SOMMAIRE

DOSSIERS/DÉBATS

L'épopée des mathématiques modernes

La réforme des mathématiques modernes
Dossier préparé par *Jacques CAMUS* et *Michèle ARTIGUE* 3

L'enseignement des mathématiques de 1934 à 1954 - Souvenirs d'un ancien combattant
par *André REVUZ* 4

Les prémisses et la mise en place de la réforme dans l'enseignement secondaire français
par *A. MAGNIER* 9

La réforme des maths modernes vue par un enseignant du "terrrain"
par *Henri BAREIL* 13

Une réforme inaccomplie
par *Yves CHEVALLARD* 17

La réforme des "maths modernes" en Belgique
par *Guy NOËL* 22

Les limites à travers les programmes et les manuels 26

INFORMATIONS

Bilan de la session de mai du C.N.U. 31
Le recrutement des directeurs de recherche au C.N.R.S. 38
Sessions "L'État de la Recherche" 42
Images des Mathématiques 44
Institut : le C.R.M. de Barcelone 44
Le congrès International de Zürich - 1994 45
Les bourses postdoctorales 45
Institut Universitaire de France . . . . . .
Prix de la Ville de Paris 46

ENQUÊTE

DEUG, Licence et Maîtrise en chiffres 48

LIVRES

Scattering Theory Lax et Phillips
par *Christian GÉRARD* 50

Mathématiques Ch. Mauduit et Ph. Tchamitchian
par *François DIGNE* 53

NOS PROBLÈMES ONT DES LECTEURS 56

MATHÉMATIQUES

La symplectification de la science par *Mark J. GOTAY* et *James A. ISENBERG* . . 59
Une introduction à la topologie symplectique par *Claude VITERBO* 81

Le Comité de Rédaction de la Gazette connaît quelques modifications. Il y a deux départs. Celui de Micheline VIGUÉ qui, depuis trois ans, a su contribuer avec efficacité à la réalisation de notre revue, et celui de Martin ANDLER qui a imaginé il y a plus de six ans la nouvelle formule de la Gazette et qui depuis a, tout d'abord comme rédacteur en chef, puis comme responsable de la rubrique livres, consacré beaucoup d'énergie et de talent à faire de ce périodique ce qu'il est aujourd'hui. Son influence sur le style actuel de la Gazette est immense.

D'autre part, je quitte après le bouclage de ce numéro la responsabilité de la rédaction en chef que j'assumais depuis trois ans. J'espère ne pas avoir trop ennuyé ou déçu les lecteurs et je souhaite à mon successeur, Marc CHAPERON, professeur à Paris 7, beaucoup de succès. Beaucoup de mathématiciens ont contribué à la Gazette pendant ces trois dernières années. Qu'ils soient membres du comité de rédaction, auteurs de textes ou d'articles, ou ayant accepté d'être interviewés, c'est d'abord grâce à eux que le rédacteur en chef a pu organiser les diverses rubriques.

Je ne peux écrire ces quelques lignes sans parler de Monique MARCHAND, qui assurait le secrétariat de la Gazette depuis 1983, d'abord à Grenoble, puis à Marseille. Elle a rejoint un laboratoire grenoblois en juillet dernier et n'est plus en poste à la S.M.F. Rien de ce qui s'est fait dans toutes les années n'aurait pu se réaliser sans ses qualités d'organisation et ses initiatives. Qu'elle en soit remerciée, tout comme d'avoir accepté de faire la mise en page de ce numéro, et bonne chance dans ses nouvelles fonctions.

Jean-Yves MÉRINDOL

DATE LIMITE

de soumission des articles, pour parution

dans le n° 55 – JANVIER 1993

10 DÉCEMBRE 1992

DOSSIERS/DÉBATS

LA RÉFORME DES MATHÉMATIQUES MODERNES

Dossier préparé par :
Jacques CAMUS (Université de Rennes I)
et Michèle ARTIGUE (IUFM de Reims)

Plus de vingt après, les passions se sont émoussées, mais les souvenirs sont encore vivaces. Ne serait-ce pas le moment de s'interroger sur ce moment qui vit un bouleversement sans précédent de l'enseignement des mathématiques, de la maternelle à l'université? De se demander pourquoi une réforme nécessaire, sans rien d'improvisé, a pu être source de tant de désillusions, susciter tant d'anathèmes y compris chez ceux-là mêmes qui l'avaient le plus ardemment souhaitée? De se demander aussi où nous conduisent les mouvements de rejet qu'elle a suscités?

Pour constituer ce dossier, la Gazette a sollicité des personnes qui, en France, se sont trouvées impliquées dans cette aventure à des titres divers. Ils ne l'ont pas vécue à la même place, ils ne l'ont pas vue avec les mêmes yeux, leurs différences d'appréciations sur certains points sont sensibles. Mais c'est cette voie de la pluralité des regards que nous avons justement choisi de privilégier pour restituer à ce moment sa richesse et sa complexité. Pour limiter les redondances, chacun d'eux a accepté de centrer son texte sur un aspect précis. Ainsi André Revuz nous parlera des débuts de la réforme, au niveau de l'enseignement supérieur et de ses indignations d'élève qui ont largement motivé son engagement dans la réforme, à l'APMEP, au sein de la commission Lichnerowicz puis à la direction de l'IREM Paris 7; André Magnier, à l'époque Inspecteur Général, nous décrira la situation difficile de l'enseignement secondaire français à la veille de la réforme, le travail de la commission Lichnerowicz, la mise en place institutionnelle de la réforme; Henri Bareil nous dira la réforme vue par un enseignant de collège, militant APMEP et animateur IREM; Yves Chevallard enfin essaiera de montrer ce qui fit à la fois la grandeur et la naïveté de cette réforme et de situer par rapport à elles l'évolution actuelle de l'enseignement.

La réforme fut un événement mondial et se limiter à une vision franco-française nous semblait de ce fait inconcevable. Pour restituer cette dimension internationale, nous avons demandé à Guy Noël, professeur à l'université de Mons, de nous décrire ce que fut la réforme en Belgique.

Quelques Références

Collectif (1955) : *L'enseignement des mathématiques*, Delachaux et Nestlé.

L.Felix (1959) : *Exposé moderne des mathématiques élémentaires*, Dunod.

L. Lesieur & A. Revuz (1960) : *Le langage simple et précis des mathématiques modernes*, APM.

G. & A. Revuz (1962-66) : *Les cours de l'APM* - Tome I : *Groupes, anneaux, corps* - Tome II : *Espaces vectoriels* - Tome III : *Eléments de topologie*, APM.

E. Artin (1957) : *Geometric algebra*, Interscience publishers, New York (traduction française : 1962, Gauthier-Villars).

G. Papy (1963...) : *Mathématique moderne 1, 2, 3, 5, 6*, Didier.

Collectif (1964) : *Mathématiques modernes. Guide pour l'enseignant*, OCDE.

J. DIEUDONNÉ (1964) : *Algèbre et géométrie*, Hermann.

G.CHOQUET (1964) : *L'enseignement de la géométrie*, Hermann.

J. LELONG-FERRAND (1964) : *Les notions mathématiques de base dans l'enseignement du second degré*, Colin.

G. WALUSINSKI (1970) : *Pourquoi une mathématique moderne?*, Colin.

L. FÉLIX (1985) : *Essai sur l'histoire de la CIEAEM*, Compte-rendus de la 37ème Rencontre Internationale de la CIEAEM, Utrecht, OW&OC.

R. BKOUCHE, B.CHARLOT, N.ROUCHE (1991) : *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Colin. ■

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DE 1934 À 1954
Souvenirs d'un ancien combattant

André REVUZ

La Science ne cesse de se transformer, d'agrandir le champ de ses acquis et de le réorganiser. L'enseignement scientifique, quant à lui, suit avec un retard croissant; le moment arrive où l'écart entre la science vivante et l'image qu'en donne l'enseignement devient si grand qu'une réforme s'impose. Cela ne se fait cependant jamais sans lutte et le succès n'est pas toujours assuré.

Si l'on veut décrire l'enseignement des mathématiques au vingtième siècle, certaines dates sont des repères obligés :

1902 – La fameuse réforme de l'enseignement scientifique connue sous le nom "réforme de 1902", dont l'objectif, qui fut atteint, était de renforcer l'enseignement des Sciences, mais dont le libellé montre la pauvreté de la situation antérieure.

1934 – La naissance du projet bourbakiste. On pourrait préférer la date de parution du premier tome. Mais je pense qu'il est important de resituer ce projet dans les conditions qui l'ont provoqué, avec en ce qui me concerne l'argument supplémentaire que de 34 à 37 j'ai vécu ce qu'était l'enseignement des mathématiques à la Faculté des Sciences de Paris.

1954 – Modification radicale de l'enseignement de Calcul différentiel et intégral par Choquet.

1970 – Année chronologiquement centrale dans la mise en place de la réforme de l'enseignement du second degré proposée par la Commission Lichnerowicz.

1990 – Retour à la case départ pour l'enseignement du second degré : tout est à refaire.

I. L'enseignement supérieur des mathématiques entre 1934 et 1954

C'est pendant l'année scolaire 1934-1935 que naquit le projet bourbakiste. Il ne s'agissait au départ dans l'esprit d'A. Weil et de H. Cartan, professeurs à la Faculté des Sciences de Strasbourg, que d'écrire un traité de Calcul différentiel et intégral destiné à remplacer l'ouvrage solide mais vieillissant de E. Goursat.

Qu'était le certificat de C.D.I. à cette époque? C'était le noyau mathématique de la licence de mathématiques, qui comportait en outre un certificat de Physique générale, monstrueux par son ampleur, et un certificat de Mécanique rationnelle, traitant presque exclusivement de la Mécanique "du" solide (il s'agissait d'un cours annuel dont cependant Henri Béghin exposait magistralement et efficacement le contenu aux normaliens en six séances de deux heures).

L'enseignement de C.D.I. comprenait : a) Fonctions holomorphes et intégrale de Cauchy, séries de Laurent, fonctions multiformes (sans surface de Riemann), résidus, méthode des fonctions majorantes; b) géométrie différentielle des courbes et des surfaces de R^3; c) Analyse fonctionnelle :

séries de Fourier (sans intégrale de Lebesgue et sans L^2), calcul des variations (équation d'Euler), équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans aucune direction, il n'était allé très loin : le "programme" était traité sans que soient explicitées les questions auxquelles répondaient les ébauches de théories exposées. Il n'était jamais question des idées qui avaient été émises depuis 1900 (sinon souvent beaucoup plus tôt).

Cependant ce certificat était très sélectif : en juin 1935, sur une centaine de candidats, il y eut une petite trentaine de reçus dont vingt normaliens. Ce certificat réalisait l'exploit d'être très sélectif tout en ne donnant qu'une formation insuffisante à ceux qu'il sélectionnait. A noter qu'à cette époque, les sévriennes ne préparaient pas ce certificat, et ne réussissaient guère à l'Agrégation féminine de mathématiques.

Mais, dira-t-on, ce n'était pas le seul certificat de mathématiques. Assurément, il y avait tous les certificats tenant lieu de Diplômes d'études supérieures. Il y avait à cette époque à Paris, entre la Faculté des Sciences, le Collège de France et l'Ecole Polytechnique, quinze professeurs de mathématiques, presque tous de classe internationale, mais dont les enseignements étaient totalement indépendants les uns des autres et qui laissaient d'énormes lacunes. A l'exception d'Elie Cartan, personne dans les cours les plus avancés ne traitait de ses travaux récents. On aurait cherché en vain un enseignement de l'intégrale de Lebesgue (Lebesgue enseignait au Collège de France, mais à cette époque semblait avoir renoncé à diffuser les théories modernes); les travaux de Baire et ceux de Poincaré ne faisaient l'objet d'aucun enseignement. Dans la patrie de Galois et de C. Jordan, l'algèbre était totalement absente, tandis que la topologie algébrique, après l'impulsion donnée par Poincaré autour de l'année 1900, ne s'était développée qu'à l'étranger. Quand en 1930 parut le premier tome d'Algèbre de Van der Waerden, la première réaction de Dieudonné et de H. Cartan fut : *"Mais, je n'y comprends rien"* . Sans doute cela ne dura-t-il pas longtemps mais cela éclaire la révolte bourbakiste.

En 1935 parut le livre d'Alexandrof et Hopf : *"Allgemeine Topologie"*, qui commençait par 124 pages de topologie générale suivies de 400 pages de topologie algébrique, mais en 1936 la seule contribution parisienne dans ce domaine fut un cours semestriel d'une heure hebdomadaire, donné par Fréchet (qui culminait dans le fait que le bord du bord d'un simplexe orienté était nul), et un enseignement plus consistant, mais confidentiel de l'abbé Potron à l'Institut Catholique.

Comment expliquer que d'éminents mathématiciens aient marqué un tel respect à l'égard du programme immuable de C.D.I. et aient fait preuve d'une telle inhibition à l'égard des nouveautés, y compris de celles dont ils étaient les auteurs? Souci de ne pas dévaloriser leurs propres travaux, croyance dans l'équivalence fallacieuse : élémentaire = ancien, ou peut-être surtout respect du fait que le certificat de C.D.I. fournissait la matière de l'épreuve d'analyse de l'agrégation?

Rappelons que "passer l'Agrégation" était le premier (et en principe le seul) devoir officiel des normaliens. L'enseignement supérieur des mathématiques était donc centré, pour les meilleurs, sur l'Agrégation; mais la segmentation de ce concours en 4 domaines clos (mathématiques élémentaires, mathématiques spéciales, analyse, mécanique) deux à deux disjoints et passablement vieillots bornait singulièrement l'horizon en occultant tant l'unité que le vigoureux développement des mathématiques.

L'enseignement des mathématiques ronronnait.

Quelles furent les réactions à cette situation?

Un exemple extrême et navrant me fut fourni par un cacique d'une promotion plus ancienne, qui sortit de l'Ecole Agrégé et Docteur, et qui en 1936, déclara à quelques normaliens dont j'étais : *"Il n'y a plus rien à trouver en mathématiques!"*

A l'extrême opposé, Ehresmann et Leray avaient dès avant 1934 introduit la topologie algébrique dans leurs recherches, qui

devaient connaître ultérieurement les profonds développement que l'on sait.

Pour en revenir à Bourbaki, les intentions initiales furent rapidement dépassées et donnèrent naissance à l'oeuvre que tout le monde connait et que ceux de ma génération, cadets d'une dizaine d'années des fondateurs de Bourbaki, reçurent comme un souffle d'air frais (ce qui ne fut peut-être pas toujours le cas de nos propres cadets).

Ce que nous y trouvâmes ce fut une organisation des mathématiques qui nous permettait de nous repérer facilement au lieu d'errer à l'aveugle d'un domaine à l'autre. Nous eûmes l'impression que nos connaissances déjà acquises étaient éclairées d'une lumière nouvelle et que leur développement devenait plus facile.

Nous appréciâmes d'être armés de concepts relativement simples, efficaces dans des situations très diverses, de voir enfin mises en valeur les idées qui permettaient de maîtriser les techniques, au lieu d'en être l'esclave, ou au mieux l'utilisateur dont l'habilité tient plus à l'habitude qu'à la compréhension. Nous y apprîmes aussi à faire vivre en société les êtres mathématiques au lieu de les étudier un par un.

Mais en ce qui concerne le certificat de C.D.I. lui-même, sauf dans un petit nombre de Facultés privilégiées, il continua sur son erre sans modification notable.

Il fallut attendre 20 ans pour en voir une modification profonde : c'est en effet en 1954 que Choquet, chargé de cet enseignement pendant la maladie qui devait rapidement emporter G. Valiron, le modifia profondément dans son contenu et dans son esprit.

Son exemple fut pratiquement suivi immédiatement dans les Facultés de province, puis officialisé par les programmes des certificats dits de Math 1 et Math 2, puis de C 1, C 2, C 3, C 4. Il fut incontestablement suivi quant aux contenus, je suis moins sûr qu'il l'ait été dans son esprit et que partout le souci essentiel de Choquet de mettre en avant les idées directrices se soit fortement manifesté.

Ce fut en tout cas une réforme réussie, en ce sens qu'on ne vit aucun retour en arrière, si réussie d'ailleurs qu'on ne semble nullement songer à en mettre une autre en chantier : le développement continuel des mathématiques l'imposera cependant et posera des problèmes auxquels il ne serait peut être pas inutile de réfléchir dès maintenant. Il est malheureusement certain que l'état actuel de l'enseignement du second degré est un handicap énorme et une cause redoutable de paralysie.

II. La situation, bien pire, de l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire

Quand on voit le temps qu'il a fallu pour réactualiser l'enseignement des mathématiques au niveau du supérieur, où aucun obstacle fondamental n'était perceptible, on peut penser a priori qu'une réforme au niveau du secondaire demande des efforts énormes et est loin d'être assurée du succès, ce que l'expérience a, hélas!, dramatiquement confirmé.

L'insatisfaction profonde que m'avait laissée l'enseignement scientifique de ma jeunesse, en dépit des succès scolaires, est certainement une des raisons de mon engagement.

Plus encore que l'enseignement supérieur, l'enseignement secondaire des mathématiques vivait en vase clos. J'ai eu constamment l'impression que l'on me cachait l'essentiel : ni les fondements, ni les finalités n'étaient explicités; dès qu'un sujet rendait un son plus plein, un rideau tombait dessus : la suite, sinon le sujet lui-même n'était pas au programme!

Ce ne fut jamais dans l'enseignement officiel que je pus trouver les réponses aux questions et aux inquiétudes qui étaient les miennes. C'est en "Math Elem" que, lisant "la Science et l'hypothèse" de Poincaré, je découvris qu'un certain Hilbert avait dit sur la géométrie des choses plus sensées et plus honnêtes que les escroqueries des pseudo-démonstrations du début des cours de géométrie, et que Peano tenait un discours plus clair que les trente premières

pages de mon cours d'arithmétique qui commençait par la déclaration ingénue : *"Nous avons la notion de nombre entier"*. C'est en hypotaupe que, dans l'ouvrage de Jules Tannery : *Introduction à l'étude des fonctions d'une variable réelle*, je trouvais les bases solides sur lesquelles asseoir ma connaissance de l'Analyse.

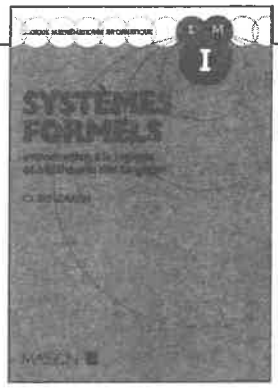
Mais même pour qui se serait accommodé de l'inconsistance des fondements, l'exposé lui-même contenait de nombreuses incohérences : une des plus belles concerne la notion d'angle, où le même mot désignait une portion de plan, une paire de demi-droites, un couple de demi-droites, une propriété commune à plusieurs de ces paires ou couples. On passait insensiblement d'une espèce d'angle à une autre; on prétendait les mesurer et on appelait encore mesure les valeurs à $2k\pi$ ou $k\pi$ près et on en arrivait à transformer des résultats exacts et importants en énormités du type : *"la moitié d'un angle orienté de vecteurs est un angle orienté de droites"*.

Mon indignation d'élève n'est pas encore éteinte, et je suis de plus en plus convaincu qu'un enseignement mathématique qui omet de démontrer ce qu'il peut démontrer ou qui prétend démontrer ce qu'il ne s'est pas donné les moyens de démontrer est une entreprise de mystification. Il manque à son premier devoir qui est de permettre à l'esprit de l'élève un fonctionnement mathématique correct.

Je ne mentionne qu'en passant mon insatisfaction encore plus grande à l'égard de l'enseignement de la physique et la monstrueuse ignorance réciproque des enseignements de mathématiques et de physique. Ne pas savoir de quoi on parle et sur quoi on s'appuie ne peut pas fonder un développement rationnel de la connaissance : l'idée de modèle, mise en avant et couramment utilisée dans les mathématiques appliquées contemporaines fournit une base épistémologique saine tant à la physique qu'aux mathématiques, et permet pour ces dernières de faire une synthèse de tous leurs aspects depuis les plus formels jusqu'aux plus appliqués. Les "principes" de la Mécanique et de la Thermodynamique, les "axiomes" de la géométrie ne sont pas des vérités métaphysiques intangibles à respecter comme le résultat d'une révélation, mais les bases claires sur lesquelles s'édifient des théories fournissant des modèles dont il faut savoir d'une part garantir la cohérence interne et d'autre part évaluer l'adéquation à la réalité qu'ils sont destinés à maîtriser. Refuser de mettre clairement en évidence, et pour ce qu'elles sont, les propositions de base de toute théorie (indémontrables par essence) relève de la bêtise ou de la malhonnêteté.

On ne manquera pas de m'objecter que les critiques que j'ai formulées plus haut étaient celles d'un bon élève, et que pour les autres l'enseignement n'était peut-être pas si mal adapté. Je n'ai jamais rien constaté de tel : si de très bons élèves arrivaient à acquérir tant bien que mal un semblant de culture mathématique, pour les autres c'était un désastre : désastre scolaire et désastre culturel, car même ceux qui obtenaient un diplôme n'avaient eu des mathématiques qu'une vue extrêmement superficielle.

Il est certain qu'il y a un énorme effort à faire dans le domaine de la didactique des mathématiques mais il n'est pire erreur que de croire rendre un enseignement mathématique plus facile en le vidant de son contenu : Gribouille ne ferait pas mieux. ■



SYSTÈMES FORMELS

Introduction à la logique et à la théorie des langages

C. Benzaken,

Collection Logique Mathématiques Informatique

1991, 184 pages.

Cette introduction aux fondements logiques de l'informatique décrit les mécanismes de production d'énoncés du double point de vue syntaxique et sémantique. L'auteur comble une lacune due au rôle nécessairement dominant de l'algorithmique, de la programmation, de l'intelligence artificielle... dans l'enseignement de l'informatique, au détriment des bases théoriques de la discipline.

L'ouvrage débute par la définition des systèmes formels et des schémas d'induction, puis aborde les langages formels dans leur ensemble : langages rationnels, grammaires et langages hors-contexte, automates finis, et quelques langages plus élaborés.

Le calcul propositionnel est ensuite étudié, en particulier la déduction. Le calcul des prédicats est analysé à travers ses divers formalismes. Les problèmes de programmation logique, ainsi que les différentes approches du concept d'algorithme sont ensuite traités dans une perspective plus spécifiquement informatique. Enfin, l'exposé s'achève par l'étude de la notion de programme itératif et celle d'une logique destinée à la correction des programmes (logique de Hoare). Chaque chapitre est complété d'une série d'exercices, mis au point et appliqués lors de l'enseignement de ce cours, en deuxième cycle d'informatique.

En vente en librairie ou par correspondance à la Maison du Livre Spécialisé

BON DE COMMANDE

A retourner à la Maison du Livre Spécialisé - B.P. 36 - 41354 VINEUIL CEDEX

Je désire recevoir:
..... ex. de : **Systèmes formels**, par C. Benzaken
ISBN 2.225.82567.X à 133 F au lieu de 140 F*

Ci-joint mon règlement libellé à l'ordre de la M.L.S. de ..... F
Pour toute commande, ajouter les frais de port suivants : 1 volume: 20 F (étranger: 30 F). Chaque volume supplémentaire : 10 F. Envoi par avion, nous consulter. Franco de port pour toute commande supérieure à 1 000 F.

Nom : ..... Prénom : .....

Adresse : .....

Date : ..... Signature :

* Prix public TTC au 01.04.92 **923143**

LES PRÉMISSES ET LA MISE EN PLACE DE LA RÉFORME DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE FRANÇAIS

A. MAGNIER (Inspecteur Général Honoraire)

Les prémisses de la réforme : une intense activité

Il faut dire le rôle de la Commission internationale pour l'enseignement des mathématiques (CIEM), les travaux du professeur Freudenthal et de Mme Krygovska. En 1955, paraît chez Delachaux et Niestlé un ouvrage collectif (Piaget, Beth, Dieudonné, Lichnerowicz, Choquet, Gattegno) : "*L'enseignement des mathématiques*". (1) En 1959, se tient à Royaumont, sous les auspices de l'OECE, un séminaire aboutissant à une brochure : *"Mathématiques nouvelles"*, suivie de deux autres : l'une intitulée *"Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire"*, l'autre présentant un ensemble de monographies sur l'enseignement des mathématiques dans les différents pays de l'OECE. En 1963, en novembre, à Athènes, se tient une conférence internationale donnant également lieu à une publication OECE : *"Mathématiques modernes. Guide pour l'enseignement"*.

Cette activité internationale collective se double d'actions nationales, en particulier à l'initiative de l'APMEP (*cf.* le texte d'H. Bareil) ainsi que de la parution d'ouvrages consacrés à des exposés de points de vue modernes sur les mathématiques et leur enseignement (*cf.* références).

Mais quel est alors l'état, en France, de l'enseignement des mathématiques dans le second degré (CEG(2) et classes préparatoires(3) exceptés)?

L'enseignement des mathématiques à la veille de la réforme

1 – Les programmes.

Les programmes du premier cycle sont pratiquement ceux d'avant guerre; leur rédaction a cependant été améliorée. En 6ème et 5ème, les élèves ne font guère que du calcul; on y reprend les notions déjà vues dans le premier degré; on y fait de nombreuses mesures; on jongle avec les unités de grandeur et avec les fractions; on commence à représenter des nombres par des lettres, à dire l'usage des parenthèses.

La classe de quatrième marque la véritable entrée des élèves dans le monde des mathématiques. Les nombres relatifs sont introduits, l'usage des parenthèses consolidé. La géométrie, à peine ébauchée en cinquième, en constitue l'essentiel. L'enseignement correspond aux livres I et II de géométrie plane d'Euclide : droites, cercles, angles, parallélisme, orthogonalité, parallélogrammes. Des théorèmes sont présentés comme tels : hypothèse(s), démonstration, conclusion; les cas d'égalité des triangles sont systématiquement utilisés. En troisième, on étudie les livres III et IV d'Euclide : théorème de Thalès, triangles semblables, propriétés du triangle rectangle, rapports trigonométriques, aires.

Des instructions, de 1946 et 1957, accompagnent ces programmes; elles sont excellentes, libérales, très précises pourtant.

Les programmes de second cycle (en se bornant aux classes scientifiques) sont restés longtemps ceux d'avant guerre : en seconde, une profonde révision de la géométrie plane, équation et trinôme du second degré; en première, géométrie dans l'espace (livre V d'Euclide), trigonométrie et étude de fonctions numériques simples à l'aide de dérivées. C'est en mathématiques élémentaires que sont étudiées les transformations géométriques (dont l'inversion), les coniques (de façon très détaillée) et que les primitives sont introduites; il y a aussi dans cette classe un programme d'arithmétique et un programme de cosmographie.

Mais une étude approfondie a amené leur refonte et de nouveaux programmes entrent en vigueur, en seconde à la rentrée de 1960, en première et en terminale, les deux années suivantes. Entre seconde et première, le principal changement réside dans le passage en seconde du début de la géométrie de l'espace.

En mathématiques élémentaires, les changements sont plus importants : introduction d'analyse combinatoire, des nombres complexes, de l'intégrale, des fonctions logarithmes et exponentielles, remplacement de la trigonométrie de jadis par l'étude des fonctions trigonométriques, réorganisation de l'étude des transformations autour de celle des groupes de transformation, introduction de rudiments de langage ensembliste, des quantificateurs. En revanche, la part faite à la géométrie, en particulier aux coniques, se trouve considérablement réduite.

2 – Le personnel enseignant

Ce personnel est extrêmement disparate. Il comprend :

– des professeurs, agrégés ou certifiés, de grande expérience, de haute qualité, ouverts à une évolution et en voyant la nécessité; ce sont surtout les professeurs du second cycle scientifique,

– beaucoup de licenciés de mathématiques titularisés sur place,

– des jeunes certifiés aussi, recrutés par le CAEC[4] ou le CAPES, en général d'assez bonne qualité, bien que moins ouverts aux réformes que les anciens; ils sont une minorité, les nombres de postes aux concours ayant été initialement trop faibles,

– des professeurs d'école normale.

Mais, la pénurie se manifestant, le nombre de titulaires est devenu dangereusement insuffisant. On doit avoir recours à des maîtres auxiliaires recrutés sans titres, non préparés et à des instituteurs dont la formation scientifique se limite au baccalauréat sciences expérimentales. Du fait de l'explosion scolaire, du fait que les facultés des sciences ne fournissent qu'un petit nombre de licenciés, qu'elles ont à gérer leurs propres angoissants problèmes de recrutement d'assistants, la situation s'aggrave d'année en année. La création en 1952 des CPR[5] et celle en 1957 des IPES[6] n'a pas encore produit, en 1966, d'effets appréciables.

La situation décrite ici avait, évidemment, des effets de nature à émouvoir l'opinion publique et particulièrement ceux qui avaient connu personnellement un enseignement secondaire de qualité, ceux aussi qui pensaient que, longtemps essentiellement littéraire l'enseignement du second degré devait devenir résolument scientifique. Pourtant la cause réelle de cette crise de qualité : la pénurie d'enseignants, n'avait guère été dégagée. C'étaient les structures du second degré, l'existence des séries, le fonctionnement des établissements, les examens, le surmenage, les programmes... qui étaient incriminés. Quelques mesures avaient bien été prises comme des stages de quelques jours pour les maîtres auxiliaires. Elles étaient insuffisantes. Fin 1966, Christian Fouchet, le Ministre d'alors, décida de créer une commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques et d'en confier la présidence à André Lichnerowicz, professeur au Collège de France.

La commission Lichnerowicz et la réforme

La commission comprenait initialement dix huit membres, tous nommés à titre personnel. Elle adopta en 1967 un premier texte intitulé *"Rapport préliminaire de la commission ministérielle sur l'enseignement des mathématiques"*.[7]. Ce texte contenait une solide introduction sur la place des mathématiques dans le monde moderne. Il y était affirmé avec force que "le problème des mathématiques et de leur enseignement était devenu le premier, peut-être, des problèmes mondiaux de l'éducation" et qu'élever le niveau mathématique de ses membres était un impératif pour "toute nation soucieuse de son indépendance". Le rapport formulait aussi des premières propositions, celle par exemple, de la création d'Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (les futurs IREM) et décrivait en annexe, chiffres à l'appui, la situation dramatique de l'enseignement des mathématiques en France, du fait de la pénurie de professeurs.

Après avoir produit ce premier texte, la Commission s'est attelée à la rédaction

de nouveaux programmes. Ceux de 6ème et 5ème ont paru en temps utile pour leur application en 6ème à la rentrée de 1969, en 5ème l'année suivante. Ceux de 4ème et 3ème ont été beaucoup plus difficiles à établir; finalement ils n'ont été adoptés qu'en février 1971, pour être appliqués dès la rentrée suivante en 4ème. Des programmes "transitoires" avaient été élaborés pour le second cycle et leur mise en application avait commencé à la rentrée 1969 en seconde; ils sont modifiés pour la rentrée 1973 quand arrivent au lycée les premiers élèves issus de la réforme.

Précisons également que la Commission a rédigé et fait accepter de nouveaux programmes pour l'enseignement élémentaire (1970) ainsi que pour les diverses sections de l'enseignement technique.

Peu à peu la commission s'étoffe. En 1973, lorsque son président démissionne, elle compte plus de cinquante membres. Il n'est pas remplacé et la commission cesse d'exister.

Les programmes de la commission Lichnerowicz s'opposaient assez nettement aux programmes antérieurs (*cf.* le texte de H. Bareil). Lors de leur parution, les professeurs n'étaient pas du tout prêts à les enseigner. Leur interprétation, les membres de la commission en étaient parfaitement conscients, était souvent fort difficile pour qui n'en avait que le libellé sans autre précision sur les intentions de la commission. Aussi est-il apparu nécessaire de les accompagner de commentaires indiquant une des manières de les présenter. D'autres présentations étaient bien sûr possibles et devaient leur être adjointes en annexes. En juin 1973, une seule avait paru. Il y avait pourtant unanimité au sein de la Commission pour que tout professeur conserve dans sa classe sa liberté traditionnelle de choix d'un ordre de présentation du programme.

La commission avait obtenu la création, à la rentrée 1968 (dans la situation politique du moment), de trois IREM, à Lyon, Paris et Strasbourg; quatre autres furent créés à la rentrée 1969, les autres ont suivi régulièrement. Ces IREM se sont trouvés, du fait des nouveaux programmes, dans la nécessité absolue de "recycler" tous les professeurs du second degré.

Réflexions

On ne comprendrait pas que ce texte se limite à un simple rappel historique de faits déjà bien lointains. C'est pourquoi je voudrais exprimer maintenant le jugement que je porte, avec le recul, sur ces événements.

Il n'est pas douteux que, lorsqu'elle a été faite, la réforme répondait à la fois à l'évolution des mathématiques et à une crise de qualité de leur enseignement dans le second degré. Il n'est pas douteux non plus qu'elle était largement amorcée par l'évolution de l'enseignement supérieur et des classes préparatoires, enfin par la parution de livres d'enseignement supérieur.

La commission a dû faire des choix. Les programmes auraient pu être autres et ils peuvent être contestés. Mais il faut dire à leur actif :

– d'abord, qu'ils étaient mathématiquement corrects,

– qu'ils ont apporté d'appréciables simplifications et précisions de langage; dans les manuels de 1960, on parlait de "lieux géométriques", de problèmes "impossibles", de "solutions étrangères" d'une équation...

– qu'ils ont introduit l'étude en son temps, c'est-à-dire dès la sixième, des nombres relatifs, familiers bien avant aux enfants,

– que les vecteurs (c'est-à-dire les éléments d'un espace vectoriel) y étaient vraiment définis et utilisés; plus de vecteurs-liés ni de vecteurs glissants.

La véritable difficulté est, à mon avis, venue des manuels. Il me semble, le recul aidant, que la commission a sous-estimé leur influence. Mais qu'aurait-elle pu faire de plus? Je rappelle qu'elle avait invité un représentant des éditeurs à assister à ses réunions.

Il est bien connu que l'usage du manuel des élèves par le professeur est très variable mais que c'est à travers les manuels que les professeurs interprètent presque toujours le programme. Aussi, je dirais volontiers

qu'un programme, si bon soit-il, ne peut être vraiment bien enseigné dans tout le pays que lorsque de bons manuels ont paru. Or ceux-ci ne peuvent être écrits que par des professeurs de qualité qui l'ont déjà enseigné quelques années. C'est pourquoi je ne crois pas qu'on puisse modifier profondément et vite des programmes de mathématiques.

Ceux de la commission Lichnerowicz ont imposé brutalement, c'est vrai, un changement très important. Il était nécessaire alors et peut-être avait-on déjà trop attendu? Mais il serait aujourd'hui injuste de juger du travail de la commission à travers les manuels de l'époque. Leurs toutes premières éditions montrent surtout la hâte avec laquelle ils ont dû être écrits. Les éditions suivantes – à quelques exceptions près – étaient encore bien médiocres. Ce jugement paraîtra peut-être sévère et je conviens tout de suite que, n'ayant participé à aucune rédaction, je ne sais pas si j'aurais fait mieux.

