

la Gazette

des Mathématiciens



- **Mathématiques** – Miroirs, lentilles et équations de Monge-Ampère
- **Mathématiques** – La « sunset conjecture » d'Erdős
- **Information** – « Les Maths où on ne les attend pas ! »
- **Information** – « La Grange des Maths »

Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Rédacteurs

Maxime BOURRIGAN

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles
maxime.bourrigan@gmail.com

Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Sébastien GOUËZEL

Université de Nantes
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Lille
grivaux@math.univ-lille1.fr

Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Mylene MAÏDA

Université de Lille
mylene.maida@univ-lille.fr

Gabriel RIVIÈRE

Université de Nantes
Gabriel.Riviere@univ-nantes.fr

Romain TESSERA

Université Paris-Sud
romain.tessera@math.u-psud.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Fabien DURAND

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. L'image présente la première itération d'un algorithme de calcul du transport optimal quadratique entre la mesure de Lebesgue μ sur $[0, 1]^2$ et une mesure de probabilité ν à support fini, supportée sur un ensemble $\{y_1, \dots, y_N\} \subseteq [0, \frac{1}{3}]$. La résolution du problème du transport optimal quadratique entre μ et ν repose sur la notion de *diagramme de Laguerre*, une décomposition de l'espace en polyèdres paramétrée par un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^N$: $\text{Lag}_i(\psi) = \{x \in [0, 1]^2 \mid \forall j, \|x - y_j\|^2 + \psi_j \leq \|x - y_i\|^2 + \psi_i\}$. Ce diagramme induit une solution du transport optimal entre μ et ν si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, l'aire de la i -ième cellule $\text{Lag}_i(\psi)$ vaut $\nu(\{y_i\})$. L'image représente la tessellation de Laguerre obtenue après une itération d'une méthode de Newton pour résoudre ce système d'équations, obtenue avec le logiciel PyMongeAmpere. (Crédit : Quentin Mérigot et Boris Thibert)

N° 166

Éditorial

J'avoue, quand je participais aux expéditions de Math@Lyon en collège dans la région lyonnaise avec mes compères JY^{***}, R^{***} et V^{***}, je squattais le stand des bulles de savon et je n'en parlais que sous hypoglycémie aiguë ou pour la manip de la cycloïde, qui marchait pourtant tellement mal qu'elle confinait à l'expérience de pensée. Ça tombait bien parce que JY^{***} aimait bien gagner au stand des jeux avec stratégie... gagnante, R^{***} retrouvait son enfance avec les puzzles arithmétiques de triangles et de cubes, et V^{***} adorait surprendre les élèves avec les géodésiques contre-intuitives sur le globe terrestre qu'on apportait dans une malle. Pour revenir aux bulles, je me souviens de la tête systématiquement incrédule et émerveillée des élèves quand elles et ils découvraient l'incroyable bulle s'attachant aux arêtes du cube métallique que je ressortais de l'eau savonneuse. J'ai retrouvé ce plaisir universel du jeu, de la manipulation et des mathématiques dans les présentations de *Maths en scène* et de *la Grange des maths*. Ces deux formidables associations, lauréates de prix de l'Académie des sciences, décrivent dans cette *Gazette* leurs activités mathématiques, toujours ludiques et hors des clous scolaires, et très populaires auprès des élèves et des enseignants du secondaire, mais pas seulement comme on le découvririra.

Autre plaisir, celui des yeux, avec l'image de couverture, une jolie mosaïque générée par un glacial algorithme. Celui-ci résout numériquement un problème analytiquement intordable d'optique lié au duo Monge et Ampère (qui est né à Lyon!). Cette sombre affaire est présentée dans un article lumineux dont l'accroche est bien simple : comment tailler un miroir pour qu'il réfléchisse une source ponctuelle lumineuse selon une image prescrite.

De façon fortuite, le Raconte-moi de ce numéro convoque ces deux mêmes personnages, Monge et Ampère, et plonge brièvement et intensément les lectrices et lecteurs dans les équations éponymes, cette fois dans le bain complexe. Il y est, entre autres, question de courbure négative et d'analyse complexe polonaise retrouvant une nouvelle jeunesse en géométrie.

Deux autres articles de mathématiques sont publiés. Le premier expose

avec brio un récent théorème répondant à une vieille question toute simple sur les sous-ensembles à densité strictement positive des entiers naturels. Le ton est léger, les mathématiques accessibles et variées. L'auteur présente de surcroît deux preuves du résultat. En passant, on saura quel livre de mathématiques il faut emmener sur une île déserte¹.

Il faut bien le dire, le second article fera un peu peur aux non algébristes en raison des gros mots qu'il profère dès le premier paragraphe : K -théorie et cohomologie galoisienne. Qu'on se rassure : l'auteur a pris bien soin d'introduire le sujet central, la classification des formes quadratiques, et les gros mots sont développés uniquement vers la fin, et de manière à ce que tout le monde y trouve son compte.

Pour terminer, j'aimerais dire un mot du texte de 1976 que nous republions et qui est une tribune au sujet de la parité. Il est assez fascinant et surtout déprimant de constater que le texte pourrait essentiellement être publié... en 2020.

Au nom de toute l'équipe de la *Gazette*, je vous souhaite une agréable lecture.

Damien GAYET

1. D'ailleurs, chères lectrices et chers lecteurs, je veux bien que vous m'envoyiez le titre de votre livre de mathématiques à emporter sur une île déserte, je ferai le bilan anonymisé dans le prochain numéro si ce sondage n'est pas un vaste naufrage.



N° 166

Sommaire

SMF	4
Mot du président	4
MATHÉMATIQUES	6
Miroirs, lentilles et équations de Monge-Ampère – <i>Q. MÉRIGOT et B. THIBERT</i>	6
La « sunset conjecture » d'Erdős – <i>É. MATHERON</i>	22
Autour de la conjecture de Milnor – <i>D. IZQUIERDO</i>	35
PARITÉ	50
Des femmes et des mathématiques – <i>M. DESCHAMPS et al.</i>	50
RACONTE-MOI	53
Monge-Ampère complexe – <i>E. DI NEZZA</i>	53
INFORMATION	57
Le réseau R2M – <i>C. LECOUCVEY et M. PEIGNÉ</i>	57
« Les Maths où on ne les attend pas! » - Association <i>Les Maths En Scène</i> – <i>H. LAFRANCE</i>	59
Le projet <i>La Grange des Maths</i> – <i>É. BLAYO et C. KAZANTSEV</i>	65
LIVRES	72

Chères et chers collègues,

Vous l'avez sans doute appris de différentes sources, notre collègue Tuna Altinel a été définitivement acquitté le 3 septembre 2020, par le tribunal de Balıkesir (Turquie) dans le procès qui le poursuivait pour avoir participé à la réunion d'une amicale kurde, légale, organisée le 21 février 2019 à la mairie de Villeurbanne (Rhône). C'est une excellente nouvelle. Malheureusement, Tuna Altinel n'est toujours pas libre de sortir de Turquie et de retourner en France puisque son passeport, confisqué le 12 avril 2019, ne lui a pas encore été restitué. C'est une nouvelle lutte juridique qu'il doit engager avec son avocate. Nous lui souhaitons une issue favorable rapide et nous l'assurons de notre soutien. Il pourra ainsi s'impliquer dans une année universitaire qui lui paraîtra bien paisible au regard des épreuves qu'il a traversées.

Cette rentrée universitaire est hors-norme et totalement inédite. Pour faire face, et en paraphrasant Tuna Altinel dans sa lettre du 12 septembre 2020², « il n'y a qu'un seul remède efficace : la solidarité des individus ». Il ne faut pas baisser les bras car nous avons de jeunes adultes à former, à initier aux sciences en général et aux mathématiques en particulier. C'est un vrai défi à l'heure où les sciences sont de moins en moins comprises par et dans la société. Un témoignage cinglant est le taux de participation de nos députés lors du vote de la « Loi de Programmation de la Recherche » (LPPR) le 23 septembre 2020. Il a été de 12%. Si vous allez voir les chiffres³ vous noterez qu'une très faible mobilisation de l'opposition aurait pu faire basculer le vote. C'est donc l'ensemble de la classe politique qui se sent peu concerné par ce sujet. Nous portons sans doute également notre part de responsabilités dans ces résultats en ne portant peut-être pas assez attention à l'image des sciences que nous montrons.

La SMF œuvre auprès du grand public pour présenter les mathématiques sous des angles inattendus, propices, espérons-le, à susciter l'intérêt des plus jeunes pour les sciences. Vous connaissez nos cycles de conférences,

2. <http://math.univ-lyon1.fr/SoutienTunaAltinel/>

3. [http://www2.assemblee-nationale.fr/scrutins/detail/\(legislature\)/15/\(num\)/2881](http://www2.assemblee-nationale.fr/scrutins/detail/(legislature)/15/(num)/2881)

et notre concours SMF Junior, qui couvre le niveau du lycée jusqu'à celui de l'université sans oublier le grand public. La SMF s'est enrichie depuis cette rentrée du programme « MathC2+ » qu'elle pilote avec Animath et le Ministère de l'éducation nationale, de la jeunesse, et des sports. Ainsi le champ d'action de la SMF couvre désormais aussi le collège. Ce dispositif vise à conquérir de nouveaux territoires et spécialement les publics pour lesquels la science n'est pas traditionnellement un choix d'orientation. « MathC2+ » s'attache également à attirer vers les sciences les jeunes filles, pour lutter contre le fort déficit paritaire dans les études dans lesquelles les mathématiques sont importantes. La SMF est donc plus que jamais engagée à faire découvrir les multiples facettes des mathématiques. Une autre façon d'agir dans ce sens est la formation des enseignants par la recherche. Je veux parler en particulier des docteur.e.s ou doctorant.e.s agrégé.e.s. L'an passé à la même époque mon prédécesseur, Stéphane Seuret, avait rédigé un très intéressant « mot du président » qui leur était exclusivement consacré. Je vous en conseille la (re-)lecture. Il y était notamment question de la question épineuse des refus de détachements dans le supérieur. À nouveau la SMF a œuvré cet été pour appuyer 18 demandes de recours dont une a été refusée mais pour laquelle nous avons finalement pu obtenir une réponse favorable. La SMF a refusé une demande de soutien. En effet, certaines demandes, comme l'expliquait Stéphane l'an passé, sont plus difficilement défendables et mettraient en péril l'argumentaire qui de toute évidence porte ses fruits.

Nous solliciterons bientôt vos nouveaux doctorants pour adhérer à la SMF (gratuitement je le rappelle) alors expliquez-leur que la SMF n'est pas une société savante endormie mais qu'elle est très active sur de nombreux fronts. Ainsi adhérer donnera encore plus de poids à ses actions.

Bien à vous

Le 3 octobre 2020

Fabien DURAND, président de la SMF



Miroirs, lentilles et équations de Monge-Ampère

- Q. MÉRIGOT
- B. THIBERT

Comment tailler un morceau de verre pour qu'il réfracte la lumière du soleil et la concentre, de sorte à produire une image donnée ? La modélisation de ce type de problème conduit à des équations aux dérivées partielles du second ordre, non linéaires, appartenant à la famille des équations de Monge-Ampère. Nous verrons comment les méthodes semi-discrètes, que l'on peut faire remonter aux travaux de Minkowski, permettent de les résoudre numériquement.

1. Optique anidolique et équations de type Monge-Ampère

L'optique anidolique, ou optique non imageante, a pour objet la conception de dispositifs de transfert d'énergie lumineuse entre une source de lumière et une cible. Le problème général consiste à concevoir la forme d'un miroir – ou d'une lentille – qui réfléchit – ou réfracte – la lumière émise depuis une source vers une cible (comme illustré sur les figures 1 et 2), les distributions d'intensité et la géométrie de leur support étant prescrites. Les applications incluent la conception de fours solaires, d'éclairage public, de phares de voitures, et plus généralement l'optimisation d'éclairage et de réduction de la pollution lumineuse.

FIGURE 1 – Miroir transformant une source de lumière parallèle uniforme en une image de train



FIGURE 2 – Lentille transformant une source de lumière parallèle en hikari



Cible de lumière en champ proche ou lointain. Il existe plusieurs variantes des problèmes inverses de modélisation de miroirs ou de lentilles, en fonction de la géométrie de la source lumineuse et de

la cible à éclairer. Ces problèmes se distinguent en particulier par la position spatiale de la cible de lumière. Lorsque celle-ci est à distance finie, c'est-à-dire qu'on cherche à éclairer une zone de l'espace – comme un écran – le problème est dit *en champ proche*. Sur les figures 1 et 2, la cible de lumière est sur un mur, donc en champ proche. D'une manière générale, toutes les illustrations de cet article correspondent à des cibles de lumière en champ proche. Cependant nous considérerons dans un premier temps un cas plus simple mathématiquement, où la cible de lumière est « à l'infini », c'est-à-dire qu'on cherche à éclairer des directions. Dans ce cas-là, on « oublie » que la lumière est émise à partir d'un point du composant optique et on ne garde que la direction du rayon réfléchi ou réfracté, qui est encodée par un vecteur unitaire. On dit alors que le problème est *en champ lointain*. Remarquons que si la cible de lumière en champ proche est très éloignée du miroir – ou de la lentille – centré en l'origine, chaque point visé correspond presque à une direction. Nous verrons dans la partie 4.2 qu'il est possible de résoudre le problème pour des cibles en champ proche en résolvant itérativement des problèmes avec des cibles en champ lointain.

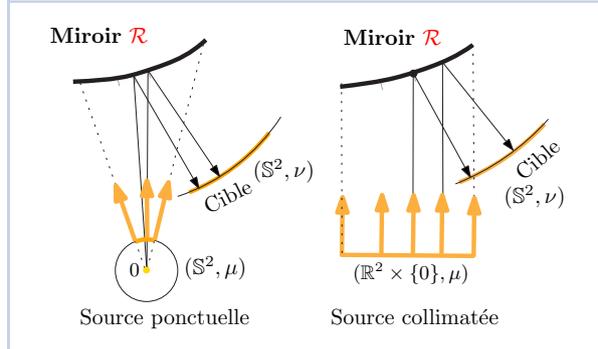
Dans un premier temps, nous présentons deux *problèmes du miroir en champ lointain*, sous leur forme continue (voir figure 3). Ensuite, nous expliquons comment ceux-ci peuvent être approchés par des problèmes discrets, en suivant la méthode dite des *quadriques support* introduite par Luis Caffarelli et Vladimir Oliker, mais qu'on peut aussi faire remonter – dans un contexte proche – à Minkowski.

1.1 – Miroir pour une source ponctuelle

Dans ce premier problème, la source de lumière est ponctuelle, c'est-à-dire que la lumière est émise à partir d'un point O , que l'on supposera placé en l'origine de l'espace \mathbb{R}^3 . L'intensité de la source de lumière est modélisée par une mesure de probabilité μ sur la sphère des directions \mathbb{S}^2 . On note $X \subset \mathbb{S}^2$ le support de la mesure μ . Par exemple, si la lumière est émise dans un cône plein, X est un disque sur la sphère. La quantité de lumière émanant d'un ensemble mesurable de directions $A \subset X$ est donnée par $\mu(A)$. Pour le problème en champ lointain, la cible est décrite par une mesure de probabilité ν sur la sphère des directions \mathbb{S}^2 , qui représente alors les directions « à l'infini », c'est-à-dire après réflexion. On note $Y \subset \mathbb{S}^2$ le support de la mesure ν .

Le problème inverse considéré ici consiste à construire la surface \mathcal{R} d'un miroir qui va transporter l'intensité de la lumière source sur l'intensité de lumière souhaitée à l'infini en utilisant la loi de réflexion de Snell-Descartes. Par exemple, si la mesure cible est une masse de dirac δ_y , et que l'on cherche donc à envoyer toute la lumière dans une seule direction y , alors la solution est donnée par un paraboléoïde de révolution.

FIGURE 3 – Miroir transformant une lumière ponctuelle (gauche) ou collimatée (à droite)



On note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^3 . Un rayon incident $x \in \mathbb{S}^2$ est réfléchi dans la direction $R(x) = x - \langle x | n(x) \rangle n(x)$, où $n(x)$ est le vecteur normal unitaire à la surface \mathcal{R} au point touché par la direction x et orienté de sorte que $\langle x | n(x) \rangle \leq 0$. Le fait que R transporte la mesure source μ vers la mesure cible ν se traduit par la condition

$$\forall B \subseteq \mathbb{S}^2, \quad \nu(B) = \mu(R^{-1}(B)),$$

qui porte sur les sous-ensembles B mesurables de la sphère. Notons que la préservation de quantité de lumière globale était déjà assurée par le fait d'avoir choisi des mesures de probabilités, c.-à-d. $\mu(\mathbb{S}^2) = \nu(\mathbb{S}^2) = 1$. Supposons maintenant que μ et ν sont des mesures absolument continues par rapport à la mesure d'aire sur la sphère. On note alors $\mu(x) = \rho(x)dx$ et $\nu(x) = \sigma(x)dx$ où ρ et σ désignent respectivement les densités de μ et ν . L'équation précédente se traduit alors par

$$\forall B \subseteq \mathbb{S}^2, \quad \int_B \sigma(x)dx = \int_{R^{-1}(B)} \rho(x)dx. \quad (1)$$

Supposons en plus que les densités ρ et σ sont continues et que R est un difféomorphisme de X dans Y . Par changement de variable $y = R(x)$, la dernière équation est alors équivalente à $\sigma(R(x)) \det(DR(x)) = \rho(x)$ pour tout $x \in X$.

Comme le miroir renvoie des rayons émis depuis l'origine, on peut supposer que la surface \mathcal{R}

est paramétrée radialement par $x \in \mathbb{S}^2 \mapsto u(x)x$, où $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive que l'on doit déterminer. En utilisant l'expression d'un vecteur normal unitaire à la surface \mathcal{R} au point $xu(x)$ en fonction de x et du gradient $\nabla u(x) \in T_x \mathbb{S}^2$, on est en mesure d'écrire notre problème sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles.

Problème du miroir en champ lointain pour une source ponctuelle

Trouver une fonction $u : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ positive et de classe \mathcal{C}^2 vérifiant

$$\begin{cases} \sigma(R(x)) \det(DR(x)) = \rho(x) \\ R(x) = x - \langle x | n(x) \rangle n(x) \\ n(x) = \frac{\nabla u(x) - u(x)x}{\sqrt{\|\nabla u(x)\|^2 + u(x)^2}} \end{cases} \quad (\text{Mir-Ponc-C})$$

et telle que R est un difféomorphisme de X vers Y .

La première ligne de l'équation (Mir-Ponc-C) fait intervenir le déterminant d'une quantité qui implique les dérivées secondes de u et fait partie de la famille des équations de Monge-Ampère. La condition de difféomorphisme est difficile à traiter. En pratique, elle peut être remplacée par une hypothèse sur u , ressemblant à de la convexité, et la condition $R(X) = Y$. Ces deux conditions garantissent l'ellipticité du problème. Caffarelli et Oliker ont démontré en 1994 [1] l'existence de solutions faibles à cette équation, c'est-à-dire l'existence d'une fonction u localement lipschitzienne telle que l'application R définie par les deux dernières lignes de (Mir-Ponc-C) vérifie (1). L'existence de solutions régulières au problème (Mir-Ponc-C) est due à Wang et Guan [6, 2].

1.2 – Miroir pour une source collimatée

Nous présentons maintenant un deuxième problème inverse en optique anidolique. La source de lumière est cette fois-ci collimatée, ce qui signifie que tous les rayons de lumières sont parallèles. On les suppose positivement colinéaires au vecteur vertical $e_z = (0, 0, 1)$ et émis à partir d'un domaine du plan horizontal $X \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Par commodité, on identifie \mathbb{R}^2 et $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. On suppose que la surface du composant optique est lisse et paramétrée par une fonction hauteur $u : X \rightarrow \mathbb{R}$. L'intensité de la lumière source est modélisée par une mesure de probabilité μ sur X . Comme dans le cas précédent, l'intensité de la lumière cible est modélisée par une mesure de probabilité ν sur la sphère

des directions à l'infini. En chaque point $(x, u(x))$ du composant optique, le gradient $\nabla u(x)$ encode la direction de la normale à la surface et on note $F(\nabla u(x)) \in \mathbb{S}^2$ la direction du rayon réfléchi par la loi de Snell-Descartes. Comme précédemment la loi de conservation de l'énergie lumineuse se traduit par l'équation $\nu(B) = \mu((F \circ \nabla u)^{-1}(B))$ pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{S}^2$. Cette équation est équivalente à l'équation $\tilde{\nu}(B) = \mu((\nabla u)^{-1}(B))$ pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{R}^2$, où $\tilde{\nu}(B) = \nu(F(B))$. Supposons maintenant que μ et $\tilde{\nu}$ sont absolument continues, de densités (continues) ρ et σ . Si u est strictement convexe (ou strictement concave), l'application ∇u est injective. Avec un changement de variable $y = \nabla u(x)$, le problème se ramène à nouveau à une équation aux dérivées partielles.

Problème du miroir en champ lointain pour une source collimatée

Trouver une fonction $u : X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 vérifiant

$$\sigma(\nabla u(x)) \det(D^2 u(x)) = \rho(x) \quad (\text{Mir-Coll-C})$$

et telle que $F \circ \nabla u$ est un difféomorphisme de X vers Y .

1.3 – Lentilles

Les problèmes de construction de lentilles qui transforment une source de lumière en une cible de lumière prescrite à l'infini sont similaires et se traduisent aussi par des équations de type Monge-Ampère. Comme pour les miroirs, quand la source de lumière est ponctuelle, l'équation à résoudre est sur la sphère et quand la source de lumière est collimatée, elle est sur le plan. Dans ces problèmes, la source de lumière traverse une première face de la lentille, plane ou sphérique, et le but est de construire la surface bordant la lentille de manière à ce qu'elle réfracte la lumière sur une cible de lumière prescrite à l'infini. Nous ne détaillons pas ici la modélisation de ces problèmes, mais montrerons à la fin des résultats avec les lentilles.

2. Discrétisation géométrique des équations de Monge-Ampère

Les deux problèmes inverses d'optique anidolique décrits dans la partie précédente font chacun

intervenir deux ensembles X et Y sur lesquels vivent respectivement deux mesures de probabilité μ et ν , représentant les intensités de lumières source et cible. Nous avons vu que si ces mesures sont à densité, les problèmes de construction de composants optiques s'écrivent sous la forme d'équations aux dérivées partielles de type Monge-Ampère.

Pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles, la méthode la plus directe consiste à remplacer le domaine X par une grille discrète et à remplacer les dérivées partielles par des différences de valeurs de la fonction au point de la grille divisé par le pas de la grille. Dans le cas des équations de Monge-Ampère, l'application de ces méthodes est rendue difficile par la non-linéarité de l'opérateur de Monge-Ampère et par la condition de difféomorphisme – qui se traduit en général par une contrainte de convexité sur la solution u .

Ces dernières années, des méthodes alternatives, appelées *semi-discrètes*, ont été utilisées pour discrétiser et résoudre numériquement différentes équations aux dérivées partielles et en particulier des équations de type Monge-Ampère issues du transport optimal. Le principe des méthodes semi-discrètes est de considérer qu'une des deux mesures est à densité, alors que l'autre est discrète. Un choix arbitraire doit alors être fait, nous choisissons ici d'avoir une mesure à densité $\mu(x) = \rho(x)dx$ sur l'espace X et une mesure discrète sur l'espace $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$, c'est-à-dire $\nu = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{y_i} \nu_i$ où δ_{y_i} est la masse de Dirac en y_i .

Dans cette partie, nous décrivons la variante semi-discrète des deux problèmes du miroir en champ lointain vu dans la partie précédente, en laissant de côté le problème de la convergence des solutions des problèmes discrets vers celles des problèmes continus. Ces constructions font apparaître des équations, qui peuvent être naturellement vues comme des *équations de Monge-Ampère discrètes*. Nous proposons également une interprétation économique avec le *problème des boulangeries*.

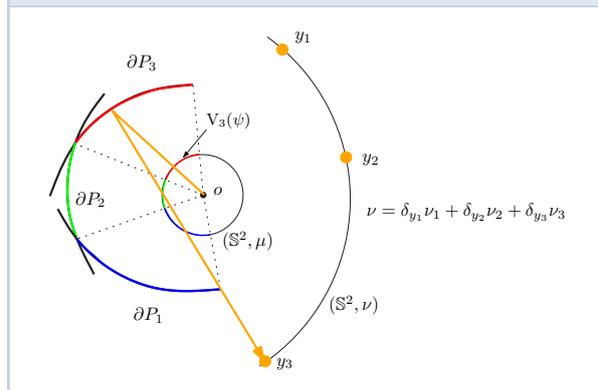
2.1 – Miroir pour une source ponctuelle

Revenons au problème de construction du miroir qui transforme la lumière émise par une source de lumière ponctuelle (voir sous-partie 1.1). Comme dans la partie précédente, la source de lumière est modélisée par une densité de probabilité continue ρ sur la sphère des directions \mathbb{S}^2 , dont le support $X_\rho := \{x \in \mathbb{S}^2, \rho(x) > 0\}$ correspond à l'ensemble des directions dans lesquelles de la lumière est émise. Nous supposons cette fois-ci que l'intensité de la

lumière cible est décrite par une mesure de probabilité $\nu = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{y_i} \nu_i$ supportée sur un ensemble $Y = \{y_1, \dots, y_N\} \subset \mathbb{S}^2$ de directions deux à deux distinctes. Le problème consiste toujours à trouver la surface \mathcal{R} d'un miroir qui va réfléchir la mesure μ sur la mesure ν par la loi de Snell-Descartes, mais cette fois-ci la mesure cible ν est discrète.

Miroir parabolique par morceau. Nous utilisons la construction avec des *paraboloïdes supports* proposée par Caffarelli et Oliker en 1994 (mais publiée uniquement en 2008 [1]), qui avait été développée pour montrer l'existence de solutions faibles dans le cas où les deux mesures sont à densité. L'idée de Caffarelli et Oliker repose sur une propriété bien connue des paraboloïdes de révolution : un paraboloïde de révolution de point focal O et de direction y réfléchit tout rayon provenant du point O dans la direction y . Il est alors naturel de chercher à construire un miroir dont la surface est composée de morceaux de paraboloïdes, chaque paraboloïde s'occupant d'éclairer une direction y_i .

FIGURE 4 – Miroir composé de trois morceaux de paraboloïdes réfléchissant dans trois directions



Plus précisément, prenons $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N$ et notons par $P(y_i, \psi_i)$ le paraboloïde solide (plein) de direction y_i , de point focal l'origine O et de distance focale ψ_i (c.-à-d. $\psi_i/2$ est la distance entre O et le point du paraboloïde le plus proche de O). Nous définissons par \mathcal{R}_ψ la surface qui borde l'intersection des paraboloïdes $P(y_i, \psi_i)$:

$$\mathcal{R}_\psi = \partial(\cap_{1 \leq i \leq N} P(y_i, \psi_i)).$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$ on désigne par $V_i(\psi)$ l'ensemble des rayons de direction $x \in \mathbb{S}^2$ émis par la source de lumière et réfléchis par la loi de Descartes dans la direction y_i . Cet ensemble est appelé *i*-ième cellule de visibilité du miroir \mathcal{R}_ψ . Par construction, il

correspond à la projection radiale, sur la sphère, de $\mathcal{R}_\psi \cap \partial P(y_i, \psi_i)$ (voir figure 4).

Un calcul simple montre que l'intersection de deux paraboloides confocaux $\partial P(y_i, \psi_i)$ et $\partial P(y_j, \psi_j)$ est incluse dans une courbe plane. En projetant radialement sur la sphère unité, cela implique que l'intersection de deux cellules de visibilité $V_i(\psi) \cap V_j(\psi)$ est incluse dans une courbe sur la sphère. Nous en déduisons que l'ensemble des cellules de visibilité forme une partition de la sphère \mathbb{S}^2 , à un ensemble de mesure nulle près.

Le paraboloides de révolution $\partial P(y_k, \psi_k)$ peut être paramétré radialement par la fonction $x \in \mathbb{S}^2 \mapsto x\rho_k(x)$, où $\rho_k(x) = \psi_k / (1 - \langle x | y_i \rangle) \in \mathbb{R}$. On en déduit que x appartient à la cellule de visibilité $V_i(\psi)$ si et seulement si la distance $\rho_i(x)$ est plus petite que les distances $\rho_j(x)$ pour $j \in \{1, \dots, N\}$. En composant par la fonction logarithme pour linéariser l'expression en ψ , on obtient que les cellules de visibilité sont de la forme [1]

$$V_i(\psi) = \left\{ x \in \mathbb{S}^2 \mid \forall j, c(x, y_i) + \ln(\psi_i) \leq c(x, y_j) + \ln(\psi_j) \right\},$$

où $c(x, y) = -\ln(1 - \langle x | y \rangle)$.

Par construction, chaque rayon émis par la source ponctuelle et appartenant à la cellule $V_i(\psi)$ « touche » le miroir \mathcal{R}_ψ en un point qui appartient au paraboloides $\partial P(y_i, \psi_i)$ et qui est réfléchi dans la direction y_i . La quantité de lumière reçue dans la direction y_i est donc exactement la quantité de lumière émanant de la cellule de visibilité $V_i(\psi)$, c'est-à-dire $\mu(V_i(\psi))$. Or la quantité de lumière souhaitée dans la direction y_i est ν_i . L'équation à résoudre est donc $\mu(V_i(\psi)) = \nu_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. Par ailleurs, remarquons qu'un paraboloides de révolution est uniquement déterminé par son point focal, sa direction et sa distance focale. Le paramètre libre restant pour chaque paraboloides $\partial P(y_i, \psi_i)$ est la distance focale ψ_i . On arrive donc au problème discret suivant

Problème du miroir en champ lointain pour une source ponctuelle (semi-discret)

Trouver une famille de distances focales $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\forall i, \mu(V_i(\psi)) = \nu_i \quad (\text{Mir-Ponc-SD})$$

où $c(x, y) = -\ln(1 - \langle x | y \rangle)$ et

$$V_i(\psi) = \left\{ x \mid \forall j, c(x, y_i) + \ln(\psi_i) \leq c(x, y_j) + \ln(\psi_j) \right\}.$$

Nous verrons dans la partie 3 comment résoudre ce genre d'équations. Remarquons que si ψ

est un vecteur de distances focales solution du problème du miroir pour une source ponctuelle, alors la surface \mathcal{R} du miroir est paramétrée par

$$\mathcal{R}_\psi : x \in \mathbb{S}^2 \mapsto \min_i \frac{\psi_i}{1 - \langle x | y_i \rangle} x.$$

En pratique, nous supposons que la cible de lumière est incluse dans la demi-sphère $\mathbb{S}_-^2 := \{x \in \mathbb{S}^2, \langle x | e_z \rangle \leq 0\}$, que le support X_ρ de ρ est inclus dans la demi-sphère $\mathbb{S}_+^2 := \{x \in \mathbb{S}^2, \langle x | e_z \rangle \geq 0\}$, et que le miroir est paramétré au-dessus de X_ρ .

Remarque 1. La surface du miroir est par construction le bord d'un ensemble convexe, à savoir l'intersection des paraboloides pleins. Il est également possible de construire le miroir en prenant une union de paraboloides pleins plutôt qu'une intersection. Cela produit des miroirs qui sont a priori moins intéressants en pratique, car ils ne sont ni convexes ni concaves.

2.2 – Miroir pour une source collimatée

Nous reprenons maintenant le problème du miroir pour une source collimatée vu dans la partie 1.2. Comme précédemment, la mesure de probabilité modélisant la source de lumière a une densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue sur le plan. Par contre, la mesure de probabilité modélisant l'intensité de la lumière cible est discrète $\nu = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta_{y_i} \nu_i$ supportée sur un ensemble fini $Y = \{y_1, \dots, y_N\} \subset \mathbb{S}^2$ de directions deux à deux distinctes. Le problème consiste toujours à trouver la surface \mathcal{R} d'un miroir qui envoie la mesure μ sur la mesure ν .

Miroir avec des faces planaires. Nous choisissons de construire la surface \mathcal{R} du miroir comme le graphe d'une fonction hauteur affine par morceaux de la forme $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max_i \langle x | p_i \rangle - \psi_i$. Le vecteur p_i est choisi de telle sorte que le plan $P_i = \{(x, \langle x | p_i \rangle) \mid x \in \mathbb{R}^2\}$ réfléchisse les rayons verticaux de direction e_z dans la direction $y_i \in \mathbb{S}^2$.

Il reste donc à déterminer les hauteurs $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N$.

$$p_i = -\text{proj}_{\mathbb{R}^2}(y_i - e_z) / \langle y_i - e_z | e_z \rangle.$$

Étant donnée une famille de hauteurs $\psi \in \mathbb{R}^N$, on définit la cellule de visibilité $V_i(\psi)$ comme

$$V_i(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^2 \times \{0\} \mid \forall j, -\langle x | p_i \rangle + \psi_i \leq -\langle x | p_j \rangle + \psi_j\}.$$

Par construction, pour chaque $i \in \{1, \dots, N\}$, tout rayon vertical partant de $x \in V_i(\psi)$ touche le miroir

\mathcal{R} à une hauteur $\langle x | p_i \rangle - \psi_i$ et est réfléchi dans la direction y_i . Ainsi, la quantité de lumière réfléchie dans la direction y_i est donc $\mu(V_i(\psi))$. On arrive au problème discret suivant :

Problème du miroir en champ lointain pour une source collimatée (semi-discret)

Trouver des hauteurs $\psi \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$\forall i, \mu(V_i(\psi)) = \nu_i \quad (\text{Mir-Colli-SD})$$

où $c(x, y) = -\langle x | y \rangle$ et

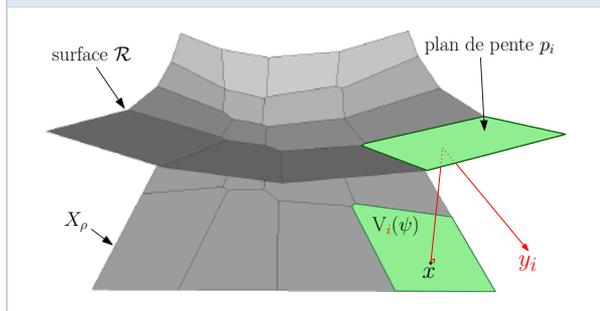
$$V_i(\psi) = \{x \mid \forall j, c(x, y_j) + \psi_j \leq c(x, y_i) + \psi_i\}.$$

Une solution de l'équation (Mir-Colli-SD) induit une paramétrisation de l'unique miroir convexe \mathcal{R} qui réfléchit μ sur ν :

$$\mathcal{R}_\psi : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x, \max_i \langle x | p_i \rangle - \psi_i) \in \mathbb{R}^3.$$

En pratique, on ne considère que la portion du miroir au-dessus du domaine $X_\rho := \{x \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}, \rho(x) \neq 0\}$.

FIGURE 5 – Miroir convexe pour une source collimatée



Remarque 2. La fonction \mathcal{R}_ψ étant le maximum de fonctions affines, elle est convexe. Le composant optique qui est au-dessus du graphe de cette application, est aussi convexe. Notons que l'on pourrait avoir la même construction en remplaçant le max dans la formule par un min. Cela aurait pour conséquence d'avoir une fonction \mathcal{R}_ψ concave et un miroir concave.

Remarque 3. Le problème (Mir-Colli-SD) rappelle beaucoup le problème de Minkowski en géométrie convexe, qui consiste à reconstruire un polyèdre convexe à partir des normales et aires de ses facettes. Oliker était d'ailleurs un doctorant d'Alexandrov, notamment connu pour ses travaux sur le problème de Minkowski.

2.3 – Problème des boulangeries

Nous présentons maintenant une analogie économique qui conduit à une équation ayant la même structure que dans les deux problèmes d'optique présentés ci-dessus. Nous supposons que X représente une ville dont la densité de population est donnée par ρ , que l'ensemble fini $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$ représente les localisations des boulangeries de la ville et que ν_i représente la quantité de pains disponibles dans la boulangerie y_i . Un habitant qui vit en une position x de X cherche naturellement la boulangerie minimisant le coût de déplacement $c(x, y_i)$, décomposant la ville en *cellules de Voronoï*,

$$\text{Vor}_i := \{x \in \Omega_X \mid \forall j, c(x, y_i) \leq c(x, y_j)\}.$$

Le nombre de clients de la boulangerie y_i est égal à l'intégrale de ρ sur Vor_i . Supposons qu'une boulangerie y_i reçoive trop de clients par rapport à sa capacité de production ν_i de pain, ce qui pourrait être le cas sur la figure 6 pour la boulangerie y_1 du centre où la densité de population est élevée. Cela signifie que l'on a $\mu(\text{Vor}_1) > \nu_1$, où on note $\mu(x) = \rho(x)dx$. L'intérêt du boulanger y_1 est alors d'augmenter le prix du pain. Cela aura pour effet de diminuer le nombre de clients potentiels mais d'augmenter le bénéfice du boulanger tant qu'il réussit à écouler tout son stock. On note ψ_i le prix du pain dans la boulangerie y_i . Si on suppose que les habitants vivant au point x font un compromis en minimisant la somme du coût de déplacement et du prix ($c(x, y_i) + \psi_i$), la ville se décompose alors en *cellules de Laguerre*

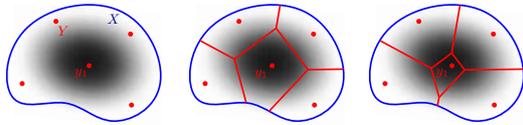
$$\text{Lag}_i(\psi) = \{x \in X \mid \forall j, c(x, y_i) + \psi_i \leq c(x, y_j) + \psi_j\}.$$

Le problème des boulangeries revient donc à trouver un vecteur de prix du pain $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N)$ de sorte que chaque boulangerie écoule tout son pain et que chaque point x du domaine reçoive une quantité $\rho(x)dx$ de pain, ce qui se traduit par l'équation

$$\mu(\text{Lag}_i(\psi)) = \nu_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Remarquons que l'équation ci-dessus a la même structure que celles des problèmes d'optique (Mir-Ponc-SD) et (Mir-Colli-SD). Nous allons voir dans la partie 3 comment résoudre cette classe d'équations.

