SOMMAIRE

UN RÉSEAU DE RELATIONS INTERNATIONALES

Les sociétés savantes sont souvent nées de sursauts nationaux comme ce fut le cas pour la Société Mathématique de France. Mais, dans une phase ultérieure de leur développement, elles recherchent toutes à établir des relations avec leurs sœurs d'autres pays, souvent d'autres continents. C'est l'objet des accords de réciprocité qui lient diverses sociétés entre elles. La S.M.F., pour sa part, est liée ainsi à 19 sociétés par de tels accords. Offrant des tarifs préférentiels, ils visent à faciliter la connaissance mutuelle en incitant les adhésions croisées, fils qui permettent de tisser la trame d'un véritable réseau international.*

Dans les dernières années, cette dimension de l'action de la S.M.F. a été reconnue par la présence au bureau de la société d'un vice-président chargé des relations internationales. Elle a été aussi explorée plus systématiquement grâce à la rencontre de délégations de sociétés sœurs. Ce fut le cas au cours du Congrès International des Mathématiciens de Kyoto en 1990 pour les Sociétés Mathématiques du Japon et du Brésil, en juillet 1991 avec le Directeur Exécutif de l'American Mathematical Society. Ce fut encore le cas cette année avec les présidents des Sociétés Mathématiques de Corée et du Viet Nam et de la Deutsche Mathematiker Vereinigung.

Il semble important de mettre plus de contenu dans ces contacts. Une piste pour cela serait l'organisation de conférences bilatérales. Il y eut dans un passé récent une tentative d'organiser une telle conférence avec la London Mathemtical Society, tentative qui a tourné court. Cette année, la L.M.S. et l'A.M.S. en organisent une en juillet. Ce pourrait être un des thèmes de la réunion de bureau commune à la S.M.F. et à la D.M.V. qui est envisagée cette année, mais d'autres pistes sont en cours d'exploration avec l'A.M.S. notamment.

Les questions liées à la Société Mathématique Européenne sont elles un peu d'un autre type. Déjà dans sa période de gestation, des débats animés ont eu lieu entre les représentants des sociétés nationales présentes pour déterminer sa nature : fédération de sociétés nationales ou société à part entière accueillant ses adhérents propres sur le modèle de la Société Européenne de Physique. Le Congrès Constitutif de Madralin en octobre 1990 a tranché : la S.M.E., fondée par des société mathématiques nationales, admet des membres individuels tout en favorisant (pour des raisons de gestion) leur adhésion au travers d'une société nationale. Cette conception s'est révélée immédiatement naturelle pour de nombreux mathématiciens et mathématiciennes puisque plus de mille ont fait l'acte de foi d'adhérer à la S.M.E. dès l'annonce de sa création et avant qu'elle ait pu mener des actions tangibles. Il reste à trouver et à faire fonctionner un mode adéquat de représentation des adhérents directs dans l'Assemblée Générale.

L'Union Mathématique Internationale regroupe, elle, plus de 50 correspondants nationaux. Pour la France, son correspondant est le Comité National Français des Mathématiciens, mis en place sous les auspices de l'Académie des Sciences et qui regroupe, outre l'Académie, la Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, le Comité National du C.N.R.S. et bien sûr la S.M.F.. Le Comité Exécutif de l'U.M.I. réuni début mai à Rio de Janeiro vient de prendre une grande initiative visant à faire de l'an 2000 une Année Mathématique Mondiale (WMY 2000 dans le sigle anglais) avec le soutien de l'U.N.E.S.C.O.. Ce devrait être une occasion unique pour nous de mieux faire connaître notre discipline mais aussi d'essayer de dessiner des perspectives sur son développement pour le troisième millénaire. Ce sera bien entendu une nouvelle étape dans le renforcement du réseau international qui met en relation les mathématiciens et les mathématiciennes du monde entier.

Jean-Pierre BOURGUIGNON

---

* les lecteurs qui en douteraient peuvent consulter *"La France Mathématique de 1870 à 1914"* d'Hélène Gispert diffusé avec le soutien de la S.M.F..

ECM*
PARIS
6 - 10 juillet 1992

Congrès Européen de Mathématiques

Ce paragraphe présente le programme scientifique du Congrès. Ce programme peut être sujet à modification.

Horaire prévisionnel

	Lundi 6	Mardi 7	Mercredi 8	Jeudi 9	Vendredi 10
8h30-9h30	Cérémonie d'ouverture	L. Babai	Session parallèle 1	Session parallèle 5	C. De Concini
9h30-10h30		A.-S. Sznitman	Session parallèle 2	Session parallèle 6	P.-L. Lions
10h30-11h00	*Pause*				
11h00-12h00	S. Donaldson	D. Mumford	Session parallèle 3	Session parallèle 7	W. Müller
12h00-14h00	*Pause pour le déjeuner*				
14h00-15h00	M. Vergne	B. Engquist	Session parallèle 4	Session parallèle 8	V.I. Arnold
15h00-15h30	*Pause*				Cérémonie de clôture
15h30-18h00	Tables rondes 1	Tables rondes 2	Tables rondes 3	Tables rondes 4	Table ronde finale

Les conférences plénières et les cérémonies auront lieu dans le Grand Amphithéâtre de la Sorbonne, les conférences en sessions parallèles et les tables rondes se tiendront dans divers amphithéâtres de la Sorbonne et du centre Panthéon-Sorbonne.

Conférences plénières

V.I. Arnold	Vassiliev's theory of discriminants and knots
L. Babai	Transparent proofs
C. De Concini	Representations of quantum groups at roots of 1
S. Donaldson	Gauge theory and four-manifold topology
B. Engquist	Titre à préciser
P.-L. Lions	On some recent methods in nonlinear partial differential equations
W. Müller	Geometry and spectral theory
D. Mumford	Computer vision from a mathematical perspective
A.-S. Sznitman	Brownian motion and obstacles
M. Vergne	Cohomogie équivariante et formules de caractères

Conférences parallèles

Session parallèle 1 : mercredi 8 juillet, 8h30 – 9h30

J.-M. Bony	Existence globale et diffusion pour les modèles discrets de la cinétique des gaz
R.E. Borcherds	Conformal field theory and sporadic groups
C. Deninger	Evidence for a cohomological approach to analytic number theory
D. Duffie	Titre à préciser
U. Hamenstädt	Foliations, second order partial differential equations and rigidity for compact negatively curved manifolds

Session parallèle 2 : mercredi 8 juillet, 9h30 –10h30

A. Beilinson	Mixed motives
M. Giaquinta	Analytic and geometric aspects of variational problems for vector valued mappings
Y. Neretin	Mantles, trains and representations of infinite dimensional groups
B. Silverman	Function estimation and functional data analysis
C. Viterbo	A partial survey of symplectic topology

Session parallèle 3 : mercredi 8 juillet, 11h00 –12h00

M. Berry	Quantum conditions and the Riemann zeros
A. Björner	Subspace arrangements
J. Nekovář	p-adic methods in arithmetic
D. Voiculescu	Entropy and perturbations of operators
J.-C. Yoccoz	Germs and holomorphic diffeomorphisms of the complex plane and analytic diffeomorphisms of the circle

Session parallèle 4 : mercredi 8 juillet, 14h00 –15h00

R. Azencott	Shape recognition and synchronous neural nets
B. Bojanov	Optimal recovery of functions and integrals
J. Bourgain	Exponential sums and nonlinear analysis
M. Wodzicki	Algebraic K-theory and functional analysis
D. Zagier	Values of zeta functions and their applications

Session parallèle 5 : jeudi 9 juillet, 8h30 – 9h30

Z. Adamowicz	The power of exponentiation in arithmetic
F. Catanese	Old and new results in the theory of algebraic surfaces
J. Fröhlich	Gauge invariance and current algebra in non-relativistic quantum theory
M.A. Nowak	The evolutionary dynamics of HIV infections and the development of AIDS: A mathematical theory of viral pathogenesis
A. Shamir	Titre à préciser

Session parallèle 6 : jeudi 9 juillet, 9h30 –10h30

M. Kontsevich	Feyman diagrams and low-dimensional topology
M. Laczkovich	Recent results in the theory of decomposition of sets (paradoxical decompositions)
J.-F. Le Gall	A new class of random processes and its connections with partial differential equations
R. Piene	On the enumeration of algebraic curves
V. Strassen	Algebra and complexity

Session parallèle 7 : jeudi 9 juillet, 11h00 –12h00

S.B. Kuksin	On regular behavior of spatially one-dimensional conservative systems
E.J.N. Looinjenga	L_2-cohomology and partial compactifications

I. Madsen	The cyclotomic trace in algebraic K-theory
D. Salamon	Instanton homology and symplectic geometry
A. Schrijver	Topological methods in graph theory and computer science

Session parallèle 8 : jeudi 9 juillet, 14h00–15h00

J. Gärtner	Parabolic problems in random media and intermittency
A.S. Merkurjev	Algebraic K-theory and Galois cohomology
J.M. Montesinos	Hyperbolic manifolds, universal groups and arithmeticity
A. Quarteroni	Mathematical aspects of domain decomposition for the numerical solution of partial differential equations
P. Tukia	Generalizations of Fuchsian and Kleinian groups

Tables rondes

Tables rondes 1 : lundi 6 juillet, 15h30–18h00

A. Mathématiques et grand public. Organisateur : J.-P. Kahane.
Thème : Intéresser les mathématiciens aux problèmes que posent les contacts avec le grand public. Quelles possibilités et quelles difficultés offrent radios, films, télévisions, journaux, expositions, clubs? Quels thèmes choisir? L'image des mathématiques et des mathématiciens doit-elle être modifiée?

E. L'Europe mathématique, mythe ou réalité historique? Organisateurs : C. Goldstein, J. Ritter.
Thème : Étudier certaines réalités du développement historique des mathématiques en Europe et les mythes qui les ont accompagnées.

I. Harmonisation des diplômes et programmes d'échanges d'étudiants. Organisateurs : H. Munkholm, I. Netuka, V. Souček.
Thème : Présenter les programmes d'études de mathématiques dans les universités européennes; débattre de la possiblité et des avantages d'harmoniser les programmes pour faciliter les échanges d'étudiants; avancer des propositions pour un diplôme européen de mathématiques; passer en revue les programmes d'échanges et leur utilisation.

M. Mathématiques et économie. Organisateur : B. Cornet.
Thème : Montrer le rôle de la modélisation en économie (et plus généralement dans les sciences sociales), présenter le type de questions posées ainsi que les outils mathématiques utilisés (théorie de l'équilibre général, finance, théorie des jeux).

Tables rondes 2 : mardi 7 juillet, 15h30–18h00

B. Femmes et mathématiques. Organisatrice : E. Bayer.
Thème : Analyser la situation des mathématiciennes, principalement en Europe; présenter en particulier le travail du comité "Femmes et Mathématiques" de la SME.

F. Philosophie des mathématiques : pourquoi, comment? Organisatrice : H. Sinaceur.
Thème : Qu'est-ce que la philosophie des mathématiques? À quelles exigences répond-elle? Quels objectifs poursuit-elle? Quelle est sa portée pour les mathématiques et pour la philosophie?

J. Politique mathématique européenne. Organisateur : D. Gabay.
Thème : Situer les objectifs du programme Pythagore; formuler des recommandations et discuter les moyens de les mettre en œuvre; envisager une mobilisation des mathématiciens européens pour convaincre les gouvernements de redéployer les ressources en faveur des mathématiques.

N. Mathématiques et informatique. Organisateur : P. Flajolet.
Thème : Mettre en lumière certains aspects de l'interface entre mathématiques et informatique en analyse, logique, combinatoire et théorie des nombres.

Tables rondes 3 : mercredi 8 juillet, 15h30 – 18h00

C. Rôle des mathématiques dans les politiques éducatives. Organisateur : J. Camus.
Thème : Comparer la situation dans les pays européens sur les points suivants : enseignement des mathématiques, recrutement et formation des enseignants, formation des ingénieurs, recherche sur l'enseignement des mathématiques, les mathématiques comme discipline de service.

G. Mathématiques en sciences humaines. Organisateurs : P.-A. Chiappori, R. Guesnerie.
Thème : Débattre de l'intérêt d'introduire les mathématiques en sciences sociales, de la spécificité des besoins mathématiques dans ce domaine, et de la modélisation du comportement humain.

K. Collaboration avec les pays en voie de développement. Organisateur : P. Bérard.
Thème : Faire des propositions concrètes pour promouvoir une collaboration efficace entre la communauté mathématique en Europe et les mathématiciens des pays en voie de développement : coopération au niveau recherche, au niveau post-doctoral, bibliothèques et accès à l'information scientifique, équipement informatique.

O. Mathématiques et chimie. Organisateur : E. Soulié.
Thème : Faire le point sur quelques applications des mathématiques à la chimie : problèmes variationnels, résolutions d'équations aux dérivées partielles, modélisation moléculaire, structure 3D des protéines, "chimiométrie", problème des phases, rôle de l'informatique.

Tables rondes 4 : jeudi 9 juillet, 15h30 – 18h00

D. Cultivons les mathématiques. Organisateurs : Y. Chevallard, A. Rouchier.
Thème : Comment réconcilier culture et mathématiques. Dans le cadre de l'analyse didactique, quels moyens peut-on proposer pour permettre l'émergence de nouvelles pratiques sociales, spécialement au lycée, autour des mathématiques?

H. Mathématiques et industrie. Organisateurs : J. Hunt, H. Neunzert.
Thème : Mettre en lumière certaines questions-clé intéressant les mathématiciens, et discuter l'importance éventuelle pour l'industrie de recherches récentes dans différents domaines.

L. Bibliothèques de mathématiques en Europe. Organisateurs : P. Barrat, G. Sureau, L. Zweig.
Thème : Susciter un large débat sur les thèmes les plus importants pour les bibliothèques mathématiques européennes et dégager des conclusions conduisant à des réalisations concrètes en matière financière, technique, etc.

P. Mathématiques, biologie et médecine. Organisateurs : R. Hiorns, B. Prum.
Thème : Montrer l'interaction dans les deux directions entre mathématiques et sciences du vivant : emploi de mathématiques sophistiquées en biologie et médecine, et émergence en mathématiques de problématiques suscitées par ce domaine d'applications.

Table ronde finale : vendredi 10 juillet, 15h30 – 18h00

La table ronde finale sera consacrée à une deuxième session de la table ronde A (Mathématiques et grand public), sous forme d'un large débat qui sera ouvert au public et aura lieu principalement en français. ■

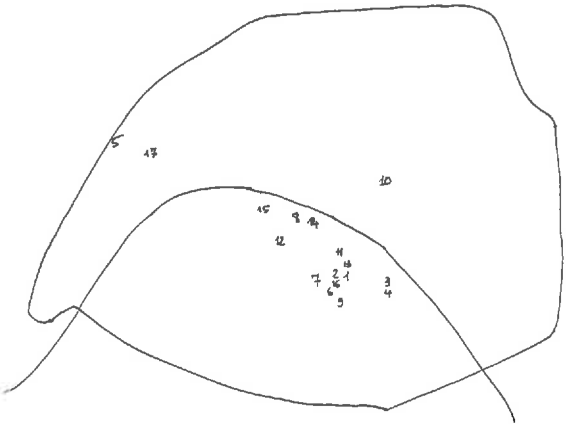
Pour les congressistes de l'E.C.M. :

où trouve-t-on des mathématiciens à Paris ?

À PARIS :

Départements de mathématiques des universités :

1. Université Paris I, 1 place de la Sorbonne, Paris 5
2. Université Paris V (René Descartes), UFR de math., logique formelle et informatique, 12 rue Cujas Paris 5
3. Université Paris VI (Pierre et Marie Curie), place Jussieu, Paris 5



4. Université Paris VII, place Jussieu, Paris 5
5. Université Paris IX, place du Maréchal de Lattre de Tassigny, Paris 16

Grandes Écoles :

6. École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, Paris 5
7. École Nationale des Mines, 60 Bd Saint-Michel, Paris 6
8. École des Ponts et Chaussées, 28 rue des Saints-Pères, Paris 6
9. Institut National Agronomique, 16 rue Claude Bernard, Paris 5
10. Centre National des Arts et Métiers, 292 rue Saint-Martin, Paris 3

Autres centres de recherche :

11. Collège de France, place Marcelin Berthelot, Paris 5
12. Centre de Mathématiques Sociales, 54 boulevard Raspail, Paris 6
13. Centre d'Économétrie 1 rue Descartes, Paris 5
14. Bureau des Longitudes, 3 rue Mazarine, Paris 6
15. Centre de Mathématiques Financières de la Caisse des Dépôts, 110 rue de l'Université, Paris 7
16. École Pratique des Hautes Études, 11 rue Pierre et Marie Curie, Paris 5
17. Centre Scientifique IBM, 36 avenue Raymond Poincaré, Paris 16

DANS LA RÉGION PARISIENNE :

Départements de mathématiques des universités :

Université Paris X, 200 avenue de la République 92000 Nanterre
Université Paris XI, Bâtiment 425, 15 avenue Georges Clémenceau 91405 Orsay
Université Paris XIII, avenue Jean-Baptiste Clément 93430 Villetaneuse
Université de Versailles, 45 Av des États-Unis 78000 Versailles
Université d'Évry, Bd des Coquibus 91205 Evry

Grandes Écoles :

École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique (ENSET), 61 avenue du Président Wilson, 94230 Cachan
École Polytechnique, plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau
École Centrale, Grande Voie des Vignes 92290 Chatenay-Malabry
École Supérieure d'Électricité, laboratoire des signeaux et systèmes, Plateau du Moulon 91190 Gif sur Yvette
École des Ponts et Chaussées, avenue Mont d'Est, 93160 Noisy le Grand

École Supérieure des Sciences Économiques et Commerciales (ESSEC), département de statistiques, rue des Écoles, 95201 Cergy-Pontoise

Autres centres de recherche :

Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES), 35 route de Chartres, 91440 Bures sur Yvette

Institut National de la Recherche Agronomique, 78350 Jouy en Josas

Institut National de Recherche en Informatique et Automatique (INRIA), Domaine de Voluceau 78153 Le Chesnay.

Centre d'Études Nucléaires, institut de recherche fondamentale, 91191 Gif sur Yvette

CNET 38 rue du Général Leclerc, 92131 Issy les Moulineaux

Électricité de France, Division études et recherches, 1 avenue du général de Gaulle, 92141 Clamart

Institut Géographique National, département de traitement de l'information géodésique, 2 avenue Pasteur, 94160 Saint-Mandé. ■

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 1992
et son supplément les MÉMOIRES DE LA S.M.F.

(4 fascicules par an auxquels s'ajoutent 4 à 5 suppléments)
Revue éditée par la Société Mathématique de France.
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique.

TOME 120, Fascicule 2
134 p., Prix public : 175 FF, Prix membres : 110 FF.

Sommaire :

Mémoires :
supplément au Tome 120, fasc. 2 – Mémoire n° 49 – Cours de la chaire Lagrange
140 pages, Prix public : 125 FF, Prix membres : 90 FF

A. AMBROSETTI. — *Critical points and nonlinear variational problems*
Cette monographie traite de la théorie des points critiques et de ses applications à quelques classes de problèmes variationnels non-linéaires. Le cadre abstrait comprend la théorie de Lusternik-Schnirelman et les méthodes de minimax pour des fonctionnelles non bornées. Nous examinons des applications à la théorie des problèmes aux limites elliptiques, à celle du vortex, aux orbites homocliniques, et aux systèmes conservatifs avec potentiels singuliers.

ABONNEMENT 1992
Tarif public (Bulletin et Mémoires) : 840 FF (TTC) pour la France, 1060 FF pour l'étranger.
Membres de la S.M.F. : 255 FF (Bulletin), 420 FF (Bulletin et Mémoires)

DISTRIBUTION
Société Mathématique de France, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Gauthier-Villars, CDR, 11 rue Gossin, 92543 Montrouge Cedex
Offilib, 48 rue Gay-Lussac, 75240 Paris Cedex 05

QUESTIONS AU PROFESSEUR HIRZEBRUCH

Interview réalisée par Jean-Pierre BOURGUIGNON

Professeur Hirzebruch au Max Planck Institut à Bonn en 1987

Mathematics

JPB : Professor Hirzebruch, could you comment a little bit on the proof of the Riemann-Roch theorem? It is one of your major achievements in mathematics, and it has opened the way to many other developments in this theory.

F. Hirzebruch : When I came to Erlangen in 1950 where I was an assistant, I began to work on characteristic classes in the form of obstruction classes. Such things I had learned from my teacher Heinz Hopf during my study time in Zürich (1949-1950). He had proved, for example, by these methods that the four-dimensional sphere has no almost complex structure. So I began to study Chern classes. At the time I did not know their fundamental properties. But I admired already the fact that for an algebraic surface $c_1^2 + c_2$ is always divisible by 12.

Well, when I came to Princeton in 1952, I was in a very good position to learn things very fast. Armand Borel was there, and from him I learned the systematic theory of characteristic classes. He had studied the cohomology of classifying spaces, in particular the relation between the cohomology of the classifying space of a Lie group and that of its maximal torus. From this, one could see that the Chern classes have to be regarded as elementary symmetric functions in formal 2-dimensional classes. I used this machinery and successful work with characteristic classes started.

On the other hand, from the very beginning of my Princeton time, I was together with Kodaira and Spencer who had contact with Serre in Paris. I learned the notion of holomorphic Euler number with coefficients in a line bundle or in a vector bundle and also about the conjecture of Serre that this number for an algebraic variety should be expressible in terms of characteristic classes. Later, i.e., at the end of 53, I was able to prove the Riemann-Roch theorem, for which I had a precise conjecture, in terms of the total Todd class of the variety and the Chern character of the vector bundle. I introduced these two concepts using this principle with elementary symmetric functions.

JPB : May I interrupt you here briefly? You mentioned two things on which I would like to get some further comments. You said that during the time you studied in Zürich you worked with Heinz Hopf. Was this time decisive for you in the sense of putting you in the right perspective?

F. Hirzebruch : Well, I came to Zürich really as a student of Heinrich Behnke in Münster. In the Münster school I had learned Complex Analysis, Function Theory of several variables. Under Hopf I learned Topology. But at that time he had also become interested in some algebraic geometrical questions. For example he had blown up points. He had invented this process of blowing-up a point, without knowing that this was a very familiar process in Algebraic Geometry. In Münster, through Karl Stein, I had learned about singularities of complex spaces, and then the Münster school and the Zürich school, so to speak, came together for me, and I wrote my dissertation about the resolution of singularities of 2-dimensional complex spaces. Hopf viewed this blowing-up process completely topologically, and he did it in order to have examples of complex manifolds, because he wanted to study whether a general manifold has almost complex structures or not. So he introduced these processes, and he also studied sections in various bundles and some of his results were intimately related to Chern classes.

JPB : Another point which I wanted to raise from what you said was the fact that you learned of the work of Serre through American colleagues. Does it mean that at that time relations between French and German mathematicians were not so strong?

F. Hirzebruch : No, not at all. I admired, and still admire the fact that already shortly after 1945 Henri Cartan came to Münster and gave a lecture at the colloquium. We were very young students, I had started to study at the end of 45, and H. Cartan came. This showed to me the close cooperation between the school of Behnke on Complex Analysis and the school of H. Cartan. In the years between 50 and 52, when I was in Erlangen, I sometimes went to Oberwolfach, and there I also met French mathematicians, but at that time I had not met Serre. When I came to Princeton it happened that, through Borel, Kodaira and Spencer, I learned about the work of Serre. Very important for me in Princeton was also the work of Thom on Cobordism Theory. With Thom I had very many exchanges of letters because the signature theorem (*i.e.* , the fact that the signature was expressible in terms of Pontryjagin numbers) that I conjectured, was the connecting point between two theories : the theory of holomorphic Euler numbers, etc .... and the theory of the corresponding expressions by characteristic classes. I didn't know whether these theories coincided but I wanted to find as many common properties of them as possible. The signature theorem for algebraic varieties (i.e., the fact that the signature can be expressed in terms of Chern classes) is a special case of this whole Riemann-Roch theorem. And I also saw that the Riemann-Roch theorem really only involves the first Chern class and the Pontryjagin classes of the variety, that is the Todd expression only does this, and that the signature only needs the Pontryjagin classes. I came to questions in Differential Topology which I could not solve. But then suddenly Thom's cobordism theory came into existence for me. His Compte-Rendus Note arrived at the Institute on June 2, 1953. Then, it was clear that the signature theorem holds. So I had one connecting point between the two theories. On this point, the whole proof of the Riemann-Roch theorem depended.

JPB : Let me come to another development in mathematics which has grown up very much. Could you comment a little bit on how the notion of K-theory developed? How did it appear? You and Sir Michael Atiyah were very much at the origin of the theory, how do you see that?

F. Hirzebruch : Perhaps for me the birth of K-theory, or my first knowledge or idea that K-theory existed, came about at the first Arbeitstagung in 1957 where Michael Atiyah and I were present, where Grothendieck came to give 4 lectures of 2 hours each on his Riemann-Roch theorem and where he introduced the K-groups using algebraic vector bundles. There this concept occured, but not in the topological category. And then perhaps, the next step was at the Arbeitstagung in 1958. Bott was there and at that time - in fact somewhat earlier - we learned about Bott periodicity and suddenly, results related to the Riemann-Roch theorem could be proved in the topological framework. I said at the very beginning that integrality properties (i.e., the fact that certain Chern numbers are divisible by large numbers) always fascinated me. In joint papers with Borel we studied integrality properties motivated by the Riemann-Roch theorem. There in particular the fact that the nth-Chern-class of a vector bundle over the $2n$-sphere is always divisible by $(n-1)!$ was mentioned. This and more general facts we could not prove completely but only up to powers of two. The reason is that really everything was reduced to the signature theorem, and in the formula for the signature only odd primes occur in the denominator. But by the Bott periodicity, all the stable complex vector bundles over the $2n$-sphere were known. I remember that at the Arbeitstagung in 58 I gave a lecture which had simply the title *"c_n divisible by $(n-1)!$ over the $2n$-sphere"*. Applications of Bott theory due to Milnor and Kervaire also played a role at this Arbeitstagung. This perhaps is one of the beginnings of K-theory. When I came to the Edinburgh Congress shortly afterwards, Atiyah told me that he had proved the integrality of the Todd genus which was true in the general situation for almost complex manifolds, but in my Princeton years I could only prove it up to powers of two. He proved this by embedding the manifold in a sphere, then constructing from the exterior algebra of the normal bundle a bundle over the sphere, and then applying the Bott result. This relation between the Todd genus and the exterior algebra of the normal bundle is close to Grothendieck's Riemann-Roch theorem in the case of embeddings. From this remark of Atiyah, which he told me at the Edinburgh congress, our papers on differentiable Riemann-Roch for mappings (a generalisation of the integrality theorems from manifolds to maps of differentiable manifolds) originated. This does not generalize Grothendieck's theorem, but is parallel to it, like the integrality theorem to my Riemann-Roch theorem. We had to introduce the K-groups and study their functorial properties also in the direction K-group of X to K-group of Y if we have a map from X to Y. Gradually properties of these K-groups were more and more studied. In our joint paper on K-theory and also on the K-theory of homogeneous spaces written at the Institute in Princeton during the academic year 59-60, we have used Bott theory to introduce the K-groups for all integral dimensions, and to have a complete (periodic) cohomology theory.

30th Arbeitstagung, 1991

The Arbeitstagung

JPB : On two occasions in your account of the development of K-theory, you mentioned the Arbeitstagung, at critical moments where things cristallised. You have been at the origin of this manifestation. In June 1991, the 30th Arbeitstagung took place during which you announced it would be the last one of the first series. Could you comment on the role that this very special meeting has had on the development of mathematics in Germany and elsewhere. Do you have thoughts about this adventure of yours?

F. Hirzebruch : I had the idea that one should have rather informal meetings, and that we would discuss the program at the beginning of the meeting and choose speakers. Speaker X could speak about the work of mathematician Y, and so we wanted to be very very flexible to hear the most recent developments. And this usually worked very well. If you look at the programs of the Arbeitstagungen from 57 to 91, you can see a good description of a certain stream in mathematics. We could look at recent new results often in relation to questions studied at the Arbeitstagung before. But one never knew in advance how it was going to be or what the centers of interest of a particular Arbeitstagung would be. Then the Arbeitstagung grew larger and larger, and the method of selecting speakers at the beginning became more and more difficult but it still more or less worked. At the 1991 Arbeitstagung I did it differently. With the advice of some other people in Bonn we chose almost half of the speakers in advance, and only the rest was chosen by public discussion. This worked very well. Sometimes people joke and say that all Arbeitstagungen were about the Riemann-Roch theorem in various forms. This included of course many lectures by Atiyah on the index theorem (the Riemann-Roch theorem as I proved it became a special case of the index theorem). This theorem solved many of the problems of my old Princeton days when I was wondering whether the Riemann-Roch theorem is true for compact complex manifolds without algebraic structure. The beginning of this general index theorem with corresponding conjectures was formulated by Atiyah in the Arbeitstagung 62. It involved the "$\hat{A}$-genus" which I had introduced in my Princeton time when I saw that the Todd genus involves only the first Chern class and the Pontryjagin classes. If in the Todd genus formula one puts the first Chern class equal to zero, one gets this $\hat{A}$-genus. In the context of spin structures these things lead to the conjecture of Atiyah and Singer on harmonic spinors formulated by Atiyah in Bonn : *"the spinor index equals the $\hat{A}$-genus"*. In the next years there were proofs, and the index theorem story continued with the equivariant index theorem, with the index theorem for families, etc., and last year we had for example a lecture by Soulé on the arithmetic Riemann-Roch theorem. So some people said to me : "we always do the same, always the Riemann-Roch theorem" but this of course is a joke and, outside this line of ideas, we had many other topics covered.

Topology and Number Theory

JPB : Quite often you mention that arithmetic considerations were important for you in the way you were looking at various problems : you spoke about divisibility properties and so on. Could you be a little more general and say how you see today the relation of Number Theory to the rest of mathematics?

F. Hirzebruch : Well, I can only speak of my experience because I do not know the most recent developments. The Todd polynomials involve Bernoulli numbers because the reciprocal of $e^x - 1$ is the essential ingredient in the Todd genus formula. The Bernoulli numbers occured also in Milnor's theory of exotic spheres through the polynomials for the signature. He also uses the $\hat{A}$-polynomials. This put the Bernoulli numbers into Topology. All divisibility properties which I mentioned could be applied to particular spaces, and then one could play with this. This gave sometimes results of elementary Number Theory.

Then, the next development where I learnt about such relations was the Atiyah-Bott-Singer index and fixed point theorem in all kinds of situations. There, one relates global invariants to local invariants. The local invariants are often algebraic numbers which are not a priori integers, and on the other hand, if one adds up the local contributions, one has to get an algebraic integer. One could use it to introduce invariants for group actions on manifolds. This has been done by Atiyah, Bott and Singer in their papers. And later, I also have studied this a lot. For example I have given a talk in Princeton at the opening of the new Fine Hall in March 1970 where I indicated that the expressions of the Atiyah-Bott-Singer fixed point theorem for isolated fixed points in the 4-dimensional case lead to number theoretical expressions known in the literature as Dedekind sums. Another place where I met the connections between Number theory and Topology was in my study of Hilbert modular surfaces where the compactification by cusps gives singularities. The resolution of these singularities gives cyclic configurations of curves - rational curves with certain self-intersection numbers which are negative integers. Therefore, suddenly, a topological situation, the cusp singularity, which topologically corresponds to a torus bundle over the circle, leads to a sequence of integers which is periodic, something which occurs also in a periodic continued fraction. Thus I joined up the cusp theory with periodic continued fractions, which is related to the theory of quadratic forms (a fact known since Gauss). This even motivated number theoretic theorems, and relates to the theories of Atiyah and others on invariants attached to odd-dimensional manifolds. In my case I considered 3-dimensional manifolds and η-invariants, and they are given by the values of L-functions at zero for certain number theorical situations.

SFB 40 and the Max-Planck-Institut-für-Mathematik

JPB : Bonn is a very attractive and important place in mathematics. Obviously, the existence for many years here in Bonn of a very active Sonderforschungsbereich, *which then led to the creation of the Max-Planck-Institut-für-Mathematik, played a very important role. Could you comment on how you see the impact the SFB 40 and the Max-Planck-Institut have had on the development of mathematics in Germany? It may be appropriate to connect this question to a more general one. In France and in Germany the organisations of research are quite different. Basically, the Deutsche Forschungsgemeinschaft helps groups at universities, and the Max-Planck-Institut-für-Mathematik has almost no permanent people in research.*

F. Hirzebruch : The Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) can be compared with the National Science Foundation in the United States. They accept applications from scientists of all fields including the humanities. They finance research projects in Universities : you can for example have an assistant supported for a number of years, but everything is limited in time. Then, the DFG developped a new system, a new instrument beginning roughly in 1968, the Sonderforschungsbereiche, "special research areas". A Sonderforschungsbereich is a very big research project with approximately 1.5 to 2 millions DM a year from which, depending on the subject, you can buy laboratory equipment or you can employ people for limited periods. The idea was to create "centers of gravity" for certain fields in certain places. We got such a program at Bonn University, the SFB 40 "Theoretical mathematics". From the very beginning, we tried to use this money for visitors from all over the world. People who had no jobs anywhere else could also come. In some sense they were not visitors because their only job was with us, but the job was limited for 3 years for example. This worked from 69 to 85 approximately : a SFB has a limited lifetime of 15 years. We had the chance to bring to Germany, to Bonn, leading foreign mathematicians who came as visitors, also young beginners from foreign countries, and have them interact with German mathematicians, those from Bonn, and those from outside. People from other universities directly after their doctor's degree could come to Bonn for a year or two and also assistants from other universities could take a leave of absence for a year and come. The SFB was a systematic instrument to have a very intense relationship between German mathematicians and those from many other countries. There had been plans to have a Max-Planck-Institut-für-Mathematik already around 1960 but this did not materialize, instead the Oberwolfach Institut was put on a sound financial basis. Later, the Max-Planck-Institut idea came up again because the SFB "Theoretical mathematics" had worked very successfully, but, as I said, the lifetime of such an SFB is at most 15 years. I discussed with the President of the Max-Planck-Society the possibility of having a Max-Planck-Institut-für-Mathematik with somehow the same functions as the SFB. This came to a successful end, and in 1982 the MPI was opened. First, it had a relatively small budget, and the SFB still existed. Then, the budget of the SFB went down to zero, and the Max Planck budget went up so that we had at least all the possibilities we had had before. The Max-Planck-Society (MPG) is a privately organised society but financed through public means (50 % federal gouvernment, 50 % from all the state governments), which has around 60 institutes throughout the country, and there never was one in mathematics. The other research institutes in the sciences have lots of permanent staff. They have to operate their big equipment for the experiments, and these things often go through many years. They have some visitors at the site. The MPG always wants to have international connections : they have a visitor program for all institutes. But they never had an institute which, so to speak, is entirely only for visitors. This was the idea for the Max-Planck-Institut-für-Mathematik. Of course, I had seen how Princeton's Institute for Advanced Study operated, and when I returned to Germany from Princeton in 1954 I thought that such an Institute in the long run should also exist in Germany. So the result was this SFB, later the MPI. For the Max-Planck-Society this was something very unusual. This MPI has a director, that is me, but I am still teaching at the University, my money even comes from the university, and right now the only permanent member at the professorial level is Don Zagier, but this may change in the near future. Otherwise, we have only visiting staff besides 4 mathematical assistants who have contracts without a limitation.

Mathematics in East Germany

JPB : Let me move to another area which I know is taking a lot of your time, and also is very important for the future of mathematics in Germany, namely the prospect of employment for mathematicians in the new Länder in the Eastern part of Germany. Could you very briefly - French mathematicians are not always aware of the way the situation develops - describe the situation at the moment, what are the prospects in your eyes and what are the comments you would like to make on this matter?

F. Hirzebruch : The difficulties arise from the fact that the universities in East Germany and also the Karl-Weierstraß-Institut-für-Mathematik of the Academy are overstaffed. They have too many people, and almost all appointments are for lifetime. People who did not really succeed very much in research work still had permanent positions. The Universities had many positions for teaching, and tutoring groups of students in exercises. They stayed permanently, and often new people were appointed. Thus a very great number of people exists in the so called "Mittelbau", between assistant and full professor. If you look at the Karl-Weierstraß-Institut we can say that (before all the changes happened) this institute had about 160 mathematicians employed for lifetime who were working only in research, and had no teaching duties. This is typical for the Academy construction in socialist countries where in all fields they have such institutes. Now, in the unification treaty (by which the DDR became part of the Federal Republic), it is said that the academy in this typical way should not function any more. These research institutes should get other structures and become smaller and more flexible, and research should be turned back to the universities. Of course, all this is very difficult to carry out. For example to put Academy people in the universities is very hard because in the universities there are already too many people and all the positions are full and many have to be cut. The Wissenschaftsrat, the science council in Germany which is the highest body advising the government, introduced committees which went through the institutes of the Academy (and later they will do this also for universities I assume), to make proposals for what should happen to them. In the case of the Karl-Weierstraß-Institut-für-Mathematik of the Academy, it was proposed that the part of this institute which operates in applied analysis and stochastics should continue to exist as a research institute with perhaps 50 mathematicians. This institute will be financed jointly by the federal government and the Land Berlin. It will not be a Max-Planck-Institute. Of course, if it works out, we would have something unusual in Germany, a research institute with a big number of mathematicians employed only for research. This would be something completely different from the scene we had up to now but it follows from the fact that the Karl-Weierstraß-Institut exists, and good and excellent parts have to be carried over into some new structure. Well, one hopes that some of these 50 positions are filled with people from other places, that one gets new blood. But I already spoke of this big number of 160. Many of them will have to go to industry or look for jobs somewhere else. Some will not find jobs but go into early retirement. This is all extremely difficult, and often very sad. This institute has also a very good section in what one could call pure mathematics (though I would not like to separate pure and applied mathematics). They have four very good groups in Number Theory, Dynamical Systems and Spectral Geometry, Partial Differential Equations, and Mathematical Physics, and these groups will perhaps be financed for a number of years through the Max-Planck-Society or in a different way, and then be attached to universities. One hopes that after five years they will be integrated into a university. I explained to you the plan for the Karl-Weierstraß-Institut-für-Mathematik as an example. You see already here all the difficulties. There are similar difficulties with the university departments because they are in many ways overstaffed, the whole structure has to be changed and adapted to the system we have in West Germany. We may take over some ingredients from the East German system but certainly not the method to have so many lifetime positions. That is simply impossible for financial reasons. It cannot be done any more.

JPB : So, overall, what is your estimate of the number of people who may really be in trouble, that is will have to change drastically their activities, I am speaking of mathematicians of course?

F. Hirzebruch : It could happen that in every university there are 20 people who are in such trouble. And in the Karl-Weierstraß-Institut already quite a number have found other jobs, but also there, some will be left who have such trouble or they will have trouble at least for a number of years. And certainly there are also considerations that one does not want people who were at the top only for political reasons to continue to have this influence. In every university the power structure, so to speak, the way the university was governed, has to be changed, and all this is not easy....

JPB : You spoke about the power structure. But for example the reappointment of people, or the fact that people get positions, do you believe that the decision will be made on purely scientific grounds or that there will be some interaction between the kind of position that they had before and the kind of offer they may receive... How is this made? Is this just purely made by academic committees?

F. Hirzebruch : This is a complicated question. There are complaints that people who had the saying (for political reasons, but they may also have been good mathematicians) continue to be influential. This would indicate that the structure was not changed very much. But now they have committees at every university who look into this, and the rules proposed by the science council, I mentioned before, say that these committees must have a number of people from outside the university, three should be from the old states, so that one really gets in the scientific opinions of people who are not connected with everything that happened there before.

JPB : So when you said people from outside you also meant mathematicians?

F. Hirzebruch : Yes. And in every Fachbereich, in mathematics, physics, chemistry, etc. we get such a committee, and of course there are Fachbereiche for which it is especially difficult such as sociology, history and law.

The European Mathematical Society

JPB : Let me look more into the future. You have been elected the first president of the European Mathematical Society at the constitutive meeting of this society in Madralin in October 1990. Could you tell us how you see the development of the cooperation between European mathematicians? Have you already a clear view of what could be the role of this European Mathematical Society in this process of cooperation?

F. Hirzebruch : Such a society is a rather complicated organism, and it is not so easy to get it working. We are now just on the way. Certainly, cooperation between mathematicians exists a lot in Europe and, what we should be instrumental in is to strenghten the cooperation between East and West. We should also help to stop the brain drain from East to West and the brain drain from Europe outside Europe, or a least to make it smaller. Of course we may not have the right means to do this. We must try to influence the European Community and get funds from them or from other places to help East European mathematicians to get stipends to come to the West at regular intervals not for full time jobs so that they return to their country. But, whether we are really able to help in this respect in any substantial way is not clear to me. But every small step should be taken. This is our responsability. If you see how the universities in Moscow and Leningrad look like where many of the senior professors have left and their students sit there, and they do not get courses any more, one feels that one should help and maybe invite these professors to Western European universities for half a year every year. Such a program could last for 5 years. Then they have connections with the West, they can have students in the West, they can bring students with them to the West but they always return part of the year. Such programs could help to stop the brain drain from the East to permanent jobs in Western Europe or America. But for this one needs money. The individual countries have to get ideas in this direction and try. I know that in France such programs exist. Soviet mathematicians come for periods of 1/2 year every year and then return. In Germany several people have applied for such a program. Whether we will get it, I don't know. In other countries perhaps this can be done also. Very helpful is the fact that the French mathematicians have started the preparation for the European congress. They did this before the European Mathematical Society came into existence but now we are cooperating with them in many ways. This first European Congress in Paris in July of 92 hopefully will also bring East and West together and then give us new ideas what to do in this respect.

JPB : You made the issue of either stopping or reducing the brain drain as one of the main aims for the E.M.S. Do you think that it will be possible to have direct contact with people at the European Community for example to explain to them that it is in the interest of Europe to really develop some kind of multinational programs to help that? In terms of financing compared to the budget of the EC, it is a very small thing. But do you think that contact at this very political level would be thinkable for the E.M.S. or that it is something which in fact would come only much later when the society is much more established?

F. Hirzebruch : We should try to have these contacts immediately. In fact we have a committee to work in the direction of such contacts and to prepare appointments for discussions with the politicians. I am afraid that this is a long process and that to get something on its way will take a lot of time. But maybe I am wrong. I hope I am wrong. At the moment I am more hopeful that first one starts in the individual countries to have small programs to show the EC how it is functioning and then one gets something bigger on the way. One has to fit in the existing programs of the EC. Maybe one has to make them introduce new programs which fit better.

JPB : Could you comment a little more on other programs of the EMS which you see as really crucial for establishing its image? For example I have heard about the possibility of having summer schools connected to this EMS. Do you see this as one possible development?

F. Hirzebruch : Yes, of course. There are many meetings in the world anyhow and especially in Europe. We should be concerned with new things which would be helpful for the relations between East and West or serve some special functions which cannot be done by existing summer schools. We have to think about something new and then get the European Science Foundation in Strasbourg or the EC to help us. The ESF for example has Euroconferences and programs in other fields. I spoke to them, and they would really like to get a foot into mathematics, they practically have no mathematical programs. That could be a way of starting something new. But we don't want to duplicate. In some sense there are already too many meetings.

JPB : So in a sense you are cautious but hopeful for the development of the EMS.

F. Hirzebruch : Yes.

JPB : I thank you for giving this interview. ■

Évariste GALOIS
• *Œuvres mathématiques*, 1846
suivies de
— *Influence de Galois sur le développement des mathématiques*, 1895, par Sophus LIE
052-7 France 117 F/*Étranger 132 F*

Félix R. GANTMACHER
• *Théorie des matrices, t. I et II*, 1966
035-7 2 tomes en 1 vol, France 540 F/*Étranger 606 F*

Carl Friedrich GAUSS
• *Recherches arithmétiques*, 1807
054-3 France 423 F/*Étranger 474 F*

Édouard GOURSAT
• ▭ *Cours d'Analyse mathématique*
t. I, 4ᵉ éd., 1924, *t. II*, 4ᵉ éd., 1925 *et t.III*, 3ᵉ éd., 1923
032-2 les 3 vol., France 981 F/*Étranger 1100 F*

Édouard GRIMAUX
• ▭ *Lavoisier*, 1743-1794, 2ᵉ éd., 1896
d'après sa correspondance, ses manuscrits, ses papiers de famille et d'autres documents inédits
095-0 France 297 F/*Étranger 333 F*

Jacques HADAMARD
• *Leçons de géométrie élémentaire*
t. I, 13ᵉ éd. 1947, *et t. II*, 8ᵉ éd., 1949
038-1 les 2 vol., France 684 F/*Étranger 768 F*

Werner HEISENBERG
• *Les principes physiques de la théorie des quanta*, 1932
080-2 France 189 F/*Étranger 213 F*

Hermann von HELMHOLTZ
• *Optique physiologique, t. I et II*, 1867
063-2 les 2 vol., France 981 F/*Étranger 1100 F*
• *Théorie physiologique de la musique*, 1868
074-8 France 468 F/*Étranger 524 F*

David HILBERT
• *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, 1902
Les 23 Problèmes
037-3 France 108 F/*Étranger 122 F*
• *Théorie des corps de nombres algébriques*, 1909, 1910 et 1911
043-8 France 378 F/*Étranger 426 F*

Camille JORDAN
• ▭ *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*
t. I 3ᵉ éd., 1909, *t. II*, 3ᵉ éd., 1913, *et t. III*, 3ᵉ éd., 1915
018-7 les 3 vol., France 891 F/*Étranger 999 F*
• *Traité des substitutions et des équations algébriques*, 1870
021-7 France 522 F/*Étranger 585 F*

Stephen C. KLEENE
• *Logique mathématique*, 1971
005-5 France 270 F/*Étranger 303 F*

Félix KLEIN
• *Le programme d'Erlangen*, nouv. éd. 1974
Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes
— *Préface* de Jean DIEUDONNÉ
— *Postface* du P. François RUSSO s.j.
011-X France 126 F/*Étranger 141 F*

Joseph-Louis LAGRANGE
• *Mécanique analytique*, 1788
051-9 France 423 F/*Étranger 474 F*

Trajan LALESCO
• *La géométrie du triangle*, 1952
007-1 France 135 F/*Étranger 152 F*

Antoine-Laurent LAVOISIER
• ▭ *Traité élémentaire de chimie, t. I et II*, 1789
096-9 2 tomes en 1 vol., France 495 F/*Étranger 555 F*

Henri LEBESGUE
• *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, 2ᵉ éd., 1928
059-4 France 324 F/*Étranger 363 F*
• *Les coniques*, 1942
022-5 France 189 F/*Étranger 213 F*
• *Leçons sur les constructions géométriques*, 1950
002-0 France 198 F/*Étranger 222 F*

Préfixe ISBN 2-87647 ▭ = ▭blong•

C. LEBOSSÉ & C. HÉMERY
• *Géométrie* (classe de Mathématiques), 1961
077-2 France 324 F/*Étranger 363 F*

Tullio LEVI-CIVITA
• *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*, 1932
072-1 France 144 F/*Étranger 162 F*

Paul LÉVY
• ▭ *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 2ᵉ éd., 1965
091-8 France 288 F/*Étranger 324 F*

Alexandre LIAPOUNOFF
• *Problème général de la stabilité du mouvement*, 1907
039-X France 234 F/*Étranger 264 F*

André LICHNEROWICZ
• *Éléments de calcul tensoriel*, 1950
000-4 France 96 F/*Étranger 108 F*

Ernst LINDELÖF
• *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*, 1905
060-8 France 180 F/*Étranger 202 F*

Hendrik-Antoon LORENTZ
• ▭ *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*, 2nd ed., 1916 (en anglais)
130-2 France 207 F/*Étranger 232 F*

Édouard LUCAS
• ▭ *Théorie des nombres*, 1891
042-X France 270 F/*Étranger 303 F*

Ernst MACH
• *La Mécanique*, 1904
006-3 France 333 F/*Étranger 373 F*

James Clerk MAXWELL
• *Traité d'Électricité et de Magnétisme*
t. I, 1885 *et t. II*, 1887
045-4 les 2 vol., France 990 F/*Étranger 1110 F*

Émile MEYERSON
• ▭ *La déduction relativiste*, 1925
088-8 France 252 F/*Étranger 282 F*

Gaspard MONGE
• *Géométrie descriptive*, 1799
065-9 France 207 F/*Étranger 232 F*

John von NEUMANN
• *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*, 1946
047-0 France 315 F/*Étranger 351 F*

Isaac NEWTON
• *Principes mathématiques de la philosophie naturelle, t. I et II*, 1759
070-5 les 2 vol., France 945 F/*Étranger 1060 F*

Julius PETERSEN
• *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*, 1880
030-6 France 135 F/*Étranger 152 F*

Émile PICARD
• ▭ *Traité d'Analyse*
t. I, 4ᵉ éd., 1942, *t. II*, 3ᵉ éd., 1925 *et t. III*, 3ᵉ éd. 1928
075-6 les 3 vol., France 891 F/*Étranger 999 F*

Henri POINCARÉ
• *Électricité et Optique*, 2ᵉ éd., 1901
028-4 France 567 F/*Étranger 635*
• *Théorie du potentiel newtonien*, 1899
024-1 France 342 F/*Étranger 383 F*
• *Calcul des probabilités*, 2ᵉ éd., 1912
001-2 France 216 F/*Étranger 243 F*
• *La Mécanique nouvelle*, 1924
Théorie de la Relativité, 1905-1909
023-3 France 135 F/*Étranger 152 F*
• *Théorie des tourbillons*, 1893
026-8 France 243 F/*Étranger 273 F*
• *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, 1902
027-6 France 243 F/*Étranger 273 F*

George POLYA
• *Comment poser et rédoudre un problème*, 2ᵉ éd., 1965
049-7 France 225 F/*Étranger 252 F*

HISTOIRE

QUELQUES SOUVENIRS

Du 6 au 10 juillet 1992 va se tenir à Paris le premier Congrès européen de mathématiques. Quarante-sept ans après la fin de la seconde guerre mondiale les mathématiciens d'Europe prennent enfin conscience des liens de solidarité qui les unissent. Soyons reconnaissants à ceux qui ont pris une telle initiative, notamment à la Société Mathématique Européenne de création récente, et aussi aux mathématiciens français qui ont voulu que ce premier congrès européen quadriennal se tienne à Paris.

Bien que je ne sois pour rien dans cette importante décision, je m'en réjouis profondément, car elle montre les progrès d'une idée qui me tient à cœur : celle de la solidarité entre nos peuples d'Europe. Puis-je me permettre, à cette occasion, d'évoquer quelques souvenirs personnels ?

Dès la fin de la guerre contre l'hégémonie hitlérienne, guerre qui a durement frappé ma famille (mon frère Louis, père de trois jeunes enfants, condamné à la décapitation lors de sa déportation en Allemagne, et mon cousin François Cuzin assassiné par les Allemands à cause de son action de résistance dans les Basses-Alpes), je retournai pour deux ans à Strasbourg avec l'Université à laquelle j'avais appartenu avant la guerre. Là il m'apparut nécessaire de renouer avec les collègues allemands et de suivre en cela l'exemple de Charles Ehresmann(1), d'autant plus que j'avais une dette personnelle de reconnaissance vis-à-vis de Heinrich Behnke(2) qui, pendant la guerre, avait donné d'inoubliables marques d'amitié pour ma famille. Je franchis donc le Rhin au début du mois de novembre 1946 pour me rendre, à travers la neige d'un hiver précoce, à l'Institut d'Oberwolfach récemment créé par Wilhelm Süss; j'y retrouvai, entre autres, Heinrich Behnke et Hellmut Kneser. Cela marqua le début de relations amicales et confiantes avec les collègues allemands. De retour à Paris en 1947, j'eus d'autres occasions de rendre visite au "Château" d'Oberwolfach (aujourd'hui démoli), à son excellent piano et à ses réserves de vins mosellans qui n'enlevaient rien à l'intérêt des enrichissantes discussions mathématiques.

Conscient de l'importance de l'initiative de Robert Schuman et de Jean Monnet le 9 mai 1950, je ne tardai pas, dans les années qui suivirent, à m'engager dans le militantisme européen. Puis en 1956 fut créé à Paris une "Association Européenne des Enseignants"; elle réunissait, dans ses sections nationales, des enseignants conscients de la nécessité de développer chez les jeunes le sentiment d'appartenance à une Europe unie, ainsi que de réformer les manuels d'histoire. C'est comme président de sa Section française que je pris l'initiative de réunir à Paris, en octobre 1960, des amis mathématiciens de huit pays d'Europe afin d'étudier les moyens d'harmoniser l'enseignement des mathématiques dans les universités d'Europe, dans le but de rendre possibles les échanges d'étudiants entre universités des différents pays au cours de leurs études. Il faut dire qu'à cette époque il y avait de grandes disparités dans l'enseignement des mathématiques, et que le succès d'une telle entreprise n'apparaissait pas assuré. J'ai eu la chance que ce colloque soit rendu possible par l'aide financière qui fut accordée par le Ministère français de l'Education Nationale, grâce à la compréhension du Directeur de la "Coopération avec l'étranger". Puis-je citer les noms des participants, dont certains ne sont plus vivants aujourd'hui, et qui tous firent preuve d'un tel désir d'aboutir que ce colloque eut un succès inespéré. Il y avait : pour l'Allemagne, Emil Artin et H. Behnke; pour la Belgique, L. Bouckaert et F. Bureau; pour le Danemark, W. Fenchel et B. Jessen; pour la France, H. Cartan, C. Choquet et P. Germain; pour l'Italie, A. Andreotti, E. Bompiani et

C. Cattaneo; pour les Pays-Bas, N. Kuiper; pour la Suède, A. Pleijel; pour la Suisse, D. Eckmann et G. De Rham. On se mit d'accord sur un "programme fondamental" à deux niveaux, et l'on adopta un découpage du premier niveau (propédeutique) en 7 blocs et du deuxième niveau en 9 blocs; ceci en vue de la création d'un "Livret européen de l'Etudiant" où les professeurs pourraient indiquer commodément les connaissances déjà acquises par l'étudiant qui change d'université. En quittant cette réunion, chacun des participants s'engageait, à titre individuel, à défendre le projet auprès des collègues de son pays.

En fait, cette initiative recueillit un écho si favorable qu'il fut décidé de tenir une seconde réunion pour étendre aux "mathématiques appliquées" les projets d'harmonisation. Cette fois, c'est Heinrich Behnke qui se chargea d'organiser cette seconde réunion à Düsseldorf, avec le soutien financier du gouvernement du Land de Rhénanie du Nord-Westphalie. Le colloque eut lieu en mars 1962. Il y fut décidé d'adjoindre aux 7 numéros du niveau propédeutique 3 nouveaux numéros, étant entendu que ce programme de 10 numéros serait commun à tous les étudiants, qu'ils se destinent aux mathématiques pures ou appliquées. Quant au deuxième niveau pour mathématiciens appliqués, on se mit d'accord sur un programme "souhaitable". Et afin que tout ce travail ne reste pas à l'état de projet, on mit au point les détails de l'édition du "Livret européen de l'Etudiant". C'est la maison Dunod qui se chargea de cette édition (à ses frais). Le livret en question se présente sous la forme d'un passeport de 48 pages, où les programmes sont imprimés en français et en anglais, avec 4 pages consacrées au mode d'emploi (en 4 langues); 14 page sont prévues pour les attestations des professeurs. Il faut reconnaître que ce passeport n'a pas été très souvent utilisé; mais l'existence d'un programme imprimé a eu, je crois, une influence décisive sur l'évolution de l'enseignement universitaire dans plusieurs pays.

Il y eut ultérieurement d'autres réunions consacrées à l'harmonisation de l'enseignement universitaire en Europe, dans diverses disciplines. L'une d'elles, organisée à Strasbourg par le Conseil de l'Europe en février 1969, donna l'occasion de charger N. Kuiper d'une enquête sur le programme du Livret européen de l'Etudiant. En octobre 1970 fut organisée à Grenoble une grande rencontre internationale consacrée à "l'Europe universitaire"; elle réunit 250 participants venus de 13 pays d'Europe. André Lichnerowicz y était chargé du rapport général, et Pierre Mendes-France était parmi les participants. J'y vis la preuve que les idées que nous avions tenté de lancer avaient commencé à gagner les milieux officiels.

Aujourd'hui nous avons la chance de pouvoir nous réunir avec nos collègues de l'autre moitié de l'Europe. Qu'ils soient les bienvenus à Paris en ce mois de juillet! J'espère que tous nous avons conscience des devoirs de solidarité que nous impose la nouvelle situation en Europe. ■

Henri CARTAN
Paris

---

(1) Ch. Ehresmann, professeur à l'Université de Strasbourg repliée à Clermont-Ferrand, s'était vu offrir par les autorités allemandes, dès 1940, un poste à l'Université allemande de Strasbourg, en qualité d'Alsacien. Bien que séparé de ses parents restés dans la capitale alsacienne, il avait refusé avec dignité et n'était rentré à Strasbourg qu'en 1945 avec l'Université française. Il fut alors l'un des meilleurs artisans de la réconciliation franco-allemande.

(2) H. Behnke avait réuni autour de lui, à Münster (Westphalie), une pléiade de jeunes chercheurs. Ma première visite à Münster, en 1931, est à l'origine de ma collaboration avec Peter Thullen. Parmi les autres élèves de Behnke, citons Karl Stein, Hans Grauert, Reinhold Remmert (ces deux derniers furent aussi les élèves de Stein après la guerre), Friedrich Hirzebruch (aujourd'hui Président de la Société Mathématique Européenne).

Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte.

15. bis 20. September 1890.

Abteilung I (Mathematik und Astronomie).

Fr. Meyer. Hilbert. Minkowski. Wiener. Wiltheiss. Henneberg. Dyck. Runge. Ueltzen. Kasten.

Schilling. Papperitz. Müller. Rodenberg. Wellmann. Klemm. Heffter. Roth.