Je me suis interdit, jusqu'ici, de parler du présent, d'exprimer des craintes. J'espère me tromper, mais je crois voir deux dangers :

– je crains d'abord que les mathématiques ne soient, de plus en plus, dans le second degré, un moyen facile de sélection,

– mais je crains aussi que, par facilité, les programmes de mathématiques ne soient peu à peu vidés de tout contenu. Je voudrais que les mathématiques gardent – ou retrouvent – le caractère attrayant qu'avait jadis la géométrie plane d'Euclide, je voudrais surtout qu'elles restent une occasion d'imposer aux adolescents un langage précis en les formant – et je sais que c'est long – au raisonnement déductif. Ce dernier n'est-il pas indispensable à tout citoyen d'un monde libre? ■

---

(1) C'est dans cet ouvrage que l'on trouve (p.35) le fameux *"A bas Euclide"* de Dieudonné.

(2) CEG : Les collèges d'enseignement général ont succédé entre 1957 et 1960 aux cours complémentaires qui s'étaient multipliés après 1945. Ces collèges relevaient administrativement et pédagogiquement du premier degré et les instituteurs qui y enseignaient (42000 en 1965) n'avaient pas de formation scientifique (au maximum le baccalauréat sciences expérimentales).

(3) Les programmes des classes préparatoires avaient été réformés en 1954 et 1963.

(4) CAEC : Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les collèges, créé en 1942.

(5) CPR : Centres Pédagogiques Régionaux.

(6) IPES : Instituts de Préparation aux Enseignements du Second Degré.

(7) Rapport publié dans le numéro 258 du Bulletin de l'APMEP.

LA RÉFORME DES MATHS MODERNES VUE PAR UN ENSEIGNANT DU "TERRAIN"

Henri BAREIL (APMEP et IREM de Toulouse [1])

I – Une lente gestation

La France de la Libération esquisse une profonde réforme des modes d'enseignement (plan Langevin-Wallon, "classes nouvelles", "lycées pilotes"...) avec pour les mathématiques, d'intelligentes "Instructions Générales" de 1946. Ce courant pédagogique va bientôt se doubler d'une remise en question des programmes par un enseignement supérieur acquis aux outils algébriques modernes et vite enclin à traiter les professeurs de lycée de "gardiens de musée, qui montrent des outils poussiéreux dont la plupart n'ont pas d'intérêt" (Choquet, 1956). Simultanément s'exerce une pression sociale visant à promouvoir les carriéres scientifiques. D'où un intérêt accru pour les mathématiques. Cela alors que l'on scolarise de plus en plus massivement en sixième, et qu'apparaît donc peu à peu un public d'élèves plus difficile, hétérogéne, qui ne va cesser de poser des problèmes d'enseignement de plus en plus ardus... A l'orée de ce bouleversement, vers 1958-66, raison de plus, pense-t-on souvent en mathématiques, pour propager les outils "simples et puissants" relevant de l'algébre.

L'APMEP devient alors rapidement un foyer de convergence des divers courants. Sous l'impulsion notamment de G. Walusinski, P. Vissio, A. Revuz, elle s'oblige à penser – dans l'enthousiasme des découvreurs – les problèmes d'un enseignement contemporain des mathématiques. Cela nous vaut de beaux cycles de conférences, des séminaires de réflexion, le prenant "Cours de l'APM" de G. et A. Revuz, de beaux livres de L. Félix, de Vissio... Le Bulletin de l'APMEP propage toutes ces tentatives : la contagion gagne la base des adhérents, avec moins de science mais souvent autant d'enthousiasme...

Voilà donc, au fil des ans, un nombre croissant d'enseignants de mathématiques de plus en plus inquiets des contenus traditionnels, tendus vers l'espoir d'un renouvellement, solidaires pour prendre ensemble problèmes et espoirs à bras le corps. Surgissent alors, parfois avec l'aide de l'INRP et des CDDP, les "Chantiers de l'APMEP", lieux d'auto-formation réunissant des enseignants de tous ordres, une minorité certes mais une minorité agissante, vivier pour l'avenir!

1964-70, c'est ainsi l'époque où l'APMEP s'érige en importante force de proposition pour préparer, par sa "Grande Commission" (1964) des changements fondamentaux des programmes, réclamer et définir des lieux de formation continue et de recherche : les IREM. C'est le temps de la "Charte de Chambéry" (février 1968).

La mise en place, en 1966, d'une "Commission ministérielle" désormais en charge des programmes : la Commission Lichnerowicz, les événements de mai 1968 qui vont notamment aboutir à la création des IREM vont brutalement accélérer le mouvement. De nouveaux programmes, accompagnés de très directives Instructions d'application, sont publiés de 1968 à 1971 et la réforme se met en place.

II - La réforme

Sixième-Cinquième : le vent se lève.

Les nouveaux programmes, préparés par diverses expérimentations (équipes INRP/APMEP) amorcent le changement radical mais de façon voilée. Nous y constatons des disparitions dont la pleine signification n'apparaîtra qu'à l'occasion des programmes de 4ème-3ème : celle des "cas d'égalité" des triangles, celle de l'initiation à la démonstration en 5ème à partir de propriétés métriques de figures usuelles par exemple. On s'y coupe aussi volontiers de l'amont : ainsi plus question de quotient, du fait que celui de deux décimaux n'est pas toujours un décimal. En revanche, on met en place un langage ensembliste et relationnel important et l'on insiste beaucoup,

dans les Instructions, sur l'introduction des relatifs par des signes prédicatoires autres que les signes "+" et "-" d'opérations. Il est également prévu, en liaison avec "l'étude du français" celle de "le", de "un", "et", "ou", "tout". (2)

Encore que typé idéologiquement, le programme reste mesuré sur ses propositions. C'est compter sans l'air du temps et le zèle de néophytes qui vont, dans maint manuel, accentuer les nouveautés du programme, théoriser là où il n'est prévu que des exemples, introduire l'implication et l'équivalence logiques, se gargariser de soi-disant cas concrets aux complications parasites ("un garçon peut-il être frère de lui-même?") et, en lieu d'une activité mathématique réelle, développer un zéle langagier valorisé en rigueur formatrice, dont on aura plus tard beau jeu de se moquer.

Côté élèves, le programme semble passer d'autant mieux que le vocabulaire est peu réinvesti (alors tant pis s'il n'est qu'un vernis!), que l'on s'amuse beaucoup avec des diagrammes sagittaux, qu'il existe des fiches, très utilisées, découpant parcellairement le programme, et demandant peu d'efforts. Le vivier APMEP, les quelques IREM naissants, n'auront pas le temps d'exercer une influence profonde : les formateurs possibles seront vite kidnappés vers d'autres cieux : second cycle et 4ème-3ème, où le corps enseignant sera mis à rude épreuve.

Quatrième – Troisième : le typhon I.

A partir de 1969, des équipes INRP travaillent sur divers projets interprétatifs des programmes (Galion, Dumont, Frenkel...), chaque fois avec un parti-pris de départ favorable..., mais très vite des réserves pour le projet Frenkel. Or c'est le seul qui, début 1971, séduit la Commission (notamment par une belle théorie axiomatique intrinsèque en géométrie). Il est érigé en Annexe du programme tandis que des Instructions détaillées précisent sa mise en œuvre.

Tout y semble subordonné à la pureté de constructions mathématiques trouvant essentiellement leurs fins en elles-mêmes : en algèbre, le temps est dévoré par la construction de Q et R, voire de D ; en géométrie, non seulement, on distingue plan et droite mathématiques de leurs homologues physiques mais voilà la droite définie sous trois aspects (axe, droite affine, droite euclidienne) par des familles de bijections sur R. Les représentations les plus farfelues peuvent en être données : le *Canard Enchaîné* lui-même ne s'en privera pas.

Surtout, on opère un étagement radical entre l'affine et le métrique : la classe de quatrième ne connaît que la géométrie affine, pas de métrique du plan, donc ni distance, ni cercle, ni orthogonalité. Cette structure pauvre ne permet aucune activité réelle des élèves. Le langage lui-même s'hypertrophie. Par exemple, en 3ème, on parlera de : "cosinus indice 180 (ou 200 ou π) de l'écart angulaire de tel angle géométrique" et la défiance règne quant aux grandeurs : on ne doit travailler que sur des nombres (les vrais). De nombreux enseignants en viendront à hésiter à écrire par exemple : "4m = 400cm". D'autres se verront reprocher un : "5F×4 = 20F." (3)

L'assurance de la Commission ministérielle entraîne celle des auteurs de manuels : ces derniers sont généralement de superbes monuments de théorie pour la théorie, faisant fi des recommandations du programme sur le caractère "absolument indispendable de nombreuses manipulations préparatoires". Les corps d'inspection eux-mêmes vont le plus souvent s'efforcer d'obtenir une application rigoureuse de ces programmes irréalistes.

Peut-on dominer ces programmes?

Peu d'enseignants, excepté les très jeunes, ont reçu une formation théorique quelque peu adéquate. Et comment adapter les contenus aux élèves, de plus avec des Instructions si directives? D'ailleurs, la théorie est-elle si facile? Une interprétation Crozes du programme fera, pour un axiome, errer pendant deux heures tous les membres – sauf un – de la Commission Lichnerowicz...

1972-73 : La réaction.

Déstabilisés par le programme (mis en application à la rentrée 72), corsetés par sa directivité, la plupart des enseignants se réfugient dans des cours dictés appuyés sur des manuels ardus, qui ne laissent guère d'activité mathématique aux élèves : les constructions mathématiques ne peuvent qu'être imposées, la matière mathématique à la portée des élèves est trop restreinte pour un réinvestissement significatif des rares outils disponibles. D'autre part, les enseignants s'affolent devant leur propre déphasage, devant celui des élèves. Des révoltes se préparent. Les réformistes de la base, APMEP en tête, voudraient eux sauver les ambitions des programmes les plus acceptables et s'assurer des possibilités de les réaliser.

Fin novembre 1972, le bureau national APMEP lance une pétition nationale attirant l'attention sur les difficultés rencontrées et réclamant des aménagements. Assez rapidement entendue par la Commission Lichnerowicz cette pétition l'est aussi par le doyen Magnier dès qu'elle approche les 20000 signatures. De groupes de travail restreints, à forte représentation APMEP, avec appui de personnalités comme P. Samuel ou L. Thiberge, naît une circulaire officielle de février 1973, aussitôt diffusée par l'APMEP. Son objectif est triple : mieux définir l'essentiel à faire acquérir et proposer des activités associées, permettre des élagages théoriques et la pratique "d'ilôts déductifs", rappeler prioritairement quelques idées clefs sur les modes d'appropriation du savoir.

Cette circulaire a des effets positifs : il paraît des versions simplifiées des manuels, les enseignants sont moins corsetés, leur révolte s'appaise et tous vont faire de leur mieux, avec l'appui d'IREMs de plus en plus nombreux. Mais il reste qu'il est toujours fait obligation au maître de disposer d'une axiomatique sous-jacente à son cours, une vision théorique totalement inadéquate à ce niveau, et que l'affine reste seul de mise en 4ème avec son paysage mathématique rabougri.

Second cycle : des orages résiduels.

Par rapport aux précédents, les nouveaux programmes insistent sur le vocabulaire ensembliste et relationnel et "le lien avec la logique", les calculs vectoriel et matriciel en introduisant une dose massive d'algébre linéaire.

Ici aussi il y a des excès de manuels voire des programmes (ainsi pour la distinction entre "cos" et "Cos"). Mais la formation initiale des enseignants est globalement meilleure que pour les collèges et la formation continue mieux assurée en 1974 qu'en 1972, des interprétations des programmes sont possibles. Pour les sections C, les tris successifs en fin de troisième, de seconde, de première font des élèves plus réceptifs aux apports des contenus mathématiques et des enseignants plus satisfaits – beaucoup seront vite séduits par les théories exposées (qu'ils appuient souvent mentalement par des images de géométrie traditionnelle). Mais hors des sections C, quels déphasages encore!

III - Une fois la réforme sur ses rails

En dépit des efforts de l'APMEP et des IREM pour donner du sens à l'activité mathématique, l'élan dogmatique initial perdure à la base. De là, peu à peu et de plus en plus fortement, une mise en cause globale de la réforme :

– par des pères (Choquet, Dieudonné...) qui n'y reconnaissent pas l'enfant souhaité, Choquet dénonçant des générations qui ne seront préparées à rien et Dieudonné "une nouvelle scolastique, forme encore plus agressive et stupide placée sous la banniére du modernisme",

– par les équipes APMEP ou IREM, notamment la plupart de celles impliquées, sous la direction de C. Perol, dans une recherche de géométrie qui fait du métrique dès la 4ème.

Il s'ensuit des rectifications progressives à partir de 1978 puis, à partir de 1985, une réforme globale, cohérente tout au long du secondaire.

IV - Que reste-t-il de nos amours?

1) Du franchement négatif : des risques de mouvements pendulaires entraînant des excès inverses de ceux combattus, une tendance persistante à réduire parfois l'activité mathématique à l'acquisition formelle de définitions rigoureuses, d'un vocabulaire rigoureux et si possible sans polysémie, un persistant ostracisme à l'égard d'outils comme les cas d'isométrie.

2) *Du carrément positif y compris grâce aux échecs et à leurs leçons :*
– une plus grande capacité d'échanges entre collègues et avec les corps d'inspection, la multiplication des recherches sur l'enseignement notamment didactiques et l'intérêt porté à l'évolution historique des concepts, une attention accrue à l'activité propre de l'élève, aux modes d'apprentissage et à des mathématiques qui aient du sens pour lui,
– les prises de conscience corrélatives que la cohérence mathématique ne suffit pas pour fonder un programme et qu'il faut rechercher une adéquation aux élèves, avec continuité tout au long de la scolarité, que les abstractions et conceptualisations – essence même de l'activité mathématique – ne peuvent intervenir efficacement qu'au terme d'un long cheminement, à travers des situations appropriées, jamais de façon prématurée,
– une meilleure approche de l'activité majeure d'un enseignant de mathématiques : en faire faire, et d'un moyen majeur : centrer sur la résolution de problèmes que les élèves peuvent s'approprier avec la mise en place de méthodes,
– enfin, un joyau : les IREM.

Tout cela n'aurait pas été possible, ou ne l'aurait pas été avec la même force, sans le mouvement, l'appel d'air ou la tornade créés par la Réforme. Paradoxalement, la réforme des maths modernes s'est essouflée sur son domaine : celui des contenus, et a réussi, alors qu'elle le négligeait, à donner par contre-coup un bel élan aux pédagogies du savoir mathématique.

3) Une grande ambition : celle des programmes actuels qui veulent "faire faire" beaucoup de mathématiques, avec une formation en profondeur : lisez les commentaires des programmes, les manuels et vous serez convaincus : les élèves peuvent faire plus que jamais des mathématiques alors qu'ils forment un public sans cesse élargi et difficile. Encore faut-il que cela ne soit pas occulté, défiguré, par une formation initiale des maîtres déphasée et une formation continue laissant le champ libre aux risques ci-dessus signalés ou méconnaissant les apports positifs des deux dernières décades. Ces problèmes de formation sont les plus cruciaux. Tout devrait aussi être fait pour expliquer les raisons et les enjeux des choix effectués. On pourrait alors espérer des orientations actuelles un enseignement à tous égards aussi efficace que possible. ■

---

(1) H. Bareil enseignait durant la réforme au lycée-collège de Toulouse-Bellevue.

(2) J. Desforge l'avait déjà excellemment fait dans un livre de Cinquième de 1938.

(3) Par opposition, il faut lire la brochure APMEP *"Mots VI"* de 1982 et son algèbre des grandeurs justifiant excellemment des écritures "horribles" telles que $4cm \times 3cm = 12cm^2$ ou $7kg \times 3F/Kg = 21F$.

UNE RÉFORME INACCOMPLIE

Yves CHEVALLARD (IUFM et IREM d'Aix-Marseille)

On ne saurait rendre raison de la réforme des mathématiques modernes et de ses conséquences en quelques pages. Je me contenterai donc de dresser un rapide tableau illustré de certains des points clés d'une analyse possible.

1. Au début des années soixante, une réforme des mathématiques enseignées est devenue inévitable.

La distance entre les mathématiques "savantes", c'est-à-dire les mathématiques vivantes, et le curriculum de l'enseignement secondaire apparaît trop grande. Le divorce est patent. Il s'exprime, non sans artifice, à travers l'opposition des "mathématiques classiques" et des "mathématiques modernes". Bien que régulièrement retouché, le curriculum, en effet, n'a enregistré presque aucun des grands bouleversements qui ont affecté le paysage mathématique depuis la seconde moitié du XIX siècle. Un seul exemple, que la Réforme rendra fameux : celui du statut des nombres réels. Henri Lebesgue avait, dès les années 1930, dénoncé les tours de passe-passe auxquels il donnait lieu. Voici en quels termes [1] :

Actuellement, on ne parle pas du nombre distance au premier livre de la géométrie; on n'en parle qu'au troisième (...) Encore en parle-t-on avec quelque réticence à cause de l'emploi du nombre dans toute sa généralité; on parle des rapports de distances bien plus que des distances et le nombre distance n'apparaît de façon avouée que lorsque, dans une proportion entre distances, on fait des produits en croix. A ce moment on suppose connus et les nombres distances et les opérations sur les nombres (...)

Mais là se place le scandale de l'incommensurabilité; il fallait tourner la difficulté, éviter le nombre. C'est pourquoi on a parfois fait comme je disais tout à l'heure, posant une définition de ce que l'on appellera l'égalité ou l'inégalité de deux rapports par des moyens qui sont exactement ceux permettant de décider de l'égalité ou de l'inégalité de deux nombres déterminés chacun par une coupure; mais on a soin de ne pas s'en apercevoir et d'éviter de parler de ces nombres que l'on compare. Alors on prétend que l'on ne s'est pas occupé de nombres, qu'un rapport de longueurs est autre chose que le nombre qui le mesure (...) Je n'y peux voir que le souci d'écarter un mot et je pense à celui qui dirait : je n'ai pas besoin de la notion de chapeau pour parler de cette chose ronde que vous avez sur la tête, qui a un cuir à l'intérieur et un ruban à l'extérieur.

2. La réforme des mathématiques modernes vient trop tard : on a trop attendu.

Plutôt que de modernisation, il vaut mieux parler, en vérité, de *désarchaïsation*. La commotion est d'une extrême violence. Tout un univers mathématique familier est révoqué en doute. Ainsi les professeurs apprennent-ils, en payant le prix fort, que la mesure des angles telle qu'ils la pratiquent depuis toujours est une opération mathématiquement illégitime. Dans les hautes sphères la chose était connue. Mais on avait plus ou moins laissé faire.

3. A cause du retard pris et de l'ampleur des transformations nécessaires, la Réforme se développe dans un climat d'intimidation intellectuelle qui occulte ses enjeux véritables.

Les nouveaux convertis font dans l'excès de zèle. C'est la chasse aux sorcières. Parce qu'on s'est reconnu pécheur on voit désormais le péché partout. Citation [3] :

Il faut chasser tous les vocables ambigus dont un bel exemple est : "un angle est la figure formée par deux demi-droites d, δ de même origine", où "figure" désigne suivant les cas, un des deux couples (d, δ) ou (d, δ), la réunion (ensemble de points) des deux demi-droites, le secteur angulaire

saillant fermé, enveloppe convexe de l'ensemble précédent, le secteur angulaire rentrant fermé, etc.

Pour lutter contre la confusion qui n'a que trop régné dans la question des angles, il vaut mieux, pour l'instant, accentuer les différences entre les divers concepts que les atténuer, et il faut insister sur ce qui les sépare.

4. La Réforme, en même temps, est un grand moment de la vie culturelle française en ce qu'elle ose poser avec une formidable énergie et une admirable ambition le problème de la place des mathématiques dans la société et dans la culture.

Chacun est interpellé. La Réforme proclame que l'honnête homme de demain ne pourra ignorer les mathématiques, parce qu'elles sont l'une des forces vives dont notre société moderne ne saurait désormais se passer. Pendant quelques années magiques, le charme opère. Fleurissent les *Mathématiques pour papa* et les *Mathématiques pour maman*. Le succès de curiosité, l'effet de mode font renaître un bref instant l'esprit des Lumières, lorsque Voltaire, Diderot et Buffon ne dédaignaient pas de s'occuper de mathématiques; lorsque, encore, à l'ouverture du Lycée, en 1786, la bonne société se pressait pour entendre Fourcroy parler de chimie, Monge, de physique, Condorcet, de mathématiques...

5. Energique, généreuse et excessive à la fois, la Réforme restera pourtant en partie inaccomplie.

Les excès doctrinaires font oublier que l'évolution des mathématiques répond moins à une exigence fantasmatique de pureté conceptuelle qu'aux simples besoins du travail mathématique. Une partie de l'outillage rendu disponible par cette évolution n'arrivera jamais jusque dans l'enseignement secondaire. A nouveau, un exemple. Les *Eléments de calcul vectoriel* de Burali-Forti et Marcolongo, dont la version française paraît en 1910 chez Hermann, et dont les auteurs se réfèrent encore à Grassmann, Möbius et Hamilton, met entre les mains du lecteur un outil de travail résolument moderne, dont voici un exemple d'utilisation on ne peut plus élémentaire.

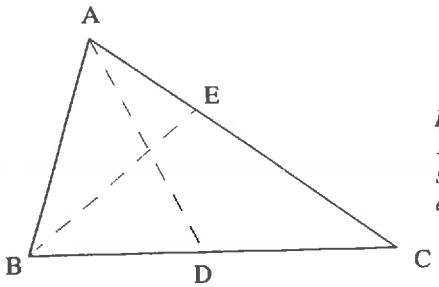


Figure 1

Problème – Etant donné un triangle ABC, soit D le milieu de $[BC]$ et soit E le point de $[AC]$ situé au tiers de $[AC]$ à partir de A. Montrer que $[AD]$ et $[BE]$ se coupe au milieu de $[AD]$

Solution – Soit O un point du plan. Pour tout point M, on pose $m = \overrightarrow{OM}$. On a $d = b/2 + c/2$ et $e = 2a/3 + c/3$. En éliminant c entre ces deux égalités, on obtient $3e = 2a + 2d - b$, soit $b + 3e = 2a + 2d$. En divisant par 4 $(= 1 + 3 = 2 + 2)$ l'égalité précédente il vient alors $b/4 + 3e/4 = a/2 + d/2$. Le point F tel que $f = b/4 + 3e/4 = a/2 + d/2$ est le milieu de $[AD]$ (puisque $f = a/2 + d/2$) et se trouve sur $[BE]$ aux trois-quarts de $[BE]$ à partir de B (puisque $f = b/4 + 3e/4$).

Cet outil, avant comme après la Réforme, restera inconnu des élèves comme de leurs professeurs. La modernisation promise par la Réforme reste encore largement à faire.

6. En dépit de ses audaces, la Réforme n'osera pas toucher à certaines des valeurs sacrées de la culture mathématique primaire-secondaire; par l'effet d'une piété culturelle mal placée, elle préservera en certains cas un outillage mathématique désuet et inutile.

Ainsi, au plus fort de la Réforme, alors qu'on introduit la notion de fonction linéaire, on maintient l'antique traitement des "grandeurs proportionnelles" – lequel, sous divers avatars (suites proportionnelles, *etc.*), s'est perpétué jusqu'à nos jours. Exemple de ce qui ne se verra pas :

Problème – Un enfant a acheté 12 bonbons pour 8,40 francs. Il veut en acheter 8 de plus. Combien devra-t-il payer?

Solution – Le prix est une fonction linéaire f du nombre de bonbons. On doit déterminer $f(8)$. On sait que $f(12) = 8,40$. On a donc :

$$f(8) = f(2 \times 4) = 2f(4) = \frac{2}{3}f(3 \times 4)$$
$$= \frac{2}{3}f(12) = \frac{2}{3} \times 8,40 = \cdots$$

7. Non seulement la Réforme n'apporte pas toujours les outils plus fiables et plus efficaces que le travail des mathématiciens avait forgés, mais encore, en sens inverse, elle casse en certains cas l'outillage ancien techniquement utile, en prétendant lui substituer une "technologie" mathématique sophistiquée qui se révèlera souvent inutilisable.

Le Collège, notamment, apparaît à cet égard comme un véritable Triangle des Bermudes, où la matière mathématique disparaît. On y disposait autrefois des célèbres "cas d'égalité", ainsi que des "cas de similitude". Ils seront écartés pour raison de vétusté mathématique lorsqu'on s'apercevra qu'ils ne faisaient que masquer le groupe des isométries et le groupe des similitudes. Voici un exemple de ce qu'ils permettaient de faire.

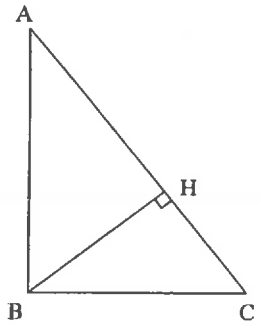


Figure 2

Soit H le pied de la hauteur relative à l'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en B. Le triangle AHB est (inversement) semblable au triangle ABC. On a donc en particulier $AH/AB = AB/AC$, d'où $AH = AB^2/AC$.

Pourtant, rien ne les remplacera. Ainsi, pas plus au Lycée qu'au Collège, les similitudes inverses n'ont aujourd'hui droit de cité. Pour les reconstituer il faudrait composer une homothétie (notion présente dès le Collège sous l'habit du Théorème de Thalès), avec une symétrie (notion dont on rebat les oreilles des élèves depuis la classe de sixième, en vertu des principes de l'enseignement spiralaire). Mais la chose paraît définitivement hors de portée. Voici, à titre de curiosité, ce qu'elle donnerait dans l'exemple précédent.

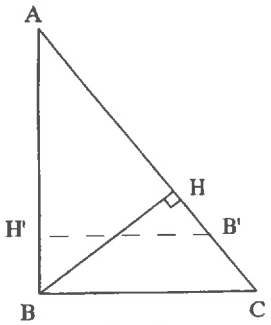


Figure 3

Soient B' et H' les symétriques de B et H par rapport à la bissectrice de l'angle en A. On a $[B'H'] \perp [AB]$, soit encore $[B'H'] // [BC]$. Les triangles ABC et $AH'B'$ sont donc homothétiques, et on a en conséquence : $AH'/AB = AB'/AC$. Comme $AH' = AH$ et $AB' = AB$, il vient $AH/AB = AB/AC$, d'où le résultat attendu.

8. Plus généralement, la Réforme provoque un bouleversement écologique au sein du curriculum, en déréglant nombre d'écosystèmes mathématiques, produits d'une évolution longue et complexe, dont certains, aujourd'hui encore, n'ont pu être revitalisés.

Ainsi en va-t-il par exemple à propos du numérique, géré autrefois à l'aide d'un système de concepts cohérents, minutieusement élaborés et opérationnels. Qu'on mesure la différence à lire cet extrait de l'actuel programme des classes de seconde :

Lorsque $|a - a'| \leq k.10^{-p}$, où $1 \leq k < 10$, on dit que a' est une approximation (ou valeur approchée) de a à la précision $k.10^{-p}$. Approximations décimales de a par défaut, par excès, à 10^{-p} près (ces nombres sont de la forme $m.10^{-p}$, où m est entier).

J'explicite. Soit $a = 1,853$. Selon une définition toute classique, l'approximation décimale de a par défaut à 10^{-2} près est $1,85$, l'approximation décimale de a par excès à 10^{-2} près étant $1,86$. Mais par ailleurs tous les nombres a' vérifiant $1,843 \leq a' \leq 1,863$ sont des approximations de a à la précision 10^{-2}. Ainsi $a' = 1,849$ est-il un nombre *décimal* qui est une approximation de a à la précision 10^{-2}, mais ce n'est pas une *approximation décimale* de a à 10^{-2} près. Pour rendre cohérent le système conceptuel ébauché par le texte du programme, il faut admettre, soit que *à la précision* 10^{-2} ne signifie pas la même chose que *à* 10^{-2} *près*, soit qu'une approximation décimale n'est pas une approximation qui est un nombre décimal. Je ne peux montrer ici le soin maniaque que le curriculum classique apportait à épargner aux élèves et à leurs professeurs ce genre de chausse-trapes, leur permettant ainsi de travailler de manière fiable et efficace.

9. Le curriculum antérieur à la Réforme était d'une grande stabilité; la Réforme ouvre une ère d'instabilité qui n'a pas encore pris fin.

Lebesgue, comme tous ses contemporains, pouvait parler, sans risque de malentendu, du premier ou du troisième livre de la géométrie... De la Réforme sort un curriculum fragilisé, dont l'architecture n'a cessé de bouger au cours des vingt dernières années. Or l'existence d'une architecture curriculaire relativement pérenne, si arbitraire soit-elle, constitue un repère collectif et individuel essentiel dans les apprentissages, en ce qu'elle clarifie et précise les contrats didactiques. Inversement son absence se traduit par un "déficit de contrat" qui pèse sur la possibilité même d'étudier.

10. Passée la réaction de la Contre-réforme (autour de 1978), la réforme "postmoderne" lancée en 1985 tente de reconstruire un cadre propice à l'étude et au travail; mais ce cadre reste encore largement à organiser.

Ainsi les programmes des classes de Collège distinguent-ils trois rubriques :

"Travaux numériques", "Travaux géométriques", "Organisation de données. Fonctions". Mais on a vu plus haut un symptôme des conditions dans lesquelles devaient être conduits les "travaux numériques". On a dit aussi que la notion de fonction restait en fait largement inexploitée. On notera en outre l'absence de toute référence à des travaux algébriques.

11. La pénurie d'outillage conceptuel et technique qui marque la postmodernité constitue un obstacle objectif à la qualité du travail mathématique possible; mais surtout, elle sera interprétée subjectivement en termes d'extrême fragilité des élèves.

Leurs prédécesseurs n'avaient pas plié sous le feu des angles-classes-d'équivalence-de-rotations. Eux, nous dit-on, ne supporteraient plus rien : pas même, au Collège, la valeur absolue... Dans le même temps va s'imposer, contre le modèle de l'artisan laborieux et patient, une vision héroïque de l'élève, fragile mais "créatif", véritable Mac Gyver des mathématiques, supposé capable de tout affronter à mains nues en toutes circonstances.

12. Cet habillage idéologique à la mode du temps a fini par masquer le problème auquel la Réforme, en dépit de ses faiblesses et de bien des naïvetés, eut la grandeur d'oser s'affronter : celui de la refondation et de la reconstruction du curriculum mathématique.

Ce problème, posé autrement, est aujourd'hui le nôtre. Le style de solution à lui apporter pourrait être très différent de celui qu'illustra la Réforme – cet échec splendide. ■

(1) Henri Lebesgue, *La mesure des grandeurs*, Albert Blanchard, Paris, 1975, pp. 28–29.

(2) *Op. cit.*, p. 32.

(3) *Chantiers mathématiques*, tome 1, Ministère de l'Education Nationale, 1970, p. 64.

LA RÉFORME DES "MATHS MODERNES" EN BELGIQUE [1]

Guy NOËL (Université de Mons)

I - La chronologie

En Belgique comme ailleurs, la réforme dite des "maths modernes" résulte d'une longue réflexion. Mentionnons seulement les réunions de la *Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM) fondée en 1950 par Caleb Gattegno. Dès le début, plusieurs Belges y participent. Ils figureront parmi les animateurs principaux du mouvement de réforme des années 60. Dès 1958, Frédérique Lenger et Willy Servais décident de tenter une première expérience. Ils rédigent à l'intention des futures institutrices maternelles un programme expérimental qui aborde les notions d'ensemble et de relation et introduit des notions topologiques intuitives. Un des objectifs poursuivis est d'amener les institutrices maternelles à découvrir des relations mathématiques dans des situations simples. L'expérience est réalisée en 1958-59. Très vite, les promoteurs éprouvent le besoin de s'assurer la collaboration d'un mathématicien universitaire. Ils contactent Georges Papy, professeur à l'Université Libre de Bruxelles. Celui-ci exprime son scepticisme mais accepte de jouer le jeu. Il le jouera tellement bien qu'en 1959-60 il enseignera lui-même le programme expérimental et deviendra l'élément moteur de la réforme en Belgique. Pendant plus de 10 ans, Papy consacrera toute son énergie à la réforme. Il combattra durement aussi tous ceux qui s'écarteront si peu que ce soit de sa doctrine. Il n'y a pas de rose sans épines....

Pendant les deux premières années, Papy met au point divers moyens pédagogiques. Il utilise systématiquement des diagrammes de Venn et des graphes sagittaux. Il en codifie plus ou moins l'emploi. D'autres conventions graphiques sont introduites. Sur la base notamment de ces expériences, Papy et ses collaborateurs lancent la réforme dans l'enseignement secondaire. Le 24 mai 1961 est fondé le *Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique* (CBPM) et Papy publie des *Suggestions pour un nouveau programme de mathématique dans la classe de sixième* [2]. Il obtient que ce programme soit expérimenté dans plusieurs classes dès 1961-62. Après trois années, le programme expérimental se présente comme suit :

– Classe de sixième (12 ans) : Ensembles, relations, entiers rationnels, numération binaire et décimale, débuts de la géométrie affine.

– Classe de cinquième : Géométrie affine plane, nombres réels.

– Classe de quatrième : Polynômes, équations linéaires, géométrie métrique plane.

Dès juin 1962, le Ministre de l'Education Nationale avait invité tous les professeurs à parfaire leur information et réfléchir aux problèmes pédagogiques [...]. En 1965, le programme expérimental est mis sur le même pied que le programme traditionnel. Sa généralisation est annoncée pour le 1er septembre 1968. De 1964-65 à 1966-67, le CBPM propose ses programmes pour le second cycle. Ils comportent trois grands thèmes : algèbre linéaire, analyse, arithmétique. A l'inverse des programmes du premier cycle, ceux du second ne seront guère expérimentés. En 1967, une seule des classes engagées dans l'expérience en 1961 aura reçu, sous la direction de Frédérique Papy, un programme expérimental tout au long des 6 années du secondaire. Cependant Papy et Frédérique s'embarquent dans une nouvelle aventure : porter la réforme dans l'enseignement primaire. Au 1er septembre 1968 entre en vigueur le programme définitif de la classe de 12 ans, fortement inspiré du programme expérimental. Les programmes des années suivantes seront publiés année après année jusqu'en 1973. Comme en France, mais deux ans plus tôt, la réforme devait susciter des polémiques. En 1968 et 1969, la "guerre des maths modernes" opposa "papystes" et

"anti-papystes". La grande presse s'emparant du sujet ne fit qu'alarmer le public. Mais à partir de septembre 1969 la guerre des maths s'éteignit d'elle-même. Après 1967, Papy et Frédérique s'intéressent surtout à l'enseignement primaire. Frédérique introduit à ce niveau l'usage des graphes sagittaux, en tant que supports du raisonnement. Le calcul est abordé via les réglettes Cuisenaire et un abaque appelé MINICOMPUTER, inventé par Papy. Frédérique obtient d'incontestables résultats. L'auteur de ces lignes ne se sent guère qualifié pour parler en détails de la réforme à l'école primaire.

II - Le recyclage

Une réforme de l'ampleur de celle qui était préconisée nécessitait un recyclage important du corps enseignant. En Belgique, les enseignants du premier cycle (12-15 ans) recevaient à l'époque une formation de deux années d'études après le secondaire. Ceux-là n'avaient jamais entendu parler de théorie des ensembles, de relations, encore moins de topologie. Ceux qui fonctionnent dans le second cycle (15-18 ans) sont des licenciés de mathématiques. [3] Seuls les plus jeunes d'entre eux avaient pu être en contact à l'Université avec l'algèbre moderne.