FIGURE 6 – La guerre des boulangeries. La ville X a un bord bleu et la densité de population ρ est représentée par le niveau de gris. Les positions des boulangeries Y sont en rouge. Ici, $X, Y \subseteq \mathbb{R}^2$ et $c(x, y) = |x - y|^2$. On voit la décomposition de la ville en cellules de Voronoï (au milieu, prix uniforme) et en cellules de Laguerre (à droite, seul le prix du pain ψ_1 a augmenté).



Remarquons également que l'on n'a pas forcément $y_i \in \text{Lag}_i(\psi)$, et même que l'on peut avoir $\text{Lag}_i(\psi) = \emptyset$: en effet, si le pain est très cher dans une boulangerie, les personnes habitant à côté peuvent avoir intérêt à aller dans une boulangerie plus éloignée.

3. Résolution numérique

Les problèmes discrets mentionnés dans la partie précédente ont tous la même structure et nous nous intéressons ici à leur résolution numérique. Nous commençons par introduire l'équation de Monge-Ampère semi-discrète, et nous montrons que sa résolution est équivalente à la recherche de maximum d'une fonction concave. Nous présentons ensuite une méthode de Newton qui permet de résoudre efficacement ces équations.

3.1 – Équation de Monge-Ampère

Soit X un compact de l'espace \mathbb{R}^2 ou de la sphère \mathbb{S}^2 , soit $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$ et soit $c \in \mathcal{C}^1(X \times Y)$ une fonction coût. La cellule de Laguerre (qui correspond à une cellule de visibilité dans les cas d'optiques) associée à une famille de réels $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N$ est donnée par

$$\text{Lag}_i(\psi) = \left\{ x \in X \mid \forall j, c(x, y_i) + \psi_i \leq c(x, y_j) + \psi_j \right\}.$$

Nous supposons que la fonction coût satisfait à la condition de Twist

$$\forall x \in X \quad y \mapsto \nabla_x c(x, y) \text{ est injective,} \quad (\text{Twist})$$

qui garantit que les cellules de Laguerre partitionnent X à un ensemble négligeable près.

Soit maintenant μ une mesure de probabilité sur X de densité ρ par rapport à la mesure de volume, et $\nu = \sum_i \nu_i \delta_{y_i}$ une mesure de probabilité sur Y . Dans l'équation ci-dessous, la mesure de probabilité discrète ν est confondue avec le vecteur $\nu = (\nu_i)_{1 \leq i \leq N}$.

Equation de Monge-Ampère semi-discrète

Trouver $\psi \in \mathbb{R}^N$ vérifiant

$$G(\psi) = \nu, \quad (\text{MA})$$

où la fonction $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est définie par

$$G(\psi) = (G_1(\psi), \dots, G_N(\psi)) \text{ et } G_i(\psi) = \mu(\text{Lag}_i(\psi)).$$

Remarque 4. Les cellules de visibilité utilisées en optique, dans (Mir-Ponc-SD) et (Mir-Colli-SD), sont des cellules de Laguerre, avec respectivement

$$X = \mathbb{S}^2 \text{ et } c(x, y) = -\ln(1 - \langle x | y \rangle)$$

$$c(x, y) = -\ln(1 - \langle x | y \rangle) \text{ et } c(x, y) = -\langle x | y \rangle.$$

L'équation (MA) est alors une simple reformulation des équations (Mir-Ponc-SD) et (Mir-Colli-SD). On remarque que les cellules de Laguerre sont invariantes par addition d'une constante à ψ , et la solution de (MA) est donc définie à une constante additive près. Les problèmes d'optique ont une invariance analogue : par exemple, si une surface \mathcal{R} est solution du problème du miroir pour une source ponctuelle, alors $\lambda \mathcal{R}$ l'est aussi pour tout $\lambda > 0$.

3.2 – Formulation variationnelle

Le théorème suivant montre que la fonction G intervenant dans l'équation de Monge-Ampère semi-discrète est le gradient d'une fonction concave.

Théorème 1. On suppose que la fonction coût c satisfait à (Twist). Alors la fonction

$$\mathcal{K}(\psi) = \sum_{1 \leq i \leq N} \int_{\text{Lag}_i(\psi)} (c(x, y) + \psi_i) \rho(x) dx - \sum_{1 \leq i \leq N} \psi_i \nu_i$$

est concave, de classe \mathcal{C}^1 et de gradient

$$\nabla \mathcal{K}(\psi) = G(\psi) - \nu = (\mu(\text{Lag}_i(\psi)) - \nu_i)_{1 \leq i \leq N}.$$

Comme nous verrons dans le paragraphe suivant, la fonction \mathcal{K} est liée à la dualité de Kantorovitch dans la théorie du transport optimal. Nous l'appellerons *fonctionnelle de Kantorovitch*. Par ailleurs, comme une fonction concave de classe \mathcal{C}^1 atteint son maximum exactement en ses points critiques, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème 1, un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^N$ est solution de l'équation (MA) si et seulement si ψ est un maximum de \mathcal{K} .*

Remarque 5 (Existence). La fonction \mathcal{K} étant invariante par ajout d'une constante, on peut choisir de travailler sur l'ensemble \mathcal{M}_0 des vecteurs de moyenne nulle. On peut montrer que la fonction \mathcal{K} est propre sur \mathcal{M}_0 , i.e. $\lim_{\|\psi\| \rightarrow +\infty, \psi \in \mathcal{M}_0} \mathcal{K}(\psi) = -\infty$, ce qui garantit qu'elle atteint son maximum : le problème (MA) possède donc une solution.

3.3 – Lien avec le transport optimal

La formulation variationnelle de l'équation de Monge-Ampère, c'est-à-dire la recherche d'un maximiseur de la fonctionnelle de Kantorovitch, correspond en fait au dual du problème de Monge-Kantorovitch dans la théorie du transport optimal. Nous détaillons ci-dessous ce lien dans le cas semi-discret. Le lecteur intéressé par les démonstrations pourra consulter par exemple le chapitre de livre [4].

Problème de Monge. La mesure image d'une mesure de probabilité μ sur X par une application mesurable $T : X \rightarrow Y$ est la mesure $T_{\#}\mu$ sur Y définie par $T_{\#}\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$. Si $T_{\#}\mu = \nu$, on dira que T transporte μ vers ν . Lorsque l'ensemble Y est fini, $T_{\#}\mu = \sum_{1 \leq i \leq N} \mu(T^{-1}(y_i))\delta_{y_i}$.

Le problème de transport optimal de Monge consiste à trouver un transport T entre μ et ν minimisant le coût total $\int_X c(x, T(x))d\mu(x)$. Si la fonction coût c vérifie la condition de Twist, des travaux de Brenier et Gangbo-McCann (reposant sur la dualité de Kantorovich) montrent l'existence d'un minimiseur pour ce problème lorsque la source μ est absolument continue. On peut par exemple énoncer

Théorème 2 (Dualité de Kantorovitch). *Supposons que c satisfait à la condition (Twist) et que μ est absolument continue. Alors*

$$\min_{\substack{T: X \rightarrow Y \\ T_{\#}\mu = \nu}} \int_X c(x, T(x))d\mu(x) = \max_{\psi \in \mathbb{R}^N} \mathcal{K}(\psi).$$

Si de plus ψ est un maximiseur de \mathcal{K} , alors la fonction $T_{\psi} : X \rightarrow Y$ définie μ -p.p. par $T_{\psi}|_{\text{Lag}_y(\psi)} = y$ réalise le minimum dans le problème de Monge.

Remarque 6. Les équations de Monge-Ampère ne dérivent pas toutes d'un problème de transport optimal et n'admettent pas toutes des formulations variationnelles. Ces deux propriétés fortes proviennent en fait de la structure très particulière des

cellules de Laguerre, et plus précisément de l'affinité des fonctions $\psi \mapsto c(x, y) + \psi(y)$.

On a vu que les problèmes d'optique en champ lointain présentés dans la partie 2 ont cette structure. En revanche, si l'on considère les problèmes de construction de miroirs pour une cible de lumière est en champ proche (c.-à-d. que l'on éclaire des points dans \mathbb{R}^3 et pas des directions à l'infini), on a toujours des équations de Monge-Ampère semi-discrète à résoudre, mais les cellules de Laguerre sont de la forme

$$\text{Lag}_i(\psi) = \{x \in X \mid \forall j, G(x, y_i, \psi_i) \leq G(x, y_j, \psi_j)\},$$

où la fonction G est non linéaire en ψ . Ces équations ne dérivent pas du problème de transport optimal et n'admettent en fait pas de formulation variationnelle. Elles sont appelées *équations de jacobien généré prescrit* par Trudinger, et font l'objet de recherches récentes aussi bien en analyse que dans des domaines plus appliqués (optique, économie).

3.4 – Dérivées et cellules de Laguerre

Avant d'écrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $G(\psi) = \nu$, nous avons besoin de montrer que la fonction G est de classe \mathcal{C}^1 (ou de manière équivalente que \mathcal{K} est de classe \mathcal{C}^2), de calculer ses dérivées partielles et d'étudier la (stricte) concavité de \mathcal{K} . Pour cela, nous avons besoin d'une hypothèse de généricité qui est un peu technique, mais qui est naturelle et n'est pas restrictive en pratique. Dans les cas d'optique mentionnés dans cet article, ces conditions sont satisfaites si l'intersection de trois cellules de Laguerre est finie et que l'intersection de deux cellules de Laguerre avec le bord de X est aussi finie. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter le chapitre de livre [4].

Théorème 3 (Différentielle de G). *Supposons que le coût vérifie (Twist), que Y est générique (cf. ci-dessus), et que ρ est continue, alors l'application $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe \mathcal{C}^1 et*

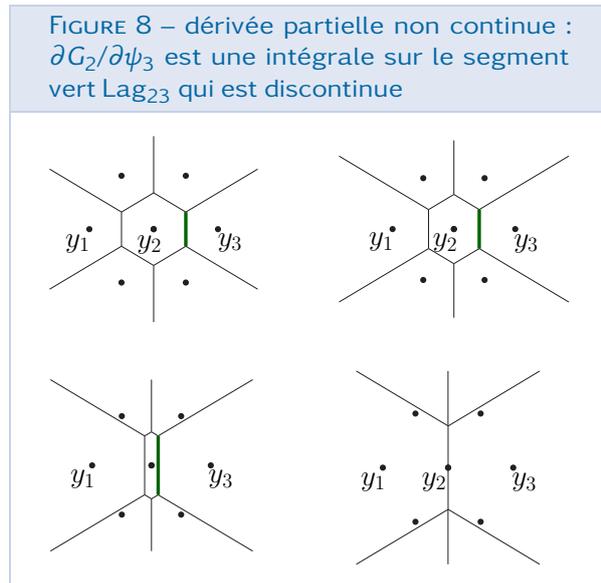
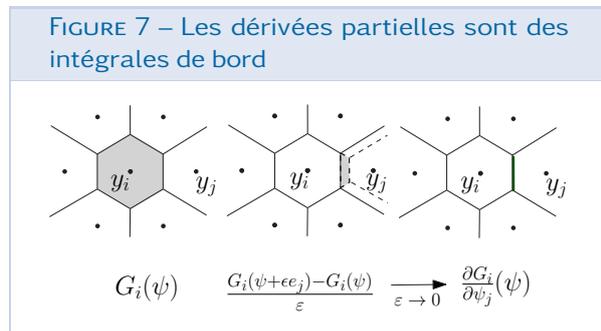
$$\forall j \neq i, \frac{\partial G_i}{\partial \psi_j}(\psi) = \int_{\text{Lag}_{ij}(\psi)} \frac{\rho(x)}{\|\nabla_x c(x, y_i) - \nabla_x c(x, y_j)\|} dx,$$

$$\forall i, \frac{\partial G_i}{\partial \psi_i}(\psi) = - \sum_{j \neq i} \frac{\partial G_j}{\partial \psi_j}(\psi)$$

où $\text{Lag}_{ij}(\psi) = \text{Lag}_i(\psi) \cap \text{Lag}_j(\psi)$.

La formule des dérivées partielles de G est en réalité très géométrique. On explique dans les deux figures suivantes pour le coût quadratique sur \mathbb{R}^2 pourquoi on intègre sur les interfaces $\text{Lag}_{ij}(\psi)$ et

comment les singularités de DG sont liées à la géométrie des points y_i . La figure 7 illustre le fait que la dérivée partielle $\partial G_i/\partial \psi_j(\psi)$ est une intégrale sur l'interface $\text{Lag}_{ij}(\psi)$: la valeur $G_i(\psi)$ est une intégrale sur la cellule de Laguerre $\text{Lag}_i(\psi)$ (en grisé à gauche); on augmente la valeur ψ_j de $\varepsilon > 0$ en considérant $\psi + \varepsilon e_j$; le taux d'accroissement $(G_i(\psi) - G_i(\psi + \varepsilon e_j))/\varepsilon$ revient à faire une intégrale sur la différence de deux cellules de Laguerre (en grisé au milieu); en passant à la limite on obtient une intégrale sur le segment vert $\text{Lag}_{ij}(\psi)$. Notons que le signe peut aussi être interprété avec la métaphore des boulangeries : quand le prix du pain ψ_i augmente, le nombre de clients de la boulangerie y_i diminue (i.e. la cellule de Laguerre $\text{Lag}_i(\psi)$ rapetisse) et ceux des autres boulangeries augmentent, ainsi $\partial G_i/\partial \psi_i(\psi) \leq 0$ et $\partial G_i/\partial \psi_j(\psi) \geq 0$ pour $j \neq i$.



Sur la figure 8, la condition de généricité n'est pas vérifiée car y_1, y_2 et y_3 sont alignés. Cela implique qu'il existe un vecteur ψ pour lequel $\text{Lag}_1(\psi) \cap \text{Lag}_2(\psi) \cap \text{Lag}_3(\psi)$ n'est pas réduit à un

point, mais est un segment de droite. La dérivée partielle $\partial G_2/\partial \psi_3(\psi)$ est une intégrale sur le segment (vert) $\text{Lag}_{23}(\psi)$. Si on diminue simultanément ψ_1 et ψ_2 d'une même quantité, on voit que le segment $\text{Lag}_{23}(\psi)$ varie de manière continue puis brusquement est vide quand la cellule $\text{Lag}_2(\psi)$ devient vide (voir le dessin en bas à droite sur la figure 8). On en déduit que $\partial G_2/\partial \psi_3(\psi)$ n'est pas continue. La méthode de Newton nécessite une certaine régularité et nous verrons ci-dessous que celle-ci converge sous des hypothèses de généricité.

Pour établir la convergence de la méthode de Newton, nous avons également besoin d'étudier la concavité de la fonctionnelle de Kantorovitch \mathcal{K} (ou de manière équivalente la monotonie de G , car $D^2\mathcal{K} = DG$). Notons que les fonctions \mathcal{K} et G sont invariantes par addition d'un vecteur constant (c.-à-d. $\mathcal{K}(\psi + C(1, \dots, 1)) = \mathcal{K}(\psi)$), ce qui se voit dans la définition des cellules de Laguerre. La fonctionnelle \mathcal{K} n'est donc pas strictement concave, mais le théorème suivant nous garantit qu'elle est strictement concave dans l'orthogonal des vecteurs constants en les vecteurs $\psi \in \mathbb{R}^N$ choisis tels que toutes les cellules de Laguerre aient de la masse.

Théorème 4 (Stricte concavité). *On se place sous les hypothèses du théorème précédent. Soit*

$$\mathcal{C}_+ := \{\psi \in \mathbb{R}^N \mid \forall i, G_i(\psi) > 0\}.$$

$$\mathcal{M}_0 := \{v \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{1 \leq i \leq N} v_i = 0\}.$$

Si l'ensemble $\{\rho > 0\}$ est connexe, la fonction \mathcal{K} est localement fortement concave sur \mathcal{C}_+ dans la direction \mathcal{M}_0 :

$$\forall \psi \in \mathcal{C}_+, \forall v \in \mathcal{M}_0 \setminus \{0\} \quad \langle DG(\psi)v \mid v \rangle < 0.$$

Remarque 7 (Unicité). On a vu plus haut qu'il existe un maximum à la fonction \mathcal{K} et donc une solution à l'équation (MA). Le théorème précédent implique que ce maximum est unique si on impose une condition de moyenne nulle, puisqu'une fonction strictement concave admet au plus un maximum local. On en déduit qu'il existe un unique vecteur ψ^* vérifiant $G(\psi^*) = \nu$ et dont la moyenne est nulle (c.-à-d. $\sum_i \psi_i^* = 0$).

Nous verrons dans le paragraphe suivant comment ces résultats de régularité et de monotonie permettent de construire itérativement une suite $(\psi^{(k)})_{k \geq 0}$ convergeant vers l'unique ψ^* de moyenne nulle vérifiant $G(\psi^*) = \nu$.

3.5 – Méthode de Newton

Méthode de Newton en 1D. Nous commençons par rappeler cette méthode pour résoudre l'équation $g(x) = 0$, où $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction réelle. La méthode de Newton part de $x^0 \in \mathbb{R}$ et construit par récurrence la suite $x^{k+1} = x^k - g(x^k)/g'(x^k)$. Si on suppose que g est de classe \mathcal{C}^1 et qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$, alors la formule de Taylor-Lagrange permet de montrer que pour x^0 suffisamment proche de a , la suite $(x^k)_{k \geq 0}$ converge vers a . On dit alors que la convergence est locale. Autrement dit, sous des hypothèses de régularité (classe \mathcal{C}^1) et de monotonie (g' ne s'annule pas dans un voisinage de a), la méthode de Newton converge localement.

Dans notre cas, le fait que g' ne s'annule pas est remplacé par le fait que la différentielle $D\mathcal{K}(\psi)$ doit être inversible, ce qui nécessite de considérer sa restriction à l'ensemble \mathcal{M}_0 des vecteurs de moyenne nulle.

Méthode de Newton (locale). On suppose donné un vecteur $\psi^0 \in \mathbb{R}^N$ de moyenne nulle et construit de sorte que la masse de toutes les cellules de Laguerre soit strictement positive :

$$\varepsilon_0 := \frac{1}{2} \min \left[\min_{y \in Y} G_i(\psi^0), \min_{1 \leq i \leq N} \nu_{y_i} \right] > 0.$$

On définit ψ^{k+1} itérativement de la manière suivante : on commence par calculer la direction de Newton, c.-à-d. l'unique vecteur d^k (d'après le théorème 4) vérifiant

$$DG(\psi^k)d^k = -(G(\psi^k) - \nu) \text{ et } \sum_i d_i^k = 0.$$

La seconde équation permet de pallier l'invariance de G et donc à la non-inversibilité de $DG(\psi^k)$. On définit alors $\psi^{k+1} = \psi^k + d^k$. Comme dans le cas 1D, on peut montrer que la méthode converge localement : si ψ^0 est choisi suffisamment proche de la solution ψ^* , alors la suite (ψ^k) converge vers ψ^* .

Méthode de Newton (globale). Une modification très simple de la méthode permet d'avoir une convergence globale, c.-à-d. sans imposer à ψ^0 d'être proche d'une solution. Pour cela, on doit construire ψ^{k+1} de telle manière que le noyau de la jacobienne $DG(\psi^{k+1})$ reste réduit aux vecteurs constants, afin que le système définissant la direction d^{k+1} admette une unique solution. Pour cela,

on définit le pas τ^k comme le plus grand réel de la forme $2^{-\ell}$ (avec $\ell \in \mathbb{N}$) tel que $\psi^{k,\ell} := \psi^k + 2^{-\ell} d^k$ vérifie

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, N\} & G_i(\psi^{k,\ell}) \geq \varepsilon_0 \\ \|G(\psi^{k,\ell}) - \nu\| \leq (1 - 2^{-(\ell+1)}) \|G(\psi^k) - \nu\| \end{cases}$$

Enfin, on définit $\psi^{k+1} = \psi^k + \tau^k d^k$.

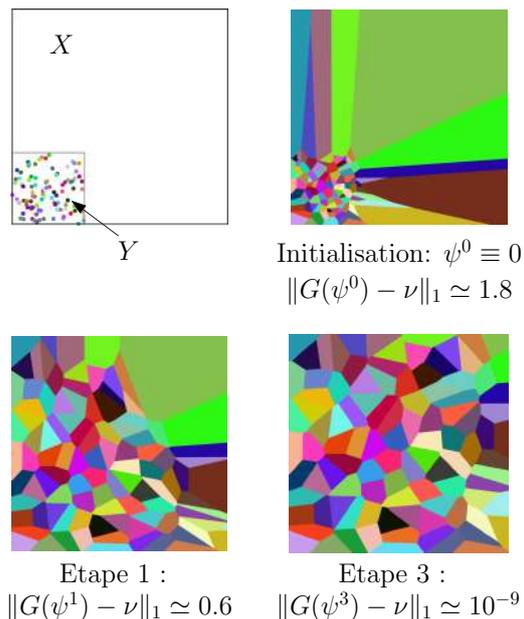
En utilisant les résultats de régularité et de concavité sur \mathcal{K} , on arrive à borner inférieurement le pas τ^k ce qui permet d'obtenir la convergence de la suite vers une solution du problème de transport optimal [4] :

Théorème 5. *Sous les hypothèses du théorème 4, il existe $\tau^* > 0$ tel que*

$$\|G(\psi^{k+1}) - \nu\| \leq \left(1 - \frac{\tau^*}{2}\right) \|G(\psi^k) - \nu\|.$$

En particulier, la suite $(\psi^k)_{k \geq 0}$ converge vers l'unique solution ψ^* de (MA) vérifiant $\sum_i \psi_i^* = 0$.

FIGURE 9 – Convergence de la suite (ψ^k) . Sur les images 2, 3 et 4 on visualise les cellules de Laguerre $\text{Lag}_i(\psi^k)$ pour $k = 0, 1, 3$



Remarque 8 (Convergence quadratique). Le théorème ci-dessus montre que la convergence de la méthode de Newton est globalement exponentielle. Cette convergence est en fait appelée *convergence linéaire* en optimisation. Quand le coût c satisfait

à la condition *Ma-Trudinger-Wang* (MTW) qui apparaît dans la théorie de la régularité du transport optimal, et que la densité ρ est lipschitzienne, la convergence est même localement quadratique [3], c.-à-d. que l'on a pour k suffisamment grand

$$\|G(\psi^{k+1}) - \nu\| \leq \frac{1}{2} \|G(\psi^k) - \nu\|^2.$$

En pratique, la convergence est très rapide et le bassin de convergence quadratique semble assez large, ce qui n'est pas encore expliqué. Sur la figure 9, $X = [0, 1]^2$ est le grand carré blanc et Y est un ensemble de points situés dans le coin en bas à gauche et $c(x, y) = \|x - y\|^2$. Avec $N = 100$ points, l'erreur en norme L^1 commise au bout de trois itérations est déjà de l'ordre de 10^{-9} . Même pour des exemples difficiles, de taille $N = 10^7$, on peut trouver une solution à précision numérique en seulement 17 itérations!

4. Applications à l'optique anidolique

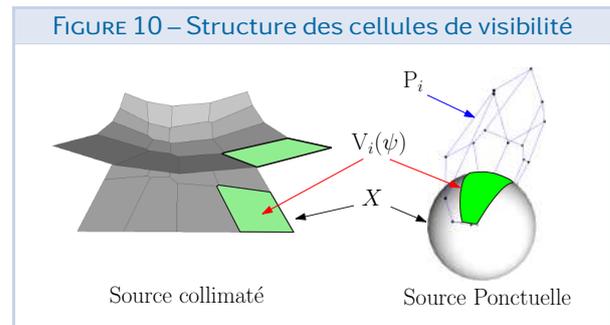
Nous présentons dans cette partie l'adaptation des méthodes semi-discrètes à la résolution pratique de problèmes inverses en optique. Ces résultats ont été obtenus dans le cadre de thèse de Jocelyn Meyron et les images sont issues de [5].

4.1 – Problèmes en champ lointain

Nous avons vu dans la partie 2 que dans plusieurs problèmes en champ lointain, c.-à-d. quand la lumière cible est à l'infini, la résolution de l'équation de Monge-Ampère (MA) permet de construire un composant optique. Cela concerne la modélisation de miroirs ou de lentilles, avec une source de lumière ponctuelle ou collimatée, et dans chaque cas il est possible de produire deux composants (dont un est convexe) : on a donc formulé huit problèmes d'optique en champ proche.

La difficulté principale de la mise en œuvre de l'algorithme de Newton pour résoudre (MA) réside dans l'évaluation de la fonction G et de sa différentielle DG au point ψ^k , et plus précisément dans le calcul de l'ensemble des cellules de Laguerre $Lag_i(\psi^k)$. Pour les cellules issues des problèmes d'optique non imageante, aussi appelées cellules de visibilité, il est possible de réaliser ce calcul en un temps presque linéaire en le nombre N de masses

de Dirac. Prenons par exemple le problème du miroir pour une source de lumière ponctuelle. Les cellules de visibilité sont obtenues en projetant radialement sur la sphère une intersection de paraboloides confocaux « pleins » et nous avons déjà vu que l'intersection de deux paraboloides confocaux est incluse dans un plan. Un autre calcul simple montre que la projection radiale d'une telle intersection est également incluse dans un (autre) plan. Ceci montre que les cellules de visibilité sont séparées par des hyperplans. On peut en fait montrer qu'il existe une partition de \mathbb{R}^3 en polyèdres convexes P_1, \dots, P_N – appelée *diagramme de puissance* en géométrie algorithmique – telle que chaque cellule de visibilité soit de la forme $V_i(\psi) = \mathbb{S}^2 \cap P_i$ (figure 10). Une propriété analogue est vraie pour chacun des huit autres problèmes. L'intérêt de cette reformulation est qu'il existe des bibliothèques performantes – par exemple CGAL ou GEOGRAM – permettant de calculer des diagrammes de puissance en dimension 2 et 3, et donc les cellules de Laguerre associées aux problèmes d'optique.



Il est dès lors possible de mettre en œuvre l'algorithme de Newton amorti, et de s'en servir pour construire numériquement et même physiquement des miroirs et des lentilles pour l'optique anidolique en champ lointain.

4.2 – Problèmes en champ proche

Il est également possible de traiter des cibles de lumière plus réalistes, en *champs proche* – c.-à-d. que l'on éclaire des points à une distance finie, et non plus des directions – avec une méthode itérative qui résout à chaque étape une solution en champ lointain [5]. La convergence est très rapide – en pratique, on n'utilise que 6 itérations – et est illustrée dans la figure 11.

Dans toutes les expériences présentées ci-dessous, la source de lumière est supposée uni-

forme, ce que se traduit par une mesure source μ constante sur son support. La réflexion ou réfraction de cette lumière sur un mur est simulée dans l'ordinateur par le logiciel de rendu physiquement réaliste LUXRENDER.

FIGURE 11 – Convergence des miroirs en champ lointain vers des miroirs en champ proche



Méthode générique. La méthode de construction des composants optiques permet ainsi de traiter plusieurs problèmes d'optique anidolique (sources ponctuelles ou parallèles, miroirs ou lentilles, composants convexes ou concaves, champs proches ou lointains) de manière unifiée, précise et automatique (figures 12, 13 et 14). Sur les figures 12 et 13, on peut voir à gauche les cellules de visibilité sur la sphère ou le plan au-dessus desquelles on a la surface du composant optique. Chaque surface est représentée dans l'ordinateur par un maillage (un ensemble de triangles) qui est représenté au milieu. La simulation de la lumière projetée avec le moteur de rendu physiquement réaliste LUXRENDER est à gauche.

FIGURE 12 – Miroirs pour une source collimatée (haut) et ponctuelle (bas); cellules de visibilité (gauche), maillage du composant (milieu) et rendu avec LuxRender (droite)

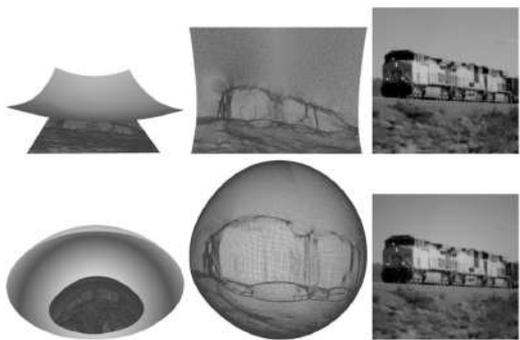


FIGURE 13 – Lentilles pour une source collimatée (haut) et ponctuelle (bas); cellules de visibilité (gauche), maillage du composant (milieu) et rendu avec LuxRender (droite)

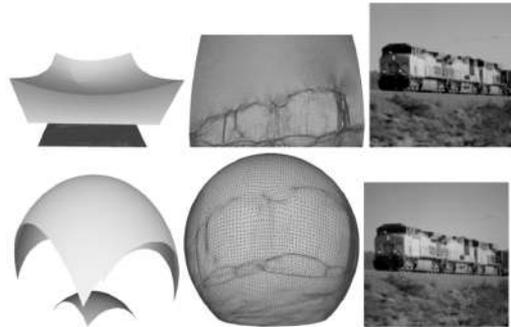
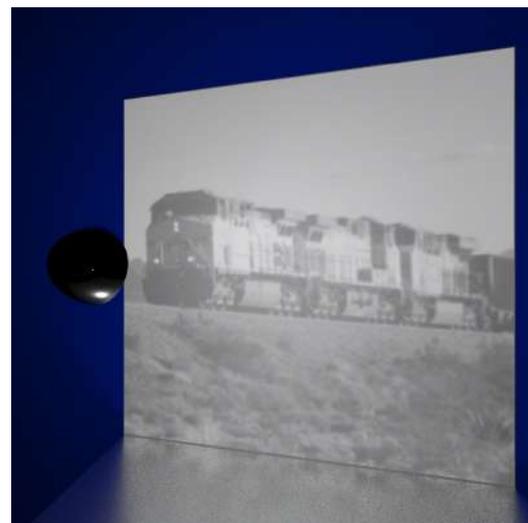
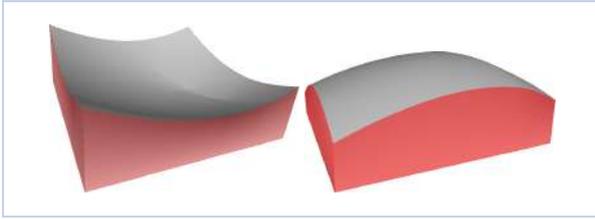


FIGURE 14 – Une lumière ponctuelle (que l'on ne voit pas) est située devant le miroir et la trajectoire de la lumière est simulée dans l'ordinateur avec le moteur de rendu physiquement réaliste LUXRENDER



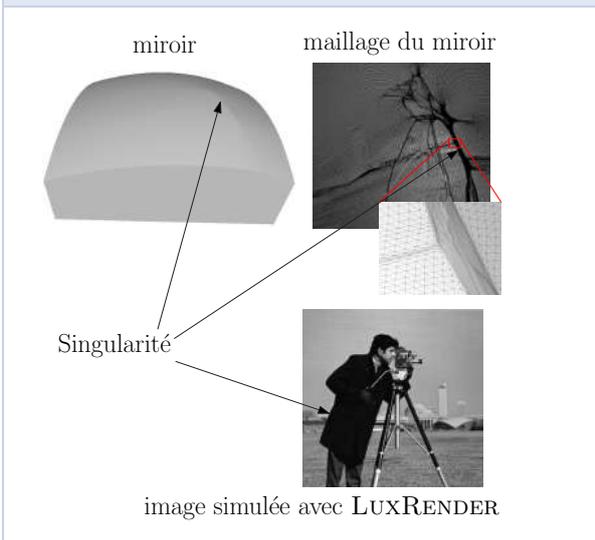
Convexité / concavité des composants. Dans certaines applications, on cherche parfois à construire des composants optiques avec des propriétés de convexité. C'est le cas dans l'industrie automobile pour la construction de miroirs et ou de lentilles. La raison est d'une part pratique, car l'usage d'un composant convexe est plus facile à réaliser, mais aussi d'ordre esthétique. Par construction, dans le cas des sources collimatées, on peut toujours construire des miroirs ou des lentilles qui soient convexes ou concaves, comme on peut le voir sur la figure 15.

FIGURE 15 – Lentilles concave et convexe



Singularité des solutions. Les composants optiques que l'on obtient sont par construction des objets ayant une régularité uniquement \mathcal{C}^0 . En effet, il s'agit de surfaces composées de morceaux de plans, de paraboloides ou d'ellipsoïdes (dans le cas d'un miroir pour une source ponctuelle) qui se recollent de manière continue, mais non \mathcal{C}^1 . Cela étant, quand la discrétisation de la lumière cible est de plus en plus fine, la surface tend vers un objet qui a une régularité plus grande. On observe sur la figure 16 une régularité \mathcal{C}^1 , sauf aux points de la surface qui correspondent à des zones noires sur l'image cible. Intuitivement, le manque de régularité provient du fait que la lumière doit éviter les zones noires, ce qui se traduit par un saut dans le champ de vecteur normal à la surface.

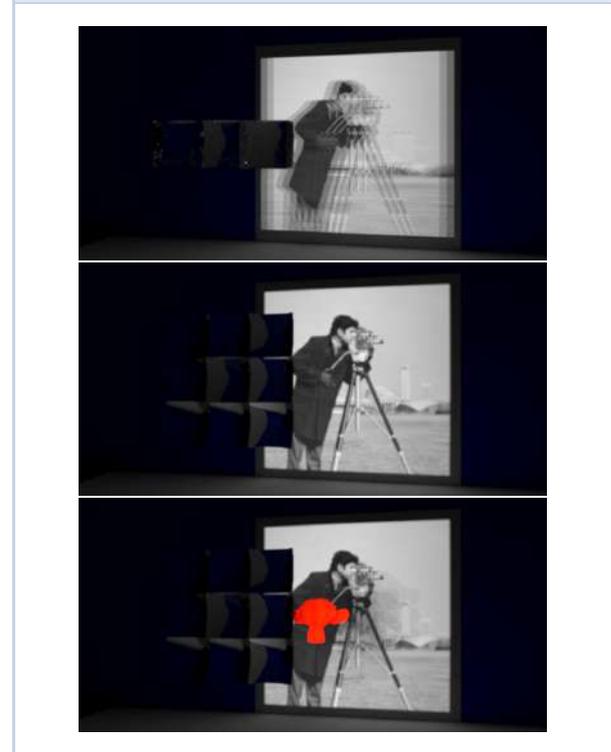
FIGURE 16 – Singularité et maillage (les singularités de la surface correspondent aux zones noires)



Coussinets. La partie intérieure d'un phare de voiture est classiquement composée de « coussinets », c'est-à-dire de plusieurs petits composants. Chaque coussinet a pour but d'éclairer un ensemble de directions assez large, et les lumières envoyées par chaque coussinet se superposent. Cela garantit une

certaine robustesse dans l'éclairage. En particulier, si un oiseau passe devant les phares sans être trop proche, il n'obstrue pas toute la lumière et la route est bien intégralement éclairée. Sur la figure 17, la cible de lumière visée par chaque coussinet est l'image du cameraman. Quand les calculs sont faits en champ lointain, c'est-à-dire quand on éclaire des directions, les images se superposent, mais avec un décalage lié à la taille des coussinets. Pour obtenir une image nette, il est nécessaire de faire les calculs en champ proche, de manière à éclairer exactement les points souhaités. Remarquons que la cible est toujours éclairée même si un obstacle – par exemple une tête de singe rouge – se dresse devant certains des coussinets.

FIGURE 17 – Lentille composée de 9 coussinets : en champ lointain (haut) ; en champ proche (milieu) ; avec obstacle (bas)



Cible de lumière en couleurs. De la même manière, la résolution en champ proche permet d'éclairer une cible de lumière en couleur. En effet on peut construire un composant optique pour chaque canal (le rouge, le vert et le bleu). Ensuite, on envoie chacune des trois lumières sur le composant qui lui est associé et les couleurs s'ajoutent sur la cible pour former une image en couleur. C'est ce qui est fait dans la figure 18 avec trois lentilles.

FIGURE 18 – Image en couleur



FIGURE 19 – Lentille transformant une source de lumière collimatée en train



FIGURE 20 – Lentille transformant une source de lumière collimatée en cameraman



Réalisation concrète de miroirs et de lentilles. Nous avons aussi créé des composants optiques. Les lentilles et miroirs des figures 19, 2 et 21 ont été usinés par la plateforme technologique GINOVA à Grenoble sur une machine 3 axes CNC (*commande numérique par ordinateur*) avec des fraises de 10mm de rayon. Le trajet de la fraise crée des irrégularités sur les composants optiques (figure 22). Notons que la convexité des composants optiques permet d'utiliser des rayons de fraise arbitrairement grands, ce qui diminue les irrégularités d'usage. Il est dans tous les cas nécessaire de poncer sous l'eau, puis de polir les composants optiques (figure 23). Bien entendu, cela affecte la qualité optique et a tendance à blanchir les zones noires sur l'image visée.

FIGURE 21 – Lentille transformant une source de lumière collimatée en cameraman



FIGURE 22 – Miroirs et lentilles après usinage



FIGURE 23 – Ponçage et polissage à la main



Références

- [1] L. CAFFARELLI et V. OLIKER. « Weak solutions of one inverse problem in geometric optics ». *Journal of Mathematical Sciences* **154**, n° 1 (2008), p. 39-49.
- [2] P. GUAN et X.-J. WANG. « On a Monge-Ampere equation arising in geometric optics ». *J. Differential Geom* **48**, n° 2 (1998), p. 205-223.

- [3] J. KITAGAWA, Q. MÉRIGOT et B. THIBERT. « Convergence of a Newton algorithm for semi-discrete optimal transport ». *Journal of the European Mathematical Society* (2019).
- [4] Q. MÉRIGOT et B. THIBERT. « Optimal transport: discretization and algorithms ». In : *Handbook of Numerical Analysis, Geometric PDEs*. Vol. 22. 2020, to appear.
- [5] J. MEYRON, Q. MÉRIGOT et B. THIBERT. « Light in power: a general and parameter-free algorithm for caustic design ». In : *SIGGRAPH Asia 2018 Technical Papers*. ACM Transaction on Graphics. 2018, p. 224.
- [6] X.-J. WANG. « On the design of a reflector antenna ». *Inverse problems* 12, n° 3 (1996), p. 351.