H. Weber. A. Mayer. Lampe. G. Cantor. Kiepert. Schubert. Gordan. Sturm. Klein. Ritter. Hoppe. Schröder. Burkhardt.

LES DÉBUTS DES SOCIÉTÉS MATHÉMATIQUES EN EUROPE

En avril, s'est tenu à Paris le colloque "Mythes et réalités historiques de l'Europe mathématique", colloque satellite du prochain colloque européen de mathématiques. Objets de plusieurs communications, les sociétés mathématiques nationales, leur création, leur rôle, leur influence, ont été au premier plan des réflexions menées sur les XIXe et XXe siècles. Tant il est vrai que leur apparition est un trait marquant du développement de l'activité mathématique à partir de la deuxième moitié du XIXe siècle, élément nouveau et contradictoire de l'histoire des mathématiques en Europe, dans la mesure où, si ces sociétés structurent fortement les milieux mathématiques sur des bases nationales - voir nationalistes -, elles renforcent également les échanges internationaux.

Les sociétés : la nécessité de nouvelles structures

La simultanéité de la naissance des premières sociétés mathématiques nationales dans les années 1860 est un premier fait remarquable. D'autres disciplines s'étaient déjà dotées de ce type d'organisation. En Grande Bretagne, dès le début du siècle, en 1807 est créée la Geological Society, puis l'Astronomical Society en 1820 et la Chemical Society en 1841; en France, le mouvement se déclenche plus tard; la Société géologique de France date de 1830, suivie de nombreuses autres dont la Société des ingénieurs civils de France (1848), la Société chimique de Paris (1857) et la Société de Statistique de Paris (1860) qui, malgré leur nom, sont clairement des sociétés nationales, la Société chimique de Paris regroupant par exemple plus de 200 membres au début des années 1860.

Discipline académique traditionnelle et reconnue, liée aux sciences physiques, les mathématiques se sont pratiquées au cours du XIXe siècle en Europe à travers les différentes sociétés académiques "généralistes" dans lesquelles se retrouvaient, parmi d'autres scientifiques, les géomètres d'élite. Ce furent, les "Philosophical Societies", les différentes académies des sciences, toutes attachées à des villes malgré leur vocation nationale ou internationale. Ces structures, dans la deuxième moitié du XIXe siècle s'avèrent trop étroites, vu la croissance de la discipline. L'augmentation du nombre de personnes impliquées dans l'activité scientifique (enseignants, auteurs...), la spécialisation croissante des champs de recherche dans les diverses disciplines ont rendues caduques les formes sociales de l'activité scientifique des premières décennies du XIXe siècle, héritées en grande partie du siècle précédent; un nouveau type de société savante s'avère nécessaire, société non élitiste, ouverte à tous les géomètres, et consacrée exclusivement à l'avancement et à la propagation des connaissances mathématiques.

C'est ce qu'exprime Michel Chasles dans les conclusions inquiètes d'un rapport par ailleurs à l'accent optimiste sur les progrès de la géométrie en France, commandé par l'Empereur Napoléon III et publié en 1870 :

"On voit par ce qui précède que les mathématiques prennent à l'étranger des développements considérables. La variété et l'élévation des matières qui s'y traitent dans de nombreux périodiques, depuis plusieurs années, le prouvent incontestablement. Mais un simple fait suffirait pour montrer aux yeux de tous combien nous devons craindre de nous laisser arrièrer dans cette partie des sciences.

Nous possédons dans notre Société philomatique une section des Mathématiques, d'un nombre de membres limité, dont les communications ne paraissent que de loin en loin avec d'autres matières dans un bulletin trimestriel fort restreint; or il s'est formé à Londres, en 1865, une Société mathématique d'une centaine de membres, et le nombre s'en accroît encore; société dont les Proceedings, à l'instar de la Société royale de Londres et des autres académies de l'Angleterre, font connaître les travaux par des analyses plus ou moins étendues.

Ce fait auquel nous applaudissons, n'est-il pas, dans la culture des Mathématiques, un élément de supériorité future qui doit nous préoccuper?"

Une nouvelle société, un nouveau journal : c'est depuis 1865 les nouvelles données de la situation anglaise, premier pays à avoir, d'après Chasles, réalisé ces objectifs nécessaires à tout développement national ambitieux des mathématiques. La London Mathematical Society n'est cependant pas la première société mathématique en Europe. Trois ans plus tôt, en 1862, dans un tout autre contexte, des étudiants en réaction contre la faiblesse de l'enseignement créent à Prague la Société tchèque de physique et de mathématique et en 1864, à Moscou, le cercle mathématique de l'université est réorganisé en une société mathématique à l'échelle de la Russie, la Société mathématique de Moscou, qui édite à partir de 1866 les *Mathematischevski Sbornik.*

Les sociétés mathématiques des grandes puissances

Mais la conception qu'a Chasles de l'Europe est assez restrictive. L'Europe mathématique des années 1860 c'est en fait trois grandes puissances la France, l'Angleterre et l'Allemagne ou plutôt les pays de langue allemande auxquelles s'est ajouté depuis peu un nouveau venu en pleine croissance, l'Italie. A eux quatre, ces pays éditent plus des deux tiers de la centaine de journaux recensés dans le tome de 1869-1870 du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, les premiers étant l'Allemagne et l'Italie avec 22% des titres, l'Angleterre venant ensuite avec 13%, puis la France avec 11%.

Bousculant quelque peu la chronologie et nous pliant à la hiérarchie mathématique européenne de ces années, laissons momentanément les sociétés des nations "périphériques" pour nous attacher à celles des "grands" pays. La centaine de membres de la London Mathematical Society en 1870 - ils étaient 27, presque tous de l'University College de Londres, au premier meeting de janvier 1865 présidé par A. de Morgan - intéressa non seulement le français M. Chasles, mais également l'allemand Alfred Clebsch qui tenta de mettre au point des structures spécifiques pour l'ensemble des mathématiciens allemands. La situation en Allemagne était différente de celle décrite par M. Chasles, des sociétés mathématiques existant au niveau des Länder à partir de 1854 le mouvement s'étant accéléré à partir du milieu des années 1860. Il manquait cependant une organisation indépendante de mathématiciens à l'échelle du pays, le seul cadre national auquel ils participaient étant la Gesellshaft Deutscher Naturforscherund Ärzte (GDNA), société de type non élitiste, dotée d'une section de mathématiques depuis le milieu du siècle à l'activité irrégulière et peu satisfaisante. Malgré la mort de Clebsh en 1872, une première réunion eut lieu en 1873; les antagonismes entre les différentes écoles mathématiques furent les plus forts, et l'organisation qui devait permettre les échanges et tenter d'unifier les différents courants des mathématiques allemandes ne vit pas le jour. Ce n'est qu'une vingtaine d'années plus tard que, sous l'impulsion de Klein, la Deutscher Mathematiker Vereinigung (DMV) fut créée.

Sa création est l'occasion d'un débat spécifique au contexte allemand sur l'autonomie de la nouvelle société mathématique par rapport à la GDNA société scientifique mère; une éventuelle indépendance, semble mettre en péril aux yeux de certains mathématiciens les liens nécessaires des mathématiques avec la physique et ses applications. Cette question des applications des mathématiques, sans cesse mise au premier plan par Klein, marquera les débuts de la DMV.

En France, c'est dès les années 1870 que le projet de Chasles aboutira. Il est vrai que la nécessité d'une telle société semble manifestement plus vitale. Après la défaite de 1870, vécue comme comme une défaite de la science française devant la science allemande et le système d'instruction allemand, un train de mesures institutionnelles est décidé pour redresser cette science française dont plusieurs scientifiques déclarent haut et fort qu'elle est en péril. Plusieurs sociétés sont alors créées dans un élan tout à la fois scientifique et nationaliste. Parmi elles, la même année, en 1872, la Société française de physique et la Société mathématique de France (SMF) qui *"concourera à l'avancement des sciences et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées (...) par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres"* grâce à la parution de son *Bulletin* dès l'année suivante.

L'évolution en Italie est différente. Les mathématiciens italiens, mathématiciens militants du Risorgimento, développant à marche forcée les études et les recherches mathématiques dans les universités comme dans les écoles polytechniques, ne tentent pas de créer d'organisation nationale spécifique. La première société mathématique, en 1884, n'est pas une société nationale; c'est le Circolo matematico di Palermo dont la vocation internationale est clairement affichée. Ce n'est qu'en 1908, à la suite d'un appel adressé aux professeurs de mathématiques des établissements secondaires et supérieurs de l'Italie, que sera créée une société mathématique nationale, la Societa italiana di Matematica, dont l'orientation focalisée sur les mathématiques scolaires - le discours inaugural précise que la société doit faire converger les efforts vers un seul but : faire bénéficier l'école des progrès de la science - est originale.

Dès sa création, la Société mathématique de France regroupe, avec ses 150 sociétaires, plus d'adhérents que la London Mathematical Society. Cela semble cependant peu face aux 500 et quelques membres de la Société tchèque de mathématique et de physique dont le rôle en Bohême est à la fois politique et scientifique. La société, relevant le défi de la formation en masse d'enseignants scientifiques des lycées en langue tchèque, s'oriente, avec son journal créé en 1872, vers les professeurs, les étudiants et les lycéens.

Les choix de la Société mathématique de Moscou, dont le but est d'organiser la communauté pour développer le travail dans les sciences mathématiques, sont pour une part communs à ceux de la société tchèque; en vue de l'éducation mathématique du pays, c'est en russe que sont écrits les premiers numéros de sa revue dont une partie est adressée spécifiquement aux étudiants. Seulement, l'évolution des deux sociétés, placées dans des contextes politiques nationaux différents, n'est pas la même. La société de Moscou abandonnera en effet rapidement le champ de l'éducation universitaire, sa revue publiant essentiellement des articles de recherche originaux et s'ouvrant aux langues étrangères. Le nombre d'adhérents n'évoluera pas non plus de la même façon; en 1914 la société russe compte 116 membres, la société tchèque plus de mille mais dont la moitié sont professeurs de lycée.

Les sociétés et l'avancement des sciences mathématiques

Dans les "grands" pays de l'Europe, les sociétés mathématiques comprennent aussi leur rôle de façon diverse. L'avancement des sciences mathématiques, but reconnu de la plupart de ces sociétés, pose de nombreuses questions aux milieux mathématiques. Dans cette période, où nombre de branches mathématiques se transforment et prennent le caractère moderne qu'on leur connait aujourd'hui, où l'évolution extrêmement rapide des problématiques, des méthodes, des objets bouscule quelque peu les mathématiciens, où le développement industriel conduit à poser avec urgence, dans toute l'Europe, les questions du rôle et de la place des mathématiques et de leur enseignement dans la société, les sociétés mathématiques s'impliquent en effet différemment dans l'ensemble des débats.

Le cas de la Société mathématique de France et de la Deutsche Mathematiker Vereinigung en offre un exemple. L'évolution des effectifs des deux sociétés témoigne déjà de différences que leur bulletin respectif permet de mieux cerner. Dès sa première année la DMV dépasse le nombre de sociétaires nationaux de la SMF, l'écart ne cessant de croître dans les décennies suivantes : si en 1891 les effectifs sont encore du même ordre - 200 à la DMV pour 160 à la SMF - il n'en est plus de même en 1914, le nombre de sociétaires allemands de la DMV ayant plus que doublé alors que celui des sociétaires français a stagné depuis la création 40 ans plus tôt. Le "bon score" de la DMV s'explique par son engagement dans l'ensemble de la vie mathématique, intéressée à la fois aux travaux mathématiques et aux questions et débats liés à l'enseignement tant supérieur que secondaire qui préoccupent alors tous les mathématiciens en Europe. Le *Jahresbericht* de la DMV après avoir consacré ses premiers tomes uniquement à des mémoires mathématiques, publie dans les première années du XXe siècle l'analyse d'une soixantaine de traités, les sommaires d'une trentaine de journaux, les programmes d'une cinquantaine d'universités allemandes, suisses, américaines, anglaises et française, le singulier étant ici hautement symbolique, seul les programmes de l'université de Paris figurant dans la revue. Il publie également à côté de mémoires originaux, des revues historiques sur les évolutions récentes d'un sujet et des articles sur les réformes nécessaires de l'enseignement des mathématiques. Utile à tous les acteurs de la vie mathématique nationale, la Société a ainsi vocation à regrouper aussi bien les professeurs du supérieur que les professeurs du secondaire, dans l'enseignement classique et universitaire comme dans l'enseignement polytechnique.

La SMF au contraire a dès l'origine une conception très différente de son rôle, à savoir promouvoir les recherches mathématiques des sociétaires et traiter de questions mathématiques à l'exclusion de toute autre. Son *Bulletin* montre qu'elle a en fait une conception très étroite de ce que sont les questions mathématiques; aucune question liée à l'enseignement, aucune information sur l'actualité mathématique et universitaire nationale ou internationale, aucun des enjeux sociaux ou épistémologiques du développement des activités mathématiques de ces années n'y sont évoquées. Concernée par les seuls travaux mathématiques, la SMF recrute dans un milieu plus étroit que la DMV. Si elle a un réel succès chez les universitaires, les professeurs du secondaire (classique comme technique) y sont peu nombreux; d'autre part, les ingénieurs polytechniciens des premières années qui représentaient la moitié des sociétaires à la création, ne s'y retrouvent plus.

La position de la SMF, qui n'évoluera pas jusqu'en 1914, fait d'une certaine façon figure d'exception parmi les sociétés mathématiques dont le nombre a augmenté depuis le début du siècle avec la création de la société physico-mathématique bulgare en 1896, la société mathématique de Vienne en 1904, la société mathématique italienne en 1908, la société mathématique suisse en 1910, une association des mathématiciens scandinaves en 1910, la société mathématique espagnole en 1911 (voir tableau). Regroupant à cette époque en très grande majorité, sinon en quasi totalité, des enseignants, les sociétés mathématiques se donnent une vocation plus large que la seule promotion des travaux de recherches de leurs membres. La déclaration suivante adressée en 1894 à la réunion annuelle de l'American Mathematical Society (AMS) pourrait résumer leur objectif :

"Finally, and I might say above all, it is the object of the Society that every member should be stimulated to the most successful effort possible in his own branch of mathematical labor, whatever it may be. (...) But who ever may investigate, and who ever may write, it is the lot of almost all of us in one way or another to teach. For this reason it is plain that this Society is, and must always remain, a society of teachers. Any tendancy to restrict its usefulness solely to the paths of investigation and publication should, for every reason of prudence and wisdom, be resisted."

La scène internationale

Cette référence à la société américaine, au delà de son contenu, est utile pour préciser dans cet article consacré à l'Europe que depuis les années 1860, années où débute l'histoire des sociétés nationales de mathématiques, le paysage mathématique international a changé et que l'Europe n'est plus - si elle l'a jamais été - seule au monde. L'AMS, créée en 1894 à partir de la New York Mathematical Society fondée en 1888, devient dans les premières années du XXe siècle la plus importante des sociétés mathématiques quant au nombre de sociétaires *autochtones*. En Europe, où les premiers étudiants américains ont fait leur apparition en Angleterre et surtout en Allemagne dès les années 1880, elle prend pied au début du siècle et déferle alors sur les sociétés mathématiques du continent. En 1914, ce sont les mathématiciens américains qui forment le groupe le plus important d'étrangers à la Société mathématique de France - ils sont 26 soit un quart des sociétaires étrangers - et à la London Mathematical Society où, avec une trentaine de membres, ils représentent 40% des membres étrangers. A la Deutscher Mathematiker Vereinigung ils sont 75 soit, là encore, environ un quart des sociétaires étrangers, les sociétaires étrangers les plus nombreux à la DMV étant cependant les mathématiciens d'Autriche-Hongrie.

L'entrée en scène des mathématiciens américains coïncide avec la mise sur pied en Europe d'une nouvelle structure, les congrès internationaux, qui correspond à un deuxième stade de l'organisation de l'activité mathématique après l'établissement des sociétés nationales. Leur premier objectif est *"de provoquer des relations personnelles entre les mathématiciens des différents pays"*. Même si le nombre de sociétaires étrangers a beaucoup progressé au fil des années dans certaines sociétés nationales, les échanges entre ces sociétés semblent en effet avoir été assez modestes, une fois réalisé le rituel échange de publications. La comparaison du nombre d'étrangers dans ces sociétés nationales (voir tableau) avec celui des membres non-italiens de l'organisation internationale sicilienne plus qu'italienne le Circolo matematico di Palermo qui en regroupe à lui seul plus de 600 en 1914, montre l'attraction et l'efficacité toutes relatives du cadre national pour le développement des échanges internationaux.

Le premier congrès international ayant eu lieu en "terrain mathématique neutre" à Zurich en 1897, les suivants sont organisés avec l'aide des sociétés des grands pays mathématiques. Ainsi, la SMF reçoit le congrès international en 1900 à Paris où se tient l'exposition universelle, la DMV celui d'Heildelberg en 1904. En 1908, le congrès a lieu à Rome et quatre ans plus tard à Cambridge. La confrontation des données relatives à la participation aux congrès internationaux et des données sur les effectifs des sociétés peut permettre d'avoir une estimation de la place effective des sociétés dans leur propre pays et sur la scène internationale (voir tableaux). Mais le fait marquant de ces premiers congrès internationaux, c'est l'importance croissante des mathématiciens n'appartenant pas aux grandes puissances mathématiques traditionnelles comme les mathématiciens de Russie, d'Europe centrale, ou d'Amérique du nord, ces derniers formant le groupe étranger le plus nombreux à Cambridge.

Le sixième congrès international devait se tenir en 1916 à Stockholm, la ville de Mittag Leffler et des *Acta Mathematica*, symbole d'une réussite mathématique internationale. Mais cette année-là les sociétés mathématiques emportées par la guerre avaient déjà radié de leurs effectifs les mathématiciens "ennemis". L'Europe mathématique est coupée politiquement en deux, et le demeurera pendant de longues années après cette guerre. A Strasbourg, en 1920, lors du premier congrès international organisé par la toute nouvelle Union mathématique internationale à laquelle ont adhéré les sociétés mathématiques "alliées", il manque beaucoup de monde. Mais, sur les plans nationaux, de nouvelles communautés s'organisent, de nouvelles sociétés mathématiques sont créées : la société grecque, la société norvégienne en 1918, la société polonaise en 1919.

Le paysage mathématique des années 1920, au delà des circonstances directement politiques, est radicalement différent de celui du XIXe siècle. Si les sociétés mathématiques sont les éléments nouveaux et structurants du paysage institutionnel, elles ont également joué un rôle certain dans l'évolution des mathématiques elles-mêmes, évolution au moins aussi importante que celle des formes sociales de leur exercice.

Les adhérents des principales sociétés mathématiques

	1866	1873	1890	1895	1910	1914
London Mathematical Society*						
sociétaires nationaux	69	113	200	-	215	-
sociétaires étrangers			10		76	
Société mathématique de Moscou						
sociétaires nationaux	12	–	–	–	–	91
sociétaires étrangers						21
Société mathématique de France						
sociétaires nationaux	–	141	157	156	185	178
sociétaires étrangers	–	6	58	55	92	100
Deutsche Mathematiker-Vereinigung*						
sociétaires nationaux	–	–	192	273	454	480
sociétaires étrangers	–	–	16	54	300	289
American Mathematical Society						
sociétaires nationaux	–	–	–	251	618	709
sociétaires étrangers	–	–	–	–	50	38
Société italienne de mathématiques*						
sociétaires	–	–	–	–	125	–
Société suisse de mathématiques						
sociétaires	–	–	–	–	–	102

* Pays possédant d'autre(s) société(s) mathématique(s) :

1) En Grande-Bretagne, outre la London Mathematical Society, existe l'Edimborough Mathematical Society, fondée en 1883 regroupant, en 1914, 199 britanniques et 20 étrangers.

2) En Allemagne, outre la Deutsche mathematishe Vereinigung, existe la Berliner mathematische Gesellschaft créée en 1901 qui compte, en 1914, 260 allemands et 32 étrangers.

3) en Italie existe depuis 1884 le Circolo matematico di Palermo qui compte, en 1914, 306 italiens et 618 étrangers.

L'Europe mathématique dans les congrès internationaux (1897-1912)

	1897 Zürich	1900 Paris	1904 Heidelberg	1908 Rome	1912 Cambridge
Allemagne	42	27	*173	120	53
Amér. nord	7	18	15	16	65
Belgique	3	11	2	4	5
Europe centr.	18	17	29	63	46
France	23	*98	24	63	39
Italie	21	22	12	*190	35
Pays scand.	13	12	21	9	19
Roy.-Uni	3	12	7	22	*221
Russie	13	14	30	19	30
Suisse	*60	7	12	16	8
Total partip.	208	254	336	535	574

* Pays organisateurs du congrès cette année-là.

■

Hélène GISPERT
Paris

LES PREMIERS CONGRÈS INTERNATIONAUX (Européens) DE MATHÉMATIQUES Zürich (1897), Paris (1992)

Si tous ceux qui le souhaitent ont reçu les premières annonces du Congrès Européen de Mathématiques de Paris (1992), beaucoup n'ont pas reçu la lettre d'invitation, le règlement et le programme du premier Congrès International de Mathématiques de Zürich (1897). Aussi je me permets de leur communiquer ci-après :

- lettre d'invitation
- programme
- titres des conférences.

Que de chemins parcourus aussi bien dans le développement des mathématiques, dans les préoccupations des Scientifiques que dans la situation politique et économique des pays participant à ces congrès!

En 1897, trois pays faisaient figure de leaders dans le monde de la recherche mathématique : l'Allemagne, l'Italie et la France. L'allemand et le français étaient, à peu près à égalité, les deux langues utilisées par les conférenciers. Les Mathématiciens Italiens étaient les plus nombreux, parmi eux de très grands savants qui ont laissé leur nom à des théorèmes ou des figures mathématiques : Enriques, Peano,... L'éloignement géographique ne semblait pas un obstacle à la participation puisque trois Mathématiciens Russes ont donné une conférence. Il faut cependant s'étonner de l'absence de Mathématiciens Anglais, avaient-ils des difficultés pour traverser la Manche?

Le programme très mondain du Congrès de Zürich fait sourire aujourd'hui. En effet les Mathématiciens étaient très peu nombreux (inutile de limiter le nombre de participants!), et ce Congrès ressemblait plutôt à une fête de famille entre convives de bonne compagnie. Si, depuis Pascal, certains se préoccupaient des relations entre science et philosophie (voir conférence de Bougaïev), beaucoup semblaient heureux dans leur monde mathématique et l'idée d'organiser des tables rondes comme "Femmes et Mathématiques" ou "Mathématiques et grand public" leur aurait semblé saugrenue. Aujourd'hui, les mathématiciens ressentent le besoin de s'ouvrir au monde extérieur, d'être utiles dans d'autres domaines.

Pourtant les organisateurs des Congrès de 1897 et 1992 sont motivés par les mêmes idées : "donner un aperçu de l'état actuel des diverses branches des mathématiques et offrir l'occasion de traiter certaines questions d'importance reconnue" (Article 1 du règlement de 1897); "les conférences plénières et en parallèle ont pour but de faire connaître à un large public de mathématiciens,..., des thèmes de recherches ayant donné lieu récemment à des développements importants" (programme scientifique, CEM, 1992).

Aujourd'hui un rapprochement très fructueux entre mathématiciens et physiciens se dessine, mais est-ce une idée nouvelle? La conférence de Henri Poincaré en séance d'ouverture du Congrès de Zürich s'intitulait : "Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique"! Une table ronde en 1992 s'intéresse aux rôles des mathématiques dans les politiques éducatives; mais est-ce une idée nouvelle? La conférence de F. Klein, en clôture du Congrès de Zürich, avait pour titre : "Sur l'enseignement des Mathématiques Supérieures"!

Vingt et un congrès internationaux de Mathématiques ont été organisés depuis le premier à Zürich en 1897, et seize d'entre eux se sont tenus en Europe. Ils ont été tous une occasion privilégiée de rencontres et d'échanges d'idées nouvelles. De grandes théories y ont été exposées. Puissent les congrès européens être aussi fructueux!

Lettre d'invitation

Congrès International des mathématiciens, à Zürich, en 1897

Zürich, Janvier 1897

Monsieur,

Vous n'ignorez pas que l'idée d'un congrès international des mathématiciens a été, dans ces derniers temps surtout, l'objet de nombreuses délibérations de la part des savants intéressés à sa réalisation. Il leur a paru, en raison des excellents résultats obtenus dans d'autres domaines scientifiques, par une entente internationale, qu'il y aurait de très sérieux avantages à assurer l'exécution de ce projet.

A la suite d'un échange de vues très actif on tomba d'accord sur un premier point. C'est que la Suisse, par sa situation géographique centrale, par ses traditions et son expérience des congrès internationaux paraissait toute désignée pour tenter un premier essai de réunion des mathématiciens. On voulut bien ensuite choisir Zurich comme siège du congrès.

Les mathématiciens de Zurich ne se font aucune illusion sur les difficultés qu'ils auront à surmonter. Mais, dans l'intérêt même de cette entreprise, ils ont pensé ne pouvoir décliner les ouvertures si honorables qui leur ont été faites de tous côtés. Ils se décidèrent donc à prendre toutes les mesures préparatoires pour le futur congrès et à contribuer à sa réussite dans la mesure de leurs forces. Ainsi se constitua, avec le concours de mathématiciens d'autres nations, le comité d'organisation soussigné, chargé de **réunir à Zurich, en 1897, les mathématiciens du monde entier.**

Le congrès, auquel vous êtes cordialement prié d'assister, aura lieu, à Zurich, les 9, 10 et 11 août 1897, dans les salles de l'Ecole polytechnique fédérale. Le comité ne manquera pas de vous communiquer, en temps opportun, le texte du programme arrêté en vous priant de lui envoyer votre adhésion. Mais, dès à présent, il est permis d'observer que les travaux scientifiques et les questions d'ordre administratif porteront essentiellement sur des sujets d'intérêt général ou d'importance reconnue.

Les congrès scientifiques ont aussi ce précieux avantage de favoriser et d'entretenir les relations personnelles. Le comité local ne manquera pas d'accorder toute sa sollicitude à cette partie de sa tâche et, dans ce but, il élaborera un modeste programme de fêtes et de réunions intimes.

Puissent les espérances fondées sur ce premier congrès se réaliser pleinement! Puissent de nombreux participants contribuer par leur présence à créer, entre collègues, non seulement des rapports scientifiques suivis, mais encore des relations cordiales basées sur une connaissance personnelle! Puisse enfin notre congrès servir à l'avancement et au progrès des sciences mathématiques!

H. Bleuler, Président du Conseil de l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. H. Burkhardt, Prof. à l'Université de Zurich. L. Cremona, Prof. à Rome. G. Dumas, Assistant à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. J. Franel, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. C. F. Geiser, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. A. Co. Greenhill, Prof. à Woolwich. A. Herzog, Directeur de l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. G. W. Hill, Prof. à West-Nyack (U. S. A.). A. Hurwitz, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. F. Klein, Prof. à Gœttingue. A. Markoff, Prof. à Pétersbourg. F. Mertens, Prof. à Vienne. H. Minkowski, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. G. Mittag-Leffler, Prof. à Stockholm. G. Oltramare, Prof. à Genève. H. Poincaré, Prof. à Paris. J. Rebstein, Assistant à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. F. Rudio, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich. K. VonderMühll, Prof. à Bâle. F. H. Weber, Prof. à l'Ecole polyt. fédérale, Zurich.

Adresser les correspondances concernant les affaires du congrès à M. le Prof. Geiser, Kusnacht-Zurich.

Programme

Le programme mettait en valeur cinq conférences : une de F. Rudio *"Sur le but et l'organisation des congrès internationaux de mathématiques"* et quatre mathématiques : celles de H. Poincaré, de A. Hurwitz, de P. Peano et de F. Klein (voir leur titre plus loin). Il donnait aussi la liste des activités plus mondaines qui sont résumées ici :

Le prix de la carte de fête est de 25 fr. Elle confère au porteur la qualité de membre du congrès, lui donne le droit d'assister à toutes les séances, conférences, discussions et délibérations énumérées dans le programme ainsi qu'aux réjouissances suivantes: Collation à la Tonhalle, dimanche 8 août; Banquet à la Tonhalle (vin compris), 9 août; Promenade en bateau à vapeur, 9 août; Soirée vénitienne, 9 août; Course à l'Ütliberg, 11 août; Banquet à l'Ütliberg (vin compris), 11 août.

En outre elle l'autorise à se procurer, au prix de 15 fr. la carte, une ou plusieurs cartes de fête pour dames.

Il n'y a pas de tenue officielle.

Titres des conférences

Wissenschaftliche Vorträge

A. Vorträge der ersten Hauptversammlung

H. Poincaré à Paris. — *Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique.*
A. Hurwitz in Zürich. — *Über die Entwickelung der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen in neuerer Zeit.*

B. Vorträge der Sektionssitzungen

1. Sektion : Artihmetik und Algebra

H. Weber in Straßburg. — *Über die Genera in algebraischen Zahlkörpern.*
C. Reuschle in Stuttgart. — *Konstituententheroie, eine neue, prinzipielle und genetische Methode zur Invariantentheorie.*
C. Stéphanos à Athènes. — *Sur les systèmes associatifs de nombres symboliques.*
P. Gordan in Erlangen. — *Resultante ternärer Formen.*
F. Enriques à Bologne. — *Sur les problèmes qui se rapportent à la résolution des équations algébriques renfermant plusieurs inconnues.*
E. Schröder in Karlsruhe. — *Über Pasigraphie, ihren gegenwärtigen Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien.*
Gustav Rados in Budapest. — *Zur Theorie der adjungierten quadratischen Formen.*
J. Pervouchine à Perm. — *Formules pour la détermination approximative des nombres premiers, de leur somme et de leur différence d'après le numéro de ces nombres.*
W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.. — *Über kettenbruchäbnliche Algorithmen.*
L. Stickelberger in Freiburg i. Br.. — *Über eine neue Eigenschaft der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper.*
Ch. de la Vallée Poussin à Louvain. — *Sur la théorie des nombres premiers.*

2. Sektion : Analysis und Funktionentheorie

F. Brioschi à Milan. — *Sur une classe d'équations du cinquième degré résolubles algébriquement et la transformation du onzième ordre des fonctions elliptiques.*
É. Picard à Paris. — *Sur les fonctions de plusieurs variables et en particulier les fonctions algébriques.*
J. Hadamard à Paris. — *Sur certains applications possibles de la théorie des ensembles.*
S. Pincherle à Bologne. — *Remarque relative à la communication de M. Hadamard.*
É. Borel à Paris. — *Remarque relative à la communication de M. Hadamard.*
N. Bougaïev à Moscou. — *Les mathématiques et la conception du monde au point de vue de la philosopie scientifique.*
L. Autonne à Lyon. — *Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes.*
Z. de Galdeano à Saragosse. — *L'unification des concepts dans les mathématiques.*

1. Sektion : Geometrie

Th. Reye in Straßburg. — *Einige neue Eigenschaften des quadratischen Strahlenkomplexes*
F. Gerbaldi a Palermo. — *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.*
C. Burali-Forti à Turin. — *Les postulats pour la Géométrie d'Euclide et de Lobatschewsky.*
J. Andrade à Rennes. — *Statique non-euclidienne.*
G. Fano in Rom. — *Über Gruppen, inbesondere kontinuierliche Gruppen von Cremona-Transformationen der Ebene und des Raumes.*
H. Brunn in München. — *Über verknotete Kurven.*

2. Sektion : Mechanik und mathematische Physik

A. Stodola in Zürich. — *Über die Beziehungen der Technik zur Mathematik.*
N. Joukowsky in Moskau. — *Ein neuer gyroskopischer Apparat.*

5. Sektion : Geschichte und Bibliographie

H.G. Zeuthen à Copenhague. — *Isaac Barrow et la méthode inverse des tangentes.*
G. Eneström in Stockholm. — *Über die neuesten mathematisch-bibliographischen Unternehmungen.*
G. Loria à Gênes. — *Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes.*

C. Vorträge der zweiten Hauptversammlung

G. Peano a Torino. — *Logica matematica.*
F. Klein in Göttingen *Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts.* ■

Micheline VIGUÉ (Université Paris VII)

INSTITUTS EN EUROPE

Le dernier numéro de la Gazette comportait deux articles sur des Instituts en gestation en France. Il s'agit de l'Institut Henri Poincaré (à Paris) et d'un institut à "thème" à Marseille. L'IHP devrait bientôt comprendre le "Centre Emile Borel" que sera un centre de recherches à thèmes annuels ou semestriels au côté de la "Maison des Mathématiques", de la Bibliothèque Henri Poincaré et des amphithéâtres rénovés. Du côté de Marseille, nous savons depuis le 30 janvier dernier que le Comité Interministériel d'Aménagement du Territoire a décidé de créer deux unités propres du CNRS sur le site de Luminy, mathématiques discrètes d'une part, topologie et modélisation d'autre part. Nous reviendrons ultérieurement sur la réalisation de ces projets.

Il existe déjà en Europe plusieurs institutions voisines qui accueillent régulièrement des mathématiciens autour de thèmes ou à l'occasion de rencontres ou de congrès. Nous en présentons quelques-unes déjà installées (Oberwolfach, CIRM pour les colloques; Bielefeld par ailleurs) ou en gestation (Newton). Pour le Max Planck Institut de Bonn, nous renvoyons à l'interview de F. Hirzebruch qui ouvre ce numéro.

Le CIRM ... – Marseille-Luminy

Créé en 1981 à l'initiative de la Société Mathématique de France, le CIRM (Centre International de Rencontres Mathématiques) a pour vocation l'accueil de colloques de Mathématiques. Chaque année se tiennent une trentaine de colloques de taille moyenne (environ 45 participants) et de niveau international. Le Centre accueille également des cours de DEA résidentiels et des petits groupes de travail.

L'hôtellerie et le restaurant du centre sont situés dans une ancienne bastide, au cœur d'un parc boisé, sur le campus universitaire de Luminy, au sud de Marseille, et non loin des Calanques.

En 1991 a été inauguré le nouveau bâtiment du CIRM. Il jouxte la bastide et abrite la bibliothèque et la nouvelle salle de conférences, ainsi que la salle informatique. Un programme de rénovation de la bastide (chambres, rez-de-chaussée), débutant en 1993, permettra d'offrir aux participants des colloques de meilleures conditions d'accueil et de séjour.

Le statut du CIRM est celui d'un établissement de la SMF d'une part, et celui d'une UMS (Unité Mixte de Service) du CNRS d'autre part. Celle-ci, créée au 1er janvier 1992, regroupe les partenaires impliqués dans le CIRM : CNRS, DRED du MEN, SMF. Ce changement de statut a permis une réactualisation des structures : le Conseil d'Administration et le Conseil Scientifique. Ainsi le Conseil Scientifique a été réduit de moitié (10 membres) mais se réunira deux fois par an, ce qui doit permettre une étude en "continu" des demandes de colloques.

Quelques nouveautés :

Les conditions d'accueil des petits groupes de travail ont été améliorées : un groupe de six personnes maximum pourra bénéficier de la gratuité du séjour pendant une semaine, sur envoi d'un programme scientifique, en fonction des places disponibles et de l'enveloppe financière dédiée à ce programme. Le transport reste à la charge des participants.

Les résumés des colloques, ainsi que le rapport scientifique de chacun des colloques seront rassemblés en volumes semestriels et seront diffusés dans toutes les bibliothèques de France ainsi que sur le serveur du CIRM (utiliser ftp anonymous).

Un programme d'acquisition de périodiques anciens permettra au CIRM de combler les lacunes existant dans ce domaine. Déjà, grâce au travail des bibliothécaires de l'IHP (Mme Nocton et Mr Dantron), le CIRM a pu bénéficier des doubles des périodiques anciens de la bibliothèque de l'IHP.

Le CIRM a entrepris le développement de ses relations internationales, notamment en-vers les centres équivalents dans le monde, ceci afin d'améliorer les échanges d'informations. D'autre part, les centres d'Oberwolfach et du CIRM projettent de déposer conjointement auprès de la CEE une demande de reconnaissance comme centre d'Euroconférences

Le CIRM améliore aussi les moyens informatiques offerts aux organisateurs et aux participants des colloques. Ainsi, en envoyant un message vide à : *"cirminfo@cirm.univ-mrs.fr"* on reçoit en retour la liste des colloques à venir, la marche à suivre pour organiser un colloque au CIRM et les renseignements pratiques (accès, tarifs, *etc.* ...). La bibliothèque du CIRM est enregistrée sur WAIS et peut être interrogée en utilisant ce logiciel. (Pour tout renseignement concernant ce point, écrire à : *rolland @cirm.univ-mrs.fr*) ■

Jean-Paul BRASSELET
Directeur du CIRM

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE DE OBERWOLFACH (Allemagne)

"Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach"

L'Institut de Mathématiques d'Oberwolfach est situé dans une vallée paisible de la Forêt Noire, à 60 km au Nord-Est de Fribourg, à l'écart de toute agglomération. Ce cadre de vie, les conditions matérielles fournies sont particulièrement propices à la réflexion et aux contacts fructueux.

L'Institut a été fondé en 1944 par W.Süss, professeur de Mathématiques à l'Université de Fribourg et s'est installé dans un petit château "Lorenzenhof".

La première année, Oberwolfach servait de refuge à des mathématiciens allemands en difficulté. Peu à peu, des petits groupes décident de s'y retrouver pour travailler ensemble; des Français et des Suisses se joignent à eux. Henri Cartan fut le premier conférencier à donner une conférence dans une langue non germanique le 11 novembre 1946 (voir photocopie du livre des résumés des conférences). Après 1950, Oberwolfach organise des conférences dans tous les domaines des Mathématiques et reçoit des mathématiciens de tous les pays. En 1967, de nouveaux bâtiments d'habitation et de restauration sont construits. Enfin en 1974 est construit, à la place du château Lorenzenhof un bâtiment contenant des salles de conférence, une bibliothèque, des salles de réunion et de détente avec même un piano et un billard!

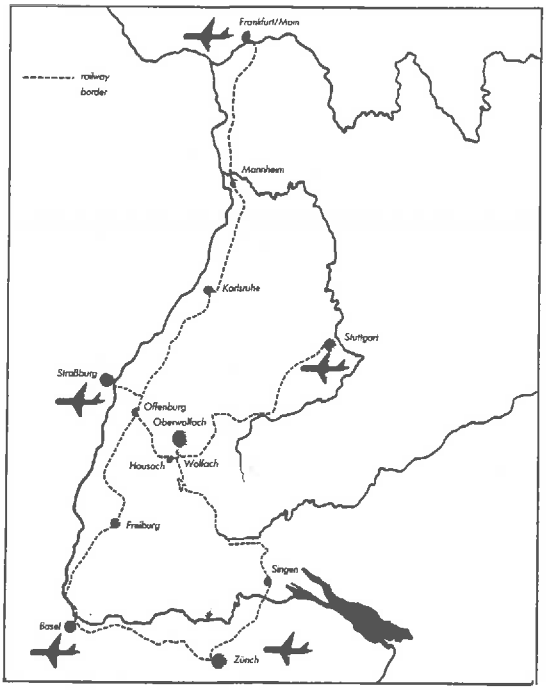
Actuellement, plus de cinquante colloques sont organisés chaque année avec environ 2500 participants venant de tous pays (plus de 50% d'étrangers).

Certaines réunions sur un sujet particulier sont organisées chaque année ou tous les deux ans et permettent aux participants de faire le bilan sur les développements récents de la théorie : en mai 83, Gerd Faltings présentait pour la première fois sa preuve de la conjecture de Tate, et en août 83, il savait démontrer la conjecture de Mordell.

En conclusion, je donnerai deux détails anecdotiques montrant à quel point on se soucie des conditions de travail des mathématiciens à l'Institut : d'une part, il n'y a pas le téléphone dans les chambres afin de ne pas déranger les chercheurs dans leurs réflexions, d'autre part, les enveloppes de serviettes portant le nom des participants sont mélangés avant chaque repas vous obligeant à découvrir de nouveaux voisins de table. ■

Micheline VIGUÉ
(Université Paris VII)

P.S. Ce texte a été écrit à partir d'une brochure publiée par "Gesellsschaft für mathematische Forschung e.V., Freiburg/Br." à l'occasion du 40e anniversaire de la fondation de l'Institut.



Extrait du livre des résumés des conférences (Conférence d'Henri Cartan)

1.11.1946 Haydn, Symphonie m. d. Paukenwirbel | H. Cartan

H. Boerner

Bach, Wohlt. Kl. I, b-moll, II, fis-moll | H. Cartan

I, f-moll } H. Boerner

Beethoven, Sonate op. 109

~~Bach, W~~

1.11.1946 Théorie de Galois pour les corps non commutatifs

~~Un corps~~ K non commutatif, et un sous-corps K_0 ; K est galoisien sur K_0 si :

1° K_0 est le sous-corps des invariants d'un groupe G d'automorphismes de K

2° K est de rang fini sur K_0, comme espace vectoriel à gauche (ou à droite ; on peut montrer que si la condition 1° est satisfaite, les rangs à gauche et à droite sont égaux)

Dans ces conditions, soit Γ le groupe de tous les automorphismes intérieurs

$$x \rightarrow \sigma_k(x) = k x k^{-1} ;$$

alors $G/G \cap \Gamma$ est d'ordre fini n ; les $k \in K$ tels que ~~...~~ ~~les~~ σ_k laisse invariants les éléments de K_0 constituent l'espace vectoriel K_0^* des ~~...~~ combinaisons linéaires, à coefficients dans le corps C, des k tels que $\sigma_k \in G$; tout automorphisme de K qui laisse invariants les éléments de K_0 a la forme $w \cdot \sigma_k$, où $w \in G$ et $k \in K_0^*$; enfin, si d désigne le rang de K_0^* sur C, ~~...~~ et r le rang de K sur K_0, on a

$$\boxed{r = n + d - 1}$$

(le cas de K commutatif correspond à $d = 1$, $r = n$)

Tout sous-corps K' tel que $K_0 \subset K' \subset K$ est le sous-corps des invariants d'un groupe d'automorphismes ; on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les K' tels que $K_0 \subset K' \subset K$ et les sous-groupes "complets" du groupe de tous les automorphismes laissant invariants les éléments de K_0. Un groupe G est "complet" si, ~~lorsqu'~~ il contient des automorphismes intérieurs σ_{k_i}, il contient aussi tout σ_k tel que

$$k = \sum c_i k_i \quad (c_i \in C).$$

H. Cartan

Une association vient de se créer pour marquer son soutien à l'Institut de Recherche Mathématique d'Oberwolfach. Vous trouverez ci-dessous une brève présentation de cette association. La Société Mathématique de France vient d'en devenir membre et encourage ses adhérents à faire de même.

Verein zur Förderung des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach

Dear Colleague and Friend of Oberwolfach,
The Society for Mathematical Research, which formally operates the Mathematical Research Institute Oberwolfach, initiated the foundation of a

Society in Support of the Mathematical Research Institute of Oberwolfach.

This new Society was founded on February 15, 1992. Its main concern is to enhance the financial flexibility of the Oberwolfach Institute. The ordinary budget of Oberwolfach is funded by the Land Baden-Württemberg. In the pas few years, however, it has been subject to serious restrictions.
The Council cordially invites you to join the Society and thus to express your attachment to Oberwolfach. While the membership fee was fixed by the founding members at DM 100.-per year, any larger donation would of course be appreciated.
We trust that you share our concern and hope that you will accept this invitation to join the society.
Sincerely yours,

Reinhold Remmert
Mathematisches Institut, Universität Münster
Einsteinstr. 62, D-4400 Münster

PS. Fees and donations are tax deductible. We will send you a receipt for your contribution.

L'INSTITUT ISAAC NEWTON POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES
Cambridge (Grande-Bretagne)

L'Institut Isaac Newton est un Institut de Recherche qui vient d'être créé à Cambridge (G.B) et son premier directeur est Sir Michael Atiyah. Il commencera à fonctionner en juillet 92 dans un bâtiment construit exprès. Il est situé dans un endroit agréable près du département de Physique et à environ deux kilomètres du centre ville.

Cet Institut est consacré à l'étude de toutes les branches des sciences mathématiques : mathématiques pures, statistiques, mathématiques appliquées, physique théorique, chimie théorique, mathématiques pour l'économie, mathématiques pour la biologie, informatique théorique.

Le principe de l'Institut est d'organiser des programmes de recherche sur un thème donné pendant une période de six mois : environ vingt visiteurs sont reçus pour toute la durée du programme, le nombre peut augmenter pendant les vacances universitaires. Deux programmes distincts sont proposés chaque semestre. Pendant leur séjour, des conférences, des séminaires permettent aux visiteurs de se rencontrer et d'avoir des contacts informels. Il est prévu aussi d'organiser des séries de cours élémentaires destinés aux étudiants. L'Institut prend en charge les frais de voyage et de séjour des visiteurs.

Les programmes choisis pour les deux prochaines années sont :

Low-dimensional Topology and Quantum Field Theory (juil.-déc. 92)
Dynamo Theory (juil.-déc. 92)
L-functions and Arithmetic (janv.-juin 93)
Epidemic Models (janv.-juin 93)
Computer Vision (juil.-déc.93)
Random Spatial Processes (juil.-déc.93)
Geometry and Gravity (janv.-juin 94)
Cellular Automata, Aggregation and Growth (janv.-juin 94) ■

Micheline VIGUÉ
(Université Paris VII)

STRUCTURES DISCRÈTES EN MATHÉMATIQUE

Un programme de recherche à Bielefeld (R.F.A.)

Ce texte a été traduit de l'allemand en français par Sylvie Paycha (Université Louis Pasteur) que nous remercions.

En Allemagne, la gestion des universités relève de la compétence des Länder (régions) qui ont de ce fait la responsabilité de l'organisation de l'enseignement et de la recherche. Au niveau national, la recherche est encouragée et supervisée par des organismes et des fondations, la plus importante d'entre elles étant la D.F.G., le pendant allemand du C.N.R.S. Parmi ses multiples tâches, la D.F.G. finance spécifiquement des "programmes de recherche privilégiés" (Sonderforschungsbereich : SFB), qui sont en général basés dans des universités et qui traitent d'un thème spécifique. Les programmes de recherche privilégiés sont conçus pour une durée limitée de dix ans environ et sont évalués tous les trois ans par des experts internationaux compétents dans le domaine.

Les thèmes de recherche des SFB sont soit consacrés à des domaines relativement pointus, soit au contraire à l'étude de structure générale. C'est à Bonn, dans le cadre des mathématiques pures, que naquit la tradition des programmes des SFB, tradition qui fut prolongée dans le cadre de l'institut Max Planck. Depuis 1989 s'est développé le domaine du SFB "Structures discrètes en mathématique". D'autres SFB sont : "Les modèles mathématiques stochastiques" à Heidelberg, "Géométrie et analyse" à Göttingen et "Equations aux dérivées partielles non linéaires" à Bonn.

Notre intention de proposer la création d'un SFB autour d'un thème "Structures discrètes en mathématiques" était fondée sur les arguments suivants.

Consacrées à l'étude des aspects discrets des problèmes mathématiques, les mathématiques discrètes ont avant tout pour objectif l'analyse des structures mathématiques finies et dénombrables. Parmi elles on compte : les groupes finis ou du moins les groupes de type fini en algèbre, les graphes, les matroïdes et les espaces de suite en analyse combinatoire, les complexes simpliciaux, les recollements et stratifications en géométrie, les modèles discrets dans le traitement de l'information et en statistique. De telles structures jouent un rôle important dans d'autres domaines des mathématiques pures et appliquées et paradoxalement, souvent aussi, dans l'étude de phénomènes continus donc non discrets. En témoignent par exemple l'importance des méthodes simpliciales et d'algèbre homologique en topologie ainsi que le rôle fondamental que joue la recherche de sous groupes discrets dans la théorie des groupes de Lie et la recherche d'invariants combinatoires dans la théorie des représentations ou pour la résolution numérique de problèmes de valeurs propres.

Les mathématiques dans l'antiquité étaient essentiellement des mathématiques discrètes; il suffit de penser à l'importance que l'on accordait à la notion de commensurabilité, à la place qu'occupaient les équations diophantiennes, à "l'algèbre géométrique" d'Euclide.

Depuis le début du 17e siècle, l'image traditionnelle des mathématiques est profondément marquée par un effort de compréhension des propriétés géométriques de l'espace physique. Le calcul infinitésimal fondé par Leibniz et Newton et l'exploitation de ses conséquences au cours des siècles qui suivirent a été et demeure encore aujourd'hui un outil indispensable aux scientifiques et ingénieurs. Ensuite, les problèmes mathématiques furent très intimement liés à des questions concernant les nombres réels et complexes. Comme le montra Euler, de nombreux problèmes de dénombrement combinatoire se laissent traiter à l'aide de fonctions analytiques.

Parallèlement, il y a cependant toujours eu la tendance en mathématique de se tourner directement vers les aspects discrets des problèmes mathématiques. C'est ainsi que la discussion sur le concept de symétrie, le développement de la théorie de Galois et l'analyse de certaines méthodes de démonstration en théorie des nombres conduisirent à la théorie des groupes, en particulier à la théorie des groupes finis, qui culmina en classifiant les groupes simples finis à l'aide de l'algèbre combinatoire. Des réflexions analogues sur les structures ont aussi joué un rôle central dans le domaine des géométries finies et de la théorie des graphes. Comme il a été mentionné plus haut, il en est de même des méthodes simpliciales introduites par la topologie algébrique qui constituent un outil essentiel en topologie algébrique, en algèbre homologique et en K-théorie.

Non seulement la théorie donne lieu à une variété de problèmes discrets, mais cela vaut aussi pour les applications. La théorie du dénombrement de Polya servit par exemple à dénombrer les isomères d'alcools; la description des structures spatiales des molécules conduisit à la théorie des matroïdes via la théorie des graphes, la théorie des matroïdes ayant elle même des liens avec des questions issues du domaine de l'optimisation discrète et encore une fois fortement orientées vers les applications.

La classification des groupes cristallographiques a permis et permet encore l'analyse des cristaux concrets que l'on rencontre. A l'évidence tous ces développements font clairement apparaître le besoin de renforcer l'étude des aspects discrets des différentes structures mathématiques.

De telles questions n'intéresseraient pas autant les scientifiques s'ils n'avaient à leur disposition des outils performants grâce au développement de moyens de calcul numérique puissants. Grâce à eux, on a pu faire des calculs effectifs dans de nombreux domaines. En fin de compte, la recherche mathématique consacrée aux possibilités théoriques des ordinateurs a aussi contribué au fait que les structures discrètes en mathématique ont aquis l'importance qui leur est attribuée de nos jours de par le monde.

Dans le cadre du SFB ces initiatives peuvent et doivent être consciemment intégrées en une entreprise de recherche dont l'objectif doit être bien spécifié et qui englobe les domaines de recherche les plus divers en mathématique. Les multiples problèmes mathématiques soulevés par chacune des composantes du projet, qui doivent être traités par des méthodes simpliciales, combinatoires et algébriques forment un tout cohérent sous l'étiquette "Structures discrètes en mathématique" qui tient compte équitablement des directions individuelles de recherche et des tendances générales de développement.

Le projet du SFB est influencé par les activités de recherche actuelles des mathématiciens impliqués et il est important de veiller à ce que, aussi bien les mathématiques pures que les mathématiques appliquées, y trouvent leurs places intégralement. Ce projet comprend : la K-théorie algébrique, les espaces topologiques, la théorie cohérente homotopique (R. Vogt, F. Waldhausen), les groupes algébriques linéaires (H. Abels), la théorie des groupes combinatoires, les actions de groupes discontinus, la théorie des nombres et les formes automorphes (J. Mennicke), les actions de groupe, la géométrie combinatoire (A. Dress), la combinatoire d'espaces de suites, les modèles avec échange d'information (R. Ahlswede), les méthodes d'approximation pour les modèles discrets non paramétriques (F. Götze), la combinatoire (W. Deuber), les problèmes de valeurs propres pour les matrices et les applications aux systèmes dynamiques (L. Elsner), les groupes simples finis (B. Fischer), la théorie des représentations d'algèbres (C.M. Ringel), la réduction des variétés de Shimura (Th. Zink).

Le SFB a la possibilité d'engager en plus des 40 mathématiciens déjà impliqués de la faculté, environ 20 chercheurs pour des projets spécifiques, possibilité qui est largement utilisée pour encourager de jeunes mathématiciens qualifiés. Il existe de plus un programme d'invitations qui permet d'inviter plus de 100 mathématiciens allemands ou étrangers à Bielefeld. Ces ressources permettent une collaboration entre les nombreux mathématiciens travaillant dans le domaine des structures discrètes en mathématique.

Il est primordial pour le bon fonctionnement d'un SFB que celui-ci dispose d'une bibliothèque bien fournie, ce qui est le cas à Bielefeld pour les revues scientifiques. Grâce aux investissements de la DFG et du Land Nordrhein-Westfalen, nous disposons aussi d'un équipement en ordinateurs adéquat. Le programme de recherche a une série de prépublications d'environ 120 travaux par an, qui peuvent être obtenus sur demande. ■

Universität Bielefeld
POB 100131
D-4800 - BIELEFELD 1
FAX 49-521-1064743

LES PROGRAMMES EN EUROPE

Principaux programmes de la CEE de soutien à l'activité scientifique et technique

ERASMUS

L'objet de ce programme est de favoriser les échanges d'étudiants entre les universités des pays de la CEE. L'objectif est que 10% au moins des étudiants passent une partie de l'année dans un pays différent de leur pays d'origine. Il y a deux buts à plus long terme : une reconnaissance mutuelle des diplômes et des cursus d'une part et aussi le développement de cursus communs à des universités de pays différents.

L'aide fournie dans ce cadre consiste en bourses pour couvrir les frais de déplacements des enseignants ou des administratifs, en bourses aux étudiants (moyenne 2000 écus, maximum 5000 écus), et en aide financière aux institutions engagées dans ce programme.

Le principe est que les étudiants passent une partie (de trois mois à toute l'année) de l'année universitaire dans une université étrangère. Cette période est validée comme partie intégrante de leur programme d'étude. Dans certains cas ils peuvent obtenir en même temps un diplôme de leur université d'accueil.

Budget 91–93 : 192 million d'écus.

Renseignements : Bureau Erasmus national dans chaque pays de la CEE (pour la France : Agence Nationale Erasmus, CNOUS, 6–8 rue Jean Calvin 75005 Paris, tél. (1) 40 79 91 00) ou Bureau Erasmus, 15 rue d'Arlon, B 1040 Bruxelles. Téléphone : (32) (2) 223 01 11; FAX : (32) (2) 233 01 50.

COMETT

Le but de ce programme est d'encourager la coopération entre les universités (au sens large, établissements d'enseignement supérieur) et l'industrie dans le domaine des technologies avancées. Les projets doivent s'inscrire dans un cadre européen, impliquer plusieurs pays et à la fois des universités et des entreprises. L'aide fournie doit servir à créer des réseaux européens d'universités et d'entreprises, à favoriser les échanges d'étudiants et de personnels d'universités ou d'entreprises et à mettre en place des projets conjoints de formation continue et de formation à distance aux nouvelles technologies.

Budget 90–94 200 millions d'écus.

Renseignements :

Bureau COMETT, 14 Rue Montoyer, B 1040 Bruxelles. Téléphone (32) (2) 513 89 59; FAX : (32) (2) 513 93 46.

Unité d'assistance technique COMETT 71 avenue de Cortenberghlaan, B 1040 Bruxelles. Tél (32) (2) 733 97 55, FAX (32) (2) 734 56 41.

TEMPUS

Le but de ce programme est de favoriser le développement des systèmes d'enseignement supérieur dans les pays de l'Europe centrale et orientale (pays dits "éligibles"), dans un premier lieu la Pologne et la Hongrie, puis la Tchécoslovaquie, la Bulgarie, la Yougoslavie et la Roumanie. L'Albanie et les pays baltes s'y ajouteront sans doute prochainement. Il y a trois types d'actions :

Un écu représente approximativement 7 FF.

- Des actions conjointes de formation (formation continue des enseignants du supérieur dans certaines disciplines, cours intensifs à l'intention des universitaires, mise en place ce systèmes d'enseignement à distance). et des actions conjointes de développement des structures de l'enseignement supérieur.
- Le soutien à la mobilité des personnels (enseignants ou administratifs) à l'occasion de missions ou de stages, et à la mobilité des étudiants pour des stages ou des périodes d'étude.
- Des aides complémentaires dans le domaine des publications, des études et enquêtes conjointes *etc.*

Les partenariats doivent être construits sur au moins trois pays dont deux états membres de la CEE. Ils doivent associer au moins une université de la CEE et une université d'un des états éligibles. Ils peuvent aussi associer des entreprises.

Budget 200 millions d'écus sur 5 ans.

Renseignements :

En France CNOUS 6–8 rue Jean Calvin 75005 Paris, tél (1) 40 79 91 41.

Bureau Tempus, 14 Rue Montoyer, B 1040 Bruxelles. Téléphone (32) (2) 504 07 11; FAX : (32) (2) 504 07 00.

ESPRIT

L'objectif de ce programme est le développement de technologies de base pour l'industrie européenne, la promotion de la collaboration scientifique européenne et l'élaboration de normes internationales. Les domaines concernés sont en particulier la microélectronique et la périinformatique, les systèmes de traitement de l'information, l'intelligence artificielle. Les projets doivent associer au moins deux universités ou deux entreprises de deux états de la CEE.

Budget 1988–1992 : 1600 millions d'écus.

Information : Commission des Communautés européennes, informations ESPRIT, 200 rue de la loi B 1049 Bruxelles; tél (32) (2) 236 20 67.

CAPITAL HUMAIN ET MOBILITÉ

Programme lancé en 1992. Le but est d'augmenter les ressources humaines de la recherche et du développement technologique des pays de la CEE, d'encourager la formation de réseaux et la mobilité des chercheurs. Modalités d'action : bourses individuelles et bourses aux équipes de recherche recevant des boursiers.

Budget 1992–1994 : 488 million d'écus.

Renseignements Commission des communautés européennes, DG XII, 200 rue de la Loi, B-1049 Bruxelles. Téléphone (32) (2) 235 36 96, FAX (32) (2) 236 33 07.

—

On peut y ajouter aussi les programmes bilatéraux, tels Procope (France–Allemagne), Alliance (France–Grande-Bretagne), Tournesol (France-Belgique), Platon (France–Grèce). Le principe de ces programmes est que les deux pays allouent des moyens apportant une aide complémentaire à la prise en charge du coût des échanges de chercheurs dans le cadre de projets dont la durée est de un ou deux ans. ■

ERASMUS DANS LA VILLE DE JULES VERNE

Genèse

Avril 89 : l'Europe universitaire est encore un concept abstrait. Aucun d'entre nous ne souhaite mêler ses relations "recherche" sur un projet européen concernant la mobilité d'étudiants en Licence ou Maîtrise. Problème : comment entrer en contact avec d'autres universités? Solution : s'inspirer des méthodes "marketing", c'est à dire envoyer un mailing à toutes les universités qui nous paraissent semblables à Amiens de par leur taille ou de par leur place dans leur pays.