Le premier organisme à se préoccuper de formation permanente à l'échelle du pays fut la Société Belge de Professeurs de Mathématique (SBPM). Sa revue, *Mathematica & Pedagogia* [4], et ses congrès donnaient l'occasion aux enseignants de s'exprimer, de faire part de leurs expériences. En 1968, pour diffuser ses points de vue et propositions, le CBPM publiera sa propre revue, *Nico*.

Ces moyens ne suffisaient pas. En 1959, la SBPM organisa les premières "Journées d'Arlon". A partir de 1961, leur organisation pratique fut confiée au CBPM. Elles eurent lieu durant 10 ans. Les principaux sujets d'algèbre et d'analyse modernes y furent abordés. Les Journées d'Arlon ont réuni jusqu'à 600 professeurs en un même lieu pendant trois jours. C'était encore insuffisant. Aussi, dès 1961, le CBPM mit en place des groupes de travail fonctionnant chaque semaine dans une quinzaine de centres urbains. Tant les animateurs que les participants étaient bénévoles. Les Groupes de Travail fonctionnèrent jusqu'en 1968. Ils étudièrent successivement les sujets correspondants aux matières des nouveaux programmes, notamment les nouveaux cours de géométrie. Pour l'ensemble des activités des Groupes de travail du CBPM, on a cité le chiffre de 12000 heures de cours. Et environ 3000 enseignants auraient été impliqués. On a assité dans ces Groupes à un extraordinaire élan collectif en vue d'augmenter le savoir mathématique des participants et d'en faire bénéficier les élèves du secondaire.

Par ailleurs, Papy publiait énormément. En 1963 paraît le premier volume de la série des "MM" : Mathématique Moderne 1 (MM1) est conçu comme manuel pour la classe des 12 ans, MM2 contient la géométrie affine plane et les nombres réels, MM3 est intitulé "Voici Euclide". Ces ouvrages ont eu à l'époque un grand retentissement.

De 1959 à 1968 on assiste donc en matière de formation permanente à des activités importantes, mais qui ne touchent que des volontaires. A la généralisation des nouveaux programmes, l'organisation des recyclages fut reprise par les pouvoirs organisateurs, l'Etat en particulier. Des problèmes divers, notamment de type syndical, amenèrent la suspension des activités. Certains inspecteurs continuèrent néanmoins d'organiser des recyclages ponctuels jusqu'en 1978.

III - L'esprit de la réforme et sa mise en pratique

Les modifications à apporter aux cours de mathématique portaient sur le contenu et sur la méthodologie. Sur le plan du contenu, il s'agissait de reconstruire un exposé rigoureux de mathématique élémentaire mettant en évidence les grandes structures. L'enseignement de la géométrie était conçu pour permettre la mise en place rapide et l'exploitation de la structure d'espace vectoriel, considérée comme

la plus importante. En classe de cinquième, la géométrie affine permettait de construire le corps des nombres réels et d'accéder à la structure d'espace vectoriel. En quatrième, la distance et le produit scalaire étaient définis de façon géométrique. Une fois établies les propriétés algébriques du produit scalaire, la géométrie métrique des figures n'était plus qu'une suite de calculs simples. Quant aux isométries du plan, c'est surtout la structure de leur groupe qui était étudiée.

Il convient de dire ici que le cours de géométrie mis au point par Papy était du point de vue mathématique une remarquable construction, tout à fait rigoureuse, très élégante, très économique, mettant en évidence les résultats essentiels. Papy n'avait jamais eu recours à un formalisme excessif. Pas question de définir une droite par une famille de bijections sur R! Néanmoins nous pensons, a posteriori, que le cours de géométrie s'éloignait par trop de la perception géométrique intuitive des enfants.

D'une part, ce cours était structuré très linéairement. Peu de spirales dans cet enseignement. L'axiomatisation était globale. Pas d'ilôts déductifs. L'apprentissage de la démonstration n'en est pas facilité. D'autre part, si la séparation entre géométrie affine et géométrie métrique facilite la mise en place du vectoriel, elle ne correspond pour l'élève à aucune nécessité. La démonstration de certaines propriétés métriques par simple calcul ne provoque plus aucun raisonnement géométrique.

La genèse géométrique devait conserver aux structures un caractère familier, intuitif et inspirant, mais les programmes "modernes" de géométrie du premier cycle ne permettaient pas à l'élève de se forger une intuition géométrique suffisante. Non seulement la géométrie n'était pas fermement établie, mais de plus l'assimilation de la structure d'espace vectoriel elle-même se trouvait compromise. Par ailleurs, la construction du corps des nombres réels dans la foulée de la géométrie affine, s'est vite révélée difficile à faire comprendre. Après quelques années, cette construction était abandonnée dans la plupart des classes. C'était une pièce essentielle de l'édifice.

Les expériences pédagogiques sont souvent menées par des enseignants choisis parmi les meilleurs, convaincus de la valeur de leurs idées. En toute honnêteté, ils peuvent arriver à des résultats impressionnants. Au moment de la généralisation, les meilleures idées risquent de subir une dégradation considérable. L'importance d'un recyclage efficace ne pourra jamais être surestimée. Dans le cas de la réforme des "maths modernes" le recyclage avait porté essentiellement sur le contenu. Papy était conscient de la nécessité de modifier également la pédagogie appliquée. Il préconisait de placer les élèves devant des situations à mathématiser, de les amener ainsi à introduire les structures importantes. En même temps, les élèves comprendraient que l'usage de ces structures leur permettait de résoudre des problèmes qu'ils ne dominaient pas auparavant, que ces structures étaient donc utiles.

Cette partie du message de Papy est celle qui est la moins bien passée auprès des enseignants. A-t-il lui-même apporté autant d'ardeur à populariser ses idées sur la pédagogie des situations qu'il en a apporté à diffuser les nouveaux contenus? La tâche était-elle trop lourde pour un seul homme, même assisté d'une équipe solide de collaborateurs? Ce sont de nombreux exemples de situations permettant de nourrir de sens les nouvelles matières qu'il aurait fallu produire et mettre à la disposition de tous, y compris des auteurs de manuels. Enfin, certains sujets ont donné l'impression d'être étudiés pour eux-mêmes. Par exemple, on n'a guère dépassé le stade de la composition et de la décomposition des isométries. On n'a pas utilisé celles-ci suffisamment pour résoudre des applications. Aussi, bien des professeurs ne sont toujours pas convaincus de l'intérêt des transformations géométriques!

Les "maths modernes" étant enseignées avec les mêmes méthodes que les "maths traditionnelles" par des enseignants n'ayant pas toujours bien assimilé la philosophie

de la réforme, la généralisation des nouveaux programmes devait donner lieu à des excès et des erreurs, s'ajoutant aux défauts des programmes eux-mêmes. Il n'y eut sans doute pas trop d'excès de formalisme car les moyens graphiques préconisés s'opposaient à ce genre de perversion. Au second cycle, il y eut parfois un excès d'algébrisation de la géométrie, mais il y eut surtout des classes où l'on mettait tous les sujets sur le même pied, où l'on ne montrait ni le sens, ni l'utilité, ni la beauté des mathématiques.

Progressivement apparut la nécessité de "réformer la réforme". A l'initiative de Willy Servais, Jean Nachtergaele, Gaston Dethier, une nouvelle Commission des Programmes fut officiellement constituée. Son activité déboucha sur la mise en application de programmes "post math-modernes" à partir de 1978. Cette nouvelle réforme met l'accent sur la méthodologie. Elle revient sur l'idée des situations pédagogiques, elle encourage les enseignants à pratiquer des résolutions de problèmes, des modélisations. Elle a gommé les excès théoriques de la première réforme, mais en a-t-elle corrigé les insuffisances méthodologiques? Il serait excessif de le prétendre. La pratique de la pédagogie des situations demeure limitée.

De la réforme des "maths modernes", retenons d'abord qu'elle nous a fait prendre conscience de ce que la mathématique est une science vivante. Il n'est désormais plus possible de l'enseigner sans se poser de questions. Nous ne pouvons plus ignorer qu'elle est unitaire, que les structures et leurs symétries sont importantes. Les déboires de la réforme nous ont fait comprendre que nous ne pouvons transposer systématiquement cette philosophie en un principe d'enseignement, sans tenir compte de la maturité mathématique de nos élèves. mais peut-être une phase "math moderne" était-elle inévitable dans l'enseignement des mathématiques, peut-être était-elle même nécessaire, ne fût-ce que pour pouvoir la dépasser! A nous de veiller à ce que ce dépassement ne se transforme pas en régression. ■

---

(1) Le texte qui suit est une version abrégée d'un article plus conséquent qui sera publié dans la revue belge : *"Mathématiques et Pédagogie"*.

(2) En Belgique, tant le primaire que le secondaire comportent 6 années. La sixième secondaire correspond à la cinquième française.

(3) Diplôme obtenu après quatre années d'Université.

(4) Depuis 1975, *"Mathématiques et Pédagogie"*.

1 – 1962 (M. Monge, Ed. Belin)

Limite d'une variable.

138. DÉFINITION : **Soient un nombre fixe x_0, et un nombre positif α arbitrairement petit. On dit que la variable x a pour limite x_0, ou que la variable x tend vers x_0, si x prend toutes les valeurs de l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ à l'exclusion de la valeur x_0.**

La valeur absolue de la différence $x - x_0$ est inférieure à α, mais elle n'est pas nulle : $\forall \alpha > 0, \quad 0 < |x - x_0| < \alpha$.

Nous écrivons : $\lim x = x_0$, ou $x \longrightarrow x_0$.

Limite d'une fonction lorsque x tend vers x_0.

143. DÉFINITION : **Soient une fonction : $y = f(x)$, un nombre fixe x_0, un nombre fixe b, et un nombre ε positif arbitraire. On dit que la fonction $f(x)$ a pour limite b (ou tend vers b) lorsque x tend vers x_0 s'il existe un nombre positif α tel que l'inégalité : $0 < |x - x_0| < \alpha$ implique l'inégalité : $|f(x) - b| < \varepsilon$.**

Nous écrivons : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, ou : $f(x) \longrightarrow b$.

Notons que, dans la définition, x_0 et b sont des nombres fixes; ε est un nombre positif arbitraire. α est un nombre que l'on doit calculer, tel que, si la valeur absolue, non nulle, de $x - x_0$ est inférieure à α, l'inégalité $|f(x) - b| < \varepsilon$ soit vérifiée.

Nous écrivons : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0 : \quad 0 < |x - x_0| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

On notera la présence déjà des quantificateurs, d'ε et de $\eta = \alpha$. Mais on parle aussi de la limite d'une variable...

2 – 1970 (Collection Durrande, Ed. Techniques et Vulgarisation)

Soit une fonction f, définie ou non pour la valeur x_0 de x, et définie sur un voisinage pointé de x_0. On dit que la limite de la fonction f, pour x arbitrairement voisin de x_0, est l si, quel que soit le voisinage donné, W, de l, il existe un voisinage pointé de x_0 dont l'image est incluse dans W.

Tout voisinage de l contient l'image par f d'un voisinage *pointé* de x_0.

$$\forall W(l), \quad \exists V(x_0) \mid f < V^*(x_0) > \subset W(l)$$

Lorsqu'on utilise des voisinages centrés, cette définition se traduit ainsi : $\lim\limits_{x \to x_0} f = l$ est équivalent à :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^{+*}, \quad \exists a \in \mathbf{R}^{+*} \quad | \quad 0 < |x - x_0| < a \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

3 – 1970 (Queysanne-Revuz, Ed. F. Nathan, 1e CDE)

Définition.

Une fonction f définie sur un intervalle pointé de centre x_0 admet la **limite** l au point x_0 si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre l, il existe un intervalle pointé I' de centre x_0 tel que f (I') $\subset$ J.

Cette définition peut s'écrire à l'aide de quantificateurs

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in]x_0 - \beta, x_0 + \beta[- \{x_0\}) \quad |f(x) - l| < \alpha.$$

On peut également dire : f admet l pour limite au point x_0 si, et seulement si, quel que soit $\alpha > 0$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que, quel que soit x réel, on ait

$$0 < |x - x_0| < \beta \implies |f(x) - l| < \alpha.$$

On écrira

$$\lim_{x_0} f = l.$$

Lorsque f a une limite en x_0 on dit aussi que *f tend vers l lorsque la variable x tend vers x_0* et on utilise également les notations

$$\lim_{x \to x_0} f = l, \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

4 – 1982 - Commentaires des Programmes :

La définition en ε, η subsiste, mais son emploi est strictement limité.

II. c) L'étude des limites exige des définitions ; une seule, celle de la limite 0, a besoin d'être explicitée en (ε, N) ou en (ε, η) ; il suffit ensuite, sans manquer à la rigueur, d'employer des majorations et de recourir aux théorèmes (admis) de stabilité. Encore faut-il qu'à travers l'étude de nombreuses situations on accède progressivement aux motivations de la définition en (ε, η) de la limite 0 ; on évitera l'emploi systématique de cette formulation au niveau du cours comme à celui des exercices.

On adoptera la définition suivante : soit E un intervalle, ou une réunion de deux intervalles, choisi(s) de façon que E U {0} soit un intervalle. Si f est une application de E dans $\mathbb{R}$, on dira que f admet la limite 0 en 0 (ou que $f(x)$ tend vers 0 avec x) si et seulement si :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*)\ (\forall x \in \mathbb{R})\ [(x \in E \text{ et } |x| < \eta) \implies (|f(x)| < \varepsilon)].$$

On notera que l'inégalité $|x| < \eta$ a remplacé l'inégalité $0 < |x| < \eta$ qui prévalait dans l'usage antérieur. Une limite en 0 à gauche (resp. à droite) est la limite de la restriction à $E \cap \mathbb{R}_-^*$ (resp. $E \cap \mathbb{R}_+^*$) ; on évitera de développer ces considérations.

Il résulte de là que si une fonction est définie en un point a, elle n'a de limite en ce point que si elle est continue en ce point ($\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$).

5 – 1985 - Programme

La notion de limite cède la place au "langage des limites". L'enseignement s'organise autour des fonctions de référence, sans véritable définition.

b) *Etude des fonctions au voisinage de 0 ; langage des limites* Après observation des fonctions $h \mapsto h^n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $h \mapsto \sqrt{h}$, au voisinage de 0, on dit que ces fonctions admettent en 0 la limite 0. Lorsqu'on a établi que, pour $\lvert h \rvert$ assez petit, $\lvert g(h) - L \rvert \leqslant \lambda \lvert h \rvert^n$, où n est un entier strictement positif, on dit que g admet L pour limite au point 0, ce qu'on note $\lim\limits_{h \to 0} g(h) = L$. (L'unicité de la limite est admise).	La définition des limites par (ε , α) est en dehors du programme. Les seules capacités exigibles des élèves portent sur l'étude de fonctions pour lesquelles une des majorations indiquées dans le programme permet de conclure et est facile à obtenir. L'objectif est une première prise de contact avec les fonctions de référence et leur mise en œuvre sur quelques exemples très simples, et non l'acquisition de méthodes systématiques pour la recherche de limites. Toute complication technique est donc à exclure pour les exemples étudiés. Les notions de continuité en un point et de continuité sur un intervalle ne sont pas au programme.

6 – 1988 (Transmath, Nathan, 1ère SE)

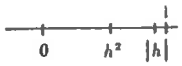
2.1. Sens de l'expression « la fonction f a pour limite zéro au point zéro (ou en zéro) »

D'un point de vue naïf ou imagé, dire que la fonction f a pour limite zéro en zéro signifie que *$f(h)$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro* (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).
Mais ce langage imagé manque de précision; en effet, que signifie par exemple « le réel $f(h)$ est proche de zéro » si l'on ne donne pas d'autre renseignement?
Nous n'expliciterons pas davantage en théorie; nous allons illustrer plutôt par des exemples.

Exemple 1 : **la fonction carré f : $h \longmapsto h^2$.**

Nous savons que pour tout réel h tel que $\lvert h \rvert < 1$ on a :

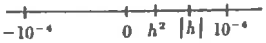
$$0 \leqslant h^2 \leqslant \lvert h \rvert \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant f(h) \leqslant \lvert h \rvert.$$



Ces inégalités s'interprètent intuitivement, ainsi : si h est proche de zéro ($\lvert h \rvert$ aussi) alors $f(h)$ est encore plus proche de zéro.

Plus précisément, **ces inégalités prouvent que l'on peut avoir $f(h)$ aussi proche de zéro que l'on veut, pour tout h suffisamment petit.**
Par exemple, si l'on veut avoir :

$$0 \leqslant h^2 \leqslant 10^{-4}$$



il suffit de choisir h tel que $\lvert h \rvert < 10^{-4}$.
En effet, on a alors : $0 \leqslant h^2 \leqslant \lvert h \rvert < 10^{-4}$.
De même, pour avoir $0 \leqslant h^2 < 10^{-24}$, *il suffit* de choisir h tel que $\lvert h \rvert < 10^{-24}$.
Remarquez que pour un technicien, 10^{-24} est un nombre extrêmement petit, mais qu'en mathématique il n'est pas interdit de chercher à avoir $h^2 < 10^{-100}$, ou $h^2 < 10^{-9999}$, ...
La propriété : on peut avoir $f(h)$ aussi proche de zéro que l'on veut, pour tout réel h suffisamment petit, se traduit par : **la fonction f a pour limite zéro en zéro,** et se note :

$$\lim_{0} f = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{0} (h \longmapsto h^2) = 0.$$

On dit aussi que : zéro est la limite de f en zéro, ou encore que $f(h)$ tend vers zéro quand h tend vers zéro (mais cette dernière expression n'est pas des plus heureuses, bien qu'elle soit utilisée).

Naïvement, la fonction f a pour limite ℓ en zéro signifie que $f(h)$ est proche de ℓ pour tout réel h suffisamment proche de zéro. Or dire que $f(h)$ est proche de ℓ, c'est dire que $f(h) - \ell$ est proche de zéro. Autrement dit, *« la fonction f a pour limite ℓ en zéro » signifie que $f(h) - \ell$ est proche de zéro pour tout réel h suffisamment proche de zéro* (et bien sûr dans l'ensemble de définition de f).
De façon plus précise :

ℓ est un réel et D est l'ensemble de définition d'une fonction f.
Si l'on peut trouver un réel strictement positif λ et un naturel non nul n, tels que pour tout réel h assez proche de zéro (et dans D), on ait :

$$|f(h) - \ell| \leqslant \lambda |h^n| \quad \textit{ou} \quad |f(h) - \ell| \leqslant \lambda \sqrt{|h|}$$

***alors* on dit que f a pour limite ℓ en zéro.**
On note alors :

$$\lim_{0} f = \ell \quad \text{ou} \quad \lim_{0} (h \longmapsto f(h)) = \ell.$$

ASTÉRISQUE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.
Revue éditée par la Société Mathématique de France.

ASTÉRISQUE 204. — *Propriétés dynamiques des difféomorphismes de l'anneau et du tore.*
131 pages, prix public (TTC) : 105 FF, prix membres SMF : 75 FF

Un certain nombre de systèmes dynamiques, tant conservatifs que dissipatifs, sont décrits par une classe d'applications : les difféomorphismes de l'anneau qui dévient la verticale. Dans un premier chapitre nous donnerons un panorama des différentes méthodes d'étude de ces applications et rappellerons leurs principales propriétés. Dans un second chapitre, en utilisant le fait que tout difféomorphisme de l'anneau s'écrit comme composée de difféomorphismes déviant la verticale, nous verrons comment généraliser certains des résultats quand cette propriété de déviation a disparu. Ces méthodes conviennent également aux difféomorphismes du tore isotopes à l'identité.

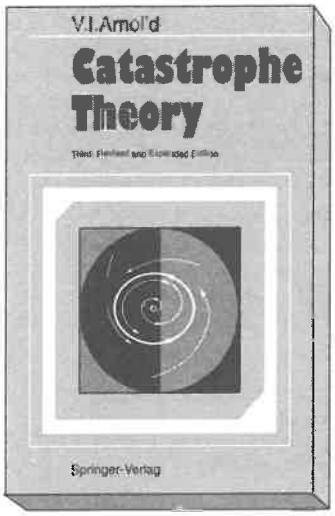
ABONNEMENT 1992 (n° 205 à 216) – Prix public : 1155 FF, Membres SMF : 695 FF

ABONNEMENT 1993
Prix public Europe : 1215 FF Hors Europe : 1515 FF
Prix Membres Europe : 730 FF Hors Europe : 1030 FF

DISTRIBUTION
Membres de la S.M.F. : *Maison de la S.M.F., Case 916 – Luminy, 13288 Marseille Cedex 09*

France et Etranger (excepté les Etats-Unis, le Canada et le Mexique) : *Maison de la S.M.F., Case 916 – Luminy, 13288 Marseille Cedex 09*
ou *Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05*

Etats-Unis, Canada, Mexique :
American Mathematical Society, P.O. Box 6248, Providence, Rhode Island 02940, U.S.A.



V.I. Arnol'd, Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia

Catastrophe Theory

To the Memory of M.A. Leontovich
Translated from the Russian by G.S. Wassermann based on a translation by R.K. Thomas

3rd rev. and exp. ed. 1992. XIII, 150 pp. 87 figs. Softcover DM 38,- ISBN 3-540-54811-4

This well-known booklet, now in its third, expanded edition, provides an informal survey of applications of singularity theory. Readers familiar with the previous editions will find much that is new, e.g. topics like shock waves, implicit differential equations and folded singularities, and interior scattering. Three new sections give an overview of the history of singularity theory from Leonardo da Vinci to modern times, a discussion of perestroika in terms of the theory of metamorphoses, and a list of 93 problems.
Arnol'd's goal with this edition remains the same: to explain the essence of the results and applications to readers having a minimal mathematical background. All that he asks, is that the reader have an inquiring mind.

V.I. Arnol'd, Steklov Mathematical Institute, Moscow, Russia, CIS

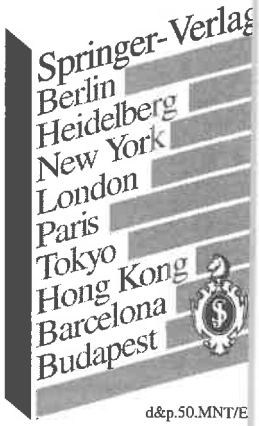
Ordinary Differential Equations

Translated from the Russian by R. Cooke

1992. IV, 334 pp. 272 figs. (Springer-Textbook)
Softcover DM 78,- ISBN 3-540-54813-0
(Translated from the 3rd original Russian edition published by Publisher Nauka, Moscow, 1984)

Prices are subject to change without notice.

☐ Heidelberger Platz 3, W-1000 Berlin 33, F.R. Germany ☐ 175 Fifth Ave., New York, NY 10010, USA
☐ 8 Alexandra Rd., London SW 19 7JZ, England ☐ 26, rue des Carmes, F-75005 Paris, France
☐ 37-3, Hongo 3-chome, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan ☐ Room 701, Mirror Tower, 61 Mody Road, Tsimshatsui, Kowloon, Hong Kong ☐ Avinguda Diagonal, 468-4° C, E-08006 Barcelona, Spain
☐ Wesselényi u. 28, H-1075 Budapest, Hungary



d&p.50.MNT/E

INFORMATIONS

C.N.U. 25ème section (Mathématiques)

Bilan dû à Mustapha RAÏS (Poitiers),
Président de la Commission n° 1 du C.N.U. 25ème section

Session de qualification 1992

1. Le calendrier

- 10 Avril 1992 : réunion de la 25ème section, partage en deux commissions (1 et 2), la première ayant à charge **cette année** l'inscription sur les listes de qualification, la deuxième devant s'occuper de tout le reste (en particulier des promotions relevant du CNU). Il est prévu que les rôles des deux commissions seront échangés chaque année. La commission 2 doit se réunir en Septembre.
- 24 avril 1992 : établissement des listes de rapporteurs.
- 5 et 6 mai 1992 : les candidats commencent à recevoir notification des noms et adresses des rapporteurs.
- Du 20 au 23 mai **et** le 1er juin 1992 : session de qualification.

2. Les résultats

A l'origine, sur les listes de candidats transmises par le Ministère, il y avait 287 candidats à l'inscription sur la liste de qualification des Professeurs et 425 candidats à l'inscription sur celle des Maîtres de Conférences (pour faire plus court, on dira : candidats PR ou candidats MC suivant le cas). On a noté :

a) de très rares candidats relevant de disciplines lointaines (Mécanique Appliquée, Electronique), mais **un nombre significatif** (voir plus bas) de candidats relevant de la 26ème section, par exemple : les statisticiens, numériciens, didacticiens. Ces candidats ont été identifiés et reconnus comme tels par les deux Présidents des commissions n°1 des 25ème et 26ème sections. Après avoir obtenu confirmation auprès du Ministère de ce qu'une inscription sur une liste de qualification quelconque donnait la possibilité à son bénéficiaire de déposer sa candidature sur tous les postes (25ème ou 26ème section indifféremment), la 25ème section a considéré qu'il revenait à la 26ème section d'apprécier leur candidature et ne les a pas inscrits sur la liste de qualification 25ème section.

b) quelques candidatures émanant de personnes ayant une activité professionnelle (par exemple : Ingénieur dans une entreprise industrielle), mais n'ayant ni titres ni travaux significatifs de nature universitaire. La 25ème section a considéré qu'elle ne pouvait les inscrire.

c) un petit nombre de candidatures irrecevables (thèse non soutenue à la date de la délibération) et très rarement : dossier non parvenu au rapporteur.

Ci-dessous, le nombre de candidats qualifiés de "réels" est la différence entre la 1ère ligne et la somme des 4 suivantes. Le nombre de refus figurant à la 7ème ligne est le total des candidats "réels" dont l'inscription a été refusée.

	MC	PR
Candidats recensés sur les listes ministérielles	425	287
Candidatures irrecevables	16	4
Dossiers non parvenus au rapporteur	8	1
Candidats au titre d'une activité professionnelle	7	4
Candidats relevant d'une autre section (26ème principalement)	122	48
Candidats "réels"	272	230
Nombre de refus	62	67
Nombre de refus/candidats "réels"	0,23	0,29
Nombre d'inscriptions	210	163

3. Commentaires

Des tentatives d'élaborer **a priori** une doctrine pour l'inscription ont eu lieu au cours des réunions préliminaires et au début de la session de qualification (le 20 Mai). Elles n'ont pas abouti.

Maintenant que cette session est terminée, on peut dire que la 25ème section (tout comme la 26ème, **sans qu'il y ait eu concertation**, voir le bilan des travaux de la 26ème établi par J. JACOD) a pris en compte, de manière primordiale, les activités de recherche des candidats. Pour les candidats MC, titulaires de nouvelles thèses (forcément récentes), le système a été plutôt clément : sur **130** candidats de ce type, 4 seulement ont été refusés (résultats statistiques établis par G. SCHIFFMANN, cette source dans la suite sera notée Stat. Schiff.); par contre sur 61 candidats MC, titulaires d'une thèse de 3ème cycle, 33 ont été refusés, soit 54% (Stat. Schiff). Ceci illustre bien le fait (valable pour les MC et pour les PR) que plus le diplôme du candidat était ancien, plus l'exigence d'une activité de recherche *soutenue, actuelle, exprimée par la publication d'articles dans des revues avec comité de lecture*, était grande. Comme dans la session de qualification de la 26ème, les publications internes et même les communications à des colloques ne suffisaient pas, à elles seules, en l'absence d'articles, à assurer l'inscription.

Pour terminer ce paragraphe, on donne quelques indications extraites des graphiques établis par Schiffmann :

- Sur 200 inscrits sur la liste de qualification MC, 147 (environ les 3/4) avaient obtenu leur diplôme "qualifiant" entre 1989 et 1992.
- Sur 148 inscrits sur la liste de qualification PR, 75 (environ la moitié) avaient obtenu leur diplôme "qualifiant" entre 1987 et 1992.
- Nombre d'inscrits par classe d'âge :

	MC	PR
≤ 25	3	0
$26 \leq . \leq 30$	82	8
$31 \leq . \leq 35$	60	27
$36 \leq . \leq 40$	35	42
$41 \leq . \leq 45$	17	52
$46 \leq . \leq 50$	8	26
$51 \leq . \leq 55$	2	8
$56 \leq . \leq 60$	1	0

D'où il résulte qu'environ les 3/4 des inscrits MC ont un âge $\leq$ 35 ans, et qu'environ la moitié des inscrits PR a un âge $\leq$ 40 ans.

4. Candidats titulaires d'un diplôme étranger

Les textes relatifs à la procédure de qualification donnaient la possibilité aux titulaires de diplômes universitaires, qualifications et titres étrangers de déposer leur candidature à l'inscription. Concernant ces candidats, aucun principe n'a été adopté au cours des discussions préliminaires : certains membres de la section ont posé la question de savoir s'il n'était pas souhaitable que le niveau requis pour l'inscription soit un peu plus élevé pour les diplômes étrangers; d'autres ont souhaité qu'il y ait égalité de traitement pour tous les candidats. Les résultats, pour cette catégorie de candidats, sont les suivants (même principe que pour le tableau du paragraphe 2) :

	MC	PR
Candidats recensés sur les listes ministérielles	84	105
Candidats relevant d'une autre section (26ème principalement)	15	28
Candidats "réels"	69	77
Nombre de refus	18	24
Nombre de refus/candidats "réels"	0,26	0,31
Nombre d'inscriptions	51	53

La comparaison des pourcentages de refus pour cette catégorie (MC : 26%, PR : 31%) avec ceux globaux du paragraphe 2 (MC : 23%, PR : 29%) montre que le CNU a été ici un peu plus sévère. On notera que le nombre d'inscrits dans cette catégorie est (quand même) à peu près le quart du total des inscrits pour les MC et le tiers du total des inscrits pour les PR.

25ème section du CNU – Commission n° 1

Président : RAÏS Mustapha (Poitiers); Vice-Président : BREEN Lawrence (Paris XIII); Vice-Président : ROBINET Jean-François (Lille I); Assistante : GUERRE Sylvie (Paris VI).

Membres PR :

BÉRARD Pierre (Grenoble), BONAMI Aline (Orléans), BOUTET DE MONVEL Louis (Paris VI), **CERVEAU Dominique** (Rennes I), ESTERLE Jean (Bordeaux I), **MAUDUIT Christian** (Lyon I), MERINDOL Jean-Yves (Strasbourg).

Membres MC :

CHARRETTON Christine (Lyon I), **DAVID Sinnou** (Paris VI), DURET Jean-Louis (Angers), **ILIAS Saïd** (Tours), MALGOIRE Jean (Montpellier), **MOSSÉ Brigitte** (Aix-Marseille I), THÉROND Jean-Daniel (Montpellier).

Les noms en gras sont ceux des membres nommés

25ème section du CNU – Commission n°2

Président ILLUSIE Luc (Paris-Sud), Vice-Président SCHIFFMANN Gérard (Strasbourg), Vice-Président ELHADAD Jimmy (Marseille), Assistante CASTELLA Dominique (Poitiers).

Membres PR :

CŒURÉ Gérard (Lille I), **DEHORNOY Patrick** (Caen), MALLIAVIN Paul (Paris VI), **MÉTIVIER Guy** (Rennes I), PANSU Pierre (Paris-Sud), **VIGNERAS Marie-France** (Paris VII), **WALDSCHMIDT Michel** (Paris VI).

Membres MC :

BROCHET Jean-Michel (Lyon I), DELORME Marianne (Lyon I), GILAIN Christian (Paris VI), HÉE Jean-Yves (Paris-Sud), **PAUL Emmanuel** (Toulouse III), SLUPINSKI Marcus (Strasbourg), **THIEULLEN Philippe** (Paris-Sud).

Les noms en gras sont ceux des membres nommés

Bilan de la session d'inscription sur les listes de qualification de mai 1992, 26ème section

Bilan dû à Jean JACOD (Paris 6)
Président de la Commission n° 1 du C.N.U. 26ème section

Avant tout il convient de noter la précipitation avec laquelle cette session s'est tenue, à la fois pour les candidats (ce qui explique que certains dossiers ne soient pas parvenus au rapporteur) et pour le CNU (les rapporteurs ont eu moins de 15 jours pour examiner en moyenne 25 dossiers chacun) : ces délais, beaucoup trop courts, ont été imposés par le ministère.

1) Quelques statistiques

Pour la liste de qualification *professeurs* il y avait 292 candidats. 79 ont été refusés, dont 6 parce que le dossier manquait et 20 parce qu'ils ne relevaient pas de la 26ième section. En dehors de ces deux cas, le taux d'inscription est de 80% .

Pour la liste de qualification *maîtres de conférences* il y avait 480 candidats. 197 ont été refusés, dont 22 parce que le dossier manquait et 62 parce qu'ils ne relevaient pas de la 26ième section. En dehors de ces deux cas, le taux d'inscription est de 71% (il faut aussi noter qu'une dizaine de candidats relevant de la section n'ont pas été inscrits parce que la soutenance de thèse était prévue après la date de réunion du CNU).

Nombre d'inscrits par classe d'âge :

	PR	MC
≤ 25		4
$26 \leq . \leq 30$	7	125
$31 \leq . \leq 35$	34	84
$36 \leq . \leq 40$	52	40
$41 \leq . \leq 45$	54	17
$46 \leq . \leq 50$	47	7
$51 \leq . \leq 55$	13	5
$56 \leq . \leq 60$	6	1

2) Les critères d'inscription

D'une manière générale, le CNU a pris essentiellement en compte l'activité de recherche du candidat, et a mesuré cette activité en termes de publications dans des revues "internationales" ou "à comité de lecture". Les publications internes ou les communications (même écrites) à des colloques n'ont été prises en compte que de manière subsidiaire. La taille des publications joue aussi un rôle dans l'évaluation, bien évidemment. L'encadrement de recherche (pour la liste *professeurs* seulement) a été également considéré. Les autres activités (enseignement ou administration) n'ont été prises en compte que si elles semblaient d'un niveau nettement au-dessus de la moyenne.

Pour la liste *professeurs* nous avons inscrit selon les critères suivants :

a) habilitation ou thèse d'état récentes, ayant donné lieu à plusieurs publications (ou à des articles non encore publiés mais acceptés pour publication). Le nombre "minimal" de publications n'est évidemment pas fixé, mais 4 ou 5 publications de taille "moyenne" nous ont toutefois semblé être nécessaires.

b) habilitation ou thèse d'état "anciennes" ($\geq$ 5 ans), plus des publications récentes.

Pour la liste *maîtres de conférences* nous avons inscrit selon les critères suivants :

a) thèse récente, avec au moins une publication (ou, pour les thèses très récentes, l'évidence qu'une publication pourrait être faite à partir de la thèse).

b) thèse "ancienne" avec au moins une publication récente.