Quentin MÉRIGOT

Laboratoire de mathématiques d'Orsay, université Paris-Sud.

quentin.merigot@u-psud.fr

<http://quentin.mrgt.fr/>

Quentin MÉRIGOT est professeur de mathématiques appliquées. Ses travaux combinent transport optimal et géométrie computationnelle pour la résolution numérique d'EDP et de problèmes inverses.



Boris THIBERT

Laboratoire Jean Kuntzmann, université Grenoble Alpes

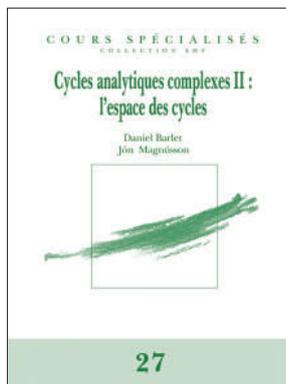
Boris.Thibert@univ-grenoble-alpes.fr

<https://ljk.imag.fr/membres/Boris.Thibert/>

Boris Thibert est maître de conférences en mathématiques appliquées. Ses travaux portent sur les aspects numériques du transport optimal, des équations de Monge-Ampère et de l'intégration convexe.

Les auteurs remercient Damien Gayet pour sa relecture attentive et ses nombreux conseils.

Cours spécialisés - nouveauté



Vol. 27

Cycles analytiques complexes II : l'espace des cycles

D. BARLET, J. MAGNUSSON

ISBN 978-2-85629-907-4

2020 - 567 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 75 € - Members: 53 €

Ce second volume commence par donner la construction de l'espace des cycles compacts d'un espace complexe donné. On y trouvera les démonstrations des résultats admis dans le premier volume. Les chapitres qui suivent traitent des sujets dont voici la liste :

- Classe fondamentale d'un cycle. Relation entre famille analytique de cycles et classe fondamentale relative.
- Théorie de l'intersection avec paramètres dans une variété complexe puis dans un espace complexe quasi-lisse.
- Variété de Chow et espace des cycles d'un espace complexe quasi-projectif.
- Morphisme Douady Cycles.
- Convexité holomorphe dans l'espace des cycles compacts et intégration de classes de δ^- -cohomologie.
- L'espace des cycles compacts d'une variété Kählérienne est Kählérien.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

*frais de port non compris



La « sunset conjecture » d'Erdős

• É. MATHERON

1. Introduction

1.1 – Ce dont il s'agit

La plupart des lecteurs de la *Gazette* ont certainement entendu parler du *Théorème de van der Waerden* : si on partitionne \mathbb{N} en un nombre fini de morceaux A_1, \dots, A_r , alors l'un des A_i doit contenir des progressions arithmétiques arbitrairement longues, *i.e.* des ensembles de la forme $\{a, a + d, a + 2d, \dots, a + ld\}$ avec $d \geq 1$ et l arbitrairement grand. Ce théorème date de 1927. C'est l'une des trois « perles » rassemblées dans [9], et un résultat assez emblématique de ce qu'on appelle communément la « théorie de Ramsey ».

Un résultat beaucoup plus fort a été démontré par Szemerédi [13] en 1975 : si A est un ensemble d'entiers de densité supérieure strictement positive, alors A contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues. Dire que A est de densité supérieure strictement positive signifie qu'il existe des intervalles d'entiers $\llbracket 0, N \rrbracket$ arbitrairement grands dans lesquels on trouve toujours (au moins) une certaine proportion fixe et non nulle d'éléments de A ; autrement dit, que

$$\bar{d}(A) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap \llbracket 0, N \rrbracket|}{N+1} > 0.$$

Le Théorème de van der Waerden se déduit immédiatement du Théorème de Szemerédi, car si $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_r$ alors l'un des A_i est certainement de densité supérieure strictement positive.

Les preuves originales de van der Waerden et Szemerédi étaient purement combinatoires. Grâce à Furstenberg, on sait depuis les années 1980 qu'il est possible de démontrer énormément de résultats de ce type par des méthodes de dynamique topologique ou de théorie ergodique : ceci est magnifiquement expliqué dans [5], un livre à emporter sur l'île déserte.

En ce qui concerne l'approche topologique, il y a deux façons de faire : ou bien se servir de résultats de dynamique topologique formulés dans un lan-

gage « classique », ou bien utiliser ces objets assez peu mainstream qu'on appelle les *ultrafiltres* (voir par exemple [14], un autre livre à emporter sur l'île déserte).

Voici un autre résultat de théorie de Ramsey particulièrement célèbre, démontré par Hindman [7] en 1974 : si $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_r$, alors l'un des A_i contient ce qu'on appelle un *ensemble IP*, c'est-à-dire l'ensemble constitué par toutes les sommes d'éléments deux à deux distincts d'un certain ensemble infini D .

En particulier : si $\mathbb{N} = A_1 \cup \dots \cup A_r$, alors l'un des A_i contient un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis (couper l'ensemble D en 2 morceaux infinis).

Il est naturel de se demander si le Théorème de Hindman peut se renforcer « à la Szemerédi » de la même façon que le Théorème de van der Waerden; autrement dit, si tout ensemble d'entiers de densité supérieure strictement positive contient nécessairement un ensemble IP. C'est clairement faux : l'ensemble des nombres impairs pose problème. Cependant, tous les enfants savent bien que l'ensemble des nombres impairs contient la somme de deux ensembles infinis (la somme d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair). Ceci mène à la question suivante, qui a été posée par Erdős en 1977.

Question. *Est-il vrai que si $A \subseteq \mathbb{N}$ vérifie $\bar{d}(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis ?*

C'est assurément une très jolie question, intrigante, facile à comprendre, et potentiellement difficile à résoudre. Pourtant, force est de constater que, contrairement à d'autres « conjectures d'Erdős », elle n'a pas franchement passionné les foules. Straus a montré en 1977 qu'il n'est pas vrai que tout ensemble A de densité supérieure strictement positive contienne un ensemble de la forme $B + C$ où B est infini et C est un translaté de B . Nathanson [12] a montré en 1980 que si $\bar{d}(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B + C$ où $\bar{d}(B) > 0$ et C est un ensemble fini de cardinalité aussi grande qu'on veut. Et puis... plus rien jusqu'en

2015, où Di Nasso, Goldbring, Jin, Leth, Lupini et Mahlburg [2] ont montré que la réponse à la question est positive si on suppose que $\overline{d}(A) > 1/2$.

En 2019, Moreira, Richter et Robertson [11] ont montré que la réponse à la question d’Erdős est positive en toute généralité. Ils obtiennent en fait un résultat plus fort, énoncé plus bas.

La démonstration donnée dans [11] est longue et utilise sans modération les ultrafiltres. Très peu de temps après [11], Host [8] a donné une démonstration beaucoup plus courte reposant sur des idées « classiques » de dynamique topologique et de théorie ergodique. Dans cet article, je voudrais tenter d’expliquer ces deux preuves.

1.2 – L’énoncé précis

On a besoin de savoir ce qu’est une *suite de Følner*. Si on veut briller en société, on peut expliquer que les suites de Følner sont des objets très importants car intimement liés à la notion de *moyennabilité* ; voir par exemple [6].

Pour nous, une suite de Følner sera simplement une suite $F = (F_N)_{N \geq 0}$ de parties finies (non vides) de \mathbb{N} possédant la propriété suivante : pour tout $a \in \mathbb{N}$, la suite translatée $a + F := (a + F_N)_{N \geq 0}$ est « asymptotiquement proche » de F . De façon précise, en notant $A \Delta B$ la différence symétrique de deux parties de \mathbb{N} , on dira que $F = (F_N)$ est une suite de Følner si, pour tout $a \in \mathbb{N}$,

$$\frac{|(a + F_N) \Delta F_N|}{|F_N|} \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

L’exemple le plus important est le suivant : toute suite d’intervalles (F_N) dont la longueur tend vers l’infini est une suite de Følner. C’est évident puisque si F est un intervalle et si $a \in \mathbb{N}$, alors $(a + F) \Delta F$ ne contient que $2a$ points, quelle que soit la longueur de F . Si on ne veut pas s’encombrer l’esprit avec la définition générale, on peut parfaitement considérer qu’une suite de Følner est une suite d’intervalles dont la longueur tend vers l’infini. Cela ne nuit en rien à la compréhension de ce qui suit (au contraire, peut-être) ; et c’est d’ailleurs ce que fait Host dans [8].

Une raison pour laquelle les suites de Følner sont intéressantes est qu’elles permettent d’obtenir des *mesures invariantes*. Détaillons un peu. Soit X un espace topologique compact, et soit $T : X \rightarrow X$ une application continue. On dit qu’une mesure de probabilité μ sur X est invariante par la transformation T si on a $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ pour tout en-

semble mesurable $A \subseteq X$; ou, de manière équivalente, $\int_X (f \circ T) d\mu = \int_X f d\mu$ pour toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Si on fixe un point $x_0 \in X$ et si on se donne une suite de Følner $F = (F_N)$, on peut considérer les mesures de probabilités μ_N sur X définies par

$$\mu_N := \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \delta_{T^n x_0}.$$

Le fait que (F_N) soit une suite de Følner assure que toute valeur d’adhérence μ de la suite (μ_N) est une mesure de probabilité invariante par T . Pour le voir, on part d’une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, et on montre que $\int_X (f \circ T) d\mu = \int_X f d\mu$ en observant qu’on a $\int_X (f \circ T) d\mu_N = \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in 1+F_N} f(T^n x_0)$ pour tout $N \geq 0$.

Si $F = (F_N)$ est une suite de Følner, on définit la « F-densité supérieure » d’un ensemble d’entiers A comme on l’imagine :

$$\overline{d}_F(A) := \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap F_N|}{|F_N|}.$$

Si la limite supérieure est en fait une vraie limite, on parle de « F-densité » et on écrit $d_F(A)$ au lieu de $\overline{d}_F(A)$.

Le résultat de Moreira, Richter et Robertson s’énonce alors comme suit.

Théorème 1. *Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. S’il existe une suite de Følner F telle que $\overline{d}_F(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis.*

Pourquoi embêter les gens avec des suites de Følner alors que la question initiale était très bien comme elle était ? Une mauvaise réponse est que « ça ne coûte pas plus cher » de démontrer le résultat plus général. Une réponse peut-être meilleure est qu’en fait, il est *plus facile* de démontrer le résultat général que la conjecture initiale, car sa formulation ouvre des perspectives. Si on sait dire des petites choses sur les suites de Følner quelconques, on peut espérer démontrer un résultat difficile en jouant avec ces suites : on peut construire de nouvelles suites de Følner à partir d’une suite donnée (par exemple en translatant), extraire autant de sous-suites qu’on veut (toute sous-suite d’une suite de Følner est évidemment encore une suite de Følner)... et on va voir que cette flexibilité est bien utile. Enfin, il convient d’ajouter que dans [11], Moreira, Richter et Robertson obtiennent une version de la conjecture d’Erdős valable pour n’importe quel groupe G dénombrable et moyennable (ce qui revient à dire qu’il existe au moins une suite de Følner dans G ; voir [6]).

2. Le « socle commun »

La preuve de Moreira-Richter-Robertson et celle de Host sont d'aspects fort différents; mais elles présentent quand même certaines similitudes.

2.1 – Un critère général

On peut faire reposer en partie les deux preuves sur un critère général de « contenance » d'un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis. La dépendance est explicite dans [11], où il est dit que le critère doit énormément à [2]. Dans [8], Host dit qu'il pourrait utiliser le critère mais qu'il préfère s'en passer.

Avant d'énoncer ce critère (qui est assez rebutant au premier abord), je vais tenter de le motiver. Dans ce qui suit, pour tout ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$, on posera

$$E - r := \{n \in \mathbb{N}; n + r \in E\}.$$

Le point de départ est l'observation suivante : pour montrer qu'un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ contient un ensemble de la forme $B + C$ avec B et C infinis, il suffit de trouver deux ensembles d'entiers L et M tels que $\bigcap_{l \in L} (A - l) \cap M$ est infini pour tout ensemble fini $I \subseteq L$ et $\bigcap_{m \in J} (A - m) \cap L$ est infini pour tout ensemble fini $J \subseteq M$. En effet, il n'est alors pas difficile de construire les ensembles $B = \{b_0, b_1, \dots\}$ et $C = \{c_0, c_1, \dots\}$: on démarre avec $b_0 \in L$, puis on choisit successivement $c_0 \in (A - b_0) \cap M$; $b_1 > b_0$ tel que $b_1 \in (A - c_0) \cap L$; $c_1 > c_0$ tel que $c_1 \in (A - b_0) \cap (A - b_1) \cap M$; etc.

Cela étant dit, qui peut plus peut le moins : si un ensemble d'entiers E vérifie $\overline{d}_F(E) > 0$ pour une certaine suite de Følner F , alors E est certainement infini. Donc, si on est capable de trouver deux ensembles L et M et une suite de Følner F tels que $\bigcap_{l \in L} (A - l) \cap M$ est infini pour tout ensemble fini $I \subseteq L$ et $\overline{d}_F(\bigcap_{m \in J} (A - m) \cap L) > 0$ pour tout ensemble fini $J \subseteq M$, alors on aura gagné.

Maintenant, on fait appel à un lemme très utile dû à Bergelson [1]. Soit F une suite de Følner, et soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite de parties de \mathbb{N} . Si $d_F(A_i)$ existe pour tout i et si on a $d_F(A_i) \geq \varepsilon$ pour un certain $\varepsilon > 0$ et pour tout $i \geq 1$, alors il existe une sous-suite (A'_i) de (A_i) telle que $\overline{d}_F(A'_1 \cap \dots \cap A'_r) > 0$ pour tout $r \geq 1$. Autrement dit, toute suite d'ensembles « uniformément gros » contient une sous-suite telle que toutes les intersections finies d'éléments de la sous-suite sont grosses. Grâce à ce

lemme, on voit que, pour montrer que notre ensemble A contient $B + C$ avec B et C infini, il suffit de trouver un ensemble $L \subseteq \mathbb{N}$ et une suite strictement croissante d'entiers $(m_i)_{i \geq 1}$ telle que les choses suivantes aient lieu : $d_F((A - m_i) \cap L) \geq \varepsilon$ pour tout $i \geq 1$ et, pour tout ensemble fini $I \subseteq L$, on a $m_i \in \bigcap_{l \in I} (A - l)$ à partir d'un certain rang. En effet, Bergelson nous fournit une sous-suite (m'_i) de (m_i) telle que $\overline{d}_F((A - m'_1) \cap \dots \cap (A - m'_r) \cap L) > 0$ pour tout $r \geq 1$. Si on pose $M := \{m'_i; i \geq 1\}$, on obtient ce qu'on cherchait : $\bigcap_{l \in L} (A - l) \cap M$ est infini pour tout ensemble fini $I \subseteq L$ et $\overline{d}_F(\bigcap_{m \in J} (A - m) \cap L) > 0$ pour tout ensemble fini $J \subseteq M$.

Il est temps d'énoncer le critère tant attendu :

Critère MRR. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe une suite de Følner F , un ensemble $L \subseteq \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $d_F((A - m) \cap L)$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et, pour tout ensemble fini $I \subseteq L$, il existe une infinité d'entiers $m \in \bigcap_{l \in I} (A - l)$ tels que $d_F((A - m) \cap L) \geq \varepsilon$. Alors on peut conclure que A contient $B + C$ avec B et C infinis.

Par la discussion précédente, la preuve est essentiellement faite : l'hypothèse permet de construire sans difficulté une suite strictement croissante d'entiers $(m_i)_{i \geq 1}$ telle que $d_F((A - m_i) \cap L) \geq \varepsilon$ pour tout $i \geq 1$ et $m_i \in \bigcap_{l \in I} (A - l)$ à partir d'un certain rang pour tout ensemble fini $I \subseteq L$; donc on est dans la situation favorable décrite plus haut.

2.2 – Un autre point commun

Il y a un autre élément commun présent en filigrane dans [11] et [8] : c'est ce qu'on appelle la *décomposition de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw* associée à une isométrie agissant sur un espace de Hilbert.

Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $V : H \rightarrow H$ une isométrie. Par exemple, on peut penser à la situation suivante : on a un espace de probabilité (X, \mathfrak{B}, μ) , une application mesurable $T : X \rightarrow X$ qui préserve la mesure μ , et V est l'opérateur de Koopman $V_T : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$ associé à la transformation T ,

$$V_T f := f \circ T.$$

La décomposition de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw associée à V est simplement la décomposition orthogonale

$$H = \mathbb{C}_V \oplus \mathbb{C}_V^\perp,$$

où \mathcal{E}_V est le sous-espace fermé de H engendré par les vecteurs propres de V .

Très bien. Mais pourquoi donner un nom ronflant à une chose aussi simple ? La réponse est que les vecteurs de \mathcal{E}_V et de \mathcal{E}_V^\perp peuvent se caractériser de manière non triviale par le comportement de leurs orbites sous l'action de V (voir par exemple [10]).

- Un vecteur x appartient à \mathcal{E}_V si et seulement si x est un *vecteur compact* pour V , ce qui signifie que son orbite sous l'action de V est précompacte (pour tout $\varepsilon > 0$ donné, elle peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ε).
- Un vecteur y appartient à \mathcal{E}_V^\perp si et seulement si y est un *vecteur faiblement mélangeant* pour V , ce qui signifie ceci : pour toute suite de Følner $F = (F_N)$ et pour tout $z \in H$, on a $d_F(\{n \in \mathbb{N}; |\langle V^n y, z \rangle| \geq \varepsilon\}) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$; ou, de manière équivalente :

$$\frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} |\langle V^n y, z \rangle| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Avec des notations évidentes, la décomposition de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw peut donc s'écrire

$$H = \mathcal{E}_{\text{comp}} \oplus \mathcal{E}_{\text{wm}}.$$

L'intérêt de cette écriture par rapport à la précédente est qu'elle a cessé d'être hilbertienne. Et de fait, il existe une version très générale de la décomposition de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw, valable pour des semi-groupes d'opérateurs agissant sur un espace de Banach ; voir [10] ou [4].

3. La preuve de Moreira-Richter-Robertson

3.1 – Ultrafiltres

Il n'y a pas lieu de s'affoler : on n'aura besoin de savoir que peu de choses sur les ultrafiltres.

Définitions

On ne considérera que des filtres de parties de \mathbb{N} ; un *filtre* sera donc une famille \mathcal{F} de parties non vides de \mathbb{N} , co-héréditaire (si $I \in \mathcal{F}$ et $J \supseteq I$, alors $J \in \mathcal{F}$) et stable par intersections finies. Par exemple, $\mathcal{F} := \{\mathbb{N}\}$ est un filtre. Plus intéressant : l'ensemble des parties *cofinies* de \mathbb{N} est un filtre, qu'on appelle habituellement le *filtre de Fréchet*.

Il n'est pas déraisonnable d'interpréter les filtres comme des *quantificateurs de type universel*. N'importe quelle famille \mathcal{F} de parties de \mathbb{N} peut être considérée comme un quantificateur : étant donné une propriété $P(n)$ dépendant de $n \in \mathbb{N}$, on peut si on en a envie écrire « $\mathcal{F}n : P(n)$ » pour signifier que l'ensemble des $n \in \mathbb{N}$ tels que $P(n)$ est vraie appartient à \mathcal{F} ; ou, de manière plus imagée, que $P(n)$ est vraie *pour \mathcal{F} -presque tout* $n \in \mathbb{N}$. Appelons *acceptable* tout quantificateur \mathcal{F} qui est « plus fort » que le quantificateur existentiel \exists , i.e. $(\mathcal{F}n : P(n)) \implies (\exists n : P(n))$ pour toute propriété P , et compatible avec l'implication logique : si $P(n)$ implique $Q(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $(\mathcal{F}n : P(n)) \implies (\mathcal{F}n : Q(n))$. Avec cette terminologie, dire que \mathcal{F} est un filtre signifie que \mathcal{F} est un quantificateur acceptable qui commute avec la conjonction : pour toutes propriétés P et Q , on a l'équivalence

$$(\mathcal{F}n : P(n) \text{ et } \mathcal{F}n : Q(n)) \iff \mathcal{F}n : (P(n) \text{ et } Q(n)).$$

Par exemple, le quantificateur universel \forall correspond au filtre $\mathcal{F} := \{\mathbb{N}\}$; mais le quantificateur existentiel \exists ne correspond pas à un filtre.

Un *ultrafiltre* est un filtre \mathcal{U} qui est maximal pour l'inclusion (le seul filtre contenant \mathcal{U} est \mathcal{U} lui-même). La définition n'est pas toujours très manipulable et il vaut parfois mieux utiliser la caractérisation suivante : un filtre \mathcal{U} est un ultrafiltre si et seulement si, pour tout ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$, ou bien $I \in \mathcal{U}$ ou bien $\mathbb{N} \setminus I \in \mathcal{U}$. Une autre caractérisation (essentiellement la même) : un ultrafiltre est un quantificateur acceptable \mathcal{U} possédant la propriété magique de commuter à la fois avec la conjonction et avec la disjonction; autrement dit, pour toutes propriétés P et Q relatives aux entiers, on a les deux équivalences

$$\mathcal{U}n : (P(n) \text{ et } Q(n)) \iff (\mathcal{U}n : P(n)) \text{ et } (\mathcal{U}n : Q(n)),$$

$$\mathcal{U}n : (P(n) \text{ ou } Q(n)) \iff (\mathcal{U}n : P(n)) \text{ ou } (\mathcal{U}n : Q(n)).$$

Par exemple, si $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé, alors $\mathcal{U}_{n_0} := \{I \subseteq \mathbb{N}; I \ni n_0\}$ est un ultrafiltre. Un ultrafiltre de cette forme est dit *trivial*. Personne n'a jamais vu un ultrafiltre non trivial; mais grâce au Lemme de Zorn, on sait que tout filtre \mathcal{F} est contenu dans un ultrafiltre. Les ultrafiltres contenant le filtre de Fréchet sont précisément les ultrafiltres non triviaux.

Convergence

À tout filtre \mathcal{F} est naturellement associée une notion de convergence pour les suites : on dit qu'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vivant dans un espace topologique X converge le long de \mathcal{F} vers un point $a \in X$ si, pour tout voisinage V de a , l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}; a_n \in V\}$ appartient à \mathcal{F} ; autrement dit $\mathcal{F}n : a_n \in V$. Quand l'espace X est séparé on a unicité de la limite, et on peut donc écrire $a = \mathcal{F}\text{-lim } a_n$. Par exemple, la convergence au sens usuel est la convergence le long du filtre de Fréchet. Exemple diamétralement opposé : si $n_0 \in \mathbb{N}$, alors toute suite (a_n) converge le long de l'ultrafiltre trivial \mathcal{U}_{n_0} , avec $\mathcal{U}_{n_0}\text{-lim } a_n = a_{n_0}$.

Un des grands intérêts des ultrafiltres est qu'ils font converger beaucoup de suites : si \mathcal{U} est un ultrafiltre, alors toute suite vivant dans un espace topologique compact converge le long de \mathcal{U} . C'est essentiellement « évident par définition » : si (a_n) ne converge pas le long de \mathcal{U} , on peut recouvrir l'espace X par des ouverts V pour lesquels il n'est pas vrai que $\mathcal{U}n : a_n \in V$; on extrait alors un sous-recouvrement fini, et la propriété magique de \mathcal{U} mène à une contradiction.

L'espace des ultrafiltres

L'ensemble de tous les ultrafiltres se note habituellement $\beta\mathbb{N}$. On munit $\beta\mathbb{N}$ d'une topologie en décrétant que si $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, alors une base de voisinages de \mathcal{U} est formée par les ensembles $\beta I := \{\mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}; \mathcal{V} \ni I\}$, où I décrit \mathcal{U} . Il est facile de vérifier que $\beta\mathbb{N}$ est un espace topologique compact, que l'injection canonique $n \mapsto \mathcal{U}_n$ est un homéomorphisme de \mathbb{N} muni de la topologie discrète sur son image, et que \mathbb{N} est dense dans $\beta\mathbb{N}$; donc $\beta\mathbb{N}$ est un compactifié de \mathbb{N} . Enfin, le fait que les ultrafiltres fassent converger les suites vivant dans un compact signifie que pour tout espace topologique compact X , toute fonction (nécessairement continue) $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ peut se prolonger continûment à $\beta\mathbb{N}$ par la formule $f(\mathcal{U}) := \mathcal{U}\text{-lim } f(n)$. En termes savants, tout cela signifie que $\beta\mathbb{N}$ est le compactifié de Stone-Čech de l'espace topologique discret \mathbb{N} .

En particulier, toute fonction bornée $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ se prolonge de manière unique en une fonction continue sur $\beta\mathbb{N}$. Donc l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ s'identifie à $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$, l'espace des fonctions continues sur $\beta\mathbb{N}$.

Signalons quand même que la topologie de $\beta\mathbb{N}$ est assez bizarre. L'espace $\beta\mathbb{N}$ est compact, mais les seules suites convergentes sont celles qui sont

constantes à partir d'un certain rang; donc $\beta\mathbb{N}$ est fort peu métrisable. Autre bizarrerie : l'adhérence dans $\beta\mathbb{N}$ de tout ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ est un ouvert fermé; en fait cette adhérence est, presque par définition, égale à βI . Et encore une autre, assez plaisante : si I_1, \dots, I_r sont des parties de \mathbb{N} , alors l'adhérence dans $\beta\mathbb{N}$ de l'intersection des I_k est égale à l'intersection des adhérences.

Le « Lemme d'intersection de Bergelson »

À titre d'illustration, voyons comment on peut utiliser l'espace $\beta\mathbb{N}$ pour démontrer le lemme de Bergelson dont il a été question dans la preuve du critère MRR. Soit F une suite de Følner, et soit $(A_i)_{i \geq 1}$ une suite de parties de \mathbb{N} telle que $d_F(A_i)$ existe pour tout i et $d_F(A_i) \geq \varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe une sous-suite (A'_i) de (A_i) telle que $\overline{d}_F(A'_1 \cap \dots \cap A'_r) > 0$ pour tout $r \geq 1$. Considérons les mesures de probabilité $\mu_N := \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \delta_n$. Ce sont des mesures sur \mathbb{N} , qui est contenu dans $\beta\mathbb{N}$, donc on peut les voir comme des mesures sur $\beta\mathbb{N}$. Comme $\beta\mathbb{N}$ est compact, elles ont au moins une valeur d'adhérence μ , qui est une mesure de probabilité sur $\beta\mathbb{N}$. Pour $i \geq 1$, notons E_i l'adhérence de A_i dans $\beta\mathbb{N}$. Les E_i sont des ouverts fermés de $\beta\mathbb{N}$, et on voit sans mal que $\mu(E_i) = d_F(A_i)$. De plus, pour tout ensemble fini d'indices J , le fait que l'adhérence de $\bigcap_{j \in J} A_j$ dans $\beta\mathbb{N}$ soit égale à $\bigcap_{j \in J} E_j$ entraîne que $\overline{d}_F(\bigcap_{j \in J} A_j) \geq \mu(\bigcap_{j \in J} E_j)$. On voit ainsi qu'on s'est ramené à prouver le lemme suivant. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles mesurables. On suppose que $\mathbb{P}(E_i)$ ne tend pas vers 0 quand $i \rightarrow \infty$. Alors il existe une suite d'entiers strictement croissante $(j_k)_{k \geq 1}$ telle que $\forall k \geq 1 : \mathbb{P}(E_{j_1} \cap \dots \cap E_{j_k}) > 0$. C'est un bon exercice de théorie de la mesure. Une solution possible : on commence par montrer (par l'absurde) qu'il existe j_1 tel que $\mathbb{P}(E_{j_1} \cap E_i)$ ne tend pas vers 0 quand $i \rightarrow \infty$; et on continue.

Addition

Maintenant qu'on sait que les fonctions définies sur \mathbb{N} et à valeurs dans un espace compact se prolongent continûment à $\beta\mathbb{N}$, on peut s'amuser à additionner les ultrafiltres. Cela se fait en 2 étapes. On définit d'abord $n + \mathcal{U}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$: la fonction $f(m) := n + m$ est à valeurs dans $\mathbb{N} \subseteq \beta\mathbb{N}$, donc on peut poser

$$n + \mathcal{U} := \mathcal{U}\text{-lim } (n + m).$$

Puis, pour $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{V} + \mathcal{U} := \mathcal{V} - \text{lim}(n + \mathcal{U}).$$

Cela paraît simple, et d'une certaine façon ça l'est. Mais il faut quand même se méfier et vérifier qu'on a bien compris le sens de ces jolies notations. La définition de l'ultrafiltre $n + \mathcal{U}$ dit qu'un ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$ appartient à $n + \mathcal{U}$ si et seulement si l'ensemble $\{m \in \mathbb{N}; n + m \in I\}$ appartient à \mathcal{U} . De même, dire que $I \in \mathcal{V} + \mathcal{U}$ signifie ceci : l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que l'ensemble des entiers $m \in \mathbb{N}$ pour lesquels $n + m \in I$ appartient à \mathcal{U} ... appartient à \mathcal{V} . Pas si simple, finalement.

C'est sans doute plus clair avec l'interprétation des filtres comme des quantificateurs : pour tout ensemble $I \subseteq \mathbb{N}$,

$$I \in n + \mathcal{U} \iff \mathcal{U}m : n + m \in I,$$

$$I \in \mathcal{V} + \mathcal{U} \iff \mathcal{V}n \mathcal{U}m : n + m \in I.$$

Comme il n'y a aucune raison de pouvoir intervertir des quantificateurs, cette façon d'écrire les choses rend assez apparent le fait que, n'en déplaise au symbole « + », l'addition de $\beta\mathbb{N}$ est hautement non commutative.

Une dernière notation : pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ et pour tout ultrafiltre \mathcal{U} , on pose

$$A - \mathcal{U} := \{n \in \mathbb{N}; A - n \in \mathcal{U}\}.$$

Autrement dit :

$$n \in A - \mathcal{U} \iff \mathcal{U}m : n + m \in A.$$

3.2 – L'objectif à atteindre

Le lemme suivant fixe le cap dans la preuve de Moreira-Richter-Robertson.

Lemme 1. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe une suite de Følner F et un ultrafiltre non trivial \mathcal{U} tels que $d_F((A - m) \cap (A - \mathcal{U}))$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et

$$\mathcal{U}\text{-lim } d_F((A - m) \cap (A - \mathcal{U})) > 0.$$

Alors on peut conclure que A contient $B + C$ avec B et C infinis.

C'est une conséquence très facile du Critère MRR. Choisissons un nombre ε tel que $0 < \varepsilon < \mathcal{U}\text{-lim } d_F((A - n) \cap (A - \mathcal{U}))$. Alors, si on pose $L := A - \mathcal{U} = \{l \in \mathbb{N}; A - l \in \mathcal{U}\}$ et si on relit la définition de la limite selon un filtre, on voit que pour tout ensemble fini $I \subseteq L$, l'ensemble $\bigcap_{l \in I} (A - l) \cap \{m \in \mathbb{N} : d_F((A - m) \cap L) \geq \varepsilon\}$ appartient à \mathcal{U} . En particulier, tous ces ensembles sont infinis puisque \mathcal{U} est non trivial ; donc on peut appliquer le Critère MRR.

3.3 – Le détail de la preuve

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\overline{d_{F_0}}(A) > 0$ pour une certaine suite de Følner F_0 . Quitte à extraire une sous-suite de F_0 , on peut supposer que $d_{F_0}(A)$ existe. Il s'agit de se mettre en situation d'appliquer le Lemme 1.

Il ne va malheureusement pas être possible de donner énormément de détails. Je vais me contenter d'indiquer quelques étapes clés, en remuant beaucoup les mains.

Une reformulation « fonctionnelle »

Soit $F = (F_N)$ une suite de Følner. Si $m \in \mathbb{N}$ et si $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, alors on a par définition (et pourvu que cela ait un sens) :

$$\begin{aligned} d_F((A - m) \cap (A - \mathcal{U})) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \mathbf{1}_{A(n+m)} \mathbf{1}_{A(n+\mathcal{U})} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \tau^m \mathbf{1}_A(n) \tau^{\mathcal{U}} \mathbf{1}_A(n), \end{aligned}$$

où on a noté τ^m et $\tau^{\mathcal{U}}$ les opérateurs de « translation par m » et de « translation par \mathcal{U} » agissant sur $\ell^\infty(\mathbb{N}) = \mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$.

Ceci incite à poser, pour des fonctions quelconques $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\langle f, g \rangle_F := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} f(n) \overline{g(n)}.$$

(Évidemment, f et g ne sont pas tout à fait quelconques : il faut que la limite existe.)

Avec cette notation, on a donc

$$d_F((A - m) \cap (A - \mathcal{U})) = \langle \tau^m \mathbf{1}_A, \tau^{\mathcal{U}} \mathbf{1}_A \rangle_F.$$

La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ est faite pour suggérer un produit scalaire. Il est donc tentant de poser

$$\|f\|_F^2 := \langle f, f \rangle_F := \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} |f(n)|^2$$

pour toute fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, et de définir

$$L^2(\mathbb{N}, F) := \{f; \|f\|_F < \infty\}.$$

On voit ainsi apparaître quelque chose qui a envie de ressembler à un espace de Hilbert. Malheureusement, ce n'en est pas tout à fait un : c'est bien un espace vectoriel (qui est grès gros car il contient toutes les fonctions bornées), on a bien une inégalité de Cauchy-Schwarz, et même une inégalité de Bessel ; mais la « norme » est juste une semi-norme (par exemple, $\|f\|_F = 0$ dès que f tend vers 0 à l'infini) et l'espace n'est pas complet. Plus perversément, il peut y avoir des fonctions f, g appartenant toutes les deux à $L^2(\mathbb{N}, F)$ pour lesquelles $\langle f, g \rangle_F$ n'est pas défini. Cependant, il est possible de démontrer les choses suivantes.

- Si $f, g \in L^2(\mathbb{N}, F)$, alors il existe une sous-suite F' de F telle que $\langle f, g \rangle_{F'}$ est bien défini.
- Si (f_n) est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{N}, F)$, alors il existe une sous-suite F' de F et une fonction $f \in L^2(\mathbb{N}, F')$ telle que (f_n) converge vers f dans $L^2(\mathbb{N}, F')$.

En simplifiant à l'extrême, on a donc envie de dire que quitte à extraire des sous-suites de Følner, on peut essentiellement faire comme si $L^2(\mathbb{N}, F)$ était réellement un espace de Hilbert. Les choses sont évidemment un peu plus compliquées. Il vaut en fait mieux se dire que c'est la famille de tous les espaces $L^2(\mathbb{N}, F)$, où F varie dans les sous-suites d'une suite de Følner donnée, qui se comporte dans sa globalité comme une sorte d'espace de Hilbert.

Quoi qu'il en soit, on a un peu avancé : en remplaçant les parties de \mathbb{N} (plus exactement, leurs fonctions indicatrices) par des fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ générales, on a grandement élargi l'horizon et on voit l'analyse fonctionnelle pointer le bout de son nez.

Revenons à notre ensemble A tel que $d_{F_0}(A) > 0$, et écrivons $F_0 = (F_N)_{N \geq 0}$. Comme

$$d_{F_0}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \mathbf{1}_A(n) = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}_A \rangle_{F_0}$$

et que $d_F((A - m) \cap (A - \mathcal{U})) = \langle \tau^m \mathbf{1}_A, \tau^{\mathcal{U}} \mathbf{1}_A \rangle_F$ pour toute suite de Følner F telle que cela ait un sens, on voit maintenant que, pour être en mesure d'appliquer le Lemme 1, il suffit de démontrer le résultat suivant.

Proposition 1. *Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive et bornée. Si $\langle \mathbf{1}, f \rangle_{F_0}$ existe et $\langle \mathbf{1}, f \rangle_{F_0} > 0$, alors il existe une sous-suite F de F_0 et un ultrafiltre non trivial \mathcal{U} tels que $\langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_F$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_F > 0$.*

C'est donc notre nouvel objectif ; mais on en est encore loin. Pour pouvoir l'atteindre, on va avoir be-

soin d'utiliser de « bonnes décompositions » pour les fonctions des espaces $L^2(\mathbb{N}, F)$, qui font l'objet de la section suivante.

Décompositions de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw

Pour toute suite de Følner F , il y a une isométrie naturelle qui agit sur $L^2(\mathbb{N}, F)$: c'est l'opérateur de « translation par 1 »,

$$\tau f(n) := f(n + 1).$$

Comme on se souvient de ce qui a été dit plus haut sur les isométries d'un espace de Hilbert, il est parfaitement légitime de se demander s'il existe quelque chose comme une décomposition de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw associée à τ pour l'espace $L^2(\mathbb{N}, F)$. Moreira, Richter et Robertson réussissent à montrer que c'est effectivement le cas ; mais la situation est plus compliquée que pour les isométries sur les vrais espaces de Hilbert. D'une part, comme on s'en doute, on va devoir extraire des sous-suites de Følner. Et d'autre part, il va y avoir en fait... deux décompositions, qui ne sont pas les mêmes. La raison est que le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{N}, F)$ engendré par les fonctions propres de τ – notons le provisoirement $\mathcal{E}_\tau(F)$ – est strictement contenu dans le sous-espace $\mathcal{E}_{\text{comp}}(F)$ constitué par les fonctions « compactes » (qu'on n'a pas encore définies).

Voyons à quoi ressemblent les fonctions de $\mathcal{E}_\tau(F)$. Il est très facile de voir que les fonctions propres de τ sont les fonctions de la forme $f(n) = c \lambda^n$, où c est une constante non nulle et $\lambda \in \mathbb{T}$. Donc, une fonction $f \in L^2(\mathbb{N}, F)$ appartient à $\mathcal{E}_\tau(F)$ si et seulement si c'est une limite – au sens de $L^2(\mathbb{N}, F)$ – de « polynômes trigonométriques », i.e. de fonctions de la forme

$$p(n) = \sum_{\text{finie}} c_k e^{in\theta_k}.$$

Pour cette raison, les fonctions de $\mathcal{E}_\tau(F)$ sont dites *F-presque périodiques au sens de Besicovitch* ; et en suivant [11] à la lettre, on utilisera maintenant la notation $\mathcal{E}_{\text{Bes}}(F)$ au lieu de $\mathcal{E}_\tau(F)$.