Septembre 89 : réponse du Professeur Makinson de l'Université de Canterbury dans le Kent (G.B) qui souhaite être associé à un PIC (Projet Interuniversitaire de Coopération) en Mathématique. Le processus est amorcé, il faut maintenant définir précisément le cadre. Une demande de financement pour visite réciproque est acceptée par le bureau Erasmus (1000 écus) et en Février 90 nous traversons la Manche. Deux journées de travail nous permettent de définir les bases de nos échanges :

– le niveau et la durée concernés : Licence de Math, un an;

– les modules que chaque université conseillera à ses étudiants;

– et enfin, le point le plus épineux : un étudiant recevra, outre le diplôme de son université mère (prévu par les accords Erasmus), le diplôme de l'université d'accueil. Révolution dans le royaume de Sa Majesté : l'Université de Canterbury décernera le Bachelor of Science à nos étudiants Erasmus!

Enthousiamés par notre projet, nous décidons de commencer sans plus tarder notre coopération. Ainsi, dès la rentrée 90-91 deux étudiants d'Amiens suivent les cours de Canterbury (l'Université du Kent prend en charge les frais d'inscription, la région Picarde leur donne une bourse) et deviennent titulaires du B.Sc.

Durant l'année 89-90 nous étoffons notre projet en y associant d'autres universités et une demande de PIC est déposée et acceptée.

Première année, premières réflexions

Année Universitaire 91-92. Le PIC s'est élargi, il comporte actuellement quatre universités : Amiens, Canterbury, Liège (Belgique), Ferrara (Italie). Les premiers étudiants Erasmus existent!

Deux étudiants d'Amiens et un étudiant de Liège suivent le B.Sc. de Canterbury (1 an).

Un étudiant de Canterbury suit la Licence à Amiens (1 an).

Une étudiante de Ferrare (Italie) suit une partie de la Maîtrise d'Amiens (6 mois).

Octobre 91 : la première réunion de tous les membres du PIC a lieu à Amiens. Elle a pour but de préparer la rentrée 92-93. Les premières conclusions s'imposent :

– nos étudiants ont été surpris par le faible volume horaire des cours et la quasi absence de TD. Ils ont énormément apprécié leurs relations avec leurs tuteurs, et la vie dans le campus.

– Les étudiants venus à Amiens sont désemparés d'une part par la différence entre l'encadrement très personnalisé auquel ils sont habitués et l'encadrement collectif que nous leur donnons, d'autre part par la difficulté de nos programmes.

– Le logement des étudiants ne pose aucun problème à Amiens : le CROUS réserve chaque année un quota de chambres pour les étudiants Erasmus. Ce n'est pas le cas par exemple, à Canterbury où les étudiants doivent trouver des logements en ville dont le prix dépasse celui des résidences universitaires.

– Chaque étudiant doit recevoir une formation courte mais intensive à la langue du pays d'accueil. Ceci suppose un financement car ces formations sont très chères.

– Les bourses Eramus ne couvrent pas le surplus de frais occasionnés par un départ à l'étranger, aussi est-il souhaitable que chaque université trouve dans son pays ou sa région un complément de financement. En Picardie, le conseil Régional apporte une contribution significative.

– Les échanges sont d'autant mieux vécus qu'ils sont plus longs, un an plutôt que six mois, et se situent à un niveau plus avancé. Cependant, toutes les universités ne souhaitent pas se séparer si longtemps de leurs étudiants! Des unités de valeur semestrielles assoupliraient les possibilités de mobilité des étudiants.

– On peut regretter que les étudiants qui projettent d'entrer à l'IUFM soient pratiquement écartés du processus d'échange en raison de la double incertitude : évaluation de l'année passée à l'étranger par le jury d'admission à l'IUFM, efficacité d'un cursus externe par rapport à la préparation au CAPES.

Perspectives

Ce premier bilan est positif d'autant qu'une rencontre étudiants/enseignants du PIC a eu un très grand succès et suscite beaucoup d'envie de voyage. Les motivations des étudiants candidats au départ sont variées, mais relèvent le plus souvent d'une conscience nette de la valorisation apportée à leur formation dans une perspective personnelle mais surtout professionnelle.

Nous souhaitons associer d'autres universités à notre PIC, en particulier des universités du sud : Espagne, Grèce. Le principal obstacle est alors celui de la langue et de la distance.

Des universités allemandes ont également été contactées mais là, l'obstacle est celui de l'organisation des études très différente de nos cursus français, belges, anglais ou italiens.

Avec l'Allemagne le niveau optimal d'échange serait celui du DEA ou de la thèse, malheureusement la majorité des universités de notre PIC n'a pas de formation doctorale.

Chacun souhaiterait également que d'une part, la mobilité des étudiants se prolonge par une mobilité des enseignants et d'autre part, que nous profitions de nos rencontres annuelles pour nous donner un aperçu des axes de recherche développés dans nos universités respectives.

Amiens, ville de taille raisonnable, proche de Paris et située au centre de gravité de l'Europe, peut trouver grâce aux contrats Erasmus une place privilégiée dans l'Europe universitaire.

Claire GROSSETÊTE
Michèle WEIDENFELD
Université de Picardie Jules Verne

Un exemple de programme ERASMUS : UNIVERSITÉ de LYON 1

Yves Gérard est responsable de la partie mathématique du projet Erasmus de l'université Claude Bernard (Lyon 1). Il répond pour vous aux questions de la Gazette.

Gazette : Quel est le programme Erasmus en Mathématiques à l'université de Lyon 1?

Yves Gérard : Depuis 1989, l'université Lyon 1 est coordinatrice d'un Programme Interdisciplinaire de Coopération (P.I.C.) qui a pour but de permettre la mobilité d'étudiants et d'enseignants de Mathématiques.

Participent à ce programme les universités suivantes : l'université de Bielefeld (Allemagne), l'université de Barcelone (Espagne), l'université autonome de Barcelone (Espagne), l'université de Lisbonne (Portugal) et à partir de l'année prochaine l'université de Birmingham (Grande-Bretagne).

Grâce à ce programme un étudiant de mathématiques peut bénéficier d'une bourse pour aller étudier plusieurs mois à l'étranger et son université d'origine peut valider la part du cursus faite dans l'université d'accueil.

G. : Quelle est le montant de la bourse allouée aux étudiants dans le cadre Erasmus?

Y.G. : Le montant exact de la bourse Erasmus varie chaque année en fonction de la somme globale allouée par le bureau Erasmus de Bruxelles pour l'ensemble des programmes et du nombre réel de "mois-étudiants" représentant le volume des séjours dans les universités d'accueil.

En moyenne son montant est d'environ 1000 F à 1200 F par mois pour un étudiant. Le Ministère de l'Education Nationale donne souvent un petit complément mais, en général, la somme totale offerte reste assez faible (moins de 1300 F par mois) et doit être considérée comme une aide permettant de couvrir les dépenses supplémentaires occasionnées par les études à l'étranger.

Il faut reconnaître que, malgré tout, cette aide est souvent insuffisante et ainsi, j'incite les étudiants candidats à la mobilité à demander une bourse à la région Rhône-Alpes, bourse qui est souvent accordée et d'une valeur égale à environ 1,8 fois la bourse Erasmus.

G. Combien d'étudiants sont concernés chaque année par ce programme?

Y.G. : Jusqu'à ce jour, ce programme n'a concerné qu'un très petit nombre d'étudiants : une douzaine au maximum chaque année et les échanges entre les différentes universités participantes ne sont pas encore équilibrés.

G. : Dans l'ensemble des échanges de ce programme, le pourcentage des étudiants français est-il important?

Y.G. : Compte tenu de la taille de l'université Lyon 1, il est plutôt faible actuellement.

En règle générale, la mobilité étudiante se fait plus facilement de l'étranger vers Lyon que le contraire. Les explications que l'on peut avancer varient suivant les universités.

– *De Bielefeld vers Lyon* : en Allemagne, les programmes sont beaucoup plus souples et variables, de semestre en semestre, et les étudiants peuvent choisir, en France, des enseignements différents de ceux de Bielefeld; en particulier, ils ne sont pas tenus de passer des examens similaires à ceux définis dans leur cursus d'origine (qui sont d'ailleurs presque tous des examens oraux).

– *De Barcelone vers Lyon* : les étudiants qui viennent régulièrement sont en cinquième année (de licence). C'est donc une année qui est une introduction à la recherche avec un programme très libre.

– *De Lyon vers l'étranger* : jusqu'à présent seuls des étudiants de la Maîtrise de Mathématiques Discrètes sont partis à l'étranger et cela tient sans doute en partie au faut que cette maîtrise est organisée en modules semestriels indépendants dont certains sont choisis dans une liste d'option qui n'est pas figée.

G. : Est-ce qu'il n'y a pas d'autres raisons...?

Y.G. : Il est vrai, en ce qui concerne en tout cas les étudiants en mathématiques de Lyon 1, que la mobilité à l'étranger ne leur apparaît pas comme une nécessité.

Il y a bien des facteurs. Par exemple, les étudiants ont souvent une connaissance très faible d'une seconde langue dont ils ont abandonné l'étude en entrant à l'université.

Les étudiants, et particulièrement ceux qui veulent passer le Capes ou l'agrégation, ont des réticences à partir, de peur d'échouer à leurs examens, dans la mesure où leur préparation serait moins bien adaptée.

G. : Les enseignants ne peuvent-ils pas favoriser la mobilité étudiante?

Y.G. : Bien sûr que si! Les enseignants sont évidemment favorables au principe des études à l'étranger puisque, chercheurs, ils connaissent l'importance des contacts avec d'autres collègues étrangers. Mais, sans le vouloir, ils ne facilitent pas toujours ces échanges par manque de connaissance des systèmes d'enseignement à l'étranger et par la recherche d'équivalences trop strictes proposées en jurys.

Même si les processus sont lents, les mentalités vont changer inexorablement et les échanges d'étudiants vont s'accroître. A terme, la validation d'une partie du cursus faite à l'étranger sera la règle la plus commune. En témoigne, l'évolution de certains diplômes de mathématiques comme, par exemple, à Liverpool ou à Birmingham en Grande-Bretagne, où le diplôme se fait sur quatre ans au lieu de trois en intégrant une année passée dans une université étrangère. ■

Yves GÉRARD
(Université Lyon 1)

Jumelage ORSAY – STEKLOV

Le jumelage entre les départements de mathématiques d'Orsay et de l'Institut Steklov (Leningrad, Moscou) a été mis en place l'an dernier, sur le modèle de l'accord existant entre l'ENS et l'Institut Laudau. Un accord parallèle existe entre le département de physique mathématique de l'Institut Steklov de Leningrad et le laboratoire de physique théorique et hautes énergies (Paris 6-7).

Le rôle de cet accord est de faire venir en France des mathématiciens de l'Institut Steklov pour un séjour assez long (4 à 6 mois); cette visite peut être renouvelée pendant plusieurs années si la coopération s'avère fructueuse. Le but avoué est de favoriser le maintien en Russie de chercheurs de haut niveau en leur offrant la possibilité de séjours fréquents en France. Ces séjours ont été pris en charge jusqu'à présent par le CNRS et le MRT. Sont venus à Orsay dans ce contexte, Viro, Buslaev, Arnold, Parshin, Matijasevic... Il faut signaler que ces mathématiciens, tout étant basés à Orsay, ont largement visité les autres universités parisiennes ainsi qu'un bon nombre d'universités de province.

Cet accord a donc permis de fructueux contacts entre les mathématiciens de l'Institut Steklov et leurs collègues français. Il ne faut pas cacher qu'il se heurte à un certain nombre de difficultés. L'évolution très rapide de la situation en Russie a entraîné le départ de nombreux mathématiciens : la liste de jeunes chercheurs brillants que nous avions en vue s'est rétrécie comme une peau de chagrin. Quant aux mathématiciens prestigieux, le montant des bourses (18 000 FF par mois pour les chercheurs dits "de haut niveau") n'est guère attractif s'ils souhaitent venir avec leur famille (ce qui ne paraît pas aberrant pour un séjour de 6 mois); il est hélas bien endessous de ce qui est fait dans les pays voisins. ■

Arnaud BEAUVILLE
(Université Paris-Sud, Orsay)

EUROPROJ
Un réseau européen de géométrie projective

Voilà maintenant deux ans que, sur ma proposition et en réponse à un appel d'offres du Ministère de la Recherche et de la Technologie, un groupe de spécialistes européens de géométrie projective a créé le réseau Europroj. Cet appel d'offres du MRT avait pour but d'encourager les scientifiques français à s'intégrer dans des groupes de recherche de dimension européenne, susceptibles d'obtenir ultérieurement une aide financière directe de l'Europe. L'idée de base était, évidemment, qu'une telle intégration améliorerait, à coup sûr, le fonctionnement de la recherche dans les équipes concernées. Pour les créateurs du réseau, il s'agissait plus explicitement encore d'améliorer ce fonctionnement : en effet, le document constitutif affirmait, à la place de la dissertation para-mathématique usuelle en pareille circonstance, des objectifs concernant exclusivement l'organisation collective de la recherche et la communication entre les chercheurs. Plus précisément, à côté des objectifs traditionnels en matière de circulation des idées et des hommes, on y parlait d'élaboration et de maintenance d'un programme détaillé de recherches assorti d'une bibliographie commentée ainsi que d'un recensement des travaux en cours. On y parlait également de répartition rationnelle du travail de recherche et d'intégration des chercheurs isolés. En outre, Europroj se déclarait d'emblée structure ouverte à tous les professionnels de la géométrie projective en Europe. Deux années se sont donc écoulées et plus de deux cents chercheurs ont rejoint ce réseau. Ce numéro de la Gazette consacré à l'Europe est l'occasion de dresser un bilan et d'examiner les perspectives d'Europroj.

Les rencontres annuelles

La première rencontre annuelle s'est tenue en septembre 90 à Sophia-Antipolis, avec le concours du CNRS. Sur le plan mathématique, organisée par Arnaud Beauville et Christian Peskine, elle était consacrée à l'exposé de l'état des connaissances concernant le lieu de Noether-Lefschetz (dans le cas classique, c'est la réunion des familles de surfaces de l'espace projectif sur lesquelles sont tracées d'autres courbes que les intersections complètes évidentes). Les soixante-cinq participants y ont beaucoup apprécié le sujet choisi et la cohésion des conférences.

La deuxième rencontre annuelle, préparé sur place par Edoardo Ballico et Giorgio Bolondi, s'est tenue en septembre 91 à la Villa Madruzzo à Trente. Sur le plan mathématique, organisée par Ciro Ciliberto, Christian Peskine et Guenther Trautmann, elle a comporté quinze conférences (d'exposition pour la plupart) réparties en quatre thèmes pour quatre jours (modules des courbes, variétés abeliennes, fibrés vectoriels et petite codimension). Parmi les conférenciers, quatre "étrangers", au sens de l'Europe de l'ouest : Narasimhan, Ramanan, Simpson, et le moscovite Zak. Cette rencontre dans un cadre de rêve a enchanté la petite centaine de participants.

La troisième rencontre annuelle, qui se tiendra à Angers en septembre prochain, est préparé sur place par Jim Alexander, François Ducrot et Daniel Schaub. Le comité Europroj a pris en charge son organisation scientifique avec cinq journées, dont quatre consacrées à des thèmes spécifiques (courbes gauches, diviseurs spéciaux, dimension au moins trois, et géométrie énumérative).

Les écoles

L'idée que l'organisation d'écoles pour doctorants a une influence très bénéfique sur le fonctionnement de la recherche a beaucoup progressé en France ces dernières années et cette thèse est bien évidemment soutenue par Europroj. Concrètement, Europroj a monté deux écoles, au début de l'été 91. La première, "Théorie de Hodge", organisée par le CIMPA à Sophia-Antipolis sous le patronage de la Société Mathématique Européenne, et dirigée par Arnaud Beauville, a accueilli une soixantaine de participants. Parmi les cinq conférenciers, deux "étrangers" : Jim Carlson et Carlos Simpson. La seconde, "Hilbert schemes", organisée à Bayreuth par Michael Schneider dans le cadre du "graduate program" local, et dirigée par le trio norvégien Ellingsrud-Laudal-Stromme, a réuni une cinquantaine de participants. Depuis, Europroj a collaboré aux deux écoles "Gauge theory" organisées à Warwick dans le cadre du SERC symposium "Gauge theory, Geometry and Topology", et, ce printemps, à une nouvelle école à Bayreuth, "Classification of Algebraic Manifolds", organisée localement par Thomas Peternell et dirigée par Fabrizio Catanese et Kawamata. Par ailleurs, Europroj s'est associé à une proposition de projet Tempus montée depuis Trente par Marco Andreatta et visant à favoriser le développement de la géométrie algébrique en Pologne.

La communication

Dans le domaine de la communication, la principale réalisation d'Europroj est le journal du réseau, EuroprojNews, qui paraît tous les trois ou quatre mois.. Il a été produit et diffusé pendant deux ans depuis Trieste par Gianni Sacchiero et son groupe, qui , l'hiver dernier, ont passé le relais à Philippe Ellia, à Ferrare. Six numéros réguliers de ce journal ont été diffusés jusqu'ici, auxquels s'ajoutent deux numéros spéciaux (plus courts). Dans EuroprojNews, on trouve les nouvelles du fonctionnement du réseau et des informations scientifiques (annonces de manifestations, etc). On y trouve également les listes de problèmes issues des rencontres organisées par le réseau. On y a même trouvé par deux fois des textes scientifiques inédits : "Deux résultats de R. Lazarsfeld" rédigés par O. Debarre, et "An application of the Noether-Lefschetz theory" by C. Voisin. Avec ce journal du réseau, Europroj diffuse la première page des prépublications que ses membres lui envoient (de l'ordre d'une vingtaine par diffusion), ainsi qu'un annuaire régulièrement mis à jour. Cet annuaire a été préparé jusqu'ici au laboratoire de maths de Nice, mais sera desormais maintenu par le CIMI.

La création d'un centre de communication électronique, et pour commencer d'un groupe de News est envisagée (les News sont une sorte de forum électronique disponible sur les machines Unix connectées au réseau électronique international; chaque groupe interessé doit obtenir la création d'un nouveau "News group"). Pour cela, Europroj dispose du concours du CICA, Centre International de Communication Avancée, de Sophia-Antipolis.

L'implantation

En matière d'implantation, on peut distinguer trois aspects concernant respectivement l'implantation dans le milieu des chercheurs, les relations du réseau avec les pouvoirs publics et la structuration du réseau.

Côté chercheurs, la grande majorité des experts concernés en font désormais partie et chaque mois, quelques nouveaux collègues nous rejoignent. Les deux cent trente membres sont répartis dans près de quatre-vingts sites. Trente de ces sites n'abritent qu'un seul membre mais certains autres en regroupent jusqu'à une douzaine (Bayreuth, Catane, Erlangen, Gênes, Pise, Turin). D'une facon générale, l'implantation d'Europroj reflète assez fidèlement l'implantation de la géométrie projective en Europe. C'est ainsi que la France, l'Allemagne et l'Espagne contribuent largement à l'effectif. Mais pas autant que l'Italie puisqu'un tiers des membres est italien. De fait, la tradition de géométrie projective est toujours restée très vivace en Italie depuis la période particulièrement faste de Castelnuovo, Enriques et Severi (il faut savoir qu'ailleurs en Europe, et en première approximation, la crise des fondements mobilisait presque toutes les forces de la géométrie algébrique pendant toute la période dominée par les travaux fondamentaux de Grothendieck et ses élèves, et reléguait la géométrie projective au rang de glorieuse histoire ancienne).

La structuration administrative d'Europroj a également progressé de façon très satisfaisante.

D'une part, et depuis plusieurs mois déjà, son secrétariat estJ assuré par le CIMI. Le CIMI, ou Centre International pour les Mathématiques et l'Informatique, présentement dirigé par Jean-Michel Lemaire, est un service commun, créé au sein de l'Université de Nice-Sophia-Antipolis à l'occasion de sa contractualisation. Il constitue la base logistique du CIMPA, avec, en outre, une vocation européenne clairement affichée dans ses statuts.

D'autre part, Europroj s'est doté d'un comité chargé de faire fonctionner le réseau, et en particulier de son propre renouvellement. Ce comité est présentement constitué par Arnaud Beauville (Orsay), Fabrizio Catanese (Pise), Geir Ellingsrud (Bergen), Miles Reid (Warwick), Guenther Trautmann (Kaiserslautern), Gerhard Van der Geer (Amsterdam) et Antonius Van de Ven (Leiden). Ce comité se réunira physiquement pour la première fois en marge du Colloque organisé ce mois de juin à Toulouse par Nicole Mestrano et Carlos Simpson.

Par ailleurs, le réseau examine présentement d'un oeil favorable une proposition de Philippe Ellia visant à créer une association loi 1901 des lecteurs d'EuroprojNews.

Quant à l'environnement administratif en France, il a très vite compris qu'il fallait soutenir une entreprise comme Europroj. Parce qu'on sait bien que la recherche mathématique fonctionne de façon excessivement individualiste. Et que, même si certains pensent, en gros, que la recherche mathématique est une activité individuelle par nature (je me souviens notamment d'un article de Jean-Pierre Serre paru dans la Gazette), il y a dans cet individualisme un regrettable gaspillage qu'on pourrait réduire dans une large mesure. Et aussi, et peut-être surtout, parce qu'une telle structure de réseau à léchelle d'une branche des mathématiques fournit aux pouvoirs publics une visibilité incomparable sur les chercheurs concernés. En tout cas, avant même d'être subventionné par le MRT, Europroj avait obtenu le soutien explicite de l'Université de Nice-Sophia-Antipolis, de la direction scientifique du CNRS et de la DRED. Ainsi, cela va de soi, que du laboratoire de Mathématiques de Nice dirigé par Frédéric Pham. Ces soutiens se sont concrétisés par des subventions de la DRED et de l'Université (le CNRS n'a pas jusqu'à présent été sollicité pour subventionner Europroj). A côté de ces sources de financement direct d'Europroj, il faut mentionner des sources de financement indirect, en particulier l'Université de Trente qui a subventionné la rencontre annuelle 90 et assuré l'organisation de la rencontre annuelle 91, et l'Université de Trieste, qui a pris en charge, en 90 et 91, la préparation et la diffusion du journal du réseau, ou encore le CIMPA, qui a financé intégralement l'école Hodge.

Europroj et l'Europe

Fort du soutien des pouvoirs publics français, Europroj doit maintenant obtenir celui des autres pays européens, ou plus simplement de la Communauté Européenne. En fait ce travail a déjà été entrepris. L'été dernier, par l'intermédiaire de Guenther Trautmann, Europroj s'est informé à Bruxelles même des possibilités offertes par la Communauté Européenne. Dès avant cette démarche, on savait que seule la Direction Générale XII peut subventionner les mathématiques pures. Et que le programme Science qui avait subventionné plusieurs groupes de mathématiciens européens (en K-théorie, géométrie différentielle, singularités et en géométrie algébrique notamment) était épuisé. Depuis cette démarche, Europroj sait qu'il faut attendre le nouveau programme Human Capital and Mobility et suit sa préparation (on connait maintenant, dans ses grandes lignes, le fonctionnement de ce programme et le comité d'Europroj débat sur la façon de s'y porter candidat).

Les groupes et leurs workshops

Tout cela est bien beau mais de mon point de vue, le grand challenge pour Europroj, c'est la structuration de la recherche en son sein, du moins pour ceux de ses membres qui le souhaitent. Et cette entreprise est autrement délicate que l'organisation d'une école, ou d'une rencontre annuelle , ou encore que la réalisation d'un journal. C'est que a structuration de la recherche ne peut pas être planifiée. Mais on peut informer, et par exemple encourager les chercheurs qui pensent y trouver leur compte à se constituer en groupes (par exemple d'une dizaine ou d'une vingtaine de chercheurs) autour d'un thème précis, pour s'entendre sur les objectifs, s'organiser, demander des moyens, se rencontrer régulièrement, rester en contact permanent et progresser en harmonie sur le thème choisi. Encourager, c'est d'ailleurs bien ce que font les pouvoirs publics, que ce soit au niveau national ou européen, en finançant des groupes présentant un programme. L'écueil est que, trop souvent, dans ces conditions, les groupes se constituent plus pour obtenir le financement que pour structurer leurs recherches. Pour ce qui est d'Europroj, quelques groupes y prennent lentement forme , en dépit des doutes de ceux qui se demandent à quoi ça sert, et des craintes de ceux qui se demandent à qui ça profite.

Le groupe sur les courbes gauches animé par Rosario Strano (une quinzaine de participants) est sans doute celui dont la création a le plus influencé la recherche de ses membres. Il s'est réuni à Nice en avril 91 , puis à Trente, en marge de la rencontre annuelle de septembre 91. Il se retrouvera à l'initiative de Mireille Martin-Deschamps dans les locaux de l'ENS à Paris, sans doute à l'automne prochain. pour faire le point sur les modules de Rao.

Le groupe sur les fibrés vectoriels, animé par Guenther Trautmann, après une réunion exploratoire organisée par Laurent Gruson à Lille au printemps 91 (une trentaine de participants), et une réunion de travail organisée par Joseph Le Potier à Paris en mars 92, a opté pour la constitution de trois sous-groupes. Le premier, consacré aux fibrés vectoriels sur les courbes, avait déjà commencé fonctionner sous l'impulsion de Peter Newstead depuis la réunion organisée à Liverpool en juillet 91 (quinze participants). Pour chacun des deux autres, Nigel Hitchin et Carlos Simpson (désormais adopté par l'Europe!) d'une part et Joseph Le Potier de l'autre ont accepté de proposer un programme, le premier pour l'approche différentielle et le second pour l'étude des fibrés sur les variétés spéciales.

A Gênes, en février dernier, une bonne trentaine de chercheurs se sont réunis à l'appel de Silvio Greco et Giuseppe Valla. En conclusion de cette réunion, un groupe s'est créé, animé par Valla, et consacré á l'étude de la postulation et de la résolution des sous-schémas zéro-dimensionnels des espaces projectifs. Ce groupe dispose déjà d'un programme détaillé.

A l'initiative de Sebastian Xambo, les spécialistes de géométrie énumérative seront réunis en juillet prochain à Madrid pour décider de l'opportunité de créer un groupe sur ce thème.

De leur côté, Klaus Hulek, Herbert Lange et Gregory Sankaran mettent au point une proposition pour créer un groupe sur les variétés abeliennes.

Quant au groupe d'une quinzaine de chercheurs animé par Christian Peskine sur les surfaces dans $\mathbf{p}^4$, il tient une place à part puisqu'il existait déjà à la création d'Europroj. Il s'y est tout naturellement intégré et n'a pas eu à résoudre les problèmes constitutionnels rencontrés par les autres. Ses membres se sont réunis à Bergen en juin 90, et ont activement travaillé depuis, produisant notamment, après les thèses norvégiennes de Alf Aure et Kristian Ranestad, une thèse à Madrid (Enrique Arrondo), une à Sarrebourg (Sorin Popescu) et une à Paris (Laurent Koelblen).

L'incidence de la création de ces groupes sur l'activité scientifique reste pour l'instant très loin de ce qu'en espèrent beaucoup de membres d'Europroj mais le programme Human Capital and Mobility arrive à point nommé pour dynamiser ces groupes et favoriser leur épanouissement. Tous ceux qui veulent contribuer à ce développement et qui n'ont pas encore rejoint Europroj sont invités à le faire sans tarder (pendant que c'est encore gratuit!) en se signalant à :

Europroj, CIMI, 1 av. Edith Cavell, 06100 Nice.

André HIRSCHOWITZ
Université de Nice

LE C.N.R.S. ET L'EUROPE EN MATHÉMATIQUES

Jean-Pierre FERRIER (C.N.R.S.)

Le sujet est à la fois complexe et important et méritera un traitement approfondi dans un futur proche. Je me bornerai ici à indiquer quelques axes de la politique du CNRS qui pourraient s'appliquer aux Mathématiques.

Ainsi je préfère attendre qu'un premier bilan soit tiré sur les relations avec l'Europe de l'Est avant de voir le sujet exposé, bien que ce soit là que les initiatives les plus visibles aient été prises en Mathématiques par le CNRS avec l'aide du MRE.

Par comparaison, les relations avec l'Europe de l'Ouest, peut-être parce qu'elles se sont installées à un niveau stable depuis très longtemps, n'ont pas donné lieu jusqu'ici à des initiatives importantes et nombreuses. On peut mentionner cependant la participation du CNRS à l'Institut Newton de Cambridge, en réciprocité de la participation du SERC anglais à l'IHES.

Cela ne veut pas dire qu'il faut en rester là; au contraire le moment est venu d'exploiter des canaux que le CNRS met en place pour développer une politique européenne dans un esprit de décentralisation.

Une première formule est celle des Laboratoires Européens Associés (LEA); dans l'idéal il s'agit de constituer un laboratoire bilocalisé intégrant deux équipes de pays différents, constituant par exemple un laboratoire de 50 chercheurs avec deux équipes de 25 chacune. En pratique, dans les quelques exemples de cette structure aujourd'hui en place, le modèle est plutôt celui d'un jumelage fort; ces jumelages bénéficient d'une priorité pour l'obtention de postes d'accueil. Les exemples envisageables touchant les Mathématiques ne se bousculent pas; pourtant il est permis d'envisager dans cette discipline une situation typique, celle d'un LEA fonctionnant sur projets de 5 à 10 chercheurs, répartis entre les deux localisations mais coordonnés sur l'ensemble.

Une autre voie est celle des Groupements De Recherche à extension Européenne (GDRE); il s'agit d'étendre certains GDR à quelques laboratoires étrangers sans en faire un grand réseau européen pour autant, dans une spécialité où la France est particulièrement forte. Ici le retard pris en Mathématiques est dû au nombre encore faible de véritables GDR; la situation devrait progressivement être corrigée, en commençant dans des domaines tels que l'algorithmique en théorie des nombres, les méthodes stochastiques appliquées à la vision artificielle, le calcul scientifique sur machines parallèles ... Les GDRE peuvent être bâtis autour du noyau constitué par un LEA.

La politique du CNRS n'est pas limitée à la mise en place de structures propres; ces dernières doivent être le premier cercle de réseaux compatibles avec les programmes commutaires, comme Capital Humain et Mobilité pour citer le dernier en date. C'est ainsi qu'un jumelage entre le CIRM et le centre d'Oberwolfach peut prétendre émarger aux Euroconférences.

Ce petit aperçu est donc une sorte d'appel à propositions; espérons qu'elles seront exemplaires. ■

MATHEMATICS IN THE NETHERLANDS

1. General introductory remarks

1.1. Geographic distribution

Mathematical research in the Netherlands is of course not the sole territory of the universities. Important fundamental and applied research is done in industry and at governmental institutes, e.g. at the Philips Research Laboratories (NatLab), the Shell Laboratories, Akzo, Space- and Aircraft Laboratories (NLR), and at the European Space Research and Technology Centre (Estec). However, in this survey, I shall mainly concentrate on research at the universities.

There are 6 general universities with a separate curriculum in mathematics, two at Amsterdam, one in Groningen, Leiden, Nijmegen and Utrecht. Then there are the 3 technical universities at Delft, Eindhoven and Twente which offer a complete curriculum. The 5 other universities at Heerlen (Open University), Maastricht, Rotterdam (Economics), Tilburg and Wageningen (Agriculture) don't offer a degree in mathematics, but there is some mathematical research present at these universities, mainly connected with applications. Finally, there is the CWI, the Centre for Mathematics and Computer Science in Amsterdam. Its task is to foster fundamental research in areas where mathematics and computer science merge and to exchange knowledge with industry and governmental organisations. The branches of mathematics represented at this centre are discrete mathematics and computer algebra, mathematical modelling, numerical mathematics and operations research in combination with control theory.

1.2. Funding of mathematical research

Most research is funded directly by the government of education and science. But there is also a substantial portion financed by the "Dutch NSF", the NWO (Netherlands organisation for the Advancement of Scientific Research). For instance, the CWI is funded by NWO. The NWO in addition finances some positions and stipends for graduate and post-graduate researchers.

2. Study of mathematics at the universities

2.1. Structure of the curriculum at the university

The first year at university consists of a general introduction to the field(s) of choice with an exam (propedeuse) at the end. The students are allowed at most one more year, if they fail the propedeuse. After this, the students specialize during three more years. For mathematics that means choosing one or more clusters of pure or applied mathematics in combination with a subject in computer science, economics or physics. At the end of this 3 year period, if students have collected the necessary credits, they obtain the degree of "doctorandus" abbreviated as "drs.". This degree is more or less the equivalent of the masters degree. Only a few students continue for a doctoral thesis which, when accepted and defended, gives them the title of "doctor" ("dr.").

All students get a small grant from the government for at most 5 years* regardless of their performance or of the income of their parents. In addition they can rent money at market interest rates, so that they can easily accumulate a total debt of tens of thousands of guilders (1 ECU = 2.2 guilders). They pay a fee for tuition which is about 2000 guilders. After the five year period they no longer get the basic grant and have to pay a multiple of the fee for tuition. These harsh measures, most of them recently taken and inspired solely by budgetary considerations, are meant to force students to complete their studies within 5 years. Figures for this year don't indicate that this indeed is

* This does not include graduate studies, see below

going to happen. Instead, students seem to regard their first year as an opportunity to postpone their choice, even if they fail (in most studies the percentage of success for the first attempt to the propedeuse is well below 50 %, in some cases even as low as 10 %). With a basic grant secured, they at least have had a "year of fun". As a result, we have a strange mixture of students in the first year; some very good and motivated, some mediocre and barely interested in the subject. Teaching sometimes large groups (300 is the average size at the technical universities) is not very popular and it is hard to find them good teachers, even harder to find ones who also have a solid background in research. This is one of the reasons why the output is so low.

Of course the situation ameliorates in higher years, even so much that the number of Ph.d.-students in pure math has remained constant over the last few years; in applied math it has even grown.

2.2. Graduate schools

Until very recently, there were no graduate schools in the Netherlands. After obtaining their "drs." – degree, students may select a thesis-adviser ("promotor" in our Latin jargon) and then compete for a modestly paid assistantship for four years. There used to be no special curriculum. The thesis-adviser decides whether the work is substantial enough to grant the student ("promovendus" in local jargon) the title of "doctor". This still is possible, but the minister of education and science is now promoting graduate schools. This is based on his doubt whether our Ph.d.'s could meet international standards. He argues that only big enough groups of "top researchers" should be given the right to establish a graduate school, which automatically would guarantee quality. As to practical changes, a special curriculum should be offered to these students with compulsory examination. Of course such a graduate school could be given some extra money to attract brilliant experts in the field to teach special courses. But the money would have to be found by "re-allocation" within the university.

At first, few people at the university thought that we needed such schools. Especially graduate students themselves disapproved of these ideas, mainly because they would have to be compelled to "broaden their perspective" at the expense of their own research which they would have to complete strictly within four years. They argued that their thesis adviser should be forced to spend more time with them. They opposed the idea of moving around funds to be able to attract some visiting bigshots only to enhance the reputation of the graduate school. Instead they suggested to make available some travel money for them. It would cost less and be more effective. Indeed a better alternative.

But, because of political pressures, the general consent nowadays is that we, mathematicians, should also have one or more graduate school as a proof of the quality of our research. Otherwise, the policy-making mathematician might not be able to secure the funds necessary to do research.

Let me point out that there is another way of enhancing the quality of research. By way of an example, let me consider my own field, algebraic geometry. Some ten years ago a small group of enthusiastic geometers (I was one of them) started an "Inter-City Seminar" every fortnight. We met alternatingly at Amsterdam, Leiden, Utrecht and Nij-megen. The best students in geometry were attending our seminars and a couple of years later we asked the NWO for support (it was then still called "ZWO", the "Z" standing for "Zuiver", pure). Two groups were funded, one in singularity theory and one in moduli theory. Both groups flourished several years producing world class mathematicians. Now, a third smaller scale project in Arithmetical algebraic geometry is about to finish. Up to the present day the seminars are continuing to attract the best students and are highly valued.

This example hopefully shows that mathematics research is best left on its own. You should not force the best students to attend courses that don't interest them. Instead, they should be encouraged to learn as many aspects of mathematics as possible by launching them at once into the fascinating world of research. In our seminars besides a course on a specific topic, we therefore always had guest speakers talking about their own research.

Of course, algebraic geometry is not the only field in which these networks of graduate students have been established. There are groups active in mathematical logic, in the theory of Lie groups and special functions, in mathematical physics (field theory and integrable systems), in non-linear partial differential equations (diffusion), stochastics and in control theory.

2.3. Number of students decreasing rapidly : red alarm

In mathematics, the number of students in the first year is gradually declining. See the table below. Since there is a growing need for mathematicians in society this is a reason for alarm. The Advisory committee has done extensive research to make a well-founded proposal as how to reverse this trend. In the following section we discuss it in greater detail.

	'82	'83	'84	'85	'86	'87	'88	'89	'90
General Universities	172	194	190	191	223	210	200	**159**	**160**
Technical Universities	145	135	179	210	247	229	217	**179**	**173**

Table 1 : Number of students in their first year

	1987	1988	1989	1990
Master degree	187	181	**152**	**113**
Engineer	343	401	**277**	**231**

Table 2 : Number of students with a masters degree or an engineering degree

	General	Universities	Technical	Universities
	1980	1990	1980	1990
Permanent staff	201	159.5	220	225.4
Post-docs	3	12	2	0
Ph.d.'s	66	94	19	96

Table 3 : Personnel in mathematics financed by the government

2.4. The job prospects at universities and the real threat to basic research

The number of positions for mathematicians at the universities has been declining gradually. The decrease in the number of students partly accounts for this, since the money allocated to universities is for a large part proportional to the number of students. Indirectly this infuenced the job-situation as well. In the sixties the student population grew enormously and there was much money and goodwill to enable a proportional growth of the staff at the universities. Consequently, later generations of graduates with really good and even outstanding research reputation had the greatest trouble to find a permanent position.

This situation has not improved. For instance, as a result of our joint activities in algebraic geometry there is now a considerable group of recent Ph.d.'s, most of which do not have permanent jobs. This is frustrating and the government should stop this wasting of talent.

Given that the positions are rare, all kind of political arguments are being used to select a candidate except his or her quality. Second rate university policy-makers make selections on the basis of the research they are familiar with. Or they hire "promising new talents" for highly paid jobs, favouring fashionable topics like chaos-theory or "geometric" quantum field theory. This in my opinion is the real threat for university research in the Netherlands and especially for mathematics.

3. The Advisory Committee on Mathematics

3.1. Background

Some years ago the mathematics community in the Netherlands started to realise that it was about to face some serious challenges for which it felt not adequately equipped. Although mathematical education both at secondary schools and at the universities has been well respected internationally, the startling lack of interest for the profession of teacher was considered to be a potential threat which could undermine the quality of mathematics education. Many of us, mathematicians, have had an enthusiastic mathematics teacher who stimulated to think about problems other than those from the text-book or who coached us for the Mathematics Olympiads. Nowadays there are practically no students at the university who want to become teachers. Most secondary school teachers come from colleges for higher education where the amount and the level of mathematics is hardly a fraction of what is taught at the university. How can you expect these teachers to know anything about research related modern mathematics? How can they give an adequate picture of mathematics to prospective students, how can they explain to them that mathematics "is fun"?

Indeed, the number of students doing mathematics is declining in favour of more fashionable studies like economics, "European studies", " Communication studies", "Management", etc. There is a variety of reasons. There is of course the trend in society; students tend to choose subjects securing them a well-paid job. But the lack of good teachers in virtually all of the exact sciences gives students the impression that a career in math or physics is not challenging.

In my opinion a very dramatic mistake has been made when some years ago, the government, in trying to decrease its deficit, lowered the starting salaries for teachers. But especially in the exact sciences the starting wages in the industry were much higher, with the predictable effect that no one opted to become a teacher.

Mathematics is confronted with an extra problem : the general public considers mathematics a finished subject and does not know that fascinating research is going on in our field. It is also not widely known that there is a growing demand for mathematicians in industry as well as in governmental organisations. Indeed, at the moment most mathematicians coming from the university quickly find a job (except at the university itself, as we have seen before). This is in sharp contrast to other fields, were sometimes students apply for years before they find a more or less suitable job.

Realising all these problems and misconceptions, in 1989 the mathematical community convinced the ministry of education and sciences to establish an Advisory Committee "to ascertain the present, expected and required development of research and higher education in mathematics; to determine the position of the Netherlands in these areas internationally; and to discuss the significance of these developments for society". On February 17 of this year this Advisory Committee completed its task by offering their 215 pages long report ([1]) to the Dutch Minister of Education and Sciences. This is the first policy-making report on mathematics in the Netherlands, comparable to the first David report ([2]).

Since I believe that this report will have an important impact on the future of mathematics in the Netherlands, I shall briefly discuss its recommendations.

3.2. Recommendations on teaching

The standard curriculum of pre-university mathematics should be changed to reflect the nature of mathematics as a field which, as physics, is constantly developing and has favourable career prospects. The programme should become challenging, even for the most gifted students.

Also a short series of television programmes should be produced to highlight the "success story of mathematics".

The Advisory Committee finally suggests some improvements for university related teaching such as the development of more and better applications-oriented programmes.

3.3. Recommendations on research

The Committee offers a detailed "promotion plan". The most striking points of this plan are first of all the establishment of a European Institute for fundamental and applied research in statistics, probability theory and operations research and secondly a structural increase of the directly funded annual budgets of the mathematics departments by fifteen million guilders (about 6.5 million ECU) to be achieved within five years. Apart from this "promotion plan", the Committee proposes to establish two or three broadly based regional graduate schools. The corresponding graduate courses should be organised by national networks for graduate students in the various subfields.

4. Mathematical research

"In mathematical research, the Netherlands is certainly not a small country : the range of subjects covered is as broad as in the larger European countries. The research is of a generally high standard and has an excellent international reputation." ([1] p. 207).

Let me briefly survey the various fields in which substantial research is going on. I will mention names only if this seems helpful. I apologise if I forget to mention topics that might be considered important or if I should have mentioned other people as well. I really wanted to keep this survey to a sizeable minimum and interesting for other non-dutch mathematicians.

– *History of mathematics.* Only present at Utrecht.

– *Logic and Foundations.* The name of L.E.J. Brouwer (1881-1966) is synonymous with intuitionism. Nowadays there are other prominent areas as well, some of which are related to computer science (Amsterdam, Utrecht and Nijmegen).

– *Discrete mathematics.* At the CWI cryptography is prominent. Coding theory at Eindhoven (van Lint), at Leiden, Delft and Amsterdam.

– *Number theory.* At Leiden, Kloosterman (1900-1968) has played a very important role. Nowadays, at Leiden the most prominent subject is diophantine approximation. And elliptic curves and modular forms at Utrecht.

– *Algebraic geometry.* Algebraic geometry flourishes in the Netherlands, especially at Amsterdam, Leiden, Utrecht, Nijmegen and Groningen.

– *Other algebraic topics.* Ring theory, including algebraic K-theory to be found at Utrecht and Nijmegen. The theory of algebraic groups has been prominently present in the person of T. Springer who recently retired. Finite group theory : Amsterdam and at the CWI.

– *Topology.* General topology has been flourishing in Amsterdam (L.E.J. Brouwer, de Groot), but nowadays few persons are active in this field. Algebraic topology, once a mainstream activity (H. Freudenthal) in Amsterdam and Utrecht is now researched at Nijmegen.

– *Dynamical systems.* At Groningen there is F. Takens and his school on bifurcation theory. There are also more analytical groups, see below under differential equations.

– *Lie Groups, Harmonic analysis, special functions* . There is a "Harish-Chandra"-oriented group with attention for special functions and quantum groups (Leiden, Amsterdam and Nijmegen).

– *Differential equations.* Topics include completely integrable systems (Amsterdam, Twente, Utrecht), singular perturbation (the "Utrecht school"), differential operators on Riemannian manifolds (Duistermaat at Utrecht), theory of (systems of) non-linear partial differential equations (Leiden and Delft-includes applications to mathematical biology).

– *Functional analysis and operator theory.* Zaanen and his internationally well-known school in linear analysis (measure and integration, Riesz-spaces) has been active at Leiden. Present day topics include positive operators on Banach-lattices (Leiden, Delft and Nijmegen), operator theory (Amsterdam, Delft, Leiden, Groningen, Eindhoven and Rotterdam- includes applications to mathematical biology).

– *Probability theory, stochastics and statistics.* D. van Dantzig (1900-1959) started these subjects in 1946 at the Mathematical Centre (now CWI). In the late fifties and sixties this centre offered advice for the famous Delta works. Now, these applied branches are present at most universities.

– *Numerical mathematics.* There are many groups at most universities and all technical universities. Mostly numerical work on differential equations.

– *Mathematical physics.* Topics : stochastic methods (ergodic theory, percolation, quantum stochastic, many-body systems etc.), (quantum-)integrable systems and quantum field theory (Amsterdam, Utrecht, Leiden), statistical mechanics (Groningen), phenomenological mathematical physics (the technical universities).

– *Operations research.* There are several larger groups at the technical universities, at the economics departments of Rotterdam, Maastricht and Tilburg and a few small groups at Amsterdam, Leiden and Groningen.

– *System theory and control theory.* Dutch research is mainly of theoretical nature. There are groups at the technical universities, the CWI and at the university of Groningen.

References

[1] Wiskunde in beweging (Mathematics, ordering a complex world), report of the Advisory Committee on Mathematics, Distributiecentrum DOP, Postbus 11594, 2500 EA 's-Gravenhage, ISBN 90 346 2725X.

[2] Renewing U.S. Mathematics, National Academy Press, Washington D.C. 1984. ■

Chris PETERS (Math. Institute, Rijksuniversiteit te Leiden, P.O. Box 9512 – 2300 RA The Netherlands)

A BRIEF ACCOUNT OF THE SITUATION IN MATHEMATICS IN NORWAY

Norway has approximately 4 million inhabitants. In the fall of 1989 there were 142 permanent positions in mathematics at the universities and regional colleges (37 in applied mathematics and mechanics, 58 in pure mathematics, 37 in statistics and 8 unspecified). Of these positions 7% were held by women.

Since then the number of students has increased drastically at the universities, in particular in the social sciences, but also in the field of mathematics. This development is due to an increase in unemployment together with a political emphasis on the value of a higher education. As a result there has been an increase of some 12 positions (mostly temporary ones) in mathematics at the universities over the last two years.

Our 20 teachers colleges have also got some new positions last year due to a strengthening of the mathematics program at these scools. Also the technical colleges offer more mathematics and statistics than before, and want to hire mathematicians.

While approximately 7500 students (almost 40% of these are girls) choose the highest level of mathematics in senior high school less than 35 students (with 20% women) end up with an M.S. degree in mathematics each year. One third of these take a Ph.D, the total number of Ph.D.'s over the last five years being 54 (with 5% women).

The Institute for Studies in Research and Higher Education at the Norwegian Research Council for Science and the Humanities has just published a report on the recruitment to mathematics and science. They conclude that the situation for mathematics is rather good the coming years based on a very small increase in personnel at the universities and research institutes, the above number of Ph.D.'s, and the following age distribution for the 1989 staff at universities and regional colleges :

65 years and above	4 %
60 – 64 years	3 %
55 – 59 years	9 %
50 – 54 years	20 %
45 – 49 years	24 %
41 – 44 years	21 %
35 – 40 years	12 %
30 – 34 years	6 %
Below 30 years	1 %

Age distribution for mathematics staff

But then the report has not registered the sudden need for more mathematicians at the universities and colleges mentioned above. The report adds, however, that the demand is likely to be higher due to new challenges from industry (A quick inquiry in the mathematics departments tells that 50% of our Ph.D's today go to industry or institutes connected with industry.)

Our Ph.D. program build on an M.S degree, and the output of master degrees should definitely be increased. A rather new degree of an M.S. in Industrial Mathematics at the Norwegian Institute of Technology will increase this number by some 20 per year. But these candidates are not likely to become teachers. And this is what is really lacking in Norway : Well qualified mathematics teachers in senior (and junior) high school. Only 3 candidates per year with a masters degree in mathematics choose to become teachers. ■

Kari HAG Division of Mathematics,
The Norwegian Institute of Technology
N-7034 TRONDHEIM (Norway)

Ce bref rapport, loin de constituer une étude détaillée sur la situation des laboratoires de recherche albanais, a essentiellement pour but d'aider ceux qui le souhaitent à mettre en place une coopération avec des équipes albanaises. On trouvera ici quelques renseignements pratiques qui devraient permettre à tous ceux qui le désirent de prendre rapidement contact avec celles-ci. Par ailleurs, j'ai rédigé un rapport plus long qui décrit de façon assez détaillée chacune de ces équipes de recherche. Il est possible de l'obtenir en s'adressant directement à la SMF.

Présentation générale

La Société Mathématique de France est très attentive depuis quelques années à l'évolution de la situation dans les pays d'Europe Centrale et Orientale. A l'occasion de ses précédentes journées annuelles, la SMF avait d'ailleurs organisé le 31 mai 1991, avec le concours du Ministère de la Recherche et de la Technologie, une série de tables rondes afin d'essayer de mieux comprendre quelles pouvaient être les perspectives de développement de la coopération scientifique avec ces pays. A la suite de ces journées, nous avons mis en place, avec l'aide de la MICECO(1), un certain nombre de missions, dont celle que j'ai effectuée en Albanie entre le 13 et le 20 juin 1991.

L'organisation d'une telle mission n'était pas d'une extrême facilité, et c'est grâce au dévouement des services de l'Ambassade d'Albanie à Paris(2) (en particulier de Monsieur Luan Rama, Premier secrétaire de l'Ambassade), qu'elle a pu se concrétiser. De même, Monsieur Michel Boulder, Ambassadeur de France à Tirana(3) a été très attentif à nos propositions. Il n'a pas hésité à souligner l'intérêt qu'il portait à notre démarche, organisant notamment une réception en l'honneur de la Société Mathématique de France à laquelle était conviée une vingtaine d'informaticiens et de mathématiciens albanais.

Lorsqu'on arrive à Tirana, on est vraiment surpris par le nombre de personnes parlant très bien français. Ainsi, lorsque j'ai été invité à présenter, dans le cadre du *Symposium Pro Future on Economic Development in Albania*, les programmes d'échanges scientifiques français, l'ensemble des participants (il y avait là des chercheurs et des étudiants de toutes disciplines), a demandé à ce que l'exposé et le débat aient lieu en français, alors que les langues officielles du colloque étaient l'albanais, l'allemand, l'anglais et l'italien. Il est vrai qu'un grand nombre d'universitaires ont effectué leurs études en France, et que les albanais apprécient particulièrement la culture française.

Des actions rapides en informatique et en mathématiques

Les difficultés économiques, conjuguées à une pénurie importante d'enseignants et de chercheurs, conduisent nos collègues albanais à effectuer de nombreuses heures supplémentaires d'enseignement. Par exemple, un chercheur de l'Académie des Sciences effectue un service annuel d'enseignement d'environ 200 heures et un enseignant-chercheur de l'Université, un service annuel d'enseignement d'environ 600 heures. On comprend l'extrême difficulté que peuvent rencontrer ces derniers à poursuivre leurs recherches.

Les nombreux mathématiciens et informaticiens que j'ai pu rencontrer, aussi bien à l'Académie des Sciences qu'à l'Université, ont tous exprimé leur souhait de voir se développer dans l'avenir une collaboration plus importante avec la France. La plupart de ces chercheurs connaissent bien la France, où ils ont souvent effectué une partie de leurs études, et sont conscients de la différence actuelle de niveau entre les équipes des deux pays.

Aussi, nos collègues albanais sont prêts à nous aider à organiser, dans un premier temps, quelques écoles d'été en Albanie, qui permettraient tout d'abord de former un nombre important de jeunes chercheurs. Ces écoles pourraient en particulier être l'occasion de mettre en place un régime de thèses codirigées.

Un premier projet d'école d'été en Albanie.

J'ai moi-même décidé de proposer aussi rapidement que possible un projet d'école d'été sur le thème "Mathématiques de l'informatique", en espérant que régulièrement des collègues proposeront dans l'avenir d'autres projets sur des thèmes que nous devrons définir avec nos partenaires albanais. Cette première école d'été, organisée en collaboration avec le CIMPA[(4)], permettrait de présenter quelques concepts et outils mathématiques qui interviennent en informatique (arithmétique et théorie des langages, codes correcteurs d'erreurs, combinatoire et logique, étude dynamique des polynômes complexes, probabilités et systèmes dynamiques). Elle devrait se dérouler en 1993 et comprendre 180 heures de cours et de travaux dirigés, réparties sur une période de 6 semaines durant lesquelles interviendraient au total 12 enseignants.

Accueillir des étudiants albanais en France.

Durant mon séjour, l'INIMA[(5)] a organisé une série de réunions avec des étudiants albanais susceptibles de venir effectuer un DEA en France. Tous parlaient couramment français.

Voici la liste de ceux dont les connaissances m'ont paru solides, ainsi que les thèmes qu'ils souhaiteraient venir approfondir en France. Les laboratoires qui souhaiteraient accueillir ces étudiants peuvent obtenir des informations précises concernant les démarches pratiques à effectuer en s'adressant au secrétariat de Madame Rabain, à la Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales du Ministère de l'Education Nationale et de la Culture (téléphone : 40 65 67 54).

Kliti Ceca (26 ans, probabilités, statistiques et économétrie), Arjan Novruzi (28 ans, équations différentielles), Romeo Sherko (25 ans, systèmes d'exploitation), Bujar Sinoimeri (28 ans, optimisation combinatoire, organisation de la production), Naim Sula (25 ans, bases de données), Valentina Tarusha (31 ans, informatique appliquée aux finances et gestion), Ilir Tona (29 ans, bases de données et gestion), Albert Vreto (31 ans, réseaux informatiques).

Aider les bibliothèques albanaises.

Monsieur Boulder, Ambassadeur de France à Tirana, nous a dit qu'il souhaitait vivement que les bibliothèques albanaises puissent acquérir rapidement des ouvrages scientifiques et techniques français. Il possède lui-même pour cela des crédits, gérés par le Ministère des Affaires Etrangères. Les personnes qui souhaitent faire parvenir de tels ouvrages à des collègues albanais (par exemple en vue de préparer une école d'été) peuvent s'adresser directement à Monsieur Mabin, à la Sous-Direction du Livre et des Questions Culturelles du Ministère des Affaires Etrangères.

Principales équipes de recherche

Voici la liste des principales équipes de recherche albanaises et de leurs responsables, qui sont prêts à travailler avec toute personne désirant mettre en place une coopération avec l'Albanie. Ils ont tous déja visité la France et parlent couramment français. Certains d'entre eux seront présents à Paris lors du Congrés Européen de Mathématiques.

Le courrier met parfois encore de nombreux mois à parcourir les 2000 kilomètres qui séparent la France de l'Albanie. Par contre, il est maintenant très facile de joindre Tirana par téléphone ou par fax. Il ne faut donc pas hésiter à les contacter.

A l'Institut National d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences d'Albanie, Rruga Lek Dukagaini NR 4, Tirana (téléphone et fax : 355 42 321 22) :

- Analyse numérique (Fotaq Nano)
- Informatique (Kristian Bukuroshi, Directeur de l'INIMA)
- Probabilités et statistiques (Mina Naqo)
- Recherche opérationnelle (Frédérik Premti)

– Systèmes d'exploitation (Eqerem Arkaxhiu, Vice-Directeur de l'INIMA).

A la Faculté des Sciences Naturelles de l'Université de Tirana
(fax : 355 42 276 78) :

– Algèbre et géométrie (Petray Petro)
– Analyse numérique (Fatmir Hoxha)
– Equations différentielles (Sefedim Xhemalce, Vice-Doyen de la Faculté des Sciences)
– Informatique (Maki Raco)
– Probabilités et statistiques (Llukan Puka)
– Recherche opérationnelle (Vasillaq Kedhi)
– Topologie et analyse fonctionnelle (Aleko Minga).

J'ai visité également l'Institut Pédagogique de Gjirokastra, où travaillent sept mathématiciens sous la direction de Kristaq Kikina.

On m'a signalé par ailleurs l'existence d'équipe de mathématiciens à l'Institut Pédagogique d'Elbassan, à l'Institut Agricole de Korça, à l'Université de Skodra ainsi qu'à l'Université Agricole de Tirana. ■

Christian MAUDUIT
Université Claude Bernard, Lyon 1

---

(1) Mission Interministérielle pour la Coopération avec l'Europe Centrale et Orientale

(2) Ambassade de la République d'Albanie, 131 rue de la Pompe, 75116 Paris (tél. 45 53 51 32)

(3) Ambassade de France, rue Skendelberg, Tirana (tél. 19 355 42 22 804 ou 42 23 245)

(4) Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées

(5) Institut National d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences d'Albanie.

Enquête sur la pyramide d'âge des professeurs de mathématiques et sur le remplacement des futurs retraités

Vous trouverez ci-dessous l'essentiel des résultats d'une enquête menée par l'Université de Bielefeld sur les besoins de recrutements de mathématiciens. Le texte que nous publions (en traduction française) est complété dans la version originale par plus de 40 tableaux. Nous nous contentons de reproduire les plus frappants. Vous pouvez obtenir la version originale (en allemand) de ce texte à l'adresse suivante :
Professor K.P. Grotemeyer, Fakultät für Mathematik, Universitatsstraße, 4800 BIELEFELD 1.
Nous remercions les deux traducteurs strasbourgeois de ce texte, Manfred Preißendörfer et Marie-Hélène Charrier, dont l'original est en allemand.