3) Remarques diverses

a) Un certain nombre de dossiers se sont révélés inexploitables (ce qui a entraîné la non-inscription), surtout pour la liste *maîtres de conférences* : lorsqu'il n'y a pas encore de publication il est indispensable de joindre au dossier un exemplaire de la thèse (et dans tous les cas, si possible, les rapports de thèse). Lorsqu'il y a des publications il est indispensable de les joindre (dans les limites réglementaires de 3 ou 5 selon la liste) : le rapporteur n'a pas le temps matériel de se procurer et de consulter les revues référencées dans le dossier.

b) Il est prévu de pouvoir inscrire des candidats sans thèse ou habilitation, mais justifiant d'une "activité professionnelle". Ces candidats n'ont en général pas été inscrits, car leur dossier ne comporte bien souvent que des rapports "internes". Si leur niveau scientifique le justifie, ces rapports pourraient donner lieu à des publications (éventuellement dans des revues d'ingénieurs), et ainsi permettre l'inscription du candidat. En outre tout élément permettant de juger des capacités de ces candidats en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques appliquées serait le bienvenu. Enfin, certains dossiers de ce type ne mentionnaient que des rapports "confidentiels" : dans ce cas le CNU ne peut évidemment juger du niveau scientifique, ni procéder à l'inscription.

c) Les candidats étrangers sur la liste *professeurs* n'ont en principe pas besoin d'habilitation. Pour ceux qui sont actuellement maîtres de conférences en France depuis plusieurs années, nous avons toutefois considéré qu'ils n'avaient pas de raison de ne pas soutenir d'habilitation, et nous avons donc refusé ceux dont le dossier n'était pas de manière claire du niveau d'une habilitation.

d) En ce qui concerne l'adéquation à la 26ième section, nous n'avons pas inscrit les candidats dont l'activité scientifique récente relevait de manière prioritaire d'une autre section, même si une partie des activités pouvait relever des mathématiques appliquées. La seconde partie du titre de la section, "application des mathématiques", est trompeur : il ne saurait être question d'inscrire tous les candidats informaticiens, mécaniciens, physiciens, voire chimistes (il y en avait ...) à qui il arrive d'écrire des équations. Pour l'interface avec la section 25, nous avons inscrit assez largement les analystes, mais en principe pas les géomètres, arithméticiens, logiciens, etc...

e) Le CNU a considéré de manière critique (et parfois refusé l'inscription) de candidats qui publient exclusivement dans la revue (même "internationale") d'une "école" étroite. Il nous a semblé indispensable (surtout au niveau *professeur*) que le candidat cherche à publier dans des revues "pluralistes".

Conclusions

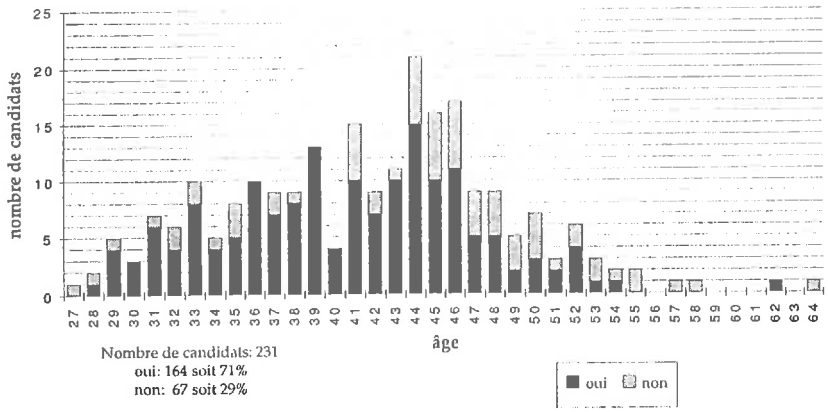
Les résultats de cette campagne d'inscription pourront sembler injustes à certains, et un candidat recalé peut percevoir cette décision comme un désaveu de toute son activité : dans bien des cas de refus, il suffirait pourtant que le candidat étoffe un peu son dossier par une ou deux publications supplémentaires pour qu'il soit inscrit l'une des années suivantes.

Quant à la nature des critères que nous avons utilisés (basés essentiellement sur l'activité de recherche académique), il serait souhaitable que la comunauté mathématique en discute rapidement. Par exemple, faut-il prendre en compte (et comment les évaluer...) d'autres aspects de l'activité de recherche (contrats par exemple)?

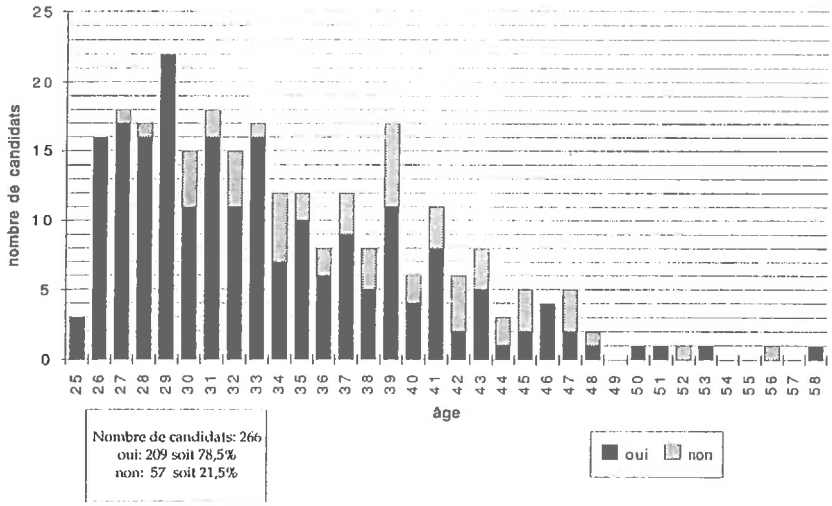
Avertissement.

Les graphiques qui suivent sont dus à Gérard Schiffmann. A chaque fois les renseignements sont tirés des dossiers des candidats, quand ceux-ci le permettaient. Il s'agit uniquement des dossiers principalement traités par la 25ème section (les dossiers communs à la 26 que celle-ci a examinés ne figurent pas dans ces décomptes). Ces considérations expliquant que le nombre de "candidats" semble variable d'un tableau à un autre.

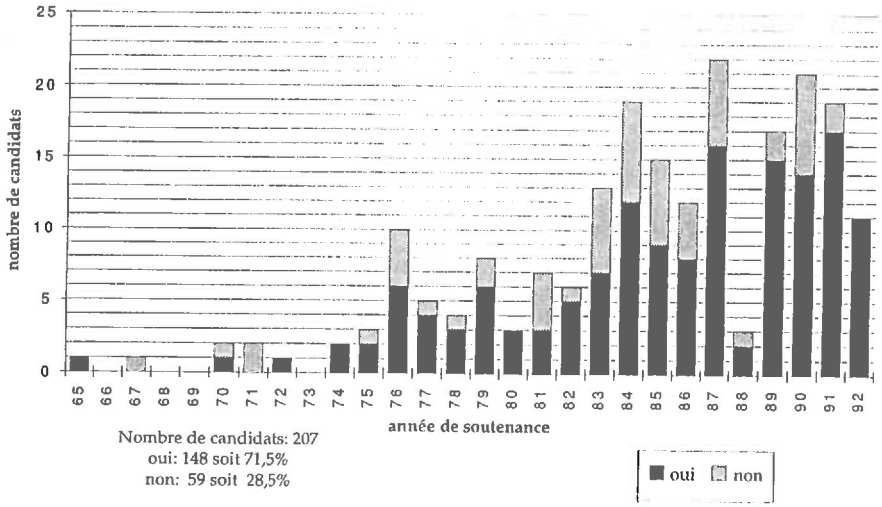
Candidats Professeurs, classés par âge, au 1/6/92



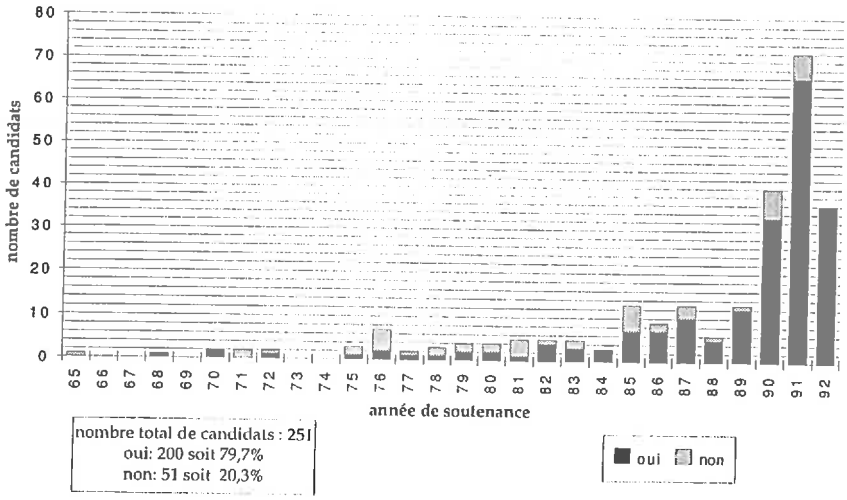
Candidats Maitres de Conférences, classés par âge, au 1/6/92



Candidats Professeurs, classés par année de soutenance du diplome le plus élevé



Candidats Maitres de Conférences, classés par année de soutenance du diplome le plus élevé



C.N.R.S.

A nouveau cette année, le jury d'admissibilité a vu sa proposition de classement des personnes recrutés comme Directeurs de Recherche modifiée par le jury d'admission. La proposition de classement était sur le concours général (4 postes) : Laurent, Mossino, Bernardi, Delon, Otal, Charbonnel, Maltsiniotis, De Geouffre de la Pradelle; sur le concours fléché à Nice (1 poste) : Simson et Otal. Le jury d'admission a déplacé la barre du concours général en ne retenant que les trois premiers candidats. Il a nommé DR les deux candidats retenus sur le concours fléché à Toulouse, mais en affectant Otal à l'ENS Lyon.

Ces événements de l'été ont suscité plusieurs réactions. Nous publions ci-dessous deux documents. Tout d'abord une lettre de la présidente de la commission 01 et du représentant de cette commission au Conseil de Département. Ensuite, un résumé de l'entrevue entre F. Kourilsky, directeur général du C.N.R.S., et les responsables de la commission 01.

Rectificatif : *Nous avons commis une erreur dans le n° 53 de la Gazette. La liste des recrutements des CR2 du CNRS n'est pas correcte. Il manque à la 20e place du classement du jury d'admissibilité le nom de* Laurent DENIS. *Que l'intéressé veuille bien nous excuser de cet oubli.*

Commission 01 du CNRS

Marie-Françoise ROY, Présidente de la Commission 01 du CNRS

Bernard TEISSIER, repésentant de la commission 01 du CNRS au conseil de département de SPM
aux *membres de la commission 01*
aux *directeurs des laboratoires CNRS de mathématiques*

Rennes, le 25 juillet 1992

Cher collègue, chère collègue, Vous avez sans doute su que de nouveaux et graves problèmes se sont présentés au jury d'admission DR de juilet 1992 et qu'une de nos propositions n'a pas été acceptée. La décision du jury d'admission est définitive, et notre collègue ne peut donc plus bénéficier cette année d'une promotion.

Nous avons immédiatement annoncé la démission du bureau et son refus de répartir les dossiers à l'automne.

Nous avons aussi cherché à analyser la situation. Vous trouverez dans le texte qui suit un résumé de la manière dont nous percevons les problèmes.

Différentes informations concordantes nous ont convaincus que la solution du blocage rencontré n'était pas du niveau du Département SPM mais se situait au niveau de la Direction Générale. Nous avons demandé et obtenu une entrevue avec le Directeur Général. Vous trouverez ci-joint le texte de notre intervention lors de cette entrevue et un résumé de la discussion qui a suivi. Veuillez faire circuler l'information dans votre laboratoire.

Il convient de rester très mobilisé et vigilant. Il nous semble en particulier indispensable que de nombreuses protestations arrivent à la direction du CNRS.

Une réunion des directeurs de laboratoires de mathématiques consacrée aux carrières en mathématique est prévue pour le 19 octobre au CNRS. Nous espérons que la DRED pourra y participer aussi.

La commission d'automne qui aura lieu les 9 et 10 novembre se prononcera au vu des éléments qui seront connus à ce moment sur l'opportunité de démissionner . En attendant le bureau n'effectue plus le travail de répartition des dossiers.

Toute information sur votre appéciation de la situation est la bienvenue. Tenez-nous au courant de vos démarches. Avec nos meilleurs sentiments.

Intervention préliminaire de Marie-Françoise ROY et Bernard TEISSIER

lors de leur entrevue avec le Directeur Général du CNRS le 21 juillet 1992,

en présence du directeur du Département SPM et du directeur adjoint chargé des mathématiques

Monsieur le Directeur Général,

Notre démarche aujourd'hui est motivée par le désarroi de la communauté mathématique et tout spécialement de la commission 01 devant les proposition du jury d'admission.

La nouvelle commission a eu un héritage pénible, après des déclassements successifs qui ont créé des blessures durables. Elle a fait l'effort de travailler dans des conditions difficiles, où la confiance était détruite. Elle a cherché à la restaurer. En ce qui nous concerne, nous souhaitons nous tourner résolument vers l'avenir mais l'apurement du passé est indispensable. C'est cette double démarche que nous avons cherché à entreprendre tout au long de l'année en ouvrant un dialogue constructif avec la direction du département SPM et en réfléchissant nous-mêmes, notamment par l'organisation d'une réunion de politique générale qui a vu la participation effective de près d'une centaine de scientifiques exerçant des responsabilités diverses dans la communauté mathématique et les communautés voisines.

Nous étions confiants dans le succès de cette démarche et c'est pourquoi le résultat du jury d'admission a eu sur nous l'effet d'une douche froide. Il nous a donc semblé nécessaire d'aborder les problèmes avec vous directement, au-delà du niveau du département avec lesquel nous avons travaillé cette année.

Venons-en au cœur de la question, telle que nous la voyons.

Il y a un problème des DR en mathématiques : c'est une population dont la démographie est très particulière; les besoins sont importants et peuvent apparaître comme contradictoires : encadrement en province et dans les nouvelles thématiques, volonté de retenir les jeunes et brillants mathématiciens en les promouvant Directeurs de Recherche pour éviter de les voir tous partir immédiatement dans l'enseignement supérieur, nécessité d'encourager et de promouvoir de très bons chercheurs confirmés. C'est dans cette réalité complexe qu'il faut chercher la cause fondamentale des problèmes en jury d'admission.

Rappelons quelques chiffres : il y a environ 45 CR1 entre 30 et 35 ans, autant entre 35 et 40 ans et autant de plus de 40 ans. Au concours DR de l'année, il y avait 18 candidats CR1 de plus de 40 ans, 13 candidats CR1 entre 35 et 40 ans, 5 candidats de moins de 35 ans. (Je vous rappelle les propositions de la commission au dessus de la barre sur l'ensemble des six postes mis au concours: 2 plus de 40 ans, 3 entre 35 et 40, 1 (exterieur) au-dessous de 35 ans). Notez que beaucoup de CR1 de plus de 40 ans ne sont pas candidats et que la population des candidats de plus de 40 ans est de taille limitée.

Cette situation difficile et ces exigences contradictoires créent une frustration de la commission qui a conscience de faire un travail à la limite de l'impossible, et est incapable de promouvoir un nombre raisonnable de personnes dans les différentes catégories. Une grande déception de voir le travail énorme d'évaluation que nous avons accompli sans rechigner mal apprecié se fait jour et au delà de la commisssion, une réaction de rejet envers la direction du CNRS de la part de nombreux mathématiciens se développe.

Ceci ne peut plus durer.

Il semble impossible de voir les mathématiciens se passer du CNRS. Le CNRS joue actuellement un rôle numériquement assez faible dans les effectifs et les sources de financement (malgré des progrès récents) mais le CNRS a sauvé les mathématiques

françaises de l'effondrement au moment du tarissement des recrutements universitaires et il a joué un rôle très important dans la structuration de notre communauté (reconnaissance de l'excellence scientifique, émergence de la notion de laboratoire de mathématiques, développement de pôles en province).

Il semble tout aussi impossible de voir le CNRS se passer des mathématiques et du comité national représentatif de leur communauté : l'école mathématique française est une des meilleures du monde. Dans les dernières années la communauté mathématique a fait preuve d'un dynamisme remarquable. Le rôle joué par les délégations françaises dans l'émergence d'une véritable Société Mathématique Européennes et la tenue récente à Paris du premier Congrès européen des mathématiciens en est une nouvelle preuve. Notre communauté a su en particulier se rajeunir et attirer de nouveau en grand nombre des jeunes de talent.

Après presqu'un an de fonctionnement, nous somme frappés de voir que cette apprécia-tion positive de l'évolution de la communauté mathématique est très mal perçue au sein du CNRS et quelques fois même au sein du département SPM.

Les mathématiciens sont trop souvent vus comme réfractaires à l'ouverture, arrogants voire autogestionnaires. Nous sommmes convaincus que la réalité est tout autre. Vous pouvez naturellement ne pas nous croire sur parole mais de nombreux interlocuteurs mathématiciens ou non pourraient vous tenir le même langage.

Prendre conscience de ces mutation est la première condition pour aller vers une dynamique de croissance des mathématiques au CNRS, qui passe à la fois par un plan de développement des effectifs, la mise en place de structures permettant aussi le dialogue entre les mathématiques et les autres disciplines et évitant un face-à-face exclusif avec la physique, l'ouverture vers de nouvelles thématiques (ce qui nécessite un maintien d'un flux d'entrants élevé).

Il nous semble souhaitable qu'une réflexion d'ensemble sur ces questions se mette en place à moyen terme au Conseil Scientifique. Le moment nous semble favorable pour que la Communauté des mathématiciens propose à la Direction du CNRS des projets ambitieux.

Il est aussi nécessaire d'agir dans l'immédiat pour sortir du marasme actuel. Nous estimons indispensable :

1) Une augmentation sensible du nombre des postes de DR mis au concours, de l'ordre de 5 par an pendant 5 ans, ce qui permettrait un meilleur encadrement en province, des recrutements extérieurs pour le développement de nouvelles thématiques, un abaissement sensible de l' âge du passage DR en mathématiques qui pourrait se stabiliser autour de 35 ans (ce qui est nécessaire pour concurrencer les carrières dans l'enseignement supérieur) tout en permettant la promotion des quelques CR1 de plus de 40 ans que la commission souhaite voir reconnus (de l'ordre d'une dizaine ou une quinzaine). La nécessité de promouvoir ces personnes serait , nous en sommes convaincus, l'opinion de toute commission de mathématiciens.

On peut noter qu'il y a actuellement toute un population de CR1 de plus de 40 ans, non candidats DR. Ne pourrait-on pas encourager certains d'entre eux à partir vers l'enseignement supérieur, par une politique incitative individuelle et une politique incitative au niveau de leur laboratoire? On peut aussi noter que la pression pour les détachements DR de durée 4 ans n'est pas aussi énorme qu'on aurait pu l'espérer (à cause peut-être de la mise en place de primes dans l'enseignement supérieur).

2) La reconnaissance qu'il y a un passé à apurer et le droit reconnu à la commmission de le faire, sans qu'on nous accuse de ne pas avoir compris ce qu'on nous demande. Il est très important pour nous de le faire rapidement (le problème des déclassés doit être réglé dès l'année prochaine).

3) Un mathématicien doit siéger au jury d'admission. Les physiciens théoriciens se sont

montrés de maniére répétée incapables de comprendre les besoins et les problèmes de notre communauté, ce que nous regrettons vivement. Cette décision serait très appreciée et permettrait de marquer l'importance des mathématiques pour la direction générale et la confiance qu'elle accorde à leur communauté.

Sur un plan plus général, le fonctionnement du système jury d'admissibilité-jury d'admission est peu satisfaisant. Nous reconnaissons que le jury d'admission peut et doit jouer un rôle (pouvant donc aller jusqu'a un déclassement éventuel) mais nous pensons qu'un certain nombre de garanties devraient être données

– respect des personnes, notamment des candidats classés en position d'être pris par les jurys d'admissibilité, qui ont droit à une évaluation scientifique sérieuse,

– étude attentive et objective de l'ensemble du travail du jury d'admissibilité,

– décisions conformes à des priorités ou des critères clairement définis et communiqués à l'avance au jury d'admissibilité,

– dans le cas de personnes barrées d'une liste ou de choix définitif non conforme aux vœux du jury d'admissibilité, analyse scientifique précise et motivée, basée sur des rapports écrits.

Nous attendons de vous aujourd'hui un signal nous disant qu'une démarche de renouveau est possible, une réponse sur les points précis évoqués plus haut. Nous nous permettons une suggestion supplémentaire. Pourquoi pas un texte signé de vous et destiné aux mathématiciens, leur affirmant la volonté du CNRS de faire une place plus importante et plus adaptée à leur discipline et inaugurant une période de dialogue et de compréhension renouvelés ?

La commission et toute la communauté mathématique seront très attentives à vos réponses aujourd'hui et aux indices concrets qui peuvent en découler, notamment aux propositions de postes de DR que la direction fera à l'automne au Conseil Scientifique.

Résumé de la discussion qui a suivi avec le Directeur Général du CNRS

Le Directeur Général comprend nos préoccupations. Les mathématiques sont très importantes pour le CNRS; une politique d'accroissement du nombre d'entrants, d'augmentation des crédits des laboratoires de mathématiques et de développement de nouveux pôles d'excellence est poursuivie depuis plusieurs années. Le bilan de l'action du CNRS en direction des mathématiques est donc très positif.

Il est toutefois vrai que des problèmes importants se sont manifestés dans la question de la gestion des carrières. Les problèmes rencontrés de manière répétée au jry d'admission doivent être évités dans le futur et il faut donc aller au fon d des choses. L'augmentation du nombre de DR en mathématiques que préconise la commission est en effet souhaitable. La proportion jugée souhaitable par le CNRS est de 60% de CR et 40% de DR. Nous rappelons que la propostion de DR n'est que de 27% en mathématiques. Le Directeur Général reconnaˆque c'est en effet insuffisant.

Cette augmentation souhaitable présuppose un accord entre la direction et la commission sur le but de cette opération et l'utilisation qui en serait faite. La possibilité de carrières rapides permettant de stabiliser comme DR les mathématiciens les plus brillants est un objectif important du CNRS. La Direction souhaite qu'au moins 2/3 des passages DR soient consacrés à cet objectif et soient donc réservés à des candidats de moins de 40 ans.

Nous faisons observer que la commission a déjà respecté cette proportion cette année dans ses propositions et que ce serait beaucoup plus facile à faire dans le futur avec plus de postes au concours. Nous sommes donc d'accord sur cette proportion.

Le Directeur Général souhaite que cet objectif de rajeunissement au passage DR soit largement diffusé dans notre communauté. Nous proposons une réunion commune à

l'automne entre la Direction du CNRS, la Commission et (si elle le souhaite) la DRED consacrée à une réflexion sur les carrières en mathématiques au CNRS et à l'Université.

Il souhaite que le sens de notre démarche soit bien compris au sein du CNRS, et nous propose notamment l'élaboration d'un un texte de la commission que pourrait publier le *Courrier du CNRS*.

Le Directeur Général ne se prononce pas dans l'immédiat sur le montant de l'augmentation du nombre de DR souhaitable ou possible. Il souhaite qu'une étude détaillée de la population concernée soit faite par le département avant de se prononcer, étude tenant compte notamment du moment où les générations plus nombreuses correspondant à l'augmentation des entrées après 1988 arriveront au passage DR.

En ce qui concerne le problème des déclassements passés, le Directeur Général pense que dans le cadre précédemment défini il n'existe aucun obstacle à ce que le problème soit résolu l'année prochaine si la commission le souhaite. Il précise que sur les deux dossiers concernés les évaluations scientifiques dont il a l'écho sont en effet très bonnes.

En ce qui concernle jury d'admission DR le Directeur Général est convaincu que, dans le cadre que nous venons de définir, les problèmes passés n'auront aucune raison de se reproduire. Il est en principe favorable à la présence d'un mathématicien au jury d'admission. Il ne promet toutefois rien pour l'année prochaine puisqu'il lui semble a priori souhaitable de conserver les membres du jury d'admission pendant deux ans et qu'il ne souhaite pas désavouer le travail du rapporteur actuel.

L'entrevue se termine par des considérations générales sur "le laboratoire mathémati-que du futur". Le Directeur Général incite les mathématiciens à réfléchir à sa fonction, par exemple comme pôle lié à plusieurs Universités, et à élaborer des projets.

Nous quittons le Directeur Général en lui rappelant que la comunauté mathématique et plus particulièrement la commission resteront très attentives aux suites concrètes de l'entrevue, notamment au nombre de postes de DR publiés à l'automne.

SESSIONS "L'ÉTAT DE LA RECHERCHE"

L'évolution extrêmement rapide des mathématiques se traduit à la fois par une technicité croissante de chaque branche et par l'émergence à un rythme soutenu de nouveaux champs d'étude. Le risque qu'entraîne une telle situation est évident : spécialisation accrue de chacun et à terme incommunicabilité et marginalisation.

Pourtant l'unité profonde de notre discipline n'a jamais été aussi frappante, des mathématiques les plus appliquées aux plus conceptuelles, et il semble aujourd'hui difficile de faire des découvertes importantes dans une spécialité sans avoir une vision un peu globale de notre science.

C'est pourquoi la Société Mathématique de France souhaite organiser de manière régulière des sessions nationales de formation dont la vocation serait :

- soit de mettre au courant des grandes théories en plein essor les non-spécialistes du sujet souhaitant avoir une idée de l'état de l'art,
- soit de faire se rencontrer des spécialistes de sous-disciplines différentes utilisant des objets mathématiques analogues.

Fiche technique du projet

Finalité. — Maintenir au contact de la recherche "de pointe" le plus grand nombre de mathématiciens, de niveau post-DEA ou plus avancé, non-spécialistes du sujet exposé, en facilitant la communication et l'adaptation à l'évolution scientifique de la discipline.

Durée / Périodicité. — Environ trois jours par colloque, deux fois par an.

Niveau/Public. — Une première journée élémentaire (DEA accéléré) suivi d'un cours accessible aux non-spécialistes et débouchant sur les problèmes actuels, s'adressant à tout chercheur motivé, même débutant.

Lieu. — Dans toute institution d'enseignement et de recherche de France qui accepte de les accueilir.

Organisation. — Un Conseil Scientifique est mis en place par la SMF. Celui-ci choisit les thèmes des colloques, examine les réponses aux appels d'offres qu'il lance et choisit pour chaque colloque une institution d'accueil et un Comité d'Organisation formé de deux ou trois personnes.

Ce dernier, en liaison avec le Conseil Scientifique, définit précisément le contenu scientifique et le déroulement de la conférence (en particulier, il veille à ce que le colloque reste dans le schéma defini plus haut et ne se transforme pas en séminaire ultra-spécialisé), trouve les conférenciers (pas plus de deux ou trois pour les deux premières journées par souci d'homogénéité), et se charge de l'organisation matérielle de la session (inscriptions, utilisation des crédits, hébergement, publicité, etc.). Une fiche technique plus détaillée sera fournie aux différents Comités d'Organisation.

Les conférences sont rémunérées (tarif standard).

Soutien technique et financier. — La SMF espère obtenir des pouvoirs publics un financement régulier de l'ordre de 200kF par an, qu'elle reversera aux institutions d'accueil. Elle assure le secrétariat du Conseil Scientifique et fait la liaison entre ce Conseil, les pouvoirs publics et les Comits d'Organisation.

Publication. — Chaque colloque donne lieu à une publication d'une centaine de pages, qui se veut une synthèse rédigée si possible par les intervenants principaux. La production de ce texte sera largement rémunérée.

Cette publication s'intègrera vraisemblablement dans la nouvelle revue de "surveys" actuellement à l'étude à la SMF.

Conseil Scientifique. — E. Bayer, A. Beauville, G. Benarous, D. Bennequin, J-P. Demailly, P. Gérard, E. Ghys, G. Lachaud, C. Moeglin, P. Schapira (secrétaire).

Mise en route du projet

Prévisions 93-94. — Quatre sessions regroupant de 50 à 100 personnes en : mars ou avril 93, décembre 93, mars ou avril 94, décembre 94.

Un certain nombre de thèmes (Groupes quantiques, Théorie de jauge, Théorie conforme des champs, Théorie de Hodge, Milieux aléatoires, Systèmes intégrables de dimension infinie) ont été évoqués par le Comité Scientifique, mais mis à part la première session, aucune décision n'a été prise.

1ère Session : **Groupes Quantiques**

Comité d'Organisation : C. Kassel, M. Rosso, V. Turaev.

Lieu : Strasbourg

Des précisions concernant cette session paraîtront prochainement dans "l'Officiel".

Projets à long terme. — C'est à l'ensemble de la communauté à faire au Conseil Scientifique (directement, ou via la SMF) des propositions pour les sessions futures (thèmes, institutions d'accueil, Comité d'Organisation).

Pierre SCHAPIRA

IMAGES DES MATHÉMATIQUES

Les numéros 1, 2 et 3 d'*Images des Mathématiques* ont été publiés respectivement en 1985, 1988 et 1990. Il semble donc légitime d'en mettre un nouveau numéro en chantier maintenant.

Images des Mathématiques est une revue du CNRS destinée à faire connaître au public scientifique (c'est-à-dire aux physiciens, chimistes, biologistes et ingénieurs – mais aussi aux autres mathématiciens) les avancées récentes de notre discipline. Leur but n'est pas de publier des articles pour spécialistes donnant de façon précise les derniers résultats techniques disponibles, mais de donner à des lecteurs qui ont une culture scientifique une bonne idée des problèmes traités et de faire sentir à tout le moins la nouveauté des techniques employées pour les résoudre. C'est là une tâche réellement difficile, et à la lecture des numéros précédents on constate que certains articles sont difficilement compréhensibles, même pour un mathématicien, dès que sa spécialité est différente de celle de l'auteur. Sans doute est-il préférable de viser un niveau moins élevé, mais plus à la portée du public, et de ne pas hésiter à parler d'un cas simple ou d'un exemple plutôt que du cas général.

Comme pour les précédents numéros, nous faisons appel aux volontaires pour proposer des articles. Les auteurs potentiels sont invités à envoyer une courte présentation (plus de 10 lignes et moins d'une page) décrivant leur projet à l'un et à l'autre d'entre nous avant le 15 décembre 1992.

Les manuscrits définitifs devront être prêts pour le 15 mai 1993, de manière à ce que le numéro 4 d'*Images des Mathématiques* soit disponible à l'automne 1993. Chaque article devra compter 6 à 8 pages, y compris les illustrations (que l'on souhaite nombreuses et attrayantes), les encadrés et une courte bibliographie (réduite aux ouvrages généraux et aux articles de référence essentiels). Ceci représente une douzaine de pages de TEX.

Des exemples de ce que l'on peut faire (et de ce que l'on ne doit pas faire!) se trouvent dans les précédents numéros d'*Images des Mathématiques*, que l'on peut obtenir sur simple demande auprès de François Murat.

D'avance merci à ceux qui proposeront un article.

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE, Mathématiques, Université de Paris-Sud – 91405 ORSAY
Fax : (1) 69 41 62 21; e-mail : colliot@matups.matups.fr

François MURAT, Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55-65, 5ème étage, 4 place Jussieu – 75252 PARIS Cedex 05
Fax : (1) 44 27 72 00

INSTITUT : Le C.R.M. de Barcelone

Dans le numéro de juin de la Gazette, nous avons publié un dossier sur les "Instituts en Europe". Nous savions que nous n'étions pas exhaustifs. Voici une brève présentation du C.R.M. : Centre de Recerca Matematica.

Ce centre a été fondé en 1984 au sein de l'IEC, Institut d'Estudis Catalans, à Barcelone. Le but principal est d'encourager la recherche mathématique en Catalagne, en favorisant des visites, en facilitant les contacts scientifiques entre les visiteurs et les jeunes chercheurs locaux, en diffusant la recherche par des publications de preprints, en organisant des colloques, conférences et rencontres scientifiques.

Le CRM est implanté dans le bâtiment de Science de l'Université Autonome de Barcelone.

Il est dirigé par un conseil composé par les Dr. Eduard Bonet, Joan Girbau, Josep Pla, Josep Vaquer et Manuel Castellet. Ce dernier en est le directeur.

Activités scientifiques en 1991

Analyse complexe. Espaces des fonctions invariantes harmoniques et description de l'enveloppe polynomiale d'ensembles compacts de $\mathbb{C}^n$ de types particuliers (P. Ahern, J. Bruna, J.M. Ortega, N. Scheibina)

Analyse réelle. Approximation des solutions des équations elliptiques et étude des notions correspondantes de capacité. (J. Brennan, J.J. Carmona, M. Melnikov, P. Paramonov, J. Verdera)

Théorie des nombres. Motifs. Conjecture de Grothendieck sur la semi-simplicité de la catégorie des motifs à équivalence numérique près (prouvée par B. Jannsen du CRM). Formes modulaires. Variétés de Shimura. Modèles de Neron (P. Bayer, H. Carayol, V. Jannsen, J.C. Lario, E. Nart, X. Xarles)

Analyse stochastique. Calcul stochastique pour les processus anticipatifs. Equations différentiels stochastiques de Skorohod et de Stratonovich. Analyse sur l'espace de Wiener,... (D. Nualart, M. Sanz, D. Ocone, P. Imkeller, H. Föllmer, M. Zakai, P. Baldi,...)

Adresse : Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Apartate 50, E-08193 Bellaterra.

Tél : 34-3/58 11 081 — Fax : 34-3/58 12 202 — telex : 52040 EDUCI E
e-Mail : ICRMO@EBCCUAB1.BITNET

ZÜRICH : ICM 94

— Preliminary Announcement —
The International Congress of Mathematicians 1994

The next International Congress of Mathematicians will be held in Zürich, Switzerland, from August 3 to August 11, 1994, under the auspices of the International Mathematical Union. The lectures will be held at the Kongresshaus of the city of Zürich and in lecture theatres at the Federal Institute of Technology (ETHZ) and at the University of Zürich.

The Swiss Mathematical Society has entrusted a committee with the organization of the congress. The president of this committee is Henri Carnal, the secretary is Christian Blatter. The administration of the participants (hotel reservations etc.) has been delegated to a professional congress organizer.

The First Announcement containing further details and an application form will be distributed in July 1993.

Please write to the following address for further information :

ICM 94 — International Congress of Mathematicians, ETH Zentrum – CH-8092 Zürich (Switzerland)

BOURSES POSTDOCTORALES

Une brochure sur ce sujet vient d'être réalisée par Paula B. Cohen à l'occasion du Congrès Européen de Mathématiques. On y trouve plusieurs types de renseignements.

1. Statistiques

- le nombre de postdocs par discipline, par institution et par pays à la fois pour les invités et pour les ressortissants;
- les comparaisons entre le flux des postdocs Europe-Europe, Europe-US, Europe-Japon.

2. Pratique

- les organisations finançant les postdocs, le montant de ces bourses;
- le rôle de la Communauté Européenne;
- les programmes spécifiques;
- les formalités.

On peut se procurer cette brochure très utile à l'adresse suivante :

CEM – Collège de France, 3 rue d'Ulm, 75005 PARIS — fax : (33 1) 44 27 17 10

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FRANCE

Le Journal Officiel du 8 août 1992 contient un arrêté donnant la liste des membres nouveaux de l'Institut Universitaire de France. Nous renvoyons à la *Gazette n° 51* pour une description de cette institution sans murs.

Les membres seniors sont au nombre de dix-neuf parmi lesquels trois mathématiciens : Jean-Michel Bismut (Paris 11), Henri Cohen (Bordeaux 1) et Etienne Pardoux (Aix-Marseille 1).

Les nouveaux membres juniors sont quinze parmi lesquels il y a aussi trois mathématiciens : Gilles Lebeau (Paris 11), François Lœser (Paris 6) et Denis Serre (ENS Lyon).