Un mot également sur les fonctions « compactes » : une fonction $f \in L^2(\mathbb{N}, F)$ est dite *F-compacte* si, pour tout $\varepsilon > 0$, la τ -orbite de f peut être recouverte par un nombre fini de $\|\cdot\|_F$ -boules de rayon ε . Il est assez tentant de continuer à employer un vocabulaire d'analyse harmonique classique, et de parler de fonctions *F-presque périodiques au sens de Bohr* plutôt que de fonctions

compactes. On écrira donc désormais $\mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F})$ au lieu de $\mathcal{E}_{\text{comp}}(\mathbf{F})$.

Il n'est pas trop difficile de voir que toute fonction presque périodique au sens de Besicovitch est presque périodique au sens de Bohr. Mais la réciproque n'est pas vraie. Ainsi, le sous-espace fermé de $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$ engendré par les vecteurs propres de l'isométrie τ n'est pas la même chose que le sous-espace constitué par les vecteurs compacts; ce qui fait une grosse différence avec le cas « vraiment hilbertien ». Retenons l'inclusion

$$\mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbf{F}) \subset \mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F}).$$

Un mot enfin sur les fonctions « faiblement mélangeantes » : une fonction $f \in L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$ sera dite *faiblement mélangeante le long de F* si, pour toute fonction bornée $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ et pour toute sous-suite F' de F telle que $\langle \tau^n f, g \rangle_{F'}$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$d_{F'} \left(\left\{ n \in \mathbb{N}; |\langle \tau^n f, g \rangle_{F'}| \geq \varepsilon \right\} \right) = 0 \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0;$$

ou, de manière équivalente :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|F'_N|} \sum_{n \in F'_N} |\langle \tau^n f, g \rangle_{F'}| = 0.$$

Un point important : il n'est pas trop difficile de montrer que si $u \in \mathcal{E}_{\text{wm}}(\mathbf{F})$ et $v \in \mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F})$, alors $\langle u, v \rangle_{\mathbf{F}} = 0$. Autrement dit,

$$\mathcal{E}_{\text{wm}}(\mathbf{F}) \perp \mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F}).$$

Voici maintenant ce que Moreira, Richter et Robertson arrivent à montrer.

Étant donnée une suite de Følner F et une fonction $f \in L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$, il existe une sous-suite F' de F telle que la fonction f peut se décomposer à la fois sous la forme

$$f = f_{\text{Bes}} + f_{\text{Bes}^\perp} \quad \text{où } f_{\text{Bes}} \in \mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbf{F}') \text{ et } f_{\text{Bes}^\perp} \in \mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbf{F}')^\perp,$$

et sous la forme

$$f = f_{\text{Bohr}} + f_{\text{wm}} \quad \text{où } f_{\text{Bohr}} \in \mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F}') \text{ et } f_{\text{wm}} \in \mathcal{E}_{\text{wm}}(\mathbf{F}').$$

De plus, si f est réelle et bornée, alors les fonctions intervenant dans ces décompositions le sont aussi.

Je ne donnerai aucun détail sur la façon d'obtenir cela. Disons simplement que la preuve de la première décomposition est très astucieuse mais d'une certaine façon « élémentaire »; tandis que pour la 2^e décomposition, on a besoin d'utiliser de la dynamique topologique et de la théorie ergodique.

La fin de la preuve

Rappelons notre objectif (Proposition 1) : on se donne une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ positive et bornée telle que $\langle 1, f \rangle_{F_0} > 0$, et il s'agit de voir qu'il existe une sous-suite F de F_0 et un ultrafiltre non trivial \mathcal{U} tels que $\langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}}$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et

$$\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} > 0.$$

Commençons par fixer une sous-suite F_1 de F_0 telle que, dans $L^2(\mathbb{N}, F_1)$, on puisse écrire les deux décompositions

$$f = f_{\text{Bes}} + f_{\text{Bes}^\perp} \quad \text{et} \quad f_{\text{Bohr}} + f_{\text{wm}}.$$

Maintenant, soit F une sous-suite quelconque de F_1 , et soit \mathcal{U} un ultrafiltre également quelconque. Soit aussi $\varepsilon > 0$ à choisir. Écrivons

$$\begin{aligned} \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} &= \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} + \langle \tau^m f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} \\ &= \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} + \langle \tau^m f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}} \rangle_{\mathbf{F}} \\ &\quad + \langle \tau^m f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp} \rangle_{\mathbf{F}}. \end{aligned}$$

Comme les fonctions f_{Bohr} et f_{Bes} sont « presque périodiques », on peut raisonnablement espérer que si F est bien choisie et si l'ultrafiltre \mathcal{U} n'y met pas de mauvaise volonté, alors $\tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}}$ est quasiment égale à f_{Bes} du point de vue de l'espace $L^2(\mathbb{N}, \mathbf{F})$, disons $\|\tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}} - f_{\text{Bes}}\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon$; et de même $\|\tau^m f_{\text{Bohr}} - f_{\text{Bohr}}\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon$, au moins pour \mathcal{U} -presque tout $m \in \mathbb{N}$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en supposant que $\|f\|_{\mathbf{F}} = 1$ (ce qui entraîne que $f_{\text{Bes}}, f_{\text{Bes}^\perp}, f_{\text{Bohr}}, f_{\text{wm}}$ sont toutes de norme au plus 1 par Pythagore), on en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} &\geq \mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} \\ &\quad + \langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}} \rangle_{\mathbf{F}} + \langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp} \rangle_{\mathbf{F}} - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

De plus, comme la fonction f_{wm} est faiblement mélangeante, on sait que pour tout $\delta > 0$, l'ensemble $I_\delta := \{m \in \mathbb{N}; |\langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}}| \geq \delta\}$ a une F -densité égale à 0. Si on suppose que F et \mathcal{U} sont tels que $\overline{d_F(I)} > 0$ pour tout $I \in \mathcal{U}$, les ensembles I_δ n'appartiennent alors pas à \mathcal{U} , et donc $\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f_{\text{wm}}, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} = 0$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbf{F}} &\geq \langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}} \rangle_{\mathbf{F}} \\ &\quad + \langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp} \rangle_{\mathbf{F}} - 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, on se souvient que f_{Bohr} est la « projection orthogonale » de f sur $\mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbf{F})$ et que f_{Bes} est

la « projection orthogonale » de f sur le sous-espace $\mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbb{F})$, qui est contenu dans $\mathcal{E}_{\text{Bohr}}(\mathbb{F})$. On a donc $\langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}} \rangle_{\mathbb{F}} = \|f_{\text{Bes}}\|_{\mathbb{F}}^2$. Par Cauchy-Schwarz, on en déduit $\langle f_{\text{Bohr}}, f_{\text{Bes}} \rangle_{\mathbb{F}} \geq \langle \mathbf{1}, f_{\text{Bes}} \rangle_{\mathbb{F}}^2$. Comme $\langle \mathbf{1}, f_{\text{Bes}} \rangle_{\mathbb{F}} = \langle \mathbf{1}, f \rangle_{\mathbb{F}}$ puisque f_{Bes} est la projection orthogonale de f sur $\mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbb{F})$ et que $\mathbf{1} \in \mathcal{E}_{\text{Bes}}(\mathbb{F})$, on a donc

$$\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbb{F}} \geq \langle \mathbf{1}, f \rangle_{\mathbb{F}}^2 + \langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp} \rangle_{\mathbb{F}} - 3\varepsilon.$$

Supposons enfin qu'en plus des hypothèses précédentes, l'ultrafiltre \mathcal{U} ait le bon goût d'être tel que $\langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp} \rangle_{\mathbb{F}} \geq 0$. Alors, comme $\langle \mathbf{1}, f \rangle_{\mathbb{F}} = \langle \mathbf{1}, f \rangle_{\mathbb{F}_0} > 0$, on voit qu'il suffit de choisir ε assez petit au départ pour conclure que $\mathcal{U}\text{-}\lim \langle \tau^m f, \tau^{\mathcal{U}} f \rangle_{\mathbb{F}} > 0$.

En résumé, j'espère avoir à peu près justifié que la preuve sera définitivement terminée si, étant donné $\varepsilon > 0$, on est capable de montrer qu'il existe une sous-suite F de F_1 et un ultrafiltre non trivial \mathcal{U} tels que les choses suivantes aient lieu :

- $\overline{d}_F(l) > 0$ pour tout $l \in \mathcal{U}$;
- $\|\tau^m f_{\text{Bohr}} - f_{\text{Bohr}}\|_{\mathbb{F}} < \varepsilon$ pour \mathcal{U} -presque tout $m \in \mathbb{N}$;
- $\|\tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}} - f_{\text{Bes}}\|_{\mathbb{F}} < \varepsilon$;
- $\langle f_{\text{Bohr}}, \tau^{\mathcal{U}} f_{\text{Bes}^\perp} \rangle_{\mathbb{F}} \geq 0$.

C'est en réalité la partie la plus délicate de la preuve, et je serais bien incapable de l'expliquer en quelques lignes. Je me contenterai donc de dire que... c'est possible, en se fatiguant beaucoup et en faisant usage d'une artillerie topologico-ergodique assez lourde.

Juste un mot concernant l'ultrafiltre \mathcal{U} : on ne va pas le sortir du chapeau. Ce qu'on montre en fait est qu'il existe une sous-suite $F = (F_N)$ de F_1 telle que l'ensemble \mathcal{G} constitué par tous les ultrafiltres \mathcal{U} satisfaisant aux 4 conditions ci-dessus est « gros » au sens suivant : on a $\mu(\mathcal{G}) > 0$ pour toute mesure de probabilité μ sur $\beta\mathbb{N}$ qui est un point d'accumulation des mesures $\mu_N := \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \delta_n$. Difficile de ne pas être sensible à la poésie d'un tel énoncé!

4. La preuve de Host

Comme indiqué dans l'introduction, la preuve de Host est sur le papier beaucoup plus courte que celle de Moreira, Richter et Robertson. Cependant, elle suppose une certaine familiarité avec la théorie ergodique. Je présente donc par avance mes excuses à celles et ceux qui trouveraient – à juste titre – que dans cette partie, les choses vont parfois un peu vite ; et je conseille vivement la lecture de l'excellent [3] pour tout ce qui concerne la théorie ergodique.

4.1 – Systèmes dynamiques

On va considérer des systèmes dynamiques *topologiques* (en abrégé : sdt) et des systèmes dynamiques *mesurés* (sdm). Un sdt sera la donnée d'un espace topologique X compact métrisable et d'une application continue $T : X \rightarrow X$. Un sdm sera la donnée d'un espace de probabilité (X, \mathfrak{B}, μ) et d'une application mesurable $T : X \rightarrow X$ qui préserve la mesure μ . Un sdtm est ce qu'on imagine, à savoir la donnée d'un sdt (X, T) et d'une mesure de probabilité borélienne μ sur X invariante par T .

Étant donnés $T : X \rightarrow X$, un point $x \in X$ et un ensemble $W \subseteq X$, on notera $\mathcal{N}_T(x, W)$ l'ensemble des temps de visite de la T -orbite de x à l'ensemble W :

$$\mathcal{N}_T(x, W) := \{n \in \mathbb{N}; T^n x \in W\}.$$

Une remarque importante (et évidente) est que si $F = (F_N)$ est une suite de Følner, alors

$$\overline{d}_F(\mathcal{N}_T(x, W)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \mathbf{1}_W(T^n x).$$

Autrement dit : s'intéresser à la densité d'un ensemble d'entiers de la forme $\mathcal{N}_T(x, W)$, c'est la même chose que regarder les moyennes ergodiques partant de x pour la fonction $f = \mathbf{1}_W$. Ceci est particulièrement intéressant, car il se trouve que *n'importe quel* ensemble d'entiers A peut s'écrire sous la forme $A = \mathcal{N}_T(x, W)$: c'est le point de départ de l'approche « dynamique » initiée par Furstenberg pour traiter certaines questions de combinatoire des entiers. Voir le début de la section 4.4 pour plus de détails.

4.2 – Points génériques

Pour la preuve du résultat qui nous intéresse, un rôle essentiel va être joué par la notion de *point générique*.

Soit (X, T) un sdt. Étant données une mesure μ sur X (le mot « mesure » sera toujours synonyme de « mesure de probabilité borélienne ») et une suite de Følner $F = (F_N)$, on dit qu'un point $x_0 \in X$ est (T, μ) -générique le long de F si, pour toute fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, les « F -moyennes ergodiques » pour f définies à partir du point x_0 tendent vers l'intégrale de f :

$$\frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} f(T^n x_0) \rightarrow \int_X f d\mu \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Par exemple, si $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$ est un sdtm ergodique (i.e. si les ensembles T -invariants sont tous de mesure 0 ou 1), alors presque tout point $x_0 \in X$ est (T, μ) -générique le long de la suite de Følner « canonique » $(\llbracket 0, N \rrbracket)$: cela découle du Théorème ergodique ponctuel et de la séparabilité de l'espace de fonctions continues $\mathcal{C}(X)$. Donnons un peu plus de détails. Le Théorème ergodique dit que si $f \in L^1(\mu)$, alors $\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N f(T^n x) \rightarrow \int_X f d\mu$ pour presque tout $x \in X$. Le « presque tout » dépend évidemment de f ; mais si on se donne une famille dénombrable $\mathcal{D} \subseteq L^1(\mu)$, la convergence des moyennes ergodiques a lieu sur un ensemble de probabilité 1 indépendant de $f \in \mathcal{D}$. En appliquant cela à une suite (f_k) dense dans $\mathcal{C}(X)$, on en déduit facilement la conclusion annoncée.

On aura besoin des faits suivants concernant les points génériques.

- Si x_0 est (T, μ) -générique le long d'une certaine F , alors la mesure μ est T -invariante et le support topologique de μ est contenu dans l'adhérence de la T -orbite de x_0 .
- Si x_0 est (T, μ) -générique le long de F , alors $\overline{d_F(\mathcal{N}_T(x_0, W))} \geq \mu(W)$ pour tout ouvert $W \subseteq X$; et $d_F(\mathcal{N}(x_0, W)) = \mu(W)$ si W est ouvert fermé.
- Pour tout point $x_0 \in X$ et pour toute suite de Følner F , il existe une mesure μ et une sous-suite F' de F telles que x_0 est (T, μ) -générique le long de F' .
- Si $(X, \mathfrak{B}, \mu, T)$ est un sdtm ergodique, alors toute suite de Følner F possède une sous-suite F' le long de laquelle μ - presque tout point $x \in X$ est (T, μ) -générique.

Le 1^{er} point est facile à vérifier. Le 2^e point est évident si W est ouvert fermé puisque la fonction $f := \mathbf{1}_W$ est alors continue; et pour un ouvert W quelconque, il faut utiliser le fait que $\mathbf{1}_W$ est semi-continue supérieurement, donc limite simple d'une suite croissante de fonctions continues. Pour le 3^{ème} point, il suffit de prendre pour μ une valeur d'adhérence de la suite $\mu_N := \frac{1}{|F_N|} \sum_{n \in F_N} \delta_{T^n x_0}$. Pour le 4^{ème} point, utiliser le Théorème ergodique en moyenne (convergence L^2 des moyennes ergodiques, valable pour n'importe quelle suite de Følner), le fait que toute suite convergeant en norme L^2 possède une sous-suite qui converge presque partout, et la séparabilité de $\mathcal{C}(X)$.

4.3 – L'objectif à atteindre

Le lemme suivant joue dans l'approche de [8] le rôle que joue le Lemme 1 dans l'approche de [11] : il fixe le cap.

Lemme 2. Soit (X, T) un système dynamique topologique, soit $x_0 \in X$, et soit W un ouvert fermé de X . On suppose qu'il existe $x_1 \in X$, une mesure ν sur $X \times X$, une suite de Følner F , une suite strictement croissante d'entiers (m_i) et $\varepsilon > 0$ tels que

- (x_0, x_1) est $(T \times T, \nu)$ -générique le long de F ;
- $T^{m_i} x_0 \rightarrow x_1$ quand $i \rightarrow \infty$;
- $\nu(T^{-m_i}(W) \times W) \geq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Alors l'ensemble $A := \mathcal{N}_T(x_0, W)$ contient $B + C$ avec B et C infinis.

Une preuve possible consiste à appliquer le Critère MRR avec $L := \mathcal{N}_T(x_1, W)$.

Si $m \in \mathbb{N}$, on voit sans peine que

$$(A - m) \cap L = \mathcal{N}_{T \times T}((x_0, x_1), T^{-m}(W) \times W).$$

Comme (x_0, x_1) est $(T \times T, \nu)$ -générique le long de F et que W est ouvert fermé, on en déduit que $d_F((A - m) \cap L)$ existe pour tout $m \in \mathbb{N}$ et est égale à $\nu(T^{-m}(W) \times W)$. En particulier, on a $d_F((A - m_i) \cap L) \geq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Par ailleurs, comme $T^{m_i} x_0$ tend vers x_1 et que W est ouvert, il est assez clair que si $l \in L$, alors $l + m_i \in A$ pour tous les m_i sauf un nombre fini.

On voit ainsi que pour tout ensemble fini $I \subseteq L$, il existe une infinité d'entiers $m \in \bigcap_{l \in I} (A - l)$ tels que $d_F((A - m) \cap L) \geq \varepsilon$, à savoir tous les m_i à partir d'un certain rang. Donc on peut en effet appliquer le Critère MRR.

4.4 – Le détail de la preuve

Soit $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\overline{d_{F_0}}(A) > 0$ pour une certaine suite de Følner F_0 . Quitte à extraire une sous-suite de F_0 , on peut supposer que $d_{F_0}(A)$ existe. Il s'agit de se mettre en situation d'appliquer le Lemme 2.

Pour cela on commence par construire un sdt (X, T) , un ouvert fermé $W \subseteq X$, un point x_0 , une mesure μ sur X et une suite de Følner F tels que

- (i) $A = \mathcal{N}_T(x_0, W)$;
- (ii) $\mu(W) > 0$;
- (iii) $(X, \mathfrak{B}_X, \mu, T)$ est un sdtm ergodique;
- (iv) x_0 est (T, μ) -générique le long de F .

Le démarrage est parfaitement classique. Soit $\Delta := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les suites infinies de 0 et de 1, qui est un très bel espace compact métrisable quand on le munit de la topologie produit; et soit $B : \Delta \rightarrow \Delta$ l'application de décalage vers la gauche :

$$B(z(0), z(1), z(2), \dots) := (z(1), z(2), z(3), \dots).$$

Posons $x_0 := \mathbf{1}_A \in \Delta$ et $W_0 := \{z \in \Delta; z(0) = 1\}$. Alors W_0 est ouvert fermé dans Δ , et on a tout fait pour s'assurer que $A = \mathcal{N}_B(x_0, W_0)$. On préfère cependant avoir un espace dans lequel l'orbite de x_0 est dense. Donc on pose $X := \overline{\{B^k x_0; k \in \mathbb{N}\}}$, $T := B|_X$ et $W := W_0 \cap X$. Alors W est ouvert fermé dans X et (i) est vérifiée.

Soient F'_0 une sous-suite de F_0 et μ_0 une mesure sur X telles que x_0 est (T, μ_0) -générique le long de F'_0 . La mesure μ_0 est invariante par T ; et comme W est ouvert fermé, on a $\mu_0(W) = d_{F'_0}(A) = d_{F_0}(A) > 0$. Donc (ii) et (iv) sont vérifiées.

Maintenant, on applique le *Théorème de décomposition ergodique*, qui dit que la mesure invariante μ_0 peut s'écrire comme une intégrale de mesures ergodiques : il existe un espace de probabilité (S, \mathfrak{T}, ν) et une application mesurable $S \ni s \mapsto \mu_s$, où μ_s est une mesure de probabilité sur X ergodique pour la transformation T , tels que $\mu = \int_S \mu_s d\nu(s)$ (voir [3]). Comme $\mu_0(W) = \int_S \mu_s(W) d\nu(s) > 0$, il existe ainsi une mesure $\mu = \mu_s$ telle que $(X, \mathfrak{B}_X, \mu, T)$ est un s.d.m. ergodique et $\mu(W) > 0$. Alors (ii) est toujours vérifiée, et on a fait ce qu'il fallait pour avoir (iii); mais comme on a changé de mesure, il n'y a plus de raison que x_0 soit (T, μ) -générique le long de F'_0 : on a perdu (iv).

Cependant, comme $(X, \mathfrak{B}_X, \mu, T)$ est ergodique et que $\mu(W) > 0$, on peut trouver un point $x \in W$ qui est (T, μ) -générique le long de la suite de Følner canonique $(\llbracket 0, N \rrbracket)$. Comme de plus $X = \overline{\{T^k x_0; k \in \mathbb{N}\}}$, on peut trouver une suite d'entiers (k_N) telle que pour tout $N \geq 0$, les points $T^{k_N} x_0, T^{k_N+1} x_0, \dots, T^{k_N+N} x_0$ soient très proches des points $x, Tx, \dots, T^N x$, disons « proches à 2^{-N} près ». Alors, pour toute fonction (uniformément) continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N |f(T^{k_N+n} x_0) - f(T^n x)| \rightarrow 0 \quad \text{quand } N \rightarrow \infty.$$

Donc, x_0 est (T, μ) -générique le long de la suite de Følner $F := (\llbracket k_N, k_N + N \rrbracket)$: on a retrouvé (iv).

Soit x_1 un point quelconque de X . Quitte à extraire une sous-suite de la suite de Følner F (ce qui ne fait pas perdre (iv)), on peut supposer qu'il existe une mesure ν sur $X \times X$ telle que

$$(v) \quad (x_0, x_1) \text{ est } (T \times T, \nu)\text{-générique le long de } F.$$

Par le Lemme 2, il ne reste plus maintenant qu'une dernière chose à faire : montrer que si on choisit bien le point x_1 , alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une suite strictement croissante d'entiers $(m_i) \rightarrow \infty$ tels que $T^{m_i} x_0 \rightarrow x_1$ et $\nu(T^{-m_i}(W) \times W) \geq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. C'est la partie délicate de la preuve, pour laquelle il ne va pas être possible de donner tous les détails.

Imaginons cependant que par un hasard invraisemblable, X soit un *groupe abélien compact*, que T soit une translation de X , et que μ soit la mesure de Haar de X . On va voir que dans ce cas, n'importe quel point x_1 convient.

Comme l'adhérence de la $(T \times T)$ -orbite de (x_0, x_1) contient le support topologique de la mesure ν et que T est une translation, on voit que ν est portée par l'ensemble $\{(x, x') \in X \times X; x' - x = x_1 - x_0\}$; autrement dit : on a $x' = x + x_1 - x_0$ pour ν -presque tout $(x, x') \in X \times X$. Comme de plus l'image de ν par la 1ère application coordonnée $p : X \times X \rightarrow X$ est la mesure μ (par (iv) et (v)), on en déduit sans mal la chose suivante : pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$\nu(T^{-m}(W) \times W) = \int_X \mathbf{1}_W(T^m x) \mathbf{1}_W(x + x_1 - x_0) d\mu(x).$$

En utilisant l'invariance de μ par translations et le fait que T est une translation, cela s'écrit encore

$$\nu(T^{-m}(W) \times W) = \int_X \mathbf{1}_W(x + T^m x_0) \mathbf{1}_W(x + x_1) d\mu(x).$$

Si $T^m x_0$ était égal à x_1 , le second membre serait égal à $\mu(W)$ puisque μ est invariante par translations. Par continuité des translations sur $L^2(X, \mu)$, on en déduit que

$$\nu(T^{-m}(W) \times W) \geq \varepsilon := \mu(W)/2$$

dès que $T^m x_0$ est assez proche de x_1 .

On est maintenant presque au bout du chemin. Comme μ est la mesure de Haar de X , son support topologique est égal à X tout entier. Donc,

$$(vi) \quad \text{le point } x_1 \text{ appartient au support de } \mu.$$

On a ainsi $\mu(V) > 0$ pour tout voisinage V de x_1 ; et comme x_0 est (T, μ) -générique le long de F , on

en déduit que $d_F(\mathcal{N}_T(x_0, V)) > 0$ pour tout voisinage ouvert V de x_1 .

De là, il est très facile de construire par récurrence une suite strictement croissante d'entiers (m_i) telle que $T^{m_i}x_0 \rightarrow x_1$. On aura alors « gratuitement » $\nu(T^{-m_i}(W) \times W) \geq \varepsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, puisqu'évidemment $T^{m_i}x_0$ sera suffisamment proche de x_1 .

Malheureusement, la vie n'est pas aussi facile : il n'y a pas de raison que X soit un groupe, que T soit une translation et que μ soit la mesure de Haar de X .

Cependant, on peut contourner cette difficulté en utilisant ce qu'on appelle le *facteur de Kronecker* du $\text{sdm}(X, \mu, T)$. Sans entrer dans les détails (pour lesquels on peut consulter [3]), disons que ce facteur de Kronecker est un sdm de la forme (G, m_G, R) où G est un groupe abélien compact, m_G est la mesure de Haar de G et R est une translation. C'est effectivement un facteur de (X, μ, T) au sens habituel : il existe une application mesurable $\pi : X \rightarrow G$ qui envoie μ sur m_G – on appelle cela un homomorphisme d'espaces mesurés – et qui entrelace T et R , i.e. $R \circ \pi = \pi \circ T$. Sa propriété essentielle est que l'homomorphisme $\pi : (X, \mu, T) \rightarrow (G, m_G, R)$ « encode » toutes les fonctions propres de la transformation T : le sous-espace fermé de $L^2(X, \mu)$ engendré par les fonctions propres de T est exactement le sous-espace \mathcal{E}_π constitué par les fonctions π -mesurables. En mélangeant cela avec la décomposition de Jacobs-Glicksberg-de Leeuw de l'opérateur de Koopman $V_T : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$, on en déduit la chose suivante : si $f \in L^2(X, \mu)$ et si on note $\mathbb{E}_\pi f$ la projection orthogonale de f sur \mathcal{E}_π (autrement dit, l'espérance conditionnelle de f relativement à la tribu engendrée par π) alors, pour toute $g \in L^2(X, \mu)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute suite de Følner F , on a

$$d_F\left(\left\{n \in \mathbb{N}; \left| \langle f \circ T^n, g \rangle - \langle \mathbb{E}_\pi f \circ T^n, g \rangle \right| \geq \varepsilon \right\}\right) = 0.$$

En forçant un peu le trait, cela signifie que du point de vue des suites de Følner, tout se passe essentiellement comme si toute fonction $f \in L^2(X, \mu)$ était π -mesurable, i.e. de la forme $f = u \circ \pi$ où $u \in L^2(G, m_G)$.

Sachant cela, on conçoit qu'en « descendant » dans le facteur de Kronecker (G, m_G, R) via l'homomorphisme π , on puisse espérer parvenir à reproduire dans le cas général le raisonnement fait dans le cas d'un groupe. C'est un peu technique, mais on y arrive. Le point x_1 ne peut cependant pas être quelconque : on a besoin de supposer que

(vii) x_1 est (T, μ) -générique le long de F .

Si on est prêt à admettre que les choses se passent aussi bien que possible, on obtient ceci : il existe $\varepsilon > 0$ et un ensemble $M \subseteq \mathbb{N}$ tels que $d_F(M) = 1$ et $\nu(T^{-m}(W) \times W) \geq \varepsilon$ pour tout $m \in M$ tel que $T^m x_0$ est assez proche de x_1 . On peut alors conclure comme plus haut en construisant la suite (m_i) un peu plus soigneusement, i.e. en faisant attention à prendre les m_i dans le gros ensemble M .

En résumé : pour en avoir *vraiment* terminé, il suffit maintenant de montrer qu'on peut trouver un point $x_1 \in X$ vérifiant les conditions (vi) et (vii). Pour cela, on se souvient que toute suite de Følner possède une sous-suite le long de laquelle μ -presque tout point $x \in X$ est (T, μ) -générique. Donc, quitte à extraire une sous-suite de F , on peut supposer que μ -presque tout point $x \in X$ est (T, μ) -générique le long de F ; et il est alors évident qu'on peut trouver le point x_1 .

5. Et ensuite ?

Maintenant qu'on sait que la réponse à la question d'Erdős est positive, il est naturel de se demander si on ne peut pas aller plus loin. Par exemple, est-il vrai que si A est un ensemble d'entiers de densité strictement positive, alors A contient la somme de 3 ensembles infinis, voire la somme d'un nombre fini quelconque d'ensembles infinis ?

On n'en sait rien.

Une stratégie *a priori* raisonnable serait d'essayer de montrer que si $\bar{d}(A) > 0$, alors A contient un ensemble de la forme $B + A'$ avec B infini et $\bar{d}(A') > 0$. Malheureusement, cela ne peut pas marcher : Host montre dans [8] qu'il existe un ensemble A pour lequel on ne pourra jamais faire ça. L'exemple n'est même pas compliqué : on part d'un $\text{sdt}(X, T)$ possédant une seule mesure invariante μ et tel que le $\text{sdm}(X, \mu, T)$ soit *mélangeant* (ça existe), on choisit un ouvert $W \subseteq X$ tel que $\mu(W) > 0$ et $\mu(\bar{W}) < 1$, et on pose $A := \mathcal{N}_T(x_0, W)$ pour n'importe quel point $x_0 \in X$.

Dans une toute autre direction, si on a en tête le Théorème de Green-Tao, il est très naturel de se demander si la conjecture d'Erdős est vraie « dans les nombres premiers » ; autrement dit, si tout ensemble de densité positive relativement à l'ensemble des nombres premiers contient la somme de deux ensembles infinis.

En conclusion : il reste encore des choses à faire...

Références

- [1] V. BERGELSON. « Sets of recurrence of Z^m -actions and properties of sets of differences in Z^m ». *J. London Math. Soc.* **31**, n° 2 (1985), p. 295-304.
- [2] M. DI NASSO et al. « On a sumset conjecture of Erdős ». *Canad. J. Math.* **67**, n° 4 (2015), p. 795-809.
- [3] M. EINSIEDLER et T. WARD. *Ergodic theory with a view towards number theory*. 259. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.
- [4] T. EISNER. *Stability of operators and operator semigroups*. 209. Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.
- [5] H. FURSTENBERG. *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*. M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1981.
- [6] F. P. GREENLEAF. *Invariant means on topological groups and their applications*. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 16. Van Nostrand Reinhold Co., New York-Toronto, Ont.-London, 1969.
- [7] N. HINDMAN. « Finite sums from sequences within cells of a partition of N ». *J. Combinatorial Theory Ser. A* **17** (1974), p. 1-11.
- [8] B. HOST. « A short proof of a conjecture of Erdős proved by Moreira, Richter and Robertson ». *Discrete Anal.* (2019), Paper n° 19.
- [9] A. Y. KHINCHIN. *Three pearls of number theory*. Graylock Press, Rochester, N. Y., 1952, p. 64.
- [10] U. KRENGEL. *Ergodic theorems*. 6. De Gruyter Studies in Mathematics. With a supplement by Antoine Brunel. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985, p. viii+357.
- [11] J. MOREIRA, F. K. RICHTER et D. ROBERTSON. « A proof of a sumset conjecture of Erdős ». *Ann. of Math. (2)* **189**, n° 2 (2019), p. 605-652.
- [12] M. B. NATHANSON. « Sumsets contained in infinite sets of integers ». *J. Combin. Theory Ser. A* **28**, n° 2 (1980), p. 150-155.
- [13] E. SZEMERÉDI. « On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression ». *Acta Arith.* **27** (1975), p. 199-245.
- [14] S. TODORCEVIC. *Topics in topology*. 1652. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1997, p. viii+153.



Étienne MATHERON

Laboratoire de mathématiques de Lens, université d'Artois
 etienne.matheron@univ-artois.fr

Étienne Matheron est professeur à l'université d'Artois. Son domaine de recherche est l'analyse fonctionnelle.

Revue d'histoire des mathématiques 2020



Tome 26, fascicule 1

Sommaire

Number Theory in the *Nouvelles annales de mathématiques* (1842-1927): A Case Study About Mathematical Journals for Teachers and Students
 Jenny BOUCARD

Textes & documents :

Charles Hermite's letters to Francisco Gomes Teixeira
 Pedro J. FREITAS

Revue (électronique/papier) disponible par abonnement
 ISSN 1777-568X/1262-022X
 2020 - Vol. 26 - 2 fascicules

Tarifs disponibles sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>



Autour de la conjecture de Milnor

En 1970, Milnor émet d'importantes conjectures dont le but est de classer les formes quadratiques sur un corps quelconque de caractéristique différente de 2. Ces conjectures ont été par la suite démontrées dans les travaux de Kahn, Morel, Orlov, Sujatha, Vishik et Voevodsky, entre autres. Ce texte se veut une introduction élémentaire et largement accessible aux conjectures de Milnor.

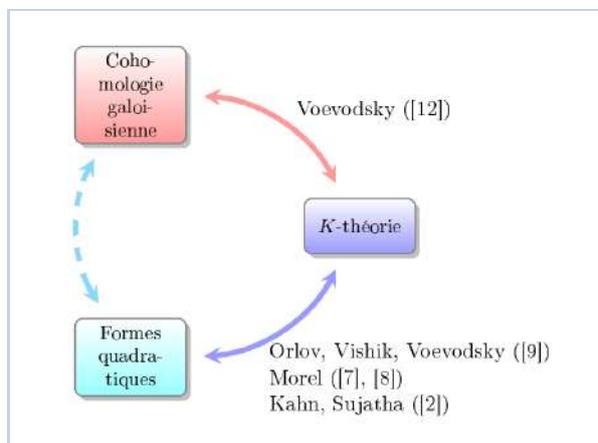
• D. IZQUIERDO

Étant donné un corps K (que l'on supposera de caractéristique différente de 2), peut-on classer les formes quadratiques sur K à isométrie près ? C'est en 1970, dans un important article paru à Inventiones ([6]), que Milnor émet des conjectures censées donner une réponse complète à cette question. Ces conjectures prédisent des liens profonds entre les formes quadratiques et deux autres objets algébriques de natures a priori très différentes : la K -théorie et la cohomologie galoisienne.

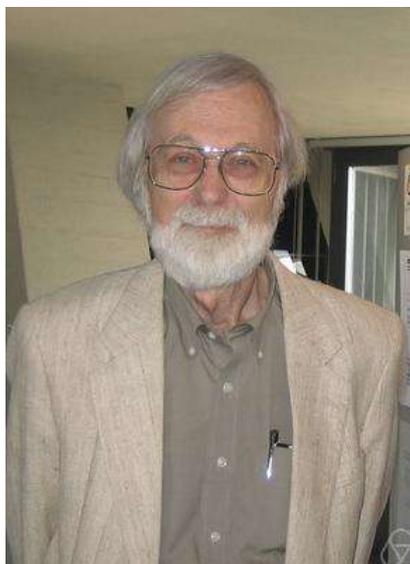
Entre 1996 et 2003, après des avancées de Merkurjev, Rost et Suslin entre autres ([4], [5], [10]), Voevodsky publie une preuve essentiellement complète des liens conjecturés par Milnor entre la K -théorie et la cohomologie galoisienne ([12]). Celle-ci utilise de manière cruciale des résultats antérieurs de Joukhovitski et de Rost ([11]) visant à construire certaines variétés algébriques appelées « variétés de normes », et elle requiert de la part de Voevodsky un développement important de la théorie de l'homotopie motivique, dont le but est d'utiliser des idées de la topologie algébrique en géométrie algébrique. Ce travail vaut la médaille Fields à Voevodsky en 2002.

Si les résultats de Voevodsky portent sur la K -théorie et la cohomologie galoisienne, ils ne disent malheureusement rien sur les formes quadratiques. Ce n'est que quelques années plus tard que plusieurs auteurs arrivent à relier les formes quadratiques à la K -théorie, achevant ainsi la preuve des conjectures de Milnor : Orlov, Vishik et Voevodsky ([9]), Morel ([7], [8]), Kahn et Sujatha ([2]).

Ce texte est une introduction élémentaire aux conjectures de Milnor et ne se veut pas exhaustif. On supposera seulement une certaine familiarité avec les notions de base concernant les formes quadratiques et les structures algébriques usuelles. *Le texte peut tout à fait être lu en sautant les preuves.*



John Milnor. Image prise lors de la célébration du 90^e anniversaire de B. Eckmann à Zürich.



© Oberwolfach Photo Collection, https://op.c.mfo.de/detail?photo_id=9831&woul_d_lite_to_publish=1#request

Vladimir Voevodsky



© A. Kane, disponible sur le site de l'IAS : <https://www.ias.edu/news/2017/vladimir-voevodsky-obituary>

1. Quelques rappels sur les espaces quadratiques

Dans tout cet article, on se donne un corps K que l'on suppose de caractéristique différente de 2. On rappelle alors qu'un *espace quadratique* sur K est un K -espace vectoriel de dimension finie V muni d'une *forme quadratique*, c'est-à-dire d'une application $q : V \rightarrow K$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- (i) pour tous $v \in V$ et $\lambda \in K$, on a $q(\lambda v) = \lambda^2 q(v)$;
- (ii) l'application :

$$b_q : V \times V \rightarrow K$$

$$(v, w) \mapsto \frac{1}{2} (q(v+w) - q(v) - q(w))$$

est bilinéaire.

La forme quadratique q peut alors être retrouvée grâce à la forme bilinéaire b_q via la formule $q(v) = b(v, v)$ pour $v \in V$. Si l'on choisit une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ du K -espace vectoriel V , la matrice $A_q^e := (b_q(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ associée à la forme bilinéaire b_q est symétrique et la forme quadratique q

s'identifie à un polynôme à n variables de degré 2 :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in K^n, q\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) A_q^e \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^n b_q(e_i, e_j) x_i x_j.$$

On dit que deux espaces quadratiques (V, q) et (V', q') sont *isométriques* s'il existe un K -isomorphisme $\varphi : V \rightarrow V'$ tel que $q = q' \circ \varphi$. Matriciellement, si e et e' sont des bases de V et V' respectivement, cela signifie qu'il existe une matrice inversible P telle que $A_q^e = {}^t P A_{q'}^{e'} P$. On note alors $(V, q) \cong (V', q')$ (ou de manière plus abusive $q \cong q'$).