Résumé des résultats

- L'âge moyen des professeurs C4 et C3 a augmenté de façon continue ces dernières années. Le groupe d'âge le plus important constitué par les professeurs âgés de 51 à 55 ans. 38% des professeurs C4 ont plus de 55 ans.
- Le taux annuel de renouvellement moyen pour les années 1991 à 1995 est entre 2,2% et 1,9% ce qui est nettement inférieur au taux de renouvellement régulier de 3,5%.
- Dans les années 1996-2000 le taux de renouvellement s'approche avec 3,2% et 3,1% du taux de renouvellement régulier.
- Après l'an 2000, le taux de renouvellement annuel atteint 6,1%, dépassant ainsi de presque le double le taux régulier de 3,5%.
- Le besoin supplémentaire, qui se calcule d'après le taux de renouvellement annuel de 3,5% est de 7 à 16 postes C4 et 48 postes C3 entre 1991 et 1996.
- D'ici 1995 le nombre d'habilitations semble régresser de 30–40%.
- Le rapport entre le nombre d'habilités et le nombre de postes de professeurs de mathématique se libérant s'appoche de $\frac{1}{1}$.
- D'ici 1995 on s'attend à 161 habilitations.
- Dans les années 1986–1990, 206 habilitations ont été obtenues: 36 (17,5%) habilités ont atteint leur but professionnel et sont professeurs permanents, 24 (12,7%) sont "Dozenten" (1) ou professeurs C2 temporaires. 50% des habilités sont encore employés à l'université dont 80% sur des postes temporaires.
- 113 employés des universités ayant passé leur habilitation avant 1986 n'ont pas encore de poste permanent. 11 (11,7%) parmi eux sont "Dozenten". Environ 48% des scientifiques ont des postes au salaire assuré à l'université, 28% sont employés en dehors de l'université.
- En 1991, environ 100 scientifiques ayant obtenu leur habilitation avant 1991, se trouvent dans une position instable.

Premiers résultats d'une enquête concernant la pyramide des âges des professeurs et la situation de la relève scientifique en mathématique

A. Pyramide des âges des professeurs de mathématique (tableau 1).

Si l'on compare les récents résultats de l'enquête sur l'âge moyen des professeurs de mathématique à ceux du "Conseil Scientifique (2) (Conseil Scientifique : Données de base

(1) pour l'essentiel enseignants non permanents de niveau C2
(2) Wissenschaftsrat

concernant l'effectif du personnel universitaire et la situation de la relève scientifique, Cologne 1988) de l'année 1983, on obtient le tableau suivant :

professeurs	âge moyen	conseil scientifique 1983
C4	53,3	48,2
C3	49,4	44,1
total	51,7	

L'âge moyen des professeurs C4 et des professeurs C3 a augmenté de 5 ans pendant les huit ans séparant les deux enquêtes. En 1983 le groupe des professeurs âgés de 40 à 45 ans était le plus important, tandis qu'en 1991 c'est celui des professeurs de 51 à 55 ans. En 1983 le groupe des professeurs C4 âgés de plus de 60 ans était minime, tandis qu'en 1991 ceux-ci représentent plus de 20%.

Alors que la part des professeurs âgés de moins de 40 ans était élevée (C4 = 8,7% et C3 = 21,6%) en 1983, elle se tasse à 3,9% pour les professeurs C4 et 13,4% pour les professeurs C3. En 1983 il y avait encore 41 des professeurs C4 et 80 des professeurs C3 âgés de moins de 40 ans, tandis qu'ils ne sont plus que 18 C4 et 49 C3 en 1991.

Dans l'enquête suivante, on ne s'est pas intéressé à l'âge des professeurs à leur première nomination (35,6 ans en moyenne pour les professeurs C4 et 36,2 ans pour les professeurs C3) ce qui fait qu'on ne peut vérifier si celui-ci est en augmentation. En 1983 les professeurs de mathématique étaient par comparaison très jeunes au moment de leur première nomination. Plus d'un tiers des professeurs C4 à ce moment-là l'étaient devenus avant 34 ans.

L'augmentation de l'âge moyen des professeurs de mathématique souligne d'ailleurs qu'il y a eu peu de nouvelles nominations durant les dernières années.

[...]

B. Vacances de postes de professeurs en mathématique.

En plus de l'année de naissance des professeurs on a demandé dans le questionnaire à quelle date leurs postes doivent se libérer. Comparé aux résultats donnés par la pyramide des âges, la date de libération d'un poste de professeur donne davantage de renseignements sur le nombre de titulaires ayant plus de 65 ans et quand c'est le cas, cela permet de savoir si le titulaire du poste compte continuer à occuper celui-ci. Dans les autres cas, l'âge de 65 ans est pris comme date de libération du poste bien que cette échéance pourrait être retardée de trois ans dans les Länder où c'est possible.

Taux de renouvellement.

Le tableau 2 montre le pourcentage annuel moyen des postes C4 et C3 se libérant par tranche de cinq ans.

Si l'on part d'un taux de renouvellement de 3,5% par an, ce qui correspond à un âge moyen de 36,4 ans à la première nomination, garantit un renouvellement régulier des mathématiques et améliore les chances d'avancement des jeunes chercheurs, on s'aperçoit que le taux de remplacement avec 2,2% de 1991 à 1995 et 3,2% de 1996 à 2000 reste dans les dix années à venir en dessous de cette moyenne. Dans les années 2001 à 2005, le pourcentage des postes C4/C3 se libérant chaque année augmente en moyenne jusqu'à 6,1%, ce qui signifie qu'il y aura pratiquement trois fois plus de postes vacants que dans les cinq prochains années.

Si l'on enlève de ces chiffres les postes marqués "kw" ou "ku" [3], le pourcentage des postes

[3] postes "kw" et "ku" : voisins des postes en surnombre, ils ne permettent pas un recrutement nouveau lorsqu'ils sont libérés

se libérant baisse à 1,9% dans les années 1991 à 1995 et à 3,1% dans les années 1996 à 2000.

A cause du taux de remplacement faible, on calcule le besoin de postes supplémentaires d'ici 1995, présenté dans le tableau suivant, en se basant sur un taux de remplacement moyen de 3,5%.

1991–1995

	nombre de postes total	postes se libérant	taux de remplacement	besoin en postes supplémentaires
C4/C3	836	91	2,2	55
C4/C3 - postes marqués kw/ku	764	71	1,9	63
C4	469	75	3,2	7
C4 - postes marqués kw/ku	432	60	2,8	16
C3	367	16	0,9	48
C3 - postes marqués kw/ku	332	11	0,7	47

On constate un manque de 55/836 et 63/764 postes de professeur.

Si l'on différencie ce besoin supplémentaire entre les postes C4 et C3, il est clair qu'il ne manque que 7/469 et 16/432 postes C4 existants dans le 5 prochaines années.

Le besoin supplémentaire en postes C3 s'élève lui à 48/367 et 47/332 postes existants.

C. Situation de la relève scientifique en mathématique.

1. Nombre d'habilitations prévues entre 1991 et 1995

Pour apprécier les renseignements des facultés de mathématique sur les habilitations prévues entre 1991 et 1995, il faut prendre en compte que, outre les universités de Oldenburg et de Trier qui n'ont pas participé à l'enquête, celles de Münster et Kiel n'ont pu fournir de renseignements. De ce fait, le nombre d'habilitations prévues d'ici 1995 est inférieur à la réalité.

Le nombre d'habilitations prévues pour 1991 atteint 53. D'ici 1995 on prévoit malgré l'imprécision croissante pour l'estimation du nombre d'habilités prévus, une diminution du nombre d'habilitations. Dans les chiffres obtenus on note un recul à 22 habilités pour l'année 1995, ce qui correspond à une réduction de 41,5% par rapport à 1991 et de 49% par rapport à 1990. On peut supposer un recul d'environ 30 à 40% en tenant compte de l'imprécision des chiffres et de l'absence des données des quatre universités.

Malheureusement on ne dispose que de 87% (= 140) des données sur l'emploi actuel des futurs habilités. Leur emploi se décompose comme suit : 60,7% (85) ont des postes (Angestellte), 27,1% (38) ont des postes temporaires de conseillers ou employés académiques (Akademische Räte bzw. Angestellte), 1,4% (2) sont boursiers et 1,4% (2) sont employés en dehors de l'université, 4,3% (6) ont des postes permanents de conseillers ou d'employés académiques (Akademische Räte bzw. Angestellte auf Dauer). 94,3% sont des emplois temporaires et 5,7% sont des emplois de longue durée.

2. Habilitations obtenues de 1986 à 1990

Le nombre d'habilitations obtenues de 1986 à 1990 montre une image plus homogène que celui des habilitations prévues d'ici 1995. Seulement en 1989 il a regressé à 33 habilitations. En tout 206 habilitations ont été obtenues.

On ne dispose que de données sur l'emploi actuel pour 91,7% (189) des postes. Parmi ces 189 habilités 50,8% sont encore employés à l'université :

12,7% (24) en tant que "Dozent" ou professeur C2 temporaire
11,1% (21) en tant qu'assistant
9,5% (18) en tant que "Oberassistent"
4,8% (9) en tant qu'employé temporaire
10,0% (19) en tant qu'employé permanent
2,6% (5) en tant que boursier Heisenberg

49,2% sont employés depuis dans une autre université ou en dehors de l'université et sont répartis comme suit:

19,0% (36) en tant que professeur
16,4% (31) en tant que "wissenschaftlicher Mitarbeiter"
13,8% (26) en dehors de l'université

On ne trouve que 170 habilités ayant déjà obtenu un poste.

3. Titulaires d'habilitation obenue avant 1986 sans poste permanent

Les universités ont déclaré en tout 113 titulaires d'habilitation obtenue avant 1986 et n'ayant pas encore obtenu de poste.

De 83,1% (94) d'entre eux on possède de données sur l'emploi actuel. 68% (64) de ces 94 étaient encore employés par l'université, dont

11,7% (11) en tant que Dozenten
3,2% (3) en tant que Assistenten
5,3% (5) en tant que Oberassistenten
34,0% (32) en tant que Akademische Räte permanents
13,8% (13) en tant que wissenschaftliche Angestellte permanents

De plus, 27,6% (29) sont employés en dehors de l'université.

Les données concernant l'âge moyen des habilités au moment de leur habilitation n'ont pas encore été dépouillées. D'après le "Conseil Scientifique", la moyenne arithmétique des âges des scientifiques ayant obtenu leur habilitation en mathématique en 1985, 1986 et 1987 est 35,3 ans et la médiane 34,6 ans, soit l'âge le plus bas lors de l'obtention de l'habilitation, toutes disciplines confondues.

Tableau 3

	Date de l'habilitation					
	avant 86	86	87	88	89	90
Nombre d'habilités n'ayant pas de postes C3 et C4 (août 91)	113	37	33	37	28	35
Nombre d'habilités dans l'année		50	41	42	33	40

Pronostics

	91	92	93	94	95	somme
Nombre d'habilités dans l'année	53	31	21	34	22	161
Nombre de postes vacants C3 et C4	10	15	21	21	24	91

D. Besoin de renouvellement et potentiel de demande.

Lorsque l'on compare les statistiques concernant les habilitations obtenues auprès des doyens des départements de mathématique pour la période de 1986 à 1995 aux résultats de l'enquête du conseil scientifique pour les années 1977–1987 on note une relative stabilité du nombre d'habilitations en mathématique pour la période 1978–1991. Avant 1978 le nombre d'habilitations en mathématique était beaucoup plus élevé et ce nombre semble subir une diminution après 1991.

- Si la croissance, considérable à partir de 2001, du nombre de postes de professeur se libérant se poursuit et si le nombre d'habilitations n'augmente pas de façon remarquable, il est alors possible que l'on obtienne par an deux postes de professeur se libérant pour une habilitation (voir tableau 4).
- Cependant il faut tenir compte lors de l'observation du rapport entre le nombre des postes de professeur se libérant et le nombre d'habilitations du pourcentage des habilités ayant obtenu leur habilitation avant 1991, n'ayant pas encore de poste stable, mais désirant toujours faire une carrière scientifique. En ce qui concerne les demandes de poste potentielles d'ici 1995, on obtiendrait alors les chiffres suivants, si l'on ne tient pas compte de ceux qui ont trouvé un poste hors de l'université :

habilités avant 1986	113 – 26 = 87
habilités entre 1986 et 1990	170 – 26 = 146
habilitations prévues d'ici 1995	161
total	**394**
postes de professeur se libérant 1991–1995	91
rapport	4,3:1

Déroulement de l'enquête et résultats. Le questionnaire de l'enquête sur la pyramide des âges des professeurs et la situation de la relève scientifique en mathématique a été envoyé fin janvier 1991 aux doyens de tous les UERs de mathématiques de la République Fédérale, indiqués dans le bulletin "Mathématique—instituts, chaires, professeurs, 'Dozenten' avec adresses et numéros de téléphone, édition février 1990" édité par l'institut de recherche mathématique d'Oberwolfach.

En avril 1991 les UERs n'ayant pas répondu ont été recontactés par écrit et les derniers cas isolés ont été contactés par téléphone en juin 1991 afin de leur rappeler de répondre au questionnaire. Dans l'ensemble, le temps de réponse a été plus long que prévu. Les dernières réponses nous sont parvenues fin août 1991.

UERs contactés	53
réponses	51
pourcentage de réponses	96,2
refus de répondre (Oldenburg, Trier)	2

A part Oldenburg et Trier, les universités suivantes n'ont pas répondu à la partie B du questionnaire concernant la relève scientifique de telle sorte que le nombre d'habilitations comptées ne contient pas celles qui ont été ou qui seront passées dans ces universités :

1. Nombre d'hablitations prévues entre 1991–1995 : 49 réponses, manquent Münster, Kiel.
2. Habilitations passées entre 1986–1990 : 50 réponses, manque Kassel.
3. Habilités d'avant 1986 sans poste permanent : 50 réponses, manque Heidelberg).

■

Tableau 1

Pyramide d'âge des professeurs de mathématiques C4 et C3

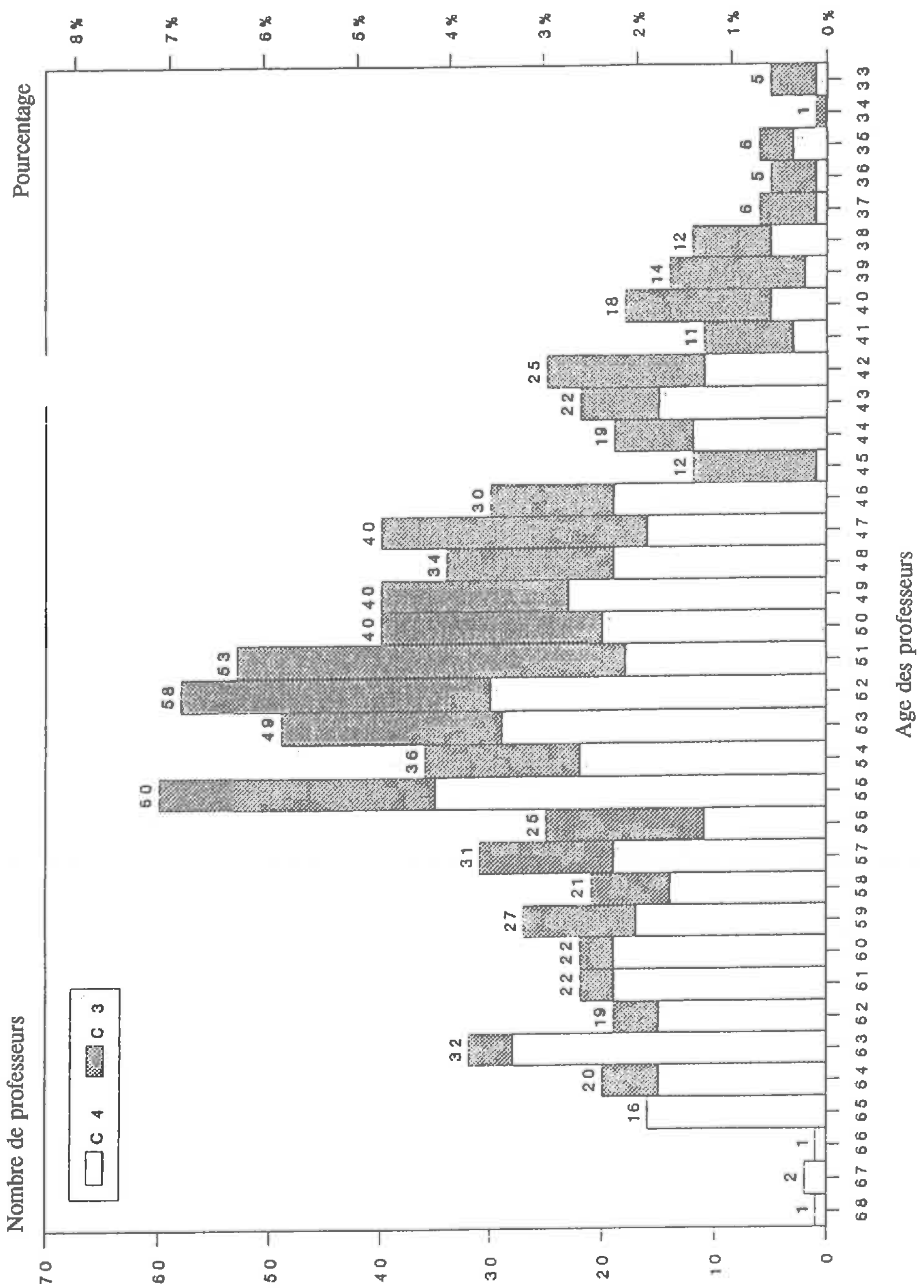


Tableau 2

Pourcentage moyen des postes (C3 et C4) se libérant chaque année

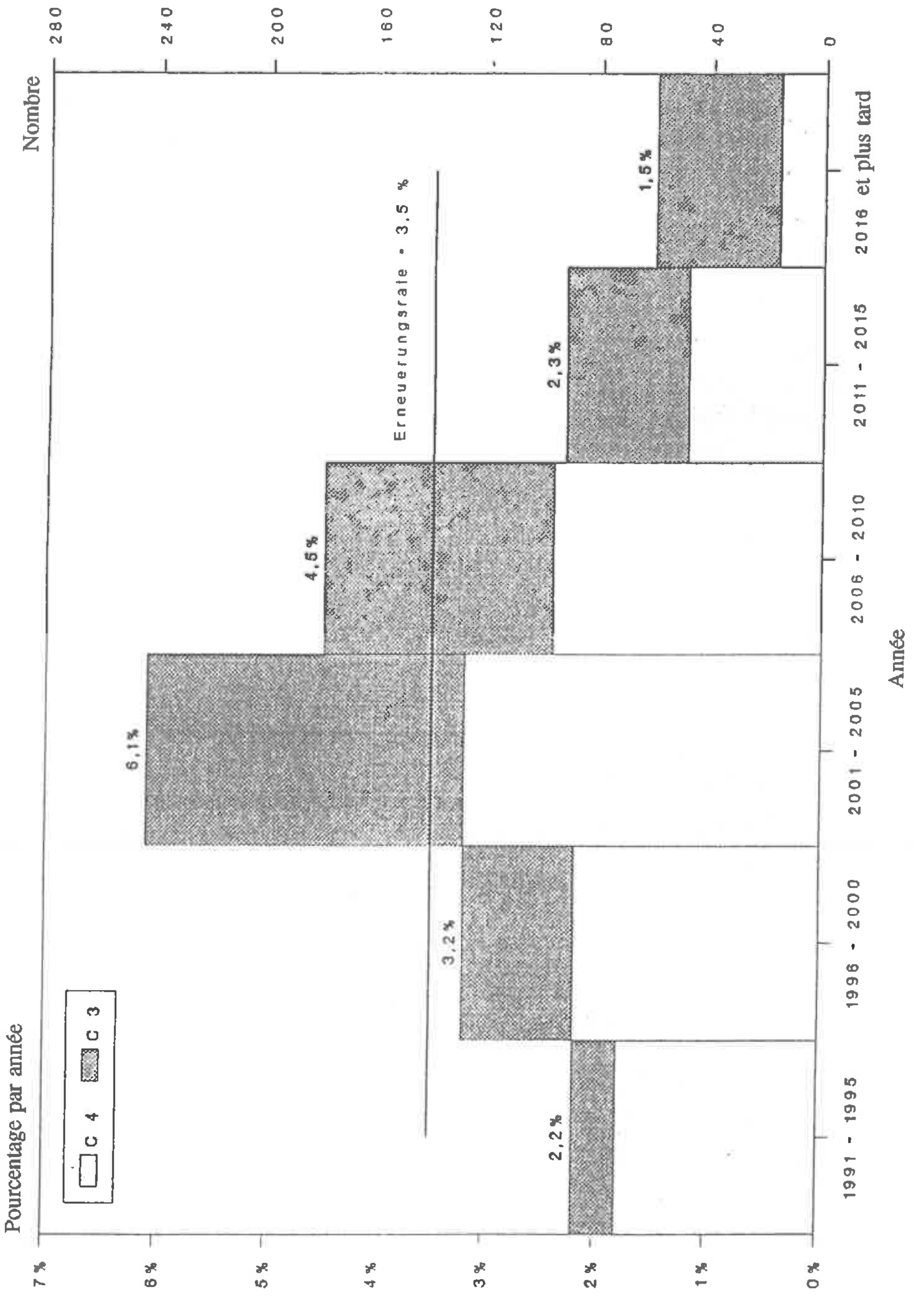
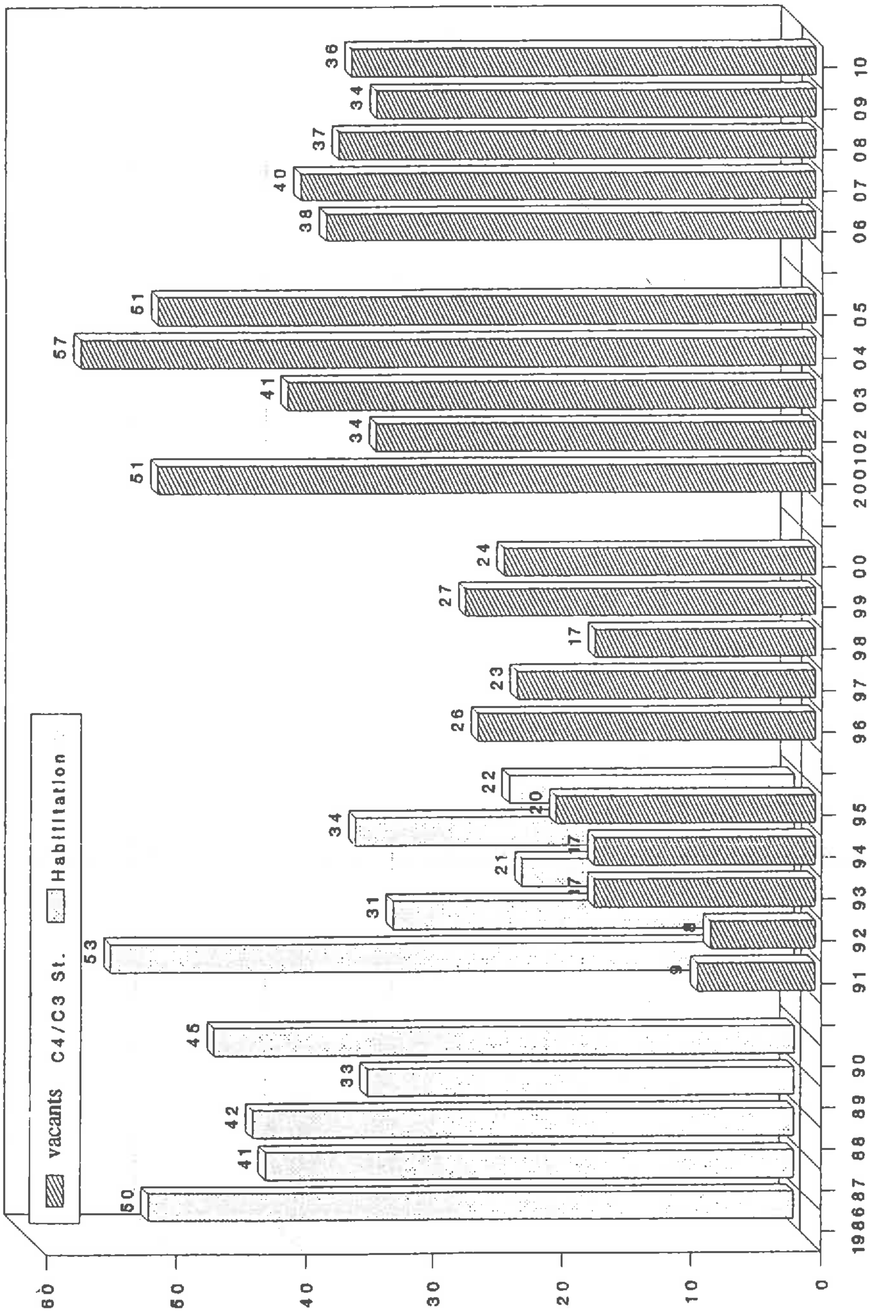


Tableau 4

Nombre d'habilitations et de postes vacants de professeurs C3-C4 (pronostics)



PRYRAMIDE DES ÂGES ET DÉPARTS À LA RETRAITE
La situation française

A titre de comparaison avec les situation exposées dans les articles précédents, voici la situation française telle qu'elle résulte de documents communiqués par la Direction de la Recherche et du Ministère de l'Education Nationale. Nous remercions C. Basdevant (Consultant à la DRED) de nous avoir communiqué ces chiffres.

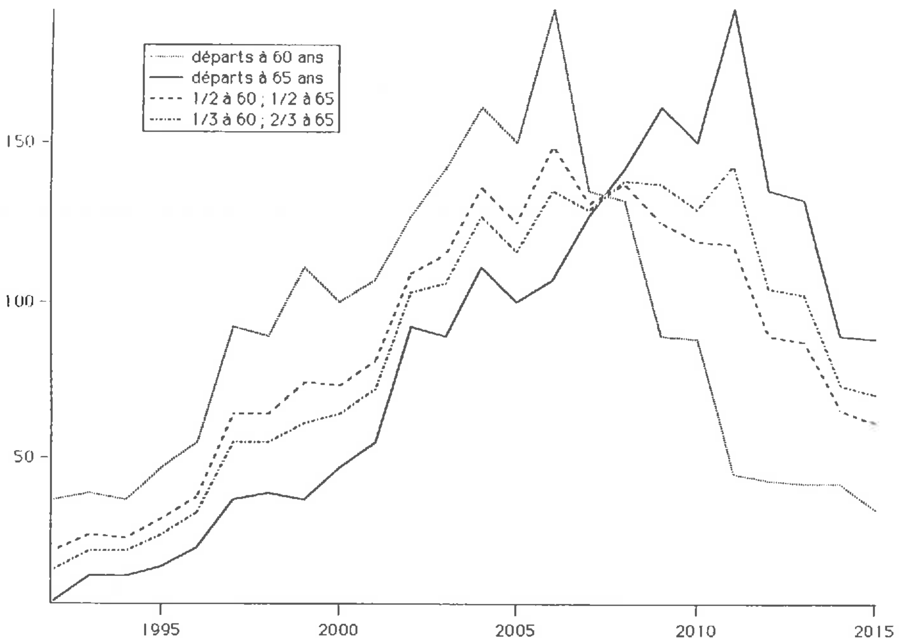
Le premier graphique donne en septembre 1991 la pyramide des âges de tous les mathématiciens universitaires et CNRS. On prendra garde d'éviter une comparaison trop brutale avec les chiffres allemands qui ne concernent que les professeurs C3 et C4 (analogues à professeurs et directeurs de recherche en France).

Le deuxième graphique évalue le nombre de départs à la retraite dans quatre hypothèses :

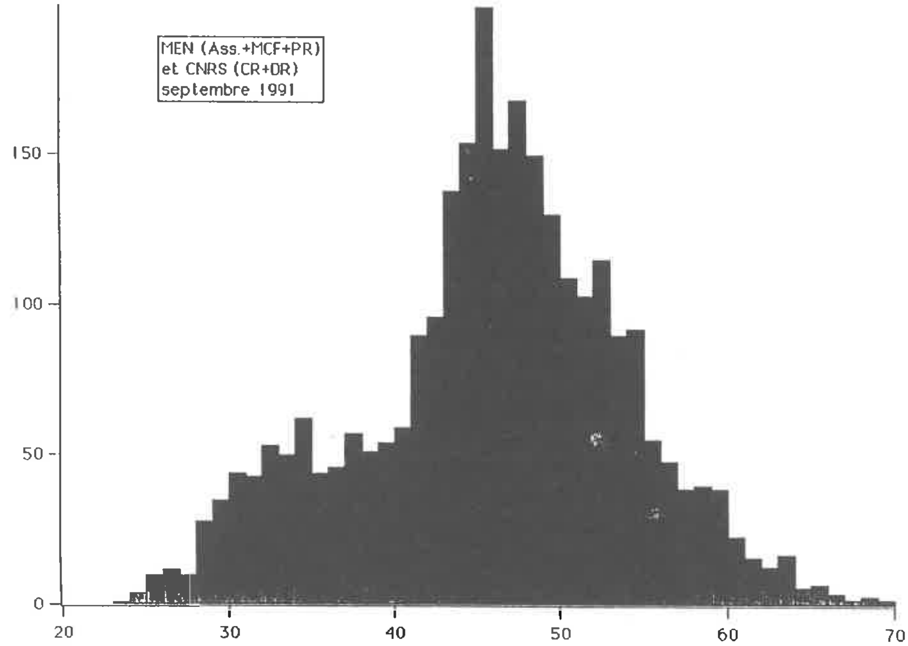
1. tous les départs se font à 60 ans
2. tous les départs se font à 65 ans
3 et 4. hypothèses mixes.

Il faut, pour avoir une idée des postes à pourvoir, rajouter à ces prévisions le nombre de postes créés en mathématiques. Ils sont plus nombreux en France qu'à l'étranger (à cause notamment de l'augmentation conséquente du nombre d'étudiants). Les besoins de recrutements immédiats sont bien plus importants : à titre d'information, il y a eu, en 1991, publication de 93 emplois de professeurs et de 123 postes de maîtres de conférences (hors transformation) pour moins de 30 postes vacants par départ à la retraite.

Le troisième tableau est celui du nombre de postes vacants (ou susceptibles de l'être) du recrutement de 1992.



Départs en retraite - sections 25 et 26 du CNU



Pyramide des âges des mathématiciens

	Professeurs	MCF et Ass	Total
décès		4	4
retraites	12	10	22
mutations	11	10	21
promotions		48	48
départs	4	5	9
non pourvus	3	6	9
vacants		6	6
Total	30	89	119

Postes vacants au mouvement de 1992

EXAMENS

Sujets d'examens d'ici et d'ailleurs

Comment sont évalués les étudiants dans les différents pays européens? Quelle est la place respective des épreuves écrites en temps limité, des épreuves orales, des travaux de type mémoire ou projet? La répartition entre ces différents modes d'évaluation évolue-t-elle au cours des études universitaires? Et si l'on se limite aux classiques épreuves écrites, les sujets ont-ils des contenus, des formes comparables d'un pays à l'autre? Ces questions importantes seront sans doute abordées au cours de tables rondes du Congrès ECM. Pour contribuer à la réflexion, la Rédaction de la Gazette a décidé d'inclure dans ce numéro spécial quelques exemples de sujets proposés ces deux dernières années en première et troisième année d'université dans quatre universités, françaises ou étrangères.

Université de Warwick (U.K)

L'enseignement des mathématiques dans cette université est découpé en modules (units) et une très grande variété est offerte aux étudiants. Les étudiants de première année suivent entre 10 et 15 modules (dont 8 obligatoires), ceux de troisième année entre 8 et 15 modules (mais il existe également à partir de la deuxième année des cursus allégés dits "pass degrees" comportant moins de modules). Chaque module correspond à environ 30 heures de cours et l'encadrement des étudiants est essentiellement tutoriel, assuré par des étudiants en thèse. En première année, un des modules obligatoires "tutorial unit" correspond à un travail personnel réalisé sous la direction du tuteur et, en troisième année, le seul module obligatoire pour l'orientation maths appliquées est le projet qui correspond à 2 modules. Les examens sont courts (1h30 - 2h) et constitués de 3 à 5 exercices indépendants. Presque tous les sujets comportent des questions de cours. Si le sujet comporte n exercices, la note est calculée à partir des n − 1 meilleures réponses fournies par l'étudiant. Pour illustrer l'éventail des sujets envoyés par l'université, nous avons choisi :

- *en première année, quatre exercices proposés respectivement dans les modules suivants : "Analyse II" (obligatoire), "Algèbre linéaire" (obligatoire), "Théorie des groupes B" (obligatoire pour les étudiants s'orientant vers les mathématiques pures), "Vie en dimension 3 B" (obligatoire pour les étudiants s'orientant vers les mathématiques appliquées),*
- *en troisième année, trois exercices des modules suivants : "Analyse complexe" (seul module obligatoire de l'orientation mathématiques pures), "Topologie algébrique" et "Théorie des catastrophes".*

Analyse II.

Define carefully what it means for a function $f : I \to \mathbf{R}$ to be *uniformly continuous* on I, and then give the negation of this definition, that f is *not* uniformly continuous on I.

Show in detail, by verifying that your definitions are satisfied, that $f(x) = x$ is uniformly, continuous on $\mathbf{R}$, but that $g(x) = x^2$ is not uniformly continuous on $\mathbf{R}$. Let $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ be bounded and integrable on $[a, b]$, and define $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ by $F(x) = \int_a^x f$.

Assuming any basic properties of the integral you need (which you should state) prove that F is uniformly continuous on $[a, b]$; and if, further, f is continuous, prove F is differentiable and that $F' = f$.

Algèbre linéaire.

(i) $T : V \to V$ is a linear transformation from a vector space V into itself. Define the linear transformations $T^2 : V \to V$ and $T^3 : V \to V$.

(ii) V is a 3-dimensional vector space over $\mathbf{R}$ and $T : V \to V$ is a linear transformation such that $T^2 \neq 0$ but $T^3 = 0$. Let e_1 be a vector in V such that $T^2 e_1 \neq 0$. Let $e_2 = Te_1$ and $e_3 = T^2 e_1$. Show that e_1, e_2, e_3 form a basis of V.

(iii) Find the matrix of $T : V \to V$ with respect to the basis e_1, e_2, e_3.

(iv) Show that any 3×3 matrix A over $\mathbf{R}$ such that $A^2 \neq 0$ but $A^3 = 0$ is similar to the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorie des groupes.

Define the terms homomorphism and kernel. Show that the kernel of a homomorphism is a normal subgroup.

State the First Isomorphism Theorem.

If $n > 2$ show that there is no surjective homomorphism from the dihedral group D_{2n} to a cyclic group C_n of order n.

Exhibit an injective homomorphism from C_n to D_{2n}.

Vie en 3 dimensions.

(i) Let $S = \{((2 + \cos x)\cos y, (2 + \cos x)\sin y, \sin x) | 0 \leq x < 2\pi,\ 0 \leq y < 2\pi)$. Calculate the area of S.

(ii) (a) Given $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ and a vector field $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, show that $\operatorname{div}(gv) = \nabla g.v + g \operatorname{div} v$. Hence show that, for a bounded domain $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

$\int_\Omega g \operatorname{div} v = \int_{\partial\Omega} gv.\hat{n} dA - \int_\Omega \nabla g.v$ where $\hat{n}$ = outward unit normal to $\partial\Omega$ and dA is the infinitesimal element of surface area on $\partial\Omega$.

b) Suppose further to (a) above that $v = \nabla g$, $\operatorname{div}(\nabla g) = \operatorname{div} v = 0$ and $g|_{\partial\Omega} = 0$. Show that g (and therefore v) is then identically zero in Ω.

(iii) Given $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, define $u : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ by $u(x, y, z) = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

α) Calculate ∇u in terms of x, y, z and f'.

β) Set $v(x, y, z) = \nabla u(x, y, z)$ and suppose that $\operatorname{div} v = 0$. For $R \geq 1$, let $\Omega_R = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. Apply the divergence theorem to v on Ω_R and show that $R^3 f'(R^2) = f'(1)$. Let $t = R^2$ and show that $f(t) = f(1) + 2f'(1)(1 - t^{-\frac{1}{2}})$.

Analyse complexe.

4.(i) Define the *residue* $\operatorname{res}(f, z_0)$ of a function f at an isolated singularity z_0. If z_0 is a simple pole of f, prove that $\operatorname{res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z)$.

(ii) State Cauchy's residue theorem.

(iii) Prove that

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1 + b\cos^2 t} = \frac{2}{ib} \int_C \frac{z dz}{z^4 + 2(1 + \frac{2}{b})z^2 + 1},$$

where b is real and positive and $C(t) = e^{it}(-\pi \leq t \leq \pi)$.

Deduce from (i) and (ii) that the above integral $= \dfrac{\pi}{\sqrt{1 + b}}$.

Topologie algébrique.

5. (a) Define the cellular homology $H_n^c(K)$ of a cell complex K. Define an isomorphism $\varphi : H_n(K) \to H_n^c(K)$ the proof that φ is well defined may be omitted.

(b) Compute the homology of the cell complex

$$K = e_0^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e_3^1 \cup_f e^2$$

where f corresponds to the word $a_1 a_2 a_3 a_2^{-1} a_3^{-1} a_1$.

Describe an element of order two in $H_1(K)$.

Théorie des catastrophes.

(a) Let $\gamma : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ be a unit speed plane curve, $\kappa(t)$ its curvature at $\gamma(t)$ and $n(t)$ its unit normal vector at $\gamma(t)$. The *caustic* of γ is the bifurcation set of the (distance)^2 function $f_a(t) = ||\gamma(t) - a||^2$. Show that the caustic is given as a parametrized curve by $a = \gamma(t) + \dfrac{1}{\kappa(t)} n(t)$, provided the curvature is non-zero. What happens at a point where the curvature is zero?

Sketch the curve $y^2 = x^2(1 - x^2)$ and (without doing any calculations) what you think its caustic might look like.

[You may quote without proof the Serret-Frenet formulae].

(b) Define the *buoyancy locus* and *metacentric locus of* a (2-dimensional) ship. Show that the buoyancy locus of an elliptical ship is also an ellipse and describe its metacentric locus. Describe briefly how the equilibria of the ship change as its centre of gravity moves along an axis of the ellipse, distinguishing between the major and minor axes.
(You may use without proof the fact that linear transformations preserve centroids of planor regions.)

Université de Copenhague

L'organisation des enseignements est plus proche de celles que nous connaissons en France. L'enseignement est organisé sous forme de modules, mais ils sont en nombre plus réduit (4 en première année par exemple pour l'orientation maths/physique) et à chaque orientation correspond un cursus à peu près déterminé; chaque module comporte cours et travaux dirigés. Les examens sont en général écrits, formés de 3 ou 4 exercices indépendants et ils peuvent comporter des questions de cours. Mais il ne s'agit pas nécessairement d'examens au sens classique : deux des trois sujets de troisième année que nous avons reçus correspondent à des épreuves pour lesquelles les étudiants disposaient de deux jours et demi et devaient assurer sur l'honneur qu'ils avaient travaillé seuls. Nous avons choisi parmi les sujets que nous avons reçu :

- *en première année, un exercice d'analyse et un exercice d'algèbre linéaire,*
- *en troisième année, un exercice de théorie des groupes, un exercice de géométrie différentielle, deux exercices concernant des systèmes différentiels.*

Exercice 1.

Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x \neq 0\}$ et $\bar{f}(x, y) = \dfrac{\sin(xy)}{x}$ pour $(x, y) \in \Omega$.

1) Calculer $\dfrac{\delta \bar{f}}{\delta x} = D_1 \bar{f}(x, y)$ et $\dfrac{\delta \bar{f}}{\delta y} = D_2 \bar{f}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.

2) Déterminer une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ telle que $\bar{g}(t) = \dfrac{\sin t}{t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ pour tout $t \in R \setminus \{0\}$, et en déduire que $\bar{g} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ peut-être prolongée en une fonction $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe C^∞. Quelles sont les valeurs de $g(0)$ et $g'(0)$?

3) Montrer que $\bar{f} : \Omega \to \mathbf{R}$ peut être prolongée en une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de classe C^∞. Déterminer $f(0,y), D_1 f(0,y)$ et $D_2 f(0,y)$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.

Indication : $\bar{f}(x,y) = y\dfrac{\sin(xy)}{xy} = yg(xy)$ pour $x \neq 0, y \neq 0$.

Exercice 2.

Pour $c \in \mathbf{R}$, la matrice 3×3 $B(c)$ est donnée par :

$$B(x) = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 2 & c+1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer pour chaque $c \in R$ un polynome q_c de degré 2 tel que, pour le polynome caractéristique $p_{B(c)}$ de $B(c)$ on ait : $p_{B(c)}(t) = (c-t)q_c(t)$ pour tous c et $t \in R$.

b) Montrer que $q_c(c) = 0$ pour $c = -1$.

Montrer que pour $c \neq -1$, $B(c)$ a 3 racines caractéristiques (valeurs propres).

c) Déterminer l'ensemble : $D = \{c \in R \setminus B(c)$ est diagonalisable dans $\mathbf{R}\}$.

Prouver que l'ensemble : $O = \{c \in \mathbf{R} \setminus B(c)$ est diagonalisable dans une base orthogonale$\}$ est vide.

Exercice 3.

Soit S une surface régulière, U un sous ensemble ouvert de $\mathbf{R}^2$ et soit $(u,v) \to X(u,v)$ une paramétrisation de S définie sur U. Dans tout le problème, on suppose que les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale de S, calculés par rapport à (X, U) vérifient : E est fonction de u seulement, G est fonction de v seulement et F est identiquement nulle.

1) Soit $w(t)$ un champ de vecteurs parallèles le long d'une courbe paramétrée $X(u(t), v(t))$. Montrer que l'angle entre $X_u(u(t), v(t))$ et $w(t)$ est indépendant de t.

2) Montrer en utilisant éventuellement le 1) (mais on peut aussi procéder directement) que la courbure Gaussienne K est identiquement nulle.

3) Montrer, en considérant éventuellement les paramétrisations de $\mathbf{R}^2$ de la forme $(u,v) \to (\varphi(u), \Psi(v))$, que $X(U)$ est localement isométrique à $\mathbf{R}^2$.

Exercice 4.

Un groupe d'ordre 12 a 6 classes de conjugaison. Indiquez le nombre de ses classes de représentations irréductibles et déterminer les ordres des représentations de ces classes. Sachant que les classes de conjugaison K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 et K_6 sont d'ordre 1, 1, 2, 2, 3 et 3 et que les fonctions φ_1, φ_2, φ_3 qui sont données dans la table ci-après sont des caractères, déterminer celles qui sont irréductibles et donner la table des caractères du groupe.

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
φ_1	1	1	1	1	-1	-1
φ_2	1	-1	-1	1	-1	1
φ_3	3	1	-2	0	1	-1

Exercice 5.

Etant donné le problème de valeurs aux bords :

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + (x^2 - 7x + 12)y' + (x-5)y = 0 \\ y(0) = 91/144 \quad y(1) = 3/4 \end{cases}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, désignons par $y(x, \varepsilon)$ la solution exacte du problème. Déterminer pour chaque ε une solution approchée $y^u(x, \varepsilon)$ telle que :

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |y(x, \varepsilon) - y^u(x, \varepsilon)| = 0(\varepsilon) \quad \text{pour} \quad \varepsilon \to 0_+$$

Exercice 6.

On donne un système autonome dans une partie du plan par :

$$\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 2xy - 5x + 5y + 4 \\ y' = xy - 4y \end{cases}$$

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 \setminus x \geq 0\}.$$

a) Trouver les points d'équilibre du système et déterminer le type des points d'équilibre non dégénérés.

b) Montrer qu'une orbite $(x(t), y(t))$, $t \in I$, qui au temps $t_0 \in I$ se trouve dans le premier quadrant, reste dans le premier quadrant fermé pour $t \geq t_0$, $t \in I$.

c) Trouver un domaine fermé et borné satisfaisant la propriété suivante : une orbite qui rentre dans le domaine y reste par la suite.

En France

Des Annales de sujets de DEUG sont régulièrement publiées par l'APMEP. Nous reproduisons ci-après deux sujets non publiés :

- *en première année : les parties I et II du sujet de juin 1991 de la section expérimentale de DEUG de Paris VI (la troisième partie était un questionnaire de type V/F portant sur l'ensemble du programme). Précisons pour les lecteurs étrangers que la partie d'analyse n'est pas représentative de ce qui est demandé en général dans des sujets de ce niveau concernant les équations différentielles : la résolution y est en effet presque toujours purement algébrique.*
- *en troisième année, un sujet d'intégration donné à Paris 7 en 1990.*

Sujet Paris VI (1ère année)

– I –

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 7 & 5 & -1 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de chercher les matrices B à coefficients complexes telles que $B^3 = A$.

1) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A. Donner une matrice P telle que $D = P^{-1}AP$ soit de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec $a < b < c$ et que les coefficients de la première ligne de P soient égaux à 1.

2) Soient E un espace vectoriel complexe de dimension n et f une endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. On note $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des vecteurs propres non nuls relatifs à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ respectivement.

Soit g un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont vecteurs propres de g et en déduire que g se diagonalise dans la même base que f.

3) Montrer que si $B^3 = A$, on a $AB = BA$ et en déduire que $\Delta = P^{-1}BP$ est diagonale.

4) Trouver toutes les matrices diagonales Δ à coefficients complexes telles que $\Delta^3 = D$.

5) En déduire le nombre de matrices B à coefficients complexes telles que $B^3 = A$ et calculer explicitement celle dont tous les coefficients sont réels.

– II –

1) Le plan est rapporté à un repère orthonormé (Ox, Oy). Etant donné une fonction φ de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, pour tout t dans I, on appelle M_t le point de coordonnées $(\varphi(t), t^2 + t)$, P_t le point de coordonnées $(t^2, 0)$ et Γ_φ la courbe décrite par le point M_t quant t varie dans I.

Montrer que pour que la tangente à la courbe Γ_φ au point M_t passe par le point P_t pour tout t différent de $-1/2$, il faut et il suffit que la fonction φ soit solution d'une équation différentielle que l'on déterminera.

2) Soit (E) l'équation différentielle :

$$x(x+1)y' - (2x+1)y + x^2(2x+1) = 0.$$

a) Par quels points du plan peut-on affirmer a priori que, localement, il passe une courbe intégrale et une seule? Par quels points du plan peut-on affirmer qu'il ne passe aucune courbe intégrale?

b) Déterminer l'ensemble des points à tangente horizontale de toutes les courbes intégrales de l'équation (D).

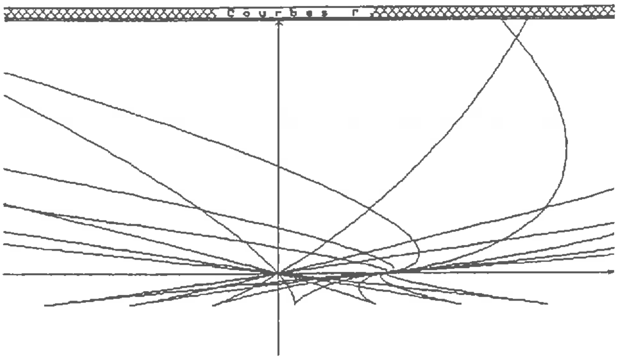
c) Trouver les solutions de l'équation différentielle (E) sur les intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$ et $]0, +\infty[$.

d) Peut-on prolonger ces solutions en -1? en 0? Existe-t-il des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$?

3) On considère les courbes Γ_φ définies en 1) pour les fonctions φ qui sont solutions de (E) sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, prolongées par continuité en -1. Le tracé des courbes Γ_φ est donné ci-dessous.

a) Il suggère que les courbes Γ_φ ont deux points communs. Prouvez-le et déterminez les tangentes aux courbes Γ_φ en ces points communs.

b) Le tracé suggère que toutes les courbes Γ_φ ont un point de rebroussement R_φ et que les points R_φ sont sur une droite. Prouvez-le et donnez l'équation de cette droite.



Sujet Paris VII (3e année)

Les parties I, II et III sont dans une certaine mesure indépendantes.

– I –

Soit g une fonction borélienne bornée sur l'intervalle $[0, T]$.

1) Montrer que pour tout $t \in [0, T]$ et n fixé, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^{k-1}/k!\right) \int_0^T e^{kn(t-T+s)} g(s)ds = \int_0^T \left(1 - \exp\left(-e^{n(t-T+s)}\right)\right) g(s)ds.$$

2) On suppose désormais qu'il existe une constante M telle que

$$\left|\int_0^T g(s)e^{ns}ds\right| \leq M$$

pour tout entier n. Montrer que pour tout $t \in [0,T]$, le membre de gauche de l'égalité de 1) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En déduire que pour tout $t \leq T$,

$$\int_{T-t}^T g(s)ds = 0.$$

3) Montrer que g est nulle presque partout. Si g est continue, montrer qu'elle est identiquement nulle.

4) Déduire de ce qui précède que si f est une fonction continue sur $[1,v]$ telle que $|\int_1^v x^n f(x)dx| \leq N < \infty$ pour tout entier n, alors f est identiquement nulle.

5) Si f est une fonction continue sur $[0,T]$ telle que $\int_0^T f(t)t^n dt = 0$ pour tout n, montrer que f est identiquement nulle. [Ceci peut se déduire de 4), mais peut aussi se démontrer directement à partir du théorème de Stone-Weierstraß et de résultats du cours.]

– II –

Soit f une fonction borélienne localement bornée nulle sur $]-\infty,0]$. Pour $T > 0$ fixé, on pose

$$I_n = \int_0^T e^{ns}(f * f)(s)ds.$$

1) En faisant le changement de variable : $u = T - v$, $s = 2T - v - w$, montrer que

$$I_n = \int_0^T dv \int_{T-v}^T e^{n(2T-v-w)} f(T-v)f(T-w)dw.$$

2) On suppose désormais que $f^* f$ est identiquement nulle. Montrer que

$$\left(\int_0^T e^{-nv} f(T-v)dv\right)^2 = \iint_A e^{-n(v+w)} f(T-v)f(T-w)dvdw,$$

où Δ est le domaine $\{(v,w)/0 \leq v,\ w \leq T,\ v+w \leq T\}$.

3) Montrer, en se servant de I, que si f est continue sur $[0,T]$, f est identiquement nulle.

– III –

Soient f et g des fonctions continues nulles sur $]-\infty,0]$ et telles que $f * g = 0$.

1) On pose $f_1(t) = tf(t)$, $g_1(t) = tg(t)$. Montrer que

$$(f_1 * g) + (f * g_1) = 0$$

et en déduire que

$$(f * g) * (f_1 * g_1) + (f * g_1) * (f * g_1) = 0.$$

2) En déduire que pour tout n et tout t,

$$\int_0^t f(t-u)u^n g(u)du = 0.$$

3) Montrer finalement que l'une des fonctions f ou g est identiquement nulle.

Note : La Rédaction tient à remercier le département de mathématiques de l'université de Warwick qui a envoyé les brochures de présentation des enseignements et le recueil des sujets 1991, Bodil Branner de l'université DTH Lyngby du Danemark qui a envoyé tout un ensemble de sujets posés dans différentes universités danoises, Adrien Douady qui a aidé à sélectionner les sujets danois et à les traduire, Françoise Boschet, Pierre Jarraud et Daniel Revuz pour les sujets français.

Michèle ARTIGUE
I.U.F.M. de Reims

INFORMATIONS

C.N.R.S.

La réunion du 31 janvier organisée par la commission de mathématiques du Comité National du CNRS et consacrée au Rôle du CNRS dans le développement des mathématiques en France, a montré une fois de plus le dynamisme des mathématiques francaises et leur ouverture sur les interactions. Les intervenants des autres disciplines ont unanimement exprimé de fortes demandes dans ce domaine. Cette réunion a aussi mis en lumière les problèmes auxquels les mathématiciens français doivent faire face. C'est dans ce contexte que se situe notre réflexion.

L'importance du CNRS pour les mathématiques

Malgré la proportion très faible des chercheurs CNRS dans notre discipline (environ 10 %) le CNRS est une institution qui joue un rôle majeur dans la structuration de la recherche mathématiques en France. Dans un passé récent, il a fortement contribué à l'émergence de la notion de laboratoires de mathématiques. C'est maintenant le CNRS qui, par le biais des GDR, structure les interactions des mathématiques. Lors de la réunion du 31 janvier, tous les intervenants, mathématiciens ou non, ont unanimement souligné le rôle moteur du CNRS dans ce domaine.

Le CNRS est aussi un pôle de stabilité dans les flux de recrutement. La démographie des mathématiciens français est gravement déséquilibrée. Ceci est dû en grande partie aux à-coups, semble-t-il inévitables, du recrutement universitaire. Actuellement, la moitié des mathématiciens français de moins de trente cinq ans sont aux CNRS (la proportion est certainement plus impressionnante si l'on compte ceux qui y sont passés).

Dans les années à venir, les besoins de l'Université en enseignants-chercheurs vont être très importants (120 postes de maître de conférences et 90 de professeurs cette année). Il s'agit, non seulement d'encadrer des thèses, mais aussi de prolonger l'encadrement jusqu'à l'habilitation, une bonne part des maîtres de conférences d'aujourd'hui étant les professeurs de demain. Le CNRS ne doit pas se dissoudre dans ces problèmes. Il ne saurait cependant s'en désintéresser sans mettre en péril gravement la capacité de reproduction des mathématiques françaises dont l'excellence est, comme il est dit dans le schéma stratégique du CNRS, une condition nécessaire à la compétitivité de beaucoup d'autres disciplines. Faire face à ce problème implique un important effort du CNRS dans le domaine de la direction de recherche.

Enfin le CNRS, c'est aussi le Comité National. Son rôle, tel que le définit le CNRS, est l'évaluation individuelle des chercheurs, l'évaluation des laboratoires et des programmes de recherche et la prospective. Dans la phase actuelle de contractualisation de la recherche universitaire, son rôle dans l'évaluation des laboratoires de mathématiques est particulièrement important et reconnu comme tel par la DRED. C'est la seule instance nationale d'évaluation qui soit l'émanation de la communauté mathématique.

Le CNRS a un rôle clé à jouer en mathématiques par sa possibilité d'avoir une politique scientifique à long terme, sur laquelle les contraintes conjoncturelles soient aussi réduites que possible. L'importance actuelle des mathématiques au CNRS est sans commune mesure avec le champ scientifique qu'elles recouvrent. D'autres sciences comme la physique, la chimie, la biologie ou la mécanique sont, pour des raisons historiques, beaucoup plus présentes au CNRS. Cette situation de sous-représentation des mathématiques doit être rectifiée. Comme nous le verrons dans la suite, un changement d'échelle des mathématiques au CNRS est de nature à apporter des solutions saines à bon nombre de problème qui se posent, non seulement à la (trop) petite communauté des mathématiciens du CNRS, mais aussi à l'ensemble des mathématiciens français.

Comment doit se définir la politique scientifique?

La politique scientifique du CNRS doit résulter d'une concertation et d'un dialogue permanent entre le Comité National et la Direction Scientifique. Le Comité National n'a ni la volonté de tout régenter, ni la prétention à une infaillibilité de type pontificale. Il s'attend simplement à ce que ses avis, qui ne sont pas formulés en langue de bois (la session d'automne en témoigne) et, faut-il le rappeler, s'appuient sur une étude approfondie des dossiers, soient écoutés. Ne pas les suivre doit impliquer une réfutation et non un argument d'autorité. Il doit être associé à l'ensemble de la réflexion du CNRS concernant les mathématiques et en particulier souhaite travailler en harmonie avec le comité des interactions des mathématiques. Un tel mode de fonctionnement devrait pouvoir déboucher sur un réel échange scientifique et pourquoi pas une certaine connivence intellectuelle.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que toute politique scientifique trouve sa base dans les laboratoires où discussions, séminaires et collaborations font naître des problématiques ou des thématiques nouvelles. Tout ceci est ensuite étiré sur un lit de Procuste administratif pour engendrer ce que l'on appelle un projet scientifique.

Il ne faut pas négliger non plus les problèmes d'organisation et d'intendance : personnels ITA tout d'abord, dont le nombre est ridiculement faible dans les laboratoires de mathématiques, mais aussi problèmes d'équipements, de crédits de fonctionnement et de locaux. Des changements profonds dans la nature de l'activité mathématique rendent nécessaire un effort tout particuler en matière d'ingénieurs de recherche.

L'équilibre Paris-Province

Quelques chiffres permettent de situer le problème. La moitié des DEA et le deux tiers des thèses sont soutenues en province où sont affectés la moitié des AMN et les deux tiers des allocations de recherche. Environ la moitié des URA sont situées en province. Par contre, on ne compte en province que 30 % des chercheurs et 23% des directeurs de recherche. Le réequilibrage Ile-de-France - Province est donc tout à fait justifié. Il correspond à une volonté du pouvoir politique et induit des contraintes fortes au niveau des recrutements et des promotions. L'une des contraintes actuelles fixées par l'administration du CNRS malgré les réserves du Conseil Scientifique du CNRS, est d'affecter en province les deux tiers de recrutement au niveau chargé de recherche.

Il faut prendre garde à la façon dont cette politique est appliquée. En effet, le système de formation des mathématiciens français concentre en Ile-de-france une fraction très importante des étudiants prometteurs. Ce système a l'inconvénient d'amplifier parfois de néfastes effets de mode et l'avantage de secréter de gros centres de formation très dynamisants pour les étudiants. A l'issue de cette formation, le jeune chercheur reste fréquemment dépendant de son directeur. Son affectation loin de son directeur doit être envisagée avec soin et prudence.

Les besoins en encadrement sont en province suffisamment importants pour justifier d'y affecter des directeurs de recherche, en postes permanents ou en détachement. Il est en particulier sain que dans de nombreux cas une promotion soit couplée avec un départ en province. Il faut néanmoins prendre garde à l'aspect concurrentiel que peuvent exercer les grandes universités parisiennes. De plus, dans un domaine particulier tel que l'analyse numérique, il faut considérer la grande concentration en Ile-de-France des industriels demandeurs.

De façon générale, il faut veiller à ce que le nécessaire rééquilibrage Ile-de-France - province se fasse sans porter atteinte au remarquable potentiel de la région parisienne qui joue un rôle essentiel dans la formation de tous les mathématiciens français.

Pôle ou tissu?

Si le rééquilibrage Paris-Province passe par une politique du personnel, il passe aussi par une action sur les structures. Comme il a été dit plus haut, la politique scientifique trouve sa source dans les laboratoires. Le CNRS doit donc être présent dès que se manifeste l'excellence scientifique. Il reste nécessaire de créer de nouvelles unités de recherche associées en mathématiques, d'intégrer de nouvelles équipes dans les URA existantes, ou d'inventer de nouvelles structures adaptées à la réalité de la recherche mathématique. La reconnaissance d'une équipe ou d'un laboratoire par le CNRS est essentielle, et induit des effets importants sur son statut au sein de son université et vis-a vis de la DRED. Les examens de demande de création à l'automne montrent à l'évidence que les besoins d'association pour des équipes d'excellents niveau sont élevés.

