SOMMAIRE

Quelques aspects de la vie et de l'œuvre de Georges Poitou Jean-Pierre Kahane	3
Léon Motchane	
Louis Michel	. 9
C.N.R.S. Compte rendu de la session d'automne 1989 de la Commission 03 du C.N.R.S. (11-12-13/12/89) Colette Moeglin	11
Quelques informations pratiques sur le C.I.M.P.A. et ses écoles Jean-Michel Lemaire	17
Cinq semaines à Bordeaux	
ENSEIGNEMENT Effectifs des classes scientifiques des lycées	21
Enseignement des mathématiques : Commission et Mission	
D.E.A. de Didactique des Mathématiques	had had
G. Arsac, C. Laborde	24
NFORMATIONS	27
IVRES	34
par Bernard Teissier	35
Fractals chez Springer par Jean-Luc Chabert	38
IATHÉMATIQUES Introduction à la multisommabilité Michèle Lodge Bielend	
Michèle Loday-Richaud	4.1

DATE LIMITE

de soumission des articles, pour parution dans le n° 45 – JUIN 1990

15 MAI 1990

F. Vernuist, University of Utreent

Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems

1990. IX, 277 pp. 107 figs. 2 tabs. (Universitext) Softcover FF 155.00 ISBN 3-540-50628-4

On the subject of differential equations a great many elementary books have been written. This book bridges the gap between elementary courses and the research literature. The basic concepts necessary to

study differential equations - critical points and equilibrium, periodic solutions, invariant sets and invariant manifolds -

are discussed. Stability theory is developed starting with linearisation methods going back to Lyapunov and Poincaré. The global direct method is then discussed.

To obtain more quantitative information the Poincaré-Lindstedt method is introduced to approximate periodic solutions while at the same time proving existence by the implicit function theorem. The method of averaging is introduced as a general approximation-normalisation method. The last four chapters introduce the reader to relaxation oscillation bifurcation theory, centre manifolds, chaos in mappings and differential equations, Hamil tonian systems (recurrence, invariant tori, periodic solutions.).

The book presents the subject material from both the qualitative and the quantitative poin of view. There are many examples to illustrate the theory and the reader should be able to start doing research after studying this book.

S. Wiggins, California Institute of Technology, Pasadena, CA

Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos

1990. Approx. 705 pp. 291 figs. (Texts in Applied Mathematics, Vol. 2) Hardcover FF 400.00 ISBN 3-540-97003-7

This significant, forthcoming volume is intended for advanced undergraduate or first year graduate students as an introduction to applied nonlinear dynamics and chaos. The author has placed emphasis on teaching the techniques and ideas which will enable students to take specific dynamical systems and obtain some quantitative information about the behavior of these systems. He has included the basic core material that is necessary for higher levels of study and research. Thus, people who do not necessarily have an extensive mathematical background, such as students in engineering, physics, chemistry and biology will find this text as useful as students of mathematics.

Overall, this will be a text that should be required for all students entering this field.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong

Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33 · 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA · 8 Alexandra Rd., London SW19 7JZ, England · 26, rue des Carmes, F-75005 Paris · 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan · Room 1603, Citicorp Centre, 18 Whitfield Road, Causeway Bay, Hong Kong

Springer

QUELQUES ASPECTS DE LA VIE ET DE L'OEUVRE DE GEORGES POITOU (1)

Jean-Pierre KAHANE

Georges POITOU est mort le 14 décembre 1989. En juillet il avait eu une fracture du col du fémur dans des conditions alors inexpliquées. De septembre à décembre, sans quitter son appartement, il continuait à assurer ses fonctions de directeur de l'Ecole Normale Supérieure. C'est au téléphone qu'il communiquait avec ses amis, réglait les affaires, et précisait ses idées; Jean Cerf a conservé les réponses détaillées et testamentaires qu'il a ainsi faites à l'enquête sur l'Ecole menée, à sa demande, par le Comité national d'évaluation. Le 8 novembre. pendant deux heures, il présidait avec brio une séance du conseil de discipline réglementaire et urgente, dont Josiane Serre a dit qu'il restera l'un des souvenirs les plus poignants de sa vie. Fin novembre, il entrait à l'hôpital Cochin, où ses amis le retrouvaient trois semaines plus tard, en musique comme il l'avait souhaité, pour un dernier adieu.

Il était né à Paris le 11 février 1926. De sa famille, nivernaise, il avait hérité le goût de la musique de chambre; de son père, instituteur devenu secrétaire du Rectorat de Paris, une connaissance intime de la vie universitaire. Brillant élève, il passa directement de l'école communale en cinquième au lycée Henri IV. Là il découvrit l'histoire, les classiques, le latin, le grec. Habitant l'Institut de Chimie, Georges fréquentait alors les abords de l'Institut Henri Poincaré comme des lieux hospitaliers aux gamins et propices au jeu de bille. Tout en acquérant le goût et la pratique des lettres et des langues anciennes, il apprenait en autodidacte le piano, le violon, et la direction d'orchestre. C'est ainsi que naquit en 1943 au lycée Henri IV, parallèlement à des activités théâtrales qu'organisaient MM. Kerst et Pompidou, un orchestre des élèves dont le chef était Georges Poitou. Il choisit la taupe, où régnait alors André Perrichet qui avait eu ou avait pour élèves Laurent Schwartz, Michel Hervé, Pierre Dolbault, Daniel Lacombe. En 1945, le grand tournant de son existence fut son entrée au 45, rue d'Ulm.

Sa promotion était brillante et très liée. Elle comprenait Charles Brochard, Roger Descombes, le cacique, Jean Frenkel (retour de guerre), Paul Jaffard, Daniel Lacombe, Maurice Roseau, Jean-Pierre Serre, pour ne citer que les mathématiciens. Michel Hervé était l'unique caïman de mathématiques, et chargé à ce titre du secrétariat du concours d'entrée, de la bibliothèque de mathématiques, et de la préparation à l'agrégation en mathématiques élémentaires et mathématiques spéciales. Il y avait à l'Ecole quelques conférences de mathématiques en première et seconde année. A l'Institut Henri Poincaré Valiron enseignait le calcul différentiel et intégral, Bouligand la mécanique rationnelle, Châtelet l'algèbre. Pour passer l'agrégation, il fallait une certaine virtuosité en calcul et en géométrie, mais il était permis d'être dans une ignorance parfaite de l'algèbre, de la topologie et de l'analyse post-Lebesgue. Cependant en 1948, au moment où Poitou passait l'agrégation, les premiers livres de Bourbaki étaient parus et Henri Cartan enseignait à l'Ecole. On commençait à trouver ou retrouver en France quelques livres étrangers (Van der Waerden, Kuratowski, Zygmund, Banach).

Ces trois années d'Ecole ont été l'occasion pour Poitou de fréquenter les labos et la bibliothèque littéraire, et de s'initier à la vie syndicale. C'est à cette époque que les normaliens sont devenus fonctionnaires stagiaires, et que leur pécule s'est transformé en traitement.

Après l'agrégation, Poitou fut admis comme attaché de recherches au CNRS. Il n'y avait pratiquement pas de postes d'assistants ni de chefs de travaux, les maîtres-assistants n'existaient pas encore, et les travaux dirigés étaient assurés, en majeure partie, par des attachés au CNRS. Poitou fut ainsi recruté par Valiron pour assurer une partie des T.D. de Calcul différentiel et intégral. A côté de l'enseignement, les attachés au CNRS étaient tenus à une tâche

d'intérêt général; pour les mathématiciens, c'était quelques heures en commun, sous la conduite de Jacques Riguet, pour rédiger le Bulletin signalétique du CNRS. C'était, au fond, une bonne occasion de se rencontrer et de s'instruire.

Cependant, l'essentiel était son travail de recherche, mené en étroite collaboration avec Roger Descombes, sur l'approximation des nombres complexes par des quotients d'entiers algébriques. C'était à la fois élémentaire et très difficile, et l'occasion de déployer toutes les ressources de calculs faits à la main. Quand les moyens informatiques sont apparus, Poitou en savait la valeur potentielle en mathématiques pures. Le thème des minorations de discriminants, qui apparaît dans sa thèse, a retenu son attention pendant toute sa vie. Sa thèse fut soutenue en 1953, devant un iury constitué de Denjoy, Châtelet, Valiron, Pisot. A proprement parler, Châtelet n'avait pas été son patron de thèse. Mais la personnalité de Châtelet - rationaliste, humaniste, grand doyen et bâtisseur - l'a évidemment marqué.

Poitou s'en fut enseigner pendant deux ans à l'Institut des Hautes Etudes de Tunis, rattaché à la Sorbonne. L'enseignement y était d'avant-garde, la bibliothèque sérieuse, et la communauté mathématique jeune et active, avec J. Riss, J. M. Souriau, R. Pallu de la Barrière. Puis il fut nommé à Lille, où il resta dix ans, comme maître de conférences puis professeur. C'est à Lille qu'il commenca à déployer ses talents d'organisateur et d'animateur. Il y avait retrouvé Roger Descombes, et il y attira Michel Parreau, qui devint rapidement le doyen de la Faculté. Il y créa le Centre de calcul. Il utilisa les possibilités de recrutement d'assistants qui commençaient à sa manifester à cette époque pour faire venir des jeunes, et en particulier des jeunes sévriennes. Il organisa à Lille des cours avancés et des séminaires. En même temps, ce fut une période faste pour ses propres travaux. Ainsi, la cohomologie galoisienne des modules finis fut à la fois la matière de notes et d'articles personnels, et d'un ouvrage de référence collectif, auquel collaborèrent une douzaine de mathématiciens lillois. Poitou dit, dans l'avertissement de cet ouvrage, qu'il

procède surtout de la pensée de J. Tate (2). Il est vrai que Poitou s'est nourri des idées de Tate - comme aussi, toute sa vie durant, des cours de Serre. Mais l'ouvrage intègre, dans son dernier chapitre, des résultats originaux de Poitou, et, dans les chapitres précédents, tout ce que Poitou appelle "les ingrédients nécessaires à sa lecture autonome". Ainsi "dans le but d'intéresser des débutants..., diverses théories ont été exposées de façon plus détaillée qu'il n'est usuel dans les publications destinées aux spécialistes", et on y trouve en effet, sous forme à la fois ramassée et accessible, un bon morceau de topologie, les corps valués, la théorie de Galois. les nombres p-adiques, les corps de nombres algébriques, et le langage des catégories. C'est un modèle d'ouvrage de haut enseignement.

Poitou vint à Orsay en 1965, au moment même où la Faculté des Sciences d'Orsay - précédemment annexe d'Orsay de la Faculté des Sciences de Paris - venait d'être créée. Le Doyen Zamansky était en train de bâtir Jussieu et, en attendant, les mathématiciens parisiens se tassaient à l'Institut Henri Poincaré, ou restaient chez eux. A Orsay, les mathématiciens étaient encore peu nombreux, mais ils étaient logés et présents, et ils se constituaient une petite bibliothèque. Les étudiants et les personnels pataugeaient dans la boue, mais tout le monde était jeune et les innovations scientifiques et pédagogiques allaient bon train. Poitou introduisit d'emblée un style d'enseignement : un travail d'équipe avec les assistants et maîtres-assistants, une attention personnelle à chaque étudiant - il s'astreignait, quel que soit le cours, à s'entretenir au moins une fois personnellement avec chaque étudiant. Il arrive qu'on voie, dans un C.V. de mathématicien: "i'ai appris mon métier d'enseignant avec Poitou". C'est une sérieuse référence.

Il avait une très haute idée de l'enseignement supérieur, qui se mariait bien avec ses conceptions syndicales. "Bon travail, bonne paye" était pour lui la revendication syndicale de base. Il tenait à ce que soient pleinement réalisées les deux fonctions d'enseignement et de recherche des membres de l'enseignement supérieur, et qu'à défaut les choses soient nettes. Ce souci de netteté l'amena, comme président de la commission de mathématiques en 1967, à des positions et des propositions de services lourds qui furent jugées brutales et soulevèrent des réactions syndicales assez vives, mais l'effet de choc qu'il visait amena les intéressés, à ma connaissance, à réaliser pleinement, comme il le souhaitait, leurs fonctions de recherche comme leur enseignement.

Elu doyen en 1967, il prit ses fonctions le 1er janvier 1968 et les quitta le 31 décembre 1970. Ce fut un grand doyen. Ce qui frappait d'abord, c'était son style et sa manière. Il était très respectueux des formes à l'égard de ses collègues, très net dans les instructions à ses collaborateurs, à qui il s'en remettait pour le respect des réglements, et très décontracté dans les occasions où d'autres, quelquefois, éprouvent quelque tension : les contacts avec les syndicats, ou avec les ministres. Il y avait une certaine connivence entre lui et Edgar Faure, le très subtil ministre de l'Education Nationale d'après mai 68. Dans l'été 68, la ministère attribuait libéralement aux dovens qui en faisaient la demande des appariteurs musclés pour la protection des bâtiments. Compte tenu de la situation propre à Orsay, Poitou proposa avec un clin d'oeil à Edgar Faure, ravi, qu'on appelât ces appariteurs des "jardiniers". Et, en fait, il embaucha onze jardiniers, et organisa avec le botaniste René Nozeran le service des espaces verts. Dans l'été 68, Poitou fit planter des fleurs. A l'époque, c'était une gageure. Au début, les fleurs furent piétinées. Poitou demanda aux jardiniers d'en replanter d'autres. Le processus se répéta, mais il eut une fin, et ce fut la victoire des fleurs

Mai et juin 68 furent l'époque des affaires pour les marchands de peinture d'Orsay. Ils vendaient la peinture aux étudiants qui l'utilisaient pendant la nuit, et aux services de la Faculté, pour recouvrir les inscriptions au petit matin. Poitou ne se contentait pas d'assurer l'ordre. Constatant le besoin d'expression des étudiants et des personnels, il avait fait installer deux cents panneaux d'affichage dans tout le campus, et à l'entrée de chaque bâtiment. Ces panneaux furent d'abord boudés, puis largement utilisés. Poitou savait

répondre à la demande même et surtout si elle était latente ou mal exprimée.

Il avait un grand souci de l'information et du contact direct avec ses administrés. Dès le 1er janvier 1968 il avait lancé un bulletin d'information hebdomadaire, d'une page, dont il était le principal rédacteur, et qui constitue une chronique des années 68-70. Il serait bon, pour les historiens à venir, d'en conserver une collection, ainsi que des P.V. des Assemblées présidées par Poitou en mai 68. Poitou eut l'art de s'appuyer sans leur céder sur les grands mouvements de l'époque, pour développer Orsay et toute l'université française. Il y acquit une immense popularité.

C'est au cours de l'été 68 que se dessina la loi Edgar Faure. Poitou était ferme partisan de la pluridisciplinarité. Dès avant mai, il souhaitait avoir à Orsay un CHU et des enseignements littéraires. Au contraire de ce qui se faisait spontanément dans toute la France, il poussa à la mise en place à Orsay d'UER non disciplinaires (ce furent les UER de premier cycle, de second cycle, de troisième cycle). Voyant que le temps manquait pour créer à Orsay une université pluridisciplinaire, il multiplia les contacts en vue de la création de la future Université de Paris-Sud. Son but était la création de l'Université dès 1969. Les aléas de la politique, à savoir le référendum et le retrait de De Gaulle, en décidèrent autrement.

Lorsque le conseil constitutif eut terminé son travail, en 1970, les instances régulières se mirent en place, et tout le monde espérait que Poitou accepterait la présidence de l'Université dont il était le père. Il refusa fermement. Il voulait se consacrer de nouveau à l'enseignement et à la recherche. Peut-être aussi pressentait-il le divorce croissant entre les vastes ambitions qu'il avait pour l'Université et les moyens qu'il y aurait pour y répondre. Au moins a-t-il inspiré par ses conceptions et son exemple, pour le meilleur de leur action, tous les présidents qui se sont succédé à la tête de l'Université de Paris-Sud.

Ses conceptions sur l'université étaient à la fois traditionnelles, originales et profondes. Il tenait à un statut social élevé pour les professeurs, et au plein exercice de leurs res-

ponsabilités. Il tenait au service public de l'Education Nationale. Il voyait large, et savait qu'en matière universitaire il faut souvent agrandir pour améliorer. Sa référence constante était la fusion des corps professoraux de la Sorbonne et de l'Ecole Normale Supérieure, en 1902, qui allait donner à la Sorbonne du début du siècle sa dimension nationale et internationale. Il voyait Orsay dans son environnement. S'agissant des proiets concernant les plateaux de Saclay et de Palaiseau, il écrivait en 1970 que "la liaison de cet ensemble avec Orsay est une question d'importance nationale". Il voyait l'ensemble des universités françaises comme un facteur essentiel du développement régional. Il souhaitait une interaction forte entre les études scientifiques, médicales, littéraires. Il estimait exemplaire, pour le lien entre la recherche et l'enseignement, le cas d'Orsay, où de grands laboratoires de recherche avaient précédé puis accompagné l'organisation des enseignements. L'un de ses collaborateurs proches, à l'Ecole Normale Supérieure, a confié que, comme directeur, Poitou avait été constamment inspiré par son expérience d'Orsay.

Sautons maintenant à sa grande oeuvre des années 1980-90, la restauration et la reconstruction de l'Ecole Normale Supérieure.

La décennie 1970-80 fut dure pour la recherche et pour l'université en général, et très dure pour l'Ecole Normale. C'est ce que, dans une litote expressive, le bibliothécaire de l'Ecole, Pierre Petitmengin, appelle une "décennie tristounette". Michel Hervé, comme directeur adjoint, eut à tenir la barre, et réussit, malgré les circonstances et l'hostilité personnelle du ministre de l'époque, quelques innovations remarquables. Cependant, Hervé s'occupait des concours, des crédits, des études, dans des conditions de plus en plus difficiles. A cause même de ces difficultés, il demanda en mai 1980 à Georges Poitou s'il accepterait de prendre sa succession. Poitou le laissa parler une demi-heure, et lui dit : "Je suis ton homme." Dès ce moment, il fut également l'homme de toute l'Ecole, de tous ceux qui voulaient un renouveau de l'Ecole. Mais il ne fut pas l'homme du ministre de l'époque, qui, pour

d'obscures préoccupations de jeu de taquin politique, choisit un recteur et l'installa en violant toutes les règles. La nomination fut à reprendre, et pendant ce temps le directeur, Jean Bousquet, terminait son mandat. C'est donc comme directeur de l'Ecole Normale Supérieure, et non comme directeur adjoint, que Poitou fut nommé, le 1er octobre 1981, après avoir été élu par toutes les instances réglementaires compétentes. Il dit plus tard qu'il avait beaucoup regretté le temps perdu : l'été 81 aurait été pour lui, vu les conditions politiques et les relatives libéralités de l'époque, le meilleur tremplin pour une remontée de l'Ecole.

Poitou, renonçant à faire tout ce que faisait Hervé, s'assura dès l'abord de son concours – c'était une de ses qualités, reconnues, que de savoir faire travailler ses amis et ses collègues. Pensant à Orsay, il édita un bulletin d'information hebdomadaire, Ernest. Il garantit les moyens de la bibliothèque. Et il se lança dans les grands projets.

D'abord, la réorganisation et le renouvellement des directions des grands laboratoires scientifiques à laquelle il associa François Jacob et Pierre Joliot pour la biologie, John Coates et Michel Broué pour les mathématiques, Xavier Le Pichon pour la géologie, Edouard Brézin pour la physique. Aucun de ceux que je viens de citer n'est ancien élève de l'Ecole. Ce sont simplement, de l'avis de Poitou, les meilleurs dans leur domaine. Donc, dans sa conception de l'Ecole, ils ont leur place dans l'Ecole.

Ensuite, les magistères, l'élargissement des concours d'entrée et des voies offertes. Il souhaitait des recrutements d'élèves à différents niveaux, et avait fait ouvrir un second concours pour des jeunes gens achevant un second cycle universitaire – d'où le recrutement, en 1989, de trois biologistes et d'un informaticien.

Il se préoccupait de l'Ecole littéraire. Il nourrissait l'espoir d'un développement régional et international, qui a pris un moment la forme, projetée, d'un collège européen situé à Strasbourg. Il avait organisé le jumelage de l'E.N.S. et de la Scuola Normale Superiore de Pise — et appris l'italien à cette occasion.

Cependant, la grande affaire de la décennie fut la fusion des ENS de la rue d'Ulm et de Sèvres. Poitou, considérant qu'elle était inévitable, a cherché à la réaliser dans les meilleures conditions, pour les élèves, pour les laboratoires, et pour les perspectives d'extension. Les épisodes furent légion. Ce fut l'objet d'une collaboration étroite avec Josiane Serre, et d'une grande attention personnelle de Poitou aux décrets créant la nouvelle Ecole Normale Supérieure. Sa nomination à la tête de la nouvelle école, en février 1988. n'alla pas de soi dans les conditions politiques de l'époque. Il avait le ferme soutien de tous les départements de l'Ecole, et les candidats pressentis se récusèrent. L'un d'eux aurait dit de Poitou : "c'est un scientifique honnête et qui aime les lettres." C'était la vérité, et, pour une fois, la vérité triompha.

Poitou eut peu de temps pour déployer ce qu'il avait en tête comme directeur de la nouvelle Ecole Normale Supérieure. Sur ses vues générales, concernant l'Ecole et sa place dans la nation, René Spector a retrouvé un document de grande importance, une correspondance de 1983 entre Poitou et Jean-Jacques Payan, alors directeur général des enseignements supérieurs et de la recherche. Poitou y joue parfois les pince sans rire, tout en disant les choses les plus sérieuses. Il vaudrait la peine de publier ces pages, en hommage à Poitou et en reconnaissance de l'amour qu'il portait à son Ecole.

Ce que Poitou a réalisé à Orsay et rue d'Ulm, et de façon générale pour l'Université française, ne doit pas dissimuler ce qu'il a apporté en mathématiques et aux mathématiciens. J'en ai dit un mot au début de cet exposé, je me bornerai aux aspects les plus extérieurs : le séminaire DPP, l'animation de son équipe, les bibliothèques mathématiques, le comité consultatif des universités, la SMF et le CIRM.

Le séminaire de théorie des nombres constitué par Hubert Delange et Charles Pisot en 1959 devint une institution nationale, sous le nom de séminaire DPP (Delange, Pisot, Poitou) à partir de 1965. Le programme du séminaire était généralement établi avant la première séance. Les actes de ce séminaire constituent une chronique de la théorie des

nombres pendant vingt ans. C'est Poitou qui fit venir Coates à Orsay, et, à partir des années 1970, le séminaire porte également la marque de Coates.

La décennie 70-80 fut celle d'une intense activité mathématique de Poitou. C'est alors qu'il eut des élèves aussi différents que Gilles Robert, Roland Gillard, Philippe Satgé, Bernadette Perrin-Riou, Dominique Bernardi, Guy Henniart, Jean-François Jaulent, Francesco Diaz y Diaz. Il organisait à Luminy, bien avant la création du CIRM, des colloques sauvages où se mêlaient arithmétique et natation.

Poitou avait la passion des bibliothèques. C'est lui qui, en 1968, décida de l'extension sur deux étages de la bibliothèque mathématique d'Orsay. C'est pendant qu'il présidait la commission de la bibliothèque que fut décidée la collaboration du CNRS et de l'Université sous la forme d'un GIS (groupement d'intérêt scientifique) devenu depuis "groupement scientifique", et c'est une assise solide pour le financement de la bibliothèque. Ensuite, il accepta que la bibliothèque assume une partie des charges afférentes au CADIST de mathématiques, moyennant l'assurance de nouvelles ressources régulières. Ce CADIST était la reconnaissance par le Ministère du rôle national qui avait fini par être celui de notre bibliothèque de département, constituée grâce à un effort prolongé et patient des mathématiciens d'Orsay.

Poitou assuma au début des années 1970 la présidence de la commission de mathématiques du comité consultatif des universités. Il présidait avec maestria, savait déjouer les pièges, et jouissait d'un grand crédit auprès de l'administration. On lui a reproché, ce qui est un compliment, de pratiquer "l'anticopinage". Il n'était pas là pour rendre service à untel ou untel, mais pour faire juger les dossiers de façon responsable et équitable.

En 1974 il fut président de la Société Mathématique de France. Ce fut lui qui remit sur les rails le projet du CIRM (centre international de rencontres mathématiques) de Marseille-Luminy. Jean-Louis Koszul et Jean-Pierre Labesse m'ont communiqué un texte de sa main, faisant l'histoire de la chose jusqu'en 1981. Si le CIRM a vu le jour, c'est

bien à Georges Poitou que nous le devons. A l'occasion de ses démarches ininterrompues auprès des institutions les plus diverses, il éprouva, dit-il, une "consolation inattendue", à savoir que "les mathématiciens français bénéficient, sans le savoir, d'un capital latent de sympathie."

Poitou avait une multitude de talents, des vues audacieuses dans tous les domaines, et une personnalité assez secrète. Il était ouvert et jovial, il connaissait une foule de gens, mais il conservait précieusement à l'abri l'intimité de sa vie et de ses pensées. Il aimait la marche et le vélo, il ignorait le

cinéma et la télévision. En mathématiques, il mêlait sans efforts les points du vue les plus généraux et le souci des résultats précis. En musique, il était un pratiquant plus qu'un amateur. Il écoutait peu de musique. Il la jouait, ou il la lisait. Il était resté étonnamment jeune d'allure, sans doute à cause de Lucile, sa femme, et de sa fille Caroline.