Tout espace quadratique (V, q) admet une *base orthogonale*, c'est-à-dire une base e dans laquelle la matrice associée A_q^e est diagonale. Autrement dit, il existe toujours un n -uplet $d = (d_1, \dots, d_n)$ d'éléments dans K tel que (V, q) est isométrique à l'espace quadratique $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est K^n et qui est défini par la forme quadratique :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in K^n, q_d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2.$$

On remarquera que les espaces quadratiques $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$ et $\langle d'_1, \dots, d'_n \rangle$ sont isométriques dès que le n -uplet (d'_1, \dots, d'_n) peut être obtenu par permutation de (d_1, \dots, d_n) , ou encore dès qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in K^\times$ vérifiant $d_i = d'_i x_i^2$ pour chaque i .

Lorsque (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont deux espaces quadratiques sur K , on définit leur *somme orthogonale* (V_3, q_3) par $V_3 = V_1 \oplus V_2$ et $q_3(v_1, v_2) = q_1(v_1) + q_2(v_2)$ pour $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. Elle sera notée $(V_1, q_1) \perp (V_2, q_2)$, ou encore $V_1 \perp V_2$ ou $q_1 \perp q_2$ s'il n'y a pas d'ambiguïté. On a ainsi par exemple $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \cong \langle d_1 \rangle \perp \dots \perp \langle d_n \rangle$.

2. Comment classifier les espaces quadratiques ?

Le problème soulevé par la conjecture de Milnor porte sur la classification des espaces quadratiques à isométrie près. Autrement dit, on voudrait comprendre l'ensemble $Q(K)$ des espaces quadratiques à isométrie près sur le corps K . Deux approches sont alors naturelles.

– **Méthode 1.** Une première méthode consiste à introduire des invariants associés aux classes d'isométrie d'espaces quadratiques, c'est-à-dire des applications allant de $Q(K)$ vers d'autres espaces que l'on comprend mieux. Un exemple simple de tel invariant est donné par l'application dimension :

$$\begin{aligned} \dim : Q(K) &\rightarrow \mathbb{N} \\ (V, q) &\mapsto \dim V. \end{aligned}$$

Cet invariant est surjectif, mais, en général, il n'est pas injectif : par exemple, sur le corps des nombres réels, les formes quadratiques $\langle 1, 1 \rangle$, $\langle -1, 1 \rangle$ et $\langle -1, -1 \rangle$ ont même dimension mais ne sont pas isométriques. Pour avoir une bonne compréhension de $Q(K)$, il faudrait alors introduire d'autres invariants permettant de distinguer des formes quadratiques non isométriques de même dimension. La difficulté consiste donc à construire un système *complet* d'invariants, c'est-à-dire un ensemble d'invariants tel que deux espaces quadratiques ayant les mêmes invariants soient automatiquement isométriques. Nous verrons à la fin de l'article que les conjectures de Milnor permettent effectivement de faire cela.

– **Méthode 2.** Une deuxième approche consiste à donner une présentation de $Q(K)$ comme quotient d'un espace E que l'on comprend bien. Par exemple, si l'on note $Q_n(K)$ l'ensemble des classes d'isométrie d'espaces quadratiques de dimension n , tout élément de $Q_n(K)$ est de la forme $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$ pour un certain n -uplet (d_1, \dots, d_n) . L'application :

$$\begin{aligned} \pi : K^n &\rightarrow Q_n(K) \\ (d_1, \dots, d_n) &\rightarrow \langle d_1, \dots, d_n \rangle \end{aligned}$$

est donc surjective et $Q_n(K)$ peut être vu comme un quotient de K^n . Par contre, l'application π n'est pas du tout injective (par exemple, $\langle 1 \rangle \cong \langle 4 \rangle$, $\langle 1, 2 \rangle \cong \langle 2, 1 \rangle$ et $\langle 2, -2 \rangle \cong \langle -1, 1 \rangle$). La difficulté consiste alors à décrire les fibres de π : explicitement, il s'agit de comprendre quand deux n -uplets (d_1, \dots, d_n) et (d'_1, \dots, d'_n) vérifient $\langle d_1, \dots, d_n \rangle \cong \langle d'_1, \dots, d'_n \rangle$. Comme nous le verrons à la fin de l'article, les conjectures de Milnor permettront bien de donner une présentation de $Q(K)$. Cette dernière ne sera par contre pas induite par l'application π introduite ci-dessus, et donc les conjectures ne permettront pas de dire directement quand des espaces quadratiques de la forme $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$ et $\langle d'_1, \dots, d'_n \rangle$ sont isométriques.

3. Réduction à l'étude des espaces anisotropes via les théorèmes de Witt

Afin d'analyser la situation d'un peu plus près, donnons-nous un espace quadratique quelconque (V, q) sur K et étudions-le. Pour ce faire, commençons par considérer l'orthogonal V^\perp de V tout entier. Par définition, V^\perp est constitué des vecteurs $v \in V$ tels que $b_q(v, v') = 0$ pour tout $v' \in V$. Ainsi, la restriction de q à V^\perp est nulle et, si l'on choisit un supplémentaire quelconque W de V^\perp dans V , on a la décomposition :

$$(V, q) \cong (V^\perp, 0) \perp (W, q_W), \tag{1}$$

où q_W est la restriction de q à W . L'espace (W, q_W) est alors *non dégénéré*, c'est-à-dire que, pour tout $w \in W$ non nul, il existe $w' \in W$ tel que $b_{q_W}(w, w') \neq 0$. Cela revient à dire que la matrice $A_{q_W}^e$ de q_W dans une base quelconque e de W est inversible.

Supposons maintenant que l'espace (W, q_W) soit *isotrope*, c'est-à-dire qu'il existe un vecteur non nul $w \in W$ tel que $q_W(w) = 0$. Par non-dégénérescence, on peut trouver $w' \in W$ tel que $b_q(w, w') \neq 0$. Dans la base (w, w') , la matrice de la restriction q_P de q au plan P engendré par w et w' est alors :

$$A_{q_P}^{(w, w')} = \begin{pmatrix} 0 & b_q(w, w') \\ b_q(w, w') & q(w') \end{pmatrix}.$$

Son déterminant étant non nul, on déduit que le plan P muni de la forme quadratique q_P est non dégénéré et isotrope. Or il existe un unique tel plan à isométrie près, à savoir le *plan hyperbolique* $\mathbb{H} := \langle -1, 1 \rangle$. Par conséquent, $(P, q_P) \cong \mathbb{H}$.

Si maintenant W_1 désigne l'orthogonal de P dans W , on a la décomposition :

$$(W, q_W) \cong (P, q_P) \perp (W_1, q_{W_1}) \cong \mathbb{H} \perp (W_1, q_{W_1}) \tag{2}$$

où q_{W_1} est la restriction de q à W_1 . Si (W_1, q_{W_1}) est à son tour isotrope, on peut répéter le raisonnement précédent et aboutir ainsi à une décomposition :

$$(W_1, q_{W_1}) \cong \mathbb{H} \perp (W_2, q_{W_2}). \tag{3}$$

Puis on peut encore recommencer avec (W_2, q_{W_2}) si c'est un espace isotrope. En itérant cette procédure tant que c'est possible, on obtient des décompositions successives :

$$(W_2, q_{W_2}) \cong \mathbb{H} \perp (W_3, q_{W_3}), \tag{4}$$

$$(W_3, q_{W_3}) \cong \mathbb{H} \perp (W_4, q_{W_4}), \dots \tag{5}$$

La procédure s'arrête nécessairement puisque l'espace de départ (V, q) était de dimension finie. On aboutit donc à une dernière décomposition :

$$(W_{m-1}, q_{W_{m-1}}) \cong \mathbb{H} \perp (W_m, q_{W_m}) \quad (6)$$

où l'espace (W_m, q_{W_m}) n'est pas isotrope. En rassemblant toutes les décompositions (1), (2), (3), (4), (5) et (6), on obtient :

$$(V, q) \cong (V^\perp, 0) \perp \mathbb{H}^{\perp m} \perp (W_m, q_{W_m}),$$

ce qui prouve la première partie du :

Théorème 1 (Théorème de décomposition de Witt). *Tout espace quadratique (V, q) peut être décomposé sous la forme*

$$(V, q) \cong (V_{ti}, q_{ti}) \perp (V_h, q_h) \perp (V_{an}, q_{an})$$

où :

- (i) (V_{ti}, q_{ti}) est totalement isotrope, c'est-à-dire $q_{ti} = 0$;
- (ii) (V_h, q_h) est hyperbolique, c'est-à-dire $(V_h, q_h) \cong \mathbb{H}^m$ pour un certain $m \geq 0$;
- (iii) (V_{an}, q_{an}) est anisotrope, c'est-à-dire que $q_{an}(v) \neq 0$ pour tout $v \in V_{an} \setminus \{0\}$.

Les espaces quadratiques (V_{ti}, q_{ti}) , (V_h, q_h) et (V_{an}, q_{an}) sont alors uniquement déterminés à isométrie près. L'entier $m = \frac{\dim V_h}{2}$ s'appelle l'indice de Witt de (V, q) et sera noté $w(V, q)$ ou $w(q)$ dans la suite. L'espace quadratique (V_{an}, q_{an}) s'appelle la partie anisotrope de (V, q) .

Si nous avons pu démontrer aisément l'énoncé d'existence tout à l'heure, l'énoncé d'unicité est plus difficile à établir. Il repose notamment sur le *théorème de simplification de Witt*, qui affirme que, si q, q_1, q_2 sont trois formes quadratiques telles que $q \perp q_1 \cong q \perp q_2$, alors $q_1 \cong q_2$.

En tout cas, le théorème de décomposition de Witt permet de ramener l'étude des espaces quadratiques généraux à l'étude des espaces quadratiques anisotropes. On pourra donc dans la suite étudier l'ensemble $W(K)$ des espaces quadratiques anisotropes sur K à isométrie près au lieu de l'ensemble $Q(K)$.

4. Quelques exemples élémentaires

a) Corps algébriquement clos. Supposons que le corps K soit algébriquement clos (par exemple $K = \mathbb{C}$). Dans ce cas, tout espace quadratique (V, q)

sur K est de la forme $\langle 0 \rangle^{\perp n} \perp \langle 1 \rangle^{\perp m}$ pour $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. De plus, le couple (n, m) est entièrement déterminé par la classe d'isométrie de (V, q) , puisque $n = \dim V_{ti}$ et $m = \dim V - \dim V_{ti}$. Du coup, l'invariant :

$$Q(K) \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (V, q) \mapsto (n, m),$$

est bijectif.

Par ailleurs, pour chaque $m \geq 2$, la forme quadratique $q_m := \langle 1 \rangle^{\perp m}$ est isotrope puisque $q_m(i, 1, 0, \dots, 0) = 0$. Par conséquent, les formes quadratiques anisotropes sur K sont celles qui correspondent aux couples $(n, m) = (0, 0)$ et $(n, m) = (0, 1)$, c'est-à-dire l'espace quadratique de dimension 0 et l'espace quadratique $\langle 1 \rangle$. L'invariant :

$$\dim^0 : W(K) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (V, q) \mapsto \dim V \pmod 2$$

est donc bijectif.

b) Corps des nombres réels. Supposons maintenant que $K = \mathbb{R}$. Comme tout réel strictement positif est un carré, on a :

$$\langle a \rangle \cong \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{pour } a > 0 \\ \langle 0 \rangle & \text{pour } a = 0 \\ \langle -1 \rangle & \text{pour } a < 0, \end{cases}$$

et donc tout espace quadratique réel (V, q) est de la forme $\langle 0 \rangle^{\perp n} \perp \langle 1 \rangle^{\perp m_+} \perp \langle -1 \rangle^{\perp m_-}$ pour $(n, m_+, m_-) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La célèbre loi d'inertie de Sylvester affirme de plus que le triplet (n, m_+, m_-) est entièrement déterminé par la classe d'isométrie de (V, q) . Par conséquent, l'invariant :

$$\text{inv}_{\mathbb{R}} : Q(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ (V, q) \mapsto (n, m_+, m_-)$$

est bijectif.

Par ailleurs, les formes quadratiques anisotropes sur \mathbb{R} sont celles qui correspondent aux triplets $(0, m_+, m_-)$ avec $m_+ = 0$ ou $m_- = 0$, c'est-à-dire les formes quadratiques $\langle 1 \rangle^{\perp m_+}$ et $\langle -1 \rangle^{\perp m_-}$. Du coup, l'invariant :

$$\text{inv}_{\mathbb{R}}^0 : W(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{Z} \\ \langle 1 \rangle^{\perp m_+} \mapsto m_+ \\ \langle -1 \rangle^{\perp m_-} \mapsto -m_-$$

est bijectif.

c) **Corps finis.** Supposons finalement que K soit un corps fini de caractéristique différente de 2 et fixons un élément α de K^\times qui n'est pas un carré. Tout élément non nul de K est alors soit un carré, soit le produit de α par un carré. On en déduit que tout espace quadratique (V, q) sur K est isométrique à $\langle 0 \rangle^{\perp n} \perp \langle 1 \rangle^{\perp m} \perp \langle \alpha \rangle^{\perp m'}$ pour un certain triplet $(n, m, m') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Malheureusement, cette observation ne suffit pas à classifier les formes quadratiques sur K , car le triplet (n, m, m') n'est pas uniquement déterminé par la classe d'isométrie de (V, q) . En fait, on a une isométrie $\langle \alpha, \alpha \rangle \cong \langle 1, 1 \rangle$, ce qui montre que notre espace (V, q) est isométrique à $\langle 0 \rangle^{\perp n} \perp \langle 1 \rangle^{\perp (m+m'-\epsilon)} \perp \langle \alpha \rangle^{\perp \epsilon}$ avec $\epsilon = 0$ si m' est pair et $\epsilon = 1$ sinon. C'est alors un exercice classique que de démontrer que le triplet $(n, m + m' - \epsilon, \epsilon)$ est entièrement déterminé par la classe d'isométrie de (V, q) , et donc l'invariant :

$$\begin{aligned} \text{inv}_K : Q(K) &\rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{0, 1\} \\ (V, q) &\mapsto (n, m + m' - \epsilon, \epsilon) \end{aligned}$$

est bijectif.

Par ailleurs, il y a exactement quatre espaces quadratiques anisotropes sur K : l'espace quadratique de dimension nulle, $\langle 1 \rangle$, $\langle \alpha \rangle$ et $\langle 1, -\alpha \rangle$. Via l'invariant inv_K , les trois premiers correspondent aux triplets $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Le quatrième, quant à lui, correspond au triplet $(0, 1, 1)$ si -1 est un carré dans K et au triplet $(0, 2, 0)$ sinon.

5. L'anneau de Witt

Comme nous l'avons déjà expliqué, nous voulons comprendre l'ensemble $W(K)$ constitué des K -espaces quadratiques anisotropes à isométrie près. C'est en 1937 que Witt a compris qu'on pouvait munir cet ensemble d'une structure d'anneau ([13]). Cette structure, que nous allons introduire maintenant, jouera un rôle essentiel dans la suite.

Addition. Si (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont deux espaces quadratiques anisotropes, il semble naturel de créer que leur somme dans $W(K)$ soit leur somme orthogonale $(V_1, q_1) \perp (V_2, q_2)$. Malheureusement, cette dernière n'est pas nécessairement anisotrope. Il convient donc de remplacer $(V_1, q_1) \perp (V_2, q_2)$ par sa partie anisotrope et de poser :

$$(V_1, q_1) + (V_2, q_2) := ((V_1 \perp V_2)_{an}, (q_1 \perp q_2)_{an}).$$

Cela définit une loi sur $W(K)$ qui est associative et commutative, et qui admet l'espace quadratique de dimension nulle pour élément neutre. De plus, pour tout $a \in K^\times$, le plan $\langle -a, a \rangle$ est isotrope et donc isométrique au plan hyperbolique \mathbb{H} . On en déduit que, pour tous $a_1, \dots, a_n \in K^\times$:

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \perp \langle -a_1, \dots, -a_n \rangle \cong \mathbb{H}^n,$$

de sorte que, si (V, q) est un espace quadratique anisotrope, alors $(V, -q)$ et (V, q) sont opposés pour la loi $+$ sur $W(K)$. On en déduit que $(W(K), +)$ est un groupe abélien.

Multiplication. Si (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont deux espaces quadratiques, on peut munir le produit tensoriel $V_1 \otimes_K V_2$ de la forme quadratique $q_1 \otimes q_2$ associée à la forme bilinéaire définie par :

$$b_{q_1 \otimes q_2}(v_1 \otimes v_2, v'_1 \otimes v'_2) := b_{q_1}(v_1, v'_1)b_{q_2}(v_2, v'_2)$$

pour $v_1, v'_1 \in V_1$ et $v_2, v'_2 \in V_2$. Matriciellement, si $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ sont des bases respectives de V_1 et V_2 et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} := A_{q_1}^{\mathbf{e}}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} := A_{q_2}^{\mathbf{f}}$ sont les matrices de q_1 et q_2 dans ces bases, alors la matrice de $q_1 \otimes q_2$ dans la base :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} &:= (e_i \otimes f_j)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \\ &= (e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, \dots, e_1 \otimes f_n; \dots; e_m \otimes f_1, e_m \otimes f_2, \dots, e_m \otimes f_n) \end{aligned}$$

de $V_1 \otimes V_2$ est donnée par le *produit de Kronecker* des matrices A et B :

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mm}B \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n \in K$, on a :

$$\langle a_1, \dots, a_m \rangle \otimes \langle b_1, \dots, b_n \rangle \cong \langle a_1 b_1, \dots, a_i b_j, \dots, a_m b_n \rangle.$$

On peut alors définir une multiplication sur $W(K)$ en posant :

$$(V_1, q_1) \cdot (V_2, q_2) := ((V_1 \otimes V_2)_{an}, (q_1 \otimes q_2)_{an}).$$

Cela munit $W(K)$ d'une loi qui est associative, commutative et distributive sur l'addition, et qui admet $\langle 1 \rangle$ pour élément neutre. L'ensemble $W(K)$ muni des opérations $+$ et \cdot est donc un anneau commutatif, que l'on appelle l'*anneau de Witt* de K .

Exemple 1. Reprenons les exemples de la section 4.

- (a) Lorsque K est algébriquement clos, on a vu que $W(K)$ a deux éléments, l'espace quadratique de dimension nulle et $\langle 1 \rangle$. L'invariant dim^0 est donc un isomorphisme d'anneaux entre $W(K)$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(b) Lorsque $K = \mathbb{R}$, on a vu que :

$$W(\mathbb{R}) = \{n\langle 1 \rangle \mid n \geq 0\} \cup \{n\langle -1 \rangle \mid n > 0\}.$$

Comme $\langle 1 \rangle \perp \langle -1 \rangle = \mathbb{H}$, on a $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 0$ dans $W(\mathbb{R})$, de sorte que :

$$\langle -1 \rangle = -\langle 1 \rangle.$$

L'invariant $\text{inv}_{\mathbb{R}}^0$ est donc un isomorphisme d'anneaux entre $W(\mathbb{R})$ et \mathbb{Z} .

(c) Lorsque K est fini, on a vu que, si on se donne un élément $\alpha \in K$ qui n'est pas un carré, alors :

$$W(K) = \{0, \langle 1 \rangle, \langle \alpha \rangle, \langle 1, -\alpha \rangle\}.$$

On peut alors vérifier à la main que :

- si -1 n'est pas un carré dans K , alors on a un isomorphisme entre $W(K)$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ qui envoie

$$0 \mapsto 0, \quad \langle 1 \rangle \mapsto 1, \quad \langle 1, -\alpha \rangle \mapsto 2, \quad \langle \alpha \rangle \mapsto 3;$$

- si -1 est un carré dans K , alors on a un isomorphisme entre $W(K)$ et l'anneau

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \right\}$$

qui envoie

$$0 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1 \rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\langle 1, -\alpha \rangle \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \alpha \rangle \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Premiers invariants : la dimension et le discriminant

Nous allons maintenant commencer à construire des invariants sur l'anneau de Witt $W(K)$. Afin de pouvoir exploiter la structure d'anneau (ou au moins la structure de groupe additif) de $W(K)$ par la suite, on souhaite que ces invariants soient des morphismes d'anneaux, ou au moins des morphismes de groupes.

L'invariant dimension. Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \dim : W(K) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ (V, q) &\mapsto \dim V. \end{aligned}$$

Cette application est bien sûr bien définie, mais, malheureusement, ce n'est pas un morphisme de

groupes. En effet, par exemple, on a $\dim\langle 1 \rangle = \dim\langle -1 \rangle = 1$, mais comme $\langle 1 \rangle \perp \langle -1 \rangle = \mathbb{H}$, on a $\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle = 0$ dans $W(K)$, de sorte que $\dim(\langle 1 \rangle + \langle -1 \rangle) = 0$. En fait, si (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont deux espaces quadratiques anisotropes, on a :

$$q_1 \perp q_2 \cong \mathbb{H}^{w(q_1 \perp q_2)} \perp (q_1 + q_2),$$

de sorte que

$$\dim(q_1 + q_2) = \dim q_1 + \dim q_2 - 2w(q_1 \perp q_2).$$

En particulier

$$\dim(q_1 + q_2) \equiv \dim q_1 + \dim q_2 \pmod{2},$$

et donc

$$\begin{aligned} \dim^0 : W(K) &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ (V, q) &\mapsto \dim V \pmod{2} \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes. C'est même un morphisme d'anneaux puisque, si (V_1, q_1) et (V_2, q_2) sont des espaces quadratiques anisotropes, alors :

$$\begin{aligned} \dim(q_1 \cdot q_2) &= \dim(V_1 \otimes V_2) - 2w(q_1 \otimes q_2) \\ &\equiv \dim V_1 \cdot \dim V_2 \pmod{2}. \end{aligned}$$

Le morphisme \dim^0 est appelé *l'invariant dimension*. Son noyau est un idéal de $W(K)$ que l'on appelle *l'idéal fondamental* et qui est habituellement noté $I(K)$. Le morphisme \dim^0 induit par passage au quotient un isomorphisme :

$$\overline{\dim}^0 : W(K)/I(K) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Dans la suite, il sera utile de comprendre un peu plus l'idéal fondamental $I(K)$. Par définition, ses éléments sont les formes quadratiques anisotropes de dimension paire (à isométrie près). Si on se donne une telle forme quadratique q , alors on peut écrire q sous la forme $\langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle$ pour certains $a_1, \dots, a_{2n} \in K^\times$. On a donc dans $W(K)$:

$$q = \sum_{i=1}^n \langle a_{2i-1}, a_{2i} \rangle = \sum_{i=1}^n \underbrace{\langle a_{2i-1} \rangle}_{\in W(K)} \cdot \underbrace{\langle 1, -b_i \rangle}_{\in I(K)},$$

où $b_i := -a_{2i}a_{2i-1}^{-1}$. Par conséquent, l'idéal $I(K)$ est engendré par les espaces quadratiques anisotropes de la forme $\langle 1, -a \rangle$ pour $a \in K^\times$. Rappelons que, pour chaque $n \geq 1$, la puissance n -ième $I(K)^n$ de $I(K)$ est par définition l'idéal de $W(K)$ engendré par les produits de n éléments de $I(K)$. Du coup, $I(K)^n$ est engendré par les parties anisotropes des formes quadratiques $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle := \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, -a_n \rangle$ pour $a_1, \dots, a_n \in K^\times$. Les formes quadratiques $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$

seront appelées dans la suite des n -formes de Pfister.

L'invariant discriminant. Soit (V, q) un espace quadratique sur K de dimension n . Si e et f sont deux K -bases de V , les matrices de q dans ces bases sont liées par une relation de la forme :

$$A_q^e = {}^t P A_q^f P$$

avec $P \in GL_n(K)$. En prenant le déterminant, on a alors :

$$\det A_q^e = \det A_q^f \cdot \underbrace{(\det P)^2}_{\text{carré}},$$

et donc le déterminant $\det A_q^e$ ne dépend que de la classe d'isométrie de (V, q) à multiplication par un carré près. En termes plus algébriques, si $K^{\times 2}$ désigne le sous-groupe de K^\times constitué des éléments qui sont des carrés, la classe de $\det A_q^e$ dans le quotient $K^\times / K^{\times 2}$ ne dépend que de la classe d'isométrie de (V, q) . On peut donc définir une application :

$$d : W(K) \rightarrow K^\times / K^{\times 2} \\ (V, q) \mapsto \det(A_q^e) \cdot K^{\times 2}$$

où e désigne une base quelconque de V . On l'appelle l'*invariant discriminant*.

Si maintenant q_1 et q_2 sont deux formes quadratiques anisotropes sur K , l'isométrie $(q_1 + q_2) \perp H^{w(q_1 \perp q_2)} \cong q_1 \perp q_2$ permet d'obtenir l'égalité :

$$d(q_1 + q_2) \cdot (-1)^{w(q_1 \perp q_2)} \\ = d(q_1 \perp q_2) = d(q_1)d(q_2). \quad (7)$$

L'application d n'est donc pas un morphisme de groupes. Afin de corriger ce défaut, on introduit le *discriminant signé* :

$$d_\pm : I(K) \rightarrow K^\times / K^{\times 2} \\ q \mapsto (-1)^{\frac{\dim q}{2}} d(q).$$

Via l'égalité (7), il est aisé de voir que d_\pm est bien un morphisme de groupes surjectif sur $I(K)$. De plus, un calcul similaire permet de vérifier que, quels que soient $a, b \in K^\times$, la forme quadratique $\langle\langle a, b \rangle\rangle_{an}$ appartient au noyau de d_\pm . L'idéal $I(K)^2$ étant engendré par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister, le noyau de d_\pm contient tout $I(K)^2$. En particulier, il induit un morphisme de groupes surjectif :

$$d_\pm : I(K)/I(K)^2 \rightarrow K^\times / K^{\times 2}.$$

Introduisons maintenant l'application :

$$f : K^\times / K^{\times 2} \rightarrow I(K)/I(K)^2 \\ a \mapsto \langle 1, -a \rangle_{an}.$$

Pour $a \in K^\times$ tel que $\langle 1, -a \rangle$ est anisotrope, on a $f \circ d_\pm(\langle 1, -a \rangle) = f(a) = \langle 1, -a \rangle$. L'idéal $I(K)$ étant engendré par les espaces quadratiques anisotropes de la forme $\langle 1, -a \rangle$, on déduit que $f \circ d_\pm = \text{Id}_{I(K)/I(K)^2}$, et donc que d_\pm est injectif. Le discriminant signé est alors un isomorphisme :

$$d_\pm : I(K)/I(K)^2 \xrightarrow{\sim} K^\times / K^{\times 2}.$$

7. Algèbres de quaternions et formes quadratiques

Les invariants dimension et discriminant nous ont permis de comprendre les quotients $W(K)/I(K)$ et $I(K)/I(K)^2$. Nous voulons maintenant comprendre l'idéal $I(K)^2$, qui est engendré par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister $\langle\langle a, b \rangle\rangle = \langle 1, -a, -b, ab \rangle$ avec $a, b \in K^\times$. Il convient donc de commencer par comprendre ces dernières.

Pour ce faire, nous introduisons l'*algèbre de quaternions* $H_{a,b}$. Il s'agit de la K -algèbre (non commutative) de dimension 4 ayant pour base $(1, i, j, k)$ et dont la multiplication est définie par les relations :

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad k = ij = -ji.$$

Par exemple, $H_{1,1}$ n'est autre que l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_2(K)$ et, lorsque $K = \mathbb{R}$, l'algèbre $H_{-1,-1}$ coïncide avec l'algèbre des quaternions de Hamilton.

L'algèbre $H_{a,b}$ est munie d'une involution :

$$H_{a,b} \rightarrow H_{a,b} \\ \alpha = x + yi + zj + tk \mapsto \bar{\alpha} = x - yi - zj - tk,$$

ainsi que d'une "norme" (souvent appelée *norme réduite*) :

$$N_{a,b} : H_{a,b} \rightarrow K \\ \alpha = x + yi + zj + tk \mapsto \alpha \bar{\alpha} = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2.$$

La norme $N_{a,b}$ s'identifie donc à la forme quadratique qui nous intéresse $\langle\langle a, b \rangle\rangle$.

Théorème 2. Soient a, b, a', b' quatre éléments de K^\times . Les algèbres $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$ sont K -isomorphes si, et seulement si, les espaces quadratiques $(H_{a,b}, N_{a,b})$ et $(H_{a',b'}, N_{a',b'})$ sont isométriques.

Preuve (Esquisse). Un calcul élémentaire permet de montrer que tout K -isomorphisme d'algèbres entre $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$ est en fait une isométrie. Réciproquement, si les espaces quadratiques $(H_{a,b}, N_{a,b})$ et $(H_{a',b'}, N_{a',b'})$ sont isométriques et si $(1, i, j, k)$ et $(1, i', j', k')$ désignent les bases naturelles de $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$, on peut écrire $(H_{a,b}, N_{a,b}) \cong \langle 1 \rangle \perp H_{a,b}^0$ et $(H_{a',b'}, N_{a',b'}) \cong \langle 1 \rangle \perp H_{a',b'}^0$, avec $H_{a,b}^0 = Ki \oplus Kj \oplus Kk$ et $H_{a',b'}^0 = Ki' \oplus Kj' \oplus Kk'$. Le théorème de simplification de Witt fournit donc une isométrie

$$\psi : H_{a,b}^0 \rightarrow H_{a',b'}^0.$$

Un calcul élémentaire montre alors que $(1, \psi(i), \psi(j), \psi(k))$ est une K -base de $H_{a',b'}$ telle que $\psi(i)^2 = a, \psi(j)^2 = b$ et $\psi(i)\psi(j) = -\psi(j)\psi(i)$. Les algèbres $H_{a,b}$ et $H_{a',b'}$ sont donc bien isomorphes. \square

Ainsi, pour $a, b \in K^\times$, la classe d'isométrie de la forme quadratique $\langle\langle a, b \rangle\rangle_{an}$ est entièrement caractérisée par la classe d'isomorphisme de l'algèbre de quaternions $H_{a,b}$ et réciproquement. Il est donc naturel de chercher à construire un invariant c allant de $I(K)^2$ vers l'ensemble $\text{Quat}(K)$ des K -algèbres de quaternions à isomorphisme près et envoyant $\langle\langle a, b \rangle\rangle_{an}$ sur $H_{a,b}$ quels que soient $a, b \in K^\times$.

Pour ce faire, fixons une forme quadratique $q \in I(K)^2$. Bien sûr, q n'est pas nécessairement de la forme $\langle\langle a, b \rangle\rangle_{an}$, mais l'idéal $I(K)^2$ étant engendré par les 2-formes de Pfister, on peut écrire :

$$q = n_1 \langle\langle a_1, b_1 \rangle\rangle_{an} + \dots + n_r \langle\langle a_r, b_r \rangle\rangle_{an},$$

pour certains $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$. On voudrait donc définir l'invariant c en envoyant q sur :

$$n_1 H_{a_1, b_1} + \dots + n_r H_{a_r, b_r}.$$

Pour donner un sens à cette somme, il faudrait munir $\text{Quat}(K)$ d'une loi de groupe abélien. Une approche naturelle consisterait alors à décréter que la somme de deux algèbres de quaternions H et H' dans $\text{Quat}(K)$ est la K -algèbre $H \otimes_K H'$. Malheureusement, cette algèbre étant de dimension 16, ce n'est pas une algèbre de quaternions. Nous sommes donc amenés à sortir de l'ensemble des algèbres de quaternions et à considérer une classe de K -algèbres plus grosse que $\text{Quat}(K)$ qui soit stable par produit tensoriel.

8. Algèbres simples centrales et invariant de Clifford

Motivés par les observations faites à la fin de la section précédente, nous introduisons la notion d'algèbre simple centrale :

Définition 1. Une algèbre simple centrale sur K est une K -algèbre A de dimension finie, pas nécessairement commutative, n'ayant pour idéaux bilatères que l'idéal nul et A tout entier, et dont le centre $Z(A) := \{a \in A \mid \forall b \in A, ab = ba\}$ est réduit au corps K .

Par exemple, le corps K lui-même, les algèbres de matrices $\mathcal{M}_2(K), \mathcal{M}_3(K), \dots$, et les K -algèbres de quaternions sont des algèbres simples centrales sur K . Il se trouve que cette classe de K -algèbres est stable par produit tensoriel, et c'est donc un très bon candidat pour remplacer les algèbres de quaternions. On va par conséquent considérer dans la suite l'ensemble $\text{ASC}(K)$ des K -algèbres simples centrales à isomorphisme près, muni de l'opération :

$$A + B := A \otimes_K B.$$

Cette opération est commutative et associative, et elle admet la K -algèbre K pour élément neutre.

En suivant la stratégie décrite à la fin de la section 7, on voudrait construire un invariant $c : I(K)^2 \rightarrow \text{ASC}(K)$ tel que

$$\begin{aligned} c(n_1 \langle\langle a_1, b_1 \rangle\rangle_{an} + \dots + n_r \langle\langle a_r, b_r \rangle\rangle_{an}) \\ = n_1 H_{a_1, b_1} + \dots + n_r H_{a_r, b_r} \end{aligned} \quad (8)$$

pour $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{Z}$. En particulier, on voudrait que c envoie la forme quadratique $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle_{an}$ sur $H_{1,1}$, qui n'est autre que l'algèbre de matrices $\mathcal{M}_2(K)$. Mais dans l'anneau de Witt $W(K)$, on a les égalités :

$$\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle_{an} = \langle 1, -1, -1, 1 \rangle_{an} = (\mathbb{H}^2)_{an} = 0,$$

et donc c devrait aussi envoyer $\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle_{an}$ sur l'élément neutre de $\text{ASC}(K)$ pour la loi $+$, à savoir la K -algèbre K . Ainsi, on devrait avoir :

$$c(\langle\langle 1, 1 \rangle\rangle_{an}) = K = \mathcal{M}_2(K)$$

dans $\text{ASC}(K)$, ce qui est évidemment faux. Il n'est donc pas possible de définir un invariant $c : I(K)^2 \rightarrow \text{ASC}(K)$ vérifiant (8).

Afin de pallier ce problème, l'idée consiste à identifier formellement K et $\mathcal{M}_2(K)$ dans $\text{ASC}(K)$. Autrement dit, on va remplacer $\text{ASC}(K)$ par un quotient qui identifie K et $\mathcal{M}_2(K)$.

Proposition 1. Étant données deux algèbres simples centrales $A, B \in \text{ASC}(K)$, on note $A \sim B$ s'il existe $m, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$A \otimes_K \mathcal{M}_m(K) \cong B \otimes_K \mathcal{M}_n(K).$$

On munit ainsi l'ensemble $\text{ASC}(K)$ d'une relation d'équivalence et l'opération $+$ sur $\text{ASC}(K)$ induit

une loi de groupe abélien sur le quotient $ASC(K)/\sim$, dont l'élément neutre est représenté par toutes les algèbres de matrices $\mathcal{M}_n(K)$ avec $n \geq 1$.

Le groupe $ASC(K)/\sim$ s'appelle le *groupe de Brauer* de K , et on le note $Br(K)$. Sans vouloir rentrer dans les détails de la preuve de la proposition précédente, voici juste quelques règles très utiles qui permettent de faire des calculs dans ce groupe :

Règles de calcul 1. Les algèbres de quaternions vérifient les trois règles de calcul fondamentales suivantes dans le groupe de Brauer.

(RC1) L'application :

$$K^\times \times K^\times \rightarrow Br(K)$$

$$(a, b) \mapsto H_{a,b}$$

est bilinéaire. Autrement dit, pour tous $a, b, c \in K^\times$:

$$H_{a,bc} = H_{a,b} + H_{a,c} \in Br(K),$$

$$H_{ab,c} = H_{a,c} + H_{b,c} \in Br(K).$$

(RC2) Pour tout $a \in K \setminus \{0, 1\}$:

$$H_{a,1-a} = 0 \in Br(K).$$

(RC3) Pour tous $a, b \in K^\times$:

$$2H_{a,b} = 0 \in Br(K).$$

Remarque 1. Les trois règles (RC1), (RC2) et (RC3) sont les « règles de base » qui permettent de faire des calculs avec les algèbres de quaternions dans $Br(K)$. Bien sûr, il est possible d'établir d'autres règles de calcul, qui dans certains cas peuvent s'avérer très pratiques, mais qui ne sont pas essentielles puisqu'elles découlent formellement de (RC1), (RC2) et (RC3). Par exemple, pour $a, b, c, d \in K^\times$, on a les égalités $H_{ac^2, bd^2} = H_{a,b}$ et $H_{a,-a} = 0$ dans $Br(K)$.

Preuve (Démonstration des règles de calcul (RC1), (RC2) et (RC3)).

(RC1) Même si le calcul est un peu fastidieux, on peut établir à la main que :

$$H_{a,b} \otimes H_{a,c} \cong H_{a,bc} \otimes \mathcal{M}_2(K).$$

On a donc $H_{a,bc} = H_{a,b} + H_{a,c}$, et l'autre égalité s'obtient par symétrie.

(RC2) Soit $a \in K \setminus \{0, 1\}$. La forme quadratique $\langle 1, -a, a-1 \rangle$ est isotrope puisque $1 - a + (a-1) = 0$. On peut donc écrire $\langle 1, -a, a-1 \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle b \rangle$ pour un certain $b \in K^\times$. En comparant les discriminants, on

obtient que $b \in -a(1-a)K^{\times 2}$, et donc $\langle 1, -a, a-1 \rangle \cong \mathbb{H} \perp \langle -a(1-a) \rangle$. Par suite :

$$\langle \langle a, 1-a \rangle \rangle = \langle 1, -a, a-1, a(1-a) \rangle$$

$$\cong \mathbb{H} \perp \langle -a(1-a), a(1-a) \rangle \cong \mathbb{H}^2.$$

Le théorème 2 implique donc que :

$$H_{a,1-a} \cong H_{1,1} \cong \mathcal{M}_2(K),$$

ce qui montre que $H_{a,1-a} = 0 \in Br(K)$.