Cette démarche permettrait au CNRS d'être à l'écoute de toutes les idées et projets produits par un riche tissu scientifique.

Ceci est le meilleur gage de réussite des actions structurantes de type institut qui en émergeront. De tels projets requièrent la consultation d'experts scientifiques extérieurs qui procèdent à une évaluation du projet. Un appel d'offres est lancé et les choix peuvent alors être faits dans la sérénité scientifique qui convient. Le Comité National doit bien sûr être informé en temps réel du développement du projet.

Les relations avec l'Université

Toute forme de guerre froide serait absurde autant que néfaste. Les moyens de renforcer symétriquement l'implication des universitaires vis-à-vis du CNRS et des chercheurs CNRS vis-à-vis de l'Université ne relèvent pas des grands principes, mais de mesures concrètes.

Il faut par exemple augmenter le nombre de postes de détachement au niveau directeur de recherche pour les universitaires. Cette augmentation, nécessaire vus les besoins d'encadrement de la recherche, l'est aussi pour que l'attribution de ces postes ne se transforme pas en une distribution des prix finalement dissuasive. D'autre part, on peut envisager qu'une université qui recrute un CR 1 confirmé ait un bonus au niveau des détachements de ses enseignants-chercheurs au CNRS.

Enfin, comme il a été suggéré lors de la réunion du 31 janvier par le représentant de la commission de physique théorique, on peut envisager de recruter des CR 1 confirmés de la section de physique théorique sur des postes de professeurs de mathématiques. En échange de quoi, il peut sembler logique de recruter, dans une proportion à débattre, des mathématiciens sur des postes de directeur de recherche en physique théorique. Cela aurait comme avantages, à la fois de rééquilibrer la physique théorique entre le CNRS et l'Université, résoudre une partie du problème des carrières au CNRS tout en renforçant la crédibilité.

Le recrutement

Le principal problème est au niveau de directeur de recherche de deuxième classe. Il est doublement important. Le nombre relativement élevé d'entrants chargé de recherche est dû en grande partie au départ de chargé de recherche vers des postes de professeurs à l'Université. Malgré ce flux important d'entrants, le nombre de mathématiciens au CNRS croit donc fort peu. Or, pour des raisons que nous avons développées au premier paragraphe, il est important que ce nombre augmente de manière très sensible (lors de la réunion du 31 janvier, l'objectif, certes à long terme, d'un doublement du nombre des mathématiciens au CNRS est été mis en avant). Cette croissance passe par une augmentation au CNRS de la proportion des directeurs de recherche qui n'est actuellement que de 27%. La nécessité de développer la recherche en province, l'importance des besoins en encadrement de la recherche impliquent également une augmentation du nombre de directeurs de recherche au CNRS, permanents ou en détachement.

Ces besoins en encadrement de la recherche ont pour conséquence qu'une activité d'animation et d'encadrement de la recherche, le projet du développement d'un laboratoire de provnice, une prise de responsabilité au niveau d'un GDR sont des critères importants pour le choix des directeurs de recherche. D'autre part, l'une des spécificités du CNRS est de pouvoir laisser temps et liberté à ses chercheurs pour qu'il puissent entreprendre un travail profond, acquérir un spectre scientifique large, s'investir dans des interactions. Ceci est un atout important pour pouvoir faire venir en France de brillants mathématiciens étrangers qui viennent renforcer le potentiel de l'école mathématique française.

Une telle politique ne peut se faire avec un nombre trop réduit de postes. L'exemple du recrutement 1990 a montré clairement qu'il existait seuil au-delà duquel était possible une réelle politique permettant à la fois la promotion d'étoiles montantes et la résorption de retards de carrière scandaleux.

Un objectif ambitieux mais néanmoins réaliste est de doubler pour au moins cinq ans le nombre de postes de directeurs de recherche affectés au mathématiques. A l'heure actuelle ce nombre est de 4 détachements et de 6 postes permanents. En passant à 8 détachements et 12 postes permanents on pourrait mieux faire face aux besoins suivants : direction et animation de la recherche, développements de pôles provinciaux, développement des GDR. Le recrutement de quelques étrangers de grande valeur et la prise en compte au sein du CNRS du travail de personnalités exceptionnelles qui auraient difficilement leur place ailleurs devient alors aussi possible.

Conclusion

Une idée domine : aucune des solutions proposées aux problèmes évoqués cidessus ne peut être d'une quelconque efficacité sans augmentation des moyens. Il ne s'agit pas ici d'une litanie traditionnelle de revendications, ni d'une incantation routinière pour une augmentation des budgets. Ce texte a pour seule prétention d'avoir posé des problèmes que la communauté mathématique dans son ensemble reconnaît comme graves et d'avoir esquissé une réflexion sur la façon sur la faç on dont le CNRS pourrait contribuer à les résoudre. La commission souhaiterait passer avec la Direction Scientifique une sorte de contrat, la Direction Scientifique s'engageant à défendre très fortement un certain nombre d'objectifs chiffrés, notamment quant aux postes, la commission s'engageant à suivre la politique arrêté par ce contrat notamment lors des affectations au niveau des directeurs de recherche. ■

Texte rédigé par Jean-Yves Chemin, secrétaire et Marie-Françoise Roy, présidente et adopté par la commission de mathématiques le 19 mars 1992.

C.N.R.S.

Voici la liste des candidats admissibles aux concours de recrutement du C.N.R.S. Ces résultats sont **provisoires**. *Il faut comme d'habitude attendre le résultat des jurys d'admission (en juillet), puis le Conseil Scientifique du CNRS, pour connaître les résultats définitifs. Cette liste est extraite, par la Rédaction de la Gazette, d'un compte rendu plus détaillé de la dernière session du Comité National.*

Jurys d'admissibilité DR et CR (avril 1992)

Jurys d'admissibilité DR

4 postes non fléchés.

1. Laurent Michel-Julien (Théorie des nombres, Institut de math. discrètes de Marseille)
2. Mossino Jacqueline (Mathématiques appliquées, Orléans)

3.Bernardi Christine (Analyse numérique, Paris VI)
4. Delon Françoise (Logique, Paris VII)
5. Otal Jean-Pierre (Topologie, ENS Lyon ou Toulouse)
6. Charbonnel Yves (Théorie des groupes, Paris VI)
7. Maltsiniotis Georges (Paris VI)
8. De Geouffre de la Pradelle Arnauld (Théorie du potentiel, Paris VI).

1 poste fléché *Géométrie et Topologie* à Toulouse. 1. Simpson; 2. Otal.

1 poste fléché *Systèmes dynamiques non linéaires* à l'Institut non linéaire de Nice. 1. Gambaudo Jean-Marc.

1 année de poste rouge. 1. Semenov; 2. Volpert; 3. Goldsheid; 4. Yafaev.

Motion adopée à l'unanimité. *Le jury regrette le petit nombre de candidats sur le poste fléché à l'INL de Nice. Il souhaite qu'à l'avenir les fléchages soient le résultat d'une discussion approfondie entre la Direction scientifique et la commission qui veillera à faire la synthèse des besoins des laboratoires après une large consultation.*

Jurys d'admissibilité CR2

17 postes

1 *ex aequo.*
Albouy (Mécanique céleste, Bureau des longitudes)
Benzoni (Mathématiques appliquées, ENS Lyon)
Bicquard (Géométrie, Toulouse)
Catto (Physique mathématique), CEREMADE, Paris IX)
Gaucher (K-théorie algébrique, Strasbourg)
Pesce (Géométrie, Grenoble)
Ramaré (Théorie des nombres, Nancy)
Rivière (EDP et géométrie, Paris VI)
Rouquier (Théorie des groupes, ENS Ulm)
Sorger (Géométrie algébrique, Paris XI)
11. Bacry (Analyse numérique, Paris VII)
12. Novikov (Physique mathématique, Nantes)
13. D'Agnolo (Analyse algébrique, Paris XIII)
14. Le Merdy (Géométrie des Banach, Besançon)
15. Thilliez (Analyse complexe, Lille)
16. Cheverry (EDP non linéaires, Rennes)
17. Lion (Géométrie et systèmes dynamiques, Dijon)
18. De Bouard (EDP non linéaires, Paris XI)
19. Meguerditchian (Géométrie algébrique réelle, Rennes)
20. Besbes (Géométrie des Banach, Paris VI)
21. Kahane (Logique, Paris VI)
22. *ex aequo* : Han (Combinatoire, Strasbourg), Mérel (Théorie des nombres, Paris VI), Paris (Géométrie combinatoire, Nantes), Rouy (EDP, Tours), Sandri (Analyse numérique, Lyon).

1 poste fléché *Institut de mathématiques discrètes* de Marseille. 1. Régnier (Logique); 2. Han (Combinatoire.

1 poste fléché *Institut non linéaire* de Nice. 1. Kolev (Systèmes dynamiques).

UNION MATHÉMATIQUE INTERNATIONALE

Commission du développement et des échanges

En fonction des fonds dont elle dispose, la COMMISSION DU DÉVELOPPEMENT ET DES ECHANGES de l'Union Mathématique Internationale participe au financement des Congrès se tenant dans les Pays du Tiers-Monde, et accorde des subventions et des bourses de voyage aux mathématiciens à titre individuel.

Le programme **Aide aux Congrès dans les pays du tiers-monde** s'applique aux congrès organisés par des pays du tiers-monde dans un pays du tiers-monde. Les fonds mis à la disposition par la CDE doivent être utilisés pour des *dépenses à des fins académiques (remboursement de frais de voyage et/ou de séjour)*. Les organisateurs doivent adresser leur dossier au secrétaire de la CDE au moins *9 mois à l'avance* (le dossier doit comprendre : un programme scientifique détaillé, une liste des conférenciers invités, une liste des organismes qui participent au financement, un état sur l'utilisation prévue des fonds accordés par la CDE. Lorsque l'aide est accordée et une fois le congrès terminé, un rapport scientifique et financier doit être envoyé à la CDE).

Le programme **Subventions et bourses de voyage** concerne les mathématiciens qui effectuent à titre individuel un séjour de recherche assez long *dans un laboratoire d'accueil qui prend en charge les frais de séjour*. Il s'applique à la fois aux mathématiciens des pays en voie de développement qui effectuent un séjour dans un centre de recherche (pour un durée d'un mois minimum) et aux mathématiciens des pays développés qui font un séjour dans un centre de recherche d'un pays en voie de développement (pour une période relativement longue). Les candidats doivent adresser un dossier au secrétaire de la CDE au moins *quatre mois à l'avance* (le dossier doit comprendre : un curriculum vitae, un programme de recherche et une lettre d'invitation du laboratoire d'accueil). Ce programme inclut le programme de visite UNESCO–UMI.

En raison des fonds limités dont elle dispose actuellement, la CDE ne peut pas apporter de soutien financier pour assister à des congrès. De même, la CDE n'est pas en mesure de suggérer des centres à visiter aux mathématiciens des pays en voie de développement. Toutefois nous pouvons nous charger des demandes des pays en voie de développement pour inviter des mathématiciens des pays développés ou bien contacter des mathématiciens dans une spécialité donnée pour aller leur rendre visite (l'expression "Pays en voie de développement" ne s'applique à aucun pays européen).

Les candidatures doivent être adressées à :
CDE c/o Le Secrétaire, Professeur Pierre Bérard, Institut Fourier, Université Grenoble 1, B.P. 74, F-38402 St Martin d'Hères Cedex (France)

SITUATION DE LA SCIENCE AU BRÉSIL

A Universal Axiom

The scientific activities in Brazil have lately been subjected to a process of fast deterioration with ominous consequences for the technological development of the country as a whole. In particular, the recurring theme of becoming a member of the developed world, which has long been a favorite chord of the present government, is seriously approaching a feigned, if not hypocritical, fancy.

At this very moment, the situation has reached to the lowest bottom of endurance, forcing the finest national researchers to idly attend the near annihilation of government agencies for the financing of research in basic science and high technology.

Brazil has undergone difficult moments in the history of its scientific research financing. However, there is no recollection of a similar systematic destruction of the very foundations upon which science in this country has been built since its conception.

The scientific community at large may feel better enlightened on the present issue by the following brief considerations.

Science in Brazil has undergone a first period, characterized by the effort of isolated individuals, which culminated in the founding of Research Institutes or Laboratories scattered throughout the highest developed parts of the country. This period contributed some interesting products but soon became inadequate to the country's rapid growth both in terms of population and need for efficient technology.

A bold step forward was taken with the founding of the Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq), a government based agency, with some resemblance to the US National Science Foundation (NSF) in its general scope and objectives of furthering the development of basic science (one definite mismatch is the creation of Research Institutes under CNPq, in the pattern of Princeton Institute for Advanced Science).

The beginnings of CNPq approximately match the consolidation of the Federal (State) Universities throughout the country, the latter being first conceived as mere non-interactive conglomerates of isolated faculties, later tailored to suit the more modern idea of departamentalization very close to the present system in the US universities.

Thus, the country rapidly developed towards the ideal of creating human resources in the various fields of science in which young talents were strongly stimulated to go abroad to specialize accordingly. Simultaneously, a trend markedly started inside the universities in the direction of creating graduate schools.

A little later, an additional government agency was founded, the Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP), designed to further the more applied aspects of science, in a complementary action to CNPq's own. The importance of FINEP grew fast in the scientific community and the agency soon became a stronghold of pure science as well, increasingly overlapping CNPq's support areas, with a very healthy result for the development of science in Brazil in its various realms.

Looking back, this could be called the *golden period* of science in this country. It lasted very roughly 15 years, coming to an abrupt halt nearly one to two years ago. What exactly happened that had caused the fast disrupt of these financing agencies is very complex. Moreover, it is beyond the point here to examine the socio-economic background of this mishap.

The practical, if not physical, dismantling of the actions of both CNPq and FINEP is a nearly suicidal act that has already brought dramatic consequences to the various levels of research in this country, gravely affecting the generation of scientific products for one or more decades to come.

The specifics of these brazilian agencies cannot be fully appreciated by the scientific community at large – except by those who have visited the country in recent past. It will perhaps suffice to say, for example, that an entire Center of Science and Technology was partially supported by FINEP money directly in terms of salary pay. This Center – located in the Pontifícia Universidade Católica (PUC, Rio de Janeiro) – is undergoing rapid deterioration, with some of its scientists leaving to other institutions inside or outside Brazil.

Another illuminating example is CNPq's Instituto de Matemática Pura e Aplicada – perhaps best known as IMPA –, one of our finest institutions, where some salaries have gone so low that they are presently matched or surpassed by many of the lowest wages in non-qualified public service. As IMPA, other Institutes of CNPq too undergo a destabilizing process.

However, let it be unmistakably clear that one is not concerned here with the buy power of researchers' salaries – made into a scornful theme nationwide – but with the devastating stroke that is presently aimed even at minimalist research support. A typical example is the complete stoppage of research equipment importing in the various fields of pure and applied science, a definite manifestation of the incongruent government policy of loudly speaking in defense of high-tech imports while simultaneously blocking all money release for the approved projects that involve such imports.

Yet another instance has to do with CNPq grants, recently tailored to suit best researchers needs, very near to NSF grants format. Although the approved grants have been announced since July 1991, to this moment not a single penny has yet been transferred to any grantee throughout the country! To understand how grave the consequences are, suffices to say that included in these grants are the plans for bringing visiting scientists from abroad, in a period where scientific collaboration is increasingly imposing itself as a natural way to generate efficient products.

We thus come to the end of this exposition which intends to serve more as an alert than a libel to the scientific community at large.

Research in Brazil may be coming to an end itself, or very near it. We are speedily approaching level zero. Whether a true *coup de grace* can be avoided is something that may depend on an organized orchestration of our national scientific societies as well as scientific organizations and institutions abroad.

Brazil is not an exception throughout the planet in that goverment lack of sensitivity for needs of basic science is a common phenomenon. It is clear that, by and large, administration in its high level policy for science development has learned but very little about the subtle tissue of which scientific research is composed. It is also clear that such incomprehension is more generalized in underdeveloped and developing countries.

Our present administration by no means is (resp. will be) worse or better than the earlier ones (resp. future ones). None of them have been or will ever be trully concerned with the delicate structure of stable research conditions. It is, consequently, up to the scientific community itself, aided by its various extended segments, to strongly fight the research stoppage that is directly inflicted to its ranks by irresponsible and sightless government policy.

This undoubtedly sounds as an obvious proposition. However, it deserves being repeated as if it were a new corollary. New generations of researchers discover it over and over. Time has come to declare it a universal axiom.

Salvador (Brazil), Feb 25, 1992
Aron Simis (Universidade Federal da Bahia)

C.N.U.

Listes de Qualifications

Le C.N.U. nouveau vient d'être élu et installé. Nous reviendrons dans le prochain numéro sur son rôle et sa composition. Chaque section 25 et 26 s'est scindée en deux sous-commissions. L'une est chargée cette année des "qualifications" pendant que l'autre s'occupe des promotions. Les rôles s'inverseront chaque année.

Les présidents de ces sous-commissions sont pour la 25e section Mustapha Raïs (Poitiers), Luc Illusie (Paris-Sud) et pour la 26e Jean-Claude Nedelec (Ecole Polytechnique) et Jean Jacod (Paris 6).

Le nombre de candidats sur les listes de qualification est très important : 426 en maître de conférences et 287 en professeurs pour la 25e, 477 et 301 pour la 26e. Il y a recoupement partiel entre ces candidatures. Par exemple, près de 130 dossiers de maîtres de conférences sont communs entre la 25e et la 26e.

Un chiffre intéressant : sur les 287 candidats à la qualification en professeur de la 25e section, 137 sont titulaires de diplômes étrangers au lieu de l'habilitation française : ceci donne près de la moitié.

Une analyse plus fine des candidatures sera faite lors de la session du CNU (fin mai, début juin) et publiée dans la Gazette d'octobre. Les résultats de la qualification seront aussi analysés en octobre.

PRO MATHEMATICA

La fondation PRO MATHEMATICA en cours de formation se propose d'aider les mathématiciens vivant dans des conditions très difficiles voire extrêmes à exercer leur activité dans leur pays selon leurs souhaits.

La première initiative de PRO Mathematica est de créer les moyens d'aider nos collègues russes à vivre et travailler dans leur pays. Des bourses seront attribuées à partir de septembre par un comité scientifique de 20 personnes à des jeunes étudiants de thèse et à des enseignants plus chevronnés. L'institut franco russe, émanation de la Fondation, se soucie aussi des besoins techniques : maintien des bibliothèques, renforcement du réseau électronique, développement du système d'échange ou de rencontre d'équipes parallèles.

■

VIE DE LA S.M.F.

Le Conseil de la S.M.F. est renouvelé par tiers chaque année. Voici les résultats des dernières élections.

RÉSULTATS DES ÉLECTIONS AU CONSEIL DE LA S.M.F., 1992

M. Audin : 465 (élue); J. Camus : 439 (élu); M. Déchamps : 476 (élue); G. Dloussky : 430 (élu); H. Faure : 419 (élu); E. Lesigne : 385; P. Lochak : 409; A. Millet : 411 (élue); A. Pommelet : 443 (élu); J.J. Risler : 461 (élu); P. Schapira : 396.
Blancs : 0; Nuls : 6; Votants : 648.

RAPPORT MORAL
(pour la période de juin 91 à mai 92)

La Gazette, qui est un périodique de la S.M.F., doit publier les rapports moraux et financiers présentés devant l'assemblée générale annuelle. Celle-ci s'est tenue cette année le 23 mai dans les locaux du siège du C.N.R.S. Vous trouverez ci-dessous une partie du rapport moral (textes de Jean-Pierre Bourguignon, président de la Société et de Jacqueline Détraz, vice-présidente). Nous publierons dans le prochain numéro la suite du rapport moral (texte de Jean-Michel Lemaire pour les Affaires Internationales, le rapport sur les publications de la S.M.F. de Jacques Faraut, le compte rendu sur les débats organisés au conseil par Pierre Arnoux, le bilan des actions de la Société par Mireille Chaleyat-Maurel, et le prix d'Alembert par Bernard Gostiaux). Le rapport financier dû à François Gramain sera lui aussi publié en octobre.

Les deux rapports moraux et financiers ont été adoptés à l'unanimité, moins une abstention.

Comme l'an dernier, le Bureau a décidé que chaque membre rapporterait devant l'Assemblée Générale sur les secteurs dont il a la responsabilité. Le rapport moral pour l'année 1991 est donc divisé en sept parties traitant :

- des affaires générales, des adhésions, du C.I.R.M., et des relations institutionnelles, partie présentée par Jean-Pierre Bourguignon, président de la société,
- de la Maison de la S.M.F. et de la cellule de diffusion à Mar-seille, présentée par Jacqueline Détraz, vice-présidente de la société,
- des Affaires Internationales, présentée par Jean-Michel Lemaire, vice-président de la société,
- des publications, présentée par Jacques Faraut, secrétaire aux publications,
- des débats organisés dans l'année écoulée au Conseil, présentés par Pierre Arnoux, secrétaire de la société,
- des actions de communication de la société, présentées par Mireille Chaleyat-Maurel, chargée de la communication,
- du prix d'Alembert, présenté par Bernard Gostiaux, chargé du prix.

Le rapport financier pour l'exercice 1991 est présenté par François Gramain, trésorier de la société. Il sera suivi des commentaires de nos commissaires aux comptes

Affaires générales, C.I.R.M., et relations institutionnelles

Jean-Pierre Bourguignon,
Président de la S.M.F.

Affaires générales et personnel.

Comme nous l'espérions, la nouvelle disposition (provisoire) des locaux loués à l'Ecole Normale Supérieure à Montrouge a permis au secrétariat de mieux fonctionner. L'équipement informatique dont dispose le secrétariat est maintenant satisfaisant, et permet de minimiser le temps passé aux tâches répétitives. Ceci est particulièrement vrai pour la facturation qui a été en grande partie automatisée grâce à l'aide de Jean-Louis Maltret que je tiens à remercier ici. Ces progrès substantiels dans le fonctionnement au jour le jour, indispensables pour que la société puisse accomplir ses missions, n'ont été possibles que grâce au dévouement de l'ensemble de notre personnel. Il a dû faire face à quelques alertes qui l'ont obligé quelquefois à des horaires anormaux. Je tiens à exprimer publiquement à l'ensemble du personnel notre gratitude. De meilleures conditions de travail sont en vue grâce au transfert dans la Maison des Mathématiciens à l'Institut Henri Poincaré prévu pour le début 93.

Il y a actuellement à Montrouge 5 personnes rémunérées sur nos fonds propres : par ordre d'ancienneté dans la société, Madame Janine Hautin, responsable de la fabrication de l'Officiel, Madame Monique Michel, notre comptable, Mlle Annick Brureau, qui met le fichier à jour tout en finissant une formation de gestion, Mlle Claire Ropartz, notre secrétaire générale qui supervise les affaires générales, et enfin Mlle Cécile Hétier qui s'occupe de la fabrication des revues. Ces deux dernières ont été recrutées il y a un peu plus d'un an. Je laisse à Jacqueline Détraz le soin de décrire la situation du personnel à Marseille.

Les dépenses de personnel auxquelles la société a dû faire face cette année ont été lourdes, mais sont néanmoins restées compatibles avec le budget prévisionnel. Il semble que le C.N.R.S. ait été convaincu du bien-fondé de notre demande insistante de remettre à la disposition de la société (comme c'était le cas jusqu'à l'an dernier) un poste pour le secrétariat scientifique et la fabrication des publications. Nous attendons cette affectation avec impatience pour donner une forme définitive à notre cellule parisienne des publications.

Le nouvel annuaire, toujours commun avec la S.M.A.I., est en cours de fabrication. Je tiens à remercier Jean-Michel Lemaire pour le travail qu'il effectue pour ce document dont la présentation améliorée devrait permettre de rendre aux adhérents de meilleurs services que la version précédente.

Adhésions et cotisations.

A cette date la société compte 1677 adhérents, dont 165 adhérents à tarif réduit (retraités, étudiants), et 95 membres institutionnels. Parmi ceux-ci 204 adhèrent à la S.M.F. au travers d'une société avec laquelle la S.M.F. a un accord de réciprocité.

Notre fichier est maintenant tout à fait opérationnel. Nous avons pu aussi constituer quelques fichiers annexes dont nous avons pu vérifier l'exactitude. De gros efforts ont été faits l'an dernier pour gagner à la société de nouveaux adhérents surtout parmi l les institutions. Si le nombre des départements de mathématiques, membres institutionnels de la société, a nettement progressé, il n'est pas encore satisfaisant.

Le Centre International de Rencontres Mathématiques.

Comme je vous le laissais espérer dans le rapport moral présenté l'an dernier, le C.I.R.M., tout en demeurant un établissement scientifique de la S.M.F., a vu sa situation vis-à-vis du C.N.R.S. évoluer. Au terme d'une convention tripartite (D.R.E.D., C.N.R.S., S.M.F.) en cours de signature, le C.I.R.M. est devenu aussi une Unité Mixte de Service du C.N.R.S. ce qui permet d'y affecter de façon stable du personnel C.N.R.S.. Les négociations préparant cette convention ont permis de clarifier ce qu'y apportait chaque partenaire. Le C.N.R.S. a fait à la fois un effort financier et un effort important en personnel. La modification du règlement intérieur de la société nécessaire pour mettre en accord la composition du Conseil d'Administration avec celle du Conseil de l'U.M.S. est en cours. Par ailleurs, dans le contrat qui lie le C.I.R.M. à la D.R.E.D., apparaissent à partir de 1993 des crédits d'infrastructure substantiels qui vont permettre une remise à niveau de la bastide tenant compte de l'ouverture du bâtiment de la bibliothèque.

En reprenant un ordre chronologique, le premier évènement de l'année pour le C.I.R.M. a été l'inauguration, le 11 juin dernier, de la nouvelle Médiathèque, sise à côté de la bastide, en présence de MM. Courtillot et Détraz, représentant respectivement le Ministre de l'Education Nationale et celui de la Recherche et de la Technologie, et de représentants de MM. Gaudin, Président de la région Pro-vence-Alpes-Côte-d'Azur, et Vigouroux, sénateur-maire de Marseille. La réalisation a été très appréciée des visiteurs, et les mathématiciens complimentés pour leur bonne utilisation des deniers publics (mis à disposition par la D.R.E.D., la région et la mairie) dans cette opération de construction.

Le deuxième évènement pour le C.I.R.M. a été le chantier de couverture de la terrasse pour la transformer en salle de restaurant pour les congressistes, l'ancienne salle étant utilisée par les stagiaires du Centre de Formation du C.N.R.S. voisin auquel nous sommes liés par une convention de prestation de service. Les travaux se sont déroulés comme prévu, et cette petite extension immobilière (financée aux 2/3 sur les fonds propres de la société) apporte un réel confort supplémentaire aux congressistes. Elle va de plus permettre de prévoir de façon beaucoup plus souple l'évolution de l'utilisation du rez-de-chaussée de la bastide.

Le troisième a été, au 30 septembre dernier, le remplacement de Gilles Lachaud comme directeur par Jean-Paul Brasselet. Celui-ci n'a pas eu le temps de souffler car, dès sa prise de fonction, il est apparu que le service de restauration rendu au Centre de Formation provoquait un déficit d'exploitation important à cause d'une fréquentation bien moindre que celle prévue par le C.N.R.S.. Après plusieurs réunions pour juguler cette crise financière, un modus vivendi a finalement été trouvé. Le point important est bien sûr qu'aujourd'hui ces problèmes, liés, semble-t-il, à la période de rodage du Centre de Formation, aient disparu.

Je ne voudrais pas quitter le chapitre (important pour la société) du fonctionnement du C.I.R.M. sans rendre un hommage tout particulier à notre collègue Jean-Louis Koszul qui a assumé, pendant une dizaine d'années, le rôle très important de délégué permanent de la S.M.F. pour les affaires du C.I.R.M.. Il souhaitait quitter ces fonctions depuis quelque temps déjà mais il a continué de conseiller le bureau dans toutes les péripéties que je viens d'évoquer. Nous sommes parvenus à le convaincre d'attendre la mise en place des nouvelles structures de gestion du C.I.R.M. pour quitter sa charge. Pour nous, il incarne la volonté de voir la communauté des mathématiciens se doter d'instruments adaptés à ses missions et assumer sa part de responsabilité dans leur fonctionnement. Je forme le vœu que la société sache faire prospérer l'héritage qu'il nous laisse.

Relations institutionnelles.

Une délégation du bureau a été reçue par le Ministre de la Recherche et de la Technologie en juillet dernier. Cette entrevue a été l'occasion de faire le tour des activités de la société ressortant des domaines d'intervention du M.R.T.. Les contacts sont excellents, et la société ne peut que se féliciter du soutien que reçoivent nombre de ses initiatives auprès de ce ministère. Nous avons en particulier insisté sur la nécessité qu'un mathématicien soit attaché au département "Mathématiques et Technologies de l'Information" de la Direction de la Recherche dans la continuité du poste occupé par notre regretté collègue Claude Godbillon. Nous avons été entendu puisque notre collègue Jean -Pierre Raoult y a été nommé chargé de mission dans l'automne.

L'accumulation de projets de réformes universitaires a provoqué de notre part de nombreuses démarches auprès du Cabinet du Ministre de l'Education Nationale. Suivre les variations, souvent d'un jour sur l'autre, des projets n'a pas été une tâche facile :

– En ce qui concerne la réforme du C.N.U. (et celle corrélative des commissions de spécialistes), la S.M.F. n'a pas été consultée en amont de l'écriture du projet. Elle n'a pu que contrecarrer, quand elle l'a appris, le découpage de l'ancienne section 23 en trois sections de mathématiques, en demandant, après une longue discussion interne et en concertation avec la S.M.A.I., que l'on revienne à deux sections. Les inscriptions des collègues dans ces deux sections se sont faites de façon automatique et précipitée ce qui a justifié que la société alerte tous les présidents d'université et de commissions de spécialistes juste avant les vacances de fin d'année pour permettre aux collègues qui souhaitaient modifier leur inscription de le faire.

– En ce qui concerne la rénovation pédagogique des premiers et second cycles, l'affaire a encore été plus compliquée. Alors que les textes d'orientation généraux ne soulevaient pas de problèmes particuliers, les arrêtés particuliers nous ont amené à réagir vivement à cause du calendrier, des horaires, mais surtout de l'apparition d'un D.E.U.G. spécifique aux mathématiques dont on a pu craindre longtemps qu'il soit un ghetto qui isolerait les étudiants des autres disciplines. Nous sommes (là encore conjointement avec la S.M.A.I.) intervenus énergiquement pour que le point de vue des mathématiciens soit pris en compte, et nous avons tenu la communauté régulièrement au courant de nos démarches par l'intermédiaire de fax aux présidents d'université et aux directeurs d'U.F.R.. L'aboutissement de nos négociations était la possibilité laissée aux universités qui le demanderaient d'organiser les premières années du D.E.U.G. "Mathématiques, Informatique et Applications" en commun avec un ou deux des D.E.U.G. "Sciences de la Matière" ou "Sciences du Vivant". Les négociations autour de la réforme sont aujourd'hui officiellement réouvertes, et une conférence pédagogique à laquelle la société sera représentée se tiendra les 5 et 6 juin à Grenoble. Nous continuerons à y défendre une position d'ouverture des mathématiques aux autres disciplines.

Les contacts avec la S.M.A.I. sont demeurés étroits tout au long de l'année. Ils nous ont permis de dégager souvent des positions voisines sur les questions générales. Pour la première fois, nous avons tenu une réunion conjointe de nos bureaux respectifs pour faire le point sur les problèmes d'intérêt commun. Nous avons cependant été déçus que la S.M.A.I. préfère l'éditeur privé Springer pour fabriquer et diffuser sa revue de monographies "Mathématiques et Applications" malgré l'offre de coédition faite par la S.M.F..

La concertation systématique mise en place au niveau des cinq associations représentatives des mathématiciens français, outre la S.M.F., la S.M.A.I., l'A.P.M.E.P., l'U.P.S. et "Femmes et Mathématiques" s'est concrétisée par des réunions régulières des présidents. Dans ce cadre, l'association "Mathématiques A Venir-Opération 50 lycées" (mise en place après le colloque de Palaiseau pour mener des actions d'intérêt commun) organise le "Congrès Mathématique Junior" les 6, 7 et 8 juillet prochains à la Cité des Sciences et de l'Industrie de La Villette en conjonction avec le premier Congrès Européen de Mathématiques et avec le soutien particulier de la Régionale Ile-de-France de l'A.P.M.E.P.. Jean-Pierre Ressayre en est une des chevilles ouvrières. Je tiens à l'en remercier ici. De plus la constitution d'un annuaire des documents audiovisuels et logiciels de mathématiques a été entamée dans le cadre de cette association. Je remercie Marie-France Vigneras et l'association "Imagiciel" pour leur participation à cette opération.

Pour terminer ce paragraphe, je mentionne la démarche faite en direction du président du Conseil d'Administration de la Bibliothèque de France, Monsieur Dominique Jamet, conjointement avec les présidents de la Société Française de Physique et de la Société Française de Chimie pour demander que soit maintenu le projet initial de cette bibliothèque faisant une part raisonnable aux sciences exactes. Diverses rumeurs qui ont circulé au moment du départ du délégue scientifique, Monsieur Gattegno, nous avaient fait craindre que le schéma en vigueur à la Bibliothèque Nationale excluant nos sciences n'y soit imposé.

Maison de la S.M.F. et cellule de diffusion à Marseille

Jacqueline Détraz,
Vice-Présidente de la S.M.F.

L'année écoulée a été une année d'installation et de montée en puissance de l'activité de la cellule de diffusion à Marseille. Cela a été possible grâce au travail remarquable effectué par le personnel, Monique Marchand et Christian Munusami. Inaugurée en juin dernier en même temps que la bibliothèque du CIRM, la Maison de la S.M.F. a un cadre très agréable.

Le travail s'est déroulé selon le plan prévu :

– le traitement des commandes de revues a basculé à Marseille; en même temps, grâce à l'aide importante de Maltret, toute la gestion, en particulier la facturation, a été informatisée, ce qui représente localement un gros travail, mais va rendre la gestion plus facile et rigoureuse;

– le rangement systématique du stock de toutes les revues dans le local aménagé dans le sous-sol de l'Université s'est poursuivi et devrait être terminé avant la fin de l'année scolaire. Parallèlement, nous essayons de compléter en allant à la recherche des numéros des bulletins manquants;

– la composition de la Gazette a occupé pratiquement la moitié du temps de travail de Monique Marchand;

– le lien avec les congressistes du C.I.R.M. a été mis en place : une présentation de la S.M.F., une invitation à visiter la Maison de la S.M.F. et un bulletin d'adhésion à la S.M.F. sont joints au dossier de chaque participant. Une vente des revues a été organisée au C.I.R.M. pour certains colloques, mais la configuration actuelle du C.I.R.M. ne se prête pas très bien à une telle présentation;

– des stands ont été tenus par Monique Marchand dans différentes rencontres en France ou à l'étranger;

– des contacts sont en cours avec la revue de théorie des nombres de Bordeaux pour assurer la diffusion de cette revue.

Nous avons joué un rôle actif dans la journée "Mathématiques Indis-crètes" de novembre à Marseille, en organisant la vente de livres qui a eu un grand succès; pour les Journées de la Science de juin, nous organisons conjointement avec le C.I.R.M., une Journée "Portes ouvertes".

Dans le projet initial pour la maison de la la S.M.F., figurait l'installation du nœud français du réseau Euromath. Actuellement y est prévu l'installation d'un serveur télématique - la machine existe déjà - F. Blanchard et R. Rolland sont en charge de cette mise en place,votée par le conseil de la S.M.F. et travaillent sur la définition des services possibles (catalogues de bibliothèques, informations diverses,...) et l'obtention des crédits nécessaires pour cette installation.

Je me suis aussi occupée de la possibilité d'élargir l'activité par une vente (dépôt de livres de et sur les mathématiques s'adressant dans un premier temps aux congressistes du C.I.R.M.). Léxpérience d'une vente réussie et le succès par exemple du livre d'Hélène Gispert parmi nos collègues m'ont convaincu que cela correspondait à un besoin. Des contacts très positifs ont été établis avec un libraire de Marseille, des Editeurs (Belin, Springer, Blanchard), l'A.M.S. (qui présenterait ses productions) et le M.R.E. qui est prêt à aider pour l'installation. Les problèmes fiscaux et légaux sont apparemment solubles.

Cette année a été cependant marquée par deux mauvaises nouvelles :

– le vol, un week-end d'août, de tout le matériel informatique,

– l'annonce que Monique Marchand qui assurait remarquablement le secrétariat souhaitait pour des raisons personnelles retourner à Grenoble; elle vient d'y obtenir un poste dans un laboratoire de biologie à partir du 1er juillet.

L'assurance M.A.I.F., après intervention ferme, a remboursé convenablement, mais il a fallu tout racheter et augmenter la sécurité par la pose de diverses protections, ce qui a coûté du temps et de l'argent.

Le mantien d'un poste C.N.R.S. pour la Maison de la S.M.F. à Marseille nous a été assuré par la direction du C.N.R.S., et nous nous occupons actuellement de le pourvoir.

Dans l'avenir immédiat, outre ce qui a été évoqué ci-dessus, le travail essentiel sera bien sûr de développer la diffusion de nos revues. ■

COURRIER DES LECTEURS

Province et mathématiques

Problème. Le tableau suivant représente la participation des pays d'Europe (U.S.A. et Israël compris) au *congrès européen de mathématiques* qui se déroulera prochainement à Paris. Pour chaque pays, on indique le nombre de conférenciers (C), puis le nombre de villes d'origine de ces conférenciers (V).

Pays	C	V
France	8	1
Grande-Bretagne	6	6
Russie	6	2
Allemagne	5	4
Italie	4	3
U.S.A.	4	3
Suisse	3	2
Pays-Bas	2	2
Hongrie	2	1

Pays	C	V
Bulgarie	1	1
Danemark	1	1
Espagne	1	1
Finlande	1	1
Norvège	1	1
Pologne	1	1
Suède	1	1
Israël	1	1

Questions

1. Géographie : Quelle est l'unique ville de France représentée?

2. Dissertation : A partir de ce document, quelle lettre écririez-vous à un jeune mathématicien parisien pour le convaincre de continuer sa carrière en province?

Dominique DUVAL

Professeur de mathématiques à l'Université de Limoges (France?) [1]

Un de nos lecteurs vient de nous communiquer ce courrier qu'il a reçu il y a déjà quelque temps d'un éditeur de la grande revue internationale RST qui publie ce qui est avancé en mathématiques.
A notre connaissance, cette prestigieuse revue détient le record des délais de publication. Qui dit mieux?

November 9, 1990
Dear Professor X,
Thank you for submitting your paper "YZT" to *RST*. As Editor of the Journal, I am proud and pleased that you have chosen *RST* for publication, and hope you will continue to do so in the future. Your contribution, like the contributions of several other distinguished mathematicians before you, is one of the reasons for the journal's high standing in the mathematics community.
I am happy to inform you that your paper has been accepted for publication, and has been added at the bottom of an already huge backlog of papers which are already scheduled for publication. Because of the popularity of the journal, and perhaps also because *RST* does not apply any page charges, the backlog at present exceeds five year's time. I am therefore reluctantly forced to warn you that you may not expect publication of your paper before the end of 1995 or the beginning of 1996. I understand that this is a long period to wait, but these are hard times for scientific publishing, and the present size of each issue of the journal must remain constant.
Should you decide that this waiting time is too long, please let me know, and I shall not be offended if you withdraw your paper and publish it elsewhere.
With warm personal regards. ■

[1] Faculté des sciences, 123 avenue Albert Thomas, 87060 LIMOGES Cedex

COMPTES RENDUS

Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash–Moser

Serge Alinhac et Patrick Gérard
Savoirs Actuels, InterEditions/Editions du CNRS, 1991.

Le panorama des recherches contemporaines en équations aux dérivées partielles est marqué d'une forte séparation entre linéaristes et non linéaristes. Jusqu'à récemment les méthodes chères aux uns semblent avoir fort peu de rapports avec celles des autres. Le livre d'Alinhac et Gérard se propose de montrer, aussi bien à l'étudiant qu'au spécialiste, comment certains ponts ont été jetés entre des disciplines qui jusqu'ici semblaient n'avoir que des liens superficiels.

Depuis le début de ce siècle, le développement des EDP s'est essentiellement maintenu dans les sillons de la classification traditionnelle : à l'aube de leur histoire moderne (et pour un bon trait de celle-ci) les EDP, comme la Gaule, se composent de trois parties. L'aire elliptique est dominée par les travaux de Fredholm, Courant et Hilbert, Riesz et d'autres, sur le problème de Dirichlet; c'est le lieu de l'une des grandes découvertes mathématiques du siècle (par F. Riesz?), celle de l'espace hilbertien. Le courant hyperbolique a sa source dans l'étude du problème de Cauchy par Hadamard, au cours de laquelle il construit les solutions élémentaires de l'équation des ondes et invente les "parties finies", une des racines historiques de la théorie des distributions. Quant aux équations paraboliques, dont le prototype est l'équation de la chaleur, ce sont, comme les hyperboliques, des équations d'évolution, cependant qu'elles partagent d'importantes propriétés des elliptiques, telle la régularité des solutions. L'intérêt que les mathématiciens y portent fera un bond en avant, à partir des années vingt, lorsque leurs liens avec le processus de Wiener et, plus généralement, les processus markoviens seront reconnus.

En fait, chacun de ces trois courants va continuer à progresser et à conduire à des découvertes importantes – au premier rang desquelles il faut citer les espaces de Sobolev, dans les années trente; et bien sûr, la théorie des distributions, à la fin des années quarante, avec laquelle les EDP linéaires trouvent leur langage définitif.

Pendant ce temps, qu'en est-il des équations différentielles non linéaires? Il n'est par surprenant que leur progrès soit plus modeste. Le schéma d'évolution est un peu celui des équations fonctionnelles : l'application des théorèmes linéaires (surjectivité de l'application tangente) précède l'emploi du théorème des fonctions implicites. En effet, dans l'approche aux EDP non linéaires, ce qui prédomine longtemps est bien l'emploi des théorèmes du point fixe, ou de théorèmes de l'indice, empruntés à ceux de la topologie contemporaine et étendus aux espaces de Hilbert ou de Banach qui servent de cadre au traitement du problème. On peut souvent se contenter d'une simple contraction, à la Picard, surtout lorsqu'on s'intéresse à des équations elliptiques, dont les linéarisées sont "de force égale" en tout point. Cette approche simple est clairement expliquée et illustrée dans la section A du chapitre III du livre d'Alinhac et Gérard. Il faut toutefois mentionner que certains problèmes, tels les paraboliques, exigent des variantes affinées de cette méthode, en tout premier lieu le théorème du point fixe de Leray-Schauder. Quoiqu'il en soit, la méthode du point fixe continue d'être fort utile. Son succès présuppose que l'on ait "bien en main" la théorie de l'équation linéarisée, en particulier que l'on dispose, pour cette dernière, de fortes estimations **a priori** *(pour lesquelles les espaces höldériens sont particulièrement bien adaptés).*

L'esquisse qui précède pourrait donner l'impression que l'attaque des problèmes non linéaires s'opère sous une stratégie unifiée, avec un arsenal assez cohérent. En fait *il n'en est rien. Suite à la deuxième guerre mondiale, le champ non linéaire est le lieu d'un foisonnement impressionnant, mais aussi d'une forte fragmentation. Le contraste avec la théorie linéaire ne pourrait être plus net. Une fois assimilé le langage unifiant et simplificateur des distributions, la théorie linéaire suit, à partir de 1950, une voie royale. Première étape : la transformation de Fourier et l'analyse fonctionnelle permettent de réduire les principes fondamentaux de la théorie des EDP à coefficients constants à des théorèmes de division en géométrie analytique complexe, que l'algèbre homologique permet d'étendre aux systèmes d'équations (travaux de Ehrenpreis, Malgrange, Palamodov). Deuxième étape : il s'avère que nombreux problèmes d'EDP à coefficients variables, surtout parmi les problèmes classiques (tels les problèmes aux limites de type Lopatinski-Shapiro), peuvent se résoudre par ce qui est essentiellement une méthode de perturbations appliquée à des équations à coefficients constants. Ce progrès est accéléré par le maniement toujours plus versatile de la transformation de Fourier et des noyaux intégraux singuliers (surtout par le théorème de Calderón-Zygmund). La troisième étape débute avec les années soixante et la confluence de ces deux courants de l'analyse harmonique, d'où nait le calcul pseudo-différentiel. Ce dernier sera désormais l'outil par excellence de la théorie linéaire. Sato, dans le cadre analytique, et Hörmander, dans celui C^∞, fondent l'analyse micro-locale, dont le champ d'application ne cessera de s'étendre. Et cependant, à travers généralisations et adaptations, l'analyse micro-locale reste une doctrine clairement reconnaissable, qui revendique, comme son domaine d'influence, la totalité des EDP linéaires.*

Rien de pareil pour les équations non linéaires. Certes, on parvient à distinguer ici et là quelques tendances d'ensemble. Comme celle issue du calcul des variations, basée sur l'interprétation (qui remonte au XVIIIe siècle) des problèmes d'EDP, surtout, mais pas seulement, elliptiques, linéaires aussi bien que non linéaires, comme des problèmes d'extremum pour une fonctionnelle appropriée dans un espace fonctionnel bien choisi (lequel, ces jours-ci, est presque toujours l'un des espaces familiers de la théorie linéaire, par exemple, un espace de Sobolev). L'équation différentielle apparaît, dans cette perspective, comme l'équation d'Euler du problème variationnel. Trouver les solutions de l'équation (soumises, en général, à des conditions supplémentaires) se ramène à trouver les points critiques de la fonctionnelle (en jouant sur la compacité ou bien sur la propriété de Palais-Smale, etc.).

Mais il y a d'autres foyers dont le développement semble suivre un cours tout-à-fait spécifique, sans grand rapport avec ce qui se passe ailleurs. Qu'on songe, par exemple, à la théorie de l'équation de Korteveg–De Vries et au scattering inverse. Et peut-être le point le plus extrême d'éloignement de la théorie linéaire est-il atteint dans l'étude des équations de la mécanique des fluides, et en particulier des lois de conservation.

*Or voilà qu'au début de la décennie quatre-vingt, un emploi plus affiné des opérateurs pseudo-différentiels fait miroiter l'espoir de combler une partie des distances qui séparent les linéaristes des non linéaristes, principalement ceux qui s'intéressent aux problèmes de propagation des ondes, c'est-à-dire aux problèmes hyperboliques. Ce raffinement est systématisé dans le calcul paradifférentiel de J.-M. Bony. Comme on peut le prévoir les difficultés, pour le traitement de problèmes non linéaires dans le cadre des distributions, résident dans le produit (multiplicatif) de deux distributions. L'idée de la paramultiplication est à la base de la théorie de Bony. Soient $u \in H^s$, $v \in H^t$ (pour simplifier on va se limiter aux espaces de Sobolev et aux valeurs $s > n/2$, $t > n/2$, où n est le nombre de variables indépendantes; cette dernière condition assure que H^s soit une algèbre pour la multiplication). On va définir un opérateur **linéaire** de paramultiplication par u, T_u, et l'un par v, T_v, de manière à ce que le "reste", $R(u,v) = uv - T_u v - T_v u$, ait une régularité supérieures à celle de uv. Encore est-il bon que les définitions conduisent à* *un algorithme facilement maniable. Le produit habituel* uv *est égal à la transformation de Fourier inverse,* $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u} * \hat{v})$, *de la convolution* $\hat{u} * \hat{v}$ *des transformées de Fourier* $\hat{u}$ *et* $\hat{v}$. *La même formule servira à définir* $T_u v$, *sauf qu'on remplacera la convolution* $\hat{u} * \hat{v}$ *par une intégrale "tronquée",*

$$(2\pi)^{-n} \int \chi(\xi - \eta, \eta)\hat{u}(\xi - \eta)\hat{v}(\eta)d\eta ,$$

où χ *est une fonction lisse dans le complémentaire de l'origine, homogène de degré zéro,* $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi(\xi - \eta, \eta) = 1$ *pour* $|\xi - \eta|/|\eta| < \varepsilon_1$ *et* $\chi(\xi - \eta, \eta) = 0$ *pour* $|\xi - \eta|/|\eta| > \varepsilon_2$ $(> \varepsilon_1 > 0)$. *Ceci revient à multiplier la partie de* v *dont la transformée de Fourier est concentrée près de la sphère* $|\xi| = \rho$ *par la partie de* u *dont la transformée de Fourier est portée par la boule* $|\xi| \leq \rho'$, *avec* $\rho'/\rho < 1$ *fixé. Avec cette définition, on démontrer facilement que* R *est une application bilinéaire continue de* $H^s \times H^t$ *dans* $H^{s+t-n/2}$. *A partir de là le passage aux opérateurs paradifférentiels s'effectue de façon naturelle. Dans les applications, la première étape consiste à remplacer l'équation différentielle non linéaire que l'on étudie,*

$$F(x, \{\partial^\alpha u\}_{|\alpha \leq m}) = 0 ,$$

par sa "paralinéarisée",

$$\sum_{|\alpha| \leq m} T_\alpha \partial^\alpha u = f ,$$

où T_α *est l'opérateur de paramultiplication par* $(\partial F/\partial u_\alpha)(x, \{\partial^\alpha u\}_{|\alpha| \leq m})$. *On suppose maintenant que* $u \in H^s$, $s > m + n/2$, *et l'on en déduit que* $f \in H^{2s-2m-n/2}_{\mathrm{loc}}$.

Il n'est pas question ici de suivre le déroulement du calcul paradifférentiel, agréablement simple dans ses principes directeurs mais qui, bien entendu, peut devenir fort compliqué dans les applications. Ses meilleures réussites se situent dans l'étude de la propagation des singularités faibles (les singularités fortes sont liées à l'apparition de chocs). Ce calcul est l'un des thèmes sous-jacents du chapitre II du livre d'Alinhac et Gérard. Le cadre théorique du livre est nettement pseudo-différentiel et c'est de ce point de vue que l'analyse non linéaire est abordée. L'exposition, au moins dans le chapitre II, est fortement influencée par le point de vue de Y. Meyer, et emploie les décompositions dyadiques, à la Littlewood-Paley. Or c'est là une des façons standard d'introduire les opérateurs paradifférentiels. Cette approche a été moins en usage pour ce qui est des opérateurs pseudo-différentiels proprement dits, au moins dans la période qui précède le théorème de David et Journé. Et c'est d'ailleurs la présentation habituelle, basée sur la transformation de Fourier et les intégrales oscillantes, qui fait le contenu du chapitre I du livre d'Alinhac et Gérard. Le lecteur y trouvera un résumé excellent de la théorie, et l'essentiel de ce dont on a, la plupart du temps, besoin.

Mais il nous faut maintenant faire un retour en arrière, vers les théorèmes du type fonctions implicites, et combler une lacune importante dans le résumé historique du début. Le problème du plongement isométrique d'une variété riemannienne compacte dans un espace euclidien conduisit (vers 1956) J. Nash à un théorème de fonctions implicites (en dimension infinie) d'un type très nouveau. Son application requiert bien une itération, tout comme dans la méthode de Picard, mais elle se fait ici au prix d'une perte de différentiabilité. Pour ne pas sortir de l'espace dans lequel la récurrence s'opère, on "rétablit" la différentiabilité par l'emploi d'une régularisation. La nature quadratique de l'erreur est alors exploitée pour maîtriser la convergence. C'est à J. Moser qu'il revient, vers 1965, de montrer qu'il s'agit-là d'une méthode de Newton aidée d'une régularisation. Elle s'applique à des équations fonctionnelles bien plus générales que les EDP. En particulier, elle s'applique à des équations pseudo-différentielles. Elle ne requiert plus de majorations linéaires fortes pour le problème linéaire; il suffit de majorations douces ("tame", en anglais). Les dernières sections du livre d'Alinhac et Gérard donnent une sorte d'axiomatique de la méthode, dans une de ses versions les plus générales (inspirée des écrits de Hörmander sur le même sujet). Le lecteur est guidé, pas à pas, à travers les étapes de la résolution – sans que, à aucun moment, ne soient perdues de vue les perspectives d'application aux équations pseudo-différentielles. Ainsi les régularisations sont celles introduites au chapitre II, dans le cadre dyadique, où l'influence du paramètre de régularisation est décrite avec la précision qu'exige le procédé de Nash-Moser. Le seul regret que le lecteur risque de ressentir c'est de voir le livre s'achever un peu brusquement – on lui a montré recette, il aurait aimé goûter au plat cuisiné. Un exemple un peu substantiel d'application – qui, bien entendu, n'aurait pu figurer dans le cours magistral d'où le livre est né – aurait convaincu les sceptiques éventuels que l'intérêt de cette analyse splendide n'est pas seulement académique.

Le livre d'Alinhac et Gérard n'en reste pas moins une belle contribution à la littérature sur le sujet des opérateurs pseudo-différentiels et de leur emploi en analyse non linéaire. Le style en est simple et direct. De nombreux exemples, ainsi que de nombreux exercices, illustrent la théorie. Les solutions d'un certain nombre d'exercices répondent à des questions soulevées dans le texte.

François TREVES
Université Rutgers,
New Brunswick, N.J. 08903, USA

Lectures on Buildings

Mark RONAN
Birkhäuser, 1989.

Les immeubles ont été inventés par Jacques Tits au milieu des années 50, mais la terminologie immobilière n'apparut qu'un peu plus tard sous l'impulsion de Bourbaki. Le but était de comprendre les groupes de Lie semi-simples exceptionnels d'un point de vue géométrique. La "géométrie" associée devait être définie de manière systématique pour tous les groupes de Lie semi-simples et non au cas par cas.

La géométrie projective de dimension n peut se reconstruire à partir du groupe projectif $PGL_{n+1}(\mathbf{C})$ comme suit : Les sous-espaces (linéaires) de $P_n(\mathbf{C})$ sont représentés par leurs stabilisateurs dans $PGL_{n+1}(\mathbf{C})$, c'est-à-dire par les sous-groupes maximaux connexes non semi-simples (ou sous-groupes paraboliques maximaux) de $PGL_{n+1}(\mathbf{C})$. Les classes de conjugaison de tels sous-groupes représentent les ensembles de points, droites, plans, ..., hyperplans de $P_n(\mathbf{C})$. Deux sous-espaces sont **incidents** – c'est-à-dire l'un d'eux contient l'autre – si et seulement si l'intersection des sous-groupes correspondants contient un sous-groupe résoluble connexe maximal (ou sous-groupe de Borel) de $PGL_{n+1}(\mathbf{C})$.

Pour un groupe semi-simple complexe général G, les classes de conjugaison des sous-groupes paraboliques maximaux correspondent aux sommets d'un graphe Δ dit de Dynkin. On lui associe une "géométrie" consistant en l'ensemble Γ de ces sous-groupes paraboliques maximaux, l'application t de Γ dans Δ correspondante et la relation d'incidence associée aux sous-groupes de Borel de G comme dans l'exemple ci-dessus. On obtient ainsi un complexe (simplicial) dont les **facettes** sont les sous-ensembles de Γ formés d'éléments deux à deux incidents; l'application t est injective sur chaque facette. L'application qui à F associe l'intersection des éléments de F est une bijection entre les facettes et les sous-groupes paraboliques de G. Les facettes maximales, les **chambres**, s'envoient surjectivement par t sur Δ; elles correspondent bijectivement aux sous-groupes de Borel de G. Si H est un sous-groupe de Cartan (ou tore maximal) de G, les sous-groupes paraboliques maximaux de G contenant H forment un sous-complexe (que l'on appellera **appartement**) dont les chambres sont en bijection avec le groupe de Weyl de (G, H).

Dans l'exemple de $PGL_{n+1}(\mathbf{C})$, le graphe Δ est A_n : $\bullet\!-\!\bullet\!-\!\!-\!\bullet \cdots \bullet\!-\!\!-\!\bullet$ (n sommets). Le sommet numéroté i (à partir de la gauche) correspond aux sous-espaces de dimension $i-1$ de $P_n(\mathbf{C})$. Les facettes correspondent aux drapeaux de cet espace.

Si F est une facette de Γ, son **résidu** est une géométrie du même type : l'ensemble Γ' est formé des éléments de Γ incidents à tous les éléments de F, t' est la *restriction de t (d'image dans $\Delta - t(F)$) et la relation d'incidence est la relation induite. Cette géométrie est en fait celle associée à un groupe de Lévi du groupe parabolique correspondant à F. Dans le cas de $PGL_{n+1}(\mathbb{C})$, on obtient la géométrie associée à une somme directe d'espaces projectifs.*

Tits observa que la géométrie est relativement bien comprise si l'on connaît ses résidus de rang 2 (i.e. $|\Delta - t(F)| = 2$). Or ceux-ci correspondent essentiellement aux diagrammes de Dynkin $A_1 \times A_1$, A_2 et B_2 qui sont ceux de groupes de Lie classiques et de géométries bien connus. Cela lui permit de mieux comprendre les géométries des groupes de Lie exceptionnels. Par ailleurs on connaissait les groupes classiques analogues sur un corps quelconque K des groupes de Lie de type $A_1 \times A_1$, A_2 ou B_2 et Tits commença à utiliser les géométries associées comme matériaux de construction de géométries sur K associées à chaque diagramme de Dynkin. Les groupes d'automorphismes de ces géométries devaient fournir sur K des analogues des groupes de Lie semi-simples même exceptionnels. Cependant, peu après, Claude Chevalley construisit directement ces analogues et cette approche géométrique fut, provisoirement, abandonnée.

Les immeubles (comme furent baptisées ces géométries) devinrent d'excellents outils pour l'étude des diverses généralisations des groupes de Lie semi-simples; ils jouèrent le rôle des espaces symétriques associés à ces groupes de Lie.

La théorie de Borel-Tits de structure d'un groupe algébrique semi-simple sur un corps quelconque se traduit par un immeuble que l'on peut définir presque exactement en les termes de l'alinéa 3 ci-dessus. Cet immeuble, dit de Tits, est "sphérique".

Pour étudier les groupes algébriques sur les corps locaux, François Bruhat et Jacques Tits introduisirent des immeubles affines; ceux-ci permirent en particulier de classifier les sous-groupes compacts maximaux de ces groupes.