Nous avons perdu un ami, un guide et un exemple. Mais ce que Lucile et Caroline ont perdu, elles seules le savent, et tout ce que nous pouvons leur dire est l'immense sympathie que nous avons pour elles.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1989 et son supplément les MÉMOIRES DE LA S.M.F.

(4 fascicules par an auxquels s'ajoutent 4 à 5 suppléments)

Revue éditée par la Société Mathématique de France.

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.

TOME 117, Fascicule 4

Sommaire:

BALAZARD (M.). — Remarques sur un théorème de G. Halász et A. Sárközy.

Van Der Put (M.) et Reversat (M.). — Construction analytique rigide de variétés abéliennes.

ANNÉ (C.). — Principe de Dirichlet pour les formes différentielles.

ZAHID (A.). — Les endomorphismes e-finis des modules de Whittaker.

Mémoires:

Supplément au Tome 117, fasc. 4 - Mémoire nº 39

Helffer B., Sjöstrand J. — Semiclassical analysis for Harper's equation III. Cantor structure of the spectrum.

In this paper we continue our study of Harper's operator $\cos hD + \cos x$ in $L^2(\mathbf{R})$, by means of microlocal analysis and renormalization. A rather complete description of the spectrum is obtained in the case when $h/2\pi$ is irrationnel and has a continued function expansion: $h/2\pi = 1/(q_0 + 1/(q_1 + \cdots))$ with $q_j \in \mathbf{Z}$, $|q_j| \geq C_0$, provided that $C_0 > 0$ is sufficiently large. In particular, the spectrum is a Cantor set of measure 0. Our results are also valid for certain perturbations of Harper's operator and an application to the periodic magnetic Schrödinger operator on \mathbf{R}^2 is given.

ABONNEMENT 1990

Tarif public (Bulletin et Mémoires): 780 FF (TTC) pour la France, 990 FF pour l'étranger.

Membres de la S.M.F.: 200 FF (Bulletin), 320 FF (Bulletin et Mémoires)

DISTRIBUTION

Société Mathématique de France, B.P. 126-05, 75226 Paris Cedex 05

Gauthier-Villars, CDR, 11 rue Gossin, 92543 Montrouge Cedex

Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05

⁽¹⁾ extrait d'un exposé fait à Orsay, le 5 mars 1990, en hommage à Georges Poitou. Un exposé de John Coates était ensuite consacré au théorème de dualité de Poitou-Tate et à ses prolongements.

⁽²⁾ Ceci doit être nuancé. John Coates a fait observer que le théorème de dualité de Poitou-Tate a été obtenu indépendamment par l'un et l'autre. Voir à ce sujet la communication de J. Tate au Congrès International des mathématiciens de Stockholm (1962), p. 291 des Proceedings.

Léon MOTCHANE

Louis MICHEL (I.H.E.S.)

Monsieur Léon Motchane est décédé à Paris le 17 janvier dernier dans sa quatre-vingt-dixième année. Engagé volontaire et résistant pendant la guerre, cet homme d'action hors du commun a fondé dans notre pays un des plus célèbres instituts de recherche fondamentale : l'IHES de Bures-sur-Yyette.

Né le 19 juin 1900 à Saint-Pétersbourg dans une famille russe et helvétique, il v passa toute son enfance et son adolescence. A la révolution, il participe activement à une organisation de lycéens et jeunes étudiants qui essayent de pallier aux difficultés et désorganisations dont souffre la population. En 1918, il suit sa mère et son frère aîné en Suisse où il poursuit ses études, tout en travaillant à temps partiel comme menuisier: son père peut rejoindre la famille l'année suivante et Léon Motchane devient pour un an assistant de physique à l'université de Lausanne. Mais il doit aider ses parents; dès 1921 il travaille à Berlin comme imprésario d'un artiste puis dans les assurances. En 1924 il s'établit définitivement en France et obtiendra sa naturalisation dans les années trente. Il devint administrateur de diverses sociétés, étendant ses domaines d'activité et débordant du cadre de la métropole. Marié, il a deux fils : Didier, ancien député européen et actuellement conseiller maître à la Cour des Comptes, Jean-Loup, professeur de physique à l'université de Paris-VII. Cet homme d'action sait se distraire (bon pianiste et joueur d'échecs), mais il n'a jamais oublié sa passion pour les mathématiques : il publie alors son premier mémoire et devient membre de la SMF en 1933. Il aime surtout à penser l'avenir.

La guerre éclate : il est engagé volontaire. Versé dans l'artillerie, il devient élève officier à l'école d'application de Fontainebleau. Nommé aspirant et démobilisé l'été quarante, il entre tout de suite dans la résistance; son activité y est surtout de renseignement, mais il sera aussi blessé dans

l'action le 13 août 1944. Ses services seront reconnus par l'attribution de la Croix de guerre et de la Médaille de la Résistance avec rosette. Il avait aussi collaboré aux célèbres "Editions de Minuit", où il publia clandestinement, sous le pseudonyme de Thimerais, deux opuscules de réflexion sociologique : "La pensée patiente" en juillet 1943 et "Eléments de doctrine" en février 1944. Ses amis le retrouvent pleinement dans cette introduction: "La pensée, pressée par la fatigue des jours vécus, va vers l'immédiat. Les obstacles au relèvement d'après guerre paraissent lointains : ils sont présents déjà pourtant et il faut y songer. Les difficultés ne pourront être vaincues que par la pensée patiente. Il ne faut pas que le souci quotidien nous fasse oublier la continuité de la vie, qui rend l'effort d'aujourd'hui responsable du résultat de demain". Sa confiance dans l'avenir se base surtout sur l'évidente nécessité de la justice sociale et de la solidarité.

Après la guerre tout en reprenant ses diverses activités de conseiller économique, il passe une thèse (doctorat d'état en mathématiques) et publie des notes à l'Académie des Sciences en physique théorique. Il se lie avec des scientifiques très connus : Paul Montel, Joseph Pérès, Francis Perrin, Robert Oppenheimer. Ils seront là, pour l'appuyer, à la création de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques en 1958, ainsi que des industriels: Jacques Ballet, Pierre Dreyfus, André Grandpierre, Maurice Ponte, Arnaud de Vogüe... suivis de bien d'autres. à qui il a su faire partager sa foi dans cet acte audacieux, jamais osé en France depuis la fondation de l'Institut Pasteur au siècle dernier! L'organisation de l'IHES, avec l'entière indépendance scientifique des professeurs permanents vis-à-vis du conseil d'administration qui établit le budget, est actuellement celle qui fut pensée il y a trente ans par ce visionnaire. Il s'inspira en partie du fameux "Institute for Advanced Study" de Princeton, fondé en 1930 et dirigé alors par

Oppenheimer, en prévoyant dans les statuts la création de sections de mathématiques et physique théorique; mais la troisième section en différait : à l'IHES ce sera la méthodologie des sciences humaines.

Léon Motchane fut, jusqu'à sa retraite en 1971. le premier directeur de l'IHES. Les débuts furent des plus modestes, dans deux pièces de la fondation Thiers à Paris : quatre personnes, le directeur et sa secrétaire, Annie Rolland, qui sera secrétaire générale, puis deviendra Madame Motchane; deux professeurs, mathématiciens célèbres : Jean Dieudonné et Alexander Grothendieck, Celui-ci va publier un nouveau monument des mathématiques : les "Eléments de géométrie algébrique" dans la revue que lance dès 1959 le directeur. "Les Publications Mathématiques de l'IHES" sont devenues l'une des meilleures revues de ce domaine scientifique. En 1962 c'est l'établissement dans le site actuel : le Bois-Marie, parc de douze hectares sis à Bures-sur-Yvette, et la création de la section de physique théorique. L'IHES ne vécut que de mécénat pendant quelques années. Léon Motchane avait même obtenu en 1965 la création d'une fondation aux Etats-Unis : "The American Committee for the Institute for Advanced Study - Europe, Inc.". Mais, comme pour tous les instituts similaires dans le monde, ce ne pouvait être une solution définitive. Son fondateur obtint en 1965, du premier ministre Georges Pompidou, un engagement de l'Etat pour soutenir l'IHES qui est maintenant une fondation reconnue d'utilité publique, dont le budget est assuré pour les deux tiers par la Direction de la Recherche au Ministère de l'Education Nationale, pour un quart par des organismes de recherches d'une douzaine de pays et le reste est encore du mécénat, mais tous ces engagements ne sont qu'à moyen ou court terme. Au cours de son histoire, des legs sollicités par le fondateur ont permis certains investissements.

A sa retraite, pour laisser le champ libre à son successeur, il se retire avec son épouse quelques années à Aix-en-Provence, avant de s'installer à Paris. Il reprit d'abord ses travaux de mathématiques; comme le dit chaleureusement un de ses amis : le fondateur de l'orchestre voulait, par amour, tenir son pupitre dans la fosse. Mais il devint bientôt membre et vice-président du Conseil d'Administration de l'IHES puis, en 1978, Président d'honneur. Pour les immenses services rendus au pays et à la science, ses mérites furent reconnus, mais bien tardivement, par la nomination au grade de chevalier de la Légion d'honneur.

L'IHES joue dans la science le rôle important que lui avait prévu son fondateur. Actuellement il est administré par son troisième directeur, il vient de recruter son douzième professeur permanent (pour six postes simultanés). Plus de mille mathématiciens et physiciens du monde entier ont benéficié de son hospitalité et de son atmosphère exceptionnelle. C'est l'endroit au monde où les contacts entre mathématiciens et physiciens sont les plus profonds. Le mathématicien René Thom, professeur honoraire, veille aussi sur la troisième section. Par sa pertinence de vue, par son immense dévouement à cette noble cause. Léon Motchane put acquérir l'autorité nécessaire et communiquer l'enthousiasme indispensable pour créer et développer cet institut. Il lui fallut aussi un optimisme inébranlable, aidé par sa grande habileté manœuvrière, elle-même assise sur une profonde réflexion et une connaissance développée du monde scientifique et des milieux économiques. En plus de son œuvre, cet homme exceptionnel laisse à ses amis un souvenir impérissable : sa silhouette aristocratique, son charme allié à une certaine sévérité dont il savait se départir dans des instants de fraternelle familiarité, sa grande culture, sa générosité et sa droiture.

COMPTE RENDU DE LA SESSION D'AUTOMNE 1989 DE LA COMMISSION 03 DU CNRS (11-12-13 décembre 1989)

Colette MOEGLIN (C.N.R.S.)

Compte rendu d'intersession

Prum rend compte du suivi des dossiers depuis juillet :

Promotions CR2 → CR1 : nous avons obtenu un 16e poste, dont a bénéficié la candidate classée 16e, S. Copoletta. La seule promotion au sein des DR est celle de Lohoué (DR1). Il n'y a eu aucune promotion DR1 → DR0 (malgré la demande pressante de la commission).

Concours: Les résultats des jurys d'admission des concours ont été conformes à ceux des jurys d'admissibilités au niveau chargés de recherches: nous avons rempli les postes aux concours CR (20 CR2 et 2 CR1), et nous avons obtenu, tenant compte de la très forte pression, un 5e poste au concours DR2: outre Lascar, Pham, Laumon et Kassel, D. Cioranescu a été promue DR2.

Détachements au CNRS : Daniel Lazard (DR1), Yves Hellgouarch (DR2), Philippe Artzner (DR2), Roland Gillard (CR1), Gilles Damanne (CR1), André Voutier (CR1), Hélène Gispert (CR2).

Les recrutements ultérieurs devront être faits pour moitié avec affectation en province, la direction du CNRS menaçant de diminuer le nombre de postes ouverts au concours chargé s'il n'en est pas ainsi. Cette année il y a 20 postes CR2, 3 CR1 dont un poste rose (i.e. réservé à l'accueil d'étrangers); alors qu'il y a une vingtaine de départs du CNRS (en général pour l'Université), seuls 6 démissions ont été enregistrées à temps ce qui veut donc dire que les départs des chercheurs relevant de la Commission 03 fourniront au département MPB une quinzaine de détachements, mais aussi que le nombre de chercheurs relevant de la Commission 03 n'augmentera pas, encore une fois cette année, malgré les créations de postes.

Il y a 10 postes ouverts au concours DR2, dont 1 sera réservé pour augmenter le niveau du poste rose (cf. ci-dessus); ce doublement du nombre de postes est le résultat des négociations sur la revalorisation des carrières et est compris par la direction du CNRS comme étant essentiellement des promotions de chargés de recherches.

La règle des 3 candidatures devrait être supprimée avant l'ouverture des concours pour les CR2; elle est remplacée par une limite d'âge, 36 ans cette année, (cette limite s'abaissera les années suivantes avec des exceptions pour tenir compte du service national et de plus de trois maternités pour les femmes).

Toujours dans le but d'améliorer les carrières au CNRS (qui en avaient bien besoin), au moins cette annèe, il n'y aura pas de barrage budgétaire pour les promotions CR1 et il y aura 3 promotions DR1, une quatrième étant retenue pour augmenter le niveau du poste rose (cf. ci-dessus) ce qui permettra d'accueillir, tous les ans, des étrangers de haut niveau suivant le fonctionnement usuel des postes roses. Ce poste sera le deuxième poste rose de la Commission.

En ce qui concerne les créations d'équipes, le CNRS souhaite faire porter son effort, qui, pour raison budgétaire, est limité, sur la province. En particulier, le bilan global association-désassociation ne doit pas bénéficier à la région parisienne et l'heure n'est pas au bilan très positif; mais on nous assure qu'il n'y aura pas d'arithmétique stricte pour les mathématiques.

Restructuration du CNRS et redéploiement CNRS/Education Nationale

Thoulouze indique que le nombre des sections du CNRS devrait être réduit pour passer de 45 à environ 40. Une trentaine de sections devraient être interdisciplinaires, mais ces changements ne devraient guère toucher la Commission 03. Sur ce programme ainsi que sur le renouvellement des membres des Commissions (qui devait intervenir pour

le printemps 91) le CNRS a pris du retard. La réflexion est largement ouverte mais les décisions seront prises "en haut".

Barsky demande à Giraud une exégèse de la circulaire Courtillot. Celle-ci concerne la politique contractuelle Etat/établissements universitaires de l'Île-de-France (à titre expérimental). Donneront lieu à contrat les formations associées, les formations doctorales. les jeunes équipes et les services communs (bibliothèques,...). On entend par formation doctorale un DEA et les laboratoires d'accueil de ses étudiants en vue d'une thèse. La notion de jeune équipe est introduite pour tenir compte de nouveaux recrutements de professeurs dans une université (cela doit être un encouragement à améliorer le niveau des recrutements). En particulier, la notion d'équipes recommandées disparaît pour les Mathématiques dans cette circulaire.

Deheuvels se demande si la conséquence de cette circulaire ne va pas être "hors du CNRS point de salut". Girand répond qu'au travers des formations doctorales le financement peut être important. Plusieurs intervenants sont peu satisfaits de ce financement par les formations doctorales : Gallouet remarque qu'être laboratoire d'accueil d'un DEA est extrêmement limitatif: il a quatre étudiants venant de quatre DEA différents. Deheuvels trouve surprenant que le financement de la recherche dépende de l'agrément d'un DEA, qui se fait sur des critères différents et dépend en particulier de la présence d'étudiants. Giraud a conscience que cette circulaire est inadaptée à un certain nombre (petit) de cas, mais il ne voit pas de difficultés à trouver quand même un financement (il prend l'exemple de l'IHES qui n'entre dans aucune des rubriques de la circulaire). Deheuvels pense qu'un texte qui dépend de la bonne volonté de ceux qui l'anpliquent est mauvais.

Grigis demande quelle politique pour l'agrément des DEA sera suivie à l'avenir. Giraud répond que la prochaine campagne sera plus malthusienne. Actuellement il y a 46 ou 47 DEA habilités, certains avec des flux très faibles; cela correspond à l'espoir que, dans la situation d'expansion actuelle, ces flux vont augmenter. Si cette augmenta-

tion n'intervient pas, ces DEA risquent d'être supprimés.

Ramis revient sur la politique de financement de la recherche par l'Education Nationale; le problème de fond reste inchangé au cours du temps, l'évaluation du CNRS reste la seule évaluation scientifique fiable. Par exemple, le rapport du Comité National d'Evaluation n'a pas eu d'écho sur la répartition des moyens au sein de l'université Louis Pasteur (Strasbourg). Thoulouze rappelle que le Comité National est celui de la Recherche Scientifique et non celui du CNRS et que ses avis sur les laboratoires peuvent servir même en l'absence d'association. Prum demande pourquoi certains membres de la direction du CNRS ont dissuadé certaines équipes de faire un dossier d'association, ce qui leur aurait permis d'être examinées. Duflo se demande si l'extension de l'application de cette circulaire en province n'augmentera pas la pression pour obtenir des associations symboliques, i.e. sans argent. Mérindol dit qu'il est difficile de voir quel changement se profile dans la nouvelle politique de financement de la recherche par l'EN. Il lui semble que la deuxième et la troisième rubriques de la circulaire Courtillot sont des pavillons de complaisance. Par exemple, combien de temps une jeune équipe restera-t-elle jeune? Il reprend les remarques de Gallouet et Ramis. Il ne comprend pas quel travail incombe exactement au Comité National, le ministère de l'EN renonçant à évaluer. D'autre part, il est regrettable de tester une nouvelle politique sur l'Ile-de-France, la situation en province et en Ile-de-France étant assez différente. Si le CNRS n'augmente pas le nombre d'associations, voire le diminue, certaines équipes ne seront pas prises en compte par le CNRS mais uniquement par l'Université et cette prise en compte ne devrait pas être attachée à la formation doctorale.

Giraud répond qu'il y a un problème d'harmonisation entre les deux ministères, qu'il est sensible à la remarque de Gallouet et que l'évaluation devrait être plus sérieuse. Le rôle d'évaluation du Comité National apparaît peu clair; doit-il aussi évaluer l'activité des universitaires pour lesquels on ne dispose en général de rapport (Colin) et com-

ment tenir compte des aspects de la recherche universitaire liée à l'enseignement (Ramis). Barsky pose le problème de l'origine du financement. Giraud répond qu'un contrat est signé avec chaque université et ensuite l'université garde une large autonomie.

Thoulouze rappelle que le CNRS a sa propre politique nationale et lie le niveau d'intervention du CNRS en Mathématiques au pourcentage des chercheurs CNRS parmi les mathématiciens. Il est noté que cette position fige la participation du CNRS et est très dangereuse vu l'évolution actuelle du Ministère, dont le soutien est davantage conditionné par celui du CNRS.

Thoulouze ne souhaite pas une augmentation du nombre des laboratoires mais une augmentation de leurs moyens. L'effort doit porter sur la province, éventuellement il faudrait un regroupement des laboratoires à Paris. Le budget augmente globalement de 15 pour cent, mais de grosses sommes sont gelées pour être éventuellement versées aux centres de calculs qui souhaitent combattre leur perte d'utilisateurs en abaissant les prix. Pour Thoulouze, la priorité de la politique concernant les centres de calculs devraient être de maîtriser les coûts. Actuellement, le CNRS et la rue Dutot leur versent 600 millions de francs.

Prum regrette que l'on ait annoncé l'augmentation de 15 pour cent du budget des Mathématiques au CNRS et que cela ne semble pas du tout acquis. Thoulouze et Ferrier confirment que l'augmentation sera vraisemblablement inférieure. Ils chercheront à favoriser l'ouverture des Mathématiques et commenceront à instituer un système d'entretiens budgétaires avec les Directeurs des laboratoires pour suivre où vont les subventions. Varopoulos se demande si la politique consiste toujours à demander aux équipes de ne pas faire figurer parmi leurs membres ceux qui ne font plus de recherches, ce qui est confirmé par Ferrier.

Motion: La Commission 03 note avec satisfaction le nombre de postes mis au concours: 20 CR2, 2 CR1 et 9 DR2. Il convient cependant de noter qu'il y a eu cette année plus de 20 départs en maths vers l'Université: le taux réel d'accroissement du

nombre de mathématiciens au CNRS reste inférieur à 1 % par an.

En ce qui concerne les postes CR2, la Commission réaffirme sa volonté d'en attribuer une partie à de jeunes chercheurs très prometteurs, pouvant éventuellement ne pas avoir encore passé leur thèse. Si les grands centres parisiens ont fourni l'essentiel du lot l'an passé, la Commission 03 espère recruter également cette année des jeunes issus des Universités de province ou étrangères.

La Commission réaffirme sa politique de fléchage de postes en province, que ce soit pour des candidats formés à Paris ou en Province. Ceci correspond par ailleurs à l'obligation qui nous est faite par la Direction du CNRS de recruter au moins 50 % en province.

Le recrutement au niveau CR1 doit correspondre à un profil plus mûr, de chercheurs ayant un niveau affirmé et quelques publications internationales.

La Commission rappelle que la "règle des 3 candidatures" est abolie (dans sa forme précédente).

La Commission 03 souhaite mener à l'aide des postes DR2 dont elle dispose une politique visant

- à reconnaître la qualité scientifique remarquable d'un certain nombre de CR1 méritant amplement le grade de DR, certains depuis plusieurs années. Elle souhaite rajeunir l'âge moyen de promotion CR1-DR2.
- A renforcer certains pôles en province.
 Pour cela, elle envisage de recruter des candidats extérieurs.

La Commission rappelle enfin que les candidats peuvent poser leur candidature sur plusieurs équipes. La Commission choisira alors l'affectation,

Examen des équipes

La Commission examine les équipes suivantes, ainsi que les chercheurs qui y sont rattachés: URA 168 (Nice, Pham); URA 169 (X, Demazure remplacé par J.-P. Bourguignon); URA 243 (Lyon, Pavé, rattachement secondaire); URA 397 (Grenoble, Della

Dora. Rattachement secondaire en 03 de l' URA "Modélisation et calcul"); URA 751 (Brasselet, Lille. Rattachement à cette URA de l'équipe d'Analyse de Cœuré); URA 761 (Vaillant, Paris VI); URA 762 (Broué, ENS); URA 1169 (Siebenmann, Orsay. Rattachement à cette URA de l'équipe de Adrien Douady); URA 1321 (Deheuvels, Paris VI); URA 1322 (Torasso, Poitiers); URA 1323 (Prum, Paris V); URA 1376 (Lecarme, Nice).

La Commission se prononce par ailleurs favorablement sur les changements de directeurs de l'URA 749, Ivar Ekeland est remplacé par Yves Meyer et de l'URA 743 au 1 octobre 1990, Jean Bretagnolle sera remplacé par D. Dacunha-Castelle.

Examen des équipes en renouvellement et des nouvelles demandes d'URA

La Commission vote sur la prise en considération des demandes de renouvellement suivantes: URA 1 (Schiffman, Strasbourg): URA 212 (Karoubi, Paris VII); URA 213 (Hervé, Paris VI); URA 399 (Metz, Roger remplacé par J. Saint Jean Paulin; URA 744 (Puig-Enguehard, Paris VII); URA 747 (Connes, Paris VI); URA 754 (Pisier, Paris VI); URA 756 (Nedelec, Polytechnique); URA 757 (Peyrière, Orsay); URA 760 (Saut, Orsay); URA 763 (Philippon, Paris VI); URA 950 (Gérard Varet : le rattachement secondaire en 03 de cette équipe rattachée principalement en 36 est rejeté); URA 1102 (Cortet-Flato, Dijon. La Commission invite, pour des raisons de cohérence scientifique et géographique l'URA Cortet-Flato à préparer un regroupement avec l'URA 755, Moussu-Roussarie, dans les 2 ans à venir); URA 1204 (Thomas, Pau); UPR 318 (Rashed, Paris XIII, ppl en 45); UPR 7061 (Soffer, Marseille, ppl en 4)

La Commission prend en considération les nouvelles demandes suivantes :

Bouleau (ENPC-Cachan); Cousot (Polytechnique, ppl 08); Dehornoy (Caen. Tout en regrettant qu'une création autonome ne semble pas possible, la Commission vote le principe du rattachement de cette équipe à l'URA 305, Métivier, Rennes); Dufour (Montpellier); Joussot-Dubien (Bordeaux. La Commission reiette le rattachement secondaire à la 03

de cette équipe rattachée principalement à la 09); Matteï (Toulouse); Nicolas (Lyon) : Unterberger (Reims); Choquet Bruhat (Collège de France. Cette équipe était rattachée à la 04, qui l'a désassociée. La Commission rejette son rattachement principal en 03).

La Commission classe alors ainsi les demandes : 1) Karoubi, Enguehard-Puig, Cortet, 4) Connes, Hervé, Nedelec, Peyrière, Philippon, Pisier, Roger, Saut, Schiffmann, Thomas, 14) Matteï, 15) Bouleau, 16) Dufour, 17) Unterberger, 18) Nicolas.

La Commission 03 souligne l'importance primordiale de l'association de l'équipe Bouleau-Hirsch : l'implantation du CNRS dans l'ENS-Cachan et dans l'Ecole des Ponts est scientifiquement essentielle, car elle ouvre l'accès à une masse d'étudiants de qualité et conforte l'activité scientifique dans l'une et l'autre Ecoles.