(RC3) On a :

$$\langle \langle a, b^2 \rangle \rangle = \langle 1, -a, -b^2, ab^2 \rangle \cong \underbrace{\langle 1, -1 \rangle}_{\mathbb{H}} \underbrace{\langle a, -a \rangle}_{\mathbb{H}} \cong \mathbb{H}^2.$$

D'après le théorème 2, on déduit que $H_{a,b^2} \cong \mathcal{M}_2(K)$, et donc que :

$$2H_{a,b} \stackrel{(RC1)}{=} H_{a,b^2} = 0 \in Br(K).$$

□

Le reste de cette section est consacré à la construction d'un invariant $c : I(K)^2 \rightarrow Br(K)$ vérifiant (8). Pour ce faire, il faut commencer par écrire un élément quelconque de $I(K)^2$ comme combinaison linéaire de 2-formes de Pfister. Fixons donc un entier $n \geq 0$ et des éléments a_1, \dots, a_n de K^\times tels que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in I(K)^2$. Afin d'écrire $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ comme somme de 2-formes de Pfister dans l'anneau $W(K)$, on commence par faire apparaître artificiellement le terme $\langle \langle a_1, a_2 \rangle \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle a_1, \dots, a_n \rangle &= \langle a_1, a_2 \rangle \\ &\quad + \langle a_3, \dots, a_n \rangle \\ &= \underbrace{\langle 1, -1 \rangle}_{\mathbb{H}} \underbrace{\langle a_1, a_2 \rangle}_{\langle a_1, a_2 \rangle} \underbrace{\langle a_1 a_2, a_1 a_2 \rangle}_{\mathbb{H}} \langle a_3, \dots, a_n \rangle \\ &= \langle -1, a_1, a_2, -a_1 a_2 \rangle_{an} + \langle 1 \rangle + \langle a_1 a_2 \rangle \\ &\quad + \langle a_3, \dots, a_n \rangle \\ &= -\langle \langle a_1, a_2 \rangle \rangle_{an} + \langle 1 \rangle \\ &\quad + \langle a_1 a_2, a_3, \dots, a_n \rangle_{an}. \end{aligned} \tag{9}$$

Maintenant qu'on a fait apparaître le terme $\langle \langle a_1, a_2 \rangle \rangle_{an}$, on peut recommencer les calculs avec la forme quadratique $(n-1)$ -dimensionnelle $\langle a_1 a_2, a_3, \dots, a_n \rangle_{an}$ et faire apparaître artificiellement le terme $\langle \langle a_1 a_2, a_3 \rangle \rangle$:

$$\langle a_1 a_2, a_3, \dots, a_n \rangle_{an} = -\langle \langle a_1 a_2, a_3 \rangle \rangle_{an} + \langle 1 \rangle + \langle a_1 a_2 a_3, a_4, \dots, a_n \rangle_{an}. \tag{10}$$

En combinant les formules (9) et (10), on obtient :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = -\langle\langle a_1, a_2 \rangle\rangle_{an} - \langle\langle a_1 a_2, a_3 \rangle\rangle_{an} + 2\langle 1 \rangle + \langle a_1 a_2 a_3, a_4, \dots, a_n \rangle_{an}.$$

On peut alors recommencer les calculs avec $\langle a_1 a_2 a_3, a_4, \dots, a_n \rangle_{an}$, et en itérant cette procédure, on aboutit donc à l'égalité :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = -\langle\langle a_1, a_2 \rangle\rangle_{an} - \langle\langle a_1 a_2, a_3 \rangle\rangle_{an} - \dots - \langle\langle a_1 \dots a_{n-1}, a_n \rangle\rangle_{an} + (n-1)\langle 1 \rangle + \langle a_1 a_2 \dots a_n \rangle.$$

Mais comme $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ est dans

$$I(K)^2 = \ker(d_{\pm}) \subseteq I(K) = \ker(\dim^0),$$

on a $n \in 2\mathbb{Z}$ et $(-1)^{n/2} a_1 \dots a_n \in K^{\times 2}$. On peut donc écrire $n = 2m$ et $a_1 \dots a_n = (-1)^m \delta^2$ avec $m \in \mathbb{N}$ et $\delta \in K^{\times}$, d'où :

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = -\langle\langle a_1, a_2 \rangle\rangle_{an} - \langle\langle a_1 a_2, a_3 \rangle\rangle_{an} - \dots - \langle\langle a_1 \dots a_{2m-1}, a_{2m} \rangle\rangle_{an} + (2m-1)\langle 1 \rangle + \langle (-1)^m \rangle.$$

Finalement, comme $\langle\langle -1, -1 \rangle\rangle = \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$, on a :

$$(2m-1)\langle 1 \rangle + \langle (-1)^m \rangle = \begin{cases} (2m-1)\langle 1 \rangle + \langle 1 \rangle = 2m\langle 1 \rangle = \frac{m}{2} \langle\langle -1, -1 \rangle\rangle_{an} & \text{si } m \text{ est pair,} \\ 2(m-1)\langle 1 \rangle + \underbrace{\langle 1, -1 \rangle}_{\mathbb{H}} = \frac{m-1}{2} \langle\langle -1, -1 \rangle\rangle_{an} & \text{si } m \text{ est impair,} \end{cases}$$

$$= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \langle\langle -1, -1 \rangle\rangle_{an},$$

d'où la proposition :

Proposition 2. *Quels que soient $a_1, \dots, a_n \in K^{\times}$ tels que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in I(K)^2$, on a :*

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = -\langle\langle a_1, a_2 \rangle\rangle_{an} - \langle\langle a_1 a_2, a_3 \rangle\rangle_{an} - \dots - \langle\langle a_1 \dots a_{n-1}, a_n \rangle\rangle_{an} + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \langle\langle -1, -1 \rangle\rangle_{an}.$$

Par conséquent, s'il existe un invariant $c : I(K)^2 \rightarrow \text{Br}(K)$ qui vérifie (8), alors on a nécessairement

$$c(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = -H_{a_1, a_2} - H_{a_1 a_2, a_3} - \dots - H_{a_1 \dots a_{n-1}, a_n} + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor H_{-1, -1} \quad (11)$$

quels que soient $a_1, \dots, a_n \in K^{\times}$ tels que $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in I(K)^2$. Par la propriété de bilinéarité (RC1), la formule précédente peut être réécrite sous la forme :

$$c(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) = - \sum_{i < j} H_{a_i, a_j} + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor H_{-1, -1}. \quad (12)$$

Théorème 3. *La formule (11) (ou de manière équivalente la formule (12)) définit une application*

$$c : W(K) \rightarrow \text{Br}(K)$$

telle que $c(\langle\langle a, b \rangle\rangle_{an}) = H_{a, b}$ quels que soient $a, b \in K^{\times}$. On l'appelle l'invariant de Clifford. Sa restriction à $I(K)^2$ est un morphisme de groupes, dont le noyau contient $I(K)^3$.

La démonstration de ce théorème étant trop longue et technique pour être incluse ici, le lecteur intéressé pourra aller voir le chapitre V de [3] ou le complément [1]. Pour la suite, on retiendra juste que, comme cela est expliqué dans [1], il est possible de faire cette preuve en n'utilisant aucune propriété du groupe de Brauer autre que les règles de calcul (RC1) à (RC3).

C'est en 1982 que Merkurjev parvient à démontrer l'important et difficile théorème suivant concernant l'invariant de Clifford :

Théorème 4 (Merkurjev [4]). *Soit $\text{Br}(K)[2]$ le sous-groupe de 2-torsion de $\text{Br}(K)$, c'est-à-dire le sous-groupe des éléments $A \in \text{Br}(K)$ tels que $2A = 0$. L'invariant de Clifford induit un isomorphisme de groupes :*

$$c : I(K)^2 / I(K)^3 \xrightarrow{\sim} \text{Br}(K)[2].$$

La démonstration de ce résultat dépasse très largement le cadre de ce texte de survol. Néanmoins, nous prouverons dans le paragraphe suivant une variante beaucoup plus simple du théorème de Merkurjev, dans laquelle on remplace le groupe de Brauer par un groupe de K -théorie.

9. K -théorie de Milnor

Comme cela a été expliqué dans le paragraphe précédent, les seules propriétés du groupe de Brauer qui sont utilisées dans la preuve du théorème 3 sont les règles de calcul (RC1)-(RC3). Il est donc possible de remplacer dans ce théorème le groupe de Brauer par n'importe quel groupe abélien B contenant pour $a, b \in K^{\times}$ des symboles $\{a, b\}$ qui vérifient les mêmes relations fondamentales que les algèbres de quaternions :

(RC1') L'application :

$$K^\times \times K^\times \rightarrow B$$

$$(a, b) \mapsto \{a, b\}$$

est bilinéaire.

(RC2') Pour tout $a \in K \setminus \{0, 1\}$:

$$\{a, 1 - a\} = 0.$$

(RC3') Pour tous $a, b \in K^\times$:

$$2\{a, b\} = 0.$$

En choisissant tout naturellement pour B le groupe abélien $k_2(K)$ défini par générateurs et relations comme suit

- générateurs : symboles $\{a, b\}$ avec $a, b \in K^\times$,
- relations : (RC1'), (RC2') et (RC3'),

on obtient un invariant

$$c' : I(K)^2/I(K)^3 \rightarrow k_2(K).$$

Le groupe $k_2(K)$ s'appelle le *deuxième groupe de K -théorie de Milnor de K modulo 2*.

Nous sommes maintenant en mesure de voir que l'analogue du théorème de Merkurjev (théorème 4) pour c' est vrai et est beaucoup plus facile à démontrer.

Théorème 5 (Milnor [6]). *L'invariant c' est un isomorphisme dont la réciproque $\pi : k_2(K) \rightarrow I(K)^2/I(K)^3$ est induite par l'application :*

$$b : K^\times \times K^\times \rightarrow I(K)^2/I(K)^3$$

$$(x, y) \rightarrow \langle \langle x, y \rangle \rangle_{an} \pmod{I(K)^3}.$$

Preuve. Pour montrer que l'application b induit bien un morphisme de groupes $\pi : k_2(K) \rightarrow I(K)^2/I(K)^3$, il suffit de voir que b respecte les relations (RC1'), (RC2') et (RC3'), c'est-à-dire que :

$$b(x, yz) = b(x, y) + b(x, z), \quad (13)$$

$$b(xy, z) = b(x, z) + b(y, z), \quad (14)$$

$$b(t, 1 - t) = 0, \quad (15)$$

$$2b(x, y) = 0 \quad (16)$$

pour $x, y, z \in K^\times$ et $t \in K \setminus \{0, 1\}$. L'égalité (13) découle aisément des calculs suivants effectués dans

$I(K)^2/I(K)^3$:

$$b(x, y) + b(x, z) = \langle 1, -x, -y, xy, 1, -x, -z, xz \rangle_{an}$$

$$= \langle 1, -x, -y, xy, 1, -x, -z, xz, \underbrace{yz, -yz, xyz, -xyz}_{IH} \rangle_{an}$$

$$= \langle 1, -x, -yz, xyz \rangle_{an}$$

$$+ \langle yz, -xyz, -y, xy, 1, -x, -z, xz \rangle_{an}$$

$$= \langle \langle x, yz \rangle \rangle_{an} + \underbrace{\langle \langle x, y, z \rangle \rangle_{an}}_{\in I(K)^3}$$

$$= b(x, yz).$$

L'égalité (14) se démontre exactement de la même manière. On prouve (15) en se rappelant que, d'après la preuve de (RC2), on a $\langle \langle t, 1 - t \rangle \rangle \cong \mathbb{H}^2$, de sorte que $b(t, 1 - t) = \langle \langle t, 1 - t \rangle \rangle_{an} = 0$. Et de même, on prouve (16) en se rappelant que, d'après la preuve de (RC3), on a $\langle \langle x, y^2 \rangle \rangle \cong \mathbb{H}^2$, de sorte que :

$$2b(x, y) \underset{(13)}{=} b(x, y^2) = \langle \langle x, y^2 \rangle \rangle_{an} = 0.$$

On déduit de ces calculs que b induit un morphisme de groupes $\pi : k_2(K) \rightarrow I(K)^2/I(K)^3$ envoyant chaque symbole $\{x, y\}$ sur $\langle \langle x, y \rangle \rangle_{an} \pmod{I(K)^3}$. En particulier, on a :

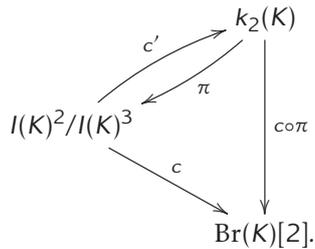
$$\pi \circ c'(\langle \langle x, y \rangle \rangle_{an}) = \langle \langle x, y \rangle \rangle_{an} \quad \text{et} \quad c' \circ \pi(\{x, y\}) = \{x, y\}$$

quels que soient $x, y \in K^\times$. Or $I(K)^2$ est engendré par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister et $k_2(K)$ est engendré par les symboles $\{x, y\}$. On conclut que c' et π sont inverses l'un de l'autre. \square

Dans la section 2, nous avons décrit deux approches possibles afin de classifier les formes quadratiques : l'une consistait à construire des invariants sur $W(K)$ et l'autre à donner une présentation de $W(K)$. Le théorème précédent fournit une réponse satisfaisante à ces deux approches dans le cas des formes quadratiques qui sont dans $I(K)^2$:

- d'une part, c' est un invariant allant de $I(K)^2$ dans $k_2(K)$ et permettant de détecter les formes quadratiques qui sont dans $I(K)^3$;
- d'autre part, π fournit une présentation de $I(K)^2/I(K)^3$ par générateurs et relations : les générateurs sont donnés par les parties anisotropes des 2-formes de Pfister, et les relations sont induites par (RC1'), (RC2') et (RC3').

En combinant ce théorème avec le théorème de Merkurjev (théorème 5), on obtient un triangle d'isomorphismes :



Ce triangle met en évidence des liens forts entre trois objets de natures a priori très différentes : les formes quadratiques sur K , la K -théorie de Milnor modulo 2 et les algèbres simples centrales. Le but des conjectures de Milnor est de généraliser ce triangle afin de décrire tous les quotients $I(K)^n/I(K)^{n+1}$.

10. Les conjectures de Milnor

Nous cherchons maintenant à construire des analogues des groupes $\text{Br}(K)[2]$ et $k_2(K)$ qui permettent de décrire les quotients $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ pour tout n .

10.1 – Groupes de K -théorie supérieurs

Commençons par généraliser $k_2(K)$. Pour ce faire, rappelons que, quel que soit $n \geq 1$, le groupe $I(K)^n$ est engendré par les parties anisotropes des n -formes de Pfister $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle_{an}$ avec $a_1, \dots, a_n \in K^\times$. Pour généraliser la construction de $k_2(K)$, nous devons donc comprendre quelles relations vérifient ces générateurs dans le quotient $I(K)^n/I(K)^{n+1}$. En suivant la même méthode que celle utilisée dans la preuve du théorème 5, on peut établir les relations suivantes.

(R1) L'application :

$$K^\times \times \dots \times K^\times \rightarrow I(K)^n/I(K)^{n+1}$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle_{an} \pmod{I(K)^{n+1}}$$

est n -linéaire.

(R2) Pour tout n -uplet (a_1, \dots, a_n) à valeurs dans K^\times tel qu'il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts vérifiant $a_i + a_j = 1$:

$$\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle_{an} \equiv 0 \pmod{I(K)^{n+1}}.$$

(R3) Pour tout n -uplet (a_1, \dots, a_n) à valeurs dans K^\times :

$$2\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle_{an} \equiv 0 \pmod{I(K)^{n+1}}.$$

On va donc naturellement modéliser des groupes de K -théorie « supérieurs » via les générateurs et relations précédents.

Définition 2. Pour $n \geq 1$, le n -ième groupe de K -théorie de Milnor de K modulo 2 est le groupe abélien $k_n(K)$ défini par générateurs et relations comme suit.

- Générateurs : symboles $\{a_1, \dots, a_n\}$ avec $a_1, \dots, a_n \in K^\times$.
- Relations

(R1') L'application :

$$K^\times \times \dots \times K^\times \rightarrow k_n(K)$$

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto \{a_1, \dots, a_n\}$$

est n -linéaire.

(R2') Pour tout n -uplet (a_1, \dots, a_n) à valeurs dans K^\times tel qu'il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ distincts vérifiant $a_i + a_j = 1$:

$$\{a_1, \dots, a_n\} = 0.$$

(R3') Pour tout n -uplet (a_1, \dots, a_n) à valeurs dans K^\times :

$$2\{a_1, \dots, a_n\} = 0.$$

Les relations (R1), (R2) et (R3) montrent alors que l'on définit bien un morphisme de groupes :

$$\pi_n : k_n(K) \rightarrow I(K)^n/I(K)^{n+1}$$

en envoyant $\{a_1, \dots, a_n\}$ sur $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle_{an}$ pour tous $a_1, \dots, a_n \in K^\times$. La conjecture qui suit généralise vastement le théorème 5.

Conjecture 1 (Première partie de la conjecture de Milnor). Pour tout $n \geq 1$, le morphisme π_n est un isomorphisme.

10.2 – Cohomologie galoisienne

Il est plus difficile d'expliquer comment généraliser le groupe de Brauer et cela dépasse le cadre de cet article de survol. Nous allons donc rester très vagues dans ce paragraphe.

De manière générale, il est possible d'associer au corps K une théorie cohomologique que l'on appelle la *cohomologie galoisienne*. Si l'on note \bar{K} la clôture séparable de K , celle-ci n'est autre que la cohomologie du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$, à condition de voir ce dernier comme un groupe topologique et non comme un groupe abstrait.

Nous sommes ici intéressés par la cohomologie galoisienne de K à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Celle-ci peut être décrite explicitement en termes d'espaces de fonctions allant du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ vers le groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Plus précisément, donnons-nous un entier naturel $n \geq 0$, et considérons le groupe abélien Z^n des fonctions continues :

$$f : \text{Gal}(\bar{K}/K)^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

vérifiant l'équation fonctionnelle suivante

$$f(g_2, \dots, g_{n+1}) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n) = 0$$

pour tous $g_1, \dots, g_{n+1} \in \text{Gal}(\bar{K}/K)$. Ce groupe, que l'on appelle le groupe des n -cocycles, contient comme sous-groupe l'ensemble B^n des fonctions

$$h : \text{Gal}(\bar{K}/K)^n \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

de la forme

$$h(g_1, \dots, g_n) = h_0(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i h_0(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^n h_0(g_1, \dots, g_{n-1})$$

pour une certaine fonction continue

$$h_0 : \text{Gal}(\bar{K}/K)^{n-1} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Les éléments de B^n sont appelés les n -cobords. Le n -ième groupe de cohomologie de K à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est alors le quotient des n -cocycles par les n -cobords :

$$H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) := Z^n/B^n.$$

Cette définition est technique et il n'est pas nécessaire de la retenir précisément dans la suite. On notera simplement que le groupe $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est défini de manière très explicite et qu'il ne dépend que du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$.

Un résultat élémentaire et classique concernant ces groupes de cohomologie permet d'identifier la 2-torsion du groupe de Brauer $\text{Br}(K)[2]$ avec le deuxième groupe de cohomologie $H^2(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en envoyant une algèbre de quaternions $H_{a,b}$ sur le

2-cocycle :

$$f_{a,b} : \text{Gal}(\bar{K}/K)^2 \rightarrow \{-1, 1\} \\ (g_1, g_2) \mapsto \frac{g_1(\sqrt{a})}{\sqrt{a}} \cdot \frac{g_2(\sqrt{b})}{\sqrt{b}}.$$

Il est alors naturel de chercher à remplacer le groupe de Brauer $\text{Br}(K)[2]$ par les groupes de cohomologie supérieurs $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ afin de décrire les quotients $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ pour $n \geq 3$. La première étape cruciale consiste donc à construire un morphisme reliant le groupe de cohomologie $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ au quotient $I(K)^n/I(K)^{n+1}$. Si l'on croit à la conjecture 1, ce dernier quotient peut être remplacé par le groupe de K -théorie $k_n(K)$.

En s'inspirant des constructions précédentes et en faisant quelques calculs élémentaires, on peut vérifier que l'on définit bien un morphisme de groupes $r_n : k_n(K) \rightarrow H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en envoyant chaque symbole $\{a_1, \dots, a_n\}$ sur le n -cocycle :

$$f_{a_1, \dots, a_n} : \text{Gal}(\bar{K}/K)^n \rightarrow \{-1, 1\} \\ (g_1, \dots, g_n) \mapsto \frac{g_1(\sqrt{a_1})}{\sqrt{a_1}} \cdots \frac{g_n(\sqrt{a_n})}{\sqrt{a_n}}.$$

La conjecture qui suit généralise alors vastement le théorème de Merkurjev (théorème 4).

Conjecture 2 (Deuxième partie de la conjecture de Milnor). *Pour tout $n \geq 1$, le morphisme r_n est un isomorphisme.*

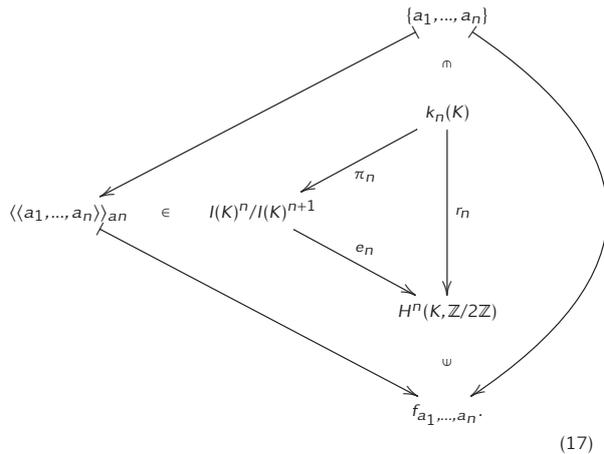
Cette conjecture présente, entre autres, deux intérêts majeurs.

- Contrairement aux groupes $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ et $k_n(K)$, la cohomologie est très flexible. Cela permet par exemple souvent d'insérer les groupes de cohomologie dans des suites exactes, ce qui les rend plus faciles à manipuler et à calculer.
- Le groupe de cohomologie $H^n(K, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ne dépend que du groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$. La conjecture donne donc une description du groupe $k_n(K)$ (et du groupe $I(K)^n/I(K)^{n+1}$ si l'on croit à la première partie de la conjecture de Milnor) en termes uniquement de ce groupe de Galois et non de l'arithmétique interne du corps K .

10.3 – Résumé et conclusion

Les deux conjectures de Milnor prédisent donc des liens profonds entre trois objets de natures a priori très différentes : les formes quadratiques,

la K -théorie et la cohomologie galoisienne. Ces liens peuvent être résumés via le triangle d'isomorphismes suivant :



où $e_n := r_n \circ \pi_n^{-1}$. Cela fournit une réponse complète et satisfaisante aux deux approches présentées dans la section 2 :

- le morphisme π_n permet de donner une présentation par générateurs et relations de $I(K)^n / I(K)^{n+1}$;
- la famille de morphismes $(e_n)_n$ constitue un système complet d'invariants dans le sens où il permet de décider si deux formes quadratiques sont isométriques ou non. En effet, donnons-nous deux formes quadratiques q_1 et q_2 dans $W(K)$. Afin de déterminer si q_1 et q_2 sont isométriques, on commence par comparer leurs premiers invariants, à savoir la dimension et le discriminant. S'ils ne sont pas les mêmes, alors q_1 et q_2 ne peuvent pas être isométriques. Par contre, si q_1 et q_2 ont même

dimension et même discriminant, on déduit que $q_1 - q_2 \in I(K)^2$. On peut alors s'intéresser à l'invariant suivant, à savoir e_2 , et donc calculer $e_2(q_1 - q_2)$. Si $e_2(q_1 - q_2) \neq 0$, alors q_1 et q_2 ne peuvent pas être isométriques. Par contre si $e_2(q_1 - q_2) = 0$, alors $q_1 - q_2 \in I(K)^3$ et on peut s'intéresser à l'invariant suivant e_3 . En itérant cette procédure, deux cas se présentent.

- a) Le processus s'arrête car on aboutit à un entier n tel que $e_n(q_1 - q_2) \neq 0$. Dans ce cas, q_1 et q_2 ne sont pas isométriques.
- b) Le processus ne s'arrête jamais, de sorte que $e_n(q_1 - q_2) = 0$ pour tout n . On a alors $q_1 - q_2 \in \bigcap_{n \geq 2} I(K)^n$. Mais un théorème classique dû à Arason (cf. Hauptsatz X.5.1 dans [3]) affirme qu'une forme quadratique anisotrope de $I(K)^n$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est non nul est de dimension au moins 2^n . Du coup, on a $\bigcap_{n \geq 2} I(K)^n = \{0\}$, et donc $q_1 = q_2 \in W(K)$. Cela prouve que q_1 et q_2 sont bien isométriques.

Comme cela a été expliqué dans l'introduction de ce texte, la deuxième partie de la conjecture de Milnor (ainsi qu'une vaste généralisation qui avait été conjecturée auparavant par Bloch et Kato) a été établie en 2003 par Voevodsky en s'appuyant fortement sur des travaux antérieurs de Rost. En utilisant ce résultat, plusieurs auteurs ont ensuite montré la première conjecture de Milnor : Orlov, Vishik et Voevodsky dans [9], Morel dans [7] et [8], et Kahn et Sujatha dans [2]. Ainsi, on sait de nos jours que le triangle (17) est bien un triangle d'isomorphismes, et donc que chaque quotient $I(K)^n / I(K)^{n+1}$ s'identifie à un groupe de K -théorie et à un groupe de cohomologie galoisienne.

Références

- [1] D. IZQUIERDO. « Complément à un article de la Gazette des Mathématiciens sur la conjecture de Milnor » (2020). URL : <https://perso.pages.math.cnrs.fr/users/diego.izquierdo/research/>.
- [2] B. KAHN et R. SUJATHA. « Motivic cohomology and unramified cohomology of quadrics ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* 2, n° 2 (2000), p. 145-177.
- [3] T. Y. LAM. *Introduction to quadratic forms over fields*. 67. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005, p. xxii+550.
- [4] A. S. MERKURJEV. « On the norm residue symbol of degree 2 ». *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 261, n° 3 (1981), p. 542-547.
- [5] A. S. MERKURJEV et A. A. SUSLIN. « Norm residue homomorphism of degree three ». *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 54, n° 2 (1990), p. 339-356.
- [6] J. MILNOR. « Algebraic K -theory and quadratic forms ». *Invent. Math.* 9 (1969/70), p. 318-344.
- [7] F. MOREL. « Milnor's conjecture on quadratic forms and mod 2 motivic complexes ». *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 114 (2006), p. 63-101.
- [8] F. MOREL. « Suite spectrale d'Adams et invariants cohomologiques des formes quadratiques ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* 328, n° 11 (1999), p. 963-968.

- [9] D. ORLOV, A. VISHIK et V. VOEVODSKY. « An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms ». *Ann. of Math.* (2) **165**, n° 1 (2007), p. 1-13.
- [10] M. ROST. « Hilbert 90 for K_3 for degree-two extensions ». *preprint* **11** (1986).
- [11] A. SUSLIN et S. JOUKHOVITSKI. « Norm varieties ». *J. Pure Appl. Algebra* **206**, n° 1-2 (2006), p. 245-276.
- [12] V. VOEVODSKY. « Motivic cohomology with $\mathbb{Z}/2$ -coefficients ». *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, n° 98 (2003), p. 59-104.
- [13] E. WITT. « Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern. » *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **1937**, n° 176 (1937), p. 31-44.



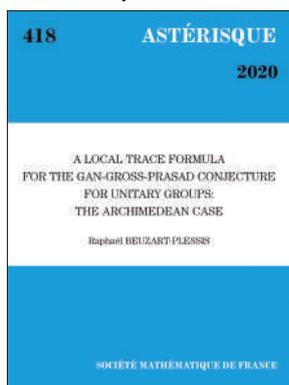
Diego IZQUIERDO

École polytechnique
diego.izquierdo@gmail.com

Diego Izquierdo est professeur Monge au Centre de Mathématiques Laurent Schwartz à l'École polytechnique depuis septembre 2019. Sa recherche se situe au sein de la géométrie arithmétique et porte notamment sur l'étude des points rationnels sur les variétés algébriques.

Je voudrais remercier Javier Fresán, David Harari et Yves Stalder pour leurs commentaires qui ont permis d'améliorer substantiellement ce texte.

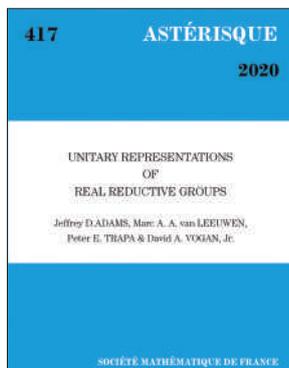
Astérisque - dernières parutions



Vol. 418
A local trace formula for the Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: the Archimedean
R. BEUZART-PLESSIS

ISBN 978-2-85629-919-7
2020 - 308 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 55 € - Members: 38 €

In this volume, we prove, inspired by earlier work of Waldspurger on orthogonal groups, a sort of local trace formula which is related to the local Gan-Gross-Prasad conjecture over any local field F of characteristic zero. As a consequence, we obtain a geometric formula for certain multiplicities $m(\pi)$ appearing in this conjecture and deduce from it a weak form of the local Gan-Gross-Prasad conjecture (multiplicity one in tempered L -packets). These results were already known over p -adic fields by previous work of the author and thus are only new when $F = \mathbb{R}$. However, the proof we present here works uniformly over all local fields of characteristic zero.



Vol. 417
Unitary representation, Kazhdan-Lusztig polynomial, Hermitian form
Jeffrey D. ADAMS, Marc A. A. VAN LEEUWEN, Peter E. TRAPA and David A. VOGAN, Jr.

ISBN 978-2-85629-918-0
2020 - 177 pages - Softcover. 17 x 24
Public: 40 € - Members: 28 €

We present an algorithm for computing the irreducible unitary representations of a real reductive group G . The Langlands classification, as formulated by Knapp and Zuckerman, exhibits any representation with an invariant Hermitian form as a deformation of a unitary representation from the Plancherel formula. The behavior of these deformations was in part determined in the Kazhdan-Lusztig analysis of irreducible characters; more complete information comes from the Beilinson-Bernstein proof of the Jantzen conjectures. Our algorithm traces the signature of the form through this deformation, counting changes at reducibility points. An important tool is a variant of Weyl's "unitary trick": replacing the classical invariant Hermitian form (where $\text{Lie}(G)$ acts by skew-adjoint operators) by a new one (where a compact form of $\text{Lie}(G)$ acts by skew-adjoint operators).

Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>
*frais de port non compris





Des femmes et des mathématiques

- M. DESCHAMPS
- M.-C. HEYDEMANN
- M. LEJEUNE
- O. MARÉCHAL

Cette tribune a été publiée dans la *Gazette* de février 1976.

Aux USA, où au début du siècle les résultats des luttes pour les droits de la femme étaient pleins de promesses, la situation actuelle des femmes dans le monde du travail en général et dans les universités en particulier, n'est guère brillante. Pour éviter leur totale disparition des postes de professeurs on a même été amené à leur créer des postes réservés. En comparaison, leurs compagnes françaises semblent privilégiées. Mais qu'en est-il réellement ? Dans l'université et au CNRS l'égalité entre hommes et femmes est un fait juridique. L'état patron ne fait officiellement aucune discrimination entre les sexes et donne droit, à tous, à qualification égale, à un poste égal et distribue à fonction égale un salaire égal. Dans le milieu mathématique en particulier, l'idée que chacun est reconnu selon sa juste valeur, valeur en soi, indépendante de toute donnée sociale, est encore la plus répandue. Par ailleurs, nombre d'entre nous reconnaissent qu'elles sont assez satisfaites de leur métier, qui leur apporte peut-être plus de joies qu'un autre ne pourrait le faire, et qu'elles entretiennent des relations excellentes, parfois même nouent de solides amitiés, où leur condition de femme n'est pas un handicap, avec les membres des groupes de recherche dans lesquels elles travaillent. Et pourtant ...

Et pourtant, sur la dernière promotion « mathéuse » sortie de Sèvres, on compte deux élèves seulement qui ont obtenu un poste d'assistante, et l'un des deux est provisoire. Dans le même temps, tous leurs homologues de la rue d'Ulm qui le désiraient ont été recrutés dans l'enseignement supérieur. Mais peut-être les autres sévriennes désiraient-elles aller dans le secondaire ... Et pourtant, il est clair que plus la concurrence est serrée, plus le poste est prestigieux, plus le pourcentage de femmes est mince : en 1972 en mathématiques

et mécanique, c'est-à-dire pour les 17^e, 18^e, et 19^e sections du ccu, il y avait 19 femmes professeurs titulaires sur un total de 290, soit 7%. Depuis, ce nombre n'a pas augmenté. Alors, si l'on part du principe – que certains contesteront, mais alors il n'est pas nécessaire de pousser plus loin la discussion – qu'hommes et femmes ont des capacités intellectuelles équivalentes, il faut essayer de comprendre cet état de fait.

L'abord d'un tel métier n'est pas facile pour une femme. Il nous faut résister aux pressions exercées par la société, nos enseignants, nos parents, pour nous empêcher sinon d'entreprendre des études de mathématiques, du moins de choisir une carrière où la part de la recherche est importante il semble d'ailleurs que ce dernier obstacle soit particulièrement difficile à franchir, un questionnaire distribué il y a deux ans ayant fait apparaître que la plupart d'entre nous n'avaient pas trouvé de résistance dans leur propre famille. Il nous faut résister à l'attrait des autres modèles qu'on nous propose, dépasser l'idée qu'une femme ne peut pas vraiment être passionnée par son métier. Tout ceci est bien connu, peut-être trop, aussi avons-nous vu ces différentes idées se revêtir de formes plus subtiles, plus « new-look ». Si vraiment nous nous entêtons à vouloir trouver une part de notre épanouissement dans notre travail et les contacts qu'il implique, la société tentera de nous convaincre qu'il vaut beaucoup mieux choisir un de ces métiers riches de « contacts humains » comme par exemple, l'enseignement, du jardin d'enfants au lycée, ou une carrière dans le secteur médical, toutes activités plus conformes à notre « nature ». Si recherche il y a, on admettra mieux que nous travaillions en sciences humaines ou sociales, voire même en physique ou chimie, qui sont des matières réputées plus concrètes que

les mathématiques (ces incitations idéologiques ne concordant d'ailleurs pas nécessairement avec la réalité des débouchés). Il n'y a pas lieu ici de discuter des rapports entre les mathématiques et la connaissance du réel. Il semble néanmoins qu'il y ait encore de grandes résistances à vaincre pour que ne soit pas ressenti comme contradictoire le fait d'être une femme et d'exercer ce type d'activité intellectuelle au premier abord extrêmement abstraite. Le moins qu'on en puisse dire est que la conception des mathématiques comme jeu intellectuel gratuit, sans raison scientifique profonde, puis plus tard les campagnes de contestation de la science fondamentale, ne sont pas faites pour clarifier notre position de travailleur scientifique dans l'ensemble des activités de la société en pleine transformation où nous vivons, et par là même ne peut la valoriser à nos yeux. Le résultat est que nous décidons de faire de la recherche davantage sous la pression des événements (ce peut être la rencontre d'un ou d'une amie, d'un professeur qui nous y encourage) que spontanément, car nous avons bien intériorisé l'idée que c'est incompatible avec une vie de femme « normale » ; nous avons toutes conscience que nos chances de nous en sortir sont minimales et aléatoires et que déjà au niveau du recrutement, les filles arrivent avec un certain retard sur les garçons qui ont vécu différemment leurs années d'école ou de faculté. (Nous sommes bien conscientes que les garçons issus de familles ouvrières par exemple, ont eux à franchir d'autres barrières).

Une fois ce stade passé, l'exercice du métier n'est pas plus aisé ; contrairement à la physicienne, la mathématicienne n'est pas tenue par les horaires de son labo, elle est en apparence beaucoup plus disponible, pour quelle raison fait-elle garder ses enfants ? Même si l'on accepte son travail, c'est en général à elle qu'incombent les charges et les soucis domestiques. L'homme ne s'en rend vraiment compte que lorsqu'il est lui-même confronté à ce problème : tel jeune enseignant a considérablement réduit son activité professionnelle le jour où sa femme est partie un an pour entreprendre des études dans une autre ville en lui laissant un de leurs enfants. Quand on sait la concentration qu'exige la recherche mathématique, on comprend que le fait d'avoir d'autres préoccupations entraîne une perte de temps, ou du moins ce que l'on est forcé de considérer comme tel dans un contexte de course contre la montre où les années imparties aux jeunes chercheurs sont comptées. Nous sommes assises entre deux chaises, entre l'envie

bien légitime de nous occuper de nos propres enfants, si nous avons décidé d'en avoir, et la certitude que cela entraînera un retard qui nous sera nécessairement défavorable.



Certaines sont obligées de refuser des postes dans une université qui fixe une obligation de résidence, ou qui les éloignerait trop de leur domicile, lequel est encore en général fixé par le travail du mari. Madame A. raconte à ce sujet une anecdote significative : lorsqu'elle était candidate à l'université de B., tous ses futurs collègues lui ont posé la question suivante : « Et que fait Monsieur A., où travaille-t-il ? » Jamais un candidat masculin ne s'est entendu poser une question similaire à propos de sa femme...

Qu'on ne nous dise pas que ce sont des problèmes individuels, que chacune doit résoudre individuellement et qui ne concernent qu'elle ; quand un problème se pose en des termes analogues pour toutes, il y a de grandes chances pour qu'il dépasse le niveau de l'individu. Comme dans beaucoup d'autres professions, même si ses droits sont les mêmes, on recrute moins facilement une femme qu'un homme. Souvent le prétexte invoqué est celui des maternités. Il jouera de plus en plus si, comme il en est question, le Ministère décide de faire payer les congés de maternité et de maladie sur le contingent normal d'heures supplémentaires de chaque université. Souvent aussi ce prétexte sert de façade à une misogynie à peine voilée, qui s'exprime moins dans une période de relative abondance de postes, mais qui en période de pénurie conduit certains de nos collègues masculins à tenir des propos tels que celui-ci : « Ce n'est pas la peine d'envisager la candidature des femmes pour les postes de

Maître-Assistants quand il y a tant d'hommes qui attendent ». Il ne s'agit pas bien sûr de vouloir gérer la pénurie, il faut avant tout se battre pour obtenir plus de postes (et plus généralement se poser la question de savoir qui sont les véritables responsables de cette pénurie), mais une telle attitude est révélatrice d'un certain état d'esprit. Combien de fois aussi a-t-on entendu dans une quelconque commission chargée d'examiner des candidatures, lorsqu'il s'agit d'une femme : « Est-elle jolie ? », ou bien : « Je voudrais bien voir sa photo ». Que diriez-vous, Messieurs, si dans les mêmes circonstances, une femme s'écriait à propos d'un candidat : « J'espère qu'il est beau ! ». On se préoccupe beaucoup de la féminité des mathématiciennes ...

