur type » auquel est destiné l'ouvrage est probablement un être cultivé, ayant des connaissances de mathématiques et de physique comparables à celles d'un bon élève d'une classe de terminale. Certaines parties des deux derniers chapitres ne lui sont donc pas accessibles dans leur intégralité. Cela n'est pas gênant, tant ce qui précède est intéressant pour tous et ce qui suit fondamental quand on en comprend le sens ! Dans le même ordre d'idées, certaines notes paraîtront naïves ou pédantes, voire inutiles au mathématicien ou au physicien : mais ceux-ci doivent comprendre que des lecteurs moins spécialisés mais néanmoins intéressés ont besoin de savoir ce que signifient certaines notions qui pour nous font partie du tout-courant et même parfois, plus fondamentalement encore, j'ose le dire, il est important qu'ils puissent constater *de visu* que tout en sciences est sujet à définition précise (confer Sokal et Brickmont et leur *Imposture intellectuelle* pour expliciter davantage cette remarque), précision et rigueur en science, en mathématique en particulier, étant l'un des thèmes majeurs de ce que j'ai appelé le troisième niveau.

Venons-en à la structure de l'ouvrage.

Après un court chapitre où l'on nous présente d'abord les principaux personnages de cette histoire, Lagrange, Laplace et Monge, ses professeurs à l'École normale de l'an III, mais aussi Bertollet, Biot, Cauchy, Poisson, puis la science de leur temps, les auteurs consacrent six

chapters à la vie de Fourier depuis son enfance à Auxerre où il est né en 1768, jusqu'à sa mort à Paris en 1830. La vie de Fourier, comme aussi son œuvre scientifique, est paradoxale car à la fois extraordinairement riche et extrêmement solitaire. Ces deux composantes opposées en font un homme singulier, à part, que ses biographes cherchent et réussissent, à cerner tout au long de sa vie et finalement à nous faire comprendre. Autre paradoxe, ce modéré n'a cessé de s'engager dans la vie politique et, pas assez jacobin pour les jacobins, trop révolutionnaire pour les bourgeois d'Auxerre ou pour les royalistes de la seconde Restauration, il fut condamné à mort par les Jacobins (et sauvé par la chute de Robespierre) emprisonné par la « terreur blanche » quelques mois plus tard ; révoqué par Napoléon en 1815 à son retour de l'île d'Elbe, sa pension est supprimée par décret par Louis XVIII qui s'opposera à son élection à l'Académie des sciences un an plus tard car il avait servi l'Empereur. Rude époque pour un savant qui a dû attendre d'être académicien pour pouvoir enfin se consacrer entièrement à la science. Inutile d'essayer de présenter ici comment J. Dhombres et J.-B. Robert conduisent leur personnage durant près de 60 ans pendant l'une des périodes les plus troublées de la France mais probablement aussi l'une des plus exaltantes ! Ils auraient pu écrire une vie romancée, inventant des dialogues, mais ils ont préféré rester historiens et rendre leur texte malgré tout aussi vivant grâce à la richesse de leur documentation et je ne peux qu'approuver leur choix. Je n'en dis donc pas plus sur ce point, laissant au lecteur le plaisir de découvrir, comme dans les bons romans d'aventures, les péripéties de la vie de celui qui a, en plus de ses aventures, su imprimer si profondément sa marque à la science que nous en ressentons encore les effets aujourd'hui.

Les deux derniers chapitres sont plus spécialement consacrés à ce que j'ai appelé le second et le troisième niveau. Dans le chapitre VIII le lecteur suivra Fourier découvrant l'équation de la chaleur et comment il s'y prend pour la résoudre dans certains cas. Le calcul différentiel et intégral est alors très proche de son interprétation physique. Particulièrement intéressante est la manière dont Fourier « prouve » l'unicité des solutions (confer p. 543 et suivantes). Mais ce qu'il faut absolument lire c'est la partie consacrée à l'apparition de la première série de Fourier, qui provient de la solution d'équilibre thermique d'une plaque de la forme d'une demi bande rectangulaire de largeur  $[-\pi/2, \pi/2]$ , de longueur infinie et d'épaisseur négligeable. Le petit côté est maintenu à la température 1 et les côtés infinis à la température 0. Comment Fourier arrive à la solution ( $\nu(x, y)$  désigne la température au point de coordonnées  $(x, y)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ )

$$\nu(x, y) = ae^{-x} \cos y + be^{-3x} \cos 3y + ce^{-5x} \cos 5y + \dots$$

est longuement expliqué et commenté à partir de la page 523. Alors, comme dit Fourier, « il nous reste à déterminer les constantes ... » Il prend donc  $x = 0$  et, compte tenu des conditions initiales,  $\nu(0, y) = 1$ , obtenant l'égalité

$$1 = a \cos y + b \cos 3y + c \cos 5y + \dots$$

c'est-à-dire une équation à une infinité d'inconnues d'un type entièrement nouveau. Comment progresser vers la solution ? En dérivant successivement une infinité de fois et en faisant chaque fois  $y = 0$  ! i.e

$$\begin{aligned} 1 &= a + b + c + \dots \\ 0 &= a + 3^2b + 5^2c + \dots \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Nous sommes encore loin de la fin des calculs de Fourier qui arrivera au résultat correct parce qu'il reconnaîtra dans  $a, b, c \dots$  des intégrales de Wallis. Beaucoup plus tard il arrivera, mais en utilisant sa connaissance de son premier exemple explicite, à la formule simple donnant les « coefficients de Fourier ». C'est qu'entre temps il lui aura fallu étendre la notion même de fonction qui, essentiellement donnée par une formule avant lui, acquiert dans son livre un statut proche de celui que nous lui connaissons aujourd'hui : en particulier son domaine de définition est dégagé et est appelé à jouer un rôle important. Dans le même ordre d'idées, c'est dans la *Théorie de la chaleur* qu'apparaît pour la première fois la notation  $\int_a^b$  qui s'est imposée depuis et que la notion d'intégrale définie (et non simplement de primitive) d'une fonction « arbitraire » commence à prendre forme.

Encouragé par ses découvertes obtenues par l'étude de la lame rectangulaire décrite ci-dessus, Fourier applique sa méthode à d'autres solides : armille, sphère, cylindre plein, demi-plan. A chaque fois il doit résoudre une équation aux dérivées partielles avec des conditions imposées au bord. J. Dhombres et J.-B. Robert montrent à travers ces exemples à quel point, sur cette notion comme sur les précédentes, une fois encore, Fourier est novateur. Le problème du cylindre le conduit aux fonctions de Bessel (que le mathématicien E. Heine intitule d'ailleurs *die Fourier-Bessel'sche Funktion* dans un article de 1868) et le demi-plan ... à la transformée de Fourier.

Le dernier chapitre, « un homme et la construction d'une postérité » est un chapitre plus philosophique qu'historique. Les auteurs y explorent plusieurs pistes intéressantes comme par exemple la genèse et le sens de l'opposition entre mathématiques pures et appliquées et la notion de rigueur dans les sciences. Ils montrent en particulier comment les séries de Fourier ont permis de *tester* en quelque sorte les concepts nouveaux introduits en analyse par Cauchy : *N'est-il point savoureux de vérifier que le mathématicien Fourier auquel on reproche dès 1807 une rigueur insuffisante — et la mesure de cette rigueur est pourtant à ce moment-là l'ancienne mesure de l'analyse algébrique d'Euler et Lagrange — soit précisément celui qui ait permis de tester la nouvelle rigueur, celle apportée par Cauchy. La tester pour la trouver insuffisante!*(p. 657).

L'imposant ouvrage de J. Dhombres et J.-B. Robert trouvera, je l'espère, de très nombreux lecteurs. Tous y apprendront une impressionnante quantité de choses nouvelles et ils y découvriront un homme, Fourier!

*M. Zisman, Université Paris 7*