La Commission 03 marque son attachement total à l'association de l'équipe Matteï : l'université de Toulouse est l'une des grosses universités de province, elle est le lieu d'une activité intense en mathématiques pures. Le renouveau et le dynamisme actuel (recherche, recrutement, formation) autour de Matteï se doivent d'être reconnus par le CNRS.

La Commission prend en considération les GDR Lazard (Paris VI. La Commission 03 demande à ce que le Calcul Formel continue à bénéficier d'une structure de soutien spécifique au CNRS), Perrin (rattachement secondaire en 03 du GDR Perrin créé par la section 08 pour gérer le PRC Maths-Infos. Elle regrette que le GDR Calcul Formel disparaisse comme entité), Dazord (Lyon. La situation des composantes du GDR sera reconsidérée l'an prochain), Sabatier, Fouvry, Boccara, Teissier, Grossmann, Temam, Lachaud, Bennequin et les SDI Crouzeix (Clermont), Fiorot (Lille, avis défavorable), Loi (ENS), Giusti (Polytechnique), Unterberger (Reims) et Nicolas (Lyon).

Situation à Jussieu. — La Commission 03 constate que les associations au CNRS sur Jussieu n'y permettent pas une bonne visibilité des Mathématiques. Le calendrier de l'examen des équipes ne permettant pas d'avoir une vue d'ensemble des problèmes,

la Commission constitue donc une Commission, composée de Nedelec, Barsky et Kassel, afin qu'elle étudie l'implantation du CNRS en Mathématiques sur le campus de Jussieu, qu'elle prenne contact avec tous les responsables d'équipes de recherche en Mathématiques de ce campus et qu'elle évalue quelles évolutions sont souhaitables et réalisables.

Cette Commission devra remettre un rapport sur la situation actuelle et apporter des suggestions pour améliorer la situation des Mathématiques sur Paris-centre pour la prochaine session du Comité National (Printemps 90).

Motion: La Commission 03 souhaite fortement que tous les chercheurs étrangers ou venant du système privé bénéficient d'une reconstitution de carrière sérieuse dans les plus brefs délais.

THP

La Commission remercie pour le travail exceptionnel qu'ils ont accompli Nicole El Karoui, Bernard Teissier et Jean-Pierre Aubin. Elle vote la motion suivante :

La Commission de Mathématiques du CNRS considère que la création d'un Institut à thèmes en France est une priorité scientifique dans la mesure où ce rôle ne peut être joué par les établissements ou fondations existants et étant entendu que cet Institut aura une mission nationale. A court terme, on devrait pouvoir y héberger (sous le contrôle scientifique d'un comité de spécialistes restreint mais représentatif) une quarantaine de chercheurs pour y travailler autour de deux

spécialités retenues pour l'année.

Trois buts v seraient poursuivis : la promotion de la recherche doctorale, l'attraction de jeunes chercheurs vers des domaines prometteurs de la recherche afin qu'ils essaiment vigoureusement (en particulier la frontière et les transferts entre Mathématiques et Physique théorique) et enfin la participation de la France à un réseau européen suffisamment attractif pour pouvoir exiger l'excellence. Les enseignants et chercheurs invités à l'Institut animeraient des séminaires et donneraient des cours portant sur des sujets en plein développement. On recherchera une collaboration étroite avec les Universités et le CNRS pour que les moyens additionnels qu'un tel Institut requerra profitent équitablement à la communauté. Il s'agira par exemple d'accueillir des enseignants en année sabbatique; on encouragera d'autre part le recrutement de "postdocs" pour deux ans afin que de jeunes chercheurs puissent suivre dans leurs universités d'origine les spécialistes avec lesquels ils auront collaboré pendant un an et poursuivent au sein de celles-ci les recherches entamées à l'Institut.

Années spéciales

La Commission prend connaissance du rapport sur l'Année Spéciale 1987-88 (Puel, Bardos). Elle vote sa reconnaissance à la qualité scientifique du travail. Après avoir vu le projet déposé par celui-ci, elle propose que l'Année Spéciale 1990-91 soit confiée à Didier Robert (méthodes semi-classiques).

Conseil de Département MPB - 16 janvier 1990

Notes de Bernard PRUM

Le débat a essentiellement porté sur l'équipe de Vaillant et la demande faite par N. Bouleau et F. Hirsch. Pour le reste, Ferrier s'est déclaré impressionné par le niveau des équipes en renouvellement; il a souhaité l'association des équipes Matteï (Toulouse) et Molino-Dofour (Montpellier) et la réassociation de l'équipe Cortet-Flato

(Dijon), amenée à fusionner avec celle de Moussu-Roussarie.

En ce qui concerne l'URA 761 (Vaillant), Ferrier annonce qu'en accord avec Garnier, président de Paris 6, il souhaite rompre le contrat à mi-parcours et rattacher Vaillant et son équipe à l'URA 213 (Peskine), en lui réservant une ligne budgétaire spécifique.

Prum s'élève vivement contre cette pratique : il eut été facile de soumettre le problème à la Commission il y a un mois; si l'idée est nouvelle, la DS pourrait attendre les conclusions de la sous-commission Nedelec-Barsky-Kassel ou même la prochaine session d'automne. Une fois de plus, la DS a pris une décision sans avis de la Commission et elle hâte son application. Par ailleurs, Prum souligne la précarité que cela confère aux URA: les Directions du CNRS et de l'Université usent de leur Droit pour dissoudre une unité sans avis ni de celle ci, ni du Comité National. Il y a là un précédent dangeureux.

Pour la demande Bouleau-Hirsch, Ferrier préconise la formule de Groupement Scientifique (SDI): l'URA renferme trop le système sur lui-même, alors qu'il devrait fonctionner avec l'ensemble des probas parisiennes. Prum explique que la C03 l'a classée à la fois pour des raisons de niveau scientifique et pour des raisons de politique scientifique. Giraud soutient pleinement cette opération et dit ne pas comprendre les raisons opposées: les objectifs scientifiques et l'implantation dans

deux Grandes Ecoles doivent passer avant d'étroites considérations Paris-Province. Malgrange souhaite que le classement de la Commission soit respecté, car il ne voit aucune raison pour qu'il soit modifié.

A propos du PRC maths-informatique, Ferrier explique que, pour MPB, le GDR fourre-tout du GDR englobant aujourd'hui ce PRC est un kaléidoscope inintéressant, dans lequel il ne faut pas investir. Reste le problème du sauvetage du calcul formel. On ne sait pas sous quelle forme, il faut attendre l'évolution en SPI. L'opération Giusti (SDI) est une action ponctuelle en marge de ce problème. Giraud et Prum insistent sur le fait que MPB doit reprendre l'initiative.

Le Conseil Scientifique du CNRS (8 février) suit exactement les propositions faites par la Direction Scientifique au Département : réassociation des URA Karoubi et Cortet, associations nouvelles de Matteï et Dufour. Proposition de SDI à Enguehard-Puig et Bouleau-Hirsch.

LIVRES __

PRÉSENTATION DES PUBLICATIONS I.R.M.A. STRASBOURG

L'I.R.M.A. de Strasbourg publie depuis plusieurs années des livres de mathématiques.

Cette collection d'ouvrages (cours de 3e cycle, comptes rendus de colloques, monographies) est en vente à la Bibliothèque du Département de Mathématique, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex.

TARIFS DE VENTE (frais de port inclus) :

Andreotti, A. — Etude de géométrie algébrique, 1977	120 F
AUDIN, M. — Opérations hamiltoniennes de tores sur les variétés symplectiques	
(quelques méthodes topologiques), 1990	90 F
GODBILLON, C. — Feuilletages, Vol. 1, 1985–1986	120 F
GODBILLON, C. — Feuilletages, Vol. 2, 1985–1986	120 F
GODBILLON, C. — Systèmes dynamiques sur les surfaces	90 F
SIBUYA, Y., SPERBER, S. — Power series solutions of algebraic differential	
equations, 1980	90 F
URA, T. — Eléments de la théorie des systèmes dynamiques locaux, 1979	90 F
WASOW. — Topics in the theory of linear ordinary differential equations having	
singularities with repect to a parameter, 1979	120 F
Colloque franco-japonais, Vol. 1	120 F
Colloque franco-japonais, Vol. 2	120 F
Colloque franco-japonais, Vol. 3 (sous presse).	

QUELQUES INFORMATIONS PRATIQUES SUR LE C.I.M.P.A. ET SES ÉCOLES

Jean-Michel LEMAIRE (Délégué Général du CIMPA)

Qu'est-ce qu'une Ecole du CIMPA?

Une Ecole du CIMPA peut être :

- soit une introduction à un domaine de recherche à la manière d'un DEA concentré, s'adressant à des enseignantschercheurs débutants, ou confirmés et désireux de mettre à jour leurs connaissances ou de s'initier à un domaine nouveau. La durée d'une telle Ecole est normalement de 3 à 4 semaines.
- soit un stage de formation à des techniques avancées, s'adressant autant à des ingénieurs mathématiciens ou informaticiens qu'à des chercheurs. La durée peut être plus courte (2 à 3 semaines, voire une seule).

Une Ecole peut également combiner ces deux aspects et allier formation théorique et apprentissage de techniques avancées.

Actuellement, les ressources du CIMPA lui permettent d'organiser trois ou quatre Ecoles chaque année, dont une d'Informatique : cette dernière est organisée en collaboration avec l'I.N.R.I.A. et l'Ecole Supérieure des Sciences Informatique (ESSI) de l'Université de Nice Sophia-Antipolis, sur le site de Sophia-Antipolis, et bénéficie ainsi d'un environnement technologique et de matériels de pointe.

Les Ecoles du CIMPA sont l'objet de conventions avec le Ministère de l'Education Nationale (DAGIC et DRED), avec le Ministère des Affaires Etrangères (DCSTD), et de contrats avec l'UNESCO.

A qui s'adresse-t-elle?

Conformément à la vocation du CIMPA, et aux accords qui lient le CIMPA à l'UNESCO, une Ecole du CIMPA s'adresse en priorité aux mathématiciens (au sens très large, des mathématiques pures et appliquées à l'informatique fondamentale et à la physique théorique), enseignants, chercheurs ou ingénieurs exerçant dans les pays en développement.

La finalité des Ecoles et stages du CIMPA

n'est pas seulement de diffuser des connaissances, mais de faciliter les contacts scientifiques entre stagiaires et conférenciers, et entre stagiaires eux-mêmes. Dans cette mesure, la participation de stagiaires français ou d'autres pays industrialisés est vivement souhaitée. Jusqu'ici, le CIMPA ne pouvait leur accorder de soutien financier sur ses fonds propres, mais à partir de 1990, la Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales (DRED) du Ministère de l'Education Nationale accordera une subvention spécifique au CIMPA destinée à subventionner le séjour d'un certain nombre de jeunes chercheurs relevant de formations doctorales françaises.

Afin de créer les conditions d'un meilleur contact entre les participants, le nombre idéal de stagiaires se situe entre 20 et 40. Pour la même raison, il convient que les conférenciers principaux ne soient pas trop nombreux et que leurs interventions soient suffisamment longues (une semaine en moyenne).

Pourquoi participer à une Ecole du CIMPA ?

C'est une occasion exceptionnelle de rencontrer en peu de temps un large échantillon de mathématiciens des pays en développement qui travaillent dans une discipline donnée : cet échantillon ne se limite pas aux pays francophones d'Afrique, mais couvre le monde entier : le CIMPA a déjà accueilli des représentants de 80 nationalités différentes.

En outre, la sélection des candidats est devenue sévère : chaque Ecole suscite une centaine de candidatures pour une trentaine de places; les candidats retenus sont jeunes, souvent brillants et toujours très motivés.

Enfin, l'ambiance des Ecoles est à la fois passionnée et détendue, en un mot "cimpatique"!

Peut-on organiser une Ecole du CIMPA ailleurs qu'au siège?

Le CIMPA a déjà organisé plusieurs Ecoles en dehors de Nice, en France et dans des pays en développement.

La première condition pour organiser une telle Ecole est d'ordre pratique : si la gestion matérielle des Ecoles au siège est entièrement prise en charge par le CIMPA, celle d'une Ecole hors siège doit être assurée par l'organisme partenaire.

La tenue d'une Ecole hors siège en France ou dans un autre pays industrialisé doit rester exceptionnelle : elle n'est envisageable que si elle est proposée par une équipe importante qui s'engage à prendre en charge toute l'organisation scientifique et matérielle ainsi qu'une part importante du budget de fonctionnement (au moins la moitié). Le CIMPA n'assure alors que le secrétariat international, le financement des bourses de voyage et de séjour des stagiaires, et une participation aux frais de fonctionnement.

En revanche, le CIMPA est très disposé à étudier l'organisation d'Ecoles dans des pays en développement, sur proposition de l'institution hôte : deux ont déjà eu lieu avec succès en Tunisie (Monastir 1986), au Nigéria (Ibadan 1987) et une troisième doit se tenir prochainement en Egypte (Assouan, janvier 1990). Une formule intéressante est de prévoir une telle Ecole durant les semaines précédant un colloque international que le partenaire local souhaite organiser.

La mise en œuvre d'une Ecole hors siège donne lieu à l'établissement d'un contrat, signé entre le CIMPA et l'organisme partenaire, et approuvé si possible par le gouvernement du pays hôte.

Comment proposer un projet d'Ecole au CIMPA?

Au moins deux ans à l'avance, il convient d'adresser au CIMPA un avant-projet, comportant au minimum :

- a) le titre de l'Ecole et un programme indicatif d'une vingtaine de lignes;
- b) le nom du responsable scientifique et celui de quelques personnalités scientifiques intéressées, de différents pays de préférence;
- c) les objectifs de l'Ecole et si possible une indication des pays du tiers-monde particulièrement visés;

- d) le matériel nécessaire (s'il y a lieu);
- e) la date préférée, la durée, éventuellement le lieu si celui-ci n'est pas Nice.

Le projet sera soumis pour avis au Conseil Scientifique et pour décision au Conseil d'Administration.

Si le projet est adopté, le responsable scientifique élaborera avec les responsables du CIMPA le programme détaillé et le budget prévisionnel; la première annonce de l'Ecole devra être diffusée au moins un an à l'avance, afin de permettre aux stagiaires de solliciter à temps les organismes susceptibles de leur accorder un soutien financier.

L'emploi du temps comporte normalement 4 à 6 heures de cours et d'exercices par jour du lundi au vendredi : il est bon de prévoir une ou deux après-midis libres pour les travaux personnels, la recherche de documentation ... ou la détente. Il faut aussi réserver du temps pour permettre aux stagiaires qui le souhaitent de présenter leurs travaux. La dernière semaine peut être consacrée à un petit colloque, dans la limite du budget disponible, ou s'articuler avec un colloque plus important organisé par ailleurs : ainsi, il est envisageable de terminer une Ecole à Nice par une semaine au CIRM à laquelle participeraient les stagiaires.

Le comité scientifique de l'Ecole et les responsables du CIMPA se réunissent au plus tard trois mois avant le début de l'Ecole pour sélectionner les candidats sur dossier

Quel est le budget d'une Ecole du CIMPA ?

Le budget de fonctionnement d'une Ecole à Nice est actuellement de 18 000 à 20 000 FF par semaine, comprenant :

- les honoraires des conférenciers (rétribués en H.C. universitaires : 258 F/h, bientôt plus...)
- les missions des conférenciers (voyage en avion tarif excursion ou SNCF, per diem 350 F/j.)
- les frais de reprographie, de documentation, éventuellement de maintenance du matériel;
 - les activités sociales.

Ce montant ne comprend ni les bourses de voyage et de séjour attribuées par le CIMPA aux stagiaires, ni les frais de publicité et de secrétariat couverts par le budget de fonctionnement général.

Voici la liste des Ecoles organisées récemment par le CIMPA (depuis 1986) et en cours de préparation

1986 Eté I (INRIA) : Informatique fondamentale; Nice; P. Flajolet

Eté II : Mathématiques appliquées à la mécanique; Monastir (Tunisie);

M. JAOUA, P. GRISVARD

Eté III : Analyse Fonctionnelle et ses applications; Nice; B. Szokefalvi-

NAGY, H. HOGBE-NLEND, J. ESTERLE

1987 Eté I (INRIA) : Analyse de données : méthodes et logiciels; Nice; G. CELEUX

Eté II : K-Théorie et ses applications; **Ibadan** (Nigéria);

M. Karoubi, A.O. Kuku

Eté III : Aspects de l'optimisation et du contrôle; Nice; I. EKELAND

1988 Eté I (INRIA) : Exploitation et gestion de moyens informatiques; Nice;

S. Sedillot

Eté II : Algèbres et Systèmes Triples de Jordan : Géométrie et Analyse;

Poitiers; M. Rais, G. Roos

1989 Eté I (INRIA) : Intelligence Artificielle et Systèmes Experts; Nice;

J. CHAILLOUX

Eté II : Analyse Complexe; Nice; A. YGER

Hiver : Analyse Fonctionnelle Appliquée; Assouan (Egypte);

J.-L. LIONS, J. CEA

1990 Eté I : Séries Divergentes en Théorie des Equations Différentielles;

Nice; F. DIENER, B. CANDELPERGHER

Eté II (INRIA) : Gestion Informatiques de Documents Complexes; Nice; A. RIZK

Eté III : D-Modules; Nice; B. MALGRANGE, P. MAISONOBE,

C. SABBAH

1991 Eté I : Systèmes Intégrables (dédiée à la mémoire de

Jean-Louis VERDIER) Nice (10-28 juin); A. CHENCINER,

Y. Kosman

Si vous envisagez de proposer un thème d'Ecole au CIMPA pour les années 1991 et au-delà, ou si vous souhaitez des informations supplémentaires, n'hésitez pas à prendre contact avec nous dès maintenant:

Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées (CIMPA)

1, avenue Edith-Cavell F-06000 NICE (France) Téléphone: 93 53 18 43 Télécopie: 93 81 73 48

Adresse électronique : lemaire@frnice51.bitnet

CINQ SEMAINES À BORDEAUX POUR LA QUALITÉ DE LA RECHERCHE ET POUR LA QUALITÉ DE L'ENSEIGNEMENT

Pendant cinq semaines, mathématiciens et informaticiens de l'Université Bordeaux I ont suspendu leurs cours pour alerter les instances officielles et l'opinion publique sur leur situation dramatique.

Il manque 50 postes d'enseignants-chercheurs et 10 postes d'I.A.T.O.S. en mathématique et informatique; en octobre 1990, il manquera 60 postes d'enseignants-chercheurs.

Jusque là, le recours aux moniteurs, vacataires, intervenants extérieurs, et heures complémentaires avaient permis d'assurer tous les enseignements de mathématiques et d'informatique. En février, cela n'a pas suffi; le Conseil d'Administration de l'Université a supprimé (disons pudiquement "reporté au semestre suivant") des enseignements de mathématiques habilités en Deug B. Cette décision draconienne s'est avérée insuffisante pour débloquer la machine rouillée. Tous les bricolages véreux cessaient de faire illusion.

Nous avons décidé de suspendre tous nos cours le 5 février 1990 pour que nos instances de tutelle et l'opinion publique prennent conscience de la situation inadmissible dans laquelle se trouvaient les mathématiques et l'informatique à Bordeaux I.

Un sursaut collectif de dignité engageant enseignants-chercheurs, I.A.T.O.S. et étudiants nous a conduit à refuser ce qui met irrémédiablement en péril la qualité de l'enseignement et la qualité de la recherche.

Pour cela, nous avons demandé la création de 5 postes de maîtres de conférences, 2 postes d'I.A.T.O.S. et un plan de recrutement sur 5 ans. Le Ministère nous a accordé quelques moyens supplémentaires, on a la promesse de trois postes, ce qui reste encore bien en deça de nos revendications.

Notre lutte de cinq semaines a été remarquablement relayée par les médias locaux et nationaux (*); nous avons été heureusement surpris de constater que journaux, radios et télévisions accordaient de l'intérêt à l'expression "défense de la qualité de l'enseignement et de la recherche". Nous avons maintenant la conviction que l'opinion été favorable à notre mouvement.

Un déficit de 10 I.A.T.O.S. et enseignants-chercheurs ne peut être comblé en un an, mais il faut faire vite. Le recrutement de 30 professeurs agrégés à la place de 60 enseignants-chercheurs serait suicidaire pour notre potentiel de recherche, Cela aurait pour conséquence le tarissement complet en jeunes chercheurs. Il faut savoir qu'en mathématiques à Bordeaux, la movenne d'âge a augmenté de 12 ans pendant les 15 années écoulées. Nous avons (pour certains) construit à Bordeaux un centre de recherche en mathématiques et informatique dont la qualité est reconnue, et nous lutterons jusqu'au bout pour le maintenir, voire le développer. Porter les horaires de service à 192 heures a réussi à couper les jambes de la recherche; secondariser systématiquement le premier cycle lui coupera la tête.

Ces 5 semaines de lutte ont mobilisé enseignants-chercheurs, I.A.T.O.S. de l'U.F.R. de mathématiques et informatique, et tous les étudiants. Cette détermination nous a conduit à louer un train spécial de 1200 personnes afin de porter nos revendications au Ministère, rue de Grenelle, le 6 mars 1990. A l'issue des 5 semaines, nous avons décidé de reprendre les cours afin que les étudiants qui nous avaient soutenu et avec qui nous avions vécu ce mouvement, puissent obtenir des diplômes d'une qualité irréprochable. Afin que notre engagement soit clair, nous avons décidé d'assurer bénévolement 5 enseignements qui n'auraient pu être pourvus : nous ne voulons pas d'heures complémentaires, nous voulons des postes.

La plus grande victoire de ces 5 semaines est celle d'une prise de conscience collective contre la médiocrité, pour la qualité de l'enseignement, pour la qualité de la recherche, pour la dignité de l'Université.

Pour le bureau de l'A.G., le président : Jean Esterlé le rédacteur : Jean Fresnel la responsable des contacts avec la

presse: Francine Delmer

^(*) un document de presse peut être obtenu gratuitement; une cassette vidéo relatant les principaux événements est disponible pour le prix de 80 F. Écrire à F. Delmer, Univ. Bordeaux I, U.F.R. maths-info., 351 crs de la Libération, 33405 Talence cédex.

DÉVELOPPEMENT DES CLASSES DE PREMIÈRE S ET DES CLASSES DE TERMINALES C ET D

	PREM	PREMIERES S		TERM	TERMINALES C		TERM	TERMINALES D	
ACADEME	1988-89	1989-90	ECART	1988-89	1989-90	ECART	1988-89	1989-90	ECART
			1989-88			1989-88			1989-88
AIX-MARSEILLE	5593	5629	36	1990	2236	246	2500	2711	211
AMENS	3643	4032	389	1252	1472	220	1591	1832	241
BESANCON	2763	2978	215	915	1102	187	1250	1265	15
BORDEAUX	5829	6292	463	2006	2213	207	2821	3098	277
SABN SABN	2695	3059	364	798	970	172	1131	1381	250
CLEPAONT-FERRAND	2553	2632	7.9	938	1141	203	1046	1189	143
888 888	482	474	œ,	153	198	45	261	280	19
CHETEL	7143	7758	615	2703	3362	629	2610	3003	393
NON	3618	3977	359	1371	1554	183	1437	1618	181
GRENOBLE	8744	7308	564	2488	3110	622	2667	2860	193
LILE	9081	9881	800	3343	3921	578	4260	5088	828
LIMOGES	1654	1625	-29	528	651	123	830	967	137
ESO.	5717	6282	585	2262	2517	255	2331	2418	87
MONTPELLER	4299	4537	238	1670	2056	386	1864	1950	86
NANCY-METZ	5774	6199	425	2210	2800	590	2082	2293	211
NANTES	4874	5786	812	1597	1895	298	2305	2542	237
MOE	3448	3599	151	1279	1501	222	1401	1531	130
OPI EANS-TOURS	5276	5892	616	2024	2508	484	2144	2361	217
PARIS	4966	4976	10	2531	2864	333	1856	1925	69
POTTERS	3767	4043	278	1308	1580	272	1647	1789	142
	3155	3508	353	1135	1347	212	1275	1442	167
RENES	5543	5710	167	1968	2240	272	2375	2673	298
<u>8</u>	3474	3726	252	1173	1361	188	1393	1604	211
STRASBOURG	3788	3755	ee.	1518	1938	420	1491	1555	64
TOLLOUSE	5413	5736	323	1921	2242	321	2518	2812	294
VERSAILES	11755	12439	684	4364	5320	956	4054	4519	465
TOTAL	123147	131833	8686	45445	54099	8654	51140	56706	5566

EFFECTIFS : PROGRESSIONS DANS LES LYCEES

Nous publions les chiffres, qui nous ont été communiqués par J.L. OVAERT, des effectifs dans les classes de Première S et de Terminales C et D. Vous pourrez ainsi, académie par académie, savoir quelle est l'augmen-

tation probable du nombre d'étudiants en DEUG à la rentrée prochaine. Faites vos prévisions vous-mêmes.

ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES:

Commission et Mission

Lionel Jospin avait en 1989 demandé à P. Bourdieu et à F. Gros de coordonner les travaux de diverses "Missions de réflexion sur l'enseignement". La mission s'occupant des Mathématiques était présidée par D. Dacunha-Castelle et a rendu son rapport en juin 89. Ce rapport long (71 pages, ce qui nous interdit de le reproduire pour la Gazette) est dense et intéressant. Il comporte une partie sur les mathématiques dans l'enseignement universitaire (en fait dans les classes préparatoires et les premiers cycles de l'Université) et fait aussi des propositions sur des sujets qui intéressent particulièrement le supérieur, par exemple sur la formation des maîtres et sur les IUFM. Tous les lecteurs intéressés peuvent se procurer le rapport dans tous les CRDP ou en écrivant directement à D. Dacunha-Castelle (Université de Paris-Sud Orsay).

Cette mission avait nommé une sous-commission, dont les animateurs étaient M. Legrand et M. Rogalski, sous-commission qui a, elle aussi, écrit un texte long (20 pages) dense et intéressant. On peut obtenir le texte complet en le demandant à l'adresse suivante : IREM de Lille, Université des Sciences et Techniques, Bt. A, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex. Tél : 20 43 41 81 ou 82. Nous nous contentons de publier ici le résumé – rédigé par la sous-commission – de ce texte.

Il n'est pas secret que les conclusions de la sous-commission ne sont pas exactement celles de la mission officielle qui n'a pas souhaité en retenir l'ensemble des conclusions. Pour une étude détaillée des divergences, nous renvoyons aux textes complets. Quoi qu'il en soit les sujets abordés sont d'importance et ne manqueront pas d'être à nouveau évoqués dans la Gazette.

RÉSUMÉ DES PRINCIPES ET PROPOSITIONS ADOPTÉS PAR LA COMMISSION SUR LES MATHÉMATIQUES DANS LES PREMIERS CYCLES DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR LONG

Objectifs des études en DEUG et classes préparatoires.

Ces cursus mènent à des études scientifiques longues, qui doivent former les étudiants à une démarche scientifique appuyée sur des connaissances solides. Les bacheliers C, D, E doivent pouvoir normalement accéder à ces cursus, dès lors qu'ils acceptent une certaine rupture avec le mode dominant de l'enseignement scolaire.

Comme le nombre de ces bacheliers est appelé à fortement augmenter, les premiers cycles vont donc être affrontés aux problèmes posés par un enseignement de masse. Dans ces conditions, la Commission considère que sans une évolution profonde des pratiques pédagogiques, et sans d'importants moyens supplémentaires, l'enseignement supérieur ne pourra garder un niveau satisfaisant sans

provoquer un taux d'échec inacceptable. Par contre, la Commission pense que le pari de l'enseignement supérieur de masse peut être gagné si les moyens matériels, humains et pédagogiques sont mis en œuvre, et si une grande attention est apportée à l'orientation et à l'accueil des publics étudiants.

Les bacheliers de technologie doivent pouvoir aller en STS ou en IUT. Pour ceux qui souhaiteraient s'engager dans les premiers cycles scientifiques actuels, ils ne peuvent les suivre avec profit sans un enseignement adapté partant de leurs acquis.

La Commission constate la perversité du système actuel d'orientation à l'issue du baccalauréat. Pour commencer à lutter contre cet état de choses, elle propose que les IUT aient l'obligation statutaire de recruter un pourcentage fixé de bacheliers de technologie et que

leurs programmes et leur pédagogie en tiennent compte. Elle propose aussi que, sauf lorsque la spécialité concernée est peu répandue sur le territoire national, le recrutement des IUT comme celui des DEUG soit géographiquement sectorisé. La question analogue pour les classes préparatoires pourra se poser, dès lors que les inégalités régionales de répartition de ces classes auront été supprimées.

Si la décision politique était prise de demander aux universités d'accueillir à coté des IUT une partie des bacheliers de technologie, il faudrait (pour que ce ne soit pas un leurre) créer des filières spécifiques longues (de trois ou quatre ans), disposant de moyens matériels et financiers équivalents à ceux des IUT.

Organisation favorisant la réussite dans ces études.

L'enseignement doit relever d'une véritable équipe pédagogique. Celle-ci doit passer un contrat clair avec les étudiants sur les engagements des uns et des autres : objectifs de connaissances, méthodes, travail personnel, contrôle des connaissances, enjeux scientifiques.

Il est nécessaire que les sections d'ensei-

gnement retrouvent une taille humaine : au plus 3 à 4 groupes de 30 étudiants (ce dernier nombre étant aussi valable pour une classe préparatoire).

Ce cycle d'études comprend deux périodes : dans une première, les principales disciplines scientifiques correspondant au premier cycle choisi doivent être présentées dans leur réalité scientifique, afin que l'étudiant puisse s'orienter en connaissance de cause, mais il ne doit pas être considéré comme un futur spécialiste d'une de ces disciplines; dans une deuxième période, l'étudiant choisit une ou deux disciplines pilotes, et les autres disciplines doivent être enseignées dans l'optique "discipline de service" par rapport à ce choix prioritaire.

Des enseignements de réorientation et/ou mise à niveau doivent être institutionnalisés entre les DEUST, les STS, les IUT, les DEUG et les Classes Préparatoires, ou à leur entrée quand c'est nécessaire.

La Commission propose que le mode principal de recrutement pour des étudiants se réorientant (de CPGE vers les formations universitaires ou de DEUG vers les Grandes écoles) soit le recrutement sur dossier.

Les travaux des missions de réflexion sur l'enseignement viennent d'avoir un premier prolongement sur le plan institutionnel. Il s'agit de la création par un décret récent (23 février 1990) et l'installation d'un Conseil National des Programmes. Les missions de ce Conseil sont larges comme on peut le voir dans cet extrait du décret fondateur : "Le Conseil National des Programmes donne des avis et adresse des propositions au ministre de l'Education Nationale sur la conception générale des enseignements, les grands objectifs à atteindre, l'adéquation des programmes et des champs disciplinaires à ces objectifs et leur adaptation au développement des connaissances". La suite du texte montre que l'enseignement supérieur est lui aussi concerné : "Il exerce ces attributions pour l'enseignement scolaire et supérieur. Il veille à la continuité éducative entre l'enseignement scolaire et supérieur et concourt à l'harmonisation des formations". Ce Conseil National est présidé par D. Dacunha-Castelle.

ÉIÉMENTS POUR UNE RÉFLEXION ET UN DÉBAT SUR LES PROBLÈMES DES D.E.A. DE DIDACTIQUE ET SUR LA PLACE DE LA DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

Gilbert ARSAC (Université Claude Bernard, Lyon 1) Colette LABORDE (Université Joseph Fourier, Grenoble 1)

Dans le texte qui suit, et qui veut participer au débat ouvert dans la dernière Gazette, il n'est question que de la didactique des mathématiques, mais nombre de points soulevés concernent la didactique d'autres disciplines scientifiques.

Les débats auxquels a donné lieu le renouvellement de l'habilitation des DEA de didactique pour lesquels le groupe technique des mathématiques, seul consulté, a donné un avis tendant à leur disparition au terme d'un délai de deux ans mélangent plusieurs questions qu'il est indispensable de séparer si l'on veut réellement, ainsi que tout le monde semble le désirer, une réflexion de fond sur la place de la didactique dans la communauté des mathématiciens. Il s'agit :

- de l'avenir de la recherche en didactique, et plus particulièrement de la formation des jeunes chercheurs, mais aussi au-delà, de l'objet et de la méthodologie de cette recherche.
- de la place des didacticiens dans la communauté des mathématiciens, en particulier du recrutement à l'université de maîtres de conférences titulaires d'une thèse en didactique des mathématiques.
- du rôle actuel et souhaitable des DEA de didactique en ce qui concerne les trois catégories d'étudiants actuellement présentes : jeunes issus de maîtrise, enseignants ou formateurs en exercice, étudiants étrangers (eux-mêmes éventuellement répartis entre les deux catégories précédentes).

Bien entendu, l'avenir des DEA de didactique se trouve déterminé par les réponses que l'on apporte à ces trois questions, ce qui explique que ces trois aspects soient étroitement mêlés dans le débat autour des DEA. Mais ce mélange ne sert pas la clarté de l'argumentation et beaucoup de textes ne prennent en compte que fugitivement les première

et troisième questions, et se centrent uniquement sur le recrutement des futurs universitaires, ce qui semblerait indiquer qu'il s'agit là du seul rôle d'un DEA. Revenons maintenant successivement sur ces trois points.

1) Avenir de la recherche en didactique, formation de jeunes chercheurs. chercheurs en didactique des mathématiques constituent à l'heure actuelle en France une communauté scientifique structurée par l'existence de séminaires, dont un national, de publications, dont une revue à comité de lecture, d'une école d'été bisannuelle et d'un groupe de recherche CNRS commun avec les chercheurs en didactique de la physique et de l'informatique. Cette communauté est d'autre part bien intégrée dans la communauté internationale correspondante comme le montre la présence de ses membres à des postes de responsabilité des organismes internationaux, les coopérations de recherche institutionnelles et la présence d'étrangers dans toutes les activités citées précédemment. Les DEA s'intègrent dans ce système comme un moyen de formation à la recherche. Leur contenu scientifique est fondé sur les théories, méthodes et résultats élaborés par cette communauté de chercheurs. La préparation des thèses est à la fois une formation pour les thésards et un stimulant pour la recherche.

En cas de disparition des DEA de didactique et de recrutement des thésards après un DEA dans la discipline, on se trouverait devant les problèmes suivants :

- comment transmettre à ces débutants les connaissances théoriques et les éléments

de méthodologie de la recherche qui font actuellement l'objet des enseignements du DEA? Cela supposerait de la part des chercheurs de refaire ces cours à titre privé (et donc en particulier non inclus dans leur service).

L'idée de faire faire une thèse de didactique à des étudiants directement issus d'un DEA de spécialité suppose ou bien que l'on accorde à ces étudiants une année supplémentaire pour cette formation à la méthodologie et aux outils théoriques de la recherche, ou bien que l'on s'imagine que ces outils pourraient s'acquérir en peu de frais, en quelques mois, parallèlement à la préparation d'un DEA de discipline, dans le cadre par exemple d'un mémoire consacré à la didactique. Cette deuxième hypothèse implique que l'on dise quelques mots de la nature de la didactique elle-même et de son contenu scientifique.

La recherche sur l'enseignement et en particulier celle qui se centre, comme c'est le cas de la didactique, sur celui d'une discipline, est guettée par un double danger : l'expérimentalisme naïf d'une part, qui croit pouvoir faire au moins provisoirement l'économie d'une théorie (accumulons les faits. ensuite nous ferons une théorie alors que seule une théorie permet de désigner les faits qui ont du sens, voire de les faire apparaître à travers une expérimentation), le discours purement théorique d'autre part, coupé de toute vérification expérimentale fondée sur une méthodologie définie, et fondé uniquement sur la connaissance de la discipline, le bon sens et l'intelligence Tout le travail des pionniers de la didactique des mathématiques en France a précisément consisté à construire un champ scientifique articulant théorie et expérience. L'expérience du fonctionnement des DEA de didactique montre combien la compréhension des concepts forgés à cette occasion, qui sont nécessairement du type de ceux des sciences humaines, demande des efforts et du temps à des débutants de formation uniquement scientifique. Il ne faudrait pas que la volonté de garantir seulement une compétence dans la discipline amène à une régression sur le plan de la didactique et à une sorte de grand bond en arrière scientifique ...

2) La place des didacticiens des mathématiques dans la communauté des mathématiciens et en particulier les recrutements à l'université. — Disons tout d'abord qu'il est tout à fait normal que les universitaires se préoccupent du niveau des connaissances mathématiques dans la discipline des titulaires de thèse de didactique qui seraient candidats à un poste d'enseignant relevant de la 23ème section du CSU et qu'ils exigent qu'un tel candidat ait un niveau mathématique suffisant pour enseigner les mathématiques à l'université. Rappelons cependant, et ceci nous semble essentiel, qu'il est peu probable que ceci constitue le débouché nº 1 des thésards en didactique (cf. le point suivant) pas plus d'ailleurs que celui des thésards en spécialité en général (quelle est la proportion des titulaires d'un DEA de spécialité qui font carrière à l'université?) et qu'on ne saurait organiser intégralement les DEA de didactique en fonction de ce seul impératif.

En ce qui concerne notre DEA (Grenoble-Lyon), l'habilitation précise clairement que seuls les étudiants titulaires d'une maîtrise ou d'un diplôme équivalent peuvent être autorisés à s'inscrire et c'est la règle qui a toujours été appliquée, de sorte que le problème se ramène à savoir si le titulaire d'une maîtrise est apte à enseigner à l'université. Si la réponse est négative, on ne voit pas ce qui empêcherait les universités et le CSCU d'exiger des candidats à un poste de maître de conférences un niveau mathématique équivalent par exemple à celui d'un DEA. Cette solution semble tout de même plus raisonnable que celle qui consiste à supprimer le problème en supprimant les DEA, même pour ceux que ne tente aucune carrière à l'université! Notons de plus qu'elle est conforme à la "doctrine Malgrange" ou règle du "n, n + 1" qui, rappelons-le, a toujours été une règle relative aux problèmes de recrutement (il s'agissait à l'époque de l'inscription sur les listes d'aptitude) et non une règle sur le contenu scientifique des thèses de didactique.

3) Le rôle des DEA de didactique. On s'accorde à reconnaître que le rôle essentiel d'un DEA est celui d'une formation à la recherche par la recherche. Dans le cas de la didactique des mathématiques, une telle affirmation a les conséquences suivantes :

- a) La formation offerte par un DEA de didactique des mathématiques ne saurait être assimilée à une formation professionnelle d'enseignant. Même si les apports d'une formation à la recherche à une formation professionnelle sont évidents, les deux types de formation ne peuvent être confondus.
- b) La formation en DEA diffère d'une formation en DESS puisque, comme le souligne P. Bérard dans son rapport établi à la suite des travaux du GET 10 (Gazette, nº 42, p. 6), les filières type DESS n'offrent pas une formation à la recherche par la recherche. La proposition du GET 10 de transformer les DEA en une formation de type DESS signifie du même coup la transformation de la formation, de ses objectifs, de ses contenus, de ses méthodes. Signalons au passage que la potentialité de qualification supplémentaire reconnue par le GET 10 aux DEA de didactique risque de disparaître dans une formation purement professionnelle qui ne permet pas cette ouverture à et par la recherche. Il s'agirait donc de créer un nouveau type de formation professionnelle orienté vers la didactique des mathématiques. Toute création d'une filière professionnelle correspond à des besoins et à des débouchés que ne permettrait pas de satisfaire un DEA et la demande d'une telle création auprès du ministère se doit de le démontrer. Les enseignants en exercice ne peuvent être que demandeurs exceptionnels d'une telle formation lourde, incompatible avec une activité professionnelle même partielle. Les étudiants étrangers ne sont pas concernés par un DESS qui ne conduirait pas à la recherche. Le public potentiel d'un tel DESS serait donc relativement restreint et n'aurait pas la pluralité qu'il présente dans les actuels DEA de didactique.
- c) En effet, comme bien des DEA relevant d'autres disciplines, les DEA de didactique ont actuellement une dualité de fonctions dont P. Bérard reconnaît le bénéfice

- à court et à long terme (dans le rapport déjà cité) à propos des DEA de mathématiques appliquées : accès au marché du travail et formation à la recherche. Cette dualité de fonctions ne saurait d'ailleurs qu'être renforcée avec l'importance croissante de la formation continue dans le monde professionnel, de la vulgarisation dans les sciences: le monde professionnel exprime fortement le besoin d'une deuxième génération de didacticiels qui ne soient fondés ni sur des théories simplistes de l'apprentissage, ni sur le développement de langages auteurs indépendants du domaine de connaissances dont l'acquisition est visée, mais qui prennent en compte la dimension épistémologique de ces savoirs. Une demande plus forte de spécialistes didacticiens capables de créativité et d'originalité conceptuelles que seule permet une initiation à la recherche commence à se faire jour.
- d) Les DEA de didactique, parce qu'ils offrent une formation à et par la recherche accueillent une proportion non négligeable d'étudiants étrangers (à Grenoble et Lyon entre un quart et un tiers des étudiants). Ces étudiants souhaitent en général continuer en thèse. Nul doute que cette catégorie d'étudiants disparaîtrait si la thèse de didactique ne pouvait se passer qu'après l'obtention d'un DEA de mathématiques, ne serait-ce que parce que les bourses qu'obtiennent ces étudiants sont spécifiquement accordées pour la didactique des mathématiques. A l'heure actuelle, des pays tels la RFA et la GB, ayant compris le rôle qu'ils pouvaient jouer dans des échanges culturels et économiques avec des pays comme la Grèce, le Portugal, le Mexique, le Brésil ... en formant leurs spécialistes qui prendront les décisions politiques de demain sur l'éducation, concurrencent largement la France par l'octroi de bourses de thèses à des pays ayant traditionnellement des liens privilégiés avec la France. Il serait dommageable de faciliter cette atteinte au rôle international joué par l'université française.

PRIX SCIENTIFIQUES

La Gazette des Mathématiciens a reçu de la part des organisateurs de prix scientifiques ou de ses correspondants des informations sur les lauréats auxquels les prix ont étés attribués cette année. Nous en publions quelques extraits.

Le PRIX FERMAT de recherche en Mathématiques 1989 a été décerné conjointement à ABBAS BAHRI et KENNETH A. RIBET. Ce prix, qui est organisé conjointement par Matra espace et l'université Paul Sabatier de Toulouse, récompense les travaux de recherche d'un ou plusieurs mathématiciens dans des domaines où les contributions de Pierre de Fermat ont été déterminantes : principes variationnels, fondement du calcul des probabilités, géométrie analytique et théorie des nombres. Plus largement, ce prix saura récompenser des résultats de recherche accessibles au plus grand nombre de mathématiciens professionnels.

ABBAS BAHRI a 34 ans et est actuellement professeur à l'université de Rutgers.

Abbas Bahri a résolu des problèmes variationnels réputés difficiles, qu'il a abordés avec imagination. Ses contributions aux recherches en mathématiques qui justifient sa récompense pour le prix Fermat, reposent essentiellement sur deux sujets de recherche :

- la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. Pour cette résolution, le problème est "compactifié" par une analyse des suites de Palais-Smale qui "s'échappent à l'infini" – une méthode introduite pour la première fois dans le travail d'Abbas Bahri sur les formes de contact.
- le problème des trois corps est classique en mécanique céleste. La démonstration par Bahri de l'existence d'une infinité de solutions périodiques généralisées pour ce problème combine topologie et analyse. L'idée maîtresse consiste à étudier les "points critiques à l'infini" pour contourner la condition de Palais-Smale qui tombe en défaut.

KENNETH RIBET. Il a 41 ans et est actuellement professeur à l'université de Berkeley.

Le travail de Kenneth Ribet se situe dans un domaine appelé géométrie algébrique arithmétique. L'une des idées-clefs dans ce domaine est l'étude des équations en nombres entiers à l'aide de structures géométriques.

Les recherches récentes de Kenneth Ribet portent sur les formes modulaires : ce sont des fonctions de l'analyse classique, invariantes selon certaines transformations.

L'intérêt du travail de Kenneth Ribet, reconnu par le prix Fermat est d'avoir développé un outillage théorique lui permettant de montrer que la conjecture standard de Taniyama-Weil implique la validité de l'affirmation de Pierre de Fermat : le problème de Fermat vient donc de perdre son aspect marginal.

- 0 -

Le PRIX IBM a été attribué pour 1989 à JEAN-PIERRE DEMAILLY de l'université de Grenoble. A cette occasion, le président du jury A. Beauville nous a transmis ce texte de présentation des travaux de J.-P. Demailly.

Jean-Pierre Demailly, âgé de 32 ans, est professeur à l'université de Grenoble I depuis 1983. Ses travaux portent sur l'analyse complexe, avec une forte composante géométrique. Il n'est pas question ici de les analyser tous; je vais essayer d'en dégager les thèmes essentiels.

1) La positivité des fibrés holomorphes. Il existe différentes notions de positivité pour un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe, en particulier celles introduites par Griffiths

d'une part et par Nakano d'autre part; la relation entre ces notions a été remarquablement clarifiée par Demailly dans une partie de sa thèse. Cela lui permet d'établir un lien très simple (auparavant inexpliqué) entre les théorèmes d'annulation établis par ces deux auteurs.

Demailly est revenu récemment sur ce sujet avec deux résultats frappants. Le premier concerne l'annulation d'espaces de cohomologie $H^p(X,\Omega^q\otimes S^kE)$ pour p,q,k convenables, lorsque E est un fibré positif. Le Potier a observé voici deux ou trois ans que les résultats de Faltings sur le sujet étaient un peu trop optimistes; Demailly a alors obtenu ses énoncés, qui sont probablement les meilleurs possibles. Il convient de souligner que, parti d'une approche analytique, Demailly est arrivée à une présentation entièrement algébrique (et très conceptuelle) de ces théorèmes.

Le second résultat, encore plus spectaculaire, est une estimation de la dimension asymptotique des espaces $H^p(X, E \otimes L^k)$ en fonction de k (p fixé), qui a été exposée par Siu au séminaire Bourbaki. La démonstration de Demailly s'inspire de la démonstration par Witten des inégalités de Morse. Elle utilise de l'analyse très fine pour estimer la distribution des valeurs propres du laplacien. Elle permet d'améliorer notablement la conjecture de Grauert et Riemenschneider (d'abord démontrée par Siu) qui caractérise les variétés de Moisezon par l'existence d'un fibré en droites faiblement positif.

Tout récemment Demailly a montré que le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, qui est un raffinement du théorème de Kodaira très utile en géométrie algébrique, résulte simplement des estimations L^2 de Hörmander; cela lui permet d'ailleurs d'en donner une formulation très agréable.

- 2) L'étude des courants positifs constitue un gros morceau de la thèse de Demailly. Cette étude va dans plusieurs directions : l'une est proche de l'arithmétique, avec notamment une minoration du degré des hypersurfaces s'annulant en un ensemble donné de points; celle-ci lui permet entre autres de résoudre une conjecture de Chudnovski et Waldschmidt sur les multiplicités des courbes algébriques dans \mathbb{C}^2 . Une autre tend vers la géométrie algébrique : il faut citer, en particulier, un exemple de courant fermé positif extrémal sur \mathbb{P}^2 qui ne provient pas d'un cycle algébrique. Cet exemple, qui répond à une question vieille de 20 ans, paraît ruiner les espoirs d'une démonstration analytique de la conjecture de Hodge; mais Demailly les rétablit en prouvant que la conjecture de Hodge résulterait d'un énoncé plus faible que celui qui était généralement conjecturé.
- 3) Equations de Monge-Ampère et fonctions plurisousharmoniques. Je citerai simplement deux résultats : la caractérisation des variétés affines par l'existence d'une fonction psh vérifiant certaines propriétés, et récemment la construction d'une fonction de Green pour l'opérateur de Monge-Ampère sur les ouverts hyperconvexes de \mathbb{C}^n , qui lui permet de jeter les bases d'une analyse harmonique dans \mathbb{C}^n où l'opérateur de Laplace est remplacé par celui de Monge-Ampère.

A cheval sur 2) et 3), il faut citer aussi un article récent aux $Acta\ Mathematica$ où Demailly donne une définition générale des nombres de Lelong associés à un courant de type (p,p) en un point d'un espace analytique. Il clarifie ainsi les notions introduites par différents auteurs, généralise et simplifie tout à la fois les théorèmes d'intégralité et d'analyticité de ces nombres de Lelong. On retrouve là une recherche de la clarté et de la simplification qui me paraît être une constante du travail de Demailly.

J'espère que ce bref résumé donne une idée de la richesse et de la diversité de l'œuvre de Demailly. Le plus brillant des jeunes analystes complexes en France (et probablement dans le monde) est un lauréat incontestable du prix IBM.

Les PRIX DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

ont été décernés lors de la séance du 27 novembre. Nous publions ici le texte de présentation des lauréats.

Le PRIX AMPÈRE de l'électricité de France a été décerné à Adrien Douady, professeur à l'université Paris 11.

Adrien Douady s'est d'abord fait connaître, en 1965 et 1975, par deux résultats spectaculaires dans la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, et plus précisément des espaces analytiques (c'est-à-dire des variété analytiques avec singularités). Le premier résultat est le suivant : l'ensemble de tous les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné peut être muni lui-même d'une structure d'espace analytique. Le deuxième résultat concerne la théorie des déformations de la structure d'un espace analytique compact X. On définit d'abord la notion de "germe de déformation" de X; il s'agit alors de trouver, parmi tous les germes de déformation possibles, un germe tel que tout autre germe se déduise de celui-là par un procédé explicite. Ce problème avait été résolu par un mathématicien japonais Kuranishi dans le cas où X est une variété sans singularité. Le cas général est beaucoup plus difficile. Il a été résolu par Adrien Douady en collaboration avec le mathématicien américain John Hubbard. Depuis une dizaine d'années Douady s'est attaqué aux problèmes très délicats soulevés par l'itération d'une transformation holomorphe du plan complexe dans lui-même. Cette théorie, inaugurée au début du siècle par Fatou et Julia, connaît un renouveau spectaculaire depuis le développement des ordinateurs. De nouveaux problèmes théoriques sont ainsi soulevés; Douady et ses élèves ont résolus plusieurs d'entre eux.