Les groupes de Kac-Moody sont mieux compris par l'usage de leurs immeubles. En fait, à chacun de ces groupes sont associés deux immeubles (en général ni sphériques, ni affines) "jumelés". La théorie de ces jumelages est développée par Mark Ronan et Jacques Tits (cf cours au Collège de France de ce dernier en 1989 et 1990), mais ne figure pas dans ce livre.

Ces trois exemples d'immeubles sont associés à des groupes possédant une B-N paire (ou système de Tits) et peuvent donc être définis à peu près dans les mêmes termes qu'à l'alinéa 3 ci-dessus.

Il y a une douzaine d'années, sous l'impulsion en particulier de Francis Buekenhout, on chercha à construire des géométries associées aux groupes finis simples sporadiques. Cela conduisit Tits à généraliser la notion "classique" d'immeuble (celle des quatre alinéas précédents) en revenant un peu à la notion initiale.

Le livre de Ronan se place dans cet esprit et s'intéresse essentiellement aux problèmes de classification des immeubles de types variés (et des groupes agissant dessus). Il en donne un compte rendu assez complet.

Les trois premiers chapitres sont consacrés aux définitions et propriétés générales. Il me semble qu'il n'existe pas de définition des immeubles valable pour toutes les généralisations de cette notion. La plupart sont des complexes simpliciaux (ou polysimpliciaux); mais ce n'est pas le cas des immeubles affines non discrets (par exemple l'immeuble de Bruhat-Tits d'un groupe algébrique semi-simple sur un corps muni d'une valuation non discrète). L'auteur choisit la définition introduite par Tits en 1981 qui est essentiellement équivalente à celle par des complexes (poly)simpliciaux et traite dans un appendice le cas des immeubles affines non discrets.

On définit donc un **complexe de chambres sur un ensemble** I *comme un ensemble C (de chambres) muni pour chaque i dans I d'une relation d'équivalence appelée "i-adjacence". Si W est un groupe de Coxeter de système de générateurs $\{r(i)/i \in I\}$,* **un immeuble de type** W *est un complexe de chambres sur I muni d'une fonction "distance" $\delta : C \times C \to W$ telle que*

$\delta(x,y)$ s'écrit sous la forme d'un mot réduit $r(i_1) \bullet \cdots \bullet r(i_k)$ si et seulement si il existe une suite (appelée galerie) de chambres $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ telle que x_j est i_j-adjacente à x_{j-1} pour $1 \leq j \leq k$. Les **appartements** sont les sous-immeubles isomorphes au complexe de Coxeter W (le complexe de chambre W où w est i-adjacent à $wr(i)$ et $\delta(w,w') = w^{-1}w'$) et on prouve alors la propriété attendue : deux chambres quelconques x, y sont contenues dans un même appartement et deux tels appartements sont isomorphes par un isomorphisme fixant x et y (cette propriété caractérise les immeubles et en constitue une des définitions antérieures).

Cette définition des immeubles est équivalente à celle comme complexe numéroté : Γ est un ensemble (de sommets) muni d'une application $t : \Gamma \to I$, les facettes sont des sous-ensembles de Γ sur lesquels t est injective et les facettes maximales (les chambres) s'envoient surjectivement sur I par t. On munit alors l'ensemble $\mathcal{C}$ des chambres de relations d'équivalences : C est i-adjacente à C' si et seulement si $C - t^{-1}(i) = C' - t^{-1}(i)$. Il faut plutôt voir Γ comme une "réalisation" du complexe de chambres $\mathcal{C}$. Celui-ci est plus abstrait, mais plus général et plus souple; il a d'autres réalisations encore plus palpables comme la réalisation géométrique qui est un espace topologique réunion de simplexes (ou polysimplexes : produits de simplexes) indexés par les facettes de Γ (ou seulement par certaines d'entre elles). Les appartements des immeubles sphériques (resp. affines) peuvent alors être considérés comme des sphères (resp. des espaces affines).

Un revêtement de systèmes de chambres est un morphisme qui induit des isomorphismes sur les résidus de rang 2. On caractérise au chapitre 4 les immeubles comme revêtements universels de certains systèmes de chambres.

Au chapitre 5, on montre que les immeubles qui possèdent un groupe "fortement transitif" d'automorphismes sont construits à partir d'une B-N paire dans ce groupe.

Le chapitre 6 est consacré aux **immeubles sphériques** (c'est-à-dire ceux dont le type est un groupe de Coxeter fini) et introduit la notion technique d'immeuble de Moufang : tout immeuble sphérique irréductible de **rang** (= $|I|$) au moins 3 est de Moufang. Au chapitre 8, est expliquée la classification de ces immeubles sphériques de Moufang. C'est une simplification du livre de Tits "Buildings of spherical type and finite B-N pairs" (Springer Lecture Note 386, 1974) utilisant deux ingrédients nouveaux : la notion de Moufang et un procédé (dû à Ronan et Tits et expliqué au chapitre 7) de construction d'immeubles via des "bleus" et des "fondations" assez dans l'esprit initial de Tits avant les résultats de Chevalley.

Les deux derniers chapitres (9 et 10) sont consacrés aux **immeubles affines**, c'est-à-dire ceux dont le type W est le groupe de Weyl affine d'un certain système de racines, ou aussi ceux dont les appartements (dans la réalisation géométrique) sont des espaces affines avec une action affine de W. Le livre explique la classification due à Tits des paires formées d'un immeuble affine irréductible de rang au moins 4 et d'un système approprié d'appartements. On montre que c'est une conséquence de la classification des immeubles sphériques en introduisant un tel immeuble à l'infini.

En conclusion, ce livre présente, de manière très précise et très complète, les différents aspects d'une théorie, celle des immeubles qui s'est imposée comme un outil puissant d'étude des groupes semi-simples et de leurs généralisations (finies ou de dimensions infinies). Au même moment est paru, sur le même sujet, un livre de Brown (Buildings, Springer Verlag 1989); il donne plus de détails sur l'introduction des notions fondamentales, mais n'aborde pas les problèmes de classification.

Guy ROUSSEAU
Université NANCY 1

Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres

G. Tenenbaum

Publications de l'Institut Elie Cartan 13, Université de Nancy 1.

Il m'est facile de faire un rapport sur ce livre, paru il y a un an, puisque cet ouvrage est devenu pour moi le lieu habituel où trouver, de façon complète, claire et irréprochable, les résultats classiques de théorie analytique des nombres et leurs démonstrations. Cet excellent ouvrage de cinq cents pages remplit totalement le but fixé dans l'avant-propos : ***fournir aux jeunes chercheurs un exposé autonome d'initiation aux méthodes analytiques de l'arithmétique et, à leurs aînés, un texte de référence pour certaines questions fondamentales.***

Le lecteur appréciera la structure des vingt chapitres : au texte de base, fournissant systématiquement des démonstrations complètes, succèdent des notes qui, sans trop insister sur la sophistication actuelle des méthodes, décrivent les derniers progrès, sans négliger l'aspect historique ou philosophique; enfin, des exercices (résolubles !) viennent aider le lecteur à parfaire sa maîtrise ou à élargir ses perspectives.

La richesse de ce livre interdit de citer ici toutes les méthodes qu'il contient. Il présente un large panorama de la théorie analytique des nombres que les non-initiés apprécieront. Il n'est guère aisé de définir les buts ultimes de cette partie de l'arithmétique : peut-être la recherche de l'harmonie qui gouverne l'apparent chaos de la structure multiplicative des entiers? Dans cette optique, le résultat le plus prestigieux demeure le théorème des nombres premiers – un des théorèmes les plus fascinants et élégants des mathématiques. Il a fallu attendre Hadamard et de la Vallée Poussin, en 1896, pour confirmer l'intuition de Legendre et Gauss sur la relative régularité d'apparition des nombres premiers dans la suite des entiers : on a, pour $x \longrightarrow +\infty$,

$$\pi(x) := |\{p \text{ premier} : p \leq x\}| \sim x/\ln x.$$

L'auteur a scindé son ouvrage en trois parties correspondant aux trois grandes familles de méthodes employées : méthodes élémentaires, d'analyse complexe, et probabilistes.

Méthodes élémentaires

Après un bref rappel des grands outils classiques que sont les formules d'Abel, Euler–Mac Laurin, etc..., l'auteur obtient l'encadrement

$$c_0 x/\ln x \leq \pi(x) \leq c_1 x/\ln x \qquad (x \geq 4),$$

où c_0, c_1 sont des constantes absolues telles que $0 < c_0 < 1 < c_1$. Il utilise à cette fin la méthode classique de Tchébychev, reposant sur les propriétés de divisibilité des coefficients binomiaux, et la récente méthode de Nair fondée sur l'étude du dénominateur du rationnel $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-m}dx \quad (1 \leq m \leq n)$. Il établit ensuite la traditionnelle formule de Mertens, qui fournit un équivalent asymptotique du produit $\prod_{p \leq x}(1 - 1/p)$.

Un des outils de base apparaissant dans ce contexte est la convolution des fonctions arithmétiques, définie par la formule

$$(f * g)(n) := \sum_{d|n} f(d)g(n/d)$$

pour f, g fonctions de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{C}$. Cette opération, qui mêle intimement les structures additive et multiplicative des entiers, est une des manières d'aborder l'étude des nombres premiers; elle élucide aussi quelque peu la nature des fonctions classiques — Möbius, von Mangoldt, Euler, ...

La convolution est sous-jacente dans les méthodes de crible qui sont ici présentées : cribles d'Eratosthène et de Brun. Dans ce dernier cas, il s'agit de trouver un moyen efficace de *restreindre, sans trop perdre de précision, le nombre des termes dans la formule d'inclusion-exclusion (aussi connue sous le nom de formule de Poincaré par les probabilistes)*

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_k| = \sum_{1 \le i \le k} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| + \cdots$$

En effet, dans les applications arithmétiques, les divers sommants ne sont en général qu'approximativement connus et la taille de la formule (2^k termes) est pratiquememnt prohibitive. L'auteur expose les principes du crible combinatoire, qu'il illustre par le théorème de Brun (1919) selon lequel la suite des nombres premiers jumeaux (c'est-à-dire les nombres premiers p tels que $p+2$ soit également premier) est suffisamment "rare" pour que la série des inverses converge. A l'heure actuelle on ignore toujours si cette série a un nombre infini de termes.

L'auteur aborde ensuite une autre technique très puissante, le grand crible, qui vit le jour en 1941, sous la plume de Linnik. Dans sa forme analytique, le grand crible se présente comme la majoration des sommes $\sum_j |S(\alpha_j)|^2$, où S est un polynôme trigonométrique, en fonction des distances mutuelles modulo un des réels α_j. L'auteur démontre l'estimation optimale de Selberg et l'applique ensuite à deux questions célèbres : la majoration du cardinal de l'ensemble des nombres premiers jumeaux n'excédant pas x, et celle de la quantité

$$\pi(x; q, a) := |\{p \le x : p \equiv a \,(\operatorname{mod} q)\}|$$

(Théorème de Brun–Titchmarsh.)

Le tome I s'achève par une introduction aux majorations de sommes trigonométriques

$$\sum_{N < n \le 2N} \exp\{2\pi i f(n)\},$$

où f est une fonction réelle de variable réelle suffisamment dérivable. Le lecteur est ainsi initié à la méthode de van der Corput qui, en combinant la formule sommatoire de Poisson, l'inégalité de Cauchy–Schwarz, et des estimations d'intégrales trigonométriques, permet de majorer la somme ci-dessus en fonction de N et des ordres de grandeur des dérivées successives de f. C'est un premier pas vers la théorie des paires d'exposants, qui s'est illustrée notamment dans le fameux problème du cercle (estimer avec un bon terme d'erreur le nombre des points à coordonnées entières dans un disque de rayon tendant vers l'infini) et dans la question non moins célèbre des majorations de la fonction zêta de Riemann sur la droite critique.

Il eût été difficile, dans ce tome qui traite de méthodes aujourd'hui classiques, d'adopter une démarche totalement originale. Il faut cependant souligner que la clarté de l'exposition et la mise à disposition de démonstrations difficiles d'accès ou confinées à la littérature de recherche rendent ce texte fort utile. Citons, entre autres, les équivalences élémentaires de Landau pour le théorème des nombre premiers (et notamment celles qui sont relatives à la fonction de Möbius), la méthode de Nair, et la forme optimale du grand crible.

Méthodes d'analyse complexe

Depuis Riemann, il est bien connu que la fonction analytique de $s = \sigma + i\tau$ définie pour $\sigma > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

est une clef de l'étude des nombres premiers. Le tome II est, plus généralement, consacré aux diverses méthodes permettant d'extraire une information arithmétique sur les coefficients d'une série de Dirichlet

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

à partir des propriétés analytiques de sa somme.

L'auteur traite exhaustivement les questions de convergence des séries de Dirichlet et des transformées de Laplace–Stieltjes — fournissant ainsi une référence unique là où les informations étaient auparavant quelque peu dispersées. Il aborde les problèmes d'ordre de grandeur dans les bandes verticales et de valeurs moyennes. On lira avec plaisir, dans les notes du chapitre 2, une présentation moderne de résultats un peu oubliés liés à la convergence des séries de Dirichlet : théorème de Stieltjes pour la convergence d'un produit, construction (optimale) de Bohr d'une série F dont l'abscisse de convergence diffère de celle de F^2 d'exactement $\frac{1}{2}$, etc...

Le passage de $F(s)$ à la fonction sommatoire $A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$ est régi par la formule de Perron et ses avatars

$$A(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} F(s) x^s s^{-1} ds + \text{erreur}$$

pour un nombre réel κ convenable et T grand. Les formes présentées dans le chapitre dévolu aux formules de sommations sont utiles par leur précision et leur commodité d'emploi.

On trouvera ensuite un substantiel **vade mecum** *de la fonction zêta elle-même : prolongement analytique, équation fonctionnelle, majoration sur la droite critique $\sigma = \frac{1}{2}$, dénombrement des zéros dans la bande critique $0 < \sigma < 1$, et enfin détermination d'une région sans zéros. Il est ensuite facile d'établir le théorème des nombres premiers sous la forme forte*

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O\big(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\ln x}}\big).$$

Le chapitre 5 est consacré à l'étude asymptotique des coefficients de séries de Dirichlet analytiquement "proches" de puissances complexes de la fonction zêta de Riemann. Il s'agit en fait d'une véritable méthode, très féconde, développée dans les années 50/60 par Selberg, puis Delange. Son premier succès, éclatant, fut la démonstration en quelques pages, par Selberg, d'estimations fines pour la quantité

$$\pi(x, k) := |\{n \leq x : \omega(n) = k\}|,$$

où $\omega(n)$ désigne le nombre des facteurs premiers de n, comptés sans multiplicité, ***uniformément*** *pour $k \leq A \ln\ln x$, A étant une constante positive arbitraire. Selberg retrouvait ainsi élégamment des formules que Sathe avait obtenues après des calculs inextricables reposant sur une application inductive, par récurrence sur k, du théorème des nombres premiers. Depuis cette époque, on ne cesse de mettre à jour des situations nouvelles qui relèvent de cette technique.*

Le traitement original qu'on en trouvera ici étend le champ de validité des résultats précédemment connus. On doit ainsi à G. Tenenbaum le premier exposé didactique de la méthode de Selberg–Delange et la résolution complète des questions inhérentes d'uniformité, cruciales pour les applications. L'auteur met à la disposition des étudiants et des chercheurs des énoncés précis, aux hypothèses facilement vérifiables, qui se révéleront d'une grande utilité pratique.

Dans le chapitre suivant, deux applications spécifiques sont traitées en détail. D'une part, le problème de $\pi(x, k)$, qui est à l'origine de la méthode, et, d'autre part, l'occurrence de la loi de l'Arcsinus comme répartition probabiliste moyenne des diviseurs d'un entier. Le lecteur est ainsi guidé, naturellement, de la théorie analytique à la théorie probabiliste des nombres.

On aborde ensuite la théorie taubérienne, dont nous dirons, sommairement, qu'elle a pour objet, dans le présent contexte, d'évaluer la fonction sommatoire d'une série de Dirichlet à partir des propriétés de sa somme **dans le domaine de convergence.** *Dans ce chapitre, particulièrement intéressant, l'auteur a pris le parti original de toujours fournir des termes d'erreur effectifs : pour le théorème de Hardy–Littlewood–Karamata–Freud d'abord, où les* *hypothèses sont restreintes aux valeurs d'arguments réels des séries, pour le théorème d'Ikehara–Ingham, ensuite, où les arguments complexes sont pris en compte. Rappelons qu'associé à la non-annulation de $\zeta(s)$ pour $\sigma \geq 1$ (un fait relativement facile à prouver), le théorème d'Ikehara implique directement le théorème des nombres premiers, sous la forme faible d'une simple équivalence asymptotique. Un autre aspect inattendu, et inédit, de ce chapitre est la mise en évidence d'un lien très étroit entre le théorème d'Ikehara–Ingham et un résultat classique en théorie des probabilités, l'inégalité de Berry–Esseen.*

Le dernier chapitre du tome II est dévolu à l'étude de la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Ayant défini les fonctions L de Dirichlet et prouvé qu'elles ne s'annulent pas pour $\sigma \geq 1$, l'auteur déduit facilement de sa version effective du théorème d'Ikehara–Ingham l'équivalence

$$\pi(x;q,a) \sim_\epsilon \frac{x}{\phi(q)\ln x} \qquad (x \to +\infty)$$

uniformément pour $(a,q) = 1$ et $q \leq (\ln x)^{1-\epsilon}$, où ϕ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Bien que moins forte que celle du théorème de Siegel–Walfisz, cette uniformité est remarquable car elle est obtenue sans information sur les zéros des fonctions L dans la bande critique. Cela illustre la qualité du théorème taubérien utilisé tout en fournissant un traitement original d'un résultat classique.

Méthodes probabilistes

Résolument heuristique, le premier chapitre débute par la preuve de l'impossibilité de munir $\mathbf{N}$ d'une structure d'espace probabilisé en accord avec l'intuition. On y décrit ensuite les diverses notions de densité raisonnables que l'on peut attacher aux suites d'entiers. Le lecteur apprendra en particulier que les densités analytique et logarithmique sont équivalentes — un fait trop peu connu. Les exercices contiennent, sous forme condensée, de précieux renseignements concernant d'autres types de densités (divisorielle, multiplicative, séquentielle, etc...) et proposent des démonstrations, souvent simplifiées, de résultats intéressants de la littérature concernée, comme la preuve de Daboussi de la conjecture dite des facteurs directs.

Après des rappels nécessaires sur les fonctions de répartition, le chapitre 2 introduit les concepts fondamentaux de la théorie probabiliste des nombres. On y trouvera en particulier un résultat fort utile pour démontrer l'existence d'une loi de répartition limite pour une fonction arithmétique — Théorème 2.

L'auteur aborde ensuite la notion d'ordre normal d'une fonction arithmétique, analogue de celle d'égalité presque sûre en théorie des probabilités. Un outil privilégié de cette branche de la théorie est l'inégalité de Turán–Kubilius qui concerne la variance des fonctions additives (c'est-à-dire telles que $f(mn) = f(m) + f(n)$ dès que $(m,n) = 1$) et permet de visualiser la distorsion entre les nombres premiers et leur modèle probabiliste, reposant sur une hypothèse d'indépendance stochastique. Une application classique de l'inégalité de Turán–Kubilius consiste à établir le fameux théorème de Hardy–Ramanujan selon lequel la fonction $\omega(n)$ a pour ordre normal $\ln\ln n$ — autrement dit, presque tout entier n a un nombre de facteurs premiers voisin de $\ln\ln n$. Ce résultat implique encore que le nombre total $d(n)$ des diviseurs de n a pour ordre normal $(\ln n)^{\log 2}$, et établit ainsi que la valeur moyenne

$$\sum_{n\leq x} d(n) \sim x\ln x \qquad (x \to +\infty)$$

est gouvernée par un petit nombre d'entiers "anormaux". Cela donne au lecteur une première idée des subtilités de l'abord probabiliste de l'arithmétique. Le chapitre se termine par un théorème d'Erdős fort suggestif, et qui a servi de base heuristique à de nombreuses démonstrations : si l'on ordonne les facteurs premiers d'un entier en une suite croissante, *alors le j-ième facteur a pour ordre normal $\exp\exp j$ dès que $j \to +\infty$. Bien entendu, ce résultat est énoncé sous une forme quantifiée parfaitement rigoureuse!*

Un des problèmes centraux de la théorie probabiliste des nombres est celui de la répartition des fonctions additives et multiplicatives (f est dite multiplicative si $f(1) = 1$ et si $f(mn) = f(m)f(n)$ dès que $(m,n) = 1$). Cette question est présentée au chapitre 4. Il est bien agréable de trouver, en quelques pages, les théorèmes d'Erdős–Wintner, Delange, Halász, Wirsing, accompagnés de commentaires pertinents concernant leurs statuts et intérêts respectifs. Il serait trop long de donner ici une description détaillée de ces résultats fondamentaux; nous nous contenterons d'indiquer que ces théorèmes ont pour objet de relier, pour une fonction multiplicative f de module au plus 1, la valeur moyenne

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n)$$

au comportement des sommes

$$\sum_{p\leq x} f(p)p^{-1}$$

ou plus généralement

$$\sum_{p\leq x} f(p)p^{-s} \qquad (\sigma \geq 1).$$

L'auteur a judicieusement porté l'accent sur un théorème de Montgomery, publié sous forme relativement confidentielle dans une série de prépublications, et qui fournit une version effective et simplifiée des résultats fondamentaux obtenus par Halász depuis la fin des années soixante. L'application (inédite) aux fonctions réelles — récemment améliorée et généralisée par Hall et Tenenbaum — vient à point pour illustrer le type de conséquences que l'on peut espérer tirer d'un tel outil général. Ce chapitre s'achève par le fameux théorème d'Erdős–Kac sur la nature gaussienne de la répartition de $\omega(n)$ autour de sa valeur moyenne. On obtient ici en quelques lignes la version d'Erdős–Rényi, avec terme d'erreur optimal, grâce aux théorèmes de Selberg–Delange et Berry–Esseen précédemment établis.

A la faveur de l'étude arithmétique des entiers sans grand ou sans petit facteur premier, les deux derniers chapitres fournissent à l'auteur l'occasion de présenter la féconde méthode du col qui a permis récemment de prouver de surprenants théorèmes. La version originale de cette technique déjà populaire parmi les spécialistes se trouve dans un article de Hildebrand et Tenenbaum paru en 1986. Les auteurs y évaluent avec une complète uniformité la quantité

$$\Psi(x,y) := |\{n \leq x : p|n \Rightarrow p \leq y\}|.$$

Cela représente un progrès considérable sur les estimations précédemment disponibles, reposant sur d'autres techniques également intéressantes — et dont G. Tenenbaum fournit aussi une présentation détaillée : méthode de Rankin, méthode géométrique, identité de Buchstab. Dans le cas de l'évaluation de $\Psi(x,y)$, l'idée de base de la méthode du col consiste à choisir optimalement l'abscisse d'intégration dans la formule de Perron et à appliquer ensuite la méthode de la phase stationnaire.

Le comportement asymptotique de $\Psi(x,y)$ est lié à la fonction de Dickman $\rho(u)$, solution continue de l'équation différentielle aux différences

$$u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0 \qquad (u > 1)$$

avec la condition initiale $\rho(u) = 1 \quad (0 \leq u \leq 1)$. Retrouvant une formule de de Bruijn et Alladi, Tenenbaum donne ici une estimation asymptotique de $\rho(u)$, qu'il obtient également par la méthode du col. Sa démonstration est directe et relativement simple; la même démarche a depuis été utilisée avec succès dans d'autres contextes.

La fonction duale de $\Psi(x, y)$, soit

$$\Phi(x, y) := |\{n \leq x : p|n \Rightarrow p > y\}|,$$

constitue un problème classique de crible. L'auteur nous en propose, dans son dernier chapitre, une étude inédite par la méthode du col. Cela représente le prototype d'une nouvelle classe d'applications, où la série de Dirichlet en cause possède des singularités. Les résultats obtenus sont les meilleurs actuellement connus et l'étude parallèle à celle de la fonction de Dickman fournit ici des renseignements très précis sur la vitesse de convergence de la fonction de Buchstab (une autre fonction classique issue de la théorie du crible) vers sa valeur limite.

Ainsi, tout en constituant le premier exposé pédagogique sur l'emploi spécifiquement arithmétique de la méthode du col, les deux derniers chapitres sont émaillés de résultats nouveaux — jusqu'aux exercices du chapitre 6, qui ébauchent une étude exhaustive de la distribution des facteurs premiers dans un intervalle.

Cette "introduction" n'est donc en rien une refonte d'exposés plus anciens, mais le fruit d'une démarche personnelle et souvent originale. Grâce à un style soigné et clair, les commentaires mûrement réfléchis atteignent parfaitement leur objectif d'éclairer les motivations et les limites des techniques présentées. La théorie analytique des nombres apparaît ainsi sous un jour très attrayant.

Gageons que cet ouvrage, dont la prochaine traduction en anglais élargira encore la notoriété, deviendra vite un classique, et servira aux jeunes chercheurs de tremplin vers l'étude plus technique des grandes méthodes actuelles de la théorie analytique des nombres comme le crible, la dispersion, la méthode du cercle, les sommes d'exponentielles.

Etienne FOUVRY
Université Paris-Sud

Optique physiologique

Hermann von Helmholtz

trad. française par E. Javal et N.Th. Klein de *Handbuch der physiologischen Optik*, 3 vols., Heidelberg, 1856, 1860 et 1867, Paris, V. Masson, 1867. Réédition J. Gabay, 1989.

Théorie physiologique de la musique, fondée sur l'étude des sensations auditives

Hermann von Helmholtz

trad. française par G. Guéroult, Paris, V. Masson, 1868. Réédition J. Gabay, 1990.

"Professor Helmholtz is an exceedingly interesting man. In the first place he began by studying physiology, dissecting the eye and the ear...; but he found it was impossible to study the proper action of the eye and the ear without studying also the nature of light and sound, which led him to the study of physics. He had already become one of the most accomplished physiologists of this century. He then found it was impossible to study physics without knowing mathematics... and he is now one of the most accomplished mathematicians of this century".[1]

Cette compulsion régressive que Clifford trouve si "extraordinairement intéressante" a permis de fait à Helmholtz de construire une œuvre encyclopédique, qui exerçait encore beaucoup d'influence avant la seconde guerre mondiale et l'effondrement de ce qu'avaient été les

---

(1) W.K.Clifford, *Seeing and Thinking*, Londres, Macmillan, 1879, 18; cité in R.Farwell et C.Knee, "The end of the absolute : a nineteenth-century contribution to general relativity", *Studies in the History and Philosophy of Science*, vol. 21, N.1, 1990, 91-121. Cet article montre comment la combinaison des idées de Helmholtz, de Riemann et de Clifford a créé dans le dernier tiers du XIXe siècle une conception nouvelle des rapports de l'espace et de la matière et donc le cadre dans lequel allait se développer la Relativité générale quarante ans plus tard.

universités et la science en Allemagne. Depuis quelques années, les historiens et les philosophes des sciences (surtout anglais et américains, d'ailleurs) l'ont redécouverte[(2)] *mais le moins qu'on puisse dire est qu'elle avait été frappée d'un oubli presque total pendant la période intermédiaire. Si la réédition par les Ed. J. Gabay des anciennes traductions françaises (faites au XIXe siècle) de l'Optique et de la Musique passait inaperçue, ce serait dommage, non seulement à cause de l'importance historique du contenu de ces deux livres, mais aussi à cause de ce qu'ils révèlent de certains traits de la science allemande du XIXe et du début du XXe siècle.*

Concrètement – sinon méthodiquement –, Helmholtz a toujours montré une égale obstination à se poser deux questions : celle de la signification générale de ses recherches et celle de savoir comment explorer le plus grand nombre de domaines nouveaux possibles. L'œuvre de Helmholtz est encyclopédique, mais ce n'est pas une encyclopédie par juxtaposition, collection d'articles, de livres ou de questions. C'est une œuvre dans laquelle on discerne à la fois un mouvement de contraction, de tension sur un souci philosophique, lié étroitement à la problématique de la "théorie critique de la connaissance" kantienne, et un mouvement d'ouverture vers des possibilités nouvelles, par transfert des problèmes ou circulation de leurs solutions. Si ce caractère paraît d'abord surprenant, c'est parce qu'on a perdu de vue le fait qu'il s'agissait d'un phénomène général chez les savants allemands de cette époque, dont on trouverait aussi les traces chez Gauss, Riemann ou Grassmann – ou, parmi les physiciens, chez Hertz, Boltzmann, Mach ou Planck. Le XIXe siècle est, particulièrement en Allemagne, une époque où les relations entre les différents domaines de connaissance étaient très intenses – situation qui persiste jusqu'aux années 1930.

Dès le début, le travail de Helmholtz est déterminé par un motif philosophique : il veut élaborer une théorie générale de la représentation qui permette de fonder sur des données exactes la description qu'avait donnée Kant des différentes sources de la connaissance dans l'entendement humain. "Ma seule intention était d'examiner les sources et le degré de légitimité de nos connaissances; c'est une tâche qui appartiendra toujours en propre à la philosophie, mais qu'aucune région du savoir ne peut ignorer impunément".[(3)] *Il travaille donc avec Johannes Müller à construire une physiologie de la perception qui permettrait d'introduire le point de vue de l'"Esthétique transcendantale"*[(4)] *dans les* ***Naturwissenschaften****; comme il le dira plus tard, Helmholtz considère en effet le problème fondamental des sciences de la nature comme étant "la question même de la théorie de la connaissance : en quel sens nos représentations correspondent-elles à une réalité effective?"*[(5)] *En chemin, voulant unifier physique et physiologie, Helmholtz écrit en 1847 le mémoire* *Über die Erhaltung der Kraft* *("Sur la conservation de la force") où il donne ce qui est considéré*

[(2)] L'influence scientifique directe de Helmholtz ne s'étend guère au-delà de 1900 environ, mais son influence épistémologique est encore évidente vers 1920-30, à la fois en physique (notamment pour son analyse des représentations discontinues) et en mathématiques (pour son travail sur les géométries non-euclidiennes et sur l'origine des axiomes de la géométrie ordinaire). L'œuvre de Helmholtz a suscité depuis quelques années un nombre croissant de publications, surtout chez les historiens des sciences qui s'occupent des rapports entre la physique anglaise et allemande au XIXe siècle et chez les philosophes des sciences qui s'intéressent à l'origine des idées dEinstein en relativité générale. On trouvera une description de certains de ces travaux dans la Chronique de la Lettre 2 de l'*Association Henri Poincaré* (IHP). Il faudrait y ajouter, au moins, les pages consacrés à Helmholtz par R. Toretti, *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré* (Dordrecht, Reidel, 1978); et J. Largeault, *Philosophie de la nature 1984* (Université Paris XII, 1984) et *Principes classiques d'interprétation de la nature* (Paris, Vrin, 1988). Sur la transformation que Helmholtz fait subir à la notion très spécifique d'*Erkenntnistheorie* (théorie de la connaissance), on peut se reporter à l'entrée "Epistémologie' du glossaire dans N. Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, Paris, Gallimard, coll. Folio, 1991.

[(3)] H. von Helmholtz, *Populäre wissenschaftliche Vorträge*, Brunswick, 1903, vol.I, 88.

[(4)] L'Esthétique transcendantale, qui est la première partie du premier livre de la *Critique de la raison pure*, désigne chez Kant la "science de tous les principes de la sensibilité *a priori*, en référence au sens grec de l'*Aisthèsis* et non au sens moderne de la "critique du goût". C'est la théorie de l'espace et du temps, en tant qu'ils sont les formes pures de toutes nos représentations d'objets.

[(5)] H. von Helmholtz, "Die Tatsachen in der Wahrnehmung" (1878), rééd. in Helmholtz, *Schriften zur Erkenntnistheorie*, P. Hertz et M. Schlick (éds.), Berlin, Springer, 1921 (ici : 115). Trad. anglaise in Helmholtz, *Epistemological Writings*, Y. Elkana et R. S. Cohen (éds.), Dordrecht, Reidel, 1977.

comme la première formulation rigoureuse du principe de conservation de l'énergie. L'ambition de développer systématiquement l'"exposé théorique de Kant sur la nature du pouvoir de connaître humain" (Optique physiologique,...) pouvait sembler atteinte avec la publication des cinq volumes de l'Optique et de la Musique, qui achèvent de donner à Helmholtz un prestige équivalent – s'il faut en croire le témoignage de W. Thomson – à celui de Newton lui-même. Mais Helmholtz s'aperçoit, comme le remarque Clifford, que sa théorie de la perception le conduit à examiner non seulement l'état des théories optiques et acoustiques, mais aussi le problème des fondements de la géométrie euclidienne. Il publie donc en 1868, un an après la parution du troisième volume de l'Optique, un article intitulé Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen (Sur les états de choses qui sont au fondement de la géométrie),[6] dans lequel il expose à la fois les idées de Riemann (1854) et les siennes propres et qu'il complète en 1870 par un second article, Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome (Sur l'origine et la signification des axiomes de la géométrie; voir plus loin). L'orientation philosophique de Helmholtz change alors légèrement de trajectoire : ces recherches le forcent en effet à proposer de modifier la théorie kantienne de l'espace et de redéfinir quelques termes canoniques comme ceux d'Anschauung (intuition)[7] et de Vorstellung (représentation). Puis, après ce détour – et si l'on omet les contributions que fait aussi Helmholtz à la médecine, à la fabrication d'instruments, à la théorie de la peinture ou au commentaire de Goethe – Helmholtz revient à la physique. Nommé à la chaire de physique théorique de Berlin en 1871 (où il est ensuite rejoint par Kirchhoff), il y fonde l'Institut qui donnera à Berlin sa prééminence absolue sur la physique allemande au moins jusqu'à la première guerre mondiale et ses recherches portent sur l'unification des théories électrodynamiques, l'introduction des idées de Faraday et de Maxwell en Allemagne, la thermodynamique (ses cours seront édités par Planck en 1902) et les fondements de la mécanique théorique. Pour reprendre les termes de R. McCormmach et de C. Jungnickel : "dans les années 1870 et 1880, le physicien le plus influent pour le développement de la physique théorique en Allemagne était Helmholtz"[8]

Finalement, en 1878, Helmholtz propose une synthèse de ce qu'il considère comme sa contribution à la transformation de la théorie kantienne de la connaissance. La conférence Die Tatsachen in der Wahrnehmung (Les états de choses dans la perception) expose ainsi une théorie du signe, de la "légalité" (Gesetzlichkeit) de la nature et des rapports de la physique et de l'art qu'on retrouve ensuite chez Ernst Cassirer, avec l'idée d'une "correspondance fonctionnelle de structure à structure"[9] et celle que "nous ne pouvons accéder à la catégorie de chose qu'en passant par la catégorie de relation".

Cette tension sur une question d'origine philosophique est un mouvement vers l'intérieur, par lequel Helmholtz interprète chaque nouveau savoir dans ses concepts fondamentaux et du point de vue de sa signification pour la manière dont l'entendement humain connaît. L'autre mouvement qu'on peut discerner dans son œuvre semble d'abord être un pur mouvement désordonné, une sorte de déplacement permanent des problèmes et de leurs solutions. Par exemple : de la physiologie de la chaleur animale et des principes de la métaphysique kantienne de la nature, au principe de conservation de l'énergie; de l'analyse des processus d'apprentissage (par l'enfant) des relations spatiales entre les objets ou des mécanismes de la langue, à l'invention de la notion d'"inférences inconscientes" et de "vestiges de la

---

(6) C'est une conférence de 1868. Elle est publiée dans les *Populäre wissenschaftliche Vorträge* en 1876 (Brunswick, Vieweg) et rééditée en 1921 dans *Schriften zur Erkenntnistheorie* (voir note précédente).

(7) *Anschauung* est un concept kantien, traduit en français par Intuition, qui suppose la possibilité d'une représentation du phénomène dans l'espace et le temps. Les traducteurs de l'Optique, dont le texte est réédité par J. Gabay, font le choix discutable de Notion pour traduire *Anschauung*.

(8) R. McCommach et C. Jungnickel, *IntellectualMastery of Nature : Theoretical physics from Ohm to Einstein*, 2 vols., Chicago, Chicago University Press, 1986, I, 18.

(9) E. Cassirer, *Substance et Fonction* (1910), Paris, Minuit, 1977, 344 et 346. Dans *The Problem of Knowledge*, publié en 1954, Cassirer cite beaucoup Helmholtz, qu'il crédite d'avoir forgé "un nouveau genre de lien entre science et philosophie".

mémoire" (qui influenceront Freud); de l'étude de la propagation de l'influx nerveux chez les grenouilles et de l'action physiologique des décharges de condensateurs, à celle des courants ouverts en électrodynamique; des problèmes de la vision binoculaire, à la théorie de la peinture, etc. Mais la fécondité de cette méthode du désordre est évidente. Le cas de transfert de problèmes le plus intéressant est probablement celui qui conduit Helmholtz de l'optique physiologique et de la théorie kantienne de l'espace à la question des géométries non-euclidiennes et à la redécouverte indépendante des idées exposées dans le mémoire de Riemann de 1854.[10] *"Mes recherches sur les intuitions spatiales dans le champ visuel – écrit Helmholtz au début de l'article de 1868 – m'ont incité à entreprendre d'explorer la question de l'origine et de la nature essentielle de nos intuitions générales de l'espace". La question qu'il se pose est de déterminer quelles sont les propositions de la géométrie qui ont "une signification valide objective", c'est-à-dire qui correspondent à l'espace physique réel de nos perceptions. Si des difficultés se présentent, c'est précisément parce que l'étude des perception visuelles donne au moins deux exemples de "multiplicités" (Mannifaltigkeiten) qui ne rentrent pas dans le cadre des axiomes de la géométrie euclidienne : le système des couleurs et l'estimation du champ visuel.*[11] *Dans les deux cas, précise Helmholtz, on observe des différences fondamentales avec "le système métrique de la géométrie", ce qui incite à se demander ce qui distingue spécifiquement les propriétés de l'espace physique : quelle est la géométrie qui décrit le mieux l'espace où nous sommes? Helmholtz développe alors, sans avoir connaissance du travail de Riemann, le concept abstrait de variété à n dimensions (de "multiplicité n fois étendue" : Mannifaltigkeitals n-fach ausgedehnt) et il aboutit à des résultats pratiquement identiques à ceux de Riemann. Mais il y a entre eux une différence d'approche qui est intéressante parce qu'elle est liée directement à la question initiale de Helmholtz.*[12] *La différence consiste dans le fait qu'au lieu d'admettre, comme Riemann, que l'élément linéaire (la distance) ds^2 est une fonction homogène du second degré des différentielles des coordonnées, Helmholtz dérive cette hypothèse de quatre postulats "expérimentaux" de congruence et de translation qui concernent la "libre mobilité des corps rigides" : "mon point de départ a été que la mesure primitive de l'espace est entièrement fondée sur l'observation de la congruence (...). Mais on ne peut parler de congruence que si des corps rigides ou des systèmes de points peuvent être déplacés les uns par rapport aux autres sans changer de forme et si la congruence de deux grandeurs spatiales est un fait dont l'existence est indépendante de tous les mouvements. J'ai donc présupposé dès le début que nous pouvions mesurer l'espace au moyen de notre vérification de la congruence et je me suis donné la tâche de chercher la forme analytique la plus générale d'une varitété à n dimensions dans laquelle les mouvements du genre requis sont possibles".*[13] *La différence d'approche entre Riemann et Helmholtz semble donc tenir surtout*

---

(10) Sur le plan mathématique, le travail de Helmholtz sera complété notamment par Klein et Lie et sur le plan physique Clifford surtout développera l'idée de l'interaction entre espace et matière, qu'il trouvait beaucoup plus nettement exprimée chez Helmholtz qu'elle ne l'était chez Riemann; sur le plan philosophique, c'est Moritz Schlick – qui avait réédité et annoté en 1921, avec Paul Hertz, les *Ecrits sur la théorie de la connaissance* – qui a probablement le plus contribué à transmettre les problèmes épistémologiques associés à toute réflexion post-kantienne sur la structure de l'espace. Beaucoup de travaux récents sur ces questions ont été faits sous l'impulsion d'Adolf Grünbaum.

(11) Helmholtz donne un exposé synthétique des résultats de l'Optique physiologique dans son article *Die neueren Fortschritte in der Theorie des Sehens*, publié in *Populäre wissenschaftliche Vorträge*, 1876; trad. anglaise in *Selected writings of Hermann von Helmholtz*, R. Kahl (éd), Middletown, Conn., 1971. Sur les problèmes associés au champ visuel, voir *Optique physiologique*, t. II, 705 sq.

(12) Le contenu de l'article de 1868 a été adapté par Helmholtz aux circonstances particulières de sa publication : c'est une fois ses recherches achevées que Helmholtz apprend que Riemann était parvenu à des résultats identiques (Riemann était mort en 1866 et le mémoire de 1854 est publié en 1868). Il modifie donc la présentation de ses propres idées de manière à rendre pleinement justice à la priorité de Riemann et à mettre aussi spécifiquement en valeur la différence d'argumentation qui existe entre eux. Les idées de Riemann doivent en grande partie leur diffusion à l'attitude de Helmholtz.

(13) Helmholtz [1868], introduction. Les quatre hypothèses fondamentales sont : 1. la définition d'une multiplicité n fois étendue. 2. l'existence de corps mobiles mais rigides et leur définition (entre les coordonnées de deux points quelconques dun corps rigide, il doit exister une équation exprimant une relation constante entre ces deux

au point de départ très spécifique adopté par le second : isoler les faits purement empiriques à l'origine de notre construction des relations spatiales, de la constitution kinesthétique de la notion d'espace. Cette différence se lit d'ailleurs dans la différence des titres : en choisissant un titre presque semblable à celui de Riemann, Über die Tatsachen, die der Geometrie zugrunde liegen au lieu de Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Gründe liegen, Helmholtz lui rend hommage en même temps qu'il marque la transformation des "hypothèses" en "états de choses". Cela dit, il n'y a probablement pas là davantage qu'une nuance et l'indication d'un ordre d'exposition inversé. Helmholtz et Riemann en effet semblent avoir pensé tous les deux que, si la spatialité en général reste une condition transcendantale de la perception, les axiomes de la géométrie euclidienne ne peuvent avoir aucune fonction transcendantale et ne sont pas des jugements synthétiques a priori, mais des propositions empiriques.(14)

Catherine CHEVALLEY
C.N.R.S.

points). 3. l'existence d'une libre mobilité complète de ces corps rigides. 4. l'idée que deux corps congruents restent congruents après que l'un deux ait effectué une rotation complète autour d'un axe quelconque.

(14) Les deux questions doivent être distinguées : voir Helmholtz, *Schriften zur Erkenntnistheorie*, op. cit., 121-122. D'ailleurs Helmholtz applique une méthode de raisonnement strictement kantienne à sa critique de Kant : l'existence des géométries de Lobatchevsky, Bolyai et Riemann est un *fait de l'entendement*. Transféré de la physiologie à la géométrie, le problème de la nature de l'espace physique finit donc, notamment chez Helmholtz, son voyage dans la philosophie. L'idée que l'espace euclidien n'est pas le seul qui puisse être visualisé, qui puisse avoir une *Anschaulichkeit*, conduit par exemple Helmholtz à redéfinir le concept d'*Anschauung* en rapport avec la notion d'apprentissage : la seule condition du caractère intuitif d'une théorie sera que les impressions des sens qui correspondent à un mode d'observation, quel qu'il soit, soient spécifiées de manière déterminée (*bestimmt*) et sans ambiguïté (*Unzweideutigkeit*), sans nécessairement que la représentation pénètre la conscience en même temps que l'impression sensible, dans l'absence de délibération et d'effort antérieurement associée au concept d'*Anschaulichkeit*. A la genèse empirique de la spatialité tri-dimensionnelle correspondra donc une "intuitivité" de plein droit des géométries non-euclidiennes. Helmholtz fixe ici une transformation du vocabulaire dont on trouvera les traces directes chez les fondateurs de la mécanique quantique.

Une encyclopédie orientée, avec une "libre mobilité" des problèmes : comme le disait, encore, Clifford, l'œuvre de Helmholtz est "a sort of Clapham Junction of all the sciences in regard to the number of trains of thought which converge at this point".

RECOUVREMENTS ALÉATOIRES

Jean-Pierre KAHANE (Université Paris-Sud, Orsay)

Quelle est la probabilité pour que des objets aléatoires recouvrent un objet donné ? C'est un sujet qui a une longue histoire, et qui n'avance pas très vite. Je saisis volontiers l'occasion que me donne la Gazette de raconter ce que j'en sais, parce que l'histoire en est intéressante, et que les problèmes en suspens méritent d'être connus.

De Borel à Dvoretzky

L'histoire remonte à Emile Borel. Dans les années 1890, le prolongement analytique des fonctions données par une série de Taylor était à l'ordre du jour. En 1892, Poincaré et Hadamard avaient découvert des êtres étranges : des séries de Taylor non prolongeables hors du cercle de convergence. Juste après sa thèse (1895), Borel publie une note aux Comptes-Rendus (1896) et un article dans Acta Mathematica (1897) avec un énoncé provocateur : *en général, une série de Taylor admet son cercle de convergence comme coupure*. Il faut entendre par là que, si les modules des coefficients sont donnés et que les arguments sont des variables aléatoires indépendantes équidistribuées sur $(0, 2\pi)$, la probabilité d'avoir un point régulier sur le cercle de convergence est nulle. Sous cette forme, l'énoncé et la démonstration sont dus à Steinhaus (1929). Borel attribuait une grande importance à son résultat. Comme il le dit dans sa Notice de 1912, *la difficulté principale était d'en préciser le sens avant d'en donner la démonstration*. En vérité, *préciser le sens* a été une oeuvre de longue haleine, et ce n'est pas étonnant parce que l'énoncé implique des concepts fondamentaux (la probabilité nulle, l'indépendance) qui étaient encore loin de toute formalisation. Les principales étapes, avant Kolmogorov 1933, en ont été *les probabilités dénombrables* de Borel, et la réduction de la probabilité à la mesure de Lebesgue par Steinhaus. Par contre, *donner la démonstration*, en se fiant à l'intuition pour les concepts fondamentaux, était à la portée de Borel dès 1897. La démonstration de Borel consiste à partager la série en blocs de termes consécutifs, et à associer à chaque bloc un intervalle (aléatoire) du cercle de convergence. Ensuite, je cite, *on a donc sur un cercle une infinité d'arcs indépendants, dont la somme dépasse tout nombre donné, donc, en général, tout point du cercle appartiendra à une infinité d'arcs*. Et de là résulte que tout point du cercle est singulier.

Répétons l'argument de Borel. On a sur le cercle (disons maintenant le cercle $\mathbf{T}$, de longueur 1) des arcs $I_n(\omega)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ dont les longueurs ℓ_n sont données, et dont les centres ω_n sont aléatoires, indépendants, uniformément distribués sur $\mathbf{T}$. Ainsi la probabilité qu'un point donné du cercle appartienne à $I_n(\omega)$ est ℓ_n. Si $\sum \ell_n = \infty$, ce point appartient presque sûrement à $\overline{\lim}\, I_n(\omega)$ (Borel-Cantelli). On voit que Borel-Cantelli est utilisé (et de plus parfaitement énoncé pour sa partie non évidente, sur un cas particulier équivalent au cas général) par Borel dès 1897.

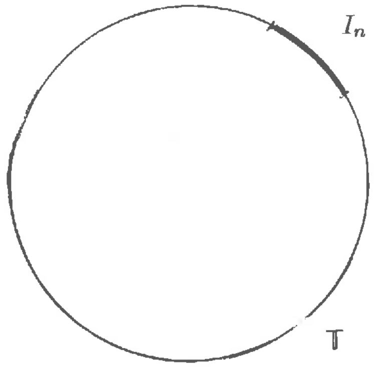
Poursuivons. Supposons toujours $\sum \ell_n = \infty$; alors

$$\forall t \in \mathbf{T} \qquad \text{p. s. } t \in \overline{\lim}\, I_n(\omega).$$

Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur T et par P la probabilité sur Ω, et appliquons Fubini. L'ensemble des $(t, \omega) \in \mathbf{T} \times \Omega$ pour lesquels $t \in \overline{\lim}\, I_n(\omega)$ est de mesure pleine pour la mesure $\lambda \otimes P$. Par conséquent

$$\text{p. s.} \quad \lambda(\overline{\lim}\, I_n(\omega)) = 1.$$

Presque sûrement presque tout le cercle est recouvert.



A quelle condition supplémentaire, portant sur la suite ℓ_n, a-t-on

$$\text{p. s.} \quad \overline{\lim}\, I_n(\omega) = \mathbf{T} \ ?$$

On dit alors qu'il y a recouvrement presque sûr de T par les $I_n(\omega)$ (il est facile de voir que le recouvrement presque sûr et le recouvrement presque sûr par une infinité de $I_n(\omega)$ sont équivalents). La suite ℓ_n étant donnée, ne vérifiant pas cette condition supplémentaire, peut-on déterminer quelles parties A de T sont recouvertes presque sûrement :

$$\text{p. s.} \quad A \subset \overline{\lim}\, I_n(\omega) \ ?$$

La première question est posée par A. Dvoretzky en 1957. La seconde est abordée dans la première édition de mon livre *Some random series of functions* (1968), en vue de la détermination de la dimension de Hausdorff de l'ensemble aléatoire

$$F = \mathbf{T} \backslash \overline{\lim}\, I_n(\omega).$$

De Dvoretzky à Shepp

La question de Dvoretzky intéressa Paul Lévy, qui me la communiqua. Ma première contribution fut d'observer qu'il y a recouvrement quand $\ell_n = \frac{1+\epsilon}{n}$ ($\epsilon > 0$, $n \geq n_0$), et que la condition de recouvrement n'est pas stable par changement de (ℓ_n) en $(\lambda\ell_n)$ ($\lambda < 1$ fixe) (1959). Ensuite Pierre Billard introduisit une méthode, dont je dirai un mot tout à l'heure, qui permet de montrer le non recouvrement pour $\ell_n = \frac{1-\epsilon}{n}$ (1965). Le cas $\ell_n = \frac{1}{n}$ restait en suspens. P. Erdös avait annoncé que c'est un cas de recouvrement (1961), mais n'avait pas donné de preuve. Billard fut seulement capable de prouver que, dans ce cas, l'ensemble non recouvert est au plus dénombrable (le lecteur comprend bien que je sous-entends désormais *presque sûrement)*.

Voici la situation telle qu'elle était connue en 1968. Prenons d'abord $\ell_n = \frac{a}{n}$. T est recouvert si $a > 1$, non recouvert si $a < 1$. Lorsque $a < 1$, l'ensemble non recouvert a pour dimension $1 - a$. Une partie donnée A de T est recouverte si $\dim A < a$, et non recouverte si $\dim A > a$. Le cas $\ell_n = \frac{1}{n}$ est ouvert, et le cas $\dim A = a$ nécessite une investigation plus poussée.

La méthode de Billard est le premier modèle d'une théorie qui s'est ensuite développée dans diverses directions, celle des produits de poids aléatoires indépendants. Ici les poids sont

$$P_n(t,\omega) = \frac{1 - \chi_n(t-\omega_n)}{1-\ell_n}$$

où $\chi_n(t-\omega_n)$ est la fonction indicatrice de $I_n(\omega)$. Les produits

$$Q_n(t,\omega) = \prod_{m=1}^{n} P_m(t,\omega)$$

forment une martingale positive pour chaque t fixé, et il en est de même pour les intégrales

$$J_n(\omega) = \int_{\mathrm{T}} Q_n(t,\omega)dt.$$

Si les $I_n(\omega)$ recouvrent T, $J_n(\omega)$ est nulle à partir d'un certain rang : la martingale est dégénérée. Si au contraire la martingale est uniformément intégrable dans $L^1(\Omega)$, elle n'est pas dégénérée, donc les $I_n(\omega)$ ne recouvrent pas T. Une condition simple d'intégralité uniforme est que les $J_n(\omega)$ soient bornées dans $L^2(\Omega)$, soit

$$EJ_n^2(\cdot) = \int\int_{\mathrm{T}^2} E(Q_n(t,\cdot)Q_n(s,\cdot))dt\,ds = O(1),$$

c'est-à-dire, en posant

$$k_n(t-s) = E(Q_n(t,\cdot)Q_n(s,\cdot)),$$

$$\int_{\mathrm{T}} k_n(t)dt = O(1).$$

Cette condition s'écrit encore

$$k \in L^1(\mathbf{T})$$

avec

$$k(t) = \exp \sum_1^\infty (\ell_n - |\, t\,|)^+, \qquad -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}$$

(par exemple, si $\ell_n = \frac{a}{n}$, $k(t) \approx |\, t\,|^{-a}$). Billard en donne une forme affaiblie plus lisible : pour que T ne soit pas recouvert (au sens $\mathbf{T} \neq \overline{\lim}\, I_n(\omega)$), il suffit que la série

$$(B) \qquad \sum_1^\infty \ell_n^2 \exp(\ell_1 + \ell_2 + \cdots \ell_n)$$

converge (on suppose ici, et désormais, $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ell_3 \geq \cdots$).

La méthode est flexible. S'il s'agit de recouvrir un borélien A au lieu de T, on prend une mesure positive σ portée par A, et on considère la martingale

$$J_n(\omega; \sigma) = \int_{\mathbf{T}} Q_n(t, \omega) d\sigma(t).$$

La condition qu'elle soit bornée dans $L^2(\Omega)$ s'écrit maintenant

$$\int\int_{\mathbf{T}^2} k(t-s) d\sigma(t) d\sigma(s) < \infty,$$

ce qu'on exprime en disant que l'énergie de σ par rapport au noyau $k(\cdot)$ est finie. Or, la condition pour que A porte une telle mesure, de k-énergie finie (et non nulle, bien sûr), est que la capacité de A par rapport à $k(\cdot)$ soit positive :

$$\mathrm{Cap}_k A > 0.$$

Tout cela, avec l'application à une formule explicite pour la dimension de l'ensemble non recouvert, se trouve dans mon livre de 1968 (sauf que le terme de martingale n'est pas utilisé). Nous étions alors loin de penser que les conditions obtenues par la méthode de Billard étaient nécessaires et suffisantes.

Le livre attira l'attention sur le sujet, et en particulier sur le cas en suspens : $\ell_n = \frac{1}{n}$. En 1971, ce cas fut traité par Steven Orey et, indépendamment, par Benoît Mandelbrot : il y a recouvrement, comme Erdös l'avait prévu. L'étude d'Orey ne fut jamais publiée, parce que, quelques semaines après qu'il l'ait faite, Lawrence Shepp obtint la solution complète : T est recouvert si la série

$$(S) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_n)$$

diverge, et n'est pas recouvert si elle converge. En fait, la convergence de la série (S) équivaut à

$$k \in L^1(\mathbb{T}),$$

que la méthode de Billard nous a fait voir comme condition suffisante de non recouvrement. La convergence de (B) entraîne celle de (S), mais ne lui est pas équivalente - l'écart n'est pas bien grand, puisque les deux séries sont simultanément convergentes ou divergentes lorsque $\inf(n\ell_n) > 0$. La partie difficile et nouvelle, dans le théorème de Shepp - outre l'introduction élégante de la série (S) - est de montrer qu'il y a recouvrement lorsque $k \notin L^1$.

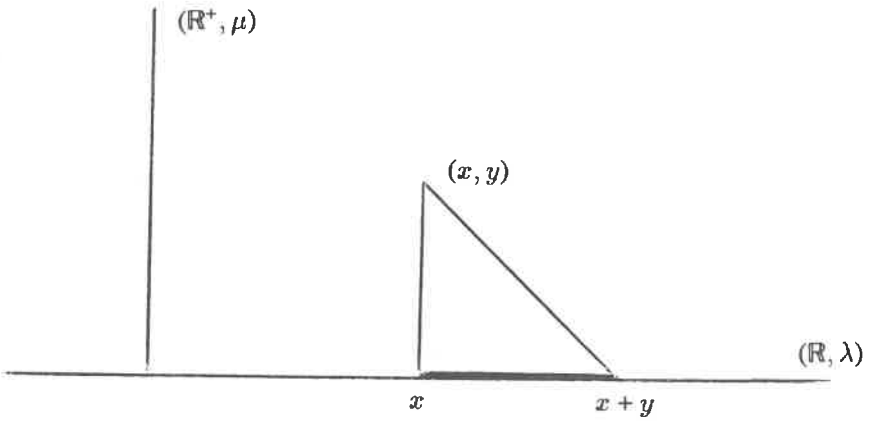
Avant de s'occuper du recouvrement à la Dvoretzky, B. Mandelbrot avait introduit, toujours en 1972, un autre type de *random cutouts,* sur la droite cette fois. On donne (au lieu des longueurs ℓ_n) une mesure μ localement bornée sur $(0, \infty)$, mais, dans les cas intéressants, non bornée au voisinage de 0 (on peut penser à $\mu = \sum \delta_{\ell_n}$). On considère le processus de Poisson ponctuel dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ dont l'intensité est $\lambda \otimes \mu$ (λ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$). A chaque point (x, y) de ce processus ponctuel on associe l'intervalle $(x, x + y)$, et on demande à quelle condition sur μ la droite $\mathbb{R}$ est recouvert p. s. par ces intervalles. La réponse, toujours due à Shepp (1972), s'exprime sous la forme

$$k \notin L^1(e^{-t}dt),$$

avec maintenant

$$k(t) = \exp \int_t^\infty \mu(y, \infty)dy.$$

Il est clair qu'il y a un rapport entre les deux questions. Néanmoins, ce n'est qu'en 1987, à l'occasion d'un cours que j'ai donné à Urbana, que le premier théorème de Shepp est apparu comme conséquence du second. Je dirai tout à l'heure comment le second se démontre facilement, à l'aide d'une méthode de temps d'arrêt, due à Svante Janson (1983), que j'ai beaucoup exploitée dans mon cours d'Urbana et ensuite.