Encore une anecdote : Michèle Vergne raconte les propos qu'elle a entendus après avoir fait un exposé au Séminaire Bourbaki : « Quelle découverte qu'il y ait des mathématiciennes sexy » et : « Ah, c'était technique, on voyait bien que c'était une femme qui parlait, beaucoup de petits calculs précis, pas une seule grande idée ». De quoi la convaincre qu'elle n'était « rien d'autre qu'une femme ».

Plutôt que de proposer des solutions, ou d'exprimer des revendications, nous voudrions terminer en posant quelques questions : Est-il inscrit dans les statuts de Bourbaki qu'il faut appartenir au sexe masculin pour en être membre ? Est-il indispensable qu'on se pose d'interminables questions, avec toutes les plaisanteries paternalistes qu'elles

entraînent, pour savoir comment s'adresser à une femme présidente de la SMF, Directrice d'UER, Maître de Conférences, etc.

Comment se fait-il que certains gros départements n'aient aucune femme dans les postes de rang A ? (Nous ne nous faisons cependant aucune illusion sur le changement qu'entraîne la présence d'une ou deux femmes « alibi », pas plus qu'ailleurs, puisque c'est d'actualité, le fait que le Secrétaire d'État aux Universités soit une femme).

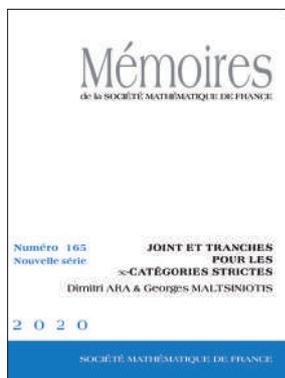
Ne pouvons-nous dire des bêtises sans que cela rejaillisse aussitôt sur toutes les mathématiciennes. « On voit bien que c'est une femme ! »

Faut-il avoir des postes réservés pour les femmes ?

Ou plutôt, le contexte social n'étant favorable ni à l'abord, ni à l'exercice de telles professions, ne faut-il pas envisager des critères tenant compte des différences de rythme et de maturation. Pourquoi pénaliser une femme qui a mis deux ans « de plus » pour faire sa thèse, mais a eu dans le même temps deux enfants. Ceci se pose avec une gravité toute particulière pour celles d'entre nous qui sont attachées de recherche au CNRS. Dans notre métier ou actuellement, les seuls critères de jugement existant, sont faussement neutres, contrairement à l'opinion répandue, ne serait-ce que parce qu'ils ont été émis par des hommes, est-il vraiment impossible de prendre en compte la diversité des situations ?

À vous de répondre ...

Mémoires - nouveauté



Vol. 165

Joint et tranches pour les ∞ -catégories strictes

D. ARA, G. MALTSINIOTIS

ISBN 978-2-85629-921-0

2020 - 213 pages - Softcover. 17 x 24

Public: 45 € - Members: 32 €

Numéro 165
Nouvelle série
JOINT ET TRANCHES
POUR LES
 ∞ -CATÉGORIES STRICTES
Dimitri ARA & Georges MALTSINIOTIS
2020
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Le but de cet ouvrage est de développer une théorie du joint et des tranches pour les ∞ -catégories strictes. À deux ∞ -catégories strictes, on en associe une troisième qu'on appelle leur joint. Cette opération est compatible au joint usuel des catégories à troncation près. On montre que le joint définit une structure de catégorie monoïdale sur la catégorie des ∞ -catégories strictes et qu'il commute aux limites inductives connexes en chaque variable. En particulier, on obtient l'existence de certains adjoints à droite ; ces adjoints définissent des tranches ∞ -catégoriques, en un sens généralisé. On énonce des conjectures de fonctorialité du joint et des tranches par rapport aux transformations lax et oplax supérieures et on démontre des premiers résultats dans ce sens. Ces résultats sont utilisés dans un autre travail pour établir un théorème A de Quillen ∞ -catégorique. Enfin, dans un appendice, on revisite le produit tensoriel de Gray ∞ -catégorique. Un des principaux outils utilisés dans ce travail est la théorie des complexes dirigés augmentés de Steiner.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

*frais de port non compris





... Monge-Ampère complexe

• E. DI NEZZA

L'équation de Monge-Ampère est une équation différentielle aux dérivées partielles non linéaire du second ordre. Elle doit son nom aux mathématiciens français Gaspard Monge et André-Marie Ampère, les premiers à l'avoir formulée, respectivement en 1784 et 1820 [1, 7]. L'équation de Monge-Ampère joue un rôle central dans plusieurs questions de géométrie riemannienne, conforme, complexe et CR. Par exemple, on la retrouve dans la construction de surfaces compactes strictement convexes à courbure gaussienne prescrite – le problème de Minkowski – et dans le problème de transport optimal de Monge-Kantorovitch. Dans ce texte nous allons nous intéresser à son application à un problème de géométrie kählérienne.

La *géométrie kählérienne* a été introduite dans les années 1930 par Kähler comme un moyen efficace pour rechercher des *métriques d'Einstein*, qui sont des solutions de la célèbre équation d'Einstein dans le vide en relativité générale. La question de base devient alors dans ce contexte kählérien la recherche des *métriques de Kähler-Einstein* sur une variété kählérienne compacte X (de dimension complexe n). Une variété kählérienne admet une *structure complexe* J (qui nous permet d'assurer l'existence de coordonnées holomorphes z_1, \dots, z_n) et une structure supplémentaire donnée par ω , qui est une 2-forme réelle définie positive (non dégénérée) et fermée (i.e. $d\omega = 0$). Les deux structures sont compatibles : on a que $\omega(\cdot, J\cdot) = -\omega(J\cdot, \cdot)$. De plus, $\omega(JY, Y) > 0$, pour tout champ vecteur Y dans l'espace tangent (réel) à X . On dit que ω est une *forme ou métrique kählérienne*. La donnée d'une structure kählérienne ω est équivalente à celle d'une métrique hermitienne h telle que $\omega = -\text{Im } h$ et où $g = \text{Re } h$ est une métrique riemannienne sur X pensée comme variété différentielle de dimension réelle $2n$. De plus, des calculs standards nous donnent que $\text{vol}_g = \frac{\omega^n}{n!}$. Dans la dernière formule vol_g désigne le volume par rapport à la métrique

g et ω^n est la n -ième puissance extérieure de ω . On note que la n -ième puissance extérieure de la 2-forme ω est une $2n$ -forme, qui est bien une forme volume.

Les premiers exemples de variétés kählériennes sont les surfaces de Riemann (de dimension complexe $n = 1$, et donc de dimension réelle 2) : en effet, une 2-forme sur une surface est toujours d -fermée pour des raisons de degré (il n'existe pas de forme de degré supérieur à la dimension de la variété !). De plus, le théorème d'uniformisation nous dit que, à bi-holomorphisme près, il n'y a que trois courbes complexes compactes : la sphère $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C}P^1$, les tores \mathbb{C}/Λ (où Λ est un réseau) et les surfaces hyperboliques (e.g. $S = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 : P(z_0, z_1, z_2) = 0\}$, où P est un polynôme homogène de degré $d \geq 4$). Pour compléter le cadre il faut mentionner que si P a un degré $d = 1, 2$, alors S est (biholomorphe à) la sphère et si $d = 3$ elle est le tore. Le théorème d'uniformisation nous dit aussi que chaque surface hyperbolique S est biholomorphe à \mathbb{H}/Γ , pour un sous-groupe $\Gamma \subset PSL(2, \mathbb{R})$ agissant librement. Ici \mathbb{H} désigne le demi-plan de Poincaré, c'est-à-dire l'ensemble de tout nombre complexe ayant partie réelle positive. De façon équivalente le théorème d'uniformisation affirme que toute surface de Riemann a comme revêtement universel $\mathbb{C}P^1 (= \mathbb{S}^2)$, \mathbb{C} ou le disque unité ouvert \mathbb{D} (qui est biholomorphe à \mathbb{H} !).

En dimension supérieure $n > 1$, on trouve, entre autres, $\mathbb{C}P^n$, \mathbb{C}^n/Λ (qui est un tore de dimension complexe n) et

$$V = \{[z_0 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^{n+1} : P(z_0, \dots, z_{n+1}) = 0\}$$

où P est un polynôme homogène de degré d . Les exemples ci-dessus sont tous des variétés *projectives* (c'est-à-dire des sous-variétés lisses d'un espace projectif $\mathbb{C}P^N$, avec N suffisamment grand). En revanche, il existe aussi beaucoup de variétés kählériennes compactes qui ne sont pas projectives, comme par exemple les (très étudiées) surfaces K3.

Les exemples que j'ai donnés sont très particuliers pour une autre raison : ces variétés admettent toutes une métrique *spéciale*. En dimension complexe 1, le mot « spéciale » signifie que la métrique g est de courbure de Gauss K_g constante : sur \mathbb{S}^2 , la métrique de *Fubini-Study* g_{FS} (qui, en coordonnée $z = x + iy$, s'écrit sous la forme $g_{FS} = \frac{dx^2 + dy^2}{(1 + |z|^2)^2}$) est de courbure constante $K_{g_{FS}} \equiv 1$; sur \mathbb{C}/Λ , la métrique plate $g_0 = dx^2 + dy^2$ est de courbure constante $K_{g_0} \equiv 0$; enfin sur \mathbb{H}/Γ , la métrique hyperbolique $g_{hyp} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ est de courbure constante $K_{g_{hyp}} \equiv -1$.

En dimension plus grande $n > 1$, le fait d'être à courbure de Gauss constante est remplacé par la notion de métrique de Kähler-Einstein. En effet, comme pour les surfaces de Riemann, l'existence de ces métriques nous donne un résultat d'uniformisation : si X est une variété kählérienne compacte qui admet une métrique de Kähler-Einstein ω , alors son revêtement universel est $\mathbb{C}P^n$, \mathbb{C}^n ou la boule unité B^n si et seulement si une condition topologique est satisfaite, plus précisément

$$\left(\frac{2(n+1)}{n} c_2(X) - c_1(X)^2 \right) \cdot \{\omega\}^{n-2} = 0,$$

où $c_i(X)$ est une classe de cohomologie et un invariant topologique de X , appelée i -ième *classe de Chern* et $\{\omega\}$ est la classe de cohomologie de ω .

On dit qu'une forme ω est Kähler-Einstein (KE) si elle est kählérienne et qu'elle vérifie l'équation d'Einstein, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{Ric}(\omega) = \lambda \omega. \tag{KE}$$

Le membre de gauche de l'équation (KE), appelé la *forme de courbure de Ricci* de ω , est une 2-forme différentielle. La courbure de Ricci d'une métrique g est une quantité bien définie pour toute variété riemannienne et de façon très informelle (et pour donner une idée) on peut dire qu'elle mesure l'écart entre le volume des boules par rapport à la métrique g et la métrique plate. Comme le lecteur l'aura compris, dans le cas des surfaces de Riemann la courbure de Ricci n'est rien d'autre que la courbure de Gauss fois la forme volume.

De plus, si la variété a aussi une structure de variété kählérienne, la forme de courbure de Ricci a une expression très explicite et facile : localement elle s'écrit comme

$$\begin{aligned} \text{Ric}(\omega) &= -\frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial} \ln \omega^n \\ &= -\frac{i}{\pi} \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta} \ln \det(h_{p,q}) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta. \end{aligned} \tag{1}$$

Observons que le terme ω^n correspond au déterminant de la matrice hermitienne complexe $(h_{p,q})_{p,q}$ associée à h . (On rappelle que « $h = g + i\omega$ »). Dans (1) on voit les deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ intervenir. En coordonnées holomorphes z_1, \dots, z_n , ces opérateurs associent à une fonction à variables complexes f une 1-forme holomorphe et antiholomorphe respectivement qui s'écrivent sous la forme $\partial f = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} dz_\alpha$, $\bar{\partial} f = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_\beta} d\bar{z}_\beta$.

On peut vérifier « à la main » que $\mathbb{C}P^n$ et les tores \mathbb{C}^n/Λ admettent une métrique KE, avec $\lambda > 0$ et $\lambda = 0$ respectivement.

Revenant sur l'équation (KE), on se pose alors la question de l'existence des solutions : étant donnée une variété kählérienne quelconque, peut-on toujours trouver une métrique KE ? Il existe de nombreuses obstructions, tout d'abord topologiques. L'équation (KE) implique en effet que la première classe de Chern $c_1(X)$ a un signe défini, qui correspond au signe de λ . Cela veut dire qu'il existe une forme différentielle dans la classe de cohomologie $c_1(X)$ qui est strictement positive, nulle ou strictement négative. On a alors trois cas : $c_1 > 0$ (dans ce cas, $\lambda > 0$ et la variété est dite de *Fano*), $c_1 = 0$ (dans ce cas, $\lambda = 0$ et la variété est dite de *Calabi-Yau*), $c_1 < 0$ (dans ce cas, $\lambda < 0$ et la variété est dite de *type général*). Les exemples ci-dessus vérifient une de ces trois conditions : on a $c_1(\mathbb{C}P^n) > 0$, $c_1(\mathbb{C}^n/\Lambda) = 0$, $c_1(V) > 0$ si $d < n + 2$, $c_1(V) = 0$ si $d = n + 2$ et $c_1(V) < 0$ si $d \geq n + 3$.

Cependant, demander à la première classe de Chern d'avoir un signe défini est une obstruction forte à l'existence des métriques KE : il n'est pas toujours vrai qu'une classe de cohomologie admette (un représentant avec) un signe défini. Par exemple, si $X = S_1 \times S_2$ est le produit de deux surfaces de Riemann, alors c_1 a un signe défini si et seulement si S_1 et S_2 sont du même type (deux sphères, deux tores ou deux surfaces hyperboliques).

Ceci dit, même si l'on se restreint à l'un des trois cas, comment attaquer concrètement le problème ? Étant donnée une variété kählérienne compacte (X, ω) avec $c_1 > 0, < 0$ ou nulle, il est très peu probable que ω satisfasse à l'équation (KE). Il faut alors « ajuster » la métrique dans l'espoir qu'elle devienne

KE. On cherche alors une fonction $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ telle que $\omega_\varphi = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ est KE. Observons que, grâce à un résultat classique appelé $\partial\bar{\partial}$ -lemma, toute métrique de Kähler dans la classe de cohomologie $\{\omega\}$ s'écrit de la forme $\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ où $\varphi \in C^\infty(X, \mathbb{R})$ est strictement ω -pluri-sous-harmonique. Cela correspond à demander que dans chaque système local de coordonnées $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}^n$, si on écrit $\omega = i\partial\bar{\partial}\rho$ dans \mathbb{B} , la matrice hessienne complexe $\left(\frac{\partial^2(\rho+\varphi)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right)_{\alpha,\beta}$ est définie positive. De façon équivalente on demande que toutes les valeurs propres de la matrice soient strictement positives.

Il s'avère que ω_φ est KE si et seulement si φ satisfait à une équation *scalaire* aux dérivées partielles non linéaire, l'équation de *Monge-Ampère complexe* :

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{-\lambda\varphi} f \omega^n \quad (\text{MA}_\lambda)$$

où f est une fonction strictement positive lisse donnée qui vérifie une condition de normalisation, i.e. $\int_X e^{-\lambda\varphi} f \omega^n = \int_X \omega^n$. Cette dernière est nécessaire : en effet, si on l'intègre, on trouve que

$$\int_X e^{-\lambda\varphi} f \omega^n = \int_X (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = \int_X \omega^n,$$

où la dernière identité est une conséquence du théorème de Stokes (car X est compacte sans bord). En coordonnées, on peut relire l'équation (MA_λ) comme

$$\det\left(\frac{\partial^2(\rho+\varphi)}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right) = e^{-\lambda\varphi} f \det\left(\frac{\partial^2\rho}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}\right).$$

Pour fixer les idées observons qu'en dimension $n = 1$, l'opérateur de Monge-Ampère n'est rien d'autre que l'opérateur laplacien et que l'équation (MA_λ) a une forme très simple et très classique :

$$\Delta_\omega \varphi = e^{-\lambda\varphi} f. \quad (2)$$

La résolution de l'équation (2) est le point clé de l'une des possibles preuves du *théorème d'uniformisation*. Ceci est largement traité de façon très détaillée et passionnante dans [8].

L'existence d'une solution lisse de (MA_λ) a été prouvée par Aubin [2] et Yau [9] dans le cas $\lambda < 0$ et par Yau [9] dans le cas $\lambda = 0$; plus précisément, le théorème de Yau (qui lui a valu la médaille Fields en 1982) garantit (entre autres) que, étant données une variété kählérienne X avec $c_1(X) = 0$ et une classe de cohomologie $\{\omega\}$ sur X , il existe toujours une métrique $\omega_{KE} \in \{\omega\}$ telle que $\text{Ric}(\omega_{KE}) = 0$.

Notons que le résultat de Yau a changé le paysage : avant sa preuve de (ce qui était connu comme) la *conjecture de Calabi* on ne connaissait pas d'exemples non triviaux d'espaces Ricci-plats.

Dans le cas de courbure positive ($\lambda > 0$), c'est-à-dire quand X est une variété de Fano, la situation est beaucoup plus compliquée : l'existence des métriques Kähler-Einstein n'est pas garantie en général. Ce problème est aujourd'hui un domaine de recherche très actif et productif. Récemment, Chen, Donaldson et Sun, et Tian [4], ont indépendamment prouvé ce qu'on appelle la *conjecture de Yau-Tian-Donaldson* pour les métriques Kähler-Einstein : une variété de Fano X admet une métrique Kähler-Einstein si et seulement si elle est K -stable (une condition de nature algébrique).

La preuve de Yau de la conjecture de Calabi s'appuie sur la *méthode de continuité*, un outil classique pour résoudre des EDP non linéaires (élaboré parallèlement par Klein et Poincaré!) : il consiste à déformer l'équation considérée en une version plus simple pour laquelle nous savons qu'il existe une solution. Par exemple, dans le cas $\lambda = 0$, la famille d'équations de Monge-Ampère

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = e^{t \ln f} \omega^n \quad (\text{MA}_t)$$

est une déformation de l'équation $(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = f \omega^n$, correspondant à $\text{MA}_{t=1}$. On observe que $\varphi_0 \equiv 0$ est une solution de $\text{MA}_{t=0}$. On définit alors

$$E := \{t \in [0, 1] : \exists \varphi_t \in C^\infty \text{ solution de } \text{MA}_t\},$$

l'objectif étant de démontrer que E est à la fois ouvert et fermé dans $[0, 1]$. Comme E n'est pas l'ensemble vide puisque $0 \in E$, on en déduit que $E = [0, 1]$. En particulier on déduit l'existence d'une solution lisse de $\text{MA}_{t=1}$. L'ouverture est une conséquence (plus ou moins immédiate) du théorème des fonctions implicites. D'autre part, la fermeture dépend de différentes estimées *a priori* pour une suite φ_{t_i} où $t_i \in E$. Le principe est le suivant : on commence par montrer des estimées C^0 et C^2 qui, grâce à la théorie d'Evans-Krylov, nous donnent une estimation de type $C^{2,\alpha}$. Cela est le point de départ d'un argument d'amorçage reposant sur le théorème de Schauder garantissant la convergence d'une suite φ_{t_i} vers une fonction lisse φ_{t_∞} qui résout MA_{t_∞} .

Comme souvent, l'étape la plus difficile est l'estimée C^0 , établie par Yau en utilisant un processus itératif à la Moser. Après le célèbre papier de Yau, Kołodziej [6] a généralisé l'estimée C^0 en utilisant des outils de la *théorie du pluripotential*. Son estimation uniforme peut effectivement être appliquée

à des équations complexes de Monge-Ampère de la forme

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = f dV$$

où f n'est pas supposée être lisse mais $f \in L^p(dV)$ pour un $p > 1$ et positive. L'idée de Kołodziej's est de montrer que la *capacité de Monge-Ampère* des ensembles de sous-niveaux $\{\varphi < -\tau\}$, $\tau \in \mathbb{R}^+$, s'annule pour $\tau > \tau_\infty$ pour un $\tau_\infty > 0$ suffisamment grand. Cela nous dit « presque » que l'ensemble $\{\varphi < -\tau_\infty\}$ est de mesure nulle. Il démontre alors qu'en fait, φ est minorée. Cela nous donne l'estimée C^0 car toute fonction ω -pluri-sous-harmonique sur une variété compacte est majorée (c'est le principe du maximum !). Il est important de souligner que dans ce cas, la mesure de Monge-Ampère $(\omega + dd^c\varphi)^n$ est bien définie grâce à la théorie de Bedford and Taylor [3] qui garantit que l'opérateur de Monge-Ampère est bien défini pour toute fonction ω -pluri-sous-harmonique bornée.

La théorie du pluri-potential, qui utilise les tech-

niques d'analyse complexe de plusieurs variables, est alors devenue très utile pour résoudre des problèmes géométriques. À partir de là, les propriétés de régularité des solutions des équations de Monge-Ampère complexes sont devenues d'une importance cruciale et de nombreux travaux se sont portés sur ces questions. Dans une série de papiers, Berman, Boucksom, Eyssidieux, Guedj et Zeriahi ont développé des nouveaux outils permettant d'étudier ces problèmes lorsque les équations correspondantes deviennent dégénérées en présence de singularités [5], où le mot *dégénéré* signifie que la forme de référence n'est plus Kähler (plus précisément, la forme a le droit de s'annuler quelque part), et/ou les densités ont des singularités. En particulier, ils démontrent l'existence des métriques de Kähler-Einstein singulières sur des variétés Calabi-Yau singulières. Néanmoins, le comportement asymptotique d'une telle métrique au voisinage des points singuliers n'a pas été entièrement compris...

Références

- [1] A. M. AMPÈRE. « Mémoire contenant l'application de la théorie ». *Journal de l'École polytechnique* (1820).
- [2] T. AUBIN. « Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes ». *Bull. Sci. Math. (2)* **102**, n° 1 (1978), p. 63-95. ISSN : 0007-4497.
- [3] E. BEDFORD et B. A. TAYLOR. « A new capacity for plurisubharmonic functions ». *Acta Math.* **149**, n° 1-2 (1982), p. 1-40. ISSN : 0001-5962. DOI : 10.1007/BF02392348. URL : <https://doi-org.accesdistant.sorbonne-universite.fr/10.1007/BF02392348>.
- [4] J. FINE. « Canonical metrics in Kähler geometry—a biased overview ». *Gaz. Math.*, n° 155 (2018), p. 38-51. ISSN : 0224-8999.
- [5] V. GUEDJ et A. ZERIAHI. *Degenerate complex Monge-Ampère equations*. **26**. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2017, p. xxiv+472. ISBN : 978-3-03719-167-5. DOI : 10.4171/167. URL : <https://doi-org.accesdistant.sorbonne-universite.fr/10.4171/167>.
- [6] S. KOŁODZIEJ. « The complex Monge-Ampère equation ». *Acta Math.* **180**, n° 1 (1998), p. 69-117. ISSN : 0001-5962. DOI : 10.1007/BF02392879. URL : <https://doi-org.accesdistant.sorbonne-universite.fr/10.1007/BF02392879>.
- [7] G. MONGE. « Sur le calcul intégral des équations aux différences partielles ». *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1784).
- [8] H. P. de SAINT-GERVAIS. *Uniformisation des surfaces de Riemann*. Ens Édition, (2010).
- [9] S. T. YAU. « On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I ». *Comm. Pure Appl. Math.* **31**, n° 3 (1978), p. 339-411. ISSN : 0010-3640. DOI : 10.1002/cpa.3160310304. URL : <https://doi-org.accesdistant.sorbonne-universite.fr/10.1002/cpa.3160310304>.



Eleonora Di Nezza

École polytechnique

Eleonora Di Nezza est Professeur Monge à l'École polytechnique au Centre de mathématiques Laurent Schwartz. Elle travaille en géométrie Kählerienne et elle est une spécialiste de la théorie du pluri-potential.

Je tiens à remercier Gilles Courtois, Damien Gayet et Fanny Kassel pour tous les conseils sur une version préliminaire de cette note.



Le réseau R2M

- C. LECOUCVEY
- M. PEIGNÉ

Encouragés par les pouvoirs publics et le monde industriel, les établissements d'enseignement supérieur et de recherche mènent depuis plusieurs décennies une politique dynamique pour développer la formation à la recherche et favoriser l'insertion professionnelle des jeunes doctorantes et doctorants. La communauté mathématique, très structurée au niveau national et forte de riches interactions internationales, joue un rôle essentiel pour ces jeunes. Elle leur fait découvrir très tôt les différentes facettes du métier en les encourageant à nouer des contacts bien au-delà de nos frontières tout en participant activement à la recherche et l'enseignement dans nos universités. C'est ainsi que chaque année, plus de 400 nouveaux docteurs en mathématiques sont formés dans des thématiques très variées, couvrant l'ensemble des champs mathématiques et de leurs applications. En cette période de forte tension sur les postes, seule une minorité de ces jeunes obtient un poste académique en France ou à l'étranger. Même si les débouchés du doctorat concernent largement le secteur privé ou les métiers de l'enseignement, on peut regretter que pour la plus grande partie de ces jeunes scientifiques, les années de doctorat et de post-doctorat ne débouchent pas sur des métiers de la recherche et soient suivies d'une reconversion, parfois douloureuse. Dans un grand nombre de cas, les contacts scientifiques noués au cours de ces années cessent brutalement et c'est la communauté toute entière qui en pâtit ; le dynamisme d'un grand nombre de ces jeunes, leur intégration dans le monde contemporain et leur capacité à assimiler les nouveaux concepts et outils ne pourraient qu'être bénéfiques au monde de la recherche académique. D'un autre côté, ces jeunes nouent souvent de nouvelles relations avec le monde de l'entreprise qui seraient précieuses pour la communauté mathématique dans son ensemble si elles étaient plus systématiquement connues et répertoriées.

C'est fort de ce constat et suite à de nombreux échanges avec des jeunes diplômés que le « Réseau de Recherche en Mathématiques » (R2M) a vu le jour à la fin de l'année 2019. Initiative de la SMF en partenariat avec l'INSMI, il a un double objectif. En priorité, il veut accueillir les titulaires d'un doctorat de mathématiques qui, tout en travaillant hors du milieu de la recherche académique, sont désireux de maintenir une activité de recherche en lien avec un laboratoire. Nombre de ces jeunes docteurs ont vécu leurs années de doctorat et de post-doctorat avec passion et sont motivés pour prolonger cette activité, si nos laboratoires leur en donnent les moyens et la reconnaissance. Il ambitionne également d'être à terme un lieu de partage d'expériences et de parcours professionnels. L'Agence pour les Mathématiques en Interaction avec l'Entreprise et la Société (AMIES) joue un rôle très important dans la politique d'ouverture des mathématiques aux entreprises en les encourageant à s'appuyer sur les formations doctorales et en conseillant aux jeunes de diversifier leurs objectifs professionnels. Son action s'inscrit dans un partenariat avec les entreprises où, notamment, des cadres légaux sont à respecter : règles de confidentialité, de propriété intellectuelle, partenariat public-privé, dépôt de brevets... L'AMIES ne peut donc couvrir tous les champs mathématiques et leurs applications. Notamment, elle ne s'adresse que très peu aux jeunes qui poursuivent vers les métiers de l'enseignement ainsi qu'aux titulaires d'un doctorat exerçant en entreprise un métier qui n'est pas en relation directe avec leur spécialité mathématique.

Concrètement, le réseau R2M se veut un maillage du territoire avec un correspondant dans les laboratoires qui le souhaitent. L'inscription s'effectue directement en ligne sur le site dédié à l'opération : <https://smf.emath.fr/sommaire/r2m-reseau-de-recherche-en-mathematiques>.

Le réseau R2M fonctionne sur le bénévolat : les docteurs intéressés sont invités à contacter le correspondant qui leur paraît le plus proche thématiquement et/ou géographiquement afin de discuter des modalités qui peuvent être mises en place localement pour les aider à maintenir une activité de recherche ambitieuse ou un contact plus ponctuel. Le rôle du correspondant local est, avec l'accord du conseil de son laboratoire, de servir d'interlocuteur entre les docteurs, les responsables du réseau et le laboratoire. L'invitation à participer au séminaire du laboratoire, l'accès à la recherche documentaire, la mise en contact avec des chercheuses et chercheurs travaillant dans leur thématique, l'organisation de journées de recherche à leur destination etc. sont parmi les premières pistes à explorer et développer. Aucun cadre a priori n'est imposé concernant une telle collaboration. Celle-ci se discute au cas par cas entre les docteurs souhaitant s'impliquer et les laboratoires susceptibles de les accueillir, suivant les besoins et les possibilités de chacun. En particulier, comme cela a été dit plus haut, pour les docteurs travaillant en entreprise et dont la thématique de recherche est liée à l'activité professionnelle, ce dispositif bénévole n'a pas vocation à se substituer à un partenariat laboratoire-entreprise pour lequel il existe déjà d'autres cadres légaux.

L'INSMI et la SMF ont soutenu le réseau R2M dès sa création : soutien institutionnel, messages vers les laboratoires, mise à disposition d'un site internet etc. La plupart des laboratoires en France ont aujourd'hui un correspondant R2M, le réseau est aujourd'hui riche d'environ 70 jeunes docteurs. C'est

beaucoup et c'est peu à la fois, lorsque l'on connaît le dynamisme de la formation doctorale française en mathématiques. Il est important dans un premier temps d'intégrer au mieux ces premiers inscrits et de les épauler dans leurs démarches éventuelles pour poursuivre leur activité de recherche; les correspondants locaux sont ici en première ligne pour relever ce défi. Des actions à leur destination peuvent être mises en place, notamment à travers l'association à un laboratoire (avec une adresse de courriel), un soutien financier pour des voyages et invitations ou des rencontres au CIRM.

Il est aussi crucial d'assurer la plus grande publicité possible à ce réseau; les doctorantes et doctorants doivent donc être informés de son existence et de la possibilité qui leur est offerte de poursuivre, à moyen ou long terme, leur activité de recherche dans des conditions valorisantes. Encourager les docteurs et docteurs actuellement en reconversion professionnelle vers les métiers du privé à garder le contact avec la communauté mathématique est également très important. Existente aussi de nombreux jeunes qui ont quitté le monde universitaire ces dernières années. À nous tous de les contacter pour leur proposer de rejoindre ce réseau; il n'est pas rare de rencontrer des étudiantes et étudiants d'hier, riches de leur expérience professionnelle présente ou « en manque » de la discipline, désireux de « se remettre » aux mathématiques.

Toute suggestion favorisant l'intégration de ces jeunes chercheuses et chercheurs est la bienvenue via l'adresse de contact r2m@smf.emath.fr.

« Les Maths où on ne les attend pas! » - Association Les Maths En Scène

Le Prix D'Alembert récompensant une action destinée à mieux faire connaître et comprendre les mathématiques et leurs développements récents a été attribué en juin 2020 au festival « Les maths dans tous leurs états » porté par l'association *Les Maths En Scène*.

• H. LAFRANCE

1. L'association Les Maths En Scène

L'association *Les Maths en Scène* a été créée en octobre 2016, en partant du constat que j'avais fait, en tant qu'enseignante dans la région Occitanie, qu'il y avait peu de dispositifs ou d'événements pour la promotion des mathématiques où les participants sont acteurs. Son objectif est d'œuvrer pour la vulgarisation et la diffusion de la culture mathématique et des sciences de l'informatique par des actions impliquant le grand public et les scolaires.

Les lecteurs de la *Gazette* savent que les mathématiques ne sont pas austères bien que souvent perçues ainsi dans notre société. Nous le montrons régulièrement à notre public cible. Quel plaisir de découvrir comment Mathématiques et Littérature peuvent se croiser! Quelle surprise de voir les mathématiques associées aux spectacles vivants et à la création artistique! Quel émerveillement de s'approprier les mathématiques par l'imaginaire et le ludique! On peut aussi aimer découvrir comment elles s'inscrivent dans l'histoire des Sciences ou leur rôle dans la compréhension du monde, dans la vie quotidienne, dans bon nombre de métiers scientifiques ou non, comme dans l'évolution d'autres disciplines. Ainsi sont les objectifs des actions de l'association qui permettent de toucher le grand public comme les acteurs du monde de l'éducation.

La concrétisation de ces objectifs s'est faite dès mars 2017 avec la première édition du festival « *les maths dans tous leurs états* ». Cela a été possible grâce aux rencontres que j'ai faites de chercheurs, enseignants, étudiants, ingénieurs et médiateurs, aujourd'hui membres de l'association. Ils se sont

inscrits dans une démarche de vulgarisation et de prise en main des concepts mathématiques par la manipulation, le questionnement, le plaisir. Une originalité de l'association est de proposer un large panel de pôles d'activités. Notre slogan, « *les Mathématiques où on ne les attend pas* », traduit notre démarche : un slogan qui correspond à l'expérience de chaque personne qui s'approprie une connaissance nouvelle, qui trouve une clarté, qui s'émerveille devant les Mathématiques.

Cette démarche originale et attractive a permis de fédérer des mondes divers, de la Recherche à l'Entreprise en passant par l'Enseignement. Les membres de l'association incluent un nombre croissant d'hommes et femmes passionnés. Ils peuvent trouver un cadre d'expression, de création et de partage.

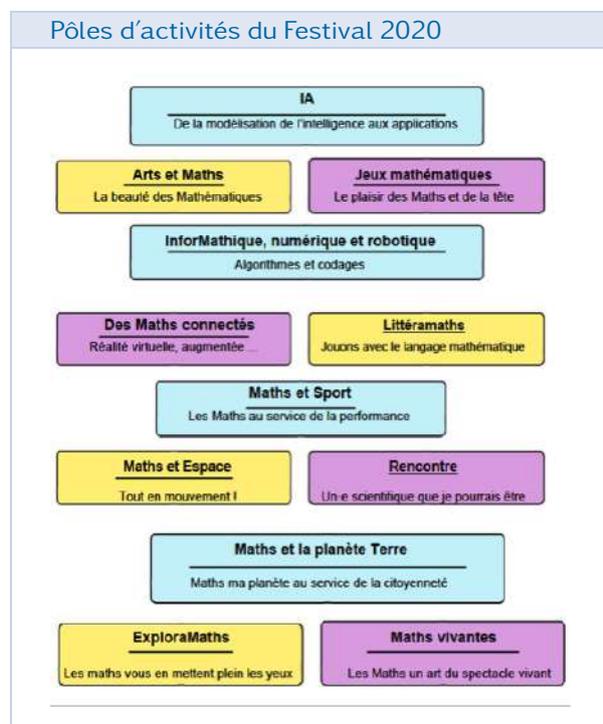
2. Le festival « Les Maths dans tous leurs états »

Comme je l'ai dit, un moment fort de l'action de l'association est l'organisation de son festival « *les maths dans tous leurs états* ». Il a lieu tous les ans en mars depuis 2017, en lien avec la thématique de la *Semaine des Mathématiques*¹ : *Maths et langage* (2017), *Maths et mouvement* (2018), *Jouons ensemble aux mathématiques* (2019), *Mettons en scène les mathématiques* (2020).

L'association *Les Maths En Scène* a été honorée d'une reconnaissance toute particulière apportée cette année au festival par l'obtention du prestigieux prix d'Alembert 2020.

1. La semaine des Mathématiques a été instaurée par le Ministère de l'Éducation nationale, qui propose d'organiser des événements dans toute la France pour renforcer l'attractivité de la discipline.

Dès sa première édition, le festival a été ponctué d'événements illustrant les liens forts entre les mathématiques, les arts et la culture ainsi que ceux entre mathématiques, informatique et sciences du numérique qui ont aujourd'hui envahi nos vies professionnelles et personnelles. Alors que la première édition s'organisait en 7 pôles d'activités, c'est aujourd'hui 12 pôles qui sont proposés, s'articulant autour des arts, des jeux mathématiques, du spatial, des sciences de l'informatique et de rencontres avec le monde de la recherche et de l'ingénierie.



La préparation du festival est un espace de création pour les membres de l'association et les nombreux animateurs qui y participent. Par exemple, Arnaud Chéritat, Directeur de recherche au CNRS et vice-président de l'association, s'exprime sur l'atelier La prison qu'il a créé et animé.

Le but est de nouer une chaîne autour de quatre barreaux escamotables, montés sur un cadre, de sorte qu'on puisse la libérer quel que soit le barreau que l'on retire. Je présente le défi sous forme d'une petite histoire avec un roi joueur. Ce qui est bien, c'est que le jeu est progressif. On peut procéder à tâtons, on peut jouer avec plus ou moins de barreaux, introduire la traduction en termes de lettres... et pas besoin de révéler que ce sont des mots sur le groupe

libre à n générateurs! Je suis toujours surpris de voir à quel point le jeu de simplification des lettres est rapidement compris, même par des élèves de 4^e. Les joueurs repartent en voyant comment un jeu d'algèbre permet de résoudre concrètement un problème de théorie des nœuds.

La mise en scène, favorisant l'apprentissage des concepts mathématiques, peut s'illustrer aussi au travers de l'atelier « *Enquête sur les graphes* » proposé par Damien Bouloc, professeur de Mathématiques, Sciences numériques et Programmation.

Tout part d'une nouvelle policière du mathématicien Claude Berge que j'ai adaptée en un jeu d'enquête. Les participants ont un dossier contenant un rapport des faits, des témoignages et quelques pièces à conviction. L'aspect « escape game » fait le reste : sous la pression du chronomètre, ils ont très vite fait de se plonger dans l'histoire, se répartir les documents, échanger leurs premières hypothèses... Ce qui est amusant c'est qu'ils n'ont parfois même pas l'impression de faire des mathématiques. Pour schématiser la situation, certains dessinent spontanément un graphe, et le raisonnement qui les conduit à trouver le coupable n'est rien d'autre qu'un véritable théorème mathématique qu'ils ont démontré sans s'en rendre compte. Finalement, je ne suis là que pour donner quelques indices et surveiller qu'ils ne s'attardent pas sur de fausses pistes.

Questionner, intriguer, challenger, contribuent à devenir acteur de sa découverte des mathématiques, comme le montre également le jeu « *les menteurs* » proposé par Jade Nardi, post-doctorante en mathématiques.