Le PRIX JAFFÉ a été décerné à Philippe Ciarlet, professeur à l'université Paris 6. Philippe Ciarlet est un spécialiste de renommée internationale des méthodes numériques, notamment pour leurs applications à la mécanique des solides. Après une suite d'articles remarquables sur les méthodes aux différences finies et les méthodes d'approximation variationnelle, une thèse aux Etats-Unis et une thèse de doctorat en France, il met au point la théorie des éléments finis (théorie de l'interpolation et de l'erreur, éléments finis courbes, intégration numérique, ...). Un livre de Ciarlet sur le sujet, devenu un classique, récapitule ces travaux. Philippe Ciarlet a mis également au point une théorie asymptotique rigoureuse des coques et des plaques. Une série d'articles qu'il écrit, soit seul, soit avec des élèves, en présente les résultats et fait toujours date sur le sujet. Puis il étudie la jonction de solides de dimensions différentes (une plaque mince avec un volume, une poutre avec une plaque mince) tels qu'on en rencontre dans les structures spatiales et obtient les modèles correspondants par des analyses aux limites. Il a récemment publié un ouvrage remarquable, qui est sans équivalent dans la littérature mondiale, sur l'élasticité non linéaire en trois dimensions.

En dehors de ces deux prix importants, l'Académie des Sciences a attribué des prix de commission en mathématiques.

Le PRIX PETIT D'ORMOY est décerné à ZOGHMAN MEBKHOUT, directeur de recherche au CNRS, du laboratoire de mathématiques de l'université Paris 7 pour ses travaux sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles sur les variétés, en particulier pour les systèmes à singularités régulières.

Le PRIX PAUL LANGEVIN (en hommage à la mémoire des savants français assassinés par les allemands en 1940-1945 : R. Gosse, A. Lambert, J. Solomon) a été attribué à ABBAS BAHRI (voir ci-dessus pour une présentation des travaux).

Le FONDS DOISTAU-BLUTET a été décerné à JEAN-PIERRE VIGUÉ, professeur à l'université de Poitiers, pour ses travaux sur les ouverts bornés d'un espace de Banach complexe.

Le PRIX CARRIÈRE a été décerné à COLETTE MOEGLIN, chargé de recherche au CNRS à l'université Paris 7, pour ses travaux sur les idéaux des algèbres enveloppantes et les représentations des groupes réductifs.

Enfin, la MÉDAILLE EMILE PICARD a été décernée à François Bruhat, professeur à l'université Paris 7, pour ses travaux sur la structure et les représentations des groupes semi-simples réels et p-adiques.

- 0 -

Enfin, LAURENT CLOZEL, professeur à l'université Paris 11, a obtenu la MÉDAILLE D'ARGENT DU CNRS. Marie-Françoise Vigneras nous a transmis ce texte de présentation des travaux de L. Clozel.

Laurent Clozel, âgé de trente-six ans, est professeur à l'université Paris-Sud (Orsay). Il a commencé à travailler dans la théorie des représentations des groupes réductifs réels, groupes qui deviendront p-adiques, puis adéliques où il fera sa plus spectaculaire contribution mathématique.

Dans la théorie dite locale, dans le cadre réel, il démontre des identités de caractères entre représentations tempérées prévues par le changement de base de \mathbb{R} à \mathbb{C} dans la fonctorialité de Langlands. Avec Patrick Delorme, il obtient un théorème de Paley-Wiener scalaire. Ceci le conduit à prouver la non nullité de la cohomologie de certains groupes arithmétiques. Dans le cadre p-adique, il démontre une conjecture de Howe qui, on le savait par Harish-Chandra, a beaucoup d'applications en analyse harmonique.

Ses travaux dans la théorie adélique dite globale sont d'une importance fondamentale, et ont d'importantes conséquences arithmétiques. Il démontre avec James Arthur les identités de caractères adéliques prévues par le changement de base entre extensions cycliques pour le groupe GL(n), dans la fonctorialité de Langlands. Ensuite, il démontre avec Dinakar Ramakrishnan et Don Blasius une conjecture bien connue d'algébricité de certaines formes de Maass.

THÈSES

Nous avons publié une liste de thèses soutenues en 1988 dans le numéro 42 que nous avons dû compléter (sous le titre de "thèses – suite et fin –") dans le numéro 43. Voici la suite de cette fin très provisoire, Paris 6 ayant omis de nous communiquer les thèses soutenues dans son laboratoire de probabilités :

BERNARD LAPEYRE, sous la direction de N. El Karoui et N.Bouleau, nouvelle thèse: Etude de quelques questions relatives aux processus de diffusions issues de la mécanique aléatoire.

GILLES PAGES, sous la direction de J. Jacod, nouvelle thèse : Sur quelques problèmes de convergence.

BRIGITTE CHAUVIN-ALMARAYC, sous la direction de J. Neveu, nouvelle thèse : Arbres et processus de branchement.

PASCAL MANO, sous la direction de J. Jacod, nouvelle thèse: Vitesse de convergence dans les théorèmes limite fonctionnels.

KAIES HAMZA, sous la direction de J. Azema, thèse de 3e cycle : Martingales associées à un ensemble régénératif.

NOUVELLES BRÈVES

ANNUAIRE DES D.E.A.

L'annuaire des D.E.A. est dans sa phase finale de réalisation. C'est une réalisation de la Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales, de la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles et de la Société Mathématique de France.

Cet annuaire sera disponible milieu avril et sera diffusé à partir de la fin du même mois. Il contient :

- un texte général de présentation, avec les adresses des universités, les renseignements pratiques pour les bourses, etc.
- une fiche par D.E.A. comprenant les informations suivantes : intitulé du D.E.A. et Universités ou Ecoles dont il dépend, nom et adresse des responsables, effectifs éudiants en 88-89, contenu des enseignements, débouchés, thèmes de recherche, laboratoires de recherche liés au D.E.A., message des responsables,
- deux index

et en annexe, la liste des cours en 1989-90.

Le tirage est de 3000 exemplaires. Chaque D.E.A. disposera de 10 à 30 exemplaires pour les responsables d'enseignement et pour les enseignants de D.E.A. Ces exemplaires sont destinés à être lus par les étudiants de maîtrise (voire avant), de préference avec le conseil d'enseignants, mais pas à être distribués aux étudiants. En ce qui concerne la diffusion à l'étranger, l'envoi de 400 exemplaires vers les postes diplomatiques et les attachés culturels sera assuré par le Ministère.

Nous mettons au point deux listes : une de départements de mathématiques – ou de collègues – à l'étranger et une autre de grandes écoles - et de personnes dans les entreprises. Dès ces listes établies, nous enverrons l'annuaire à ces adresses.

Vous pouvez obtenir l'annuaire en le demandant à l'adresse suivante : Marie-Françoise Roy, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, Tél : 99 28 60 20; Email : costeroy@frcicb81.bitnet.

Prière de signaler vos commentaires, en particulier toute erreur relevée dans l'annuaire, à la même adresse ou à : Pierre Bérard, Institut Fourier, BP 74, Université de Grenoble 1, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex. Email : pberard@frgren81.bitnet.

ALLOCATIONS DE RECHERCHE

Le nombre d'allocations de recherche (distribuées par le Ministère de la Recherche et de la Technologie) est en hausse forte depuis deux ans. Il devrait y en avoir 2800 en 1990 contre 1350 en 1989. La part des mathématiques dans le nombre total d'allocation n'est pas décidé mais devrait être stable en 90 après avoir connue une forte hausse ces dernières années (4,6 % en 89 et 90 contre 4,2 % en 88 et 3,8 % en 87). Rappelons que les mathématiciens représentent autour de 7 % des enseignants-checheurs (hors Santé). Le nombre total d'allocations de mathématiques était de 73 en 87, 79 en 88 et 109 en 89.

On trouvera ci-après le tableau de répartition des allocations en mathématiques par établissement dans les trois dernières années. On constate qu'il y a peu d'universités qui ont toujours eu au moins une allocation : il s'agit des 12 suivantes : Aix-Marseille 1, Bordeaux 1, Grenoble 1, Lille 1, Saint-Etienne, Nice, Rennes 1, Toulouse 3, Paris 6-7-9 et 11. En 1989 ces 12 établissements rassemblent 68 % des allocataires (le reste dispersé dans 19 autres universités). Un autre indicateur frappant de la concentration de la formation doctorale : si la région Ile-de-France regroupe 43 % des allocataires, trois universités – Paris 6-7 et 11 – regroupent à elles seules plus de 35 % des allocataires. Toutes disciplines confondues, la part de la région Ile-de-France est de 35 %.

	87	88	89		87	88	89
Aix-Marseille 1	4	3	5	Rouen	1		1
Aix-Marseille 2		2	2	Strasbourg 1	3		
Aix-Marseille 3	1			Toulouse 1		1	2
Besançon		1	1	Toulouse 3	3	3	4
Bordeaux 1	6	5	7	Paris 6	12	11	13
Pau		1	2	Paris 7	7	9	14
Caen	1		1	Paris 9	4	3	4
Clermont 2			3	Paris 11	10	11	12
Dijon		1	-	Paris 13			1
Grenoble 1	3	7	4	AGRO			1
INPG	2		4	E.N.S. Mines			1
Lille 1		2	2	E.H.E.S.S.		1	1
Limoges	1		3	nance and a second a second and			
Lyon 1		2	2	Saint-Etienne	1	1	2
Nancy 1			2	Metz		1	1
Nantes	1	2		Nice	6	6	5
Orléans	1		2	Tours	1		
Poitiers		1	2	Rennes 1	3	3	2
	TO	TAL			73	79	109

CONTRATS DE RECHERCHE

Chaque direction scientifique de la DRED (Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales) a mis en place une commission de 10 personnes chargées d'expertiser les dossiers de candidatures aux "contrats de recherche". Cette année, autour de 640 dossiers ont été déposés en mathématiques (pour environ 2500 universitaires). Le nombre de contrats qui seront accordés en 1990 n'est pas encore fixé. La commission, dont la composition est donnée plus bas, a commencé à travailler en février et rédigera un rapport que la Gazette publiera.

Composition de la Commission

DS 1 - Mathématiques et leurs applications

Groupe d'experts 10

Boutet Louis (PR, Paris 6) - Colin de Verdière Yves (PR, Grenoble 1)

Henniart Guy (PR, Paris 11) - Jaulent Jean-François (MC, Bordeaux 1)

Massart Pascal (AS, Paris 11) - Neveu Jacques (PR, Polytechnique)

Raviart Pierre Arnaud (PR, Polytechnique) - Schiffmann Gérard (PR, Strasbourg 1)

Vogel Pierre (PR, Nantes) - Weitz Michèle, épouse Chambat (MC, Lyon 1).

CONGRÈS INTERNATIONAL DE KYOTO

Comme chacun le sait, le Congrès International des Mathématiciens aura lieu cette année à Kyoto (Japon) du 21 au 29 août 1990.

Les renseignements pratiques peuvent s'obtenir par courrier à l'adresse suivante : Secrétariat ICM-90, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kitashirakawa,

SAKYO-KU, KYOTO 606 JAPAN. On peut aussi téléphoner ((075)722-1278), Faxer ((075)753-7272), telexer 542 2020 RIMS J et mailer ICM90@Kurims.Kyoto-u,ac.jp.

Pour s'inscrire, il faut payer des droits qui sont, en yens et en dollars, donnés par le tableau suivant. On voit qu'il est important de respecter le délai du 15 mai 1990.

	jusqu'au 15 mai compris	après le 15 mai
Membre ordinaire	¥ 30 000 ou 200 \$	¥ 40 000
Membre accompagnant	¥ 10 000 ou 70 \$	¥ 10 000
enfant de membre	gratuit	gratuit

Si le paiement est fait après le 15 mai, il ne peut plus l'être en US \$. Pour les détails indispensables (numéro de compte, banque,...) adressez-vous au *Secrétariat ICM* qui a édité une très belle brochure que vous devez aussi pouvoir trouver dans votre département mathématique.

A noter aussi de très nombreux congrès qui accompagnent le congrès international. Il en existe officiellement 22 dans plusieurs villes et suivant plusieurs périodes (du 13 août au 7 septembre).

Enfin, pour le logement, les excursions et les activités non mathématiques organisées, il faut pour s'inscrire écrire avant le 30 juin 1990 à : JAPAN TRAVEL BUREAU, Kyoto Office, ICM-90 Dept., Higashi-shiokoji-cho, Shimogyo-ku, KYOTO 600, Japan.

Bon congrès et bon voyage!

LIVRES ___

LIVRES RECUS

ENSEIGNEMENT

Ondelettes et opérateurs l' Ondelettes

Y. Meyer

Coll. "Actualités mathématiques", Hermann.

Ce livre est le premier d'une série de trois ouvrages consacrés à la théorie des ondelettes. Son objectif est de donner une présentation mathématique complète de cette théorie qui au niveau des techniques est proche de l'analyse harmonique mais qui a trouvé des domaines d'applications très variés comme la turbulence, l'acoustique médicale, la théorie du signal....

Le livre s'adresse à des étudiants de troisième cycle possédant un bagage solide en analyse fonctionnelle ou à des ingénieurs très motivés. Les têtes de chapitre du tome 1 sont : Séries et intégrales de Fourier, filtrage et échantillonage; les analyses multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$; les bases orthonormées d'ondelettes; les ondelettes,

l'espace de Hardy et son dual BMO; ondeletttes et espaces fonctionnels.

Exercices de valeurs propres de matrices

Mario Ahues et Françoise Chatelin

Coll. "Mathématiques Appliquées Pour la Maîtrise", Masson, 176 p., 1989, 130 F.

Cet ouvrage contient des énoncés et solutions d'exercices correspondant au cours de Françoise Chatelin paru dans la même collection. L'ouvrage contient des exercices d'algèbre linéaire théorique, de théorie spectrale en dimension finie, de calcul des valeurs propres sur des exemples industriels et fondamentaux, et des algorithmes de calcul des éléments propres de matrices denses de taille moyenne et de matrices creuses de grande taille. Il est destiné en premier lieu aux étudiants de maîtrise, élèves de grandes écoles, et aussi ingénieurs ou chercheurs concernés par le calcul numérique de valeurs propres.

LIVRES RECUS

ENSEIGNEMENT

Cours de mathématiques, 3 Compléments d'analyse Classes préparatoires, 1er cycle universitaire

J.-M. Arnaudiès

Dunod Université, 522 p., 1989.

Ce volume contient les questions relatives aux séries entières et séries de Fourier, au calcul différentiel, aux intégrales multiples et à l'intégration des équations différentielles.

Analyse fonctionnelle M. Samuelides et L. Touzillier

Coll. "La Chevêche", Cepadues-Editions, 289 p., 1989, 210 F.

Cet ouvrage est issu du cours d'analyse de l'ENSAE. Il contient la théorie des espaces de Hilbert, la théorie de l'intégration, la théorie de la dualité dans les espaces de Banach et de l'approximation faible, avec applications aux espaces l^p et L^p , une introduction aux distributions et aux espaces de Sobolev, et se termine par un chapitre de théorie spectrale. De nombreux exercices sont donnés dans chaque chapitre.

Algèbre

P. Hendron et B. Gérardin

Dunod, 290 p., 1989.

Cet ouvrage est destiné aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles commerciales. Il s'agit d'un recueil d'exercices d'algèbre : numération, algèbre générale, polynômes, algèbre linéaire. Chaque chapitre se compose d'un rappel de cours, puis d'une suite de questions auxquelles l'élève répond par "vrai" ou "faux", permettant de tester ses connaissances, enfin viennent une suite d'exercices et de problèmes de difficulté variable.

RECHERCHE

L'automatique pour l'aéronautique et l'espace

édité par la SMAI.

Il s'agit des comptes rendus du colloque national organisé sur ce thème par la SMAI en 1989. On y trouve une vingtaine de contributions émanant pour la plupart de chercheurs de grandes entreprises (Aérospatiale, Sagem, Cnes ...).

Bifurcation in rotating bodies P.J. Rabier et J.T. Oden

Coll. "Recherches en Mathématiques appliquées", édité par Masson conjointement avec Springer-Verlag.

L'ouvrage présente l'aspect mathématique des déformations d'un cylindre tournant, hyperélastique, incompressible, homogène et isotrope. Il est très spécialisé et s'adresse à des chercheurs déjà avancés en mathématiques appliquées.

HISTOIRE, PHILOSOPHIE, VULGARISATION DES MATHÉMATIQUES

Traité des substitutions et des équations algébriques

Camille Jordan

Editions Jacques Gabay, 670 p., 1989, 522 F.

La réédition de l'original du grand classique de théorie des groupes publié en 1870.

Augustin-Louis Cauchy Analyse algébrique Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique

Editions Jacques Gabay, 600 p., 1989, 450 F.

Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857 Christian Gilain

Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'Ecole Polytechnique, juillet 1989, n° 5, 148 p.

C. Gilain analyse l'évolution du cours d'analyse de Cauchy à l'Ecole Polytechnique entre 1815 et 1830. Il en situe l'évolution dans le contexte des discussions, parfois vives, qui visèrent à définir quel devait être le rôle exact dévolu aux mathématiques dans la formation des ingénieurs. L'on pourra dorénavant se reporter à la réédition du cours d'analyse publié de Cauchy pour entrer plus avant dans les détails de ces questions.

LIVRES 35

Géométrie descriptive

Gaspard Monge

Editions Jacques Gabay, 132 p.+XXV planches, 1989, 207 F.

Ce livre fournit la réédition des leçons données à l'Ecole Normale de l'An III, première rédaction d'un corps de doctrine que Monge avait élaboré au contact des techniques graphiques mises au point dans le cadre de plusieurs domaines d'application et qu'il avait synthétisé avant de l'appliquer à la géométrie pure.

COMPTES RENDUS

Geometric inequalities

Yu.D. Burago et V.A. Zalgaller

Voici un livre opportun, dont la lecture est particulièrement nécessaire en France. Le thème des inégalités géométriques a une origine mythique évoquant la reine Didon placée devant la nécessité d'enfermer la plus grande surface possible avec une peau de bœuf, qu'elle fit découper en lanières. Quelques millénaires plus tard, la théorie a obtenu des résultats très remarquables et a trouvé récemment des applications spectaculaires en combinatoire, en géomérie riemannienne et en théorie des espaces de Banach.

Commençons donc par l'inégalité isopérimétrique classique, reliant l'aire S enfermée par une courbe fermée simple du plan euclidien et la longueur L de celle-ci :

$$L^2 - 4\pi S \ge 0.$$

Le point difficile est que l'égalité n'a lieu que si la courbe est un cercle. Une des plus jolies démonstrations est celle de Bonnesen, qui fait intervenir le rayon r du cercle inscrit et le rayon R du cercle circonscrit à la courbe :

$$L^2 - 4\pi S \ge \pi^2 (R - r)^2.$$

En fait, l'inégalité de Bonnesen provient de ses recherches sur les inégalités isopérimétriques sur la sphère, et il y a des résultats fins sur les généralisations de l'inégalité isopérimétrique et de celle de Bonnesen aux surfaces minimales et plus généralement des inégalités faisant intervenir la courbure moyenne de la surface. Par exemple, il existe une constante c telle que, si $f\colon M \to \mathbb{R}^n$ est une immersion de classe \mathcal{C}^2 d'une surface compacte à bord, notant F et L respectivement la surface de M et la longueur de son bord pour la métrique induite par l'immersion, et Q la moyenne sur M de la longueur

du vecteur de courbure moyenne de M pour l'immersion f, on ait l'inégalité

$$F \le c(L+Q)^2.$$

En particulier, si f(M) est une surface minimale, sa courbure moyenne est nulle et l'on trouve une inégalité

$$F < cL^2$$
.

Lorsque par exemple la frontière ∂M est connexe, ou lorsque f(M) donne un minimum absolu pour la surface parmi toutes les surfaces de même bord, cette inégalité est valable sous la forme

$$L^2 - 4\pi F \ge 0.$$

Hors du cadre strictement "isopérimétrique", on trouve les belles inégalités à la Loewner-Berger majorant le carré de la longueur minima d'une géodésique fermée d'une surface en fonction de l'aire F de celle-ci.

A la fin du siècle dernier, Brünn et Minkowski découvrirent l'inégalité qui porte leur nom; elle concerne la somme de Minkowski A+B de deux sous-ensembles A et B de \mathbf{R}^d , qui est simplement $A+B=\{x+y;x\in A,y\in B\}$; par exemple si \mathbf{B} est la boule unité fermée de rayon 1 dans \mathbf{R}^d , l'ensemble $A_\rho=A+\rho\mathbf{B}$ n'est autre que le $\rho-$ voisinage $\{x\in\mathbf{R}^d/d(x,A)\leq\rho\}$ de A. Si A et B sont deux sous-ensembles compacts de \mathbf{R}^d , ils sont de volume (mesure de Lebesgue) fini, ainsi que leur somme de Minkowski, et l'on a l'inégalité de Brünn-Minkowski :

$$Vol(K_1 + K_2)^{\frac{1}{d}} \ge Vol(K_1)^{\frac{1}{d}} + Vol(K_2)^{\frac{1}{d}}$$

L'égalité n'a lieu que dans les cas suivants : A et B sont des sous-ensembles convexes d'intérieur non vide de \mathbf{R}^d qui sont homothétiques à translation près (c'est-à-dire $A=\lambda B+x$ avec $\lambda\in\mathbf{R}_+$ et $x\in\mathbf{R}^d$), ou $\mathrm{Vol}(A+B)=0$, ou l'un des deux est un point.

36 LIVRES

L'inégalité de Brünn-Minkowski appliquée à A_o donne

$$\operatorname{Vol}(A_{\rho})^{\frac{1}{d}} \ge \operatorname{Vol}(A)^{\frac{1}{d}} + \rho \operatorname{Vol}(B)^{\frac{1}{d}}$$

et on obtient donc

l'inégalité isopérimétrique

$$\begin{aligned} & \liminf_{\rho \to 0} \left(\frac{\operatorname{Vol}(A_{\rho})^{\frac{1}{d}} - \operatorname{Vol}(A)^{\frac{1}{d}}}{\rho} \right) \\ & = \frac{1}{d} \operatorname{Vol}(A)^{\frac{1-d}{d}} \liminf_{\rho \to 0} \left(\frac{\operatorname{Vol}(A_{\rho}) - \operatorname{Vol}(A)}{\rho} \right) \\ & > (\operatorname{Vol} \mathbf{B})^{\frac{1}{d}} \end{aligned}$$

et si le bord ∂A de A est lisse par morceaux, le terme de gauche, appelé en général mesure de Minkowski (externe) du bord ∂A de A, coïncide avec $\operatorname{Vol}(\partial A)$ et l'on trouve

 $Vol(\partial A)^d > d^d Vol(B) Vol(A)^{d-1}$.

L'inégalité de Brünn-Minkowski implique aussi que si l'on note r(A) le rayon de la boule ayant pour volume V(A), on a l'inégalité

$$r(A_{\rho}) \geq r(A) + \rho$$

et sous cette forme, elle demeure valable pour tout sous-ensemble compact dans l'espace hyperbolique et la sphère (dans ce dernier cas, il faut bien sûr que A ne soit pas toute la sphère). L'égalité dans l'inégalité isopérimétrique implique que A est réunion d'une boule fermée et d'un "voile", ensemble de mesure d—dimensionnelle nulie qui n'augmente pas la mesure de Minkowski. Si l'on suppose que A est convexe, alors c'est une boule fermée.

L'inégalité isopérimétrique admet des avatars pour les courants, ainsi que pour les images dans \mathbf{R}^d de variétés différentiables par des applications continues.

Dans le cas des sous-ensembles convexes, l'inégalité de Brünn-Minkowski est conséquence d'inégalités bien plus subtiles, appelées inégalités d'Alexandrov-Fenchel entre les volumes mixtes. Les volumes mixtes sont définis au moyen du résultat suivant, dû à Minkowski : le volume d'une combinaison linéaire au sens de l'addition de Minkowski, à coefficients positifs, de s sous-ensembles convexes de R^d est polynomial en les coefficients.

$$\operatorname{Vol}(\sum_{i=1}^{s} \lambda_{i} K_{i}) = \sum_{|\alpha|=d} \frac{d!}{\alpha_{1}! \dots \alpha_{s}!}$$

$$\operatorname{Vol}(K_{1}^{[\alpha_{1}]}, \dots, K_{s}^{[\alpha_{s}]}) \lambda_{1}^{\alpha_{1}} \dots \lambda_{s}^{\alpha_{s}}.$$

Ceci permet de définir le volume mixte $\operatorname{Vol}(K_1,\ldots,K_d)=\operatorname{Vol}(K_1^{[1]},\ldots,K_d^{[1]})$ de d convexes (non nécessairement distincts) de \mathbf{R}^d ; c'est le coefficient de $\lambda_1\ldots\lambda_d$ dans l'égalité ci-dessus. L'inégalité d'Alexandrov-Fenchel est

$$Vol(K_1, K_2, ..., K_d)^2 \ge Vol(K_1, K_1, K_3, ..., K_d)$$

 $Vol(K_2, K_2, K_3, ..., K_d)$

Dans le cas s=2, la formule de définition des volumes mixtes devient

$$\operatorname{Vol}(\lambda_1 K_1 + \lambda_2 K_2) = \sum_{i=1}^{d} \binom{d}{i} \operatorname{Vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]}) \lambda_1^i \lambda_2^{d-i}$$

et, posant $w_i = \operatorname{Vol}(K_1^{[i]}, K_2^{[d-i]})$, on remarque que $w_d = \operatorname{Vol}(K_1)$ et $w_0 = \operatorname{Vol}(K_2)$. Les inégalités d'Alexandrov-Fenchel deviennent

$$w_{i-1}^2 \ge w_i w_{i-2}$$
.