Dans les deux cas le pourcentage des mathématiciens est supérieur à leur importance numérique parmi les universitaires. C'est un signe de la position de notre discipline en France.

PRIX DE LA VILLE DE PARIS

A l'occasion du Congrès Européen de Mathématiques qui s'est tenu en juillet dernier à Paris, dix jeunes mathématiciens ont reçu des prix décernés par la Ville de Paris.

Ces dix jeunes mathématiciens illustrent, par le nombre de pays dont ils sont issus et les différents domaines des mathématiques auxquels ils se sont consacrés, la grande diversité de la nouvelle Europe qui est sa chance et sa richesse à l'aube du troisième millénaire.

Ces chercheurs ont été choisis par un Comité des Prix international présidé par Max Karoubi, professeur à l'Université Denis Diderot.

Voici la liste de ces jeunes lauréats. Dans le prochain numéro de la Gazette, nous donnerons plus de détails sur ces jeunes mathématiciens.

Richard BORCHERDS (Grande-Bretagne), Jens FRANKE (Allemagne). Alexander GONCHAROV (Russie), Maxim KONTSEVICH (Russie), François LABOURIE (France), Tomasz LUCZAK (Pologne), Stefan MÜLLER (Allemagne), Vladimir SVERAK (Tchécoslovaquie), Gabor TARDOS (Hongrie), Claire VOISIN (France),

Le Comité des Prix voudrait rendre un hommage particulier à **Andreas Floer**, né à Duisbourg en 1956 et décédé en 1991 dans des circonstances tragiques. Il étudia à l'Université de Bochum. Au moment de son décès, il était titulaire de la chaire d'Analyse et Géométrie dans cette Université. ■

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1992
et son supplément les MÉMOIRES DE LA S.M.F.

(4 fascicules par an auxquels s'ajoutent 4 à 5 suppléments)
Revue éditée par la Société Mathématique de France.
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.

TOME 120, Fascicule 3
132 p., Prix public : 175 FF, Prix membres : 110 FF.

Sommaire :
JACQUET (H.) et YE (Y.). — *Relative Kloosterman integrals for $GL(3)$.*
ANDRUSKIEWITSCH (N.). — *Some exceptionnal compact matrix pseudogroups.*
BENZAGHOU (B.) et BEZIVIN (J.-P.). — *Propriétés algébriques de suites différentiellement finies.*
ANOUSSIS (M.). — *Intégrales invariantes et formules de caractères pour un groupe de Lie connexe à radical co-compact.*
SABBAH (C.). — *Lieu des pôles d'un système holonome d'équations aux différences finies.*

Mémoires :
Supplément au Tome 120, fasc. 3 – Mémoire n° 50 – *On congruences of lines in the projective space.*
96 p., Prix public : 100 FF, Prix membres : 70 FF.

ARRONDO, (E.) et SOLS (I.). — *On congruences of lines in the projective space.* (Chapter 6 written in collaboration with M. Pedreira)

We study smooth congruences (*i.e.* surfaces in the Grassmannian $Gr(1,3)$ of lines in $\mathbf{P}^3$ showing their parallelism with surfaces in $\mathbf{P}^4$. Besides the description of all smooth congruences up to degree nine and studying their Hilbert scheme, we develop a general theory. For example, we define the adequate notion of liaison for congruences and classify the smooth congruences which are projected from $Gr(1,4)$. We also prove some bounds of the sectional genus in order to give conditions (e.g. having a fixed Euler-Poincaré characteristic) such that there are finitely many families of smooth congruences verifying those conditions.

ABONNEMENT 1992
Tarif public (Bulletin et Mémoires) : 840 FF (TTC) pour la France, 1060 FF pour l'étranger.
Membres de la S.M.F. : 255 FF (Bulletin), 420 FF (Bulletin et Mémoires)

ABONNEMENT 1993
Prix public Europe : 860 FF Hors Europe : 910 FF
Prix Membres Europe : 430 FF Hors Europe : 480 FF

DISTRIBUTION
Maison de la S.M.F., Case 916 – Luminy, 13288 Marseille Cedex 09
Gauthier-Villars, CDR, 11 rue Gossin, 92543 Montrouge Cedex
Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05

ENQUÊTE

D.E.U.G., LICENCE et MAITRISE en chiffres

Ces résultats nous ont été fournis par Jacques Camus.

Année 90/91	DEUG A 1ère année				DEUG A 2ième année			
	IA	IP	PE	R	IA	IP	PE	R
Aix Marseille 1	734	461			482	329		239
Aix Marseille 2	280			122	139			90
Aix Marseille 3								
Amiens	406		224	120	150		93	52
Angers	499	498	495	282	214	214	214	133
Antilles-Guyane								
Avignon	288	211	203	85	89	89	83	63
Besançon								
Bordeaux								
Brest	779	767		492	520	520		354
Caen	586	548	544	270	352	339	331	230
Chambéry	545	413	265	68	234	179	175	91
Clermont 2	172				139			
Corte								
Créteil	376		213	96	167		121	78
Dijon								
Grenoble 1	1766	920	815	501	644	603	582	477
Le Havre	275	275	178	96	96	96	64	52
Le Mans								
Lille								
Limoges								
Lyon 1	676	600		349	376			241
Metz								
Montpellier 2								
Mulhouse		313	293	135		162	158	131
Nancy 1								
Nantes	880	880	668	347	373	373	363	259
Nice	873	596	499	296	421	308	280	193
Orléans	714	607	558	338	245	245	239	184
Paris 5								
Paris 6	2378		1549	934	2282			980
Paris 7(*)	4285		2997		2267			824
Paris 9								
Paris 10								
Paris 11								
Paris 12								
Paris 13								
Pau	660	660	461	413	506	506	428	279
Perpignan	204	188	175	94	114	107	105	74
Picardie St-Quentin								
Poitiers		754	688	355		381	374	275
Reims					354			232
Rennes 1	1296	1205	1155	630	776	773	773	504
La Réunion								
Rouen								
St-Etienne	355	353	250	89	179	172	127	93
Strasbourg 1	443			177	167			114
Toulon	402			143	178			95
Toulouse III	2079/668*	1823/647*		1386/414*	514/395*	507/388*		389/273*
Tours	610	570	545	244	261			180
Valenciennes	611	421	366	286	536	373	366	228
	* S1/S2				* S3/S4			

IA:Inscrits administratifs; IP: Inscrits pédagogiques; PE: Présents à l'examen; R: Reçus.
(*)Il est possible de suivre les enseignements de Licence en ayant un certain nombre d'UV de DEUG

Année 90/91	Licence					Maîtrise			
	IA	IP	PE	R	ChiffresDESUP	IA	IP	PE	R
Aix Marseille 1	338		253	114	108	113		97	69
Aix Marseille 2	40		23	16	16	15		13	11
Aix Marseille 3	59		45	39	39	32			
Amiens	115		89	28	28	59		43	17
Angers	80	80	55	38	38	25	25	21	13
Antilles-Guyane					16				
Avignon									
Besançon				60	118				
Bordeaux	427			184	184	159			65
Brest	78	78		44	44	48	48		27
Caen	128	117	117	60	60	61	54	35	25
Chambéry	20		19	11	17	15		15	9
Clermont 2	122			47	47	52			
Corte									
Créteil	33		21	4					
Dijon				47	41				
Grenoble 1	207	209		81	81	136	128	113	33
Le Havre	21*	21*	18*	15		8*	8*	5*	5*
Le Mans					12				
Lille				174	174				
Limoges				24	24				
Lyon 1	223			104	111	95			57
Metz				25	29				
Montpellier 2				72	72				
Mulhouse		16	15	11	11		3	2	1
Nancy 1	50	50	50	39	129	49	49	49	47
Nantes	177	177	175	77	102	73	73	65	25
Nice	138	125	125	81	81	84	60	60	49
Orléans	84	88	77	42	42		44	29	22
Paris 5									
Paris 6	808	769	636	278	296	426	426	321	164
Paris 7(*)	931			200	193	370			107
Paris 9	23		15	11	11	10		7	5
Paris 10									
Paris 11	238	238	175	116	135	201	192	129	68
Paris 12					4				
Paris 13				20	20				
Pau	100	100	91	46	46	59	59	55	30
Perpignan	16	15	15	11	11				
Picardie St-Quentin									
Poitiers		92		44	44		42		18
Reims	132			65	65	60			28
Rennes 1	181	178	167	92	92	114	112	104	62
La Réunion					9				
Rouen				60	60				
St-Etienne	59	59	20	19	19	11	11	7	7
Strasbourg 1	135			81	72	100			70
Toulon	41			18	18	10			6
Toulouse III	248	248		119	119	148	148		42
Tours	106		51	33	31	43		26	20
Valenciennes	66	63	63	30	30	22	21	21	7
	*Non compris MST				Total = 2899				

IA:Inscrits administratifs; IP: Inscrits pédagogiques; PE: Présents à l'examen; R: Reçus.
(*)Il est possible de suivre les enseignements de Licence en ayant un certain nombre d'UV de DEUG

COMPTES RENDUS

Scattering Theory

Lax et Phillips

Ce livre est une édition révisée de l'ouvrage classique de Lax et Phillips 'Scattering Theory' paru en 1967. Avant de décrire les améliorations apportées à la première édition, nous allons commencer par une brève description du contenu de cet ouvrage.

La théorie de Lax et Phillips est une approche originale du problème du scattering pour un groupe unitaire d'évolution $U(t)$ agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. L'exemple typique qui a sans doute inspiré cette approche est donné par l'équation des ondes en présence d'un obstacle dans $\mathbf{R}^n$ pour n impair :

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n \backslash \Omega, \\ &u_{|\partial\Omega} = 0, \\ &u_{|t=0} = f_0\,,\ \partial_t u_{|t=0} = f_1. \end{aligned}$$

De manière plus rigoureuse, on introduit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ des données initiales (appelé traditionellement espace d'énergie), défini par la norme :

$$|f|_E^2 = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} |\partial_x f_0|^2 + |f_1|^2 dx$$

et on pose :

$$U(t)f = (u_t, \partial_t u_t).$$

*L'objet de la théorie du scattering pour des problèmes d'évolution est de décrire le comportement asymptotique de la solution $U(t)f$ de (1) quand t tend vers $\pm\infty$. A cause de l'absence de valeurs propres pour le problème de Dirichlet dans un domaine extérieur, on s'attend à ce que pour $\pm t$ assez grand, la solution $U(t)f$ vive loin de l'obstacle Ω, et donc que l'évolution soit décrite approximativement par l'évolution $U_0(t)$ associée à l'équation des ondes **libre** :*

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 u - \Delta_x u = 0 \text{ dans } \mathbf{R}^n\,, \\ &u_{|t=0} = f_0\,,\ \partial_t u_{|t=0} = f_1. \end{aligned}$$

On peut alors montrer que pour tout $f \in \mathcal{H}$, il existe des vecteurs $f_+, f_- \in \mathcal{H}$, tels que :

$$(3)\quad U(t)f - U_0(t)f_\pm \to 0 \text{ quand } t \to \pm\infty.$$

On peut alors définir l'opérateur de scattering, qui relie le comportement asymptotique des solutions quand t tend vers $-\infty$ et quand t tend vers $+\infty$. L'opérateur de scattering est défini comme l'application :

$$(3')\qquad S : f_- \mapsto f_+$$

*et décrit une sorte d'idéalisation mathématique de l'expérience consistant à envoyer une onde connue sur l'obstacle Ω et à mesurer l'onde réfléchie obtenue. Cette version de la théorie du scattering, appelée **approche dynamique** peut se généraliser de manière abstraite en considérant une paire d'évolutions unitaires $U_0(t)$ (l'évolution libre) et $U(t)$ (l'évolution perturbée). On utilise l'évolution libre $U_0(t)$ pour décrire l'évolution asymptotique $U(t)$ pour $t \to \pm\infty$. Cette approche classique est aussi celle utilisée dans la théorie du scattering en Mécanique Quantique, où l'équation des ondes est remplacée par l'équation de Schrödinger, et l'obstacle Ω par un potentiel $V(x)$.*

Le problème principal de la théorie du scattering consiste à prouver l'existence de vecteurs $f_\pm$ vérifiant (3), et ensuite à étudier les propriétés de l'opérateur S, en particulier en liaison avec les propriétés de la perturbation (obstacle ou potentiel par exemple).

La théorie de Lax-Phillips est une approche tout à fait différente qui est basée sur la construction de représentations de translation pour un groupe unitaire. Nous ferons par la suite quelques remarques sur les différences entre cette méthode et la méthode dynamique en théorie du scattering quantique, et aussi sur les liens qu'elle présente avec des formes récentes de celle ci, en particulier avec la méthode de Enss.

Les objets de base dans la théorie de Lax-Phillips sont, outre l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et l'évolution $U(t)$, une paire d'espaces D_-

et D_+, appelés respectivement ***sous-espace entrant*** *et* ***sous-espace sortant****. Un espace D_+ est dit* ***sortant*** *pour une évolution unitaire $U(t)$, si les propriétés suivantes sont satisfaites :*

(i) $U(t)D_+ \subset D_+ : \forall t \in \mathbf{R}$

(ii) $\cap_{t\in\mathbf{R}} U(t)D_+ = \{0\}$

(iii) $\overline{\cup_{t\in\mathbf{R}} U(t)D_+} = \mathcal{H}$.

Un exemple simple est obtenu en prenant $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}, N)$, où N est un espace de Hilbert auxilliaire, $U(t)$ est la translation par t, définie par $U(t)f(s) = f(s-t)$, et $D_+ = L^2(\mathbf{R}^+, N)$. C'est un résultat important de Sinai que pour tout triplet $(\mathcal{H}, U(t), D_+)$, il existe une isométrie qui envoie ce triplet sur le triplet modèle précédent. Cette isométrie est unique à isomorphisme de N près. Cette représentation du triplet $(\mathcal{H}, U(t), D_+)$ est dite ***représentation de translation.***

Dans le cas particulier où $U(t)$ est l'évolution donnée par l'équation des ondes, l'espace D_+ est défini comme l'espace des $f \in \mathcal{H}$ tels que $U(t)f$ s'annule dans le cône $\{|x| < t + R, t > 0\}$, où R est assez grand pour que $\Omega \subset B(0, R)$. Pour une paire donnée d'espaces $D\pm$, tout vecteur $f \in \mathcal{H}$ possède deux représentants f_- et f_+ associés aux représentations de translation de D_- et D_+. On ***définit*** *alors dans la théorie de Lax-Phillips, l'opérateur de scattering comme l'application :*

$$S : f_- \mapsto f_+. \tag{5}$$

On remarquera que l'opérateur S commute avec les translations sur $L^2(\mathbf{R}, N)$ et envoie $L^2(]-\infty, 0], N)$ dans lui-même. Si l'on considère l'opérateur $\mathcal{S} = \mathcal{F}S\mathcal{F}^{-1}$ sur $L^2(\mathbf{R}, N)$, où F est la transformation de Fourier, on voit en particulier que $\mathcal{S}$ commute avec la multiplication par des fonction scalaires, et donc que $\mathcal{S}$ peut s'écrire comme :

$$\mathcal{S}f(\sigma) = \mathcal{S}(\sigma)f(\sigma)$$

où $\mathcal{S}(\sigma)$ est un opérateur unitaire sur N défini pour presque tout σ, appelé ***matrice S de Heisenberg****. De plus $\mathcal{S}(\sigma)$ est la valeur au bord d'un opérateur $\mathcal{S}(z)$ sur N holomorphe dans $Im\, z < 0$. Pour faire le lien avec l'approche dynamique du scattering, on peut d'ailleurs introduire une évolution libre $U_0(t)$ telle que l'opérateur de scattering défini par (5) s'identifie avec l'opérateur de scattering pour la paire $(U_0(t), U(t))$ défini par (3'). En effet il suffit de définir $U_0(t)$ comme la translation à droite par t sur $L^2(\mathbf{R}, N)$, et d'identifier ensuite $\mathcal{H}$ avec $L^2(\mathbf{R}, N)$ de la manière suivante : l'espace $L^2(]-\infty, -1], N)$ (resp. $L^2[1, +\infty[, N)$) est identifié avec D_- (resp D_+) dans la représentation de translation entrante (resp. sortante), et l'espace $L^2([-1, 1], N)$ est identifié avec $\mathcal{H} \ominus (D_- \oplus D_+)$ de façon arbitraire. On reconnait d'ailleurs ici une propriété fondamentale des paires d'évolution $(U_0(t), U(t))$ auxquelles on peut appliquer la théorie de Lax-Phillips : si $f \in D_\pm$, on a $U(t)f = U_0(t)f$ pour $\pm t \geq T$. Dans le cas particulier de l'équation des ondes, cette propriété vient de la définition même des espaces $D_\pm$ et du principe de Huyguens.*

Un autre avantage de la théorie de Lax-Phillips est de pouvoir étudier directement les propriétés de prolongement analytique de la matrice S dans la variable σ. Dans le cas modèle de l'équation des ondes, ces propriétés sont liées au comportement de la solution pour des temps grands et près de l'obstacle. En particulier l'existence d'un pôle dans le complexe pour $\mathcal{S}(\sigma)$ (appelé une ***résonance*** *dans la littérature physique) est liée à la présence de certaines solutions de l'équation des ondes qui restent localisées près de Ω pour des temps très longs avant de se propager vers l'infini. Dans l'approche de Lax-Phillips, ce type de comportement est étudié grâce au semigroupe suivant :*

$$Z(t) = P_+U(t)P_- \tag{6}$$

où $P_\pm$ est la projection orthogonale sur $D_\pm^\perp$. L'effet de P_+ (resp. P_-) est d'éliminer la partie sortante (resp. entrante) de l'évolution, $Z(t)$ décrit donc se qui se passe près de la perturbation. On vérifie facilement que $Z(t)$ est un semigroupe de contractions, dont on dénote par B le générateur infinitésimal (défini formellement par $Z(t) = e^{-tB}$). On montre ensuite que le spectre de B est discret et situé dans $Re\,\mu < 0$, et que $\mu \in \sigma(B)$ si et seulement si $\mathcal{S}(\mu)$ n'est pas inversible. On

applique enfin le principe de réflection de Schwarz à la fonction (à valeurs opérateur) $\mathcal{S}(z)$: on en déduit qu'on peut prolonger ***méromorphiquement*** *$\mathcal{S}(z)$ dans $Im\, z \geq 0$ en posant :*

$$\mathcal{S}(z) = \mathcal{S}^*(\overline{z})^{-1} \text{ pour } Im\, z > 0.$$

Enfin le lien entre pôles de la matrice $\mathcal{S}$ et comportement de l'évolution est très simple dans l'approche de Lax-Phillips. En effet si μ est un pôle de $\mathcal{S}(z)$, $-i\bar{\mu}$ est une valeur propre de B, et il existe donc un état $f \in \mathcal{H}$ tel que :

$$P_+U(t)P_-f = e^{-i\bar{\mu}t}f.$$

Nous terminerons par quelques remarques sur le lien avec l'approche dynamique décrite auparavant. Comme nous l'avons dit plus haut, les données de l'approche dynamique sont une paire d'évolutions $(U(t), U_0(t))$, et l'opérateur de scattering est défini comme dans (3'). Le cas le plus important est sans doute celui du scattering pour l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t u = -\Delta_x u + V(x)u$$

$u_{|t=0} = f$

Dans ce cas le rôle de la perturbation est joué par le potentiel $V(x)$ plutôt que par l'obstacle Ω. L'évolution $U(t)$ est donc donnée par $U(t) = e^{-itH}$, où $H = -\Delta_x + V$ et l'évolution libre est $U_0(t) = e^{-itH_0}$ pour $H_0 = -\Delta_x$. On peut encore définir une matrice $\mathcal{S}(\lambda)$ en utilisant que S commute avec le Laplacien $-\Delta$. Pour étudier les propriétés d'analyticité de la matrice $\mathcal{S}(\lambda)$, on est cependant obligé d'utiliser une approche indirecte : on commence par montrer (sous certaines conditions sur la perturbation V), que la résolvante $(H-\lambda)^{-1}$ se prolonge méromorphiquement dans tout le plan complexe. On utilise ensuite des formules de la théorie stationnaire du scattering qui relient $(H-\lambda)^{-1}$ et $\mathcal{S}(\lambda)$. Contrairement à la théorie de Lax-Phillips, la matrice $\mathcal{S}$ n'est donc pas l'objet central. Par contre on peut étudier par l'approche dynamique des perturbations qui ne sont pas "à support compact", et donc qui ne rentrent pas dans la théorie de Lax-Phillips. Enfin signalons qu' une méthode assez récente introduite par Enss à la fin des années 70 pour étudier le scattering pour l'équation de Schrödinger présente certaines analogies avec la méthode de Lax-Phillips. La méthode de Enss repose sur l'étude de l'évolution $e^{-itH}f$ pour des états f vérifiant $f = E_{[0,+\infty[}(A)f$, où $A = \frac{1}{2}(x.D_x + D_x.x)$ est le générateur infinitésimal des dilatations. Ces états sont assez comparables aux états sortants de la théorie de Lax-Phillips, à ceci près que l'influence de la perturbation V sur $e^{-itH}f$ ne disparait jamais tout à fait, une conséquence de la vitesse infinie de propagation pour l'équation de Schrödinger.

Venons en maintenant aux changements que les auteurs ont apporté à leur livre dans cette édition révisée. La nouveauté consiste en un chapitre supplémentaire qui décrit les développements que le sujet a connu dans les vingt ans qui ont suivi la parution de la première édition en 1967. A ce propos il est dommage que les auteurs aient choisi de baptiser ce chapitre 'Epilogue', ce qui tend à donner l'impression (fausse à mon avis) que le sujet est clos.

Un premier domaine dans lequel beaucoup de progrès ont été faits est le problème du lien entre les propriétés de la matrice $\mathcal{S}$ et la géométrie de l'obstacle dans le cas de l'équation des ondes. Par exemple la position des pôles de $\mathcal{S}(z)$ dans le plan complexe est fortement reliée aux propriétés des rayons lumineux réfléchis sur l'obstacle, ce qui fait d'ailleurs de l'analyse microlocale un outil de choix pour aborder ce type de questions. Un autre domaine qui a connu d'importants développements depuis la parution de la première édition est celui de la théorie du scattering pour les fonctions automorphes. Le but ici est d'étudier l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un quotient du demi-plan de Poincaré par un sous-groupe discret du groupe des isométries. Lax et Phillips ont montré en s'inspirant de travaux antérieurs de Faddeev et Pavlov qu'on peut développer une théorie du scattering pour l'équation des ondes associée qui est assez similaire à celle décrite auparavant. Par exemple le caractère méromorphe des séries d'Eisenstein (fonctions propres généralisées du La-

placien pour les analystes), s'obtient alors comme conséquence du prolongement analytique de la matrice S. Enfin Lax et Phillips décrivent d'autres extensions de leur théorie, en particulier à cette généralisation de l'équation des ondes que constituent les systèmes symétriques hyperboliques.

Christian GÉRARD
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique

Mathématiques

Christian Mauduit et Philippe Tchamitchian

Éditions Messidor/La Farandole, collection "La science et les hommes".

Introduire les mathématiques auprès d'un large public, et surtout d'un jeune public, c'est le propos de ce livre. Les difficultés semblent nombreuses : sortir du contexte scolaire, choisir les thèmes abordés en faisant un panorama assez général de l'état actuel de la science, tout en donnant des éléments d'histoire, choisir enfin le niveau des explications : faut-il survoler au risque d'être imprécis et de donner une idée fausse des notions ou donner des définitions et des énoncés précis mais peut-être trop ardus ou techniques? Les auteurs ont choisi de présenter cinq thèmes mathématiques (nombres et géométrie; calcul numérique; graphes combinatoire et probabilités; symétries et pavages et groupes; fractals et systèmes dynamiques) en les faisant précéder d'une introduction historique évoquant le fonctionnement des mathématiques dans la société, le fonctionnement logique des mathématiques et les notions de problème et de conjecture. Un dernier chapitre est consacré au métier de mathématicien.

Détaillons le contenu chapitre par chapitre. La notion de problème est introduite sous un angle historique mettant en valeur l'interaction des mathématiques et de la société. Dans l'antiquité d'abord, Thalès mesurant la hauteur des pyramides, Érathostène donnant une bonne approximation de la circonférence terrestre, Archimède étudiant les miroirs paraboliques etc. Puis sont évoqués Pascal et la machine à calculer, Descartes et les lois de la réfraction, Newton ... La nature du raisonnement mathématique est présentée à partir d'un dialogue de Platon et des axiomes, euclidiens ou non, de la géométrie. Quelques démonstrations sont proposées en exemple (théorème de Pythagore, ponts de Königsberg, infinitude de l'ensemble des nombres premiers, irrationalité de $\sqrt{2}$). Ce choix, qui constitue le chapitre introductif ne prétend pas être un panorama de l'histoire des mathématiques, mais on peut peut-être lui reprocher de laisser penser au lecteur superficiel ou ne s'engageant pas plus avant dans le livre que les seules époques vraiment fructueuses ont été l'antiquité et la période qui va de la Renaissance au XIXe siècle. Cette impression sera corrigée en partie par la suite à propos de chacun des thèmes exposés. Le deuxième chapitre illustre la notion de conjecture par des problèmes célèbres (Fermat, nombres premiers jumeaux, Goldbach, quadrature du cercle, problème des quatre couleurs) avec une certaine tendance à insister sur la théorie des nombres — nous y reviendrons.

Ensuite sont abordés un à un les différents thèmes en commençant par l'arithmétique autour de la construction à la règle et au compas dont les résultats élémentaires sont expliqués, la constructibilité des polygones réguliers étant l'occasion de présenter la vie et l'œuvre de Gauss. On en vient naturellement à l'introduction des nombres transcendants, aux résultats de Liouville et de là à la différence entre démonstration constructive et non constructive et aux travaux de Cantor sur l'infini dont l'évocation clôt ce chapitre. On revient aux nombres et à π à propos du calcul numérique : développements décimaux illimités, approximation de π, ce qui permet d'introduire les moyens modernes de calcul et de faire la transition avec la modélisation et le calcul scientifique : aéronautique, espace, CAO, sont donnés en exemples, en concluant sur l'interdisciplinarité nécessaire.

Le chapitre dit "des permutations" couvre la combinatoire, la théorie des graphes (retour

aux ponts de Königsberg, chemins eulériens et hamiltoniens, problème du voyageur de commerce, exploration de labyrinthes). Cela débouche sur l'optimisation et les problèmes de flots, et aussi sur la géométrie des graphes et la topologie. La deuxième partie du chapitre est consacrée à la complexité, à partir de la combinatoire des mots et des automates. On termine avec les probabilités et les statistiques inévitablement illustrées par les jeux de cartes et l'aiguille de Buffon (à nouveau π !), mais aussi par les sondages d'opinion, l'évaluation des risques (Tchernobyl) et la théorie de l'information.

Intitulé "Symétries et pavages" le chapitre suivant introduit la théorie des groupes à partir des transformations (ce mot n'est d'ailleurs pas défini) du plan euclidien. Les travaux de Galois sont cités, puis sont présentés les résultats sur les pavages du plan périodiques ou non, et on termine naturellement sur la cristallographie. Enfin le dernier chapitre mathématique part de la notion d'échelle (du fossile à la galaxie spirale) pour introduire les fractals, les systèmes dynamiques et la stabilité par rapport aux conditions initiales. Le livre se termine par quelques pages qui décrivent le métier de mathématicien, illustrées d'une photographie du CIRM, de la classification de l'AMS des sujets mathématiques et d'un tableau de la Renaissance montrant un mathématicien expliquant un théorème à un élève à l'aide d'une ardoise, d'instruments de dessin et de polyèdres. Ce chapitre décrit le rôle du CNRS et des universités, ainsi que les différents modes de communication dans le monde mathématique, de la correspondance d'Euler au congrès de Kyoto. Le rôle de l'informatique dans cette correspondance est malheureusement négligé.

Plus généralement, la principale critique négative que l'on peut faire à cet ouvrage est l'absence de parties importantes des mathématiques. La géométrie différentielle, par exemple n'apparaît que brièvement dans un encadré sur Gauss et à propos des travaux d'Einstein sur la courbure de l'espace. Il est vrai que certains sujets sont peut-être difficiles à vulgariser, mais on aurait pu évoquer certaines branches en plein développement des mathématiques contemporaines (par exemple la géométrie algébrique réelle et ses implications en robotique). Il est certain que dans un volume restreint on ne peut aborder tous les sujets, mais la part faite à l'arithmétique et à l'algèbre est généreuse (bien que ces mots ne figurent pas dans l'index, pas plus qu'analyse d'ailleurs).

Malgré ces critiques sur le choix des thèmes, nous avons aimé ce livre. Les notions abordées sont mises à la portée du lecteur, et les interactions entre différentes parties des mathématiques et de celles-ci avec les autres sciences et les techniques sont bien mises en valeur. La présentation des chapitres est agréable, avec de nombreux encadrés bien choisis qui approfondissent les notions évoquées dans le corps principal du texte. L'iconographie est fournie et intéressante, on y trouve des purs documents historiques (une démonstration datée du XIIe siècle du théorème de Pythagore, une planche de l'Encyclopédie) ou explicatifs (des diagrammes illustrant la théorie des graphes, le flocon de Von Koch, une bijection des entiers sur les entiers pairs) et des illustrations originales comme la photographie d'une gare de triage pour accompagner l'axiome des parallèles, une gravure de la partie de thé d'Alice au Pays des Merveilles à propos de la récurrence. La mer un jour de vent et une raffinerie de pétrole illustrent le calcul numérique; des enfants jouant à la chandelle expérimentent les permutations et le plan du métro parisien est un graphe aux propriétés intéressantes ! De nombreuses photos de films sont aussi utilisées, en particulier Orson Welles au milieu de liasses de documents jonchant le sol (pavages du plan). On trouve aussi des reproductions de tableaux, de sculptures, de vases grecs, et la rosace du transept nord de la cathédrale d'Amiens à l'appui de la constructibilité du pentagone régulier. Bien sûr l'Alhambra illustre les pavages, et plus inattendu Gulliver évoque les fractals. Le livre s'ouvre sur l'image d'une jeune femme faisant le point sur un voilier et se ferme sur la photo de Sonia Kovalevska. Le rôle des femmes en mathématiques est abordé

à plusieurs reprises, ce qui nous semble important pour un livre destiné à la jeunesse.

Quel public peut-il s'intéresser à ce livre? Si quelques rares passages sont abordables au niveau collège, le niveau lycée semble le mieux adapté pour s'y lancer; mais il peut certainement être utilisé par les enseignants dès le collège. Il devrait en tous cas être pleinement apprécié au niveau DEUG, mais aussi par les non spécialistes moins jeunes, curieux de se faire une idée de ce que sont et où vont les mathématiques.

François DIGNE
E.N.S. Ulm

843 fonctions mathématiques...
Quand on aime, on compte !

Mathematica est un système général pour faire des calculs numériques, symboliques et graphiques. Il est utilisé par tous les chercheurs, étudiants, physiciens, analystes et autres professions techniques qui ont besoin d'un outil de calcul interactif et d'un langage de programmation pour les mathématiques.

Les capacités numériques de *Mathematica* incluent l'arithmétique de précision infinie, les manipulations matricielles et tensorielles. Il peut manipuler les formules directement dans leur forme algébrique, résoudre des équations symboliques.

Mathematica est un outil performant pour l'intégration, la différentiation, la résolution d'équations différentielles, les développements en série, les transformées de Fourier, la programmation linéaire etc.

Mathematica génère des graphiques en deux et trois dimensions en format postscript et dans la plupart des versions de l'animation graphique, ainsi que des sons échantillonnés. Il traduit automatiquement des expressions en langage C, Fortran et TeX.
Sur certains systèmes, l'interface *Mathematica* supporte les cahiers interactifs (ou NoteBook) permettant de mélanger texte, graphiques, animations, commandes et résultats.

Mathematica est disponible sur les plates-formes Macintosh, DOS, Windows et Unix.

Mathematica®
Un système informatique pour les mathématiques

Distribué par BR Publishing

3, rue des Quatre Cheminées
92100 Boulogne-Billancourt
Téléphone : (1) 47 61 00 11

BR PUBLISHING

NOS PROBLEMES ONT DES LECTEURS

Nous avons reçu un abondant courrier à propos du numéro 52.

à propos du 3e problème de HILBERT

Nous avons reçu une lettre de J. Lefort (Colmar) qui nous signale un article sur ce problème qu'il a publié dans *"l'Ouvert"* en juin 1986 et qui fait partie des source (non citées!) de l'article de Grandemange et Schwartz. En particulier, plusieurs des figures avaient été imitées de l'article de Lefort. Toutes nos excuses à ce dernier. Nous profitons de l'occasion pour faire un peu de publicité à *"l'Ouvert"*, revue de l'APM d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg.

Reçu aussi un erratum pour l'article de Cathelineau :

page 65, ligne -6, lire $\{b\} - \{a\}$ au lieu de $\{a\} - \{b\}$.

page 66, ligne 8, remplacer à droite du signe $=$, les indices 1, 2, 3, 4 respectivement par 0, 1, 2, 3.

pages 67 et 68, remplacer $k^t imes$ et $C^t imes$ par $k^\times$ et $C^\times$ respectivement.

à propos des problèmes d'ARNOLD (Trivium)

Nous avons reçu une lettre de J. Sauloy (Toulouse), qui s'insurge contre le remplacement de "Makhnovsty" (troupes anarchistes en Ukraine pendant la guerre civile) par "brigands" dans la traduction du "Trivium" d'Arnold. C'était un essai de simplification, suggéré par l'auteur, et sans doute pas très astucieux. Dont acte, en ces temps où l'on assimile trop facilement tous les révolutionnaires des années 10–20 à des brigands.

à propos des problèmes des lecteurs

Nous avons reçu des réponses d'E. Bavencoffe (Rouen) et P. Dominici (Todi) au problème posé par P. Curtz. Que nos lecteurs se rassurent, la conjecture est démontrée. Nous publierons prochainement un article de P. Flajolet, X. Gourdon et B. Salvy expliquant une méthode pour étudier ce type de problèmes.

Une mise au point de J.J. RISLER à propos de l'interview d'ARNOLD

LES NOMBRES DE BETTI DES ENSEMBLES ALGÉBRIQUES RÉELS

L'interview du professeur V. I. Arnol'd dans le numéro 52 de la gazette met l'accent avec raison sur l'isolement des mathématiciens de l'ex URSS pendant de nombreuses années, qui a conduit parfois à laisser dans l'oubli et à redécouvrir des résultats déjà connus chez eux, mais souvent peu accessibles, pour des raisons en général linguistiques.

Je voudrais en donner ici un exemple, et ainsi contribuer à réparer une injustice de ce type, injustice dans laquelle d'ailleurs j'ai personellement eu ma part, avec le livre [B-R] : ce livre avait été au départ conçu comme un "handbook" et non comme un livre de recherche, et seules les références les plus "habituelles" (pour les auteurs) y ont été mentionnées, sans souci de priorité, certains mathématiciens ayant pu ainsi se sentir (légitimement) lésés.

J'ai décidé d'écrire cette note à la suite d'une conversation avec le professeur V.I. Arnol'd.