Thème et variations

Revenons à 1973. Les théorèmes de Shepp ont rendu le sujet relativement populaire. Mario Wschebor, alors mon élève, étudie le recouvrement du cercle par des ensembles translatés au hasard, et la question analogue pour la droite et les processus de Poisson; essentiellement, le résultat exprime que, parmi les ensembles E_n dont les mesures de Lebesgue ℓ_n sont données, ceux qui recouvrent le mieux sont les intervalles de longueurs ℓ_n (le résultat est intuitif, si l'on songe au cas des parfaits totalement discontinus, dont la réunion ne recouvre jamais le cercle). John Hawkes s'intéresse au recouvrement d'une partie A de T par les intervalles I_n, et aux propriétés de l'ensemble non recouvert F - par exemple, dans le cas $\ell_n = \frac{a}{n}$, $0 < a < 1$, F est p. s. un ensemble $\mathcal{D}_\sigma$ mais pas un ensemble $\mathcal{D}$, en désignant par $\mathcal{D}$ la classe des ensembles dont la dimension d'entropie et la dimension de Hausdorff sont égales. Jorgen Hoffmann-Jørgensen élargit le cadre, en considérant le recouvrement d'un compact métrique par des boules aléatoires; c'est en effet le cadre naturel pour la plupart des applications.

Un peu plus tard, en 1978, Youssef El Hélou étudie le recouvrement de T^d par des convexes homothétiques aléatoires : la forme des convexes et la suite de leurs volumes v_n sont données; les translations sont aléatoires, indépendantes, distribuées selon la mesure de Haar sur T^d. El Hélou généralise les résultats de Billard et les miens :

1) il n'y a pas recouvrement lorsque

$$\sum v_n^2 \exp(v_1 + \cdots + v_n) < \infty.$$

2) si $v_n = \frac{a}{n}$ avec $a < 1$, une partie donnée A de T^d, borélienne, est recouverte si $\dim A < ad$, et non recouverte si $\dim A > ad$; l'ensemble non recouvert a pour dimension $(1-a)d$.

3) si $v_n = \frac{1}{n}$, l'ensemble non recouvert est au plus dénombrable.

Le théorème de Shepp sur le recouvrement de T et les résultats de El Hélou (généralisés pour des convexes non nécessairement homothétiques) se trouvent dans la seconde édition de *Some random series of functions* (1985).

Avant de passer à la suite, je voudrais montrer comment un problème de recouvrement aléatoire de $\mathbb{R}^+$ se présente très naturellement dans l'étude fine du mouvement brownien linéaire $B(t,\omega)$. On désire montrer qu'il existe p. s. des points de ralentissement, ou points lents, tels que

$$B(t+h,\omega) - B(t,\omega) = O(\sqrt{|\, h\,|}) \qquad (h \to 0),$$

alors qu'aux points ordinaires (presque partout) la loi du logarithme itéré dit qu'on a

$$B(t+h,\omega) - B(t,\omega) > \sqrt{|\, h\,| \log\log \frac{1}{|\, h\,|}}$$

pour une infinité de valeurs de h tendant vers 0. Pour cela, cherchons à montrer un peu plus, c'est-à-dire l'existence de points t tels que

$$\begin{cases} B(t,\omega) = 0 \\ B^2(t+h,\omega) \leq \lambda \mid h \mid \quad \text{pour tout } h \end{cases}$$

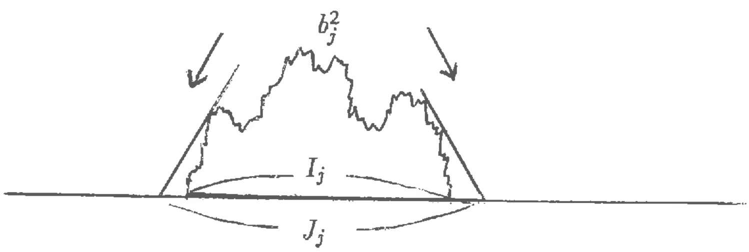
λ étant une constante positive à déterminer. Ici intervient une construction de Paul Lévy : pour obtenir $B(\cdot,\omega)$, on peut d'abord mettre en place l'ensemble E des zéros, qui est un ensemble aléatoire assez bien connu, de dimension $\frac{1}{2}$, puis, sur chacun des intervalles $I_j = (a_j, a_j + \ell_j)$ contigüs à E, placer, indépendamment les unes des autres, des "excursions" $b_j(\cdot,\omega)$, dont la loi est également bien connue. Sur E, on prend $B(\cdot,\omega) = 0$, et sur I_j, $B(\cdot,\omega) = b_j(\cdot,\omega)$. Les points t cherchés sont donc les $t \in E$ tels que, pour tout j,

$$b_j^2(t+h,\omega) \leq \lambda \mid h \mid .$$

Cette dernière inégalité signifie que t n'appartient pas à l'ombre du graphe de $b_j^2(\cdot)$ quand on l'éclaire par des rayons de pentes $\pm\lambda$, et cette ombre est un agrandissement de I_j de la forme

$$J_j = (a_j - \ell_j U_j, a_j + \ell_j + \ell_j V_j),$$

où les couples (U_j, V_j) sont des couples indépendants ayant tous la même loi, ne dépendant que de λ. On pressent, et on peut démontrer, que les J_j recouvrent $\mathbb{R}^+$ quand λ est petit, et ne le recouvrent pas quand λ est grand. On a une bonne idée de la question en remplaçant E par l'ensemble de Cantor $\left\{\sum_{n\in\mathbf{Z}} \epsilon_n 4^{-n} \; ; \; \epsilon_n = 0 \text{ ou } 1\right\}$ et $b_j^2(\cdot)$ par les fonctions "triangles", de pentes ± 1, portées par les intervalles contigüs; dans ce cas, la valeur critique de λ est $\frac{5}{6}$; pour $\lambda > \frac{5}{6}$, le point $t = \frac{4}{5}$ n'est pas dans l'ombre, et pour $\lambda < \frac{5}{6}$ tout $\mathbb{R}^+$ est dans l'ombre.

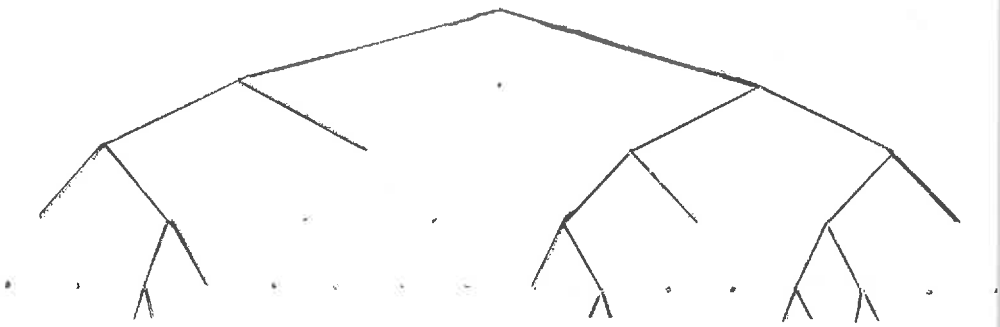


D'ailleurs, il n'existe pas de points t tels que

$$(*) \qquad B(t+h,\omega) - B(t,\omega) = o(\sqrt{\mid h \mid}) \qquad (h \to 0) \; ;$$

c'est la forme forte du théorème de non-dérivabilité donnée par Dvoretzky, et c'est encore une affaire de recouvrement aléatoire. Ici le principe est d'associer à tout intervalle dyadique $I_{j,n} = [\frac{n}{2^j}, \frac{n+1}{2^j}]$ ($j = 0, 1, \cdots$; $n = 0, 1, \cdots 2^j - 1$) l'écart $X_{j,n}$ entre la valeur de $B(\cdot, \omega)$ en son milieu et la moyenne de ses valeurs aux extrémités. Les variables aléatoires $X_{j,n}$ sont gaussiennes centrées, de variances 2^{-j-2}, et indépendantes. Ainsi, pour un λ donné, les évènements $X_{j,n}^2 > \lambda 2^{-j}$ sont indépendants et de même probabilité $p = p(\lambda)$. Appelons blancs les intervalles $I_{j,n}$ correspondants, et noirs les autres. S'il existait un point t vérifiant (*), les $I_{j,n}$ contenant t seraient tous blancs à partir d'un certain rang $j_0(\omega)$, donc les $I_{j,n}$ noirs ne recouvriraient pas l'intervalle $[0, 1]$ une infinité de fois. Or on reconnaît un processus de naissance et de mort, où la valeur critique est $p = \frac{1}{2}$: pour $p \leq \frac{1}{2}$, il ne reste aucun point blanc. Donc il n'existe pas de t vérifiant (*).

Cette preuve est l'occasion de voir les processus de naissance et de mort comme des problèmes de recouvrement. Il en est de même pour la percolation. Dans le cas $p < \frac{1}{2}$, il est commode de se représenter l'évolution des $I_{j,n}$ blancs et noirs sous la forme d'un arbre binaire dont on blanchit ou noircit les arêtes, en convenant qu'une arête noire tue toute sa descendance, donc une partie de la frontière. Le problème est de savoir quelles sont les parties de la frontière qui sont tuées p. s.; il est traité dans la thèse de Fan Ai Hua (1989).



Il y a bien d'autres aspects des problèmes de recouvrement. Ils semblent pertinents pour analyser les cratères de la lune, la vision à travers les galaxies, les interruptions de trafic routier ou la saturation des lignes téléphoniques. Au cours des années 1980 ils ont donné lieu à un grand nombre de travaux, que je ne m'efforcerai pas de résumer. Le lecteur intéressé peut consulter les livres de Mandelbrot (1985) et de Hall (1988).

Je me bornerai à signaler deux articles de Svante Janson (1983,1985). Le premier introduit la méthode de temps d'arrêt que j'appliquerai tout à l'heure à la démonstration du théorème de Shepp. Le second considère la question du recouvrement de T^d par des translatés aléatoires $K + \omega_n$ d'un convexe K ; très curieusement, la loi du nombre minimum de translatés $K + \omega_1$,

$K + \omega_2, \cdots K + \omega_n$ dont la réunion recouvre T^d dépend non seulement du volume de K, qui donne le terme principal, mais de sa forme : pour $d \geq 3$, les boules couvrent mieux que les cubes!

Actualité

J'en viens à l'état actuel de la question, tel du moins que je le connais.

Voici le cadre général. On donne un espace de probabilité, des objets aléatoires indépendants $G_n(\omega)$, et un objet fixe A, et on cherche la probabilité pour que A soit recouvert une infinité de fois par les $G_n(\omega)$. D'après la loi du zéro-un, c'est nécessairement 0 ou 1. On suppose naturellement que les objets $G_n(\omega)$ et A sont des parties d'un espace T ; il est bon de supposer T localement compact (pratiquement, ce sera $\mathbb{R}^d$ ou T^d), A fermé et les $G_n(\omega)$ ouverts. On pose

$$k_N(t,s) = \prod_{n=1}^{N} \frac{1 - P(s \in G_n) - P(t \in G_n) + P(\{s,t\} \subset G_n)}{(1 - P(s \in G_n))(1 - P(t \in G_n))}.$$

La méthode de Billard donne le résultat le plus facile de la théorie : *si A porte une mesure de probabilité σ d'énergie bornée par rapport au noyau $k_N(t,s)$ quand $N \to \infty$, A est p. s. non recouvert une infinité de fois par les $G_n(\omega)$.*

On voit, sur des exemples, que c'est loin d'être une condition nécessaire et suffisante. Cependant, curieusement, la condition est bien nécessaire et suffisante dans certains cas très naturels.

Exemple 1 (recouvrement à la Dvoretzky) : $T = \mathrm{T}$, $G_n(\omega) = I_n(\omega) = \left(-\frac{\ell_n}{2} + \omega_n, \frac{\ell_n}{2} + \omega_n\right)$. La condition, comme on l'a vu, s'écrit $\mathrm{Cap}_k A > 0$ avec

$$k(t) = \exp \sum_1^\infty (\ell_n - |\, t \,|)^+$$

(par exemple, $\mathrm{Cap}_a A > 0$ si $\ell_n = \frac{a}{n}$; par exemple encore, $k \in L^1(\mathrm{T})$ si la mesure de Lebesgue de A est positive). *C'est une condition nécessaire et suffisante de non recouvrement de* A (généralisation du théorème de Shepp).

Exemple 2 (recouvrement de T^d par des convexes homothétiques aléatoires) : $T = \mathrm{T}^d$, $G_n(\omega) = g_n + \omega_n$, où les g_n sont des convexes homothétiques donnés de volumes v_n $(1 > v_1 \geq v_2 \geq \cdots)$, (ω_n) une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur T^d, et $A = \mathrm{T}^d$. La condition est

$$(B_d) \quad : \quad \int_0^1 \exp \sum_{n=1}^{\infty} v_n \left(1 - (\frac{s}{v_n})^{1/d}\right)^+ ds < \infty.$$

Si les g_n sont des simplexes, c'est une condition nécessaire et suffisante de non recouvrement de T^d (autre généralisation du théorème de Shepp).

Ecrivons (B_∞) pour la convergence de la série de Billard :

$$(B_\infty) \quad : \quad \sum_1^\infty v_n^2 \exp(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) < \infty.$$

On a alors

$$(B_\infty) \Rightarrow (B_{d+1}) \Rightarrow (B_d) \Rightarrow (B_1) \qquad (d = 1, 2, \cdots)$$

et on sait que (B_1) équivaut à la convergence de la série de Shepp :

$$(B_1) \quad : \quad \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} \exp(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) < \infty.$$

Quand $\inf(nv_n) > 0$, toutes ces conditions sont équivalentes. Cependant les implications ci-dessus sont strictes : pour chaque d, il existe des suites v_n telles qu'il y ait recouvrement par des simplexes homothétiques de volumes v_n en dimension $> d$, et non recouvrement en dimension $\leq d$. Il est facile de voir que (B_∞) équivaut au fait que les intégrales (B_d) sont uniformément majorées; c'est donc une condition un peu plus stricte que la conjonction de toutes les (B_d).

Exemple 3 (recouvrement à la Mandelbrot). Enoncé analogue, avec maintenant

$$k(t) = \exp \int_t^\infty \mu(y, \infty) dy.$$

Exemple 4 (recouvrement poissonnien par des simplexes homothétiques aléatoires). Enoncé analogue, avec une intégrale faisant intervenir une mesure μ au lieu de la suite (v_n).

En fait, ce sont les exemples 3 et 4 qu'on traite d'abord, et on en déduit les exemples 1 et 2. Les exemples 1 et 3 ont été obtenus en 1987, les exemples 2 et 4 en 1990. Dans tous les cas, la clé a été la méthode de temps d'arrêt que je vais expliquer tout à l'heure sur l'exemple 3. Cette méthode est rapide, mais elle cache un peu la relation entre les recouvrements aléatoires et la théorie du potentiel.

Ce qui éclaire la question, c'est une propriété remarquable de l'ensemble non recouvert dans un recouvrement de $\mathbb{R}^+$ par des intervalles $(x, x+y)$ associés à un processus de Poisson ponctuel $\{(x, y)\}$ d'intensité $\lambda \otimes \mu$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (il est ici très important de prendre $\lambda \otimes \mu$ dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$). On démontre que cet ensemble fermé aléatoire $F(\omega)$ a même loi que l'adhérence de l'ensemble des valeurs d'un certain processus à accroissements positifs, indépendants et stationnaires, partant de 0, que je vais désigner par $L(t, \omega)$. Ainsi, dire qu'un fermé A est recouvert par les intervalles $(x, x+y)$, c'est dire qu'il est disjoint de $F(\omega)$, donc qu'il est polaire pour le processus $L(t, \omega)$: cela traduit bien le fait que A est de capacité nulle par rapport à un certain noyau. L'identification des lois de $F(\omega)$ et de $\overline{L(\mathbb{R}^+,\omega)}$ est un théorème de Fitzsimmons, Fristedt et Shepp (1985) et une démonstration différente, utilisant la théorie des produits de poids aléatoires indépendants, est donnée dans mon article de 1990. Mais ce théorème, au moins dans les cas particuliers les plus importants (tels que $\mu(dy) = ady/y^2$, $0 < a < 1$, et $L(t,\omega)$ =processus de Lévy stable, croissant et d'indice $1-a$), se trouve en germe dans l'article de Benoit Mandelbrot de 1972.

Dans le cas de recouvrement, on peut essayer de mesurer à quel point ce recouvrement est ou n'est pas uniforme; c'est une question suggérée par L. Carleson. Pour fixer les idées, considérons sur T des intervalles $I_n(\omega)$ de longueurs $\ell_n = \frac{a}{n}$ ($a > 1$, $n > n_0$), et de centres ω_n. Leurs fonctions indicatrices sont $\chi_n(t-\omega_n)$, et le problème consiste en l'étude simultanée, pour tous les $t \in$ T, de ces suites aléatoires de 0 et de 1. Voici un énoncé très simple (mais dont la démonstration n'est pas immédiate) : soit (a_n) une suite positive *décroissante* (l'énoncé est faux sans cette condition); alors

$$(\diamond) \qquad \begin{cases} \sum \dfrac{a_n}{n} = \infty \Rightarrow P(\forall t \quad \sum a_n\chi_n(t-\omega_n) = \infty) = 1 \\ \sum \dfrac{a_n}{n} < \infty \Rightarrow P(\forall t \quad \sum a_n\chi_n(t-\omega_n) < \infty) = 1. \end{cases}$$

Et voici un résultat un peu plus puissant : il existe des nombres positifs $A = A(a)$ et $B = B(a)$ tels que presque sûrement

$$a < \limsup_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\log N} \max_t \sum_1^N \chi_n(t-\omega_n) \right) \le A$$

$$B \le \liminf_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\log N} \min_t \sum_1^N \chi_n(t-\omega_n) \right) < a \,;$$

le comportement est presque le même en tous les points, mais les inégalités strictes montrent qu'il y a néanmoins des points plus ou moins recouverts (Fan Ai hua et J.-P. Kahane, 1992).

J'ajoute que la simplicité de l'énoncé $(\diamond)$ est trompeuse. On ne connait pas la situation lorsque $\ell_n = \frac{1}{n}$. De manière générale, l'étude de la convergence partout et de la divergence partout d'une série aléatoire $\sum_1^\infty f_n(t-\omega_n)$, où les f_n sont des fonctions données, définies sur T et à valeurs dans $[0,1]$, ne paraît pas une question facile.

Voici quelques problèmes en suspens.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante de recouvrement de T^d par des convexes homothétiques $G_n(\omega) = g_n + \omega_n$ de volumes v_n. Dépend-elle de la forme des convexes? En particulier, démontrer que des boules aléatoires de volumes $\frac{1}{n}$ $(n \geq n_0)$ recouvrent $\mathbf{T}^d$ (on sait seulement que l'ensemble non recouvert est au plus dénombrable).

2. Dans le cas de boules de volumes $\frac{a}{n}$ dans $\mathbf{T}^d$ $(a < 1,\ n = 1, 2, \cdots)$, l'ensemble fermé non recouvert a pour dimension $d(1-a)$ avec probabilité positive. Que peut-on dire de sa dimension topologique? En identifiant $\mathbf{T}^d$ à un cube, pour quelles valeurs de a y a-t-il percolation, c'est-à-dire que deux faces opposées communiquent par une composante connexe de la réunion des boules?

3. Dans le plan hyperbolique, on plante des arbres au hasard suivant un processus de Poisson dont l'intensité est la mesure d'aire hyperbolique, et on suppose qu'au temps t leurs sections horizontales sont des disques de rayon hyperbolique t centrés (au sens hyperbolique) sur le processus de Poisson. Pour un observateur donné, la forêt commence à cacher les arbres au temps $t = (2+\sqrt{5})^{-1/2} = 0,4858\cdots$. Est-il vrai qu'à ce moment la forêt cache les arbres pour *tout* observateur?

4. (pour mémoire) On donne des fonctions $f_n \ : \ \mathbf{T} \to [0,1]$, $n \in \mathbf{N}$. Calculer $P(\forall t \in T \quad \sum f_n(t-\omega_n) < \infty)$ et $P(\forall t \in \mathrm{T} \quad \sum f_n(t-\omega_n) = \infty)$.

La démonstration promise

Pour finir, voici comment on démontre le théorème de Shepp par la méthode de temps d'arrêt. On donne la mesure μ localement bornée sur $(0,\infty)$, et le processus de Poisson $\{(x,y)\}$ d'intensité $\lambda \otimes \mu$ *dans* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ (ici, il est essentiel de prendre $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$ et non $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$). On considère qu'il se crée au cours du temps, et que la partie créée avant le temps t se trouve dans le quart de plan $x < t$, $y > 0$. Limitons le d'abord au demi-plan $y < \epsilon$ $(\epsilon > 0)$; son intensité est alors $\lambda \otimes \mu_\epsilon$, où μ_ϵ est la restriction de μ à (ϵ,∞). Soit τ_ϵ le premier point non recouvert à droite de 0. Désignons par G_ϵ l'ensemble recouvert et calculons de deux façons

$$I_\epsilon = E\int_0^\infty P(t \in G_\epsilon)e^{-t}dt.$$

D'abord, $P(t \in G_\epsilon)$ ne dépend pas de t, et c'est la probabilité d'avoir un point du processus dans l'angle $t - y < x < t$, soit A_t :

$$P(t \in G_\epsilon) = \exp(-\lambda \otimes \mu_\epsilon(A_t)) = \exp\left(-\int_0^\infty \mu_\epsilon(y,\infty)dy\right).$$

Donc

$$I_\epsilon = \exp\left(-\int_0^\infty \mu_\epsilon(y,\infty)dy\right).$$

D'autre part, faisant intervenir le temps d'arrêt τ_ϵ, et posant $t = \tau_\epsilon + s$,

$$I_\epsilon = E\left(e^{-\tau_\epsilon}\int_0^\infty P(\tau_\epsilon + s \in G \mid \tau_\epsilon)e^{-s}ds\right).$$

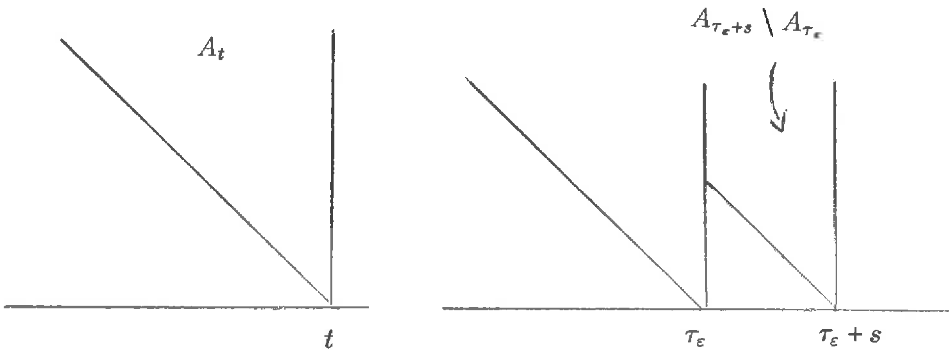
Or la probabilité conditionnelle sous l'intégrale est la probabilité d'avoir un point du processus dans $A_{\tau_\epsilon+s}$ sachant qu'il n'y en a pas dans A_{τ_ϵ} ; c'est

$$\begin{aligned} P(\tau_\epsilon + s \in G \mid \tau_\epsilon) &= \exp(-\lambda \otimes \mu_\epsilon(A_{\tau_\epsilon+s} \backslash A_{\tau_\epsilon})) \\ &= \exp\left(-\int_0^s \mu_\epsilon(y,\infty)dy\right). \end{aligned}$$

On voit que

$$E(e^{-\tau_\epsilon}) = \left(\int_0^\infty \exp\left(\int_s^\infty \mu_\epsilon(y,\infty)dy\right) e^{-s} ds\right)^{-1}.$$

Pour avoir recouvrement par $G(= G_0)$, il faut et suffit que le second membre tende vers 0 quand $\epsilon \to 0$. C'est la condition de Shepp. On voit aussi que la démonstration donne, via sa transformée de Laplace, la loi du premier point non recouvert à droite de 0.



Références

(dans l'ordre où elles apparaissent dans le texte)

BOREL, E. — Sur les séries de Taylor. *C. r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* 123, 1896, 1051-2.

BOREL, E. — Sur les séries de Taylor. *Acta Mathematica* 20, 1897, 243-247.

STEINHAUS, H. — Uber die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürlich Grenze ist. *Math. Z.* 31, 1930, 408-16.

DVORETZKY, A. — On covering a circle by randomly placed arcs. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 42, 1956, 199-203.

KAHANE, J.-P. — *Some random series of functions*. Heath, 1968.

KAHANE, J.-P. — Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard. *C. r. Acad. Sci. Paris* 248, 1959, 184-6.

BILLARD, P. — Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes. *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 82, 1965, 131-79.

ERDÖS, P. — Some unsolved problems. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 6, A, 1961, 220-54.

MANDELBROT, B. B. — On Dvoretzky coverings for the circle. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 22, 1972, 158-60.

MANDELBROT, B. B. — Renewal sets and random cutouts. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 22, 1972, 145-57.

SHEPP, L. A. — Covering the circle with random arcs. *Israël J. Math.* 11, 1972, 328-45.

SHEPP, L. A. — Covering the line with random intervals. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 23, 1972, 163-170.

WSCHEBOR, M. — Sur le recouvrement du cercle par des ensembles placés au hasard. *Israel J. Math.* 15, 1973, 1-11.

WSCHEBOR, M. — Sur un théorème de L. Shepp. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* 27, 1973, 179-84.

HAWKES, J. — On the coverings of small sets by random intervals. *Quart. J. Math. Oxford* (2) 24, 1973, 427-32.

HOFFMANN-JØRGENSEN, J. — Coverings of metric spaces with randomly placed balls. *Math. Scand.* 32, 1973, 169-86.

EL HELOU, Y. — Recouvrement du tore T^q par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert. *C. r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* 287A, 1978, 815-18. Voir aussi Thèse de 3ème cycle, Orsay, 1978.

KAHANE, J.-P. — *Some random series of functions,* (2nd ed.), Cambridge Univ. Press, 1985.

LEVY, P. — *Processus stochastiques et mouvement brownien.* Paris, 1948 (2e éd. 1965).

KAHANE, J.-P. — Sur les zéros et les instants de ralentissement du mouvement brownien. *C. r. Acad. Sci. Paris* 282, 1976, 431-3.

DVORETZKY, A. — On the oscillation of the brownian motion process. *Israel J. Math.* 1, 1963, 212-14.

FAN AI-HUA. — Thèse, Orsay 1989.

FAN AI-HUA. — Sur quelques processus de naissance et de mort. *C. r. Acad. Sci. Paris* 310, 1990, 441-44.

MANDELBROT, B. B. — *The fractal geometry of nature.* Freeman, 1982.

HALL, D. — *Introduction to the theory of coverage processes,* Wiley, 1988.

ZÄHLE, U. — Random fractals generated by random cutouts, *Math. Nachr.* 116, 1984, 27-52.

JANSON, S. — Random coverings of the circle with arcs of random lengths, in *Probability and Mathematical Statistics,* Essays in honour of Carl-Gustav Esseen, Uppsala Univ., 1983, 62-73.

JANSON, S. — Random covering in several dimensions. *Acta Math.* 156, 1986, 83-118.

KAHANE, J.-P. — Recouvrements aléatoires et théorie du potentiel. *Coll. Math.* 50/51, 1990, 387-411.

KAHANE, J.-P. — Intervalles aléatoires et décomposition des mesures. *C. r. Acad. Sci. Paris* 304, 1987, 551-554.

FITZSIMMONS, P. J., FRISTEDT, B. & SHEPP, L. A. — The set of real numbers left uncovered by random covering intervals. *Z. Wahrscheinlichkeits-theorie verw. Geb.* 70, 1985, 175-189.

FAN AI-HUA & KAHANE, J.-P. — Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire. *Soumis à publ.*, 1992. ■

— COURANTS POSITIFS ET THÉORIE DE L'INTERSECTION —

Jean-Pierre DEMAILLY (Institut Fourier, Grenoble 1)

1. Introduction

La notion de multiplicité locale d'intersection des cycles algébriques ou analytiques est maintenant bien comprise d'un point de vue algébrique depuis plusieurs décennies (travaux de Samuel [Sa51], Serre [Se57]), voire depuis le XIXème siècle. Nous allons dans la suite adopter un point de vue assez différent, mais il est sans doute utile de rappeler quelques notions fondamentales pour situer le contexte.

Rappelons qu'un cycle algébrique de codimension p dans une variété algébrique X est une combinaison linéaire formelle $A = \sum \lambda_j A_j$ dans le groupe abélien libre engendré par les ensembles algébriques irréductibles de codimension p: les A_j sont donc de tels ensembles et $\lambda_j \in \mathbb{Z}$; le cycle est dit effectif si $\lambda_j \geq 0$. On s'intéressera en fait aussi aux cycles réels ($\lambda_j \in \mathbb{R}$). Le support de A est l'ensemble $|A| = \bigcup_{\lambda_j \neq 0} A_j$.

Si X est une variété algébrique non singulière (toujours sur le corps de base $\mathbb{C}$ dans ce qui suit), et si A, B sont des cycles algébriques de codimensions respectives p, q tels que $\operatorname{codim} |A| \cap |B| = p + q$, on a une bonne notion de cycle intersection $C = A \cdot B$: les composantes C_j de C sont les composantes irréductibles de l'intersection géométrique $|A| \cap |B|$, affectées de multiplicités λ_j convenables. Supposons par exemple A et B irréductibles. Lorsque $p + q = n = \dim X$, les C_j sont par hypothèse des points isolés x_j ; la multiplicité d'intersection en un tel point x_j peut alors être vue de manière géométrique comme le nombre de points d'intersection de A avec un translaté $\tau_a(B)$ dans un petit voisinage de x_j ; ce nombre de points d'intersection est bien indépendant génériquement du choix de a pour une translation τ_a de vecteur a assez petit (on travaille ici dans une carte affine contenant x_j).

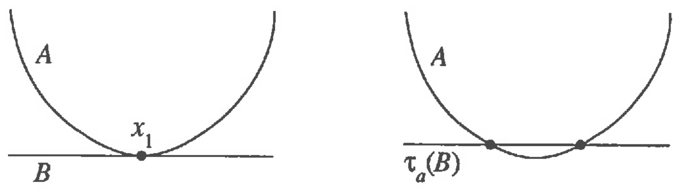


Fig. 1. $A \cdot B = 2\,x_1$ où $A \cap B = \{x_1\}$.

Si $p+q<n$, on peut calculer la multiplicité d'intersection λ_j le long d'une composante C_j de $|A|\cap|B|$ comme suit: on choisit un point non singulier générique x sur C_j, un sous-espace linéaire L générique passant par j de dimension égale à $\operatorname{codim} C_j = p+q$, et on prend λ_j égal à la multiplicité d'intersection de $A\cap L$ et $B\cap L$ en x. Ce nombre est ici encore indépendant des choix faits (pourvu que ces choix soient génériques), et on pose $C = A\cdot B = \sum \lambda_j C_j$.

Tout ce qui précède vaut d'ailleurs sans changement pour des cycles analytiques dans une variété analytique complexe X. Dans ce cadre, on peut attacher à tout cycle analytique A de codimension p une classe fondamentale de cohomologie $\{A\}\in H^{2p}(X,\mathbb{Z})$. Ceci peut se faire de plusieurs façons, soit en utilisant la dualité de Poincaré et l'existence de triangulations simpliciales de $|A|$, soit en construisant la classe $\{A\}$ cherchée d'abord en dehors des singularités de A, c'est-à-dire dans $H^{2p}(X\smallsetminus A_{\mathrm{sing}},\mathbb{Z})$, auquel cas le problème se réduit à savoir calculer la classe fondamentale d'une sous-variété lisse, puis en observant qu'on a un isomorphisme $H^{2p}(X,\mathbb{Z})\simeq H^{2p}(X\smallsetminus A_{\mathrm{sing}},\mathbb{Z})$, compte tenu du fait que $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} A_{\mathrm{sing}} > p$. Nous expliquerons plus loin une autre définition utilisant les courants et la cohomologie de De Rham. Par exemple, si A est un ensemble algébrique de codimension p dans $X=\mathbb{P}^n$, alors $H^{2p}(\mathbb{P}^n,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}$ et la classe $\{A\}$ est donnée par un entier qui s'interprète comme le degré de l'ensemble algébrique A (= nombre de points d'intersection de A avec un sous-espace linéaire générique de dimension p dans $\mathbb{P}^n$). La formule de Bezout dit maintenant que $\{A\cdot B\}=\{A\}\smile\{B\}$, c'est-à-dire que la classe fondamentale de l'intersection est le cup produit des classes fondamentales; dans $\mathbb{P}^n$, le degré de l'intersection des cycles est donc le produit des degrés.

Il se trouve qu'une grande partie de ces résultats peut se formuler dans le langage des courants positifs fermés, au moins dans le cas de l'intersection des diviseurs (ce sont par définition les cycles algébriques ou analytiques de codimension 1). Cette théorie, inaugurée par P. Lelong en 1957, permet d'attacher à un cycle analytique une forme différentielle fermée explicite dont les coefficients sont des mesures complexes. On dispose maintenant de résultats assez généraux permettant de multiplier de telles formes sous des hypothèses convenables portant sur la dimension des intersections. L'intérêt de cette approche est qu'on dispose simultanément des commodités du calcul différentiel et intégral sur les variétés, des outils de l'analyse complexe et de la théorie du potentiel. Il est alors très facile d'obtenir des résultats globaux du type théorème de Bezout. En même temps, on dispose d'un certain nombre d'opérations naturelles telles que passages à la limite, déplacements "infinitésimaux" de cycles, etc., même dans des situations où ces opérations n'ont pas de sens d'un point de vue algébrique. Cette approche se révèle très efficace pour étudier certains problèmes issus de l'arithmétique (théorie des nombres transcendants, voir [Bo70], [Wa78], [De82a]) ou même certains problèmes de nature algébrique pour lesquels les outils purement algébriques sont à l'heure actuelle insuffisants (conjecture de grande amplitude de Fujita, voir [De90]).

Notre but ici n'est pas de donner un exposé exhaustif des principaux résultats connus, mais plutôt de proposer une introduction aussi élémentaire que possible aux notions mises en jeu. Le problème suivant sera l'occasion de montrer comment les choses fonctionnent. On se donne un diviseur $D \geq 0$ dans une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^N = \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$, et pour entier $c \geq 0$ on note $E_c(D)$ l'ensemble des points où D est de multiplicité $\geq c$; autrement dit, D est localement dans une carte affine U de X le diviseur d'une fonction polynomiale f et on regarde

$$E_c(D) = \{x\,;\ D^\alpha f(x) = 0 \ \text{ pour } |\alpha| < c\}.$$

Les ensembles $E_c(D)$ forment donc une suite décroissante d'ensembles algébriques dans X. Le problème est de majorer le degré des différentes composantes des $E_c(D)$ en fonction du degré de D. Par exemple si D est une courbe de degré d dans $\mathbb{P}^2$, il est bien connu que le nombre de points multiples de D est au plus $d(d-1)/2$, le maximum étant atteint lorsque D est une réunion de d droites en position générale. La théorie des courants permet de donner une réponse générale assez précise à ce problème, incluant une estimation utile du terme d'erreur (à savoir de "l'excès de self-intersection").

2. Courants au sens de De Rham

Nous commençons par rappeler très brièvement le formalisme des courants introduit par G. de Rham [DR55] (voir aussi le livre de H. Federer [Fe69]). Soit M une variété différentiable orientée de dimension réelle n. Un courant de degré p sur M est par définition une forme différentielle $T = \sum_{|I|=p} T_I dx_I$ dont les coefficients T_I sont des distributions; ici $I = (i_1, \ldots, i_p)$ désigne un multi-indice croissant dans $\{1, \ldots, n\}^p$, et on pose $dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ dans le système de coordonnées locales considéré. Le résultat suivant est immédiat:

(2.1) Proposition. — *On désigne par $\mathcal{D}_q(M)$ l'espace des formes différentielles de degré q à support compact dans M et par ${}'\mathcal{D}_p(M)$ l'espace des courants de degré p. Alors ${}'\mathcal{D}_p(M)$ s'identifie au dual topologique $\mathcal{D}_{n-p}(M)'$ via l'accouplement naturel*

$$\begin{aligned}{}'\mathcal{D}_p(M) \times \mathcal{D}_{n-p}(M) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (T, u) &\longmapsto \langle T, u\rangle = \int_M T \wedge u.\end{aligned}$$

Ici l'intégrale est conçue comme provenant de l'accouplement usuel entre distributions et fonctions sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Par définition, on a une inclusion $D_p(M) \subset {}'D_p(M)$, et les règles habituelles du calcul différentiel extérieur s'appliquent aux courants (différentiation extérieure, lemme de Poincaré, formule de différentiation du produit d'un courant par une forme différentielle à coefficients C^∞ ...). Bien entendu, on ne peut pas en général multiplier extérieurement deux courants puisque le produit de deux distributions (ou même de deux mesures) ne définit pas une distribution.

(2.2) Exemple fondamental.— Soit S une sous-variété orientée de classe C^1 et de dimension q dans M, avec ou sans bord. On définit par dualité un courant noté $[S] \in {}'D_{n-q}(M)$, appelé courant d'intégration sur S, tel que

$$\langle [S], u\rangle = \int_S u_{\restriction S}, \qquad \forall u \in D_q(M).$$

Si on choisit localement des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur M dans lesquelles S a pour équation $x_{q+1} = \ldots = x_n = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_q)$ définissent des coordonnées sur S et on voit facilement que $[S]$ s'identifie à la forme différentielle

$$\lambda_S(x)\, dx_{q+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \quad \text{où } \lambda_S(x) = 1(x_1, \ldots, x_q) \otimes \delta_0(x_{q+1}, \ldots, x_n)$$

est la mesure d'intégration de Lebesgue sur S dans les coordonnées x_i et δ_0 la mesure de Dirac à l'origine. On voit donc que $[S]$ est à coefficients mesures, i.e. que c'est un courant d'ordre 0 (comme pour une distribution, on dit qu'un courant est d'ordre k s'il s'étend en une forme linéaire continue sur l'espace des formes différentielles de classe C^k à support compact). Pour $u \in D_{q-1}(M)$, le théorème de Stokes appliqué d'abord à $d([S] \wedge u)$ sur M puis à du sur S donne

$$\begin{aligned}\int_M d[S] \wedge u &= (-1)^{n-q+1} \int_M [S] \wedge du := (-1)^{n-q+1} \int_S du \\ &= (-1)^{n-q+1} \int_{\partial S} u = (-1)^{n-q+1} \int_M [\partial S] \wedge u,\end{aligned}$$

de sorte que la différentielle extérieure $d[S] = (-1)^{n-p+1}[\partial S]$ s'identifie au signe près au courant d'intégration sur le bord orienté ∂S. Cet exemple conduit à la définition suivante:

(2.3) Définition.— *On appelle dimension d'un courant quelconque $T \in {}'D_p(M)$ l'entier $n - p$.*

Les groupes de cohomologie du complexe de De Rham $(C^\infty_p(M), d)$ sont par définition les groupes de cohomologie de De Rham $H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$ de la variété. Le morphisme d'inclusion de complexes $C^\infty_\bullet(M) \to {}'D_\bullet(M)$ donne lieu à un isomorphisme en cohomologie : c'est un conséquence facile du fait que le lemme de Poincaré est vrai pour les deux complexes, de sorte que $C^\infty_\bullet$ et ${}'D_\bullet$ sont deux résolutions du faisceau localement constant $\mathbb{R}$ par des faisceaux acycliques (voir par exemple Godement [Go57]). Cet isomorphisme a entre autres pour corollaire qu'un courant d-fermé $T \in {}'D_p(M)$ définit une classe de cohomologie $\{T\} \in H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$. On peut alors poser la définition suivante:

(2.4) DÉFINITION. — *Si S est une sous-variété orientée sans bord de codimension p de M, la classe fondamentale de S dans M est la classe de cohomologie $\{S\} \in H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$ de son courant d'intégration $[S] \in {}'D_p(M)$.*

De manière générale, si T_1 et T_2 sont deux courants fermés, le cup produit $\{T_1\} \smile \{T_2\}$ des classes de cohomologie est toujours bien défini, même lorsque le produit extérieur $T_1 \wedge T_2$ n'a pas de sens: on écrit simplement $T_i = \alpha_i + dU_i$ avec des formes α_i de classe C^∞ représentant la même classe de cohomologie que T_i; la forme $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ représente alors la classe $\{T_1\} \wedge \{T_2\}$.

L'isomorphisme $H^p(C^\infty_\bullet(M)) \simeq H^p({}'D_\bullet(M))$ évoqué plus haut est un isomorphisme topologique si l'on munit $C^\infty_p(M)$ de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet et ${}'D_p(M)$ de la topologie de la convergence faible des courants: par l'argument faisceautique précédent, ceci résulte du fait que les deux groupes sont topologiquement isomorphes au groupe de cohomologie de Čech à valeurs dans $\mathbb{R}$. On voit ainsi du même coup que $H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$ est un espace de Fréchet (le point essentiel est que cet espace est séparé). En particulier, il suffit qu'une suite T_ν converge faiblement vers T pour en déduire que la classe $\{T_\nu\}$ converge vers $\{T\}$ dans la topologie d'espace de Fréchet de $H^p_{DR}(M, \mathbb{R})$.

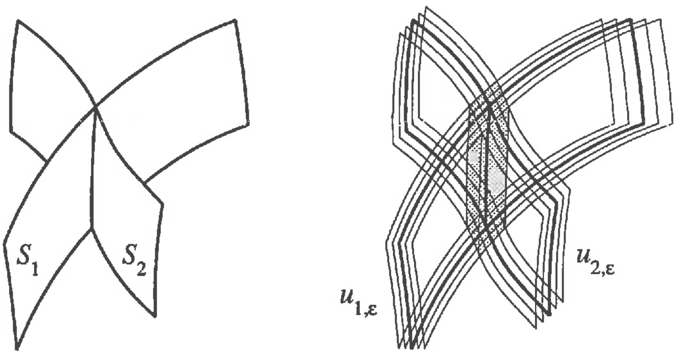


Fig. 2.

Supposons maintenant comme sur la Fig. 2. ci-dessus que S_1, S_2 soient deux sous-variétés lisses orientées de M se coupant transversalement. On peut alors voir par un raisonnement de continuité faible que $\{S_1\} \smile \{S_2\} = \{S_1 \cap S_2\}$: on approxime $[S_1]$ et $[S_2]$ par des formes différentielles fermées

$u_{1,\varepsilon}$, $u_{2,\varepsilon}$ de classe C^∞ à support dans des voisinages tubulaires de S_1, S_2 de rayon ε; si l'on s'y prend bien, on constate que $u_{1,\varepsilon} \wedge u_{2,\varepsilon}$ converge faiblement vers $[S_1 \cap S_2]$.

3. Courants positifs et équation de Lelong-Poincaré

Sur une variété analytique complexe X de dimension n, on a de façon analogue des espaces $D_{p,q}(X)$ de formes $u = \sum_{|I|=p,\,|J|=q} u_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_q$ de bidegré (p,q) à coefficients complexes, et des opérateurs de différentiation extérieure ∂, $\overline{\partial}$ de type $(1,0)$ et $(0,1)$ respectivement, tels que $d = \partial + \overline{\partial}$. Il en résulte qu'on obtient des espaces de courants ${}'D_{p,q}(X)$ de bidegré (p,q) et de bidimension $(n-p, n-q)$, avec une identification canonique

$$(3.1) \qquad {}'D_{p,q}(X) \simeq D_{n-p,n-q}(X)'.$$

Dans cette identification, on utilise le fait qu'une variété complexe possède toujours une orientation naturelle: les formes volumes positives sont par définition les multiples positifs de

$$i\, dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge i\, dz_n \wedge d\overline{z}_n = i^{n^2} dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_n$$

(noter que $i\, dz \wedge d\overline{z} = 2\, dx \wedge dy$ si $z = x + iy$). De manière générale, on a une notion de positivité naturelle pour les formes de type (p,p), introduite initialement par P. Lelong [Le57]. Nous en donnons ici une variante légèrement plus restrictive en vue de simplifier l'exposé.

(3.2) Définition. — *Un courant $T = i^{p^2} \sum_{|I|=|J|=p} T_{I,J}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J$ est dit positif si la (n,n)-forme $T \wedge i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}$ est une mesure ≥ 0 pour toute forme α de type $(n-p, 0)$.*

En écrivant $\alpha = \sum_{|I|=p} \alpha_I dz_{\complement I}$,on voit facilement que $T \geq 0$ si et seulement si $\sum T_{I,J} \alpha_I \overline{\alpha}_J$ est une mesure ≥ 0 pour toute $(n-p,0)$-forme α. C'est une propriété purement ponctuelle du courant, au moins dans le cas où les coefficients sont des fonctions L^1_{loc}, exprimant que la matrice de coefficients $(T_{I,J})$ est hermitienne semi-positive. La positivité de T entraîne que T est un courant réel à coefficients mesures, i.e. les $T_{I,J}$ sont des mesures complexes et on a $\overline{T} = T$, $\overline{T}_{I,J} = T_{J,I}$.

(3.3) Exemple.— Soit φ une fonction réelle localement intégrable sur X. Le hessien complexe de φ est le courant de bidegré $(1,1)$ $i\partial\overline{\partial}\varphi = i \sum \partial^2\varphi/\partial z_j \partial\overline{z}_k\, dz_j \wedge d\overline{z}_k$. On a donc $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq 0$ si et seulement si la matrice hermitienne $(\partial^2\varphi/\partial z_j \partial\overline{z}_k)$ est ≥ 0: on dit alors que la fonction φ est plurisousharmonique (psh en abrégé); c'est la généralisation naturelle sur $\mathbb{C}$ de la notion de fonction convexe. Dans le cas de la dimension complexe 1, la condition se réduit à $\Delta\varphi \geq 0$, ce qui traduit la sousharmonicité de φ.

On montre qu'on peut toujours modifier une fonction psh sur un ensemble négligeable, et ce de façcon unique, de sorte que la fonction φ obtenue soit semi-continue supérieurement de X dans $[-\infty, +\infty[$, et satisfasse l'inégalité de la moyenne

$$\varphi(h(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(h(e^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout disque holomorphe $h : \overline{D}(0,1) \to X$; inversement une fonction φ satisfaisant ces deux propriétés vérifie bien $i\partial\overline{\partial}\varphi \geq 0$. Des calculs assez simples de Hessien (exercice pour le lecteur!) montrent que la classe des fonctions psh est stable par les opérations suivantes:

a) Combinaison linéaire à coefficients positifs, limite décroissante, enveloppe supérieure finie ou infinie d'une suite de fonctions psh;

b) Composition avec un changement de variables holomorphe :

$$F : X \to Y \quad \text{holomorphe}, \quad \varphi \in \mathrm{Psh}(Y) \Longrightarrow \varphi \circ F \in \mathrm{Psh}(X).$$

c) Composition avec une fonction $\chi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ convexe, croissante en chaque variable :

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathrm{Psh}(X) \Longrightarrow \chi(\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in \mathrm{Psh}(X).$$

Comme la fonction $z \mapsto \log|z|$ est sous-harmonique sur $\mathbb{C}$ et comme $(x, y) \mapsto \log(e^x + e^y)$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$, on déduit aussitôt de ces règles que les fonctions de la forme

$$\varphi = \log \max_j \sum_k |f_{jk}|^{\gamma_{jk}}, \qquad f_{jk} \text{ holomorphe}, \quad \gamma_{jk} > 0$$

sont psh sur X. Dans la suite, nous nous intéresserons essentiellement aux fonctions psh de cette forme. De telles fonctions ont en général des pôles logarithmiques; si φ est une fonction psh, on définit le nombre de Lelong de φ en un point z_0 par

$$\nu(\varphi, z_0) = \liminf_{z \to z_0} \frac{\varphi(z)}{\log|z - z_0|} < +\infty.$$

On dira que z_0 est un pôle de φ si $\varphi(z_0) = -\infty$, et que c'est un pôle logarithmique si $\nu(\varphi, z_0) > 0$. D'une certaine façon, comme on le verra plus loin, l'étude des pôles logarithmiques des fonctions psh est un outil pour analyser la structure des singularités d'un ensemble analytique.

(3.4) EXEMPLE.— Soit S une sous-variété analytique complexe (sans bord) de codimension p dans X. Alors le courant d'intégration $[A]$ est positif fermé de bidegré (p,p). En effet, parmi les formes de degré total $\dim_{\mathbb{R}} S = 2(n-p)$, seules celles de bidegré $(n-p, n-p)$ ont une restriction non nulle à A. Par ailleurs, si $f \in D(X)$ est une fonction positive et si α est une $(n-p,0)$-forme, la forme $f\, i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}$ définit une forme volume ≥ 0 sur S, de sorte que

$$\langle [S] \wedge i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha}\, ,\, f\rangle = \int_S f\, i^{(n-p)^2} \alpha \wedge \overline{\alpha} \geq 0.$$

Plus généralement, soit A un ensemble analytique de dimension pure p dans X (c'est-à-dire un ensemble fermé défini localement par un nombre fini d'équations analytiques). On sait que A est une sous-variété lisse en dehors d'un ensemble analytique $A_{\mathrm{sing}} \subset A$ qui est le lieu des points singuliers de A. Si A_{reg} désigne l'ouvert des points réguliers, on a d'après ce qui précède un courant d'intégration bien défini $[A_{\mathrm{reg}}]$ sur $X \setminus A_{\mathrm{sing}}$. P. Lelong a démontré en 1957 le fait important suivant:

(3.5) THÉORÈME ([Le57]).— *Si A est un ensemble analytique de codimension pure p dans X, le courant d'intégration $[A]$ de bidegré (p,p)*

$$\langle [A], u\rangle = \int_{A_{\mathrm{reg}}} u, \qquad \forall u \in D_{n-p,n-p}(X)$$

est défini sur X tout entier. De plus $[A]$ est positif et fermé.

Pour montrer l'existence de A sur X, il faut s'assurer de la convergence de l'intégrale de u sur A_{reg} lorsque le support de u rencontre A_{sing}. Ceci résulte du fait qu'un ensemble analytique est toujours d'aire localement finie au voisinage de ses points singuliers.

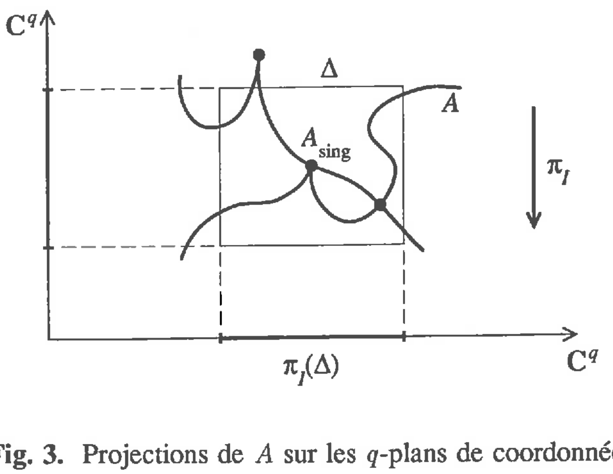


Fig. 3. Projections de A sur les q-plans de coordonnées.

Pour le voir on observe que l'aire est toujours majorée par la somme des aires des projections de A sur les différents plans de coordonnées de même dimension q que A, et pour un choix convenable des coordonnées ces projections sont toutes des revêtements ramifiés à un nombre fini de feuillets (voir Fig. 3): si ν_I est le degré de la projection $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^q$, $z \mapsto (z_j)_{j\in I}$ au voisinage d'un point $x \in A_{\rm sing}$, et si $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ est un polydisque de centre x assez petit, on a $\mathrm{aire}(A_{\rm reg} \cap \Delta) \le \sum \nu_I\, \mathrm{aire}(\pi_I(\Delta))$.

La positivité de $[A]$ résulte du fait que $[A_{\rm reg}] \ge 0$ et que $[A]$ est l'extension triviale de $[A_{\rm reg}]$ à X (on étend par 0 sur $A_{\rm sing}$). La propriété de fermeture $d[A] = 0$ est plus subtile. Pour la vérifier, on peut écrire par exemple $[A] = \lim_{\varepsilon\to 0}[A \smallsetminus V_\varepsilon]$ où V_ε est un système fondamental de voisinages de $A_{\rm sing}$ dans X. Si V_ε est bien choisi (par exemple si $V_\varepsilon = \{\sum |g_j(z)|^2 < \varepsilon\}$ où les g_j sont des équations analytiques de $A_{\rm sing}$), on vérifie alors grâce à la continuité faible de la différentiation au sens des distributions que

$$d[A] = \lim_{\varepsilon\to 0} \pm[A \cap \partial V_\varepsilon] = 0.$$

Ceci résulte du fait que si $q = \dim_{\mathbb{C}} A$, l'aire $(2q-1)$-dimensionnelle de $A \cap \partial V_\varepsilon$ tend vers 0, $A_{\rm sing}$ étant de dimension complexe $\le q-1$. □

Bien entendu, le théorème (3.5) permet de définir plus généralement le courant d'intégration associé à un cycle analytique $A = \sum \lambda_j A_j$: on pose $[A] = \sum \lambda_j [A_j]$.

(3.6) Equation de Lelong-Poincaré.— *Soit f une fonction holomorphe sur X et D_f le diviseur des zéros de f, c'est-à-dire le diviseur $D_f = \sum \lambda_j D_j$ dont les composantes sont les composantes irréductibles de $f^{-1}(0)$, affectées de multiplicités $\lambda_j \in \mathbb{N}^*$ égales à l'ordre d'annulation générique de f le long de D_j. Alors on a l'égalité de courants*

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial} \log |f| = [D_f].$$

Preuve (voir aussi P. Lelong [Le68]).— En un point régulier x de $|D_f|$, on peut choisir un voisinage V de x et des coordonnées locales sur V telles que $f(z) = z_1^m$. Comme $(D_f)_{\restriction V}$ se réduit à l'hypersurface $z_1 = 0$ affecté de la multiplicité m, on est ramené à montrer que pour toute $(n-1,n-1)$-forme u à support compact sur $\mathbb{C}^n$ on a

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|z_1| \wedge u = \int_{\{0\}\times\mathbb{C}^{n-1}} u.$$

Ceci équivaut par définition à montrer que

$$\int_{\mathbb{C}^n} \frac{2}{\pi}\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \overline{z}_1} \log|z_1|\, f(z_1,\ldots,z_n)\, d\lambda = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} f(0,z_2,\ldots,z_n)\, d\lambda',$$

pour toute fonction test f, où $d\lambda$ et $d\lambda'$ désignent les mesures de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^{n-1}$. Or ceci résulte du fait que la fonction $\log|z|$ est la solution élémentaire du Laplacien dans $\mathbb{C}$. Nous avons donc montré que l'égalité a lieu en dehors de l'ensemble analytique $A = |D_f|_{\text{sing}}$, c'est-à-dire que le courant $T = i/\pi\, \partial\overline{\partial} \log|f| - [D_f]$ est à support dans A. Or T est un courant fermé de bidegré $(1,1)$ à coefficients mesures (comme différence de deux courants positifs), et A est de dimension complexe $\leq n-2$. On peut invoquer le lemme élémentaire (3.7 a) ci-dessous pour conclure que $T = 0$:

(3.7) LEMME. — *Soit dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un courant T de degré p, tel que T et dT soient d'ordre 0, à support dans une sous-variété S de codimension réelle m.*

a) *Si $m > p$, alors $T = 0$.*

b) *Si $m = p$, alors T est de la forme $T = a[S]$ où a est une fonction L^1_{loc} sur S. Si de plus $dT = 0$, alors a est localement constante sur S.*

En effet, on peut supposer après changement de coordonnées locales que $A = \Omega \cap \{x_1 = \ldots = x_m = 0\}$. La condition de support et le fait que les coefficients de T et dT soient des mesures impliquent $x_j T = x_j dT = 0$ pour $j \leq m$. On obtient donc aussi $dx_j \wedge T = d(x_j T) - x_j dT = 0$.

a) Supposons $m > p$. Si T possédait un monôme $T_I dx_I$ non nul, $|I| = p$, on aurait $dx_j \wedge T \neq 0$ pour $j \notin \{1, \ldots, m\} \smallsetminus I$, contradiction.

b) Supposons $m = p$. ALors T ne peut avoir qu'un seul terme non nul, à savoir $\mu\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p$ où μ est une mesure portée par S. La condition que dT est d'ordre 0 montre que les dérivées partielles $\partial\mu/\partial x_j$, $j > p$, sont encore des mesures. Ceci impose que μ soit absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur S. Si de plus $dT = 0$, alors $\partial\mu/\partial x_j = 0$ pour $j > p$, donc le coefficient de proportionnalité est localement constant. □

4. Cas des sections méromorphes d'un fibré en droites

Nous aurons besoin en fait d'une légère généralisation de l'équation de Lelong-Poincaré, valable pour des sections méromorphes de fibrés en droites. Observons tout d'abord que si $f = g/h$ est une fonction méromorphe, on a évidemment

$$\frac{i}{\pi}\partial\overline{\partial}\log|f| = [D_f] \tag{4.1}$$

où $D_f = D_g - D_h$ est le diviseur des zéros et des pôles de f. Pour éviter de traîner constamment le facteur i/π, il est commode d'introduire l'opérateur

$$d^c = \frac{\partial - \overline{\partial}}{2\pi i}. \tag{4.2}$$

C'est un opérateur réel ($\overline{d^c} = d^c$), et on a $dd^c = i/\pi\, \partial\overline{\partial}$.

Soit maintenant L un fibré holomorphe en droites au dessus de X. Il existe un recouvrement ouvert (U_j) de X et des trivialisations $\tau_j : L_{\restriction U_j} \to U_j \times \mathbb{C}$, telles qu'un point (x,ξ) de la carte $U_k \times \mathbb{C}$ se recolle avec le point

$$\tau_j \circ \tau_k^{-1}(x,\xi) = (x, g_{jk}(x)\xi)$$

de la carte $U_j \times \mathbb{C}$, où les g_{jk} sont des fonctions holomorphes inversibles sur $U_j \cap U_k$. On a la relation $g_{jk}g_{k\ell} = g_{j\ell}$ sur $U_j \cap U_k \cap U_\ell$. Une section holomorphe (resp. méromorphe) f de L est une application $f : X \to L$ telle que $f(x) \in L_x$ pour tout x et telle que la coordonnée $\xi_j(x)$ de $f(x)$ dans chaque carte dépend holomorphiquement (resp. méromorphiquement) de x. On suppose L muni d'une métrique hermitienne h de classe C^∞. Dans chaque carte U_j la norme est donnée par un poids positif de classe C^∞ qu'on convient d'écrire sous la forme

$$||v||_h = |\xi| e^{-\varphi_j(x)}, \qquad \forall v \in L_x, \quad \text{avec} \quad \tau_j(v) = (x,\xi).$$

(4.3) DÉFINITION. — *On appelle forme de courbure de Chern de L la forme réelle fermée de type $(1,1)$ donnée par*

$$\Theta_h(L) = dd^c\varphi_j,$$

qui est indépendante du choix des trivialisations. De plus, la classe de cohomologie de cette forme est indépendante du choix de la métrique h. C'est la première classe de Chern de L, notée $c_1(L) \in H^2_{DR}(X,\mathbb{R})$.