On tire aussitôt des définitions et en télescopant ces inégalités l'inégalité de Brünn-Minkowski pour les convexes. Ce que l'on a gagné est que l'égalité dans l'inégalité de Brünn-Minkowski implique maintenant les d-1 égalités

$$\frac{w_d}{w_{d-1}} = \dots = \frac{w_1}{w_0}.$$

Soit r cette valeur commune; en remplaçant K_2 par rK_2 on se ramène au cas où tous les volumes mixtes sont égaux entre eux. C'est un résultat remarquable que ces d égalités numériques suffisent à impliquer que les convexes K_1 et K_2 sont égaux à translation près.

Le volume mixte $\operatorname{Vol}(K^{\{i\}}, \mathbf{B}^{\{d-i\}})$ d'un convexe K avec la boule \mathbf{B} s'interprète (à un facteur près qui ne dépend que de la dimension d et de i) de plusieurs façons intéressantes; comme valeurs moyennes de la i—ème fonction symétrique des rayons de courbure principaux sur le bord de K, lorsque ce bord est de classe \mathcal{C}^2 , mais aussi comme valeur moyenne du volume des projections orthogonales de K sur des sousespaces linéaires de dimension i de \mathbf{R}^d . Il y a de nombreuses extensions et variantes des inégalités d'Alexandrov-Fenchel, et en particulier les inégalités analogues entre déterminants mixtes de matrices définies positives,

qui ont servi récemment à prouver la conjecture de van der Waerden sur les permanents. Les démonstrations conceptuelles des inégalités d'Alexandrov-Fenchel font appel, sous une forme plus ou moins élaborée, à la théorie de l'indice des opérateurs elliptiques autoadioints.

Parmi les généralisations de l'inégalité isopérimétrique, on peut remarquer celle qui concerne les immersions $f:M\to \mathbb{R}^d$ de classe \mathcal{C}^2 d'une variété sans bord M de dimension m. Si $E\subset M$ est un sous-ensemble relativement compact mesurable, notant T(E) l'intégrale $m\int_E |H|dV$, où H est le vecteur de courbure moyenne de f(M), déduit de la seconde forme fondamentale, et P(E) le périmètre de $E\subset M$, pour la métrique riemannienne induite par f (qui est une généralisation de la mesure de Hausdorff (m-1)-dimensionnelle du bord) on a l'inégalité

$$\operatorname{Vol}(E)^{m-1} \le C(m)(P(E) + T(E))^m.$$

Dans le cadre général de la géométrie riemannienne, des travaux récents comparent le volume de sous-variétés, ou de voisinages d'icelles, à des quantités liées au vecteur de courbure moyenne de la sous-variété. Par exemple un théorème de Margulis affirme l'existence pour chaque dimension $d \geq 2$ d'une constante c(d) telle que si M est une variété riemannienne de dimension $d \geq 2$ et k > 0 un nombre tel que toutes les courbures sectionnelles K_σ satisfassent la condition $-k \leq K_\sigma < 0$, on ait l'inégalité

$$Vol(M) > c(d)k^{-\frac{d}{2}}$$
.

Des résultats très récents de Gromov donnent pour des variétés riemanniennes quelconques les inégalités à la Loewner-Berger, c'est-àdire concernant le volume des sous-variétés non homologues à 0.

Je termine ici cette énumération d'énoncés, obtenue en prenant dans chaque chapitre du livre de Burago-Zalgaller un résultat que je trouve typique. Il y a bien d'autres extensions, variantes, etc.

Le plan est agréable, présentant très complètement le cas de la dimension 2 avant les dimensions supérieures. Le contenu nous fait parcourir le chemin qui va de l'inégalité isopérimétrique des Grecs aux résultats

profonds de géométrie riemannienne aui utilisent des idées isopérimétriques pour étudier la structure des variétés. Tout n'est pas démontré, loin de là, mais les références sont nombreuses, et des indications aident à sentir le style des démonstrations. Il est regrettable que le chapitre 4 sur les volumes mixtes ne respecte pas tout-à-fait le style d'exposition; en 70 pages sur ce sujet les auteurs parviennent à ne pas énoncer clairement (cf. p.147, 20.5) le critère numérique d'égalité des convexes que i'ai cité plus haut, et qui est, me semble-t-il, la motivation originelle de la théorie des volumes mixtes, et ne donnent a fortiori aucune indication sur sa démonstration. En fait, il eut été bien plus dans l'esprit du livre de donner la seconde démonstration d'Alexandrov pour les inégalités (qui donne le cas d'égalité), plutôt que celle de l'addendum 3 utilisant les liens de la théorie des polytopes avec la géométrie algébrique. Une des applications les plus importantes de ces liens, (cf. [5]), qui est pourtant une suite exemplaire d'"inégalités géométriques", et qui plus est d'énoncé "élémentaire", puisqu'il s'agit des inégalités et égalités caractérisant les suites d'entiers obtenues comme suites (f_0,\ldots,f_{d-1}) des nombres de faces de chaque dimension des polytopes simpliciaux, n'est même pas mentionnée. Cet addendum est maintenant avantageusement remplacé par l'article [2] de Gromov qui, s'il n'est pas "élémentaire", dans la mesure où cette épithète a un sens, fait, lui, apparaître les mécanismes fondamentaux qui sous-tendent le résultat. Je signale aussi que le cas d'égalité dans l'inégalité d'Alexandrov-Fenchel générale vient d'être essentiellement élucidé par le Professeur G. Ewald (Bochum). Les notes historiques se réduisent essentiellement à des attributions de résultats et sont fort superficielles; par exemple (p. 90) il est dit que la première preuve rigoureuse de l'inégalité isopérimétrique est due à Edler, mais aucune référence n'est donnée, et la preuve de Weierstrass, conceptuellement fort importante, n'est pas mentionnée. Page 186. il est écrit que la formule de Minding pour le nombre d'intersection de deux courbes planes en fonction de leurs polygones de Newton a été oubliée de 1841 jusqu'aux travaux de D. Bernstein en 1975 et de Kushnirenko en

1976. En fait la même idée se retrouve plusieurs fois pour calculer le genre géométrique de courbes et surfaces, ce qui intéressait bien plus les mathématiciens de cette époque. Par exemple dans la thèse d'Elliott (Paris 1876), puis dans un article de Baker ([6]) et un article de Hodge ([7]).

Ces réserves faites, il demeure qu'il s'agit ici d'un livre riche, sur un sujet malheureusement beaucoup trop peu enseigné en France, et qui rassemble et structure une moisson de résultats et de méthodes géométriques dispersés dans la littérature et très utiles dans tous les domaines de la Géométrie.

Pour le lecteur souhaitant s'instruire plus avant dans ce domaine, je conseille la lecture de [1] qui est un magnifique panorama d'un sujet connexe, et celle de [3]. Les applications à la géométrie des espaces de Banach des inégalités géométriques, et en particulier des inégalités de volume entre un convexe et son dual, sont un sujet en plein développement, sur lequel on pourra consulter [4]. Un livre de Pisier contenant des résultats récents sur ce sujet est annoncé par Cambridge University Press.

Bibliographie

- [1] Luis A. Santaló, *Integral geometry* and geometric probability, Encyclopedia of Mathematics, vol.1, Addison-Wesley, Reading 1976.
- [2] Misha Gromov, Convex sets and Kähler manifolds. A paraître dans les actes d'un colloque publié par World Scientific.
- [3] Peter M. GRUBER et Jörg M. WILLS (Editeurs), Convexity and its applications, Birkhäuser, 1983.
- [4] LINDENSTRAUSS et MILMAN (Editeurs), Geometric aspects of functional analysis, Springer LNM No 1376.
- [5] Richard STANLEY, The number of faces of simplicial polytopes, Advances in Math. 35, (1980), 236-238.
- [6] BAKER, Trans. Camb. Phil. Soc., 15, (1894), 403–450.
- [7] W.V.D. Hodge, The isolated singularities of an algebraic surface, Proc. London math. soc. 30 (1930), 133–143.

Bernard Teissier D.M.I., Ecole Normale Supérieure

Fractals chez Springer

The Science of Fractal Images édité par H.-O. Peitgen et D. Saupe (Springer, 1988) présente de telles analogies avec The Beauty of Fractals de H.-O. Peitgen et P.-H. Richter (Springer, 1986) que la maison Springer ellemême m'adressant celui-là m'envoya celui-ci. Il n'est donc peut-être pas inintéressant d'en préciser les contenus respectifs.

Un coup d'œil distrait sur les titres peut d'ailleurs conforter cette ambiguïté puisque la référence à l'esthétique correspond à l'ouvrage plus proprement mathématique tandis que le vocable science de l'autre titre doit plutôt être compris au sens de technique.

The Beauty of Fractals, 1986.

Les images dont il s'agit ici de faire partager la beauté sont l'œuvre du chaos déterministe en dynamique holomorphe, plus précisément elles sont engendrées par l'itération de fractions rationnelles.

C'est l'extension au plan complexe de l'étude des phénomènes d'itération non linéaire qui, sur la droite réelle, a conduit à l'étonnante mise en évidence de la constante universelle de Feigenbaum. C'est la reprise et la poursuite des remarquables travaux de Fatou et Julia publiés pour l'essentiel entre 1918 et 1920. Aujourd'hui cependant les ordinateurs et leurs images permettent de visualiser ces résultats abstraits et de sensibiliser un auditoire considérablement plus large.

Soit donc R(z) une fonction rationnelle complexe. Dans l'étude des itérés z_0 , $z_1=R(z_0),\ldots z_n=R(z_{n-1}),\ldots$, les points fixes $(R(z_0)=z_0)$ jouent bien sûr un rôle important, mais aussi les cycles correspondant aux points périodiques $(R^n(z_0)=z_0, z_0$ étant alors un point fixe de R^n). Il faut cependant distinguer selon que ces points sont attractifs $(|(R^n)'(z_0)|<1)$, répulsifs $(|(R^n)'(z_0)|>1)$ ou indifférents $(|(R^n)'(z_0)|=1)$.

Comme le note Julia dans son Mémoire de 1918, l'ensemble qui joue un rôle fondamental est l'ensemble dérivé ou ensemble des points d'accumulation de l'ensemble des points périodiques répulsifs, on l'appelle aujourd'hui ensemble de Julia de la fonction R, on le notera J_R .

A tout point fixe attractif et, plus généralement, à tout cycle attractif correspond un bassin d'attraction. Or, l'ensemble de Julia est aussi la frontière de chacun de ces bassins d'attraction. Et l'on peut concevoir l'extrême complexité de cette frontière dès lors qu'il existe au moins trois bassins d'attraction, le plan étant alors partagé en trois - ou plus - sous-ensembles partageant euxmêmes la même frontière. Ceci explique la variété. l'étrangeté et la beauté des images que l'on découvre lorsqu'un ordinateur dessine ces ensembles générés par des fonctions aussi élémentaires que le sont des polynômes de degré deux, ou plus simplement, lorsqu'on feuillette le livre de Peitgen et Saupe.

A ces deux caractérisations de l'ensemble J_R corrrespondent deux méthodes de construction par ordinateur. L'une, basée sur cette propriété de frontière, consiste à mettre en évidence les différents bassins d'attraction; l'autre utilise le fait que l'orbite inverse $\{R^{-n}(z)|n\in\mathbb{N}\}$ de tout point z de J_R est dense dans J_R .

Dès qu'il existe un cycle attractif, l'ensemble de Julia est soit un ensemble connexe soit un ensemble de Cantor (dans ce dernier cas bien sûr ce ne peut être la frontière que d'un seul bassin d'attraction). Ces deux types d'ensemble de Julia sont classifiés à l'aide de l'ensemble de Mandelbrot lorsqu'on se limite à l'itération des polynômes du second degré $f_c(z) = z^2 + c$:

$$M = \{c \in C | J_c \text{ connexe}\}.$$

Mais c'est aussi, et cela résulte encore des travaux de Julia et Fatou, l'ensemble :

$$M = \{ c \in C | f_c^n(0) \nrightarrow \infty \}.$$

Cet ensemble, passionnant à lui seul, fournit des images étonnantes, avec notamment des phénomènes de quasi-auto-similitude.

La plupart des informations théoriques, et non pas seulement visuelles, dont on dispose à propos de cet ensemble M résultent, selon les travaux de Douady et Hubbard, de la considération du potentiel qu'il définit dans l'ensemble connexe complémentaire C-M, ainsi que des trajectoires orthogonales aux lignes équipotentielles. Elle permet de mettre en évidence un isomorphisme conforme entre

 $\mathbb{C}-M$ et $\mathbb{C}-D$ où D désigne le disque unité fermé.

Enfin, la méthode de Newton-Raphson de résolution de l'équation algébrique P(x) = 0 basée sur la récurrence :

$$x_{k+1} = x_k - P(x_k)/P'(x_k)$$

conduit à l'itération de la fraction rationnelle :

$$R(z) = z - P(z)/P'(z)$$

dont les points fixes correspondent aux zéros de P, et ceux-ci s'avèrent même être des points fixes superattractifs puisque :

$$R'(z) = P(z)P''(z)/P'(z)^{2}$$
.

Là encore la représentation des bassins d'attraction fournit d'intéressantes images.

L'ouvrage s'achève sur quatre contributions/commentaires dont un historique de Benoît Mandelbrot et une réflexion d'Adrien Douady sur les équipotentielles.

Les résultats énoncés dans ce livre ne sont pas toujours démontrés, certaines preuves sont esquissées, des références sont fournies.

Mais cet ouvrage est très agréable à parcourir : c'est un beau livre. Il constitue une bonne introduction ou incitation à l'étude de la dynamique holomorphe. Il contribuera certainement, si cela était nécessaire, à sa popularisation. Il pourrait aussi être l'occasion d'une lecture – voire d'une relecture – des fantastiques travaux de Julia et Fatou que ces images éclairent d'un jour nouveau.

The Science of Fractal Images, 1988

Il s'agit cette fois, selon les éditeurs du "premier livre parlant des fractals uniquement du point de vue des tracés d'ordinateur. Bien que les concepts fondamentaux et les algorithmes ne soient pas introduits et discutés avec toute la rigueur mathématique, nous avons fait un véritable effort pour justifier et motiver lorsque cela apparaissait opportun."

Ce livre est constitué en cinq chapitres à partir d'un cours donné par les cinq auteurs (un auteur par chapitre!). De plus, comme il se doit ces chapitres sont précédés d'un avant-propos de Benoît Mandelbrot.

De par sa construction même le discours de ce livre n'est pas linéaire, bien des paragraphes peuvent être lus indépendamment

les uns des autres. Il y a de nombreuses digressions, ce qui participe de l'agrément du livre, donnant l'impression de toucher à beaucoup de choses, de saisir des rapports dans tout; ceci est frustrant aussi car on n'y décèle pas toujours une théorie en forme, mais des indications seulement, des pistes intéressantes certes, parfois floues. L'organisation de l'ouvrage en rend d'ailleurs compte:

"Fractals in Nature: from characterization to simulation" de Richard Voss constitue une sorte d'introduction: courbes fractales traditionnelles, auto-similitude et auto-similitude statistique, dimensions fractales associées, images statistiquement auto-semblables simulant paysages, cratères, nuages.

"Algorithms for random fractals" de Dietmar Saupe est centré sur le mouvement brownien de dimension 1 et ses extensions (mouvement brownien fractionnaire et dimensions supérieures) et s'achève sur des algorithmes et des schémas de programmes permettant de représenter montagnes ou océans.

"Fractal patterns arising in chaotic dynamical systems" de Robert Devaney rappelle les exemples classiques de systèmes déterministes chaotiques de May et Hénon, puis se focalise sur l'itération de fonctions complexes f(z) et les ensembles de Julia correspondants, essentiellement lorsque $f(z)=z^2+c$ et $f(z)=a\,e^z$.

'Fantastic deterministic fractals'' de Heinz-Otto Peitgen développe l'étude du chapitre précédent dans le cas de l'itération des polynômes $f(z)=z^2+c$, précise les ensembles de Julia, l'ensemble de Mandelbrot, étudie les courbes équipotentielles et enfin envisage la situation à laquelle conduit la méthode de Newton.

"Fractal modelling of real world images" de Michael Barnsley fournit des indications sur les systèmes de fonctions itérées permettant d'obtenir nuages, végétations et paysages fractals.

Quatre appendices clôturent l'ouvrage : Benoît Mandelbrot montre comment obtenir des paysages avec des rivières; Michael McGuire propose des photographies réelles dont nous pouvons nous demander, la perversion étant parvenue à un tel stade, si elles ne seraient pas fractales; les deux autres apportent des compléments techniques relatifs aux algorithmes.

N'oublions pas d'évoquer les remarquables et fascinantes images-couleur insérées dans le cours de l'ouvrage représentant fleurs, paysages et planètes fractals.

En conclusion, il s'agit d'un ouvrage qui oscille entre un niveau scientifique élevé et des recettes pour faire de bonnes images. Si l'on s'intéresse à la dynamique holomorphe, il vaut mieux s'adresser au livre précédent plutôt que de consuler les chapitres 3 et 4 de celui-ci. De par ses particularités, ce livre s'adresse plutôt et passionnera certainement le bricoleur de haut niveau amoureux des fractals et de l'informatique. A cet égard, il répond parfaitement à son propos.

Jean-Luc Chabert Université de Picardie

P.S.: Pour mémoire, indiquons que le numéro 4, volume 11, de *The Mathematical Intelligencer* publie une controverse entre Benoît Mandelbrot et Steven Krantz, reviewer pour le Bulletin de l'AMS des deux livres évoqués ici, controverse un peu vive relative à la question de savoir si la géométrie fractale est une science, celle-ci en tant que telle n'ayant jamais résolu un problème, ni prouvé aucun théorème.

ERRATUM concernant le compte-rendu de Jean-Pierre Labesse :

A la suite d'une erreur de transmission des textes, c'est une version préliminaire du compte rendu de Jean-Pierre Labesse qui a été publié dans le numéro précédent (n° 43, pp. 29–30) de la Gazette. Le Comité de Rédaction s'en excuse auprès de l'auteur.

INTRODUCTION À LA MULTISOMMABILITÉ

Michèle LODAY-RICHAUD (Université Paris Sud - Orsay)

Ce texte est la rédaction d'un exposé présenté aux Journées Dynamiques des 24 et 25 novembre 1989 à Paris.

Il traite de l'étude locale des singularités des équations différentielles linéaires dans le champ complexe. On y analyse quelques exemples simples mais typiques pour illustrer la théorie de la resommation du point de vue de Martinet-Ramis et on y montre en particulier comment apparaissent les accélérations d'Ecalle dans ce contexte. Il ne s'agit pas ici d'exposer la théorie mais de l'introduire. Les exemples d'équations choisis sont aussi simples que possible sans être triviaux. On en connaît non seulement les solutions séries formelles, mais aussi de vraies solutions données par des formules intégrales. Les deux premiers exemples sont classiques et simples à plus d'un titre. On explique en quel sens précis les vraies solutions sont à regarder comme des sommes - on dit aussi des resommées - des solutions formelles. Dans le troisième exemple, on exprime la vraie solution sous une nouvelle forme intégrale qui, convenablement généralisée, permettra de resommer n'importe quelle solution formelle d'une équation différentielle linéaire analytique arbitraire. On donne ensuite un schéma de la théorie de la multisommabilité et on indique comment on applique cette théorie aux équations différentielles linéaires.

On a choisi de faire cette étude au voisinage de 0 dans C. Dans un souci de simplicité, on n'a pas formalisé toutes les définitions préférant souvent ne retenir que l'argument essentiel. On trouvera des énoncés précis dans les articles de référence.

EXEMPLE 1. – EXEMPLE DE 1-SOMMABILITÉ : Equation d'Euler $x^2y' + y = x$

Cette équation admet une seule solution série formelle au voisinage de l'origine

$$\widehat{f}_1(x) = \sum_{n>0} (-1)^n n! x^{n+1}.$$

Cette série, étant divergente, n'est pas sommable au sens habituel du terme en une fonction solution de l'équation d'Euler au voisinage de 0.

Par ailleurs, nous savons intégrer cette équation différentielle par des méthodes élémentaires : restreignons-nous par exemple à l'axe réel positif (x > 0). Alors les solutions de l'équation homogène $x^2y' + y = 0$ sont toutes

proportionnelles à la fonction $y=e^{1/x}$ et la méthode de variation de la constante appliquée à $y=C^{te}e^{1/x}$ fournit une solution "particulière" de la forme

$$f_1(x) = \int_0^x e^{1/x} \cdot e^{-1/t} \frac{dt}{t}.$$

Cette solution est la seule qui soit bornée quand x tend vers 0 sur \mathbb{R}^+ . Par le changement de variable $t \mapsto \xi$ défini par $\frac{1}{t} - \frac{1}{x} = \frac{\xi}{x}$ celle-ci s'écrit

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\xi} e^{-\frac{\xi}{x}} d\xi, \quad x > 0.$$

Nous nous proposons de faire le lien entre cette fonction f_1 et la série formelle $\widehat{f_1}$.

Polygone de Newton

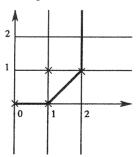
Etant donné une équation différentielle linéaire (= homogène) on lui associe son polygone de Newton de la façon suivante : pour chaque monôme $x^j \frac{d^i y}{dx^i}$ apparaissant effectivement dans l'équation, on marque dans le "demi-plan" $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ le point de coordonnées (i, j-i). Le polygone de Newton est l'enveloppe convexe de la famille des deuxièmes quadrants de sommet chacun des points marqués.

A l'équation d'Euler $x^2y' + y = x$ associons donc l'équation homogène

$$x^3y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$$

obtenue en dérivant l'équation d'Euler écrite sous la forme $xy' + \frac{1}{x}y = 1$. Ses solutions sont engendrées par les solutions de l'équation d'Euler $x^2y' + y = x$ et par celles de l'équation homogène associée $x^2y' + y = 0$ et il revient au même d'étudier l'équation d'Euler sous sa forme initiale ou sous sa forme homogène $x^3y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$. Le polygone de Newton de celle-ci, dessiné ci-dessous, admet

- un côté de pente nulle et de longueur 1 : l'équation admet donc une solution série formelle; c'est la série d'Euler \hat{f}_1 ,
- et un côté de pente 1 : on en déduit que la seule série solution est "au pire" Gevrey de niveau 1 (*cf.* définition 1 ci-dessous) car 1 est la plus petite pente non nulle du polygone de Newton. Elle est en fait ici exactement Gevrey de niveau 1 et nous allons voir qu'elle est 1-sommable (définitions 3 et 4).



Interprétation de l'écriture intégrale de f_1

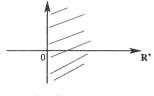
On reconnaît dans l'expression de f_1 la transformée de Laplace (en la variable $\frac{1}{x}$) de la fonction $\frac{1}{1+\epsilon}$.

Pour $|\xi| < 1$ on a $\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \xi^n$ et en tant que série formelle $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \xi^n$ est la transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f}_1)$ de \widehat{f}_1 (de façon générale, on définit $\widehat{\mathcal{B}}$ par $\widehat{\mathcal{B}}(\sum_{n \geq 0} a_n x^{n+1}) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} \xi^n$). Ainsi le facteur $\frac{1}{1+\xi}$ contenu dans l'expression intégrale de f_1 est reconstructible à partir de \widehat{f}_1 par la succession des transformations suivantes : transformation de Borel formelle de \widehat{f}_1 , sommation de la série convergente obtenue sur le disque $|\xi| < 1$ puis prolongement analytique au demi-axe réel positif. Pour abréger, nous appellerons transformation de Borel $\mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}$ de \widehat{f}_1 dans la direction \mathbf{R}^+ (ou simplement transformation de Borel \mathcal{B} si la direction choisie ne prête pas à ambiguïté) cette succession de transformations.

En résumé, on peut écrire $f_1 = \mathcal{L}_{\mathbf{R}^+} \circ \mathcal{B}_{\mathbf{R}^+}(\widehat{f_1})$ et schématiser

$$\widehat{f}_1 \xrightarrow{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}} \mathcal{B}(\widehat{f}_1) \xrightarrow{\mathcal{L}_{\mathbb{R}^+}} f_1$$

où $\mathcal{L}_{\mathbf{R}^+}$ ou plus simplement \mathcal{L} désigne la transformation de Laplace dans la direction \mathbf{R}^+ .



plan des x

Le domaine naturel de définition et d'analyticité de la fonction f_1 ainsi construite est le demi-plan $\operatorname{Re} x > 0$ bissecté par la direction \mathbf{R}^+ .