Il s'agit des résultats sur les bornes des

nombres de Betti des ensembles algébriques réels, généralement attribués à Milnor-Thom (1964), alors que l'essentiel avait été fait par O. A. Oleinik (à la suite de travaux en collaboration avec I. G. Petrovskii) en 1951, avec même des résultats parfois meilleurs.

Je vais donc décrire brièvement, dans une perspective historique, l'essentiel de ces résultats fondamentaux en géométrie algébrique réelle, en me limitant aux bornes sur les nombres de Betti des ensembles algébriques réels; pour une perspective plus large, cf. le survey de Arnol'd-Oleinik [A-O 79]. Je n'évoquerai pas ici le sujet beaucoup plus profond connu sous le nom de "16-ième problème de Hilbert", qui concerne le type topologique des plongements projectifs des variétées algébriques réelles : on pourra à ce sujet se reporter par exemple à l'interview de V. I. Arnol'd dans le numéro 52 de la gazette.

Fixons quelques notations. $A \subset \mathbf{R}^n$ désignera l'ensemble des zéros d'un polynôme

$$P(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$$

de degré d, $B \subset \mathbf{RP}^n$ l'ensemble des zéros du polynôme homogène de degré d associé à P. Si X est un espace topologique, $h_*(X)$ désignera la somme $\sum h_i(X, \mathbf{Z}_2)$ des nombres de Betti $h_i(X, \mathbf{Z}_2) = \dim H_i(X, \mathbf{Z}_2)$ à coefficients modulo 2.

1) Résultats de O. A. Oleinik ([O 51])

Utilisant des résultats publiés en commun avec Petrovskii ([P-O 49]), O. A. Oleinik montre que si B est lisse, on a

$$h_*(B) \leq (d-1)^n + n \quad \text{pour } d \text{ impair}$$

$$h_*(B) \leq \frac{(d-1)^{n+1} - d - 1}{d-2} + \frac{n(n-1)}{2} + 2n \quad \text{pour } d \text{ pair}$$

De plus, O. A. Oleinik estime séparément la somme des nombres de Betti pairs, et la somme des nombres de Betti impairs.

2) Résultats de Milnor ([Mi 64])

Milnor considère un ensemble $C \subset \mathbf{R}^n$, non nécessairement lisse, défini par un nombre quelconque d'équations $f_1 = \cdots = f_k = 0$ de degré $\leq d$. Il se ramène au cas d'un ensemble défini par une seule équation $F = 0$, avec $F \geq 0$ sur $\mathbf{R}^n$, en posant $F = f_1^2 + \cdots + f_k^2$. Il montre alors que $h_*(C) \leq d(2d-1)^n$.

Dans le cas projectif, Milnor montre que si $\tilde{C}$ est défini dans $\mathbf{RP}^n$ par k équations homogènes de degré $\leq d$, $h_*(\tilde{C}) \leq d(2d-1)^n$.

3) Résultats de R. Thom ([T 64]).

Dans le cas affine, lorsque $A \subset \mathbf{R}^n$ est lisse ou que son équation est partout ≥ 0, Thom montre que $h_*(A) \leq (d)^n$.

Dans le cas projectif, lorsque B est une hypersurface lisse, Thom montre que $h_*(B) \leq d\frac{d^n-1}{d-1}$.

Remarques

a) Dans le cas projectif, seul considéré par O. A. Oleinik, ses résultats (bien que nettement antérieurs à ceux de Milnor-Thom), peuvent être considérés comme "meilleurs", en ce sens que ses bornes sont plus faibles, bien que asymptotiquement comparables.

b) Milnor et Thom citent l'article de O. A. Oleinik, mais curieusement la référence à Oleinik a pratiquement disparu des articles occidentaux postérieurs (c'est par exemple le cas pour [B-R], et [B-L-R]!). D'autre part, Milnor et Thom ne donnent pas d'explication sur

la méthode de O. A. Oleinik; pourtant, les méthodes de démonstration sont très voisines, car les trois articles utilisent de manière essentielle la théorie de Morse. Milnor et Thom utilisent une fonction de Morse sur A (la restriction à A de la projection sur une droite dand le cas de Milnor), alors que Oleinik utilise le polynôme P lui-même (éventuellement légèrement perturbé), considéré comme fonction sur $\mathbf{R}^n$. Il faut noter que Milnor remarque (sans démonstration) que l'application de la théorie de Morse au polynôme P lui-même donnerait une borne meilleure, bien que asymptotiquement comparable à la sienne.

c) A la fin de son article, R. Thom suggère une autre méthode, la "théorie de Smith", pour borner $h_*(B)$. La théorie de Smith dit que $h_*(B) \leq h_*(B_{\mathbf{C}})$, où $B_{\mathbf{C}}$ est le complexifié de B (dans $\mathbf{CP}^n$). Or, dans le cas d'une hypersurface (ou d'une intersection complète) lisse projective, il existe des formules pour calculer $h_*(B_{\mathbf{C}})$. On trouve alors des bornes meilleures que par la théorie de Morse. Ces bornes sont d'ailleurs optimales comme l'a montré Viro ([V 79]). Cette remarque de Thom s'est par la suite avérée essentielle dans l'étude de la topologie des ensembles algébriques projectifs réels, puisque la théorie de Smith permet de généraliser en toutes dimensions les bornes de Harnack sur le nombre de composantes connexes d'une courbe algébrique réelle projective.

4) **Résultats récents**

La question a peu évolué depuis les résultats cités plus haut.

Citons les très beaux résultats de A.G. Khovanskii ([K]), où l'auteur borne la somme des nombres de Betti d'un ensemble algébrique réel uniquement en fonction du nombre de monômes distincts qui apparaissent dans les équations (et non plus en fonction des degrés). Khovanskii généralise aussi ces résultats à des ensembles définis par des classes de fonctions plus larges que les polynômes (les "polynômes exponentiels" par exemple).

Je remercie Olga Koutchmy qui m'a aimablement traduit l'article de O. A. Oleinik, ainsi que V.M. Kharlamov pour ses nombreuses remarques sur la première rédaction de cette note.

Bibliographie

[A-O 79] **V. I. Arnol'd, O. A. Oleinik**, *Topology of real Algebraic varieties*, Moscow Univ. Bull. 34 (1979), 5-17.

[B-R] **R. Benedetti, J.J. Risler** *Real Algabraic an Semi-algebraic sets*, Hermann, Paris (1990).

[B-L-R 91] **R. Benedetti, F. Loeser, J.J. Risler** *Bounding the Number of connected Components of a Real Algebraic Set*, Discr. and Comp. Geometry, 6, 1991, 191-209.

[Mi 64] **J. Milnor 64** *On the Betti numbers of real varieties*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 15 (1964), 275-280.

[K] **A. G. Khovanskii**, *Fewnomials*, Transl. of Math. Monographs, Am. Mat. Soc. (1991).

[O 51] **O. A. Oleinik**, *Bounds for Betti numbers of real algebraic hypersurfaces*, Mat. Sb., Vol. 28 (70) (1951), 635-640.

[P-O 49] **I. G. Petrovsky, O. A. Oleinik**, *Topology of real algebraic surfaces*, Izv. An. SSSR, Ser. Mat.,vol. 13 (1949), 389-402.

[T 64] **R. Thom**, *Sur l'homologie des variétés algébriques réelles*, Diff. and Comb. Topology, in honor of M. Morse, Princeton Un. Press (1965), 255-265.

[V 79] **O. Ya Viro**, *Construction of M-manifolds*, Uspekhi mat. nauk, vol. 34,4 (1979), p. 160.

La Gazette vous propose dans ce numéro deux articles de géométrie symplectique. L'article de Viterbo est une introduction à la topologie symplectique, discipline récente et en plein essor. L'article de Gotay et Isenberg avait été pensé à l'origine pour une revue de vulgarisation, il est donc assez discursif et abondamment illustré.

LA SYMPLECTIFICATION DE LA SCIENCE

(la géométrie symplectique aux fondements de la physique et des mathématiques)*

Mark J. GOTAY (Université de Hawaii, Honolulu)
et *James A. ISENBERG (University d'Oregon, Eugene)*

La physique, c'est la géométrie. C'est un des principes directeurs de la physique moderne. Il vient surtout d'Albert Einstein, dont la contribution principale — via la Relativité Générale — a été de voir la gravitation comme un effet de la courbure de l'espace-temps. La vision d'Einstein est remarquable de simplicité, a un pouvoir conceptuel important. Aussi bien, elle mène à une théorie de la gravitation qui s'accorde à merveille avec les expériences et observations. Un autre triomphe du point de vue géométrique est le développement dans les quatre dernières décennies des théories de "jauge" des processus physiques fondamentaux. Aujourd'hui, la géométrie ne se manifeste plus seulement dans la gravitation mais aussi dans l'électro-magnétisme et les forces nucléaires. Le travail continue activement vers l'ultime "grande unification", le mariage de *toutes* les interactions physiques entre elles aussi bien qu'avec la géométrie.

La géométrie de la relativité générale et des théories de jauge, connue sous le nom de *géométrie riemannienne* (d'après Riemann), est une généralisation courbe de l'ancienne et familière géométrie euclidienne. Mais il y a un autre type de géométrie, moins familière et moins intuitive, qui est encore plus profondément reliée à la physique, la *géométrie symplectique.* C'est la mathématique qui sous-tend la mécanique et qui se trouve donc à la base de la physique classique. Le comportement de systèmes et de phénomènes aussi divers que le mouvement d'une toupie, le magnétisme, la propagation des ondes, et jusqu'au champ gravitationnel lui-même peut être décrit et compris dans une grande mesure en termes de cette géométrie.

Ainsi la physique est de la géométrie — *géométrie symplectique.* C'est vrai tant au niveau théorique qu'au niveau pratique. La géométrie symplectique devient un outil indispensable pour comprendre le comportement à grande échelle de systèmes complexes comme les super-anneaux de

* Traduit de l'anglais par M. Audin.

collision, ou le guidage de la sonde "Galileo" vers Jupiter. Une partie de la compréhension, qui peut se perdre quand on étudie les équations différentielles compliquées qui gouvernent le mouvement d'un tel corps, peut être retrouvée par la géométrie symplectique. Une telle compréhension peut être cruciale : elle aurait pu sauver "Explorer I", un satellite de la fin des années 50 dont on a perdu le contrôle quand il s'est mis à tourner autour d'un axe dynamique instable.

En plus de son rôle important en physique, la géométrie symplectique joue un rôle de plus en plus important à l'intérieur des mathématiques : les idées symplectiques s'imposent un peu partout, mais en plus, il y a des indications que la plupart des mathématiques vont finalement être "symplectifiées." Nous sommes peut-être témoins des prémisses d'une révolution symplectique dans la science fondamentale. Déjà, il est évident que la géométrie symplectique est l'une des productions (et un lien entre) mathématique et physique les plus importantes de ce siècle.

Boîte 1 : **Un peu d'histoire**

Ménechme prévenait Alexandre : "Il n'y a pas de voie royale vers la géométrie". S'il n'y a pas de voie royale vers la géométrie symplectique, le chemin historique est certainement rempli de personnages royaux. En effet les racines de la géométrie symplectique se trouvent dans les travaux de beaucoup des plus célèbres mathématiciens et physiciens du dix-neuvième et du début du vingtième siècle : Lagrange, Poisson, Hamilton, Jacobi, Liouville, Hertz, Noether et Poincaré. En effet, ils ont fait des contributions durables à la science de la mécanique, source de la géométrie symplectique à laquelle elle est indissolublement liée. Comme c'est souvent le cas, les mathématiques doivent leur existence à la physique et c'est particulièrement vrai de la géométrie symplectique; en retour, la physique a été enrichie par les techniques et idées des mathématiques qu'elle a engendrées.

Même si la géométrie symplectique était déjà là depuis le commencement, la nature géométrique de la mécanique était obscurcie par un accent précocement mis sur les aspects analytiques et calculatoires de la théorie. Cet état d'esprit était tellement prédominant que Lagrange, dans la préface à sa monumentale Mécanique Analytique [1788], pouvait affirmer :

"On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme".

C'est seulement plus d'un siècle plus tard, bien après le travail de renouvellement des bases de Riemann en 1854, que l'on trouve Darboux en 1889 et Hertz en 1899 employant des idées géométriques en mécanique,

traitant le mouvement d'un système, aussi compliqué fût-il, comme celui d'une "particule" dans un certain espace courbe de grande dimension. L'arrêt de mort de l'ère analytique fut finalement rendu par Henri Poincaré en 1889, quand il réalisa que des techniques purement quantitatives ne pourraient suffir pour résoudre certains problèmes de mécanique céleste, notamment la stabilité du problème "à n corps" (par exemple le mouvement des planètes soumises à leurs attractions gravitationnelles mutuelles).

Cette impossibilité célèbre engendra la "période qualitative" en mécanique. Le premier théorème de géométrie symplectique en tant que telle, le "dernier théorème géométrique de Poincaré", qui, en 1912, prédit entre autres choses l'existence d'orbites périodiques dans le problème à n corps. Toutefois, la géométrisation de la mécanique avança lentement et longtemps les aspects symplectiques restèrent dans l'ombre. Encore à la fin des années 40, certains physiciens utilisaient les idées symplectiques superficiellement et précautionneusement (une étude contemporaine se trouve dans The Variational Principles of Mechanics de Cornelius Lanczos (University of Toronto Press, 1949)).

En même temps, des mathématiciens redécouvraient la géométrie symplectique sous des angles complètement différents, avec les recherches de Sophus Lie, Poincaré et Elie Cartan marquant la voie. Mais la géométrie symplectique comme discipline mathématique distincte, n'apparut pas réellement avant les années 40 avec les travaux mal-connus de Hwa-Chung Lee en Chine. En dix ans, on trouve des français comme Ehresmann, Lichnerowicz et Reeb posant les bases des développements futurs et des applications à la mécanique. Au milieu des années 60, la géométrie symplectique entrait dans le langage mathématique moderne et l'union symplectique de la géométrie et de la mécanique était définitivement accomplie. Une période de croissance exponentielle, alimentée surtout par des écoles américaines et russes de géomètres symplecticiens suivit et continue jusqu'à ce jour.

Une des raisons pour lesquelles la géométrie symplectique est relativement mal connue et a été si longue à se développer est son côté abstrus — et presque mystérieux. Pour la décrire, nous allons la comparer avec la géométrie euclidienne et sa généralisation riemannienne. L'essence de l'une comme de l'autre se trouve déjà dans l'exemple le plus simple, celui du plan $\mathbf{R}^2$.

Ainsi que l'indique sa racine grecque $\gamma\epsilon o\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha\epsilon$ ("mesure de la Terre") l'indique, la géométrie a son origine dans l'art du relevé et de l'arpentage. C'est pourquoi elle donne tant d'importance aux mesures des longueurs et des angles. Toute cette information est codée mathématiquement dans la

notion de base, la *métrique* g. C'est un objet qui associe un nombre à toute paire de vecteurs $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ du plan grâce à

$$g(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Elle est *symétrique* ($g(v, w) = g(w, v)$) et *non dégénérée* ($g(v, w) = 0$ pour tout vecteur w si et seulement si $v = 0$). On définit ensuite la longueur d'un vecteur v par $||v|| = \sqrt{g(v, v)}$; d'où Pythagore

$$||v||^2 = (v_1)^2 + (v_2)^2 .$$

De même l'angle θ des deux vecteurs v and w est donné par

$$\cos\theta = \frac{g(v, w)}{||v|| \cdot ||w||}.$$

En particulier, v fait un angle droit avec w si et seulement si $g(v, w) = 0$. La symétrie de g assure que l'angle de v et w est le même que celui de w et v, et la non dégénérescence garantit qu'aucun vecteur non nul n'est perpendiculaire à tous les vecteurs. La métrique contient donc beaucoup d'informations géométriques familières.

De même, la *forme symplectique standard* Ω sur $\mathbf{R}^2$ est un objet qui associe un nombre à deux vecteurs v et w; dans ce cas la formule est

$$\Omega(v, w) = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

Il faut remarquer à la fois l'ordre et le très important signe : à cause d'eux, Ω est *anti*symétrique : $\Omega(w, v) = -\Omega(v, w)$. Ceci veut dire que, contrairement à la métrique euclidienne g, Ω ne donne lieu à aucune notion d'angle ou de longueur. En fait, la "longueur symplectique" $||v|| = \sqrt{\Omega(v, v)}$ d'un vecteur v est toujours nulle, et pire : tout vecteur est désormais perpendiculaire à lui-même!

Mais la forme symplectique fait quelque chose d'intéressant : elle précise le concept d'"aire orientée". Considérons le parallélogramme formé par les vecteurs v et w; son aire est $|\Omega(v, w)|$. Le signe de $\Omega(v, w)$ se détermine en comparant l'orientation de $[v, w]$ avec l'orientation usuelle du plan : c'est positif si elles coïncident, négatif sinon. Changer l'ordre des vecteurs renverse donc l'orientation et le signe, d'où l'antisymétrie. De même que la métrique g, la forme symplectique Ω est non dégénérée : les seuls parallélogrammes d'aire nulle sont plats (v et w colinéaires).

Ainsi la géométrie symplectique est purement une géométrie des aires[1]. Nous verrons comment ceci va bien à la mécanique classique.

---

[1] Cette discussion pourrait laisser croire que la forme symplectique n'est autre que le produit vectoriel. C'est une coïncidence dans $\mathbf{R}^2$; en dimension supérieure, il n'y a pas de relation entre les deux.

Les géométries symplectique et euclidienne du plan $\mathbf{R}^2$ sont déjà intéressantes et non-triviales. Mais en physique, en mathématiques, et aussi bien dans la vie ordinaire, tout ne se passe pas dans un plan, il est nécessaire de généraliser. Il y a deux façons de rendre la géométrie plus utile (et fascinante!) : ajouter des dimensions, ou autoriser des espaces plus compliqués ("tordus"). Toutes deux sont indispensables : en fait l'univers physique (espace-temps) que nous habitons actuellement est un espace courbe de dimension 4. Discutons ces généralisations l'une après l'autre, à la fois pour les géométries euclidienne et symplectique.

Pour la géométrie euclidienne, la généralisation aux dimensions supérieures est directe. Il y a des droites et des angles entre elles dans l'espace $\mathbf{R}^3$ de tous les jours aussi bien que dans les plus abstraits $\mathbf{R}^n$. On peut donc construire pour chacun de ces espaces une métrique qui calcule les longueurs et les angles.

L'extension en dimension plus grande est plus compliquée dans le cas symplectique, l'aire est un concept de dimension 2. En fait, on ne peut définir un concept d'aire orientée dans un espace de dimension impaire comme $\mathbf{R}^3$, sans introduire des phénomènes parasites (dégénéréscences). D'autre part, on peut construire une forme symplectique sur $\mathbf{R}^4$ ainsi. On regarde $\mathbf{R}^4$ comme la somme $\mathbf{R}^2 \oplus \mathbf{R}^2$ de deux plans; alors l'aire orientée d'un parallélogramme de cet espace est la somme des aires orientées de ses ombres sur les deux plans. Cette approche fonctionne pour $\mathbf{R}^6$, $\mathbf{R}^8$, etc; seuls les espaces de dimension *paire* ont des structures symplectiques (nous en verrons une raison physique).

Considérons maintenant l'autre généralisation nécessaire. L'histoire est famillière dans le cas euclidien : au XIXème siècle, des géomètres comme Bolyai, Gauss et Lobatchevski se demandaient à quoi ressemblerait la géométrie si les "parallèles" ne restaient pas parallèles mais se mettaient à converger ou à diverger. Les triangles pourraient alors avoir des angles dont la somme soit plus, ou moins, que 180°, il pourrait exister des carrés hexagonaux (ou des hexagones dont tous les angles sont droits) et toutes les formules usuelles de la géométrie euclidienne seraient remplacées par des formules nouvelles et exotiques.

Boîte 2 : **Géométrie sur les variétés**

Les formules de mesures familières des géométries euclidienne et symplectique changent quand on remplace le plan plat $\mathbf{R}^2$ *par un espace "tordu" plus général, comme une sphère, ou une selle. Sur celles-ci, la sphère à courbure positive, comme la selle à courbure négative, dessinons un disque de rayon* r *comme sur la figure ci-dessous. Si* r *est assez petit, la*

circonférence C du disque est donnée par

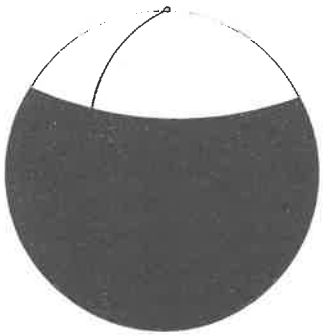
$$C = 2\pi\left(r - \frac{1}{6}\kappa r^3 + \cdots\right),$$

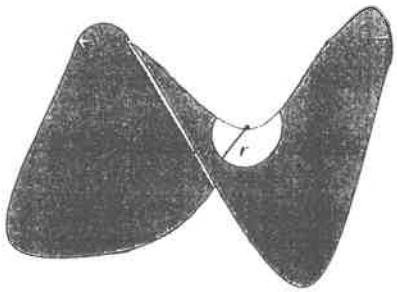
où κ est une constante qui vaut $+1$ pour la sphère et -1 pour la selle. C'est seulement pour $\kappa = 0$ qu'on retrouve la formule standard $C = 2\pi r$, ce qui montre que les géométries de la sphère et de la selle sont vraiment non euclidiennes.

De même les géométries symplectiques de la sphère et de la selle sont distinctes de celle du plan. Si on calcule l'aire A du disque, on trouve

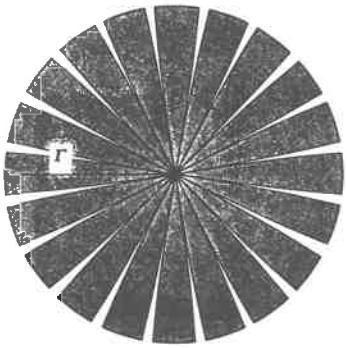
$$A = \pi\left(r^2 - \frac{1}{2}\kappa r^4 + \cdots\right),$$

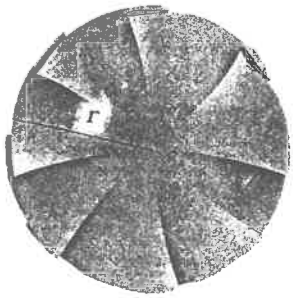
différente de la familière $A = \pi r^2$ quand $\kappa \neq 0$.





Remarquons que sur la sphère, la circonférence et l'aire sont plus petites que celles d'un disque de rayon r dans le plan. C'est encore plus facile à voir en découpant le disque et en l'aplatissant sur le plan; il se déchirerait comme on le voit ci-dessous à gauche. Si on fait la même chose pour le disque de la selle, il se replie sur lui-même comme on le voit ci-dessous à droite, ce qui explique pourquoi les valeurs de C et A sont plus grandes sur la selle que sur le plan.





Deux caractéristiques de ces géométries "non euclidiennes" ou "riemanniennes" sont particulièrement intéressantes : d'abord, la géométrie peut varier beaucoup d'un point à un autre. Ainsi la somme des angles des triangles peut être 200° en un certain point, tandis qu'elle vaut 165° ailleurs. Toute cette information peut toujours être obtenue à partir d'une métrique g, mais cette métrique doit pouvoir être différente en deux points différents. C'est maintenant une *fonction* métrique. La deuxième caractéristique est que les espaces sous-jacents à ces géométries non euclidiennes sont souvent structurellement tout à fait différents des espaces $\mathbf{R}^n$. L'espace peut, par exemple, se refermer sur lui-même de façon très variée. Ces espaces tordus, les *variétés*, sont des généralisations des surfaces, comme la sphère. Ils apparaissent naturellement dans des contextes divers, physiques ou mathématiques, et peuvent être très compliqués. On en trouvera des exemples dans les boîtes 2 et 5; on pourra consulter, dans *Scientific American* de juillet 1984, l'article "The Mathematics of Three-dimensional Manifolds," de W.P. Thurston et J.R. Weeks.

En gros, la géométrie riemannienne est la géométrie euclidienne étendue aux espaces courbes de n'importe quelle dimension. Elie Cartan a résumé l'essence de la géométrie riemannienne en observant : "Une variété riemannienne est réellement faite d'une infinité de petits morceaux d'espaces euclidiens". Sur chacun de ces petits morceaux (intuitivement, les espaces tangents de la variété) la métrique g a une valeur fixe. Ainsi il est possible de calculer la longueur d'une courbe en la décomposant en une chaine de "vecteurs tangents", puis calculant la longueur de chacun d'eux grâce à la métrique euclidienne de chaque espace tangent, enfin en faisant la somme.

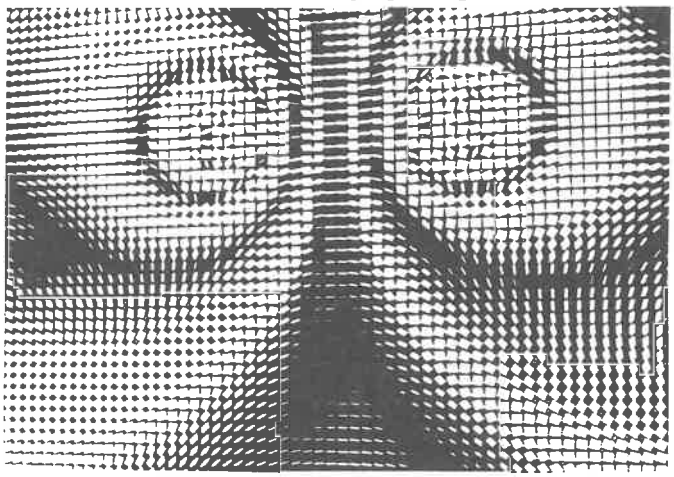
Des remarques analogues s'appliquent à la géométrie symplectique. On généralise le plan symplectique $\mathbf{R}^2$ en une variété de dimension paire et on autorise la géométrie à dépendre du point où on se trouve. Sur chaque espace tangent, la forme symplectique Ω définit une notion d'aire orientée. Ainsi par exemple il est possible de calculer l'aire orientée d'une surface habitant une variété symplectique en découpant cette surface en parallélogrammes infinitésimaux et en ajoutant leurs aires orientées. Comme en géométrie riemannienne, les règles habituelles de calcul ne resteront pas valables dans ce contexte général (voir la boîte 2).

C'est ici qu'apparait une différence cruciale entre géométries symplectique et riemannienne. On peut penser qu'on construit une géométrie riemannienne en recollant les géométries euclidiennes des espaces tangents. Le recollement peut se faire à peu près n'importe comment (mais de façon lisse). On pourrait essayer de construire une géométrie symplectique de façon analogue, mais il y a une contrainte sur les valeurs de la forme symplectique Ω ainsi construite en des points voisins : il faut que les aires orientées des surfaces bordant n'importe quelle région compacte de dimension 3 soient nulles (identité de

Jacobi)[2]. Cette condition est responsable de beaucoup des aspects les plus intéressants (parfois frustrants) de la géométrie symplectique.

Il n'y a aucune condition de recollement analogue en géométrie riemannienne, avec comme conséquence que *toute* variété admet des métriques riemanniennes. Mais l'identité de Jacobi ne peut pas toujours être satisfaite, ainsi il existe des variétés (de dimension paire) qui n'ont aucune forme symplectique (la sphère S^6 par exemple)[3]. Ainsi la géométrie symplectique est assez spéciale. En fait, on ne sait pas exactement quelles variétés peuvent être symplectiques, et les chercheurs commencent à peine à avancer dans la caractérisation et la classification de celles qui le peuvent. Dans cet ordre d'idées, mentionnons ici un résultat important, la découverte par M. Gromov d'une structure symplectique "exotique" sur $\mathbf{R}^4$. C'est une géométrie symplectique différente de celle, dite "standard", que nous avons décrite. Même si l'existence de cette géométrie exotique avait théoriquement été établie plusieurs années avant, c'est seulement en 1989 qu'une expression explicite pour la forme symplectique a été trouvée. Grâce à l'informatique graphique (boîte 3), on peut maintenant avoir une idée de la façon dont elle se comporte par rapport à la structure standard. Ce genre de question est au cœur de la *topologie symplectique*, une des parties les plus actives du sujet. Voir *The Symplectic Camel* par Ian Stewart (Nature, Septembre 1987) ainsi que l'article de Viterbo dans ce numéro.

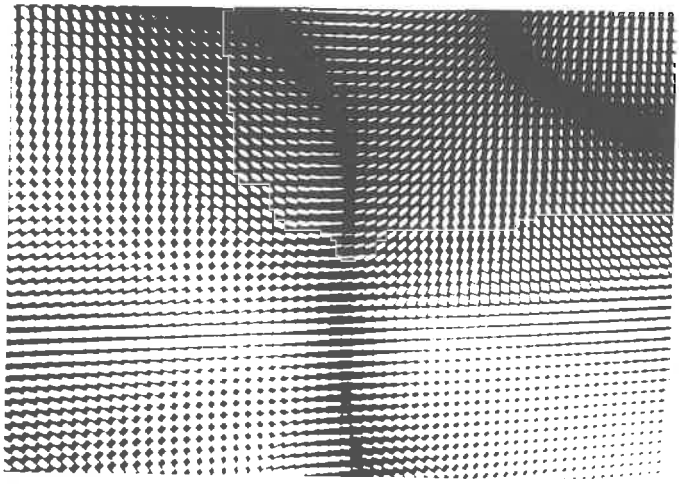
Boîte 3 : Géométries symplectiques sur $\mathbf{R}^4$



[2] Techniquement, l'identité de Jacobi impose à la 2-forme Ω d'être fermée : $d\Omega = 0$. Profitons-en pour remarquer que la différentielle extérieure est l'analogue pour les formes du crochet de Lie pour les champs de vecteurs.

[3] La sphère S^6 ne peut être symplectique pour des raisons cohomologiques. Mais une variété peut très bien ne pas être symplectique pour d'autres raisons. Par exemple, sur S^4, il n'est pas possible de définir une forme bilinéaire antisymétrique non dégénérée (fermée ou non), dans ce cas l'obstruction est donc plus "algébrique".

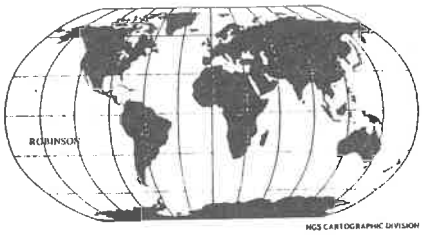
Pour avoir une idée de la structure symplectique exotique de $\mathbf{R}^4$, *il est utile de la comparer à la structure standard. Comme nous ne pouvons visualiser les objets de dimension 4, nous ne regarderons que la sphère unité centrée à l'origine de* $\mathbf{R}^4$. *En restriction à cette sphère, les structure standard et exotique définissent des plans symplectiques en chaque point. Certains de ces plans sont représentés sur ces photographies. Remarquez comme les plans de la structure symplectique exotique (ci-dessus) sont inclinés par rapport à ceux de la structure standard (ci-dessous). (Les images nous ont été fournies par Larry Bates et Charles Herr, Universités de Calgary et d'Alberta, que nous remercions.)*

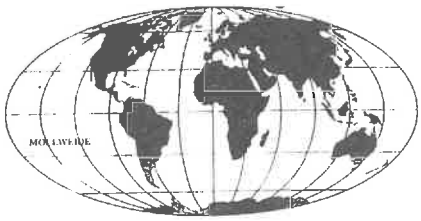


La conséquence la plus importante de l'identité de Jacobi est que les géométries symplectiques sont "plates". Ce qui veut dire que toutes les variétés symplectiques de la même dimension sont *localement* indistingables; on ne peut les reconnaître en les regardant à travers une loupe. C'est seulement globalement, en regardant l'espace tout entier, que des différences entre variétés symplectiques émergent. [C'est en partie pour ça qu'il est si difficile de mettre la main sur la structure symplectique exotique de $\mathbf{R}^4$ — des mesures locales ne peuvent la différencier de la structure standard. En particulier, nous insistons sur le fait que la torsion visible sur la figure dans la boîte 3 est un phénomène global, qui ne peut être détecté localement.] Ceci éclaire mieux comment les géométries symplectique et riemannienne diffèrent, puisque la dernière n'a pas cette propriété; en fait, les géométries riemanniennes sont en général courbes. Aucune partie d'une sphère, aussi petite soit-elle, ne peut être appliquée sur le plan sans distorsion des *formes* (longueurs et angles). Mais il est possible d'appliquer une partie du globe sur le plan de façon que les *tailles relatives* (aires) soient conservées, un fait familier aux cartographes. Insistons toutefois sur le fait

qu'être plat n'empêche pas d'avoir une structure globale compliquée : un cylindre circulaire est plat en géométrie symplectique comme en géométrie riemannienne, mais il n'est pas plan.

Boîte 4 : **Cartographie**





Une carte tente de représenter la surface d'une sphère sur un plan. Toute carte distord peu ou prou les formes (géométrie riemannienne), même celle considérée habituellement comme la "meilleure", la projection de Robinson (1963) à gauche sur la figure. D'autre part, on peut tracer des cartes sans distorsion de taille (géométrie symplectique). Une telle carte est la projection elliptique d'aire égale de Mollweide (1805) sur la figure de droite. Ce phénomène reflète la platitude des variétés symplectiques.

La géométrie symplectique est aussi tout à fait "flexible", au moins comparée à la géométrie riemannienne. Pour l'apprécier, utilisons la notion de *symétrie*. Considérons la sphère ronde. Si on la fait tourner autour d'un axe passant par le centre, sa géométrie riemannienne ne change pas. Ainsi les rotations sont des symétries riemanniennes, c'est-à-dire des transformations

qui préservent les longueurs et les angles. Si au contraire, on la fait tourner différentiablement, un point pouvant tourner moins vite qu'un point voisin, les angles et les longueurs sont modifiés et la géométrie change. On voit qu'une sphère a un nombre limité de symétries, un ellipsoïde en a encore moins, et la plupart des variétés riemanniennes n'ont pas du tout de symétries. A l'opposé, chaque variété symplectique a un nombre énorme de symétries (transformations préservant les aires orientées). En fait l'ensemble des symétries d'une variété symplectique est toujours de dimension infinie[4] ! Donc on peut déformer les variétés symplectiques beaucoup plus que leurs contre parties riemanniennes; c'est que les premières sont plates et donc beaucoup moins rigides que les dernières.

Ces observations donnent une idée du caractère de la géométrie symplectique. Mais la géométrie symplectique n'est pas seulement intéressante en elle-même; dans les vingt dernières années il y a eu beaucoup d'applications de techniques symplectiques à d'autres branches des mathématiques. Probablement la plus importante a été en théorie des représentations, culminant en ce qu'on appelle maintenant la "quantification géométrique" (nous rencontrerons cette théorie en physique aussi). Des branches variées de l'analyse, de la théorie des nombres et récemment même de la théorie des nœuds ont aussi profité des idées symplectiques. Un développement particulièrement intéressant est en théorie des catastrophes, contexte dans lequel la géométrie symplectique a été utilisée pour élucider plusieurs mystères de l'optique des lasers. Le livre *Catastrophe Theory* de V.I. Arnold (Springer-Verlag, 1986) présente une version lisible de ces résultats.