Le fait que $dd^c\varphi_j = dd^c\varphi_k$ résulte aussitôt de ce que les poids sont liés par la relation $e^{-\varphi_k} = e^{-\varphi_j}|g_{jk}|$, i.e. $\varphi_j = \varphi_k + \log|g_{jk}|$, le terme $\log|g_{jk}|$ ayant un Hessien nul sur $U_j \cap U_k$. Si l'on change la métrique h, en la remplaçant disons par $h' = h\,e^{-2\psi}$, les poids φ_j se trouvent être remplacés par $\varphi_j + \psi$. On a donc

$$\Theta_{h'}(L) = \Theta_h(L) + dd^c\psi$$

et la classe de cohomologie globale est inchangée. □

(4.4) EQUATION DE LELONG-POINCARÉ GÉNÉRALISÉE. — *Soit f une section méromorphe d'un fibré holomorphe en droites muni d'une métrique hermitienne h. On a au sens des courants*

$$dd^c \log ||f||_h = [D_f] - \Theta_h(L).$$

En particulier, la classe de cohomologie $\{D_f\} \in H^2_{DR}(X,\mathbb{R})$ est égale à $c_1(L)$; elle ne dépend donc pas de f.

Preuve. — Si $\xi_j(x)$ est l'expression de $f(x)$ dans la carte U_j, on a $||f(x)||_h = |\xi(x)| e^{-\varphi_j(x)}$, d'où

$$dd^c \log ||f||_h = dd^c(\log|\xi_j| - \varphi_j) = [D_{\xi_j}] - \Theta_h(L)$$

d'après (4.1) et la définition de $\Theta_h(L)$. On définit bien entendu le diviseur de f par $D_f = D_{\xi_j}$ dans U_j. La dernière affirmation résulte du fait que $dd^c(\log\|f\|_h)$ a une classe de cohomologie nulle. □

Si X est une surface de Riemann compacte ($\dim_{\mathbb{C}} X = 1$), le diviseur D_f consiste simplement en une suite finie de points (x_j) affectés de multiplicités λ_j, d'où $[D_f] = \sum \lambda_j \delta_{x_j}$. Par intégration de l'égalité $\{D_f\} = c_1(L)$ sur X, on voit que le diviseur de toute section méromorphe satisfait l'égalité

$$\sum \lambda_j = \int_X c_1(L).$$

L'entier $d^\circ(L) = \int_X c_1(L)$ est appelé degré de L.

Plus généralement si X est une variété compacte possèdant une métrique kälérienne ω, c'est à dire une $(1,1)$-forme définie positive $\omega = i\sum \omega_{jk}(z) dz_j \wedge d\overline{z}_k$ telle que $d\omega = 0$, l'aire algébrique du diviseur D_f relativement à la métrique riemannienne induite par ω est indépendante de f :

$$\int_X [D_f] \wedge \omega^{n-1} = \int_X c_1(L) \wedge \omega^{n-1}, \tag{4.5}$$

le second membre ne dépendant pas du représentant choisi de $c_1(L)$ en vertu du théorème de Stokes. Ce nombre est encore appelé le degré de D_f (ou de L) par rapport à ω ; ce n'est plus en général un entier, sauf si la classe de cohomologie de ω appartient à $H^2(X, \mathbb{Z})$.

(4.6) EXEMPLE.— Sur $\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\mathbb{C}^\star$, on considère le fibré tautologique noté $O(-1)$, dont les fibres sont données par

$$O_{[z]}(-1) = \mathbb{C}z \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad \forall [z] \in \mathbb{P}^n, \quad z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}.$$

C'est un sous-fibré de rang 1 du fibré trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. On note $O(1)$ son fibré dual, et pour tout entier $k > 0$, on note $O(k)$ (resp. $O(-k)$) la puissance tensorielle k-ième de $O(1)$ (resp. $O(-1)$). Chaque forme linéaire $u \in (\mathbb{C}^{n+1})^\star$ induit par restriction une forme linéaire sur les fibres $\mathbb{C}z$ de $O(-1)$, c'est-à-dire une section de $O(1)$. Par suite, un polynôme homogène $P \in S^k(\mathbb{C}^{n+1})^\star$ de degré k en les variables $(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ induit une section de $O(k)$; il est bien connu que ce sont précisément les sections holomorphes de $O(k)$ sur $\mathbb{P}^n$.

Munissons $O(-1)$ de la métrique hermitienne induite par la métrique canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$ et les $O(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, des métriques correspondantes $|\ |_{FS}$, dites de Fubini-Study. Alors la section P du fibré $O(k) = O(-k)^\star$ associe à l'élément $z^{(k)} \in S^k(\mathbb{C}z) = O(-k)_{[z]}$ la valeur $P(z)$, sa norme est donc $\|P\|_{FS}([z]) = |P(z)|/|z|^k$. L'équation de Lelong-Poincaré donne alors

$$dd^c \log \|P\|_{FS} = [D_P] - k\omega$$

où $[D_P]$ est le diviseur $P(z) = 0$ dans $\mathbb{P}^n$ et où $\omega = \Theta_{FS}(O(1))$. Dans la carte $z_i \neq 0$, cette forme est définie en coordonnées non homogènes $\zeta_j = z_j/z_i$ par

$$\omega([z]) = dd^c \log|z| = \frac{1}{2} dd^c \log\left(1 + |\zeta_0|^2 + \ldots + |\widehat{\zeta_i}|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2\right).$$

La forme ω est invariante par l'action du groupe unitaire $U(n+1)$; elle est clairement définie positive àl'origine $\zeta = 0$ de chaque carte, donc définie positive partout par transitivité. La formule (4.5) appliquée à $L = O(k)$ donne

$$\mathrm{aire}_\omega(D_P) = \int_{\mathbb{P}^n} [D_P] \wedge \omega^{n-1} = k \int_{\mathbb{P}^n} \omega^n.$$

En prenant $P(z) = z_n$ de degré 1, on a $D_P = \mathbb{P}^{n-1} = P(\mathbb{C}^n \times \{0\}) \subset \mathbb{P}^n$ et il vient $\int_{\mathbb{P}^{n-1}} \omega^{n-1} = \int_{\mathbb{P}^n} \omega^n$, d'où par récurrence $\int_{\mathbb{P}^n} \omega^n = \int_{\mathbb{P}^1} \omega = \int_{\mathbb{P}^1} \delta_{\mathbb{P}^0} = 1$. On a donc

$$\mathrm{aire}_\omega(D_P) = k = \mathrm{d}^\circ(P).$$

(4.7) DÉFINITION. — *Soit X une variété complexe compacte. On dit qu'un fibré en droites L est positif, et on note $L > 0$, si L possède une métrique hermitienne h telle que la $(1,1)$-forme $\Theta_h(L)$ soit définie positive.*

La notion de fibré positif est importante en vertu du célèbre théorème de plongement de Kodaira [Ko54] : une variété complexe compacte X est projective (i.e. isomorphe à une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}^N$ pour N assez grand) si et seulement si X possède un fibré en droites $L > 0$; voir par exemple [G-H78] ou [Ws73].

Soient maintenant $\sigma_0, \ldots, \sigma_N$ un système de sections holomorphes linéairement indépendantes d'un fibré en droites hermitien (L, h) sur une variété complexe X. A tout point $w \in \mathbb{C}^{N+1} \smallsetminus \{0\}$ est associée naturellement une section $\sigma_w = w_0\sigma_0 + \ldots + w_N\sigma_N$; son diviseur D_w ne dépend bien sûr que de l'image $[w] \in \mathbb{P}^N$. On a alors la formule de moyenne suivante:

(4.8) PROPOSITION. — *La valeur moyenne des courants $[D_w]$ relativement au volume de Fubini-Study est donnée par*

$$\int_{\mathbb{P}^N} [D_w]\, \omega^N([w]) = dd^c \frac{1}{2} \log\left(||\sigma_0||_h^2 + \ldots + ||\sigma_N||_h^2\right) + \Theta_h(L)$$

en tant qu'intégrale vectorielle sur $\mathbb{P}^N$ à valeurs dans $'D_{1,1}(X)$. En particulier, le membre de droite est un courant positif fermé, indépendant de la métrique h. Son support singulier consiste en l'ensemble analytique des zéros communs aux sections σ_j.

Preuve. — La preuve s'obtient grâce à l'identité

$$\int_{\mathbb{P}^N} \log \frac{|w \cdot a|}{||w||}\, \omega^N([w]) = \log||a|| - \mathrm{Cte}$$

pour tout vecteur $a \in \mathbb{C}^{N+1}$, qui résulte aussitôt de l'homogénéïté en a et de l'invariance par rotation. En substituant $(\sigma_0(z), \ldots, \sigma_N(z))$ à a, il vient

$$\int_{\mathbb{P}^N} \log \frac{||w_0\sigma_0(z) + \ldots + w_N\sigma_n(z)||_h}{||w||} \omega^N([w])$$
$$= \frac{1}{2} \log \left(||\sigma_0(z)||_h^2 + \ldots + ||\sigma_N(z)||_h^2\right) - \text{Cte}.$$

Le résultat voulu se déduit alors de la formule de Lelong-Poincaré en calculant dd^c par rapport à $z \in X$. □

Cette dernière formule met bien en évidence la souplesse de calcul autorisée par l'usage des courants positifs: on peut manipuler dans un même formalisme des diviseurs (objets algébriques), mais aussi des moyennes intégrales de diviseurs, des formes différentielles fermées de classe C^∞ .... A noter aussi le résultat de compacité faible suivant, qui assure l'existence de courants limites.

(4.9) PROPOSITION.— *Soit (T_ν) une suite de courants positifs fermés sur une variété kählérienne compacte X, appartenant à une même classe de cohomologie. Alors on peut en extraire une sous-suite convergeant vers un courant limite T.*

Preuve.— Soit (p,p) la bidimension des courants T_ν et soit ω une métrique kählérienne sur X. L'intégrale $\int_X T_\nu \wedge \omega^p$ est indépendante de ν. Or $T_\nu \wedge \omega^p = \sum T_{\nu,I,I}$ relativement à une base ω-orthonormée de $\Lambda^\bullet T^\star X$. Comme la trace d'une matrice hermitienne semi-positive majore toujours les coefficients non diagonaux, on voit que les mesures $|T_{\nu,I,J}|$ sont de masse uniformément bornée dans tout compact des ouverts de carte considérés. Par suite on peut en extraire des sous-suites faiblement convergentes. □

(4.10) EXERCICE.— Vérifier que si Γ_d est la courbe de Fermat $z_0^d + z_1^d + z_2^d = 0$ dans $\mathbb{P}^2$, alors la suite de $\mathbb{Q}$-diviseurs $\frac{1}{d}[\Gamma_d]$ converge vers le courant limite T sur $\mathbb{P}^2$ défini en coordonnées homogènes par

$$T = dd^c \log \max(|z_0|, |z_1|, |z_2|).$$

Indication: $\frac{1}{d} \log |z_0^d + z_1^d + z_2^d|$ converge vers $\log \max(|z_0|, |z_1|, |z_2|)$ dans l'espace $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}^3)$.
Question complémentaire: montrer que le support de T est

$$\bigcup_{i \neq j \neq k} \left\{[z] \in \mathbb{P}^2\,;\ |z_i| \leq |z_j| = |z_k|\right\}$$

et que ce support est de dimension réelle 3. De plus T est indécomposable dans le cône des courants positifs ! (voir [De82b]).

5. Produits de courants

Soit X une variété analytique complexe de dimension n, u une fonction psh sur X et T un courant positif fermé de bidimension (p,p), c'est-à-dire de bidegré $(n-p,n-p)$. Notre souhait est de définir le produit $dd^c u \wedge T$ même lorsque ni u ni T ne sont réguliers. A priori, le produit n'a pas de sens bien clair puisque $dd^c u$ and T sont des courants à coefficients mesures et que les mesures ne peuvent être en général multipliées.

Supposons d'abord que u soit une fonction psh localement bornée sur X. Alors le courant uT est bien défini puisque u est une fonction borélienne bornée partout définie et que T est à coefficients mesures. Suivant une idée de Bedford-Taylor [B-T82] (voir aussi [CLN69]), on définit

$$dd^c u \wedge T := dd^c(uT)$$

où $dd^c(\ )$ est calculé au sens des distributions.

(5.1) Proposition.— *Le produit extérieur $dd^c u \wedge T$ est encore un courant positif fermé.*

Preuve.— On sait que sur tout ouvert de carte u est limite décroissante de fonctions psh u_ν de classe C^∞, obtenues par exemple par convolution avec un noyau régularisant de support $B(0,1/\nu)$. Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre que $u_\nu T$ converge faiblement vers uT, donc $dd^c(u_\nu T)$ converge faiblement vers $dd^c(uT)$ par continuité faible des différentiations. Cependant u_ν est C^∞, donc $dd^c(u_\nu T)$ coïncide avec le produit usuel $dd^c u_\nu \wedge T$, qui est un courant positif. La limite faible $dd^c u \wedge T$ est donc positive (et évidemment fermée). □

Etant donné des fonctions psh localement bornées $u_1,\ldots,u_q$, on peut donc définir par récurrence sur q des courants positifs fermés

$$dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T = dd^c(u_1 dd^c u_2 \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T).$$

Notons qu'il est parfois possible de calculer le produit $dd^c u \wedge T$ par ce procédé même lorsque la fonction u n'est pas localement bornée: c'est le cas si le courant uT est de masse localement finie sur X.

(5.2) Exemple.— Soit à calculer le produit $[\Gamma_1] \wedge [\Gamma_2]$ des courants d'intégration sur les courbes $\Gamma_1 : z^2 = w^3$ et $\Gamma_2 : z^3 = w^5$ dans $\mathbb{C}^2$. L'équation de Lelong-Poincaré donne $[\Gamma_1] = dd^c \log|z^2 - w^3|$. On peut donc essayer de calculer

$$[\Gamma_1] \wedge [\Gamma_2] = dd^c\big(\log|z^2 - w^3|\,[\Gamma_2]\big).$$

Or Γ_2 admet la paramétrisation bijective (non birégulière!) $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^5, t^3)$. Le courant $\log|z^2 - w^3|[\Gamma_2]$ est donc l'image directe par γ du courant

$$\log|(t^5)^2 - (t^3)^3|\,[\mathbb{C}] = 9\log|t| + \log|t-1|$$

(noter que $[\mathbb{C}]$ s'identifie à la fonction 1). Le dd^c de ce courant est $9\delta_0 + \delta_1$ et on trouve donc

$$[\Gamma_1] \wedge [\Gamma_2] = 9\delta_0 + \delta_p, \qquad p = (1,1).$$

Les courbes Γ_1 et Γ_2 se rencontrent donc avec mutiplicité 9 en $(0,0)$, 1 en $(1,1)$ (sur $\mathbb{P}^2$, il y a aussi un point d'intersection à l'infini, de multiplicité 5).

(5.3) REMARQUE.— En général, il n'est pas possible de définir les self-intersections T^p d'un courant positif fermé si l'on ne fait pas d'hypothèses adéquates sur les pôles. Prenons par exemple pour X la surface complexe compacte fibrée au dessus de $\mathbb{P}^1$ obtenue en compactifiant l'espace total du fibré $O(k) \to \mathbb{P}^1$ par adjonction d'un point à l'infini à chaque fibre (surface F_k de Hirzebruch). On a donc une projection $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ à fibres $\mathbb{P}^1$, et deux sections remarquables de π, à savoir d'une part la section nulle Z de $O(k)$ et d'autre part la section à l'infini H. Par ailleurs le fibré image réciproque $\pi^\star O(k)$ admet une section méromorphe tautologique, égale à l'application identique sur $X \smallsetminus H = O(k)$, de diviseur $Z - H$. Ceci entraîne en cohomologie $\{Z\} - \{H\} = \pi^\star c_1(O(k))$, et comme Z, H ne se coupent pas on trouve

$$\int_X \{Z\}^2 = \int_X [Z] \wedge \pi^\star c_1(O(k)) = \int_Z \pi^\star c_1(O(k)) = \int_{\mathbb{P}^1} c_1(O(k)) = k.$$

La self-intersection de $\{Z\}$ est donc négative si $k < 0$, ce qui interdit de pouvoir définir de manière cohérente le carré du courant $[Z]$ sur X.

Le théorème suivant donne une condition générale à peu près optimale assurant l'existence des produits de courants de type $(1,1)$. Le problème analogue pour les courants de bidegré quelconque est encore largement ouvert (avis aux amateurs !)

(5.4) THÉORÈME.— *Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) et soient $u_1, \ldots, u_q$ des fonctions psh. On note* Supp$T$ *le support de T et $L(u_j)$ l'ensemble des points au voisinage desquels u_j n'est pas bornée inférieurement. On suppose que pour tout choix d'indices $j_1 < \ldots < j_m$ dans $\{1, \ldots, q\}$ l'intersection $L(u_{j_1}) \cap \ldots \cap L(u_{j_m}) \cap \operatorname{Supp} T$ est contenue dans un ensemble analytique de dimension $\leq p - m$ (ou plus généralement dans un ensemble de $(2p - 2m + 1)$-mesure de Hausdorff nulle). Alors les courants $u_1 dd^c u_2 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ et $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ sont bien définis et de masse localement finie sur X.*

Preuve.— La démonstration générale est trop longue pour que nous puissions la détailler ici (voir [De91a]). Pour donner un aperçu des idées utilisées, nous allons raisonner dans le cas particulier des produits uT, $dd^u \wedge T$, en supposant de plus que l'ensemble $L(u) \cap \operatorname{Supp} T$ est discret (par récurrence, ceci résoudra au moins le cas important où les fonctions u_j ont des pôles isolés).

Soit $\Omega = B(x_0, r)$ une boule centrée en un point de $L(u) \cap \operatorname{Supp} T$, telle que $\overline{\Omega}$ ne rencontre cet ensemble en aucun autre point. On pose $\psi(z) = |z - x_0|^2 - r^2$. Quitte à retrancher une constante à u, on peut supposer $u \leq -1$ sur $\overline{\Omega}$. Soit $\Omega' = B(x_0, r/2)$. Alors $\overline{\Omega} \smallsetminus \Omega'$ ne recontre pas $L(u) \cap \operatorname{Supp} T$. Il existe donc un voisinage ω de $(\overline{\Omega} \smallsetminus \Omega') \cap \operatorname{Supp} T$ tel que $L(u) \cap \overline{\omega} = \emptyset$ et une constante M telle que $u \geq -M$ sur $\overline{\omega}$. Introduisons

$$u_s(z) = \begin{cases} \max\{u(z), A\psi(z)\} & \text{sur } \omega, \\ \max\{u(z), s\} & \text{sur } \Omega' = \{\psi < -\delta\}, \quad \delta = 3r^2/4. \end{cases}$$

On fixe $A \geq M/\delta$ et on prend $s \leq -M$, de sorte que la définition de u_s soit bien cohérente:

$$\max\{u(z), A\psi(z)\} = \max\{u(z), s\} = u(z) \quad \text{sur } \omega \cap \Omega'.$$

Observons que u_s est défini le voisinage $\omega \cup \Omega'$ de $\overline{\Omega} \cap \operatorname{Supp} T$. Maintenant, le théorème de Stokes implique

$$\begin{aligned} \int_\Omega dd^c u_s \wedge T \wedge (dd^c\psi)^{p-1} - \int_\Omega A dd^c\psi \wedge T \wedge (dd^c\psi)^{p-1} \\ = \int_\Omega dd^c\big[(u_s - A\psi) T \wedge (dd^c\psi)^{p-1}\big] = 0, \end{aligned}$$

le courant $[\ldots]$ étant à support compact dans Ω puisque $u_s = A\psi$ sur un voisinage de $\partial\Omega \cap \operatorname{Supp} T$. Comme u_s et ψ s'annulent toutes deux sur $\partial\Omega$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_s T \wedge (dd^c\psi)^p &= \int_\Omega \psi dd^c u_s \wedge T \wedge (dd^c\psi)^{p-1} \\ &\geq -\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega T \wedge dd^c u_s \wedge (dd^c\psi)^{p-1} \\ &= -\|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} A \int_\Omega T \wedge (dd^c\psi)^p. \end{aligned}$$

Finalement, prenons $A = M/\delta$ et faisons tendre s vers $-\infty$, en tenant compte de ce que $u \geq -M$ sur ω. Il vient

$$\begin{aligned} \int_\Omega u T \wedge (dd^c\psi)^p &\geq -M \int_\omega T \wedge (dd^c\psi)^p + \lim_{s \to -\infty} \int_{\Omega'} u_s T \wedge (dd^c\psi)^p \\ &\geq -\big(M + \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)} M/\delta\big) \int_\Omega T \wedge (dd^c\psi)^p. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est finie, donc uT est bien de masse localement finie près de x_0. □

Dans le cas particulier où $u_j = \log|f_j|$ avec f_j holomorphe non nulle sur X, on voit que le produit d'intersection des diviseurs associés $[D_j] = dd^c u_j$ est bien défini dès que les supports $|D_j|$ satisfont la condition $\operatorname{codim} |D_{j_1}| \cap \ldots \cap |D_{j_m}| = m$ for every m. De même, si $T = [A]$ est un cycle analytique de dimension p, le Th. (5.4) montre que $[D] \wedge [A]$ est bien défini pour tout diviseur D tel que $\dim |D| \cap |A| = p - 1$. Ces observations conduisent aisément au résultat suivant.

(5.5) COROLLAIRE. — *Supposons que $D_1, \ldots, D_q$ vérifient la condition de dimension d'intersection ci-dessus et soient $(C_k)_{k \geq 1}$ les composantes irréductibles de l'intersection ensembliste $|D_1| \cap \ldots \cap |D_q|$. Alors il existe des entiers $m_k > 0$ tels que*

$$[D_1] \wedge \ldots \wedge [D_q] = \sum m_k [C_k].$$

Le nombre m_k est appelé multiplicité d'intersection de $D_1, \ldots, D_q$ le long de C_k.

Preuve.— Le produit est de bidegré (q, q), à support dans $C = \bigcup C_k$ et on a $\operatorname{codim} C = q$. Il résulte du Lemme (3.7) que le produit est une combinaison linéaire $\sum m_k [C_k]$ avec des coefficients $m_k \in \mathbb{R}$. La positivité entraîne $m_k \in \mathbb{R}_+$. Pour voir que $m_k \in \mathbb{Z}$, il suffit de perturber légèrement les diviseurs de sorte qu'il se coupent transversalement (le problème est local). Le cycle intersection est alors une sous-variété lisse; la multiplicité m_k est simplement le nombre de feuilles qui viennent s'empiler sur la composante C_k lorsqu'on passe à la limite (on utilise ici la continuité faible séparément par rapport à chaque facteur). □

6. Nombres de Lelong et multiplicités

On suppose que la variété complexe X est munie d'une fonction $\varphi : X \longrightarrow [-\infty, +\infty[$ psh et continue, possédant éventuellement des pôles $-\infty$. Les ensembles

$$S(r) = \{x \in X \,;\, \varphi(x) = r\}, \tag{6.1}$$

$$B(r) = \{x \in X \,;\, \varphi(x) < r\}, \tag{6.1'}$$

$$\overline{B}(r) = \{x \in X \,;\, \varphi(x) \leq r\} \tag{6.1''}$$

seront appelés pseudo-sphères et pseudo-boules associées à φ. L'exemple le plus simple que nous ayons à l'esprit est le cas de la fonction $\varphi(z) = \log |z - a|$ sur un ouvert $X \subset \mathbb{C}^n$; dans ce cas $B(r)$ est la boule euclidienne de centre a et de rayon e^r ; de plus les formes

$$\frac{1}{2} dd^c e^{2\varphi} = \frac{i}{2\pi} d'd''|z|^2, \qquad dd^c \varphi = \frac{i}{\pi} d'd'' \log |z - a|$$

représentent respectivement la métrique hermitienne plate de $\mathbb{C}^n$ et l'image inverse sur $\mathbb{C}^n$ de la métrique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^{n-1}$.

(6.2) DÉFINITION. — *Soit T un courant positif fermé de bidimension (p, p) sur X tel que $S(-\infty) \cap \operatorname{Supp} T$ soit fini. Soit V un voisinage compact* *de* $S(-\infty)\cap \operatorname{Supp} T$ *et* $R_V = \inf_{\partial V\cap \operatorname{Supp} T}\varphi$*; on suppose dans la suite que* $B(r)$ *et* $S(r)$ *sont les boules et sphères associées à* φ *dans l'ouvert* $\Omega = V^\circ$. *Pour tout réel* $r \in\,]-\infty, R_V[$ *on pose*

$$\nu(T,\varphi,r) = \int_{B(r)} T\wedge (dd^c\varphi)^p,$$

$$\nu(T,\varphi) = \int_{S(-\infty)} T\wedge (dd^c\varphi)^p = \lim_{r\to-\infty}\nu(T,\varphi,r),$$

Le nombre $\nu(T,\varphi)$ *sera appelé nombre de Lelong généralisé de* T *par rapport au poids* φ.

Observons que le Th. (5.4) assure l'existence du produit $T\wedge(dd^c\varphi)^p$ sous les hypothèses ci-dessus. La formule suivante permet d'exprimer les quantités $\nu(T,\varphi,r)$ sans faire apparaître de pôles dans le poids.

(6.3) LEMME. — *Pour toute fonction convexe croissante* $\chi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *on a la formule*

$$\int_{B(r)} T\wedge (dd^c\chi\circ\varphi)^p = \chi'(r-0)^p\,\nu(T,\varphi,r)$$

où $\chi'(r-0)$ *désigne la dérivée à gauche de* χ *en* r.

Preuve. — On se ramène par régularisation au cas où T, χ, (resp. φ) sont de classe C^∞ (resp. de classe C^∞ sur $X\setminus S(-\infty)$). Le théorème de Stokes donne alors

$$\int_{B(r)} T\wedge (dd^c\chi\circ\varphi)^p = \int_{S(r)} T\wedge (dd^c\chi\circ\varphi)^{p-1}\wedge d^c(\chi\circ\varphi).$$

Or $(dd^c\chi\circ\varphi)^{p-1}\wedge d^c(\chi\circ\varphi) = \chi'(\varphi)^p(dd^c\varphi)^{p-1}\wedge d^c\varphi$. On a donc

$$\begin{aligned}\int_{B(r)} T\wedge (dd^c\chi\circ\varphi)^p &= \chi'(r)^p\int_{S(r)} T\wedge (dd^c\varphi)^{p-1}\wedge d^c\varphi\\ &= \chi'(r)^p\int_{B(r)} T\wedge (dd^c\varphi)^p. \qquad\square\end{aligned}$$

On obtient en particulier $\int_{B(r)} T\wedge(dd^c e^{2\varphi})^p = (2e^{2r})^p\nu(T,\varphi,r)$, d'où la formule

$$\nu(T,\varphi,r) = e^{-2pr}\int_{B(r)} T\wedge\Big(\frac12 dd^c e^{2\varphi}\Big)^p. \tag{6.4}$$

Soit maintenant X un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $\varphi(z) = \log|z-a|$, $a\in X$. La formule précédente donne

$$\nu(T,\varphi,\log r) = r^{-2p}\int_{|z-a|<r} T\wedge\Big(\frac{i}{2\pi}d'd''|z|^2\Big)^p.$$

La mesure positive $\sigma_T = \frac{1}{p!}T \wedge (\frac{i}{2}d'd''|z|^2)^p = 2^{-p}\sum T_{I,I}\,.\,i^n dz_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_n$ est appelée la mesure trace de T. On obtient

$$(6.5) \qquad \nu(T,\varphi,\log r) = \frac{\sigma_T\big(B(a,r)\big)}{\pi^p r^{2p}/p!}$$

et $\nu(T,\varphi)$ est la limite de ce quotient lorsque $r \to 0$. Cette limite est appelée nombre de Lelong (ordinaire) de T au point a et notée $\nu(T,a)$: cette définition est précisément celle donnée initialement par P. Lelong (voir [Le68]). Mentionnons une conséquence simple mais importante.

(6.6) CONSÉQUENCE. — *Le quotient $\sigma_T\big(B(a,r)\big)/r^{2p}$ est fonction croissante de r. De plus, pour tout ensemble compact $K \subset X$ et tout $r_0 < d(K,\partial X)$ on a*

$$\sigma_T\big(B(a,r)\big) \le Cr^{2p} \quad \text{pour } a \in K \text{ et } r \le r_0,$$

où $C = \sigma_T\big(K + \overline{B}(0,r_0)\big)/r_0^{2p}$.

Tous ces résultats sont particulièrement intéressants lorsque $T = [A]$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique $A \subset X$ de dimension pure p. Alors $\sigma_T\big(B(a,r)\big)$ est l'aire euclidienne de $A \cap B(a,r)$, tandis que $\pi^p r^{2p}/p!$ est l'aire de la boule de rayon r dans $\mathbb{C}^p$. Par suite $\nu([A],\varphi,\log r)$ est le rapport de ces aires et le nombre de Lelong $\nu([A],a)$ est la limite du rapport. Il est clair que $\nu([A],a) = 0$ si $a \notin A$ et que $\nu([A],a) = 1$ si a est un point régulier de A. On verra plus loin que $\nu([A],a)$ est toujours un entier. Nous démontrons tout d'abord un théorème de comparaison pour les nombres de Lelong à poids.

(6.7) THÉORÈME DE COMPARAISON. — *Soit T un courant positif fermé de bidimension (p,p) sur X et $\varphi,\psi : X \to [-\infty,+\infty[$ des fonctions psh continues ayant même ensemble de pôles $\varphi^{-1}(-\infty) = \psi^{-1}(-\infty)$. On suppose que $\varphi^{-1}(-\infty) \cap \operatorname{Supp} T$ est fini et que*

$$\ell := \limsup \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} < +\infty \quad \textit{quand } x \in \operatorname{Supp} T \textit{ et } \varphi(x) \to -\infty.$$

Alors $\nu(T,\psi) \le \ell^p \nu(T,\varphi)$, et l'égalité a lieu si $\ell = \lim \psi/\varphi$.

Preuve.— D'après la définition (6.2) on a

$$\nu(T,\lambda\varphi) = \lambda^p \nu(T,\varphi)$$

pour tout scalaire $\lambda > 0$. Il suffit donc de vérifier l'inégalité $\nu(T,\psi) \le \nu(T,\varphi)$ sous l'hypothèse $\limsup \psi/\varphi < 1$. Pour tout $c > 0$, on considère la fonction psh $u_c = \max(\psi - c, \varphi)$. Soit V un voisinage compact de $\varphi^{-1}(-\infty) \cap \operatorname{Supp} T$ et $R_V = \inf_{\partial V \cap \operatorname{Supp} T} \varphi$. On fixe $r < R_V$. Pour $c > 0$ assez grand, on a $u_c = \varphi$ sur $\varphi^{-1}([r-1,r])$, donc le théorème de Stokes entraîne

$$\nu(T,\varphi,r) = \nu(T,u_c,r) \ge \nu(T,u_c).$$

L'hypothèse $\limsup \psi/\varphi < 1$ implique d'autre part qu'il existe $R' < 0$ tel que $u_c = \psi - c$ sur $\{u_c < R'\}$. On en déduit aussitôt

$$\nu(T, u_c) = \nu(T, \psi - c) = \nu(T, \psi),$$

par conséquent $\nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi)$. □

Supposons en particulier que $z^k = (z_1^k, \ldots, z_n^k)$, $k = 1, 2$, soient des systèmes de coordonnées locales centrées au point x et soit

$$\varphi_k(z) = \log|z^k| = \log\left(|z_1^k|^2 + \ldots + |z_n^k|^2\right)^{1/2}, \qquad k = 1, 2.$$

On a $\lim_{z\to x} \varphi_2(z)/\varphi_1(z) = 1$, donc $\nu(T, \varphi_1) = \nu(T, \varphi_2)$ d'après le Théorème (6.7).

(6.8) COROLLAIRE. — *Les nombres de Lelong $\nu(T, x)$ sont invariants par changement de coordonnées locales.*

Supposons maintenant que T soit le courant d'intégration sur un ensemble analytique $A \subset X$ de dimension pure p. Pour tout point $x \in A$, il existe des coordonnées locales

$$z = (z', z''), \qquad z' = (z_1, \ldots, z_p), \quad z'' = (z_{p+1}, \ldots, z_n)$$

et des boules $B' \subset \mathbb{C}^p$, $B'' \subset \mathbb{C}^{n-p}$, relatives à ces coordonnées, de rayons respectifs r', r'', telles que $A \cap (B' \times B'')$ soit contenu dans un cône d'équation $|z''| \leq C|z'|$. Dans ces conditions, si l'on prend $r' \leq Cr''$, la projection

$$\pi : A \cap (B' \times B'') \longrightarrow B'$$

définit un revêtement ramifié ayant un nombre fini q de feuillets. On notera $S \subset B'$ l'ensemble de ramification.

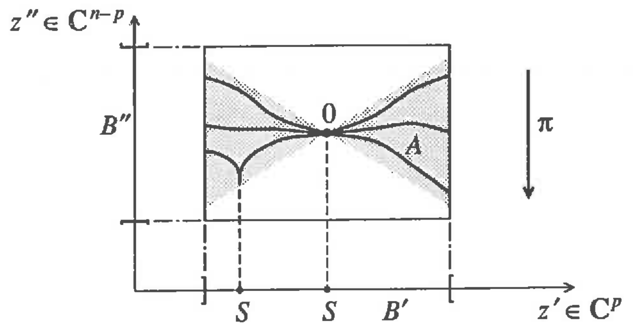


Fig. 4. Revêtement ramifié de A sur B'.

En fait, les propriétés énoncées ci-dessus sont vérifiées dès que les coordonnées (z', z'') sont choisies de manière générique. Pour le voir, on choisit une équation analytique locale $f(z) = 0$ de A et on utilise le théorème de préparation de Weierstrass pour mettre cette équation sous la forme

$$f(z) = z_n^s + \sum_{k=1}^{s} a_k(\hat{z}) z_n^{s-k} = 0,$$

où $\hat{z} = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ et où s est l'ordre d'annulation de f en 0. Il en résulte que a_k doit s'annuler à l'ordre k au moins en 0, donc $|a_k(\hat{z})| = O(|\hat{z}|^k)$ et les racines z_n sont telles que $|z_n| \leq C|\hat{z}|$. La projection $z \mapsto \hat{z}$ est alors un morphisme fini de degré $\leq d$ de A sur un ensemble analytique A' de dimension p dans $\mathbb{C}^{n-1}$. On conclut par récurrence sur n.

(6.9) THÉORÈME (P. Thie [Th69]). — *On a $\nu([A], x) = q$, en particulier le nombre q de feuillets du revêtement ramifié π en indépendant du choix des coordonnées (z', z'') comme ci-dessus. Ce nombre est appelé multiplicité de A au point x.*

Preuve. — Quand z tend vers x , les fonctions

$$\varphi(z) = \log|z| = \log(|z'|^2 + |z''|^2)^{1/2}, \qquad \psi(z) = \log|z'|$$

sont équivalentes sur le germe (A, x) quand z tend vers 0. D'après le théorème de comparaison (6.7) ceci entraîne

$$\nu([A], x) = \nu([A], \varphi) = \nu([A], \psi).$$

La formule (6.4) appliquée à ψ donne maintenant

$$\begin{aligned}
\nu([A], \psi, \log t) &= (2t^2)^{-p} \int_{A \cap \{\psi < \log t\}} (dd^c e^{2\psi})^p \\
&= (2t^2)^{-p} \int_{A \cap \{|z'| < t\}} (\pi^\star dd^c |z'|^2)^p \\
&= (2t^2)^{-p}\, q \int_{\mathbb{C}^p \cap \{|z'| < t\}} (dd^c |z'|^2)^p = q,
\end{aligned}$$

d'où le théorème. On a utilisé ici le fait que π est un revêtement étale à q feuillets en dehors de $\pi^{-1}(S)$ et que S et $\pi^{-1}(S)$ sont de mesure nulle. □

Soit maintenant T un courant positif quelconque de bidimension (p, p). Pour $c > 0$, on introduit les ensembles

$$E_c(T) = \{x \in X\,;\ \nu(T, x) \geq c\}.$$

Les nombres de Lelong satisfont alors l'importante propriété de semi-continuité suivante, démontrée par [Siu74] à la suite des travaux de Bombieri [Bo70] et Skoda [Sk72].

(6.10) THÉORÈME ([Siu74]). — *Si T est un courant positif fermé de bidimension (p, p), les ensembles de niveau $E_c(T)$, $c > 0$, sont des ensembles analytiques de dimension $\leq p$.*

La démonstration est malheureusement trop difficile pour que nous puissions l'expliquer ici. Elle repose essentiellement sur la théorie des estimations L^2 de Hörmander pour l'opérateur $\overline{\partial}$ et sur la construction de fonctions potentiels adéquates, d'après des idées de Skoda [Sk72]. Nous renvoyons à [Ki79], [De87] et [De81a] pour les détails. Le théorème (6.10) entraîne à son tour la formule de décomposition suivante.

(6.11) Formule de décomposition de Siu. — *Si T est un courant positif fermé de bidimension (p,p), il y a une unique décomposition de T comme somme d'une série convergente (peut-être finie)*

$$T = \sum_{j\geq 1} \lambda_j [A_j] + R, \qquad \lambda_j > 0,$$

où $[A_j]$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique irréductible $A_j \subset X$ de dimension p, λ_j le nombre de Lelong générique de T sur A_j, et où R est un courant positif fermé résiduel ayant la propriété que $\dim E_c(R) < p$ *pour tout* $c > 0$.

Nous aurons finalement besoin d'un deuxième théorème de comparaison pour les nombres de Lelong, relatif aux produits d'intersection des courants.

(6.12) Théorème. — *Soient $u_1, \ldots, u_q$ et $v_1, \ldots, v_q$ des fonctions plurisousharmoniques telles que chaque q-uplet satisfait les conditions d'intersection du théorème* (5.4). *Supposons de plus que $u_j = -\infty$ sur* $\operatorname{Supp} T \cap \varphi^{-1}(-\infty)$ *et que*

$$\ell_j := \limsup \frac{v_j(z)}{u_j(z)} < +\infty \quad \textit{quand} \quad z \in \operatorname{Supp} T \smallsetminus u_j^{-1}(-\infty),\ \varphi(z) \to -\infty.$$

Alors

$$\nu(dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_q \wedge T, \varphi) \leq \ell_1 \ldots \ell_q\, \nu(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T, \varphi).$$

Preuve.— D'après l'homogénéïté en chaque facteur v_j, il est suffisant de démontrer l'inégalité avec constantes $\ell_j = 1$ sous l'hypothèse $\limsup v_j/u_j < 1$. On introduit

$$w_{j,c} = \max\{v_j - c, u_j\}.$$

Notre hypothèse entraîne que $w_{j,c}$ coïncide avec $v_j - c$ sur un voisinage $\operatorname{Supp} T \cap \{\varphi < r_0\}$ de $\operatorname{Supp} T \cap \{\varphi < -\infty\}$, donc

$$\nu(dd^c v_1 \wedge \ldots \wedge dd^c v_q \wedge T, \varphi) = \nu(dd^c w_{1,c} \wedge \ldots \wedge dd^c w_{q,c} \wedge T, \varphi)$$

pout tout c. Maintenant, fixons un voisinage V et $r < R_V$. Comme $w_{j,c}$ converge en décoissant vers u_j quand c tend vers $+\infty$, le courant $dd^c w_{1,c} \wedge \ldots \wedge dd^c w_{q,c} \wedge T$ converge faiblement vers $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ quand c tend vers $+\infty$. Un argument facile montre alors que

$$\limsup_{c\to+\infty} \nu(dd^c w_{1,c} \wedge \ldots \wedge dd^c w_{q,c} \wedge T, \varphi) \leq \nu(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T, \varphi). \quad \square$$

(6.13) COROLLAIRE. — *Si $dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T$ est bien défini, alors on a en tout point $x \in X$*

$$\nu\big(dd^c u_1 \wedge \ldots \wedge dd^c u_q \wedge T, x\big) \geq \nu(dd^c u_1, x) \ldots \nu(dd^c u_q, x)\, \nu(T, x).$$

Preuve.— On applique (6.12) avec $\varphi(z) = v_1(z) = \ldots = v_q(z) = \log|z - x|$ et on observe que $\ell_j := \limsup v_j/u_j = 1/\nu(dd^c u_j, x)$ (il n'y a rien à prouver si $\nu(dd^c u_j, x) = 0$). □

7. Inégalité de self-intersection

Etant donné un diviseur $D \geq 0$ sur une variété projective X, on a une stratification du support $|D|$ par les strates d'équimultiplicité. On cherche à majorer le degré de ces strates en fonction du degré de D. Ce problème peut se reformuler de manière beaucoup plus générale en termes de courants:

(7.1) PROBLÈME. — *Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ sur une variété kählérienne compacte (X, ω). Peut-on obtenir une borne pour le degré des composantes irréductibles de codimension p des ensembles de niveau $E_c(T)$ en termes de la classe de cohomologie $\{T\} \in H^2_{DR}(X, \mathbb{R})$?*

De manière précise, on introduit la suite $0 = b_1 \leq \ldots \leq b_n \leq b_{n+1}$ des "valeurs de saut" b_p pour lesquelles la dimension de $E_c(T)$ tombe d'une unité lorsque c excède la valeur b_p, c'est-à-dire que $\operatorname{codim} E_c(T) = p$ quand $c \in]b_p, b_{p+1}]$. Soient $(Z_{p,k})_{k \geq 1}$ les composantes de codimension p de $\bigcup_{c \in]b_p, b_{p+1}]} E_c(T)$ et soit

$$\nu_{p,k} = \min_{x \in Z_{p,k}} \nu(T, x) \in]b_p, b_{p+1}]$$

le nombre de Lelong générique de T le long de $Z_{p,k}$. Alors on a l'inégalité de self-intersection suivante.

(7.2) THÉORÈME. — *Supposons que le fibré en droites canonique $\mathcal{O}_{TX}(1)$ sur le fibré en espaces projectifs $P(T^\star X)$ possède une métrique hermitienne h telle que $\Theta_h(\mathcal{O}_{TX}(1)) + \pi^\star u \geq 0$, où $\pi : P(T^\star X) \to X$ est la projection et où u est une forme fermée semi-positive de type $(1,1)$ sur X. Pour chaque $p = 1, \ldots, n$, la classe de cohomologie de De Rham $(\{T\} + b_1\{u\}) \cdots (\{T\} + b_p\{u\})$ peut être représentée par un courant positif fermé Θ_p de bidegré (p,p) tel que*

$$\Theta_p \geq \sum_{k \geq 1} (\nu_{p,k} - b_1) \ldots (\nu_{p,k} - b_p)\, [Z_{p,k}] + (T_{\mathrm{abc}} + b_1 u) \wedge \ldots \wedge (T_{\mathrm{abc}} + b_p u)$$

où $T_{\mathrm{abc}} \geq 0$ est la partie absolument continue de la décomposition de Lebesgue de T.

Le deuxième terme $(T_{\mathrm{abc}} + b_1 u) \wedge \ldots \wedge (T_{\mathrm{abc}} + b_p u)$ peut être considéré comme une évaluation de "l'excès d'intersection" du membre de gauche par rapport au cycle défini par les $Z_{p,k}$. Cet excès d'intersection est en général difficile à exprimer par des méthodes algébriques (il n'y a pas de traduction algébrique simple de ce que représente T_{abc}, T_{abc} mesure intuitivement le degré de liberté des déformations équisingulières de T). En négligeant l'excès d'intersection et en prenant le produit extérieur avec ω^{n-p}, on obtient une majoration explicite du degré des composantes $Z_{p,k}$ par un polynôme de degré p en la classe de cohomologie de T :

(7.3) COROLLAIRE. — *Si ω est une métrique kählérienne sur X et si $\{u\}$ est une classe de cohomologie semi-positive de type $(1,1)$ telle que $c_1\big(\mathcal{O}_{TX}(1)\big) + \pi^\star\{u\}$ soit semi-positive, le degré des composantes $Z_{p,k}$ par rapport à ω satisfait l'estimation*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\nu_{p,k} - b_1)\ldots(\nu_{p,k} - b_p) \int_X [Z_{p,k}] \wedge \omega^{n-p}$$
$$\leq \big(\{T\} + b_1\{u\}\big) \cdots \big(\{T\} + b_p\{u\}\big) \cdot \{\omega\}^{n-p}.$$

La forme u doit être vue intuitivement comme un minorant de la courbure du fibré tangent. Dans le cas de l'espace projectif $X = \mathbb{P}^n$, un calcul classique montre que la courbure est positive et on peut donc prendre $u = 0$. Si $\mathrm{d}^\circ(T) = \int_X T \wedge \omega^{n-1}$ est le degré par rapport à la métrique de Fubini-Study, on obtient l'inégalité simple:

(7.4) COROLLAIRE. — *Sur $\mathbb{P}^n$, on a l'inégalité*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\nu_{p,k} - b_1)\ldots(\nu_{p,k} - b_p)\, \mathrm{d}^\circ(Z_{p,k}) \leq \big(\mathrm{d}^\circ(T)\big)^p.$$

Pour la démonstration du Théorème (7.2), on utilise un théorème de régularisation de courants qui est en quelque sorte un théorème de déplacement infinitésimal de cycles: en général, on ne peut déplacer un cycle positif, mais le déplacement devient possible si on accepte des composantes de multiplicité négative.

(7.5) LEMME ([De91b]). — *Soit T un courant positif fermé de bidegré $(1,1)$ et soit α une forme réelle de classe C^∞ ayant même classe de cohomologie que T, en sorte que $T = \alpha + dd^c\psi$. Soit $\gamma \geq 0$ une forme réelle de type $(1,1)$ à coefficients continus telle que $T \geq \gamma$. Supposons que la courbure de TX soit minorée par $-u$ comme dans (7.2). Alors pour tout $c > 0$ il existe une suite de courants réels $T_{c,k} = \alpha + dd^c\psi_{c,k}$ tels que $\psi_{c,k}$ soit C^∞ sur $X \smallsetminus E_c(T)$ et décroisse vers ψ quand k tend vers $+\infty$ (en particulier, $T_{c,k}$ est C^∞ sur $X \smallsetminus E_c(T)$ et converge faiblement vers T sur X),* *et on a*

$$T_{c,k} \geq \gamma - \lambda_{c,k} u - \varepsilon_k \omega \quad \textit{où}$$

(i) $\lambda_{c,k}(x)$ *est une suite décroissante de fonctions continues sur* X *telles que* $\lim_{k\to+\infty} \lambda_{c,k}(x) = \min\big(\nu(T,x), c\big)$ *en chaque point;*

(ii) $\lim_{k\to+\infty} \varepsilon_k = 0$,

(iii) $\nu(T_{c,k}, x) = \big(\nu(T,x) - c\big)_+$ *en chaque point* $x \in X$.

Preuve du théorème (7.2).— L'idée principale de la démonstration est de tuer les nombres de Lelong de T jusqu'à la valeur b_j, en utilisant le Lemme (7.5). Les singularités du courant T_j ainsi obtenu apparaissent alors seulement en codimension j, de sorte qu'il devient possible de définir le produit extérieur $T_1 \wedge \ldots \wedge T_p$ au moyen du Théorème (5.4).

On raisonne par récurrence sur p. Pour $p = 1$, la formule de décomposition de Siu montre que

$$T = \sum \nu_{1,k}[Z_{1,k}] + R,$$

et on a $R \geq T_{\rm abc}$ puisque la partie cycle correspond à des mesures singulières par rapport à la mesure de Lebesgue. Le résultat est donc vrai avec $\Theta_1 = T$. Maintenant, supposons que Θ_{p-1} a déjà été construit. Pour $c > b_p$, le courant $T_{c,k} = \alpha + dd^c\psi_{c,k}$ produit par le Lemme (7.5) a un ensemble de pôles de codimension $\operatorname{codim} L(\psi_{c,k}) = \operatorname{codim} E_c(T) \geq p$. Le Théorème (5.4) montre que

$$\Theta_{p,c,k} = \Theta_{p-1} \wedge (T_{c,k} + c\,u + \varepsilon_k\omega)$$

est bien défini. Si ε_k tend vers zéro assez lentement, $T_{c,k} + c\,u + \varepsilon_k\omega$ est positif par (7.5 i), donc $\Theta_{p,c,k} \geq 0$. De plus, la classe de cohomologie de $\Theta_{p,c,k}$ est égale à $\{\Theta_{p-1}\}\cdot(\{T\} + c\{u\} + \varepsilon_k\{\omega\})$ et converge à la limite vers $\{\Theta_{p-1}\}\cdot(\{T\}+c\{u\})$. Puisque la masse $\int_X \Theta_{p,c,k}\wedge\omega^{n-p}$ reste uniformément bornée, la famille $(\Theta_{p,c,k})_{c\in]b_p,b_p+1],k\geq 1}$ est relativement compacte pour la topologie faible. On définit

$$\Theta_p = \lim_{c\to b_p+0}\ \lim_{k\to+\infty} \Theta_{p,c,k},$$

peut-être après extraction d'une sous-suite faiblement convergente. Alors $\{\Theta_p\} = \{\Theta_{p-1}\}\cdot(\{T\} + b_p\{u\})$, donc

$$\{\Theta_p\} = (\{T\} + b_1\{u\})\cdots(\{T\} + b_p\{u\}).$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}
\nu(\Theta_p, x) &\geq \limsup_{c\to b_p+0}\ \limsup_{k\to+\infty}\ \nu\big(\Theta_{p-1}\wedge(T_{c,k} + c\,u + \varepsilon_k\omega), x\big)\\
&\geq \nu(\Theta_{p-1}, x) \times \limsup_{c\to b_p+0}\ \limsup_{k\to+\infty}\ \nu(T_{c,k}, x)\\
&\geq \nu(\Theta_{p-1}, x)\big(\nu(T,x) - b_p\big)_+
\end{aligned}$$

grâce à (6.13) et (7.5 iii). Par récurrence il vient

$$\nu(\Theta_p, x) \geq \big(\nu(T, x) - b_1\big)_+ \ldots \big(\nu(T, x) - b_p\big)_+,$$

en particulier, le nombre de Lelong générique de Θ_p le long de $Z_{p,k}$ est au moins égal à $(\nu_{p,k} - b_1) \ldots (\nu_{p,k} - b_p)$. Ceci implique déjà

$$\Theta_p \geq \sum_{k \geq 1} (\nu_{p,k} - b_1) \ldots (\nu_{p,k} - b_p)\,[Z_{p,k}].$$

Puisque le second membre est singulier par rapport à la mesure de Lebesgue, l'inégalité voulue sera démontrée si on prouve de plus que

$$\Theta_{p,\mathrm{abc}} \geq (T_{\mathrm{abc}} + b_1 u) \wedge \ldots \wedge (T_{\mathrm{abc}} + b_p u),$$

ou encore, par récurrence, que $\Theta_{p,\mathrm{abc}} \geq \Theta_{p-1,\mathrm{abc}} \wedge (T_{\mathrm{abc}} + b_p u)$. Pour ceci, il faut simplement s'assurer que $\lim_{k \to +\infty} T_{c,k,\mathrm{abc}} = T_{\mathrm{abc}}$ presque partout, et utiliser de nouveau la récurrence. Or, nos arguments de multiplicités d'intersection ne sont pas affectés si l'on remplace $\psi_{c,k}$ par $\psi'_{c,k} = \max\{\psi, \psi_{c,k} - A_k\}$ avec une suite A_k quelconque. Si A_k converge suffisamment vite vers $+\infty$, il est facile de voir qu'on aura bien $\lim(dd^c \psi'_{c,k})_{\mathrm{abc}} = (dd^c \psi)_{\mathrm{abc}}$ presque partout. □

Références

[B-T82] E. Bedford and B.A. Taylor.— *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math., **149** (1982), 1-41.

[Bo70] E. Bombieri.— *Algebraic values of meromorphic maps*, Invent. Math., **10** (1970), 267-287 and *Addendum*, Invent. Math. **11** (1970), 163-166.

[CLN69] S.S. Chern, H.I. Levine, L. Nirenberg.— *Intrinsic norms on a complex manifold*, Global Analysis (papers in honor of K.Kodaira), Univ. of Tokyo Press, Tokyo (1969), 119-139.

[De82a] J.P. Demailly.— *Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques*, Bull. Soc. Math. France, **110** (1982), 75-102.

[De82b] J.P. Demailly.— *Courants positifs extrêmaux et conjecture de Hodge*, Invent. Math., **69** (1982), 347–374.

[De87] J.P. Demailly.— *Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégralité et d'analyticité*, Acta Math., **159** (1987), 153-169.

[De90] J.P. Demailly.— *A numerical criterion for very ample line bundles*, Prépub. Inst. Fourier n° 153, Décembre 1990, 45p, à paraître au J. Differential Geom.

[De91a] J.P. Demailly.— *Monge-Ampère operators, Lelong numbers and intersection theory*, Prépub. Inst. Fourier n° 173, Mai 1991, 70p, à paraître dans les Proceedings "Complex Analysis and Geometry" édités par V. Ancona et A. Silva, CIRM, Univ. de Trento.

[De91b] J.P. Demailly.— *Regularization of closed positive currents and Intersection Theory*, Prépub. Inst. Fourier n° 176, Juillet 1991, 42p, à paraître au J. of Algebraic Geom.

[DR55] G. De Rham.— *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[Dr69] R.N. Draper.— *Intersection theory in analytic geometry*, Math. Ann., **180** (1969), 175-204.

[Fe69] H. Federer.— *Geometric measure theory*, Springer Verlag, Grundlehren der math Wissenschaften, Band **153**, Berlin, 1969.

[G-H78] P.A. Griffiths, J. Harris.— *Principles of algebraic geometry*, Wiley, New-York, 1978.

[Kg70] J.R. KING.— *A residue formula for complex subvarieties*, Proc. Carolina Conf. on Holomorphic mappings and minimal surfaces, University of North Carolina, Chapel Hill (1970), 43-56.

[Ki79] C.O. KISELMAN.— *Densité des fonctions plurisousharmoniques*, Bull. Soc. Math. France, **107** (1979), 295-304.

[Ki83] C.O. KISELMAN.— *Sur la définition de l'opérateur de Monge-Ampère complexe*, Analyse Complexe, Proceedings of Journées Fermat (SMF), Toulouse, May 1983, Lecture Notes in Math., vol. 1094, Springer-Verlag, Berlin (1984), 139-150.

[Ko54] K. KODAIRA.— *On Kähler varieties of restricted type*, Ann. of Math., **60** (1954), 28-48.

[Le57] P. LELONG.— *Intégration sur un ensemble analytique complexe*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 239-262.

[Le68] P. LELONG.— *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*, Dunod, Paris, Gordon & Breach, New-York, 1968.

[Sa51] P. SAMUEL.— *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique*, J. de Math. Pures Appl., **30** (1951), 159-274.

[Se57] J.P. SERRE.— *Algèbre locale. Multiplicités*, Lecture Notes in Math. n° 11, Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[Sib85] N. SIBONY.— *Quelques problèmes de prolongement de courants en analyse complexe*, Duke Math. J., **52** (1985), 157-197.

[Siu74] Y.T. SIU.— *Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents*, Invent. Math., **27** (1974), 53-156.

[Sk72] H. SKODA.— *Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans* $\mathbb{C}^n$, Bull. Soc. Math. France, **100** (1972), 353-408.

[St66] W. STOLL.— *The multiplicity of a holomorphic map*, Invent. Math., **2** (1966), 15-58.

[Th67] P. THIE.— *The Lelong number of a point of a complex analytic set*, Math. Ann., **172** (1967), 269-312.

[Wa78] M. WALDSCHMIDT.— *Nombres transcendants et groupes algébriques*, Astérisque n° 69-70, 1979.

[Ws73] R.O. WELLS.— *Differential analysis on complex manifolds*, Prentice Hall, 1973.

■

SOCIETE MATHEMATIQUE DE FRANCE
Association reconnue d'utilité publique par décret du 11.02.1888
Ecole Normale Supérieure, Tour L, 1 rue Maurice Arnoux, 92120 Montrouge
Secrétariat général - [33] (1) 40 84 80 54 - Fax [33] (1) 40 84 80 52 - smf@dmi.ens.fr

COTISATION S.M.F. – 1992

à remplir par tout membre individuel

NOM : ....
PRENOM : ....

Adresse postale (pour l'envoi des publications) : ....

....

Code Postal : .... Ville : .... Pays : ....

Merci de bien vouloir cocher les options choisies et de nous renvoyer ce formulaire complété avec votre règlement

COTISATION obligatoire *donnant droit à la Gazette*		
SMF	400 F	
SMF *retraité-e, ou < 30 ans*	200 F	
SMF *conjoint-e*	125 F	
SMF/SMAI	580 F	
SMF/SMAI *retraité-e*	410 F	
SMF/AFCET	Contacter l'AFCET	

Autre Cotisation, Contribution		
Société Mathématique Européenne	100 F	
Don : Commission du Développement et des Echanges (U.M.I.)	> 50 F	

PUBLICATIONS facultatives		
Officiel *(adresse dans la CEE)*	120 F	
Officiel *(adresse hors de la CEE)*	150 F	
Bulletin *(sans Mémoires)*	255 F	
Bulletin et Mémoires	420 F	
Astérisque *(12 numéros)*	695 F	
Total 1		

ACCORDS DE RECIPROCITE		
AMS *(Etats-Unis)*	312 F	
SMJ *(Japon)*	260 F	
SMB *(Belgique)*	82 F	
DMV *(Allemagne)*	133 F	
SMC *(Cuba)*	100 F	
SMS *(Suisse)*	100 F	
Total 2		

PAIEMENT :

Merci d'effectuer votre réglement de préférence par **chèque** bancaire ou postal

Cotisation(s) + Total 1 + Total 2 =

Chèque postal : à l'ordre de la S.M.F. compte 5215 Z Paris

Chèque bancaire : n°:

Carte de crédit : (Visa, Mastercard) n°:

Date d'expiration :

Date

Signature

Cadre réservé à la SM

Paiement le :

Crédité le :