Développement asymptotique

On a

$$\frac{1}{1+\xi} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \xi^n + \frac{\xi^N}{1+\xi}$$

d'où

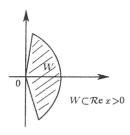
$$|f_{1}(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^{n} n! x^{n+1}| \leq \int_{0}^{+\infty} \left| \frac{\xi^{N} e^{-\xi/x}}{1+\xi} \right| d\xi$$

$$\leq \int_{0}^{+\infty} \xi^{N} e^{-\xi \operatorname{Re}\left(\frac{1}{x}\right)} d\xi$$

$$\leq \frac{N!}{\operatorname{Re}\left(1/x\right)^{N+1}}.$$

On a donc sur tout sous-secteur fermé W (de sommet 0 et fermé dans \mathbb{C}^*) du demi-plan $\Re x > 0$ de définition de f_1 :

$$|f_1(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n n! x^{n+1}| \le C^{te} N! |x|^{N+1}.$$



La constante dépend du sous-secteur et le coefficient de $|x|^{N+1}$ croît avec N comme N!.

DÉFINITION 1 ([R2]). — Une série $\sum a_n x^n$ est dite Gevrey (de niveau 1) si ses coefficients vérifient une condition de croissance du type

$$|a_n| \le C^{\text{te}} A^n n! \quad (A > 0).$$

DÉFINITION 2 ([R1] § II). — Une fonction f définie sur un secteur V de sommet 0 est dite asymptotique au sens Gevrey (de niveau 1) à une série Gevrey $\widehat{f} = \sum a_n x^n$ si, sur tout sous-secteur fermé W de V, on a, pour tout N, une majoration du type

$$|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n| \le C^{\text{te}} A^N N! |x|^{N+1} \quad (A > 0),$$

la constante dépendant de W mais pas de N.

Ainsi, la série d'Euler \widehat{f}_1 est une série Gevrey et la solution f_1 est asymptotique à \widehat{f}_1 au sens Gevrey sur le demi-plan $\operatorname{Re} x > 0$.

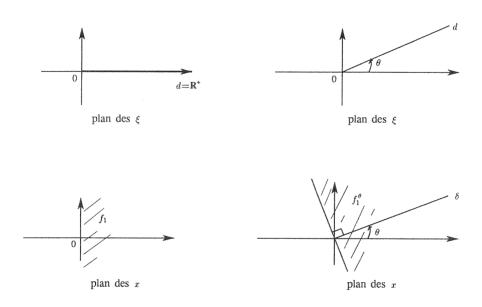
La notion de développement asymptotique au sens Gevrey est plus restrictive que la simple notion de développement asymptotique qui ignore totalement le type de la dépendance du coefficient de $|x|^{N+1}$ par rapport à N. On montre qu'une fonction analytique est plate⁽¹⁾ au sens de Gevrey de niveau 1 sur un secteur donné si elle peut être majorée (sur tout sous-secteur fermé) par

^{(1) &}quot;plate" est ici synonyme de "asymptotique à la série nulle 0" (contexte additif). "Plate au sens Gevrey" impose en outre que l'asymptoticité à 0 ait lieu avec conditions Gevrey. Ainsi, la fonction $e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}$ est plate sur le demi-plan $\Re e \, x > 0$, mais elle n'y est pas plate au sens Gevrey de niveau 1.

une exponentielle d'ordre 1 plate. (Voir par exemple Guelfand-Chilov, Les distributions, tome 2, chap. 4, Dunod 1964). Et il est important de remarquer que de ce fait, ce secteur de platitude est alors au plus un demi-plan. Ainsi, par exemple sur le demi-plan $\operatorname{Re} x > 0$ il existe une infinité d'exponentielles plates au sens Gevrey de niveau 1 : ce sont toutes les exponentielles $e^{-a/x}$ avec a réel positif; elles sont toutes d'ordre exactement 1 et non pas ≤ 1 . Sur tout secteur ouvert strictement plus grand il n'existe qu'une seule fonction plate en ce sens : la fonction nulle.

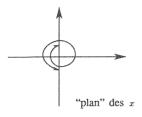
Changement de direction

Donnons-nous dans le plan des ξ une demi-droite d d'angle polaire θ et imaginons un instant que θ est petit (en fait $|\theta|<\pi$). La formule $f_1^{\theta}(x)=\int_d \frac{1}{1+\xi}e^{-\frac{\xi}{x}}d\xi$ c'est-à-dire $f_1^{\theta}=\mathcal{L}_d\circ\mathcal{B}_d(\widehat{f_1})$ définit une fonction analytique sur le demi-plan Π^{θ} bissecté par la demi-droite d'angle polaire θ dans le plan des x.



La fonction $\frac{1}{1+\xi}e^{-\frac{\xi}{x}}$ de la variable ξ est analytique sur un voisinage du secteur $0 \le \arg \xi \le \theta$ et le théorème de Cauchy montre alors que f_1 et f_1^{θ} coïncident sur la partie commune de leur domaine de définition. Autrement dit, f_1^{θ} définit un prolongement analytique de la fonction f_1 . De façon évidente f_1^{θ} , comme f_1 , est solution de l'équation d'Euler et elle est asymptotique à \widehat{f}_1 au sens Gevrey de niveau 1 sur son demi-plan de définition Π^{θ} . La fonction f_1^{θ} fournit donc une solution analytique prolongeant f_1 et asymptotique à \widehat{f}_1 au sens Gevrey de niveau 1 sur le domaine de définition prolongé $\Pi^0 \cup \Pi^{\theta}$.

On peut chercher à poursuivre ce prolongement le plus loin possible en faisant varier θ aussi longtemps que la formule de définition de f_1^{θ} garde un sens. C'est le pôle $\xi=-1$ de la fonction $\frac{1}{1+\xi}$ qui fait barrage. Ainsi, partant de la valeur 0, θ ne peut varier qu'entre $-\pi$ et $+\pi$.



On obtient une solution analytique et asymptotique à \widehat{f}_1 au sens Gevrey de niveau 1 et que nous noterons encore f_1 sur le domaine maximal

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}.$$

En particulier, sur le demi-plan $\Re x < 0$ ceci fournit a priori deux solutions asymptotiques à \widehat{f}_1 .

Comparons les deux solutions ainsi obtenues sur $\Re x < 0$: pour $\varepsilon > 0$ petit (en fait $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$) le théorème des résidus donne

$$f_1^{+\pi-\varepsilon}(x) - f_1^{-\pi+\varepsilon}(x) = 2i\pi \operatorname{Res}\left(\xi = -1, \frac{1}{1+\xi}e^{-\frac{\xi}{x}}\right)$$
$$= 2i\pi e^{1/x}.$$

Ces résultats appellent quelques commentaires :

- I.— Le prolongement de f_1 apparaît naturellement comme étant non pas une fonction sur \mathbb{C} mais sur la surface de Riemann du logarithme $\widetilde{\mathbb{C}^*}$: c'est la situation normale pour les solutions d'une équation différentielle au voisinage d'un point singulier tel ici l'origine 0 pour l'équation d'Euler.
- 2. Les théorèmes généraux de prolongement des solutions des équations différentielles en dehors des points singuliers (déduits du théorème de Cauchy) montrent que la solution f_1 peut se prolonger analytiquement en tournant indéfiniment autour de 0. Mais en franchissant les bornes du secteur $-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$ ce prolongement cesse d'être asymptotique à \widehat{f}_1 .
- 3. Notons $f_1^{+\pi}$ et $f_1^{-\pi}$ les fonctions définies sur $\Re e \, x < 0$ par prolongement de $f_1^{+\pi-\varepsilon}$ et de $f_1^{-\pi+\varepsilon}$ respectivement. Ce sont deux solutions de l'équation d'Euler. On sait donc a priori que leur différence est proportionnelle à la solution $e^{1/x}$ de l'équation homogène. Ce que donne en plus le calcul précédent c'est la valeur $2i\pi$ du coefficient de proportionnalité. Ce coefficient étant non nul, f_1 n'est pas analytique en 0. Il caractérise à lui seul le "défaut" d'analyticité de la solution : c'est l'unique invariant analytique de l'équation d'Euler ([C], pp. 56-60. La famille des invariants A_ω se réduit à $A_{-1} = 2i\pi$, [E1], [MR1] II.5).

4. — Lorsque sur un secteur d'ouverture strictement supérieure à π il existe une fonction analytique asymptotique au sens Gevrey (de niveau 1) à la série \widehat{f}_1 (elle-même Gevrey) une telle fonction est unique. En effet, s'il en existait deux, leur différence serait plate au sens Gevrey, donc nulle.

Ce qui précède montre que l'*unicité* des solutions asymptotiques au sens de Gevrey à une solution formelle Gevrey n'est plus assurée sur certains secteurs d'ouverture π comme ici sur le demi-plan $\mathcal{R}e\ x<0$ parce qu'il est un demi-plan de platitude de la solution homogène $e^{1/x}$.

Dans le cas général, on remplacera les secteurs de platitude des solutions de l'équation homogène par les secteurs de platitude des "exponentielles du problème" qui sont faciles à déterminer (voir le dernier paragraphe).

5. — Pour la série d'Euler \widehat{f}_1 la direction \mathbf{R}^- joue un rôle particulier : c'est à la fois la direction de décroissance maximale de l'exponentielle du problème $e^{1/x}$ (i.e. la bissectrice du secteur de platitude de celle-ci) et la direction à travers laquelle on n'a pas pu poursuivre le prolongement analytique de f_1 par la méthode de Borel-Laplace. On dira que c'est une direction singulière (on dit aussi une direction anti-Stokes) de l'équation.

Tout ceci nous conduit à introduire les définitions suivantes : ([R1], [MR4], [MR1], [Ne]).

DÉFINITION 3. — La série \hat{f} est dite 1-sommable dans la direction d si, de façon équivalente ([MR1], [Ne]) :

- i) on peut lui appliquer la méthode de sommation de Borel-Laplace $f(x) = \mathcal{L}(\mathcal{B}(\widehat{f}))(x)$ dans toutes les directions d'un voisinage de la direction d.
 - ii) \hat{f} est Gevrey de niveau I et la somme de la série $\hat{\mathcal{B}}\hat{f}(\xi)$ se prolonge sur un petit secteur voisinage de d avec une croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini.

/// domaine de définition de $\mathcal{B}\widehat{f}(\xi)$.

iii) \hat{f} est Gevrey de niveau 1 et il existe une fonction analytique f asymptotique à \hat{f} au sens de Gevrey de niveau 1 sur un secteur bissecté par f et d'ouverture strictement supérieure à f.

DÉFINITION 4. — On dira que \hat{f} est 1-sommable si elle est 1-sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini de directions singulières.

Remarques sur le prolongement analytique de $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ et sa croissance à l'infini La possibilité de prolonger $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ avec une croissance au plus exponentielle d'ordre 1 dans la direction d est une condition minimale pour que sa transformée de Laplace dans cette direction existe et soit analytique, au moins lorsque x est "petit".

1. — Dans le cas de la série d'Euler on connaît la somme et le prolongement de la série $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$. Ce prolongement et sa croissance, d'ailleurs bien moindre qu'exponentielle, sont évidents.

Qu'en est-il dans le cas général?

Supposons, pour simplifier, que l'équation différentielle linéaire étudiée soit à coefficients polynômiaux, cas auquel on peut toujours se ramener grâce au théorème d'algébrisation de Birkhoff ([B], [W]).

Alors, les transformées de Borel (formelles) $\mathbf{y}(\xi)$ des solutions (formelles) y(x) vérifient elles aussi une équation différentielle linéaire obtenue en appliquant les règles suivantes :

- A la dérivation $x^2 \frac{d}{dx}$, on substitue la multiplication par ξ .
- A la multiplication par $\frac{1}{x}$, on substitue la dérivation $\frac{d}{d\xi}$.

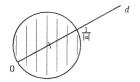
Pour l'équation d'Euler, on obtient :

$$\xi y + y = 1$$

qui admet pour unique solution $\mathbf{y} = \frac{1}{1+\xi}$ et pour solution formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$, le développement en série de $\frac{1}{1+\xi}$.

Ainsi, si une série \widehat{f} est une solution Gevrey de niveau 1 d'une équation différentielle linéaire sa transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ est une série convergente au voisinage de l'origine et solution de l'équation différentielle linéaire transformée. La théorie générale des équations différentielles montre que la somme de $\widehat{\mathcal{B}}(\widehat{f})$ se prolonge analytiquement dans toutes les directions sauf celles, en nombre fini, qui rencontrent un point singulier de l'équation transformée. L'étude locale au voisinage de l'infini permet en outre d'affirmer (théorème fondamental des développements asymptotiques dans le cas linéaire [RS], [W]) que sa croissance à l'infini est au plus exponentielle d'un certain ordre k (c'est un $O(e^{|ax^k|})$). L'ordre k est l'une des pentes du polygone de Newton à l'infini de l'équation transformée. S'il vaut 1, c'est que \widehat{f} est 1-sommable.

2. — Si $\mathcal{B}\widehat{f}$ est à croissance exponentielle d'ordre 1 et de type |a| dans la direction d (i.e. $\mathcal{B}\widehat{f}(x) = O(e^{|ax|})$), la somme $f = \mathcal{LB}(\widehat{f})$ n'est plus définie



sur le demi-plan bissecté par d, mais seulement sur un disque de Borel, le disque passant par 0 de diamètre $\frac{1}{|a|}$ porté par d.

Lorsqu'on fait tourner d, la longueur du diamètre peut varier, mais cela ne modifie en rien l'étude locale en 0 ([MR1]).

EXEMPLE 2. – EXEMPLE DE 2-SOMMABILITÉ : Equation d'Euler-bis $\frac{x^3}{2}y'+y=x^2$

Elle admet une solution série formelle au voisinage de l'origine

$$\hat{f}_2(x) = \sum_{n>0} (-1)^n n! x^{2(n+1)}$$

déduite de la série d'Euler \hat{f}_1 en changeant x en x^2 .

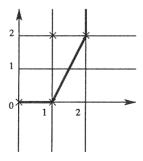
Polygone de Newton

L'équation homogène obtenue en dérivant $\frac{x}{2}y' + \frac{1}{x^2}y = 1$ s'écrit

$$x^4y'' + (x^3 + 2x)y' - 4y = 0.$$

Son polygone de Newton dessiné ci-dessous admet

- un côté de pente nulle et de longueur 1 : l'équation admet donc une solution série formelle; c'est \widehat{f}_2 ,
- un côté de pente 2 : on en déduit que la solution formelle $\widehat{f_2}$ est "au pire" (en fait, ici, exactement) Gevrey de niveau 2 (voir définition 5); nous allons voir qu'elle est 2-sommable (définitions 7 et 8).



On peut traiter cet exemple de deux points de vue : soit en traduisant ce que l'on sait de $\widehat{f_1}$ via le changement de x en x^2 , soit en l'étudiant directement comme l'exemple précédent. Nous allons faire successivement les deux.

Commençons par le "changement de x en x^2 ": pour que l'application $x\mapsto t=x^2$, essentiellement non bijective au voisinage de $0\in \mathbb{C}$, soit un vrai changement de variable, on la relève en une application entre les surfaces de Riemann du logarithme $\widetilde{\mathbb{C}}_x^*$ et $\widetilde{\mathbb{C}}_t^*$ en fixant une détermination des logarithmes. (On se souvient que le domaine naturel d'existence des solutions est $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ et non pas \mathbb{C}). On note $t\mapsto x=t^{1/2}$ l'application réciproque.

Ces applications induisent par composition sur les fonctions ou les séries les transformations (dites de ramification)

$$\rho_2: \ f(x) \mapsto \rho_2 f(t) = f(t^{1/2})$$
 et
$$\rho_2^{-1} = \rho_{1/2}: \ f(t) \mapsto \rho_{1/2} f(x) = f(x^2).$$

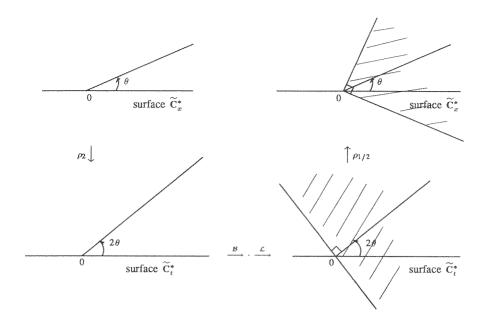
On a ainsi

$$\rho_2 \hat{f}_2(t) = \sum_{n \ge 0} (-1)^n n! t^{n+1}$$
$$= \hat{f}_1(t).$$

Et la méthode de sommation utilisée pour \widehat{f}_1 permet de sommer \widehat{f}_2 conformément au diagramme suivant :

La fonction f_2 est encore solution de l'équation d'Euler-bis et elle est asymptotique à \hat{f}_2 . Mais où et en quel sens?

Donnons-nous une direction d'angle polaire θ dans $\widetilde{\mathbf{C}}_x^*$. Elle se "descend" par ρ_2 en une direction d'angle 2θ dans $\widetilde{\mathbf{C}}_t^*$. La sommation de Borel-Laplace fournit une somme dans la direction 2θ , définie sur le demi-plan bissecté par 2θ et elle se "remonte" par $\rho_{1/2}$ en une fonction f_2^θ définie sur le quadrant bissecté par θ .



Développement asymptotique

Sur ce quadrant f_2^{θ} est asymptotique à \hat{f}_2 au sens suivant : si on "remonte" par $\rho_{1/2}$ la condition d'asymptoticité vérifiée par $f_1^{2\theta}$, on obtient

$$|f_2(x) - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n n! x^{2(n+1)}| \le C^{\text{te}} N! |x|^{2(N+1)}$$

$$\le C^{\text{te}} \sqrt{(2N+1)!} |x|^{(2N+1)+1}.$$

Ici le coefficient de $|x|^{M+1}$ où M=2N+1 croît non pas comme M! mais beaucoup moins – comme sa racine carrée.

DÉFINITION 5 ([R2]). — Une série $\sum a_n x^n$ est dite Gevrey de niveau k si ses coefficients vérifient une condition de croissance du type

$$|a_n| \le C^{\text{te}} A^n n!^{1/k} \qquad (A > 0).$$

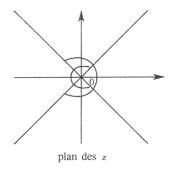
DÉFINITION 6 ([R1]). — Une fonction f définie sur un secteur V de sommet 0 est dite asymptotique au sens Gevrey de niveau k à une série $\widehat{f} = \sum a_n x^n$ Gevrey de niveau k si, sur tout secteur fermé W de V, on a pour tout N, une majoration du type

$$|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n| \le C^{\text{te}} A^N (N!)^{1/k} |x|^{N+1}$$
 (A > 0),

la constante dépendant de W mais pas de N.

Ainsi, la série \hat{f}_2 est une série Gevrey de niveau 2 et la solution f_2^{θ} est asymptotique à \hat{f}_2 au sens Gevrey de niveau 2 sur le quadrant bissecté par θ .

Domaine de définition



En faisant varier 2θ de $-\pi$ à $+\pi$, on obtient une somme définie sur $-\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}$ et pour $2\theta \in]\pi, 3\pi[$ on obtient la somme symétrique de la précédente par rapport à 0.

Ces deux sommes sont asymptotiques à \widehat{f}_2 au sens Gevrey de niveau 2 sur leur secteur de définition. Il y a défaut d'unicité sur la partie commune, c'est-à-dire sur les deux secteurs $\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4} < \arg g < -\frac{\pi}{4}$ qui sont d'amplitude $\frac{\pi}{2}$. Ces secteurs sont exactement les secteurs de platitude de l'exponentielle e^{1/x^2} .

Par parité, les différences des deux déterminations sur chacun de ces deux secteurs sont les mêmes et elles valent

$$f_2^{\frac{\pi}{2} - \varepsilon}(x) - f_2^{\frac{\pi}{2} + \varepsilon}(x) = 2i\pi e^{1/x^2}.$$

On trouve un seul invariant analytique, le même que pour l'équation d'Euler (mais ce n'est pas la même exponentielle).

Ce point de vue nous conduit à transposer la notion de 1-sommabilité en la notion de 2-sommabilité suivante : ([R1] § III, [MR4], [MR3], [MR1]).

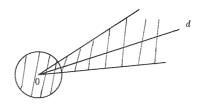
Définition 7. — Une série \widehat{f} est dite 2-sommable dans la direction d si, de façon équivalente :

i) on peut lui appliquer la méthode de sommation de Borel-Laplace de niveau 2

$$f(x) = \rho_{1/2} \mathcal{L} \mathcal{B} \rho_2(\widehat{f})(x)$$

dans toutes les directions d'un voisinage de la direction d.

ii) \hat{f} est une série Gevrey de niveau 2 et la somme de la série $\rho_{1/2}\hat{\mathcal{B}}\rho_2(\hat{f})(\xi)$ se prolonge sur un petit voisinage sectoriel de d avec une croissance au plus exponentielle d'ordre 2 (elle est un $O(e^{|a\xi^2|})$) et pas un $O(e^{|a\xi^1|})$)



iii) \hat{f} est une série Gevrey de niveau 2 et il existe une fonction analytique f asymptotique à \hat{f} au sens Gevrey de niveau 2 sur un secteur bissecté par f et d'ouverture strictement supérieure à $\frac{\pi}{2}$.

DÉFINITION 8. — On dira que \hat{f} est 2-sommable si elle est 2-sommable dans toutes les directions, excepté un nombre fini de directions singulières.

La série \widehat{f}_2 est 2-sommable, ses directions singulières étant les deux demi-axes imaginaires c'est-à-dire les lignes de décroissance maximale de l'exponentielle e^{1/x^2} .

Comparaison entre 1-sommabilité et 2-sommabilité

Pour une direction d fixée, il faut penser la 1-sommabilité comme une condition faible imposée sur un grand secteur et la 2-sommabilité comme une condition strictement plus forte, mais imposée sur un secteur plus petit. Ces deux notions sont donc essentiellement non comparables.

Si on regarde les notions globales (dans presque toutes les directions) on a le résultat d'incompatibilité suivant : si \hat{f} est 1-sommable et Gevrey de niveau 2, alors \hat{f} est une série convergente. Ainsi, sauf dans le cas trivial d'une série convergente, une série ne peut être à la fois 1 et 2-sommable.

La série \widehat{f}_2 est 2-sommable. Nous allons voir qu'elle n'est pas 1-sommable (et d'ailleurs elle n'est pas convergente).

Remarque. — En fait, on voit aisément que \widehat{f}_2 est 1-sommable dans toutes les directions $-\frac{\pi}{4} < \arg x < \frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} < \arg x < \frac{5\pi}{4}$. Mais notre objectif étant de dégager une argumentation générale, au lieu d'exploiter cette propriété exceptionnelle liée au trop petit nombre de directions singulières, nous la négligerons.

Essayons maintenant d'appliquer directement à \widehat{f}_2 la méthode de sommation de Borel-Laplace.

La série \widehat{f}_2 est Gevrey de niveau 2, donc a fortiori Gevrey de niveau 1 : sa transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f}_2(\xi) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{n!}{(2n+1)!} \xi^{2n+1}$ est non

seulement une série convergente, mais elle définit une fonction $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)$ entière sur \mathbb{C} . Point n'est besoin ici de la prolonger, mais c'est là son plus grand défaut (voir le commentaire heuristique ci-dessous).

L'inégalité

$$|\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)| \le \sum_{n\ge 0} \frac{|\xi|}{n!} |\xi^2|^n = |\xi| e^{|\xi|^2}$$

montre que $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)$ est à croissance (au plus) exponentielle d'ordre 2 dans toutes les directions. Mais elle n'est pas à croissance exponentielle d'ordre 1 dans presque toutes les directions.

En effet, conformément aux règles énoncées en fin du paragraphe "Exemple 1", $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ est solution de l'équation $\frac{1}{2}\xi\mathbf{y}+\frac{d}{d\xi}\mathbf{y}=1$ transformée de $\frac{1}{2}x^2\frac{d}{dx}y+\frac{1}{x}y=x$. On peut résoudre cette équation et on obtient $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)=\exp\frac{-\xi^2}{4}\cdot\int_0^\xi e^{\frac{t^2}{4}}dt$. Dans toute direction appartenant aux quadrants ouverts bissectés par les demi-axes imaginaires, l'intégrale $\int_0^\infty e^{\frac{t^2}{4}}dt$ est convergente et on a donc

$$|\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)| = \exp \mathcal{R}e \frac{-\xi^2}{4} \cdot (C^{te} + o(1)).$$

Ainsi, sur ces deux quadrants $\mathcal{B}\widehat{f}_2(\xi)$ est à croissance exponentielle d'ordre 2 et non pas 1. Cette écriture de $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ montre aussi qu'elle est à croissance exponentielle d'ordre 1 sur les deux autres quadrants, mais cette particularité liée à la simplicité de l'exemple étudié n'a généralement pas lieu. En général, lorsque la série \widehat{f}_2 est Gevrey de niveau 2, on ne peut appliquer un opérateur de Laplace à $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ dans aucune direction, ici dans aucune des directions appartenant aux quadrants bissectés par l'axe imaginaire. La méthode de Borel-Laplace (de niveau 1) ne permet pas de sommer \widehat{f}_2 dans ces directions.