Potentiellement encore plus capitale est la philosophie de la "symplectification" évoquée récemment par Arnold. Il cite des faits qui indiquent que beaucoup d'idées et de constructions mathématiques "ordinaires" ont non seulement des analogues dans le domaine de la géométrie symplectique mais y trouvent en fait leurs fondements (il est certain que l'assertion correspondante est vraie en physique classique). Ceci suggère qu'il serait possible de reformuler complètement une grande partie des mathématiques en termes symplectiques. Arnold a caractérisé ce processus de *symplectification* comme "... un des petits nombres d'opérations du niveau le plus élevé, qui agit... sur toutes les mathématiques à la fois". Cela pourrait mener à une révolution comparable à l'invention des nombres complexes! Dans les termes de Stewart :

"Les mathématiciens ont dû se sentir de la même façon quand ils ont découvert que les nombres complexes étaient plus qu'un nouveau gadget :

---

[4] L'ensemble des symétries d'une structure géométrique sur une variété muni de la composition forme un groupe (de Lie). Il est bien connu que le groupe d'*isométries* d'une métrique riemannienne est toujours de dimension finie. Mais en géométrie symplectique, l'objet analogue — le groupe des *symplectomorphismes* — est énorme (en fait, son algèbre de Lie s'identifie à l'ensemble de toutes les 1-formes fermées sur la variété en question).

toutes les idées des mathématiques, de la géométrie des courbes à l'analyse des équations aux dérivées partielles, étaient mûres pour la complexification. Les mathématiques ont explosé brutalement."

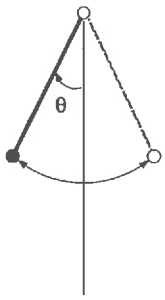
La géométrie symplectique pourrait bien illuminer le ciel mathématique une fois de plus. Mais c'est pour le futur; parlons maintenant de son rôle en physique.

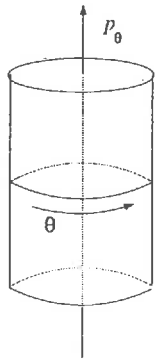
La géométrie symplectique a été "inventée" par Lagrange en 1808 au cours de son étude fondamentale de la mécanique céleste. Elle est apparu d'abord comme une technique analytique grâce à laquelle on pouvait simplifier l'écriture des équations du mouvement planétaire (voir dans A. Weinstein, *Lectures on Symplectic Manifolds* (American Mathematical Society, 1977), une belle discussion mathématique de la géométrie symplectique comme des travaux de Lagrange). Ces techniques furent substanciellement développées et amplifiées par Hamilton, qui a montré que les découvertes de Lagrange s'appliquaient à la mécanique dans son ensemble. La collection d'idées et de procédures de calcul qui en a résulté est connue sous le nom de *mécanique hamiltonienne*. Cette théorie a été ensuite étendue et raffinée par Jacobi, Liouville et Poisson, entre autres, et forme maintenant la base structurelle d'essentiellement toute la physique classique.

Le paradigme de la mécanique hamiltonienne est la dynamique des particules, l'étude du mouvement d'un objet soumis à des forces variées, comme un électron dans les champs électromagnétiques à l'intérieur d'un tube cathodique. Pour déterminer la trajectoire qu'un tel objet va suivre, il ne suffit pas de connaître sa position initiale; on doit aussi connaître sa vitesse initiale, ou, ce qui revient au même, son moment initial. C'est alors seulement qu'on peut "prédire l'avenir", c'est-à-dire deviner l'emplacement et les mouvements de l'objet à toutes les dates futures.

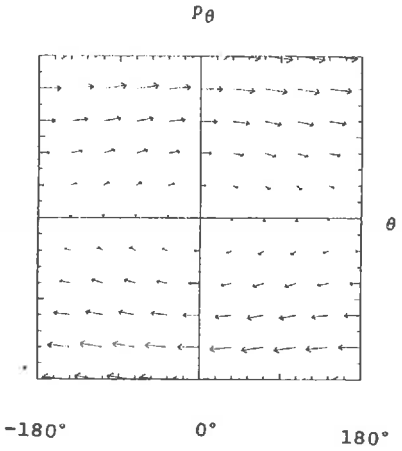
Ceci amène à étudier la dynamique des particules sur un espace, l'*espace des phases*, constitué des positions ou "configurations" q possibles et des vitesses ou "moments" possibles p de la particule. Par exemple, l'espace des phases d'une particule dans l'espace $\mathbf{R}^3$ de tous les jours est $\mathbf{R}^6$, dont les points sont repérés par les six quantités (x, y, z, p_x, p_y, p_z) donnant les trois composantes des position et moment. De même le pendule plan a un espace de phases qui est un cylindre circulaire paramétré par (θ, p_θ), où θ est la position angulaire et p_θ le moment angulaire du poids. D'autres corps comme les particules relativistes à spin ou les solides couplés ont des espaces de phases plus compliqués.

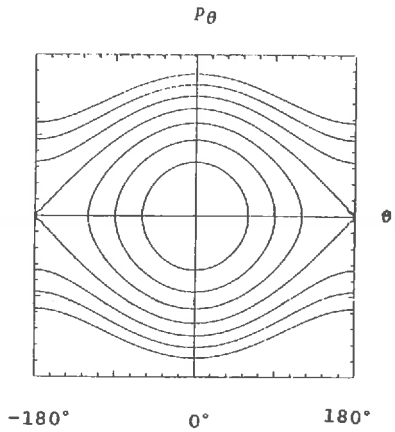
Boîte 5 : Le flot dans l'espace de phases du pendule





Un pendule plan est un poids accroché au bout d'un fil léger, libre de se balancer dans un plan donné. Les positions possibles du poids sont paramétrées par l'angle θ, avec $-180° \leq \theta \leq 180°$. Le moment angulaire correspondant p_θ peut prendre n'importe quelle valeur. L'espace de phases du pendule plan est donc un cylindre circulaire, avec θ parcourant la base dans le sens contraire des aiguilles d'une montre et p_θ parcourant l'axe. Comme 180° et −180° représentent la même position ("en haut"), ces configurations sont identifiées, d'où le cercle.





Les forces qui agissent sur le poids sont la gravitation et la tension du fil. Le schéma des vecteurs de flot et des trajectoires dynamiques qu'ils engendrent est représenté ci-dessus. Pour rendre les choses plus claires, nous avons "déroulé" l'espace de phases pour en faire une bande rectangulaire; les deux droites verticales correspondant à $\theta = \pm 180°$ doivent

être identifiées. Le point au centre représente un équilibre stable, le pendule immobile pendant verticalement. Les ellipses entourant ce point correspondent aux balancement du pendule. Leurs amplitudes croissent jusqu'à ce que le point atteigne "juste" le sommet. Ici on a un équilibre instable (en $\theta = \pm 180°$, $p_\theta = 0$), avec le pendule stationnaire pointant vers le haut. Les autres trajectoires ondulées représentent des mouvements où le poids fait des tours complets dans le sens des aiguilles d'une montre (en haut) ou dans l'autre (en bas).

L'idée sous-jacente est que lorsque l'on connait l'*état* initial (q, p) d'une particule dans l'espace des phases et les forces auxquelles elle est soumise, on a assez d'informations pour décrire le mouvement de la particule en fonction du temps. Ceci peut être visualisé très clairement (Boîte 5). Spécifier le réseau des forces, c'est associer une flèche (le vecteur de "flot") à chaque point de l'espace des phases. Ainsi une particule partant d'un état donné se meut le long d'une unique trajectoire ("ligne de flot") comme les flèches l'indiquent, les trajectoires remplissant l'espace des phases et deux d'entre elles ne se coupant jamais. Si on travaillait dans l'espace des configurations (les q) au lieu de l'espace des phases (les q et les p), on n'aurait pas une description aussi élégante et ordonnée du mouvement de la particule. Ainsi l'espace de phases est la bonne scène où se joue la dynamique.

L'image du mouvement de la particule que nous avons esquissée est analogue (au sens figuré comme au sens littéral) au flot d'un fluide. En fait la dynamique est en un sens mathématique précis, le flot d'un fluide dans un espace de phases. Ce "flot de phase" a toutefois une propriété assez spéciale : il *préserve les aires*, en d'autres termes les aires des nappes de dimension 2 du fluide ne sont pas modifiées quand elles coulent le long du flot. Comme on peut considérer le flot d'un fluide sur une variété comme une transformation (dépendant du temps) sur cette variété, on conclut que la dynamique est une transformation dépendant du temps de l'espace des phases qui préserve les aires. Et, là où il y a de l'aire, il doit y avoir des formes symplectiques !

Ces remarques constituent le lien fondamental entre mécanique et géométrie : *les espaces de phases de la dynamique des particules sont des variétés symplectiques et la dynamique correspond à une transformation symplectique dépendant du temps*. Ces faits ont des conséquences importantes pour la physique. En fait, c'est largement à la présence de la structure symplectique sur l'espace de phases qu'est dû le gigantesque succès de la description du monde physique par la mécanique hamiltonienne.

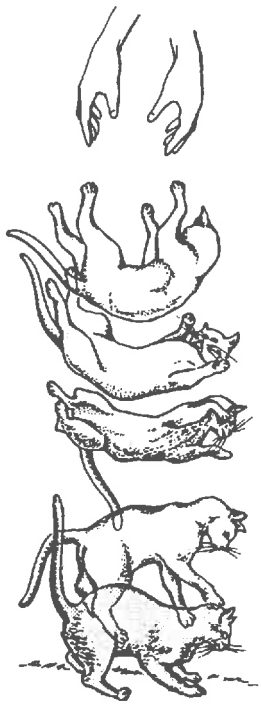
Que fait précisément la forme symplectique *physiquement*? Deux choses reliées, d'abord. Premièrement, elle montre comment les positions q et moments p généralisés s'organisent entre eux. Pour un système compliqué comme la sonde Galileo-Jupiter, où il y a des centaines de variables de configuration q et de moment p, il est crucial de relier le bon moment à la bonne position. Rappelons-nous maintennat qu'une forme symplectique sert, mathématiquement, à décomposer un espace de dimension $2n$ en une somme de n plans transverses. Dans un sens, elle rassemble les $2n$ directions indépendantes $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ de l'espace de phases en paires[5] : $(q_1, p_1), \ldots, (q_n, p_n)$. Ceci explique du point de vue physique pourquoi les variétés symplectiques sont de dimension paire : chaque position doit être accouplée avec un moment. [Nous verrons que cet accouplement a des conséquences cruciales en mécanique quantique.] Deuxièmement la forme symplectique nous dit exactement comment convertir les forces agissant sur le système en vecteurs de flot sur l'espace de phases, nous autorisant ainsi à calculer ces flots et donc les mouvement possibles du système. En bref, elle convertit des données *dynamiques* — sur les forces — en informations *cinématiques* — sur le mouvement du système. Pour en savoir plus sur le "pourquoi" et le "comment" de la géométrie symplectique en physique, nous renvoyons les lecteurs aux livres *Foundations of Mechanics*, d'Abraham et Marsden (Benjamin-Cummings, deuxième édition, 1978), et *Symplectic Techniques in Physics*, de Guillemin et Sternberg (Cambridge University Press, deuxième édition, 1989).

En plus de ces premiers devoirs, les structures symplectiques s'exploitent dans des buts variés en mécanique. Elles sont un moyen efficace de relier les symétries (de translation, rotationnelles, "internes" ou de jauge, etc) des systèmes physiques à des quantités (moment-énergie, moment angulaire, charge électrique, etc) qui sont conservées au cours du temps. De telles "lois de conservation" sont très utiles dans l'analyse générale du comportement des systèmes, particulièrement en dynamique non linéaire, où il est souvent impossible d'obtenir des résultats quantitatifs exacts. Les méthodes symplectiques sont aussi cruciales pour l'étude de problèmes de stabilité (par exemple, les petites oscillations de l'antenne de Galileo peuvent-elles croître de façon incontrolée?), et ont beaucoup amélioré nos possibilités de modéliser et prévoir le comportement dynamique de systèmes mécaniques compliqués. Une belle application de la géométrie symplectique (utilisant beaucoup de ces idées) est la question du chat qui atterrit toujours sur ses pattes. Il se trouve que le chat y arrive en se comportant comme une particule dans un champ de Yang-Mills!

---

[5] C'est particulièrement évident pour l'écriture locale de la forme symplectique $\Omega = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ où $\wedge$ est le produit extérieur des formes.

Boîte 6 : **Le chat de Yang-Mills**



Un chat qui tombe se modélise mécaniquement par deux cylindres reliés par un joint à rotule. En termes de théorie du contrôle, le problème est de manœuvrer ce système, en faisant tourner les deux cylindres autour de leurs axes et entre eux, pour arriver à l'orientation désirée de façon optimale. La géométrie symplectique fournit une description succinte de ce problème et facilite grandement sa résolution. En effet, le chat atterrit sur ses pieds en résolvant les équations de Yang-Mills! Contrairement à un conte de bonne fame la queue du chat ne sert à rien : les chats de l'île de Man atterrissent sur leurs pattes comme les autres (d'aucuns prétendent que cette dernière assertion a été vérifiée expérimentalement).

Ainsi la forme symplectique est un ingrédient essentiel en mécanique classique, théoriquement et pratiquement. Et récemment, dans une formulation due à Sternberg, elle a pris un rôle encore plus transcendent. Dans l'approche de Sternberg, les forces elles-mêmes sont incorporées dans la

forme symplectique, qui est maintenant *tout ce qui reste!* Le cercle se referme : la géométrie symplectique est la mathématique de la mécanique, et la mécanique hamiltonienne n'est rien d'autre que la géométrie symplectique de l'espace des phases.

Si la géométrie symplectique est bien visible dans le contexte de la mécanique, elle s'étend bien au delà de cette petite branche de la physique. En fait, la plupart des systèmes classiques, aussi complexes soient-ils, s'étudient par des techniques hamiltoniennes. Ceci inclut des modèles de la formation des galaxies, les circuits électriques et les modèles du noyau. Si on autorise des espaces de phases de dimension infinie, on peut aussi étudier ainsi les champs classiques. De cette façon, on a appris beaucoup sur la gravitation et sur d'autres champs, sur la théorie de l'élasticité, les plasmas et même la corrosion. Plusieurs proches parentes de la géométrie symplectique sont aussi très importantes. L'une est la *géométrie de contact*, une extension de la géométrie symplectique aux espaces de dimension *impaire*. Elle joue un rôle en optique, analogue à celui joué par la géométrie symplectique en mécanique. [C'est pour cette raison que la mécanique et l'optique ont eu des développements parallèles; ce sont des cousines germaines mathématiques.]

Dans notre présentation, jusque là, nous n'avons considéré que la physique classique. Une des grandes leçons du vingtième siècle est que la description de la plupart (sinon de tous) les systèmes physiques doit être par la *mécanique quantique*. Les différences entre approches classique et quantique sont tant prononcées que profondes, mais ça nous entrainerait un peu loin de les discuter en détail. Nous nous limiterons donc à quelques observations de base (il y a un joli compte-rendu de certains des aspects les plus intéressants de la théorie quantique dans le livre de Feynman *QED* (Princeton University Press, 1985)).

Le point crucial est que, si la physique classique est complètement déterministe, la mécanique quantique est, par essence, probabiliste. Une conséquence est qu'alors qu'un observateur classique peut (en principe) mesurer les quantités physiques avec n'importe quelle précision, un observateur du monde de la mécanique quantique ne le peut pas : il y a des limitations *inévitables* à la précision à laquelle certaines paires de quantités peuvent être mesurées simultanément. C'est le contenu du célèbre "principe d'incertitude" d'Heisenberg. Par exemple une mesure simultanée de la position q et du moment p d'un électron sera "incertaine" pour q comme pour p, avec des erreurs Δq et Δp satisfaisant l'inégalité

$$\Delta q \Delta p \geq h/4\pi,$$

où h est la constante de Planck $h = 6.6246 \times 10^{-34}$ Joules-secondes. Comme elle est très petite, cette incertitude est négligeable dans la plupart des systèmes macroscopiques. Ce n'est pas le cas pour les systèmes microscopiques.

La géométrie symplectique joue-t-elle en physique quantique le rôle qu'elle joue en physique classique? On pourrait croire que non. D'abord les états de la mécanique quantique ne se représentent pas par les points de l'espace de phases classique. L'espace des états est plutôt un espace de dimension infinie, un *espace de Hilbert*. De plus celui-ci est relié à l'espace de configurations classique (l'espace de toutes positions q) du système et non à son espace de phases (l'espace des moments p et des positions q). L'objet symplectique fondamental de la physique classique, l'espace des phases, a donc "disparu" dans la théorie quantique. Toutefois, comme le sourire du chat du Cheshire, des restes de géométrie symplectique subsistent. L'un d'eux apparait dans la formule ci-dessus (principe d'incertitude) : l'accouplement symplectique d'une position et du moment correspondant. En fait, il n'y a pas de principe d'incertitude pour des quantités qui ne sont pas symplectiquement apariées. D'autres reliquats sont les "lois de quantification de Bohr-Sommerfeld-Maslov", qui expliquent pourquoi certains paramètres physiques comme la charge électrique et le spin des particules élémentaires prennent seulement des valeurs discrètes.

Mais la géométrie symplectique est intimement impliquée dans la transition de la description classique d'un système à sa version quantique, c'est-à-dire dans la *quantification*. Pour mesurer la signification de ceci, considérons la relation entre les descriptions classique et quantique d'un système. *En principe*, comme nous l'avons déjà signalé, tout système physique est, par nature, de la mécanique quantique. Toutefois, pour la plupart des systèmes assez macroscopiques, la description quantique a une unique "limite classique" — une description classique qui approxime, dans un sens approprié, la description quantique. *En pratique*, d'autre part, on comprend presque toujours mieux, au départ, la limite classique que la description quantique complète. [Il y a deux raisons pour ça : le bon sens de tous les jours est classique, aussi nous pensons en termes classiques, et aussi la description classique est plus simple que la quantique.] Ainsi les physiciens ont plus souvent à construire une formulation quantique connaissant sa limite classique que l'inverse. Autrement dit, il peut arriver de devoir "quantifier" un système classique.

Malheureusement, ce n'est pas une opération évidente. Une des difficultés est que, si la limite classique d'un système est unique (quand elle existe), il y a toujours beaucoup de systèmes quantiques différents qui ont la *même* limite classique. En fait on a un théorème d'interdiction, qui affirme qu'il est *impossible* de trouver un schéma de quantification qui s'applique à *tous* les systèmes classiques.

Malgré ces obstacles, les efforts pour quantifier systématiquement telle ou telle famille limitée de systèmes persistent. Une des procédures les plus fructueuses est la *quantification géométrique*. Reposant sur les travaux de

Kostant au M.I.T. et de Souriau à Marseille, la quantification géométrique est une belle application de certaines des idées les plus sophistiquées de la géométrie symplectique.

L'idée qui la sous-tend est d'utiliser la structure symplectique de l'espace de phases classique pour construire l'espace de Hilbert quantique. L'étape clé est la *polarisation* de l'espace de phases; c'est-à-dire la séparation invariante des positions q et des moments p. Cette distinction est utilisée pour récupérer un espace de configuration, dont nous avons signalé qu'il était relié à l'espace de Hilbert quantique. Une fois l'espace de phases polarisé, on peut créer une théorie quantique du système.

Alors que la quantification géométrique est un outil utile, elle peut être aussi bien difficile que subtile. Par exemple, on a en général quelque liberté dans le choix de la polarisation, ceci reflétant l'existence de systèmes quantiques différents avec la même limite classique. Ainsi la théorie peut produire des systèmes quantiques non équivalents et il faut d'ordinaire recourir à l'expérience pour choisir le bon (physiquement). A l'extrême opposé, il existe des variétés symplectiques qui ne peuvent être polarisées. On ne sait pas s'il existe des systèmes physiques authentiques dont les espaces de phases ont cette propriété : dans tous les cas, ce qu'il faut faire de ces variétés symplectiques "purement classiques" n'est pas clair.

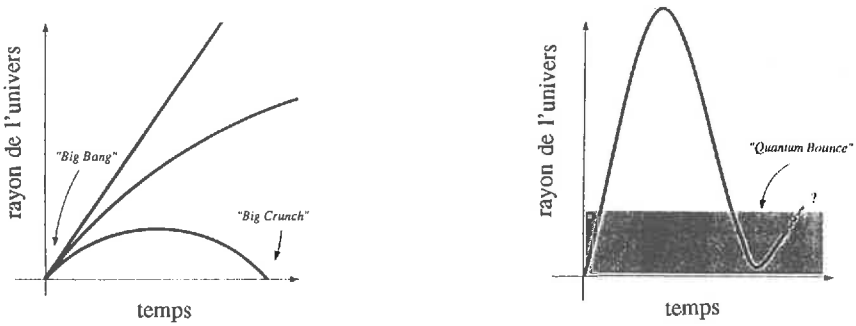
Un domaine de la physique où la quantification géométrique pourrait jouer un rôle intéressant est la relativité générale. La physique classique du champ de gravitation est bien comprise dans les termes de la théorie d'Einstein. Maintenant, de toutes les interactions fondamentales de la nature, la gravitation est la seule qui n'a pas une description quantique consistante. C'est une des énigmes majeures de la physique théorique, et c'est pourquoi la "gravitation quantique" est un domaine de recherche très actif.

Une des raisons qui font que le champ de gravitation résiste si fortement à la quantification est que son espace de phases est non seulement de dimension infinie, mais en plus pas du tout linéaire. Pour accéder à un peu de connaissance en gravitation quantique, un stratagème habituel est de "congeler" toutes les dimensions sauf un nombre fini en demandant que le champ de gravitation soit constant dans l'espace (mais en l'autorisant à dépendre du temps). On construit ainsi des modèles (relativement) utilisables de l'Univers et de son champ de gravitation appelés *cosmologies homogènes*. Elles constituent des "laboratoires" pour étudier la quantification de la gravitation et la quantification géométrique est très utile dans ces "expériences".

Une des expériences conduites par les auteurs dans ce laboratoire concerne le problème fascinant des *singularités* gravitationnelles. Ce sont des phases gravitationnellement très violentes, incroyablement denses, à travers lesquelles l'univers doit passer à certains moments de son évolution,

d'après la relativité générale. Une telle singularité, le "Big Bang", a presque certainement déjà existé, au moment de la création. Y aura-t-il une autre singularité finale, le "Big Crunch"? Les données de l'observation ne permettent pas de conclure pour le moment, mais si l'attraction gravitationnelle était assez forte pour vaincre l'expansion actuelle de l'univers, alors il semble que l'univers devrait s'effondrer, implacablement, en une fin ardente.

Boîte 7 : Le sort de l'univers



La théorie classique de la gravitation d'Einstein prédit que l'univers a évolué à partir d'une singularité initiale, le Big Bang. Mais ce que deviendra l'univers, nul ne le sait; les scénarios standard (pour les modèles homogènes et isotropes) sont esquissés ci-dessus à gauche. L'univers est actuellement en expansion et son sort dépend de la vitesse à laquelle la gravitation ralentit cette expansion. Ceci dépend enfin crucialement de la densité de masse moyenne ρ de l'univers. La valeur critique de ρ est $\rho_c \approx 10^{-30} gm/cm^3$. Les modèles avec $\rho = \rho_c$ échapperont de justesse à l'effondrement gravitationnel (courbe du milieu). Dans les modèles avec $\rho > \rho_c$ (comme la troisième courbe), l'attraction gravitationnelle vainc l'expansion et le modèle s'effondre vers une singularité finale, le Big Crunch. Des observations indiquent que $\rho \approx 10^{-31}$, mais la fin est loin d'être claire.

Les cosmologues se sont demandés si les effets quantiques, qui seront d'importance primordiale quand l'univers aura atteint la taille sous-atomique (région ombrée de la figure de droite), pourront empêcher l'effondrement final. On pourrait concevoir un rebondissement vers une nouvelle phase d'expansion.

Cette prédiction est basée sur la relativité générale *classique*. Toutefois, quand la gravitation comprime l'univers pour le ramener à des dimensions microscopiques, des effets *quantiques* doivent prédominer, et il y a eu beaucoup de spéculations disant que ces effets pourraient ralentir, voire arrêter l'effondrement. Les auteurs ont utilisé la quantification géométrique pour étudier cette possibilité dans le cadre des cosmologies homogènes. Si la conclusion est loin d'être définitive, il y a (malheureusement!) des indications que les effets quantiques *ne pourront* empêcher l'effondrement catastrophique final de l'univers en une singularité.

Dans toute cette discussion, nous avons laissé une question importante sans réponse : d'où vient le mot "symplectique"? Du grec *συμπλεκτικύσ*, qui donne en latin "complexe". L'utilisation de ce mot en mathématiques est due à Hermann Weyl qui, dans un effort pour éviter une confusion sémantique, a rebaptisé l'obscur (à l'époque) "groupe du complexe linéaire" le "groupe symplectique". Mais, quelle que soit son étymologie, l'adjectif "symplectique" signifie "tressés ensemble", ou "tissés". C'est merveilleusement adapté, car c'est cet enchevêtrement — déjà évident dans l'expression de la forme Ω — qui caractérise le mieux, et même est l'essence de la géométrie symplectique comme de la mécanique hamiltonienne. Et c'est le tressage complexe des mathématiques et de la physique qui donne à la géométrie symplectique sa puissance et ses espoirs. ■

LA LEÇON DE GÉOMÉTRIE A L'ORAL DE L'AGRÉGATION

A. AVEZ

1992, 210 pages, 160 F*

L'oral de l'agrégation de mathématiques est constitué de deux leçons, l'une d'elle porte sur le programme d'algèbre et de géométrie. L'épreuve orale consiste à présenter un plan de la leçon, à répondre aux questions posées par le jury puis à exposer en détail l'un des trois points précis du plan que le candidat aura proposés au choix du jury. Chaque chapitre est autonome, donne un plan détaillé d'une leçon et est assorti de remarques qui permettent de répondre aux questions du jury. Ce plan est suivi de l'exposé détaillé de questions choisies pour leur pertinence et leur élégance, voire leur originalité, puis par une bibliographie courte mais suffisante.

CONTENU : Index des notations - Conseils - Nombres complexes en géométrie - Groupes et géométrie - Géométrie linéaire. Géométrie affine - Formes quadratiques. Formes hermitiennes - Géométrie métrique - Géométrie différentielle - Bibliographie.

* Prix public TTC au 01.06.92

MASSON

– UNE INTRODUCTION A LA TOPOLOGIE SYMPLECTIQUE –

Claude VITERBO (Orsay)

Le but de cet article est de présenter quelques résultats et méthodes de topologie symplectique, ainsi que quelques problèmes ouverts. Après avoir donné les définitions de base, nous exposons les premières propriétés de géométrie et topologie symplectiques, ainsi que de dynamique hamiltonienne. Puis nous présentons brièvement les outils utilisés, qui sont de deux sortes : ceux apparentés à l'analyse complexe, et les méthodes variationelles appliquées aux systèmes hamiltoniens. Nous expliquons ensuite comment ces méthodes permettent d'obtenir les résultats énoncés. J'ai malheureusement dû, faute de place, passer de nombreux aspects sous silence, en particulier, l'homologie de Floer et les résultats de McDuff et Eliashberg sur les variétés symplectiques et de contact en dimension 3 et 4. Enfin, j'espère ne pas rebuter le lecteur en commençant cet article par une interprétation physique d'un résultat de Gromov, et que l'on y verra autre chose qu'un sacrifice à la mode du temps!

0. Un principe d'incertitude en mécanique classique!

Le principe d'incertitude de Heisenberg affirme que si l'on mesure simultanément la position q et la quantité de mouvement $p = mv$ d'une particule, celles-ci ne peuvent être connues qu'avec une précision Δq et Δp telles que l'on ait toujours :

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \hbar/2. \tag{1}$$

Cette inégalité est physiquement intrinsèque, et reste vérifiée même si l'on tente de faire des mesures indirectes, ou si q, et p sont deux *quantités conjuguées* au sens de la mécanique classique (i.e le crochet de Poisson de q et p vaut 1), mais il est essentiel que les deux quantités soient mesurées *simultanément*. Mathématiquement, ce principe peut s'interpréter en disant qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être toutes les deux trop bien localisées[1].

On affirme généralement qu'un tel énoncé n'a pas d'équivalent en mécanique classique ce que nous allons essayer d'infirmer partiellement, en utilisant un résultat de topologie symplectique dû à Gromov.

Considérons un système de N particules (par exemple des corps célestes), soumises à des interactions dépendant d'un potentiel. Supposons que l'on

[1] Ou plus généralement que si A et B sont des opérateurs hermitiens sur L^2, on a $\frac{1}{2}||\langle[A,B]\phi\rangle|| \leq ||A\phi|| \cdot ||B\phi||$, le cas position-quantité de mouvement correspond à $A\phi = x\phi$ $B\phi = \hbar/i\frac{d}{dx}\phi$)

veuille prévoir la position et la quantité de mouvement de l'une de ces particules, la première pour fixer les idées (la Terre par exemple), à l'instant T avec une erreur sur sa position et sa quantité de mouvement égales respectivement à Δq_T^1 et Δp_T^1. On supposera seulement connues les position et quantité de mouvement de la i-ème particule à l'instant 0, avec une précision Δq_0^i, Δp_0^i. Gromov affirme alors que, quel que soit le système considéré et ses équations du mouvement (pourvu qu'elles satisfassent aux hypothèses faites ci-dessus), on aura

$$\Delta q_T^1 \cdot \Delta p_T^1 \geq \inf_i \Delta q_0^i \cdot \Delta p_0^i \tag{2}$$

Une telle affirmation semble triviale. Réfutons d'abord l'intuition d'après laquelle pour connaître la position et la quantité de mouvement de la première particule au temps T avec une précision donnée, il faut connaître ces mêmes quantités à l'instant 0 avec une précision au moins aussi grande. L'expérience suivante en donne un contre-exemple simple. On suppose n'avoir affaire qu'à deux particules, contraintes de coulisser (sans frottement) sur une droite. On suppose qu'à l'instant 0, la particule 1 se déplace vers la particule 2, supposée au repos à l'origine des coordonnées, à une vitesse suffisamment grande pour assurer la collision avant l'instant T (*cf.* figure 2). On vérifie aisément qu'après le choc, la particule 1 est au repos et occupe l'ancienne position de la particule 2. La précision avec laquelle on connaît position et vitesse de la particule 1 en T, est donnée par

$$\Delta q_T^1 \cdot \Delta p_T^1 \simeq \Delta q_0^2 \cdot \Delta p_0^2$$

et le terme de droite peut être beaucoup plus petit que $\Delta q_0^1 \cdot \Delta p_0^1$. D'autre part il est essentiel que toutes les mesures servant aux prévisions soient simultanées. Il est clair que la connaissance de la position d'une particule en mouvement rectiligne uniforme, aux instants 0 et 100 avec une erreur de $\Delta q_0 = \Delta q_{100} = \Delta$ permet de connaître sa vitesse avec une précision de $2\Delta q/100$ et donc pour $T = 100$, $\Delta q_T \cdot \Delta p_T \leq \Delta^2/100$.

Enfin le résultat énoncé est plus fin que le théorème de Liouville sur la conservation du volume par les flots hamiltoniens. En effet, ce résultat nous dit seulement que

$$\prod_{i=1}^{n} \Delta q_T^i \cdot \Delta p_T^i \geq \prod_{i=1}^{n} \Delta q_0^i \cdot \Delta p_0^i.$$

En particulier cette inégalité n'exclut pas que $\Delta q_T^1 \cdot \Delta p_T^1$ soit arbitrairement petit, si on n'exige aucune précision sur les mesures concernant les autres particules.

Enfin il est important de remarquer que l'inégalité (2) est satisfaite quel que soit le potentiel d'interaction, contrairement aux résultats de type "chaos" qui fournissent des inégalités beaucoup plus fortes que (2),

du type $\Delta q_T^i \simeq e^{CT}\Delta q_0^i$, mais seulement pour des systèmes vérifiant des conditions supplémentaires non triviales (condition d'hyperbolicité).

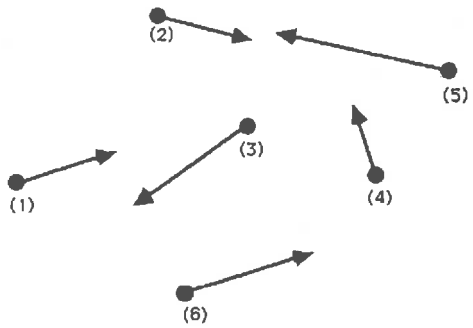


Figure 1

Pour finir, signalons au lecteur spécialiste qu'une démonstration semi-classique du résultat de Gromov, ainsi que la démonstration du principe d'incertitude pour des cas où la quantification n'est pas toujours possible, serait fort intéressante.

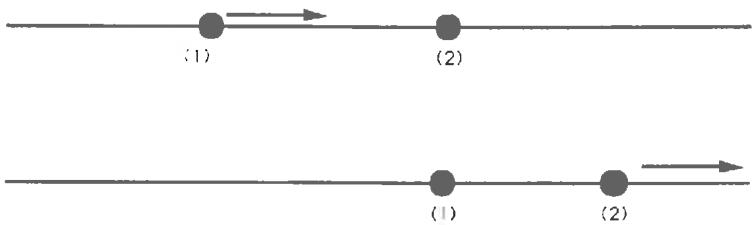


Figure 2

1. Quelques définitions, exemples.

Une variété symplectique est une variété M munie d'une forme différentielle de degré deux, ω, fermée et non dégénérée, c'est à dire que

1. $d\omega = 0$
2. $\ker\omega = \{y \mid \forall x,\ \omega(x,y) = 0\} = \{0\}$

Intuitivement, ω associe, par intégration, à chaque morceau de surface orienté, son "aire algébrique", supposée nulle pour le bord d'une sous-variété de dimension 3 (condition 1), et telle que chaque arc soit contenu dans un morceau de surface arbitrairement petit d'aire non-nulle (condition 2), cette dernière condition peut aussi se comprendre comme une hypothèse d'isotropie : si $\ker\omega$ était non nul, les directions de $\ker\omega$ seraient privilégiées.

Exemples :

(1) Soit $\mathbb{R}^2$ le plan muni de la forme $dx \wedge dy$, alors c'est évidemment une variété symplectique, comme le sont les produits $\mathbb{R}^{2n}$ munis de $dx \wedge dy = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$. On l'appelle structure *standard* sur $\mathbb{R}^{2n}$ (on verra qu'il existe d'autres structures symplectiques sur l'espace euclidien). On peut aussi identifier $\mathbb{R}^{2n}$ à $\mathbb{C}^n$, notant J la matrice de la multiplication par i, et $(\,,)$ le produit scalaire usuel, on voit que $\omega(x,y) = (Jx,y)$. Il s'ensuit que sur toute sous-variété complexe de $\mathbb{C}^n$ (par exemple une variété de Stein), ω induit une forme symplectique (que la restriction de ω soit fermée est clair, la non dégénéréscence vient de ce que $\omega(x,Jx) = (x,x) > 0$).