Dans ce jeu à deux, le premier joueur choisit une carte parmi 4 que le second doit deviner en posant des questions fermées. Mais le premier joueur a le droit de mentir une fois. Souvent les enfants, même très jeunes, parviennent à établir une série minimale de questions qui garantit de déterminer la carte choisie, malgré un potentiel mensonge. Ceci répond à une problématique en théorie des codes correcteurs : si je veux communiquer 2 bits d'information avec po-

tentiellement une erreur lors de la transmission, combien dois-je effectivement envoyer de bits ?

La surprise est au rendez-vous au gré des ateliers et des spectacles, comme le défilé de mode de la première création de Sonia Mahmoudi, doctorante en mathématiques, qui matérialise l'esthétique des Mathématiques.

Fort de l'intérêt qu'il a su susciter, le festival a vu sa portée s'élargir très vite en recevant dès sa troisième édition non seulement des élèves de l'académie de Toulouse mais aussi de celles de Montpellier et d'Orléans-Tours, du cycle 1 au lycée. Nous avons ainsi accueilli environ 800 élèves lors de sa première et près du double pour son édition de 2020, ceci malgré l'annulation d'une journée pour les scolaires et de deux soirées du fait du début de la crise sanitaire. Le festival s'ouvre aussi depuis la 2ème édition à l'international en proposant à des chercheurs, enseignants ou associations de l'étranger d'animer des ateliers et des conférences.

En plus des scolaires, tous les publics sont visés. Chacun y trouve ce qui lui correspond, l'intrigue, le fascine, l'apaise par rapport à une appréhension collective, ou tout simplement l'amuse dans son expérimentation nouvelle des mathématiques. Nous cherchons également à favoriser l'inclusion des élèves en difficulté ainsi que des élèves porteurs de handicap.

Les témoignages enjoués des participants motivent l'équipe à poursuivre ses actions et à atteindre davantage de personnes. Par exemple, une enseignante ayant découvert le festival lors d'une journée ouverte au grand public, nous a écrit pour solliciter une inscription pour sa classe.

J'ai vite été happée par les nombreuses activités et par l'enthousiasme général. Tous les âges s'y côtoyaient, et cela souriait et riait. Il faut admettre que je m'y suis amusée aussi. Je suis ressortie tard de ce festival, revigorée de ces échanges humains et avec une vision plus amusante des mathématiques et de leurs applications surprenantes.

Une autre encore précise : « un petit de ma classe habituellement en échec s'est révélé champion de la programmation de robots, c'était super pour lui. ». Ceci répond à l'objectif du festival d'accrocher les élèves en difficulté pour qu'ils révèlent un potentiel à eux-mêmes et à leurs enseignants. Ils pourront alors s'appuyer sur cette découverte pour favoriser

un nouvel épanouissement, bénéfique aux apprentissages en classe.

Des interventions de femmes scientifiques dans le cadre du pôle « Rencontre » permettent de montrer la présence concrète des femmes dans le monde des sciences et de l'ingénierie. L'action vise aussi à susciter la vocation de tous les jeunes vers les métiers de l'informatique et des mathématiques qu'ils méconnaissent souvent, sans exclure les filles, en brisant les stéréotypes. Suite aux nombreuses demandes des enseignants pour que leurs élèves puissent participer au pôle « Rencontre », l'association a mis en place le dispositif « Inspir'Sciences » qui sera proposé toute l'année aux scolaires comme aux structures culturelles pour le grand public. Via ce dispositif, des professionnel(le)s accessibles et proches des jeunes font découvrir leurs propres parcours ou celui de collaboratrices impliquées et passionnées. Cette démarche vise à faire connaître des métiers méconnus et innovants, ainsi qu'à inspirer des carrières.





3. Le concours « EloquenSciences » de l'association *Les Maths En Scène*



Notre concours d'éloquence scientifique est proposé depuis 2018 aux élèves de collège, de lycée et d'enseignement supérieur. Il est parrainé par la mathématicienne Jasmin Raissy, Maître de conférences, et par le mathématicien Étienne Ghys, Directeur de recherche CNRS, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences.

Notre concours allie art de la parole et recherche scientifique à travers un travail de réflexion sur des questions scientifiques auxquelles il faut répondre. Par exemple, « le hasard existe-t-il ? » ou « l'ordinateur est-il plus efficace que l'humain ? ». Le candidat choisit sa question. Chaque candidat est suivi par une marraine ou un parrain scientifique qui l'aide à construire son raisonnement et son discours. Il va réfléchir à la question et aux réponses à y apporter en consultant régulièrement son référent scientifique, pour confronter ses réflexions à des arguments scientifiques et sociétaux, et pour exposer ses doutes. Il élabore son argumentation avec son référent et éventuellement son enseignant. Il

apprend ainsi à communiquer à l'oral dans une démarche constructive et scientifique. Une séance de formation théâtrale est également proposée pour travailler la posture, la mise en scène et le placement de la voix.

Cette approche permet aux candidats de développer leur éloquence, de cultiver leur esprit critique, et de stimuler leur curiosité intellectuelle et scientifique. Elle les prépare aussi aux futures épreuves orales qu'ils rencontreront dans leurs cursus scolaires.

À l'issue de leurs préparations, les candidats doivent présenter un discours argumentatif, devant un jury qui évalue leur démarche scientifique et leur éloquence. Les exposés se font sans trace écrite ni diaporama, sur une durée de 5 minutes maximum. La finale a lieu sous forme d'une « Battle » des candidats retenus par un débat autour d'une question imposée : l'un doit défendre un argumentaire et l'autre une vision contradictoire.

Julie Batut, chercheuse au CNRS en biologie, est marraine de candidats. Elle témoigne de sa fonction :

... Être marraine me permet d'interagir avec des collégien.ne.s et lycéen.ne.s sur des sujets scientifiques et sociétaux. Une relation se crée et au fil des questions-réponses, une démarche scientifique émerge. Nous mettons en place un vrai partenariat et un réel partage de connaissances et de point de vue qui sont très enrichissants et motivants...



4. Le dispositif « Regard de Géomètre »

L'association *Les Maths En Scène* a fondé le dispositif « Regard de Géomètre » pour la rentrée scolaire de septembre 2017. Ce dispositif a pour objectif de faire découvrir la culture mathématique via le monde artistique et scientifique. Il s'adresse aux élèves de la maternelle jusqu'au lycée. L'objectif de chaque classe est la réalisation d'une production

artistique et/ou numérique qui représente le regard des élèves sur le thème choisi. La production doit être en lien avec l'un des arts majeurs. Ce dispositif permet de sensibiliser les élèves à une expression artistique tout en s'appropriant les contenus mathématiques et scientifiques. Il permet ainsi de développer la créativité et l'imaginaire des élèves. Il contribue à renforcer les liens interdisciplinaires. Il favorise les échanges entre jeunes et professionnels artistiques et scientifiques. En effet, chaque classe participante est accompagnée au long du projet par le regard d'un scientifique référent et/ou d'un intervenant artistique. Par exemple, la mathématicienne Jasmin Raissy, Maître de conférences est intervenue auprès d'une classe de moyenne section de maternelle qui avait choisi pour thème « Spirales ».

Le « spiraliier » ou arbre à spirales



Lors de sa visite, elle a su s'adapter à son jeune public. À partir d'observations (images de galaxies, pommes de pins ou certains choux, ...), elle a fait constater aux enfants qu'il y a autour d'eux beaucoup de spirales. Elle leur a appris à les reconnaître et dessiner. Après cette visite, les enfants ont été très sensibilisés à la recherche des spirales dans les objets qui les entourent. L'enseignante a pu profiter

de la dynamique en place pour mener des activités de dénombrement et de tri à partir de la collection de coquilles d'escargots ramenées par les enfants. Après une recherche artistique, les élèves ont réalisé leur œuvre : le « spiraliier » ou arbre à spirales.

Toutes les œuvres réalisées dans le cadre du dispositif « Regards de Géomètre » sont exposées, durant une semaine, dans un espace culturel accessible au grand public. Chaque œuvre a un titre choisi par ses auteurs. Un cartel est associé à chacune des productions pour en expliquer le regard mathématique et le regard artistique des élèves.

De plus, un colloque permet aux élèves de faire la restitution de leur travail aux autres participants. Une enseignante ajoute : « Très belle initiative, de rassembler Mathématiques et Arts ! Les classes et les professeurs ont été enthousiastes et ravis ! ».

Aujourd'hui, suite aux sollicitations d'enseignants de différentes académies, l'association a décidé de généraliser le dispositif à l'échelle nationale. À ce jour, pour l'année scolaire 2020/2021, il est en place dans les académies de Toulouse, Bordeaux, Marseille, Montpellier, Nice, Normandie, Poitiers, Reims, Lille. Ceci est possible grâce à des membres ambassadeurs (enseignants ou chercheurs) qui coordonnent localement le dispositif pour l'association.

Carole Terperau, coordinatrice sur l'Académie de Nice, nous en parle.

Contactée par Houria Lafrance en mai 2019, j'ai accepté de coordonner « Regards de Géomètre » pour l'année scolaire 2019/2020 dans l'Académie de Nice. Le dispositif a eu beaucoup de succès, avec près de 70 classes inscrites. La crise sanitaire nous a empêchés d'exposer les œuvres des classes et de faire le colloque prévu à Draguignan, mais un blog a été créé afin de proposer une exposition virtuelle de plusieurs projets. Parallèlement, j'ai mené avec l'une de mes classes de 3^e le projet « GeomCityLooks » dans le cadre du thème « Architecture » du dispositif. Grâce à l'association, mes élèves ont pu bénéficier de la richesse mathématique apportée par une jeune chercheuse de l'université de Nice, ainsi que de l'expérience et de la créativité d'un photographe local.

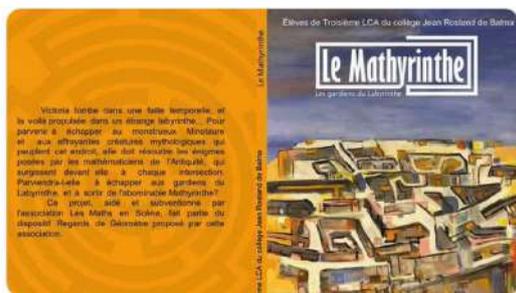
Espace à géométrie variable / Chorégraphie / Arts vivants



Geomcitylooks / Architecture / Photographie



Le Mathyrinthe / Labyrinthe / Littérature



5. Conclusion

L'Association *Les Maths En Scène* est bien connue pour la réalisation de son festival annuel, de son concours EloquenSciences et pour son dispositif Regards de géomètre. Mais, grâce au dynamisme de ses membres et de ses bénévoles, femmes et hommes, elle est aussi créatrice de matériels pédagogiques, comme nos ateliers mathématiques et informatiques. Forte de notre expérience du festival, l'association développe d'autres événements et des journées pour la vulgarisation et la diffusion de la culture des mathématiques et des sciences. Par exemple, dans le cadre de la Fête de la Science et pour contribuer à l'égalité des chances, nous organisons l'événement « En piste pour les mathématiques » avec le centre Henri Desbals de Toulouse, dont la deuxième édition aura lieu en octobre 2020. Toutes ces réalisations ont été possibles en ayant cru en un rêve que j'ai présenté en 2016 à plusieurs passionnés, chercheurs et enseignants. Aujourd'hui, ils m'encouragent à entretenir cette étincelle de folie pour partager la richesse des mathématiques encore trop méconnue.

Squaretopia / Réseaux / Peinture et dessin



Le projet *La Grange des Maths*

- É. BLAYO
- C. KAZANTSEV

1. L'association *La Grange des Maths*

L'association *La Grange des Maths*, créée en juin 2015, est née de plusieurs rencontres : des chercheurs et enseignants-chercheurs grenoblois motivés par la didactique et les pédagogies alternatives ; des professeurs du primaire et du secondaire en ayant expérimenté certaines (exposition itinérante, jeux...); un des directeurs du Mathematikum de Giessen (centre de mathématiques pour le grand public); des citoyens souhaitant s'investir en faveur de l'éducation pour tous et la diffusion de la culture scientifique... Le but : contribuer à changer le regard sur les mathématiques, à les « dédramatiser », dans une démarche qui se veut à la fois scientifique,

culturelle et citoyenne. Les activités de l'association s'articulent autour de 3 pôles.

Médiation vers le grand public Un stand d'activités mathématiques à caractère ludique, *La Grange en Fête*, a été développé. Il est présent dans une quinzaine de manifestations par an (forums, fête de la science...), la plupart dans le bassin grenoblois, et parfois lors d'événements nationaux ou internationaux. L'association organise par ailleurs chaque année les *Maths à l'Oriel*, demi-journée conviviale constituée d'une conférence grand public et d'activités mathématiques pour tous. Enfin, nous venons de terminer la réalisation de *Mission Exoplanètes*, un parcours mathématique dans l'esprit *escape game* à destination du grand public et des classes du secondaire (voir §5).



Valises pédagogiques itinérantes d'activités mathématiques. L'objectif est de proposer aux professeurs de mathématiques du secondaire, aux professeurs des écoles, et aux animateurs et éducateurs de structures municipales et associatives, de nouveaux outils pédagogiques centrés sur une approche ludique des mathématiques.

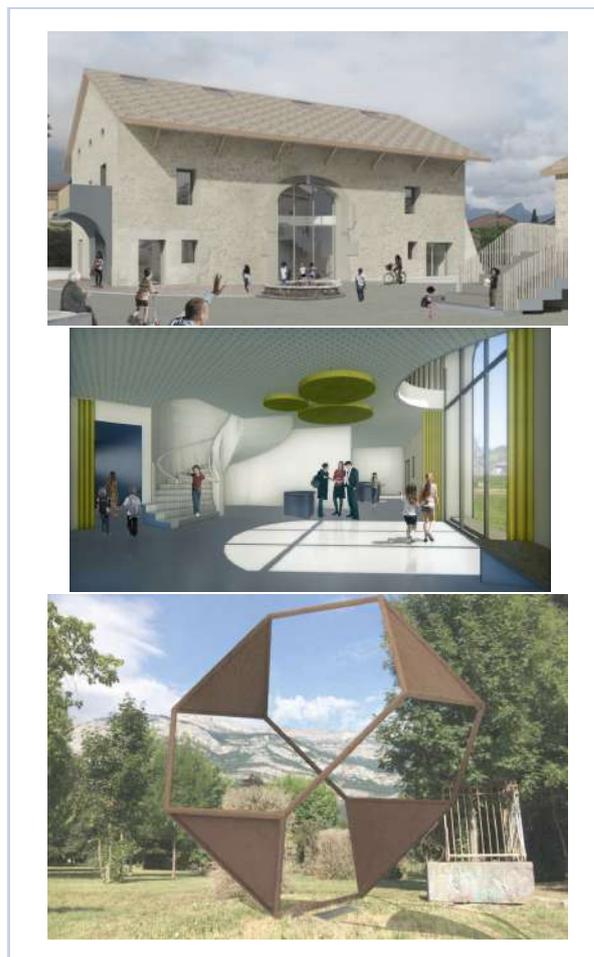
Les ateliers proposés sont conçus pour que les enfants soient en autonomie, et évoluent d'une activité à l'autre selon leur choix propre ou celui de l'encadrant. Il s'agit toujours de manipulations concrètes, pour lesquelles il est nécessaire que les enfants soient actifs, et qui font appel à la fois aux modes d'apprentissage visuel et kinesthésique. Elles sont prévues pour pouvoir être réalisées seul mais aussi à 2 ou 3, afin de développer la collaboration. L'approche est ludique.

Un effort particulier est également porté sur le « à quoi ça sert ? », c'est-à-dire le lien entre mathématiques et vie quotidienne, et sur l'adéquation avec les programmes scolaires (voir §3 et §4).

Préparation de *La Grange des Maths*. Le nom de l'association, outre le jeu de mots en référence à Joseph-Louis Lagrange, met en avant un projet ambitieux : un futur centre d'animation scientifique consacré aux mathématiques, pour tout public, dans une ancienne grange à restaurer au cœur du parc de Varcès-Allières-et-Risset (banlieue sud de Grenoble). Une étude de faisabilité et de pré-programmation de la future Grange des Maths (400 m² sur 2 niveaux, et environ 1000 m² en extérieur) a été réalisée, et l'avant-projet architectural définitif a été livré.

Les grandes lignes de la scénographie intérieure ont également été définies. Le financement de la restauration du bâtiment et les modalités de son fonctionnement sont actuellement discutées avec la municipalité de Varcès et la communauté d'agglomération de Grenoble, afin d'inscrire ce centre de façon durable dans le paysage de la culture scientifique sur le bassin grenoblois.

La Grange des Maths développe ces projets en partenariat avec les acteurs locaux de l'Éducation nationale et de la culture scientifique : Rectorat, IREM, INSPE, Université Grenoble Alpes, ccsti, Grenoble Alpes Métropole...



2. Nos dispositifs pédagogiques pour les scolaires

Enquêtes internationales PISA¹ et TIMSS² ou enquête nationale CEDRE³ sur le niveau des enfants en mathématiques, les constats sont convergents : la maîtrise des savoirs fondamentaux est insuffisante et ces difficultés concernent particulièrement les enfants issus des milieux défavorisés. Le rapport PISA souligne combien les écarts de performance sont en lien à des différences de familiarités avec les concepts mathématiques. Il aborde également l'importance de développer la confiance en soi et de travailler avec les parents afin d'éviter la transmission inconsciente de l'anxiété face à l'apprentissage des mathématiques. Parmi les propositions

1. <https://data.oecd.org/fr/pisa/competences-en-mathematiques-pisa.htm>

2. <https://timssandpirls.bc.edu/timss2015>

3. <https://www.education.gouv.fr/cid53629/cedre-2014-mathematiques-en-fin-d-%20ecole-primaire-les-eleves-qui-arrivent-au-college-ont-des-niveaux-tres-heterogenes.html>

d'actions (rapport Villani-Torossian⁴, colloque de l'Académie des sciences sur l'enseignement des mathématiques au primaire⁵, rapport du Haut Conseil de la Famille, de l'Enfance et de l'Age⁶), les alternatives pédagogiques faisant appel à la manipulation et au plaisir du jeu sont très souvent mises en avant.

Les dispositifs pédagogiques développés par *La Grange des Maths* s'inscrivent totalement dans cette démarche. Sans faire appel au « tout numérique », ils proposent une approche très concrète : utiliser de simples objets, faciles à manipuler, à observer, à déplacer, permettant de sentir venir une solution et d'aboutir à un résultat. Autrement dit, le bonheur de chercher, de cheminer et de trouver, par soi-même ou avec d'autres, à son rythme en prenant son temps, hors de toute sanction ou compétition, pour constater que l'on peut « faire des maths » sans le savoir et y trouver un véritable plaisir. Deux dispositifs (*La Grange Vadrouille* et *La Grange d'École*) sont actuellement opérationnels, et un troisième (*Mission Exoplanètes*) va démarrer cet automne. Ils sont tous itinérants, de façon à pouvoir s'adresser à des publics éloignés géogra-

phiquement. Ce sont ces trois dispositifs que nous allons maintenant présenter.

3. La Grange Vadrouille

La Grange Vadrouille est un atelier itinérant à destination des classes de collège (11-15 ans). Il s'agit d'un ensemble de 23 activités mathématiques à caractère ludique, visant à faire manipuler et réfléchir les élèves sur des thématiques variées : logique, géométrie, numérique... Ces activités ont été développées sur une période d'environ un an par une équipe pluridisciplinaire : chercheurs et enseignants-chercheurs en mathématiques et en didactique, enseignants du secondaire, ingénieurs. Elles ont été sélectionnées, configurées d'un point de vue pédagogique, et conçues et fabriquées en tenant compte des contraintes d'utilisation : faible poids, faible encombrement, mise en place rapide, simplicité d'usage et de réinitialisation, minimisation des accessoires... Chaque activité se présente sous forme de matériel à manipuler et d'un panneau de consigne, l'ensemble étant transporté dans une grande valise à roulettes.



Typiquement, un collège réserve une valise pour une durée d'une ou deux semaines. Son contenu est déployé dans une grande salle. Les classes peuvent y venir à tour de rôle, plusieurs fois si elles le souhaitent, pour des séances d'1h ou 1h30. Les élèves travaillent en autonomie, seuls ou en collaborant à 2 ou 3, et passent régulièrement d'une activité à l'autre. La durée moyenne d'une activité est de l'ordre de 10 minutes. Pas de note : seul compte le plaisir de chercher, réussir, comprendre. L'encadrement est assuré par les enseignants de mathématiques, et/ou par des collègues d'autres disci-

plines intéressés par cet atelier. Aucun animateur de *La Grange des Maths* n'est requis, ce qui aurait été un frein énorme au déploiement de cet outil pédagogique. Un livret très étoffé est mis à disposition des enseignants, qui replace chaque activité dans le cadre du programme, fournit les solutions, et détaille les notions mises en jeu ainsi que différents éléments didactiques, scientifiques, et/ou historiques. Il comporte également systématiquement un paragraphe « lien avec la vie courante ». Testée en 2017-2018 à petite échelle dans l'agglomération grenobloise, *La Grange Vadrouille* est maintenant

4. 21 mesures pour l'enseignement des mathématiques, Rapport de C. Villani et C. Torossian, 2018. <https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242>

5. <https://www.academie-sciences.fr/fr/Seances-publiques/enseignement-mathematiques-ecole-primaire.html>

6. Les temps et les lieux tiers des enfants et des adolescents hors maison et hors scolarité, Rapport du HCFEA, février 2018 - http://www.hcfea.fr/IMG/pdf/Rapport_Temps_et_lieux_tiers_des_enfants_06-04-2018-2.pdf

accessible aux établissements des 5 départements de l'académie de Grenoble. Elle a été utilisée jusqu'à présent par 25 000 à 30 000 élèves. Les séances vécues par une classe ou un groupe avec ces activités sont très inhabituelles et motivantes pour les enfants. De plus, autour de ces séances, les enseignants et éducateurs peuvent évidemment en imaginer d'autres, en amont pour préparer et en aval pour consolider. Un paragraphe spécifique « prolongement en classe » est ainsi proposé pour chaque activité dans le livret de l'enseignant. Ce

peut être aussi l'occasion d'imaginer des projets un peu plus ambitieux, comme par exemple la réalisation par les enfants de dossiers, d'exposés ou de vidéos sur les thématiques de certaines activités, ou encore la création d'une ou plusieurs nouvelles activités du type de celles proposées, et que notre association pourrait intégrer à ses futurs dispositifs. Par ailleurs, la démarche générale et l'esprit proposés dans nos activités peuvent tout à fait être réappropriés par les enseignants pour leurs propres séances.



Une fiche d'évaluation, ainsi que des contacts directs, nous permettent d'avoir des retours de la part des élèves et des enseignants et éducateurs. Ceux-ci sont très positifs, notamment concernant des publics réputés difficiles comme les classes SEGPA (élèves en difficultés d'apprentissage graves et durables) ou ULIS (élèves en situation de handicap), ou encore des mineurs en maison d'arrêt (des activités sont réservées chaque trimestre par le quartier des mineurs de la maison d'arrêt de Varcès).

Le développement de *La Grange Vadrouille* a été rendu possible grâce à un soutien financier de l'IDEX Univ. Grenoble Alpes.

4. La Grange d'École

La Grange Vadrouille lancée, nous avons souhaité étendre ce type de dispositif aux écoles élémentaires. C'est sans doute d'autant plus utile que,

contrairement aux professeurs de mathématiques du secondaire, les professeurs des écoles ne sont pas pour la plupart des spécialistes de la discipline, et qu'une proportion non négligeable parmi eux ne se sent pas à l'aise avec les mathématiques. La conception pédagogique des activités a été réalisée par un groupe de didacticiens et d'enseignants d'école primaire, assistés sur les aspects de réalisation matérielle par un ingénieur en conception. Ce travail de 15 mois a abouti en mars 2019 à une première version de valise, composée de 20 activités et d'un livret de l'encadrant, adaptée aux niveaux CE2-CM1-CM2. Un livret optionnel de quelques pages a aussi été conçu pour les enfants, leur permettant de garder une trace écrite. Chaque activité se présente sous forme de matériel à manipuler et d'un panneau de consigne au format A4, l'ensemble du matériel étant contenu dans une valise de format cabine de 15 kg. À la différence de *La Grange Vadrueille*, *La Grange d'École* peut être mise en place de plusieurs façons : déploiement de l'ensemble

des activités pendant plusieurs jours dans une salle dédiée dans laquelle les classes viennent à tour de rôle, ou bien quelques activités installées provisoirement dans chaque classe, et que l'on change régulièrement... Plusieurs scénarios sont proposés dans le livret de l'encadrant. La durée moyenne d'une activité est de l'ordre de 5 à 10 minutes. On peut typiquement prévoir une séance d'une heure, pour une classe ou un groupe d'enfants. Il est possible également de faire participer les parents à cet atelier, de façon bien sûr à faciliter l'encadrement, mais aussi à créer du lien et à modifier le regard des familles sur les mathématiques et leur enseignement. Après une phase de tests et d'ajustements réalisée au printemps 2019 en coopération avec le rectorat et l'INSPE, deux exemplaires de la valise ont été déployés à l'échelle de l'Isère à partir de septembre 2019, qui ont été utilisés de façon intensive. Une dizaine de valises supplémentaires viennent d'être fabriquées, pour une diffusion dans les 5 départements de l'académie de Grenoble.



La Grange d'École a reçu les soutiens financiers de la Fondation Blaise Pascal, de l'IDEX Univ. Grenoble Alpes, de la Fondation Française des Jeux, et de la Fondation H. Dudley Wright.

5. Mission Exoplanètes

En complément des valises pédagogiques, nous avons souhaité développer un autre type de support de médiation, qui s'adresse indistinctement aux scolaires et au grand public, qui soit plus collaboratif, et qui comporte une dimension scénographique (comme ce sera le cas dans le futur centre). Nous l'avons voulu à nouveau itinérant, afin de toucher des publics éloignés et divers. Nous avons ainsi développé, de fin 2018 à mars 2020, un jeu scénarisé, à mi-chemin entre *Serious Game* et *Escape Game*. Il embarque les participants dans une aventure dont l'accroche est la suivante : « On recrute des pionniers pour aller explorer de nouvelles planètes

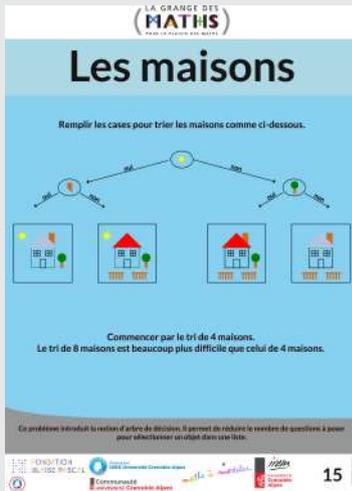
habitables sur lesquelles la préservation de l'environnement, l'optimisation des ressources disponibles et l'utilisation d'énergies renouvelables sont primordiales ». Afin d'être recrutés, les candidats-pionniers doivent résoudre des énigmes mathématiques via la manipulation d'objets. Le jeu a été conçu par des membres de l'association *La Grange des Maths* et un groupe de l'IREM, appuyés par une société spécialisée. Il occupe environ 100m² et est constitué de 10 modules d'environ 1m³ chacun. Le jeu s'adresse à tout public à partir de 10 ans, et est conçu pour être réalisé en autonomie (une tablette par équipe pour le suivi du jeu et les indices, réinitialisation automatique des modules...) et pour pouvoir accueillir jusqu'à une trentaine de personnes (typiquement une classe) simultanément. Un guide d'installation a été rédigé pour la structure hébergeante, ainsi qu'un livret de l'enseignant qui fournit aux professeurs des éléments pour reprendre et étendre en classe les notions mises en jeu dans *Mission Exoplanètes*.



Mission Exoplanètes a reçu les soutiens de l'IDEX Univ. Grenoble Alpes et de la Fondation Blaise Pascal



Activité « les maisons » de La Grange d'École. Les algorithmes de tri sont très nombreux et plus ou moins efficaces. Ce problème introduit en plus la notion d'arbre de décisions, très utile en programmation, lors de l'utilisation de « si...alors...sinon ».



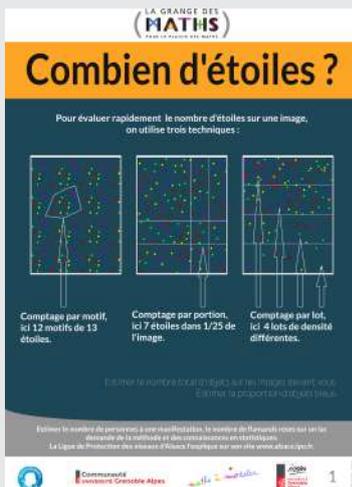
Connaissances et compétences

- savoir analyser des données pour trouver les critères pertinents
- mettre une certaine priorité dans des données
- comprendre que les critères doivent séparer les maisons en des groupes d'effectifs équilibrés (2 ou 4)
- savoir poser les bonnes questions
- comprendre que l'arbre de décision permet de caractériser une de ses feuilles (donc une maison) par un minimum de questions
- savoir représenter une situation par un arbre

Réinvestissement en classe

- proposer les autres façons de faire ce jeu
- proposer les jeux « Qui Est-Ce ? » ou « Devine qui je suis », reposant sur le même principe. Il est possible d'adapter les cartes à différents domaines autres que des personnages. On peut alors limiter le nombre de questions à poser afin de vérifier que les élèves ont compris le principe de l'arbre de décision
- regarder les classements des espèces en sciences de la vie

Activité « Combien d'étoiles » de La Grange Vadrouille. Combien d'étoiles dans le ciel ? Suivant la personne et la région, on en compte beaucoup ou peu. Comment généraliser ? Introduction aux statistiques et à l'échantillonnage...



Matériel.

Quatre feuilles A3 avec :

- des dessins de petites étoiles,
- des dessins de grandes étoiles,
- une photo de champ d'oliviers,
- une photo de flamands roses sur un lac.

Réinvestissement en classe

- Au lycée
Introduction au chapitre « échantillonnage » : nécessité d'un échantillon, fluctuation de l'estimation selon l'échantillon et sa position. Peut être réinvesti ensuite avec le calcul de l'intervalle de fluctuation après la leçon.
 - Au collège
Différence entre dénombrer et estimer. Mise en place d'une méthode propre à chacun. Initiation aux problèmes ouverts (comptage des flamands roses). Il est possible de réaliser un compteur d'étoiles.
- Lien avec la vie courante.* On retrouve des applications possibles de processus ponctuels dans différents domaines.
- Astronomie : la cartographie des galaxies a permis de se rendre compte qu'elles s'éloi-

- gnaient de nous, ce qu'on explique par le phénomène d'inflation de l'univers (Big Bang).
- Biologie : étudier la répartition spatiale des animaux ou des plantes permet de comprendre les phénomènes de compétition entre les espèces, migrations, etc.
- Santé : les cas observés de certaines maladies sont répertoriés sur une carte afin de détecter d'éventuels foyers infectieux.
- Microscopie : les processus ponctuels s'appliquent aussi à l'étude de la structure des roches, des métaux ou des tissus cellulaires.
- Sciences de la Terre : la localisation des tremblements de terre sur une carte donne des indications sur les grandes lignes de faille et le mouvement des plaques tectoniques.



LIVRES



La mathématique, une vocation problématique

Michael HARRIS

Cassini, 2020. 520 p. ISBN : 978-2-84225-260-1

« La mathématique, une vocation problématique » (titre original « Mathematics without apology » en hommage à Hardy : malheureusement, les difficultés de traduction n'ont pas permis de garder ce clin d'œil dans la version française) n'est pas facile à classer : ce n'est ni une autobiographie, ni un texte philosophique ou sociologique, ni un ouvrage de vulgarisation, et pourtant, il emprunte à chacune de ces catégories. C'est une improvisation libre et interrogative sur les mathématiques telles qu'elles sont vécues par ses pratiquants : la trame qui y apparaît le plus souvent – j'hésite à dire fil rouge, car le texte s'en éloigne pendant des longues plages – est une tentative de réponse à la question « comment et pourquoi faire des mathématiques » ?

Chacun des dix chapitres examine un aspect différent des mathématiques : le ton de ces discussions est varié, relevant parfois du témoignage personnel, parfois de l'analyse philosophique et parfois du militantisme. Ces discussions libres sont entrecoupées de plusieurs petits textes (chapitres $\alpha - \delta$, « comment expliquer la théorie des nombres dans un dîner en ville ») présentant la géométrie arithmétique, commençant par la notion de congruence et terminant par les courbes elliptiques et la conjecture de Sato-Tate.

Après une brève introduction, le chapitre deux donne une analyse un brin optimiste de la sociologie des mathématiques, examinant comment l'autorité scientifique – « charisme » dans le livre – est construite et reconnue dans notre communauté. Il est suivi par un virage philosophique ou le leitmotiv « pourquoi et comment faire des mathématiques ? » apparaît et dans lequel l'auteur prend ses distances avec les justifications classiques, qu'elles soient utilitaires – les mathématiques servent aux autres sciences – ou esthétiques – la beauté et la vérité à l'honneur chez Hardy – pour en proposer reposant sur le jeu et le plaisir. C'est une peinture fidèle des raisons qui poussent les mathématiciens à choisir ce métier : les raisons pour lesquelles la collectivité pourrait choisir de les financer ne seront évoquées que plus tard. Le chapitre quatre revient sur la crise financière de 2009 et le rôle qui y ont joué les mathématiques financières : le sujet n'est pas original, mais l'auteur soulève en filigrane une question pertinente – si l'on considère, ce dont il faudrait débattre, que les mathématiciens financiers ont contribué à cette crise, doit-on déduire que le reste de la communauté a été trop complaisant avec cette discipline qui leur fournissait de l'argent et attirait des étudiants ? La première partie du livre se clôt sur les réflexions de l'auteur sur « Contre-jour » de Thomas Pynchon, un écrivain difficile d'accès dont les œuvres non linéaires sont parsemées de références mathématiques ; l'auteur suggère que cette non-linéarité pourrait même être quadratique (plus précisément hyperbolique).

La deuxième partie s'ouvre sur une discussion des liens (plutôt ténus) entre les mathématiques et le corps, après quoi la philosophie des mathématiques revient dans le chapitre sept, où l'auteur se penche sur le rôle qu'a joué la recherche des fondements initiaux dans l'histoire récente des mathématiques, tentant – la tâche est une gageure – de rendre accessible les motifs d'une variété, la distinction catégorique entre identité et isomorphisme et les travaux récents de Vladimir Voedovsky, sans doute le passage le plus difficile du livre. Le chapitre huit revient sur la pratique mathématique, examinant le rôle central que jouent les « trucs » (les ruses et astuces) dans notre travail quotidien – la traductrice dit avoir peiné à trouver une traduction adéquate du mot anglais « trick » et ses

nuances multiples et contradictoires. Après la brève interlude du chapitre neuf, qui raconte en détail un épisode créatif de la vie de l'auteur – précipité par un rêve mathématique et fournissant donc le prétexte à une discussion de l'inconscient dans la création scientifique – le bilan, si bilan il peut y avoir de ce récit éclectique, est tiré dans le chapitre dix. La question du « comment et pourquoi » resurgit : l'auteur plaide pour une science mathématique qui serait sa propre justification, par la tradition qu'elle constitue et le plaisir qu'elle procure, et contre l'idée que les mathématiques ne seraient valables que lorsqu'elles sont utiles.

La question est centrale – est-ce que les mathématiques doivent être « utiles » pour avoir une valeur ? – Voilà une réaction personnelle aux arguments développés dans ce livre, qui commence par préciser les nuances du mot « utile ».

Si par « utile » on entend ce qui augmente le PIB ou le bien-être matériel alors beaucoup d'activités sont inutiles et indispensables ; pour autant, il n'en suit pas que tout ce qui est « inutile » mérite appui et ceci ne dispense pas de contribuer (au sens large) à la collectivité, faute de quoi notre demande de soutien est celle d'un aristocratie souhaitant le maintien de ses privilèges. Quelle est la contribution des mathématiques fondamentales ? Qu'apportons-nous ? L'auteur considère que le dialogue avec les applications ne suffit pas seul à justifier l'ensemble des mathématiques fondamentales et il propose comme raisons d'être complémentaires la nécessité de continuer la tradition mathématique et de conserver le « champs de détente » qu'elle fournit. Ceci est-il convaincant ?

Je crois que cet argument peut tenir, à condition d'en tirer toutes les conséquences. La tradition mathématique et le plaisir du défi intellectuel sont des biens importants et on peut penser que leur préservation justifierait qu'une partie du travail de notre communauté soit tournée vers les mathématiques pour elles-mêmes, mais à condition d'être les défenseurs d'un bien commun, pas les héritiers d'un trésor privé. La défense des mathématiques pour les mathématiques que propose l'auteur tient si cette tradition et ce plaisir sont accessibles au-delà de notre cercle parce que nous les mettons à la portée des non mathématiciens puisque son argument nécessite un apport des mathématiques à la collectivité autre que celui, indéniable, des applications. Les mathématiques fondamentales ont aussi besoin d'un dialogue constant avec l'extérieur : la vulgarisation, les interactions avec les autres disciplines, les échanges avec les collègues du secondaire et l'enseignement pour les étudiants qui ne seront pas chercheurs ne sont pas des aspects mineurs de notre activité. Ce sont les courroies de transmission sans lesquelles elle tourne dans le vide.

Catriona MACLEAN
Institut Fourier, Grenoble

Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien 2021

mercredi 20 janvier 18h30

Julie Delon

Université Paris-Descartes

*Des tas de sable aux pixels,
deux siècles et demi
de transport optimal depuis Monge*

mercredi 10 février 18h30

Vincent Beffara

Université Grenoble Alpes

*J.W. Gibbs :
les mathématiques
du hasard au cœur
de la physique ?*

mercredi 17 mars 18h30

Patrick Popescu-Pampu

Université de Lille

*René Thom
et le dynamisme
des formes instables*



mercredi 14 avril 18h30

Marie Thérêt

Université Paris-Nanterre

*Hammersley,
feux de forêt,
porosité et réseaux*

{ BnF

Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium
Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque
Entrée libre – <https://smf.emath.fr/BNF/2021>



Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (gazette@smf.emath.fr), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier \TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe \LaTeX *gztarticle* fournie par les distributions \TeX courantes (\TeX Live et Mac \TeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK \TeX), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution \TeX à jour.

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