Commentaire heuristique

La transformation de Borel avant ou après ramification a eu pour effet de remplacer la série $\widehat{f_1}$ ou $\widehat{f_2}$ par une fonction $\mathcal{B}\widehat{f_1}$ ou $\mathcal{B}\widehat{f_2}$ régulière à la fois à l'origine et à l'infini : celle-ci est analytique au voisinage de 0, pas trop croissante à l'infini; ses singularités indiquent les directions singulières pour la sommation et un calcul de résidu en ces points a donné toutes les relations entre les déterminations des différentes sommes (en particulier, les invariants analytiques). En termes géométriques, ([MR2]) les directions singulières repèrent des singularités infiniment proches en 0 et par une transformation de Borel convenable, on a fait apparaître ces singularités infiniment proches à distance finie.

Dans le cas de la série \widehat{f}_2 la transformation de Borel appliquée sans avoir ramifié régularise si bien que $\mathcal{B}\widehat{f}_2$ n'a plus de singularité à distance finie : elle est analytique sur un très grand voisinage de 0 (C tout entier) mais en contrepartie elle est devenue très croissante, très singulière à l'infini. En régularisant

trop bien en 0, on a caché à l'infini toutes les informations précédemment cachées à l'origine.

Pour pouvoir décoder les singularités, il faut régulariser mais ni trop ni trop peu.

EXEMPLE 3. – MÉLANGE DES NIVEAUX 1 ET 2.
Equation⁽¹⁾
$$Dy = 4x + 2x^2 + 10x^3 - 3x^4$$

où $D = x^5(2-x)\frac{d^2}{dx^2} + x^2(4+5x^2-2x^3)\frac{d}{dx} + 2(2-x+x^2)$

Cette équation admet une seule solution série formelle au voisinage de l'origine

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n>0} a_n x^{n+1}$$
 avec
$$\begin{cases} a_{2p} = (2p)! \\ a_{2p+1} = -(2p+1)! + (-1)^p p! \end{cases}$$

Polygone de Newton

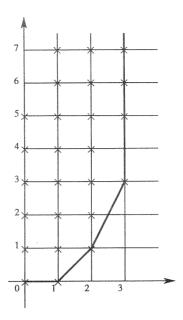
L'équation homogène obtenue en dérivant $\frac{1}{4x+2x^2+10x^3-3x^4}Dy=1$ s'écrit $D_0y=0$ avec

$$D_0 = (8x^6 + 18x^8 - 16x^9 + 3x^{10})\frac{d^3}{dx^3} + (-16x^3 - 8x^4 + 20x^5 + 6x^6 + 78x^7 - 71x^8 + 12x^9)\frac{d^2}{dx^2} + (16x - 16x^2 + 44x^3 + 64x^4 - 10x^5 + 32x^6 - 40x^7 + 6x^8)\frac{d}{dx} + (-16 - 16x - 108x^2 + 88x^3 - 38x^4 + 12x^5).$$

Son polygone de Newton dessiné ci-dessous admet

- un côté de pente 0 et de longueur 1 : l'équation admet donc une solution série formelle; c'est \widehat{f} ,
- un côté de pente 1 et un côté de pente 2 : on en déduit que la solution formelle \widehat{f} est "au pire" (en fait exactement) Gevrey de niveau 1. Nous allons voir qu'elle n'est pas 1-sommable, ni k-sommable pour une autre valeur de k mais qu'elle est multisommable de niveaux 1 et 2; les niveaux à considérer sont faciles à déterminer à partir du polygone de Newton de l'équation (voir dernier paragraphe).

⁽¹⁾ On peut trouver une construction de cet exemple dans [RS], chap. 3, 3-7 mais l'énoncé contient une erreur de signe.



On peut sommer \widehat{f} dans toutes les directions excepté un nombre fini en remarquant qu'on a $\widehat{f}=\widehat{f}_1+\widehat{f}_2$ et en sommant séparément \widehat{f}_1 par l'opérateur de Borel-Laplace S_1 de niveau 1 et \widehat{f}_2 par S_2 de niveau 2. Il se pose alors la question suivante : Peut-on trouver un opérateur qui somme simultanément \widehat{f}_1 et \widehat{f}_2 et donc $\widehat{f}=\widehat{f}_1+\widehat{f}_2$?

Cette question est essentielle, non pour traiter cet exemple dans lequel la décomposition de \widehat{f} en $\widehat{f_1}+\widehat{f_2}$ est évidente, mais pour étudier le cas général. La situation générale se présente ainsi : on détermine facilement \widehat{f} et souvent \widehat{f} n'est k-sommable à aucun niveau k. Cependant on montre (voir le dernier paragraphe) que \widehat{f} appartient à l'algèbre engendrée par un nombre fini de séries qui sont k_i -sommables pour un nombre fini de niveaux k_i . Les seuls niveaux possibles sont faciles à déterminer : ce sont les pentes d'un polygone de Newton, mais on ne dispose d'aucun algorithme explicite pour décomposer \widehat{f} suivant les niveaux sauf cas d'évidence comme dans l'exemple traité.

Dans cet exemple, la série \widehat{f} appartient à l'algèbre engendrée par la série 1-sommable \widehat{f}_1 et la série 2-sommable \widehat{f}_2 . La série \widehat{f} , quant à elle, n'est ni 1 ni 2-sommable. En effet, nous avons vu qu'on ne peut pas appliquer S_1 à \widehat{f}_2 et on ne peut évidemment pas appliquer S_2 à \widehat{f}_1 puisque la série $\widehat{\mathcal{B}}\rho_2(\widehat{f}_1)$ n'est pas même convergente. De plus, on peut voir que \widehat{f} n'est k-sommable pour aucun autre k.

Ouvrons une parenthèse pour indiquer que cet exemple simple fournit une

réponse au problème de Turrittin ([W] p. 326) qu'on peut énoncer ainsi : "Une série formelle solution d'une équation différentielle linéaire, est-elle k-sommable et pour quelle(s) valeur(s) de k?".

Cette question, en suspens depuis Euler qui a donné le premier exemple de resommation, et surtout depuis E. Borel qui a posé le problème de la resommation est maintenant résolue dans le cas linéaire et même dans un cadre plus large que le cadre linéaire grâce en particulier à la théorie de l'accélération d'Ecalle. Des réponses partielles au problème ont été données par divers auteurs – citons Nörlund, Horn, Turrittin, Trjitzinsky, Kohno-Ohtomo, Lutz, – qui établissent des conditions génériques sous lesquelles il y a k-sommabilité. Dans [R1], en 1980, Ramis affirme la nécessité (et la suffisance) pour le cas linéaire général de "mélanger" plusieurs processus de k-sommation, avec différentes valeurs de k. L'exemple ci-dessus construit par Ramis et Sibuya peu après (Preprint of the University of Minnesota – Minneapolis (1984)) n'a été publié dans [RS] qu'en 1989.

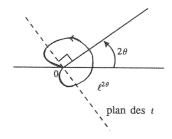
Sommation de \hat{f}

Choisissons une direction d d'angle polaire θ et autorisons-nous provisoirement des écritures abusives pour voir ce que donnerait l'application successive (à défaut de pouvoir être simultanée) de S_1 et de S_2 . On commence par le niveau le plus bas (k=1). On aurait le diagramme suivant :

On cherche à déterminer f à partir de \widehat{f} mais seule la première flèche agit effectivement là où on veut la faire agir : sur \widehat{f} . L'opérateur $\mathcal B$ utilisé jusqu'à présent s'applique à des séries. Nous devrions ici pour la deuxième flèche $\mathcal B$, celle du bas, en utiliser une version fonctionnelle. Il convient de choisir

$$\mathcal{B}(F)(\tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\rho 2\theta} F(t)e^{\frac{\tau}{t}} \frac{dt}{t}$$

où $\ell^{2\theta}$ est un contour dans \mathbf{C}_t de la forme suivante



On a $\mathcal{B}(t^{n+1})(\tau)=\frac{\tau^n}{n!}$ ce qui garantit la cohérence avec l'opérateur formel $\widehat{\mathcal{B}}$.

L'idée due à J. Ecalle est la suivante : regroupons les trois opérateurs médians en un opérateur $\rho_2 = \mathcal{B}\rho_2\mathcal{L}$ suivant le diagramme

$$\widehat{f}(x) \xrightarrow{\mathcal{B}} \cdots \longrightarrow 1$$

$$\downarrow \rho_2 \qquad \uparrow \rho_{1/2}$$

$$\downarrow \rho_{1/2} \qquad \uparrow \rho_{1/2}$$

et étudions ρ_2 .

Sous réserve d'existence, c'est-à-dire pour de bonnes fonctions f on a

$$\boldsymbol{\rho}_2(\mathbf{f})(\tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\ell^{2\theta}} \left(e^{\frac{\tau}{t}} \int_{d^{\theta}} \mathbf{f}(\xi) e^{-\frac{\xi}{t^{1/2}}} \right) \frac{dt}{t^2}$$

et par le théorème de Fubini

$$\rho_2(\mathbf{f})(\tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{d^{\theta}} \left(\mathbf{f}(\xi) \int_{\rho^2} e^{\frac{\tau}{t} - \frac{\xi}{t^{1/2}}} \frac{dt}{t^2} \right) d\xi.$$

Par le changement de variable $t \mapsto u = \frac{\tau}{t}$ on obtient

$$\rho_2(\mathbf{f})(\tau) = \frac{1}{2i\pi} \int_{d^\theta} \frac{1}{\tau} C_2\left(\frac{\xi}{\tau^{1/2}}\right) \mathbf{f}(\xi) d\xi$$

où

$$C_2(\zeta) = \int_{\mathcal{H}} e^{u - \zeta u^{1/2}} du ,$$

H désignant un contour de Hankel



Ce noyau C_2 est une accélératrice d'Ecalle ([E2], [MR3]). C'est lui qui réalise le miracle espéré car sa croissance à l'infini est exactement celle qu'il faut pour qu'on puisse appliquer ρ_2 à $\mathcal{B}(\widehat{f})$. On le vérifie facilement ici (au niveau 2) car le noyau C_2 n'est autre qu'une transformée de Fourier de e^{-v^2} (poser $u^{1/2}=iv$) et on en connaît la valeur exacte

$$C_2(\zeta) = i\sqrt{\pi} \, \zeta e^{-\frac{\zeta^2}{4}}.$$

Or, nous avons précisément vu que $\mathcal{B}(\widehat{f}_2)$ et donc $\mathcal{B}(\widehat{f})$ sont à croissance exponentielle d'ordre 2, donc intégrables "contre" C_2 .

On termine la construction de f sans problème puisque, formellement, on a fait exactement ce qu'il fallait pour obtenir une fonction f ayant les propriétés désirées.

Ainsi, l'opérateur $S_{2,1} = \rho_{1/2} \circ \mathcal{L} \circ \rho_2 \circ \mathcal{B}$ est un opérateur de sommation pour \hat{f} . On vérifie que

$$S_{2,1}(\hat{f}_1) = S_1(\hat{f}_1)$$

et

$$S_{2,1}(\hat{f}_2) = S_2(\hat{f}_2)$$

et on déduit aisément que $S_{2,1}$ permet de sommer toutes les séries de l'algèbre engendrée par les séries 1-sommables et les séries 2-sommables. De plus, il commute à la dérivation $\frac{d}{dx}$.

MULTISOMMABILITÉ

Cette étude nous suggère les étapes d'une théorie de la multisommabilité pour les solutions des équations différentielles analytiques linéaires.

- Définir la notion de k-sommabilité pour k quelconque et les opérateurs de k-sommation $S_k = \rho_{1/k} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{B} \circ \rho_k$ correspondants.
- Définir les accélératrices $\rho_{k,k'}$ noyaux centraux de sommation pour un mélange de séries respectivement k et k'-sommables et les opérateurs de sommation $S_{k,k'}$ correspondants k > k'.
- Généraliser par composition en des accélératrices ρ_{k_1,k_2,\dots,k_r} puis en des opérateurs de sommation S_{k_1,k_2,\dots,k_r} pour un nombre fini de niveaux $k_1 > k_2 > \dots > k_r$.
- Préciser les espaces fonctionnels sur lesquels ces opérateurs opèrent :
 ce sont des espaces de séries ou de fonctions avec des conditions de croissance très précises. On ne passe qu'en évaluant ces conditions au plus juste et les accélératrices permettent ces passages.
- Enrichir tous ces espaces de structures d'algèbres différentielles faisant de tous ces opérateurs des morphismes d'algèbres différentielles : la somme d'une série formelle solution d'une équation différentielle devient alors automatiquement solution de la même équation.
- S'assurer enfin qu'on a évité les confusions en vérifiant l'injectivité de tous ces opérateurs. Pour les accélératrices construire des "inverses" : les décélératrices.

Cette théorie est un cas particulier de la théorie de *l'accéléro-sommabilité* d'Ecalle ([E2], [E3], [E4], [E5]) de portée beaucoup plus générale. Celle-ci s'applique à presque toutes les séries divergentes d'origine naturelle : solutions d'équations différentielles analytiques, d'équations fonctionnelles, conjugaisons des champs de vecteurs, développements en paramètres de perturbations singulières, etc...

APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Toute équation différentielle linéaire d'ordre n est équivalente à un système linéaire d'ordre 1 de dimension n. On passe très simplement de l'équation au système en prenant pour fonction inconnue le vecteur $Y = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$. On peut passer du système à l'équation, mais beaucoup moins simplement (on trouvera par exemple dans [R2] les détails d'un algorithme relativement simple inspiré des travaux de F. Cope).

Ainsi, on peut toujours remplacer l'étude des équations par celle des systèmes. C'est ce que nous ferons car les résultats sont plus faciles à énoncer sous forme matricielle, c'est-à-dire pour les systèmes.

Considérons un système différentiel linéaire

$$\frac{dY}{dx} = AY$$

où A est une matrice carrée de dimension n à coefficients méromorphes au voisinage de 0.

On sait que ce système admet une solution formelle fondamentale⁽¹⁾ de la forme

$$\widehat{Y}(t) = \widehat{H}(t)t^L e^{Q(\frac{1}{t})}$$

où t est une ramification convenable de x ($t=x^{1/p}$), $\widehat{H}(t)$ est une matrice à coefficients séries méromorphes formelles de t, L est une matrice constante (exposants de monodromie formelle) et $Q(\frac{1}{t}) = \operatorname{diag}\left(q_1(\frac{1}{t}),\ldots,q_n(\frac{1}{t})\right)$ est une matrice diagonale dont les coefficients sont des polynômes en $\frac{1}{t}$ sans terme constant (partie irrégulière).

On dispose en outre, pour déterminer une telle solution d'algorithmes explicites et d'un logiciel de calcul sur ordinateur (Code DESIR — Equipe de Calcul Formel, Labo TIM3 Grenoble). Pour en déduire une base de vraies solutions, il suffit de sommer la matrice formelle \widehat{H} .

Les exponentielles du problème sont les exponentielles $e^{(q_i-q_j)(1/t)}$ pour tous les couples (q_i,q_j) , $q_i \neq q_j$ extraits de la partie irrégulière Q.

Les niveaux $k_1 > k_2 > \cdots > k_r$ du problème sont les différents degrés des polynômes $q_i - q_j$.

Les directions singulières sont a priori toutes les directions de décroissance maximale de ces exponentielles $e^{q_i-q_j}$, $q_i \neq q_j$.

Ainsi, dans l'exemple 3, on déduit des équations caractéristiques associées à chaque pente du polygone de Newton que

$$t = x$$
, $q_1(\frac{1}{x}) = 0$, $q_2(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$, $q_3(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}$.

⁽¹⁾ On appelle ainsi une matrice dont les colonnes forment un système fondamental de solutions formelles du système.

 $(q_1 \text{ de degr\'e } 0 \text{ est associ\'e à la pente } 0, q_2 \text{ de degr\'e } 1 \text{ à la pente } 1 \text{ et } q_3 \text{ de degr\'e } 2 \text{ à la pente } 2)$. Les exponentielles du problème sont $e^{\pm \frac{1}{x}}$, $e^{\pm \frac{1}{x^2}}$ et $e^{\pm (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})}$. Les niveaux ont pour valeur $k_1 = 2$ et $k_2 = 1$. Les directions singulières sont a priori \mathbf{R}^+ , \mathbf{R}^- , $i\mathbf{R}^+$ et $i\mathbf{R}^-$. Et nous savons, par l'étude précédente, que \mathbf{R}^+ n'est en fait pas une direction singulière : les sommes au voisinage de cette direction se "recollent" analytiquement; le "défaut" de recollement, c'est-à-dire l'invariant analytique dans cette direction est nul.

Multisommabilité des solutions formelles

On montre par des arguments théoriques (par exemple cohomologiques Gevrey [R3]) qu'il existe une factorisation de la matrice \widehat{H} suivant les niveaux :

$$\widehat{H} = \widehat{H}_1 \widehat{H}_2 \dots \widehat{H}_r$$

où pour tout i, \hat{H}_i est k_i -sommable.

On peut donc sommer \widehat{H} à l'aide de l'opérateur S_{k_1,k_2,\dots,k_r} . Puisque celui-ci est un morphisme d'algèbres différentielles on a

$$S_{k_1,k_2,\dots,k_r}(\widehat{H}) = S_{k_1,\dots,k_r}(\widehat{H}_1) \dots S_{k_1,\dots,k_r}(\widehat{H}_r)$$
$$= S_{k_1}(\widehat{H}_1) S_{k_2}(\widehat{H}_2) \dots S_{k_r}(\widehat{H}_r)$$

et $H=S_{k_1,\dots,k_r}(\widehat{H})$ fournit une vraie solution fondamentale du système différentiel sur les secteurs évidents.

Matrices de Stokes

On appelle ainsi usuellement toute matrice de passage entre deux solutions fondamentales asymptotiques à une même solution fondamentale formelle \widehat{Y} sur un secteur. Les matrices de Stokes sont unipotentes. Ce sont elles qui évaluent les "défauts" de recollement des solutions. Elles fournissent ainsi des invariants analytiques (i.e. des invariants par changement analytique sur les inconnues Y = PZ avec $P \in GL(n, \mathbb{C}\{x\})$), mais, définies en toute généralité comme précédemment, elles sont trop nombreuses pour caractériser chaque classe analytique et la question se pose d'en extraire des familles caractérisant le plus naturellement possible les classes analytiques.

Les opérateurs de sommation S_{k_1,\dots,k_r} apportent une solution satisfaisante à ce problème dans l'esprit de l'article initial de Stokes ([Sto]) : choisissons $\widehat{Y} = \widehat{H}(t)t^Le^{Q(\frac{1}{t})}$. Dans chaque direction singulière d^θ notons $Y_{d^{\theta+}}$ et $Y_{d^\theta-}$ les sommes de \widehat{Y} dans les directions $d^{\theta+\varepsilon}$ et $d^{\theta-\varepsilon}$ voisines de d^θ (on a choisi un argument $\theta \in \mathbf{R}$ et donc aussi une détermination du logarithme). La collection des matrices de Stokes $C_\theta = Y_{d^\theta-}^{-1}Y_{d^{\theta+}}$ pour toutes les directions singulières (θ variant dans un intervalle fixé de longueur 2π) fournit un classifiant naturel du système. En outre, ces matrices de Stokes "sont" dans le groupe de Galois différentiel du système ([Ka]) ce qui n'est en général pas le cas pour une matrice de Stokes usuelle quelconque.

La théorie de la multisommabilité telle qu'évoquée ici et son application aux systèmes différentiels linéaires est en partie rédigée dans les actes du Colloque C.A.D.E. tenu à Saint-Hugues en mai 88 ([MR1]). Elle est esquissée dans ([MR3]). Un exposé complet se trouvera dans un livre de Martinet-Ramis actuellement en préparation ([MR2]).

Bibliographie

Sur la multisommabilité :

- [MR1] J. MARTINET et J.-P. RAMIS. Théorie de Galois différentielle et resommation, Computer Algebra and Differential Equations, E. Tournier Ed., Academic Press,
- [MR2] J. MARTINET et J.-P. RAMIS. Théorie de Cauchy sauvage, Livre en préparation.
- [MR3] J. MARTINET et J.-P. RAMIS.— Elementary Acceleration and Multisummability, Preprint IRMA, Strasbourg, Vol. 41 de la RCP25 en l'honneur de R. Thom, 420/COL-20, 1990.

et pour un point de vue non restreint au cas linéaire :

- [E1] J. ECALLE. Les fonctions résurgentes (tome 3), Publication d'Orsay, nº 85-05, 1985.
- [E2] J. ECALLE. Résurgence et accélération, Cours de 3e cycle 87-88, Orsay.
- [E3] J. ECALLE. L'accélération et ses applications, Livre soumis pour publication à "Travaux en cours", Hermann.
- [E4] J. ECALLE. Finitude des cycles limites et accéléro-sommation de l'application de retour, Actes du Congrès, "Bifurcations et Orbites périodiques des champs de vecteurs du plan". Luminy, sept. 89.
- [E5] J. ECALLE. Solution constructive du problème de Dulac et accéléro-sommation de l'application de retour, Livre soumis pour publication à "Travaux en cours", Hermann.

Sur la k-sommabilité:

- [R1] J.-P. RAMIS. Les séries k-sommables et leurs applications, Springer Lecture Notes in Physics nº 126, Berlin, 1980.
- [MR4] J. MARTINET et J.-P. RAMIS. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre, Publications Mathématiques de l'IHES n° 55 (1982), 63-164.

Sur quelques questions évoquées :

- [B] G.D. BIRKHOFF. Equivalent Singular Points of Ordinary Linear Differential Equations, Math. Ann., Vol. 74 n° 1 (1913), 134-139.
- [C] B. CANDELPERGHER. Une introduction à la résurgence, Gazette SMF, 42 (1989), 36-64.
- [Ka] I. KAPLANSKY. An Introduction to Differential Algebra, Hermann, 1957 et 1976.
- [M] B. MALGRANGE. Sur les points singuliers des équations différentielles, L'enseignement mathématique, t. XX, 1-2 (1974), 147-176.
- [N] F. NEVANLINNA. Zur Theorie der Asymptotischen Potenzreihen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, ser. A, Fom XII (1919), 1-81.
- [R2] J.-P. RAMIS. Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Memoirs of the Amer. Math. Soc., 48 (n° 296), 1984.

- [R3] J.-P. RAMIS. Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière, IMPA, Informes de Matemática, serie A-045/85, Rio de Janeiro, 1985.
- [RS] J.-P. RAMIS et Y. SIBUYA. Hukuhara Domains and Fundamental Existence and Uniqueness Theorems for Asymptotic Solutions of Gevrey Type, Asymptotic Analysis, 2 (1989), 39-94.
- [Sto] G.G. STOKES. On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments, Trans. of the Cambridge Phil. Soc., vol. X (1857), 106-128.
- [W] W. WASOW. Asymptotic Expansions of Ordinary Differential Equations, Interscience, New-York, 1965. Wiley, New-York, 1976.

Cambridge Mathematics

Chaotic Evolution and **Strange Attractors**

D. RUELLE

This is the first book in a penetrating new series of science books. It provides an accessible and leisurely account of systems that display a chaotic time evolution. It avoids complex mathematics, yet provides an excellent understanding of the fundamentals. £25.00 net HB 0 521 36272 5 107 pp. 1989 PB 0 521 36830 6 £8.95 net Lezioni Lincee

The Volume of Convex **Bodies and Banach Space Geometry** G. PISIER

This book gives a self-contained presentation of a number of recent results which relate the volume of convex bodies in n-dimensional Euclidean space and the geometry of the corresponding finite-dimensional normed spaces.

£30.00 net HB 0 521 36465 5 272 pp. 1989 Cambridge Tracts in Mathematics 94

An Introduction to Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups V. S. VARADARAJAN

This introductory graduate text emphasises the development of the central themes of semi-simple lie groups in the context of special examples. The author, however, does not lose sight of the general flow and structure of the subject making this a highly readable account.

£40.00 net HB 0 521 34156 6 328 pp. 1989 Cambridge Studies in Advanced Mathematics 16

Braids and Coverings VAGN LUNDSGAARD HANSEN

Based on a successful lecture course. this text considers classical material on the Artin braid groups, braids in the 2-sphere, and braids as a tool in the study of knots and links. The final chapters describe research on complete solvability of Weierstrass polynomials and on polynomial covering spaces. £27.50 net HB 0 521 38479 6 208 pp. 1989 £10.95 net PB 0 521 38757 4 London Mathematical Society Student Texts 18

Now in paperback

An Introduction to **Fourier Analysis** T. W. KÖRNER

'...an extraordinary and very attractive book. I would like to see it on the desk of every pure mathematician with an interest in classical analysis, and of every teacher of applied mathematics whose work involves analysis...This is how mathematics ideally should be presented, but too seldom is.

SIAM Review

£20.00 net PB 0 521 38991 7 608 pp. 1989

Number Theory and **Dynamical Systems**

M. DODSON and J. VICKERS

Containing current work and results on the relationship of these two areas of mathematics, this book also includes some more speculative and explanatory work which should stimulate interest in new approaches to old problems.

£15.00 net PB 0 521 36919 3 192 pp. 1989 London Mathematical Society Lecture Note Series 134

For further information write to Susan Chadwick at the address below

Cambridge University Press

The Edinburgh Building, Cambridge CB2 2RU, UK