La forme symplectique standard est invariante par translation, et en particulier par les translations à coordonnées entières, on obtient par passage au quotient une structure symplectique sur $T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$

(2) Soit T^*L le cotangent de L muni de la forme $dp \wedge dq$ qui s'écrit si $q^1, \dots q^n$ sont des coordonnées locales sur L et $p_1, \dots p_n$ les coordonnées duales $dp \wedge dq = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i$. Il est facile de voir qu'une telle définition ne dépend pas du choix des coordonnées locales. On voit aussi que localement T^*L est isomorphe à $\mathbb{R}^{2n}$. C'est un cas particulier du théorème de Darboux (cf. paragraphe 2)

(3) Si $\mathbb{C}P^n$ est le projectif complexe de dimension (réelle) $2n$, identifié au quotient de la sphère unité de $\mathbb{C}^{n+1}$ par l'action de S^1, alors la forme symplectique *standard* de $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} dz_i \wedge d\bar{z}_i$ est invariante par cette action et définit une forme symplectique σ sur $\mathbb{C}P^n$. Il est facile de voir que si M est une sous-variété complexe de $\mathbb{C}P^n$, la restriction de σ à M est non-dégénérée (et bien sûr fermée). Donc toute variété projective complexe est symplectique.

Si ϕ est un difféomorphisme entre deux variétés symplectiques (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) on dira qu'il est symplectique si $\phi^*(\omega_2) = \omega_1$. L'ensemble des difféomorphismes symplectiques de (M, ω) dans elle-même est un sous groupe du groupe $\mathrm{Diff}(M)$, que l'on note $\mathrm{Diff}_\omega(M)$. Un de ses sous-groupes qui jouent un rôle important, en mécanique comme en géométrie symplectique, est le groupe $\mathrm{Diff}_{\mathrm{ham}}(M)$ des *difféomorphismes hamiltoniens*. Ce sont les flots au temps 1 du champ X_H défini par

$$\omega(X_H, \xi) = d_x H(t,x)\xi$$

où $H(t,x)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R} \times M$. Notons que $\mathrm{Diff}_{\mathrm{ham}}(M)$ est connexe par définition. Dans $\mathbb{R}^{2n}$ identifié à $\mathbb{C}^n$, le champ X_H est donné par $J\nabla H$ (∇ est le gradient pour le produit scalaire usuel). Enfin si on a un hamiltonien indépendant du temps (i.e. H est une fonction sur M), ce flot préserve les niveaux de H. Cette propriété est la traduction mathématique de la conservation de l'énergie. On peut même dire que les trajectoires du flot sur une hypersurface d'énergie où H n'a pas de points critiques ne dépendent

que de l'hypersurface, et non du choix du hamiltonien. Ces trajectoires sont appelées caractéristiques de l'hypersurface.

Sur un cotangent, le flot prend l'aspect familier

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}.$$

Un système de n particules de l'espace tridimensionnel, de position $q^1, \ldots, q^n$ et de moment cinétique $p_1, \ldots, p_n$ ($q^i \in \mathbb{R}^3$, $p_i \in \mathbb{R}^3$), interagissant suivant un potentiel $V(q^1, \ldots, q^n)$ obéit aux équations ci-dessus, avec

$$H(q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p^n) = \sum_{i=1}^{n} |p_i|^2 + V(q^1, \ldots, q^n).$$

Le cas particulier d'un potentiel Newtonien est donné par

$$V(q^1, \ldots, q^n) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{|q^i - q^j|^2}.$$

2. Premiers résultats géométriques dans une variété symplectique

a. Absence de géométrie locale

Par opposition au cas Riemannien, la géométrie symplectique n'admet pas d'invariants locaux. C'est l'une des conséquences du théorème de Darboux, qui affirme :

THÉORÈME (Darboux). — *Une variété symplectique de dimension* $2n$ *est localement symplectomorphe à* $(\mathbb{R}^{2n}, \sigma_0)$.

Ce théorème admet la généralisation suivante, dont un cas particulier apparaîtra au paragraphe 5 :

THÉORÈME (Darboux-Weinstein-Givental). — *Soient* S_1 *et* S_2 *des sous-variétés de* (M_1, ω_1), *et* (M_2, ω_2). *S'il existe un difféomorphisme* f *de* S_1 *sur* S_2 *qui envoie* $\omega_{2_{|S_2}}$ *sur* $\omega_{1_{|S_1}}$ *et qui se relève en un morphisme symplectique de fibrés vectoriels* $TM_{1_{|S_1}}$ *sur* $TM_{2_{|S_2}}$, *alors il existe des voisinages* U_1 *de* S_1 *et* U_2 *de* S_2 *qui soient symplectomorphes.*

Ainsi les propriétés symplectiques intéressantes ne peuvent se manifester que globalement. Ce qui explique le terme de topologie symplectique. D'autre part, si ω est une forme symplectique sur M, ω^n est une forme volume. Une transformation symplectique est donc isochore (i.e. préserve le volume). La première question est de savoir si la géométrie symplectique se distingue effectivement de la géométrie isochore. Car cette dernière géométrie

est plutôt pauvre : au vu du lemme de Moser, deux formes volumes sur la même variété sont isomorphes si et seulement si elles ont même volume total ($\in]0, \infty]$).

b. Existence de la topologie symplectique

Une telle question peut se formaliser comme suit :

PROBLÈME. — *Etant donnée une topologie sur* $\mathrm{Diff}_{vol}(M)$ *décrire la fermeture de* $\mathrm{Diff}_{\omega}(M)$.

On peut montrer que pour la topologie C^0, $\mathrm{Diff}_{\omega}(M)$ est fermé (Gromov-Eliashberg), que pour les topologies L^p $(1 < p < \infty)$, son adhérence est $\mathrm{Diff}_{vol}(M)$ tout entier. On voit alors que, suivant le choix de la topologie, il existera ou non des transformations préservant le volume qui ne peuvent être approchées par des transformations symplectiques. On dira que les transformations symplectiques sont C^0 rigides. La méthode la plus simple pour montrer que $\mathrm{Diff}_{\omega}(\mathbb{R}^{2n})$ n'est pas C^0 dense dans $\mathrm{Diff}_{vol}(\mathbb{R}^{2n})$ est de montrer :

THÉORÈME (Gromov). — *S'il existe un plongement symplectique de* $B^{2n}(r)$, *la boule de rayon* r *de* $\mathbb{R}^{2n}$ *dans le cylindre* $B^2(r') \times \mathbb{R}^{2n-2}$ *alors* $r \leq r'$.

Comme le cylindre a un volume infini, il existe des difféomorphismes isochores de la boule de rayon r dans un cylindre de rayon arbitrairement petit. Un tel difféomorphisme ne peut s'approcher en topologie C^0 par un difféomorphisme symplectique. Nous avons appelé "principe d'incertitude classique" cette proposition, ou plus exactement le corollaire suivant :

COROLLAIRE. — *Si un difféomorphisme symplectique de* $\mathbb{R}^{2n}$ *envoie*

$$\prod_{i=1}^{n} [q_0^i - \Delta q_0^i, q_0^i - \Delta q_0^i] \times [p_0^i - \Delta p_0^i, p_0^i + \Delta p_0^i]$$

dans

$$\prod_{i=1}^{n} [q_T^i - \Delta q_T^i, q_T^i - \Delta q_T^i] \times [p_T^i - \Delta p_T^i, p_T^i + \Delta p_T^i],$$

alors

$$\inf_i \Delta q_T^i \cdot \Delta p_T^i \geq \inf_i \Delta q_0^i \cdot \Delta p_0^i.$$

La démonstration du théorème (et de sa variante) repose sur la construction d'invariants symplectiques, appelés capacités qui ont les propriétés suivantes :

(1)(invariance symplectique) si ψ est une transformation symplectique, $c(\psi(U)) = c(U)$

(2)(monotonie) si $U \subset V$ on a $c(U) \leq c(V)$

(3)(normalisation) $c(B^{2n}(r)) = c(B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}) = \pi r^2$

Le théorème est une conséquence triviale de (1), (2) et (3) (ce qui laisse supposer qu'on n'a fait que déplacer la difficulté), alors que le corollaire se démontre soit en envoyant symplectiquement une boule dans le premier parallépipède et en envoyant le second dans un cylindre. Il est presque aussi simple, une fois les capacités construites, de les calculer sur un parallépipède, et de montrer que

$$c(\prod_{i=1}^{n}[q^i - \Delta q^i, q^i - \Delta q^i] \times [p^i - \Delta p^i, p^i + \Delta p^i]) = \inf_i \Delta q^i \cdot \Delta p^i.$$

La démonstration de la fermeture C^0 du groupe des symplectomorphismes est basée sur le fait que pour une application linéaire qui n'est pas symplectique, on peut toujours trouver une boule envoyée dans un cylindre de rayon plus petit. Si il existait une suite ψ_n de symplectomorphismes convergeant C^0 vers ψ non symplectique, soit x_0 un point où $d\psi(x_0)$ n'est pas symplectique. Modulo un changement de coordonnées (symplectique), on peut supposer que $d\psi(x_0)$ envoie la boule $B^{2n}(1)$ dans le cylindre $B^2(r) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ avec $r < 1$, donc ψ enverra une boule $B^{2n}(\epsilon)$ dans un cylindre $B^2(r(c+\epsilon)) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ pour ϵ assez petit. Il sera donc de même pour ψ_n dès que n est assez grand, et ψ_n ne peut pas être symplectique d'après le théorème.

Il existe maintenant plusieurs méthodes pour construire des capacités, l'une due à Gromov, et basée sur les courbes pseudo-holomorphes, l'autre due à Ekeland-Hofer, basée sur les orbites périodiques de systèmes hamiltoniens. Ces constructions seront expliquées dans la section suivante. Ajoutons seulement que par définition, ces invariants permettent dans de nombreux cas de dire, étant donnés deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^{2n}$, U et V, s'il existe un symplectomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ envoyant U dans V (une condition nécéssaire, mais non sufffisante est que $c(U) \leq c(V)$).

3. Méthode de Gromov: courbes presque complexes. Géométrie complexe et géométrie symplectique.

Le principe de cette méthode est de considérer la géométrie symplectique comme une généralisation de la géométrie complexe. Pour cela on remarque que sur toute variété symplectique, on peut trouver une structure presque complexe, à savoir une application $J(x) : T_zM \to T_zM$ telle que $J^2 = -1$ et $\omega(Jx, y) = g(x, y)$ définit une métrique Riemanienne (dans le cas d'une variété Kählerienne, on peut bien sûr prendre pour J la multiplication par i associée à la structure complexe usuelle). La stucture est dite presque complexe, car il n'existera pas en général de carte locale paramétrée par $\mathbb{C}^n$ et envoyant J sur la multiplication par i. Néanmoins, si C est une surface

de Riemann, J_0 sa structure complexe, on peut regarder les applications $f : C \to M$ qui conjuguent J et J_0 (i.e. $df(z)J_0 = Jdf(z)$), on dit que f est holomorphe pour J. L'idée de Gromov est que l'on peut souvent garantir l'existence de telles courbes, indépendammment de J. En effet l'ensemble des J compatibles avec ω est connexe (en fait contractile). Pour montrer par exemple que dans $\mathbb{C}P^n$ il existe des sphères holomorphes quelle que soit la structure presque complexe considérée, on procède comme suit. Fixons deux points sur l'espace projectif, ces points définissent une unique droite projective, qui est bien sûr une sphère holomorphe. On remarque que f est holomorphe si et seulement si elle vérifie l'équation de Cauchy-Riemann (associée à J), qui est une équation elliptique du premier ordre.

Un argument de continuité permet de dire que lorsqu'on déforme J on a toujours l'existence d'une solution (passant par les deux points fixés).

Maintenant, si U est un ouvert de M on définit sa "largeur"[4] comme

$$l(U) = \inf_J \sup_f \int_{f(C)\cap U} \omega$$

ou l'inf est pris sur les structures presque complexes compatibles avec ω, et le sup est pris sur les applications holomorphes pour J. Par définition $l(U)$ est un invariant symplectique, qui vérifie les propriétés (1) et (2) des capacités. Il s'agit de montrer que ce nombre est minoré par πr^2 pour une boule et majoré par πr^2 pour un cylindre. Pour montrer que $l(B^{2n}(r)) \geq \pi r^2$ on se plonge dans $\mathbb{C}P^n$ et on utlise l'existence de sphères holomorphes pour tout J. Il suffit de montrer la majoration pour la structure standard, ce qui se réduit à l'inégalité de Wirtinger.

Il y a de nombreux problèmes de géométrie symplectique qui posent d'une façon ou d'une autre la question de comprendre la notion de "taille" d'un objet. L'un des plus classique est le "problème du chameau", que l'on peut formuler ainsi :

Y-a-t-il une isotopie symplectique de $\mathbb{R}^{2n} - \mathbb{R}^{2n-1} \cup B^{2n}(r)$ qui envoie au temps un une boule de rayon R contenue dans la partie gauche de l'espace $\mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}^{2n-1} \times \mathbb{R}_+$.

La réponse est négative (cf. [V 4]). On peut ajouter en dimension 4, que les variétés symplectiques $\mathbb{R}^{2n} - \mathbb{R}^{2n-1} \cup B^{2n}(r)$ ont des structures symplectiques non isomorphes pour des valeurs distinctes de r ([McD-T]). Il y a donc sur $\mathbb{R}^4$ un continuum de structures symplectiques deux à deux non isomorphes, et de "largeur" (ou capacité) infinie (il y a donc des "modules" au sens de la géométrie algébrique).

Ce point de vue a été utilisé par Gromov, Eliashberg, Dusa McDuff, cette denière ayant démontré qu'il existe une classification des variétés

[4] traduction du "width" de Gromov

symplectiques de dimension 4, analogue à celle des surfaces algébriques. Par ailleurs Gromov a montré qu'une variété symplectique M telle que ω s'annule sur $\pi_2(M)$ et qui coincide avec $\mathbb{R}^4$ hors d'un compact est nécessairement égale à $\mathbb{R}^4$ munie de sa structure standard (la condition d'annulation de ω permet d'exclure les variétés telles que $\mathbb{R}^4$ avec des points éclatés). Eliashberg, Floer et McDuff ont montré qu'en dimension supérieure, on peut conclure que M est contractile.

4. Le point de vue "dynamique hamiltonienne".

Il est basé sur le principe suivant : l'étude des systèmes hamiltoniens fournit des renseignements sur la géométrie symplectique, comme on l'a vu plus haut grâce au théorème de Conley-Zehnder. Il est intéressant de noter qu'à leur tour ces informations permettent parfois de mieux comprendre la dynamique hamiltonienne.

L'un des sujets d'étude en dynamique hamiltonienne est constitué par l'existence et la structure de sous ensembles invariants. Le théorème KAM nous dit que si l'on déforme un système intégrable, c'est à dire essentiellement du type $\dot{q} = p \quad \dot{p} = 0 \quad q \in T^n$; $p \in \mathbb{R}^n$, "de nombreux tores $p = p_0$, invariants par le flot intégrable, se déforment en des tores (lagrangiens) invariants par le flot déformé. Il est important de savoir si ces tores finissent effectivement par disparaître lorsque la déformation est trop grande, et aussi, comment ces tores disparaissent. Nous verrons que certains résultats de topologie symplectique sont utiles pour répondre à la première question, quant à la seconde, elle reste encore fort mystérieuse, malgré des résultats en petite dimension, et les travaux J. Mather et M. Hermann.

Un autre aspect de la dynamique hamiltonienne concerne l'existence d'orbites périodiques. Poincaré en a le premier reconnu l'importance, mais peu de résultats généraux étaient connus, en dehors du théorème démontré par Birkhoff, qui affirme qu'un difféomorphisme de l'anneau qui préserve l'aire (donc symplectique!) et tourne les bords dans des sens opposés, possède au moins deux points fixes. Le théorème de Conley-Zehnder peut se voir comme une généralisation de cet énoncé. Il utilise des méthodes de calcul des variations pour la fonctionelles d'action développées par Rabinowitz, Benci, Ekeland, Amann, Zehnder etc... pour montrer l'existence d'orbites périodiques (alors que le théorème de Poincaré-Birkhoff se démontre en général par des considérations de topologie du plan). Ce qui est remarquable pour le topologue symplectique, c'est que non seulement les principes variationnels fournissent une orbite périodique d'un flot hamiltonien, mais une telle orbite n'étant pas unique, ils en "choisissent"

une qui est "géométriquement[5] remarquable", mais le plus surprenant ici est que l'on ne sait pas les caractériser de façon simple (sauf dans le cas convexe, où c'est l'orbite d'aire minimale).

Historiquement le premier indice du phénomène de rigidité est le théorème de Conley-Zehnder, qui affirme que les transformations hamiltoniennes du tore $\mathbb{T}^{2n}$ ont des points fixes, ce qui n'est pas le cas des applications isochores (prendre une rotation d'angle non nul sur un des facteurs). Ceci montre que $\mathrm{Diff}_{Ham}(T^{2n}, \sigma)$ n'est pas dense dans $\mathrm{Diff}_{vol}(M)$ pour la topologie C^0 (une application sans point fixe ne se laisse pas approcher par des applications avec points fixes). Plus précisément, on a :

THÉORÈME (Conley-Zehnder). — *Un élément de* $\mathrm{Diff}_{Ham}(T^{2n}, \sigma)$ *possède au moins* $n+1$ *points fixes.*

Remarque. — Si ces points fixes sont transverses (i.e. si x est un tel point, $\det(d\phi(x) - Id) \neq 0$) il y en a en fait 2^n.

Comme $\mathrm{Diff}_{Ham}(T^{2n}, \sigma)$ n'est pas très différent de $\mathrm{Diff}^0_\omega(T^{2n})$, la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Diff}_\omega(T^{2n})$, on montre :

COROLLAIRE (M. Herman). — *La composante connexe de l'identité dans* $\mathrm{Diff}_\omega(T^{2n})$ *n'est pas dense dans* $\mathrm{Diff}^0_{vol}(T^{2n})$ *pour la topologie* C^0.

En effet, notons μ la mesure de Lebesgue sur le tore (notons qu'elle est donnée à une constante près par la forme volume $\Omega = \omega^n$), soit $n \geq 2$ et α une $(2n-1)$ forme exacte sans zéro sur T^{2n} (il est facile d'en construire à la main[6]).

Alors si X est défini par $i_X\Omega = \alpha$, le flot de X est dans $\mathrm{Diff}^0_{vol}(T^{2n})$, et $\int_{T^{2n}} X \cdot d\mu = 0$. Soit ϕ_t son flot et $\phi = \phi_\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ assez petit. Comme X n'a pas de zéro, ϕ n'a pas de point fixe, et $\int_{T^{2n}} (\phi(x) - x) \cdot d\mu = 0$. Supposons que ψ_k soit une suite de $\mathrm{Diff}^0_\omega(T^{2n})$ convergeant vers ϕ en topologie C^0. Alors

$$\hat{\psi}_k(x) = \psi_k(x) - \int_{T^{2n}} (\psi_k(z) - z) \cdot d\mu$$

est dans[7] $\mathrm{Diff}_{ham}(T^{2n})$, et $\hat{\psi}_k(x)$ converge C^0 vers ϕ car $\hat{\psi}_k(x) - \psi_k(x) =$

[5] Ce phénomène apparaît aussi dans l'étude des surfaces minimales, où la minimalité oblige parfois la surface à être plongée.

[6] $\alpha = d\beta$ où $\beta = \beta_2(x_1)dx_3 \wedge dx_4 \wedge \ldots \wedge dx_{2n} + \beta_3(x_1)dx_2 \wedge dx_4 \wedge \ldots \wedge dx_{2n}$. Alors $\alpha = \beta_2'(x_1)dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 \wedge \ldots \wedge dx_{2n} + \beta_3'(x_1)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 \wedge \ldots \wedge dx_{2n}$ qui est sans zéro pourvu que les points critiques de β_2 β_3 soient distincts.

[7] Soit $\psi \in \mathrm{Diff}^0_\omega(T^{2n})$. Si $\int_{T^{2n}} (\psi(x) - x) \cdot d\mu = 0$, alors $\psi \in \mathrm{Diff}_{Ham}(T^{2n})$. En effet si $\psi = \psi_1$ où ψ_t est le flot d'un champ de vecteurs X_t, on a $L_{X_t}\omega = 0$ soit $di_{X_t}\omega = 0$ c'est à dire que $\alpha_t = i_{X_t}\omega$ est fermée. Or $\int X_t d\mu = \frac{d}{dt}\int(\psi_t(z) - z)d\mu = 0$ c'est à dire que la forme α_t est de moyenne nulle. Or une forme fermée sur le tore est cohomologue à sa moyenne, donc $\alpha_t = dH_t$ et X_t est donc le flot hamiltonien de

$\int_{T^{2n}}(\psi_k(z)-z)\cdot d\mu$ tend vers $\int_{T^{2n}}(\phi(x)-x)\cdot d\mu = 0$. Or par le théorème de Conley-Zehnder, $\hat{\psi}_k$ a $n+1$ points fixes au moins, alors ϕ n'en a pas, ce qui est absurde.

Nous allons maintenant expliquer le principe de la méthode de construction des capacités d'Ekeland et Hofer. Enoncons d'abord le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Soit H un hamiltonien (non autonome) sur $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $H(t,z) = 3/2|z|^2$ pour $|z|$ assez grand. Alors son flot a une orbite de période 2π telle que $c(H) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(Jz,\dot{z}) - H(t,z)dt$ soit positif. De plus le réel $c(H)$ dépend continûment de H en topologie C^0.*

La condition sur la valeur de $\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(Jz,\dot{z}) - H(z)dt$ permet en particulier de voir que la solution obtenue est non constante lorsque H est positif. Notons surtout que les solutions périodiques du flot de H sont les points critiques de $A_H(z) = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[(Jz,\dot{z}) - H(z)]dt$ où z est dans $W^{1,2}(S^1,\mathbb{R}^{2n})$ espaces des courbes fermées de $\mathbb{R}^{2n}$ à dérivée L^2 (en réalité le choix de l'espace fonctionnel est sans importance). En effet, $DA_H(z) = 0$ si et seulement si $J\dot{z} + \nabla H(z) = 0$, et z satisfait l'équation de Hamilton.

On peut alors utiliser le principe précédent pour définir la capacité de Ekeland-Hofer d'un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$. En effet, la proposition fournit un niveau critique strictement positif qui dépend continûment de H, et décroît lorsque H croît. Ceci est le cas pour tout principe variationnel "raisonnable", du type minimisation (ou mini-max) : un tel principe associe a une fonction un niveau critique $c(f)$ qui soit continu et croissant avec f (alors que le point critique, lui, est en général discontinu).

Le point clé de la construction de la capacité d'Ekeland-Hofer est d'exploiter l'existence d'une orbite périodique des systèmes hamiltoniens s'annulant dans U. Si on regarde les hamiltoniens satisfaisant les hypothèses de la proposition ci-dessus, qui s'annulent sur U, on obtient une valeur critique positive de A_H. On note $c(U)$ la plus petite borne supérieure de ces valeurs critiques. On montre que $c(U)$ égale l'aire d'une caractéristique fermée sur le bord de U si U est étoilé. En fait, si U est convexe, $c(U)$ est la plus petite aire d'une caractéristique fermée, ce qui permet de calculer $c(U)$ dans de nombreux cas simples (boules, cylindres, ellipsoïdes,...).

5. Propriétés des variétés lagrangiennes.

Ce sont les sous-variétés (plongées) de (M,ω) telles que

1. $\omega_{|TL} = 0$ et

H_t.

2. $\dim(L) = 1/2 \dim(M)$

Ici non plus, il n'y a pas d'invariant local, grâce au théorème de Weinstein, le modèle local est donné par la section nulle de $(T^*L, dp \wedge dq)$, soit :

PROPOSITION (Weinstein). — *Toute sous variété lagrangienne L d'une variété symplectique a un voisinage symplectomorphe au voisinage de la section nulle de $(T^*L, dp \wedge dq)$.*

D'autre part, soit $\lambda = \sum_{i=1}^{n} p_i \wedge dq^i$, la forme symplectique de T^*N s'écrit $\omega = d\lambda$, et par le théorème de Stokes, l'aire d'un disque s'appuyant sur L égale l'intégrale de λ sur son bord. Sur L, ω est nulle donc λ est fermée et représente un élément de $H^1(L, \mathbb{R}^{2n})$. On appelle *périodes de L* les intégrales de L sur les courbes fermées.

a. Périodes, structures exotiques et rigidité

Si L est une variété lagrangienne, on peut étudier les disques holomorphes à bord dans L. Gromov montre, par un argument analogue à celui exposé plus haut, que dans $\mathbb{R}^{2n}$ un tel disque existe toujours. Comme sur un disque holomorphe $\omega > 0$, une variété lagrangienne plongée dans $\mathbb{R}^{2n}$ ne peut avoir toutes ses périodes nulles.

Or il est facile de construire sur $\mathbb{R}^{2n}$ une forme symplectique ω_e, telle que $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_e)$ contienne un tore lagrangien dont toutes les périodes soient nulles. Il en résulte qu'il n'existe pas de plongement symplectique de $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_e)$ dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, car les périodes sont invariantes après plongement symplectique (ω_0 est la forme *standard*). On dit alors que ω_e définit une structure exotique sur $\mathbb{R}^{2n}$.

On peut se poser d'autres questions sur les variétés lagrangiennes. En particulier, on peut se demander si il existe une obstruction à envoyer une telle variété dans un cylindre arbitrairement petit par un symplectomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$. La réponse est affirmative si L est un tore. On voit alors que si les périodes de L sont rationnelles, il existera une plus petite période strictement positive, δ_0 et donc il existe toujours un disque holomorphe s'appuyant sur L d'aire supérieure à δ_0.

Si ce tore est contenu dans un cylindre de rayon r, on peut quitte à prendre un cylindre plus grand supposer que la structure complexe est standard près du bord. Alors la pseudo-convexité de ce bord permet d'affirmer qu'un disque holomorphe à bord dans L sera entièrement contenu dans le cylindre, et donc la largeur du cylindre est supérieure à δ_0.

En réalité la question posée ne dépend pas de la rationnalité des périodes du tore, comme on le voit en utilisant la méthode des orbites périodiques. En effet d'après le théorème de Weinstein, on peut prendre au voisinage d'un

tore lagrangien plongé des coordonnées q, p telles que la forme symplectique soit $dp \wedge dq$ (et le tore donné par $p = 0$). On considère alors un hamiltonien donné par $|p|^2$ au voisinage du tore. Ses orbites périodiques dans un tel voisinage sont données par les équations $\dot{q} = p \quad \dot{p} = 0$, dont les solutions périodiques se projettent sur des cercles géodésiques. Il se trouve que lorsqu'on étend convenablement H à $\mathbb{R}^{2n}$ et que l'on applique la proposition de la section 4, le principe variationnel choisit une de ces géodésiques, afin qu'elle ait une aire positive. En étudiant le problème variationnel de plus près (i.e. en tenant compte des indices des solutions périodiques) on peut montrer que le plan tangent au tore doit tourner de manière non triviale lorsqu'on décrit l'orbite périodique (on dit que le nombre de Maslov de la trajectoire est nul).

Un tore lagrangien ne peut donc pas s'envoyer par un élément de $\mathrm{Diff}_\omega(\mathbb{R}^{2n})$ dans un cylindre arbitrairement petit. Ceci est une nouvelle manifestation de la rigidité symplectique. De plus comme tout ensemble de dimension $n-1$ peut s'envoyer dans un cylindre arbitrairement petit, on voit que la dimension moitié définit la limite pour laquelle se manifeste la rigidité. D'autre part si on considère un tore non lagrangien, il n'y aura pas non plus de rigidité.

On vérifie sans peine qu'un tore lagrangien a une largeur nulle (il ne contient aucune courbe holomorphe vu qu'une sous variété lagrangienne est totalement réelle) alors que sa capacité d'Ekeland Hofer est non nulle. Ces deux capacités sont donc bien distinctes. Toutefois on a aussi vu que l'on peut dans certains cas utiliser les courbes holomorphes pour montrer le résultat qui nous importe, à savoir qu'une sous-variété lagrangienne ne s'écrase pas dans un cylindre arbitrairement petit.

b. Propriétés algébriques des lagrangiennes

On considère une sous-variété lagrangienne de T^*N. Il existe alors deux invariants algébriques simples, le degré de la projection de L sur N, noté $d(L)$, et la classe de Maslov notée $\mu(L)$. Cette denière est une classe de cohomologie dans $H^1(L, \mathbb{Z})$ telle que si γ est une courbe de L, $< \mu(L), \gamma >$ est le nombre de tours que fait le plan tangent à la sous-variété lorsqu'on décrit γ. Ce nombre généralise l'enroulement des courbes planes (qui sont bien des sous-variétés lagrangiennes !). Michèle Audin a conjecturé que dans $\mathbb{R}^{2n}$ toute sous-variété lagrangienne a une classe de Maslov égale à deux fois une classe primitive (*i.e.* qui n'est pas multiple d'une autre classe). Une conjecture d'Arnold dit que si $d(L) \neq 0$ alors $\mu(L) = 0$. En utilisant la méthode des orbites périodiques citée plus haut, on peut montrer cette conjecture pour $L = N = T^n$ ainsi que :

THÉORÈME. — *Si $L = T^n$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{R}^{2n}$, $\mu(L) = 2kg$ où g est primitive et $2 \leq 2k \leq n+1$.*

Ce résultat est utile pour compléter les résultats de M. Herman, Bialyi et Polterovich sur la disparition des tores lagrangiens invariants pour des grandes perturbations d'un système intégrable. En effet, ces auteurs montrent que les tores avec $d(L) \neq 0$ et de classe de Maslov nulle doivent disparaître. Or si la première hypothèse est nécessaire (le système pourrait être proche d'un système intégrable dans une toute petite région de l'espace des phases) la seconde est automatiquement satisfaite d'après les résultats précédents.

6. Autres points de vue et résultats.

Le point de vue des orbites périodiques est souvent plus précis que celui de Gromov, mais a un champ d'application restreint à $\mathbb{R}^{2n}$. Cependant Floer et Hofer ont étendu le point de vue de Ekeland-Hofer en utilisant l'homologie de Floer. Il est clair que l'homologie de Floer demanderait un article à elle toute seule (cf. [S]).

Il existe un point de vue légèrement différent, utilisant les fonctions génératrices (cf. [V 4]) d'où l'on voit que ce qui est important, c'est l'existence d'un principe variationnel dont les points critiques donnent les orbites périodiques, la forme exacte de ce principe n'ayant pas d'importance.

7. Questions ouvertes.

Les résultats de la section 1 sur la fermeture C^0 du groupe Diff_ω soulèvent la question de savoir quels sont les homéomorphismes qui sont limites d'éléments de Diff_ω. Est-ce que ce sont les mêmes que les homéomorphismes qui préservent une capacité? Une sphère de dimension 4 n'admet pas de structure symplectique (car $H^2(S^4) = 0$). En d'autres termes elle n'a pas d'atlas tel que les changements de cartes soient dans Diff_ω. Cela reste-t-il vrai si les changements de cartes sont seulement supposés préserver une capacité?

La section 5 évoque les question suivantes :

Deux tores lagrangiens ayant mêmes périodes et classe de Maslov sont-ils isotopes parmi les tores lagrangiens?

Combien de structures symplectiques différentes y a-t-il sur $\mathbb{R}^{2n}$?

Une question que nous n'avons pas évoquée est celle de savoir dans quelle mesure l'intérieur d'un domaine à bord caractérise (symplectiquement) son bord (rappelant un résultat de Fefferman d'après lequel une transformation bihlomorphe entre l'intérieur de deux domaines pseudoconvexes s'étend au bord). On peut montrer que les aires de caractéristiques fermées des bords sont les mêmes (Hofer). En particulier deux polydisques *ouverts* $\prod_{i=1}^n D^2(r_i)$

$\prod_{i=1}^{n} D^2(r_i')$ avec $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$, $r_1' \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n'$ sont symplectomorphes si et seulement si $r_j = r_j'$ pour tout j. Mais malgré quelques résultats dus à Eliashberg et Hofer, on est loin d'une solution.

Références

Lien avec le semi-classique, Principe d'incertitude :

[L-L] LANDAU, L. et LIFCHITZ, E. — *Mécanique Quantique*, Chapitre 1, Editions MIR , Moscou, 1988.

[Fe] FEFFERMAN, C. — *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc.

Article de survol :

[Ar] ARNOLD, V.,I. — *First steps in symplectic topology*, Russian Math. Surveys, **41(6)** (1986), 1–21.

[B] BENNEQUIN, D. — *Problèmes elliptiques surfaces de Riemann et structures symplectiques*, Séminaire Bourbaki 1985-1986, Exposé 657, Astérisque (138), 1985–86.

[C] CHAPERON, M. — *Quelques questions de Géométrie sympplectique*, Séminaire Bourbaki 1982-1983, Astérisque, **105–106** (1982–83), 231–249.

[V] VITERBO, C. — *Capacités symplectiques et applications*, Séminaire Bourbaki, Juin 89, Exposé 714, Astérisque, **177–178**, 1990.

Articles originaux :

[C-Z] CONLEY, C., ZEHNDER, E. — *Morse type index theory for flows and periodic solutions for hamiltonian equations*, Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 207-253.

[G1] GROMOV, M. — *Pseudo Holomorphic Curves on almost complex Manifolds*, Inventiones Math., **82** (1985), 307–347.

[G2] GROMOV, M. — *Soft and Hard Symplectic Geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **1**, 1986 (1987), 81–98.

[H 1] EKELAND, I., HOFER, H. — *Symplectic topology and hamiltonian dynamics*, Math. Z., **200** (1989), 355–378.

[H 2] EKELAND, I., HOFER, H. — *Symplectic Topology and hamiltonian Dynamics II*, Math. Zeitschrift, **203** (1990), 355–378.

[D-T] MCDUFF, D., TRAYNOR, L. — Prépublication, University of New York at Stony Brook, U.S.A.

[V 2] VITERBO, C. — *A New obstruction to embedding Lagrangian tori*, Inventiones Math., **100** (1990), 301–320.

[V 3] VITERBO, C. — *Plongements lagrangiens et capacités symplectiques de tores dans* $\mathbb{R}^{2n}$, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **311**, Série I (1990), 487–490.

Autres points de vue, homologie de Floer, etc. :

[Fl 1] FLOER, A.. — *The unregularized Gradient Flow of the Symplectic Action*, Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988), 775–813.

[Fl 2] FLOER, A.. — *Morse Theory for Lagrangian Intersections*, Journal of Differential Geometry, **28** (1988), 513–547.

[Fl 3] FLOER, A.. — *Cuplenght estimates on Lagrangian intersections*, Comm. Pure Appl. Math., **42** (1989), 335–357.

[E–H] ELIASHBERG, Y. et HOFER, H. — *Towards the definition of Symplectic boundary*, Geometry and functional analysis, **2** (1992), 211–220.

[S] SIKORAV, J.C.. — *Homologie associée à une fonctionnelle*, Séminaire Bourbaki, Exposé 733, Astérisque, 1990.

[V 4] VITERBO, C. — *Symplectic topology as the geometry of generating functions*, Mathematische Annalen, **292** (1992), 685–710.

Théorèmes KAM et destruction de tores invariants :

[P] BIALYI, M., POLTEROVICH, L. — *Langrangian singularities of invariant tori of Hamiltonian systems with two degrees of freedom*, Inventiones Math., **97** (1989), 291–303.

[H] HERMAN, M. — *Inégalités a priori pour des tores lagrangiens invariants par des difféomorphismes symplectiques*, Publ. Math. I.H.E.S., **70** (1990), 47–101.

[Y] YOCCOZ, J.C. — *Travaux de Herman sur les tores invariants*, Séminaire Bourbaki, février 1992, Astérisque, (à paraître).

■