SOMMAIRE

Lors de son dernier conseil, la S.M.F. a souhaité engager des débats de fond sur des grands sujets d'intérêt général pour les mathématiciens (voir le texte *Vie de la Société* dans les pages *Informations* de ce numéro). Le premier thème retenu est celui du premier cycle (au sens large : DEUG, DUT, BTS, classes préparatoires, IUP). Une réunion de conseil aura lieu le samedi 16 novembre sur ce sujet. D'ici là toutes les contributions sont les bienvenues.

Vous pouvez les envoyer, soit à la S.M.F., soit à la S.M.F. et à la Gazette si vous en souhaitez l'éventuelle publication. A vos plumes.

Fin du Sommaire : page suivante

DATE LIMITE **de soumission des articles, pour parution dans le n° 51 – JANVIER 1992**
1er DECEMBRE 1991

ENTRETIEN AVEC André WEIL

Propos recueillis par Michel Demazure et Martin Andler en juillet 1991

MD : La première chose que je voudrais évoquer, c'est vos années d'étudiant à Paris, juste après la guerre, au début des années vingt. Vous étiez des étudiants sans maîtres?

AW : A peu près sans maîtres... Je suis entré rue d'Ulm; nous avions très peu de cours directement à l'Ecole. Il y avait le cours de Goursat, plus ou moins obligataoire pour les conscrits; mais j'avais déjà lu une partie du cours d'analyse de Jordan, et je n'allais donc pas au cours de Goursat : je me rendais très bien compte que c'était une perte de temps.

MD : Quand même, vous aviez un peu une formation d'autodidacte, avec peu de cours, et encore moins de cours de qualité.

AW : Il y avait à l'Ecole normale, pour les carrés, un cours de Julia. Mais nous travaillions surtout entre nous; nous apprenions beaucoup plus les uns des autres que des cours auxquels nous assistions – ou n'assistions pas.

MA : On a l'impression que c'est en allant dans d'autres pays, en Italie et surtout en Allemagne, que vous vous êtes trouvé au contact des mathématiques modernes de l'époque.

AW : Avec les mathématiques dites modernes, c'était plutôt en Allemagne.

MA : Parce que la faculté des sciences de Paris avait été décimée pendant la guerre?

AW : Oui; il n'y a qu'à regarder le monument au morts de l'Ecole Normale : il y a toute une génération qui a été détruite. En plus, il y avait les gens qui avaient perdu leur intérêt pour les mathématiques, ou la capacité d'en faire : ceux qui avaient eu des tâches subalternes dans l'armée. Les mathématiques françaises ont eu une nouvelle naissance essentiellement avec la promotion 1922 dont je faisais partie.

MD : Pensez-vous qu'avoir été formé dans cet environnement très neutre est un avantage ou un inconvénient? Votre collègue Freeman Dyson, de l'Institute, pense que c'est depuis qu'on a rendu l'enseignement des sciences obligatoire en Angleterre qu'il y a moins de scientifiques. Et que c'est l'enseignement du grec et du latin qui donnait aux gens marginaux ou révoltés l'envie d'aller vers les sciences pour se libérer. Que pensez-vous de cette thèse : un enseignement structuré vaut-il mieux?

AW : Je suis plutôt pour la liberté dans l'ensemble. Mais en tous cas, je crois très fortement que chaque personne de valeur doit se trouver l'ambiance qui lui convient à lui personnellement. On ne peut pas formuler de règle générale.

MD : Et dans votre cas, l'absence de cadre a été bénéfique?

AW : Tout à fait. Je me souviens, quand je suis entré à l'Ecole, je me suis mis à lire non seulement le cours d'analyse de Jordan, que j'avais déjà commencé en taupe, mais aussi à lire Riemann. Et je ne sais pas si c'était en conscrit ou en deuxième année que j'ai proposé à mes camarades de promotion de faire entre nous un espèce de séminaire. Evidemment ça ne s'appelait pas comme ça à cette époque.

MD. D'où vient le mot dans cette acception?

AW : D'Allemagne. En mathématiques, la pratique de séminaire remonte, je crois, à Jacobi. En France le premier séminaire est le séminaire Hadamard.

MA. Hadamard est le seul mathématicien français de cette époque dont vous parliez; l'activité mathématique qui vous intéressait, en 21, 22, 23 se déroulait autour d'Hadamard...

AW : Tout à fait. C'est Hadamard qui a fait de moi un mathématicien. Il était très large d'idées, s'intéressait à tout, y compris à la théorie des nombres, qui n'était pas du tout enseignée à cette époque.

MA. Pour quelqu'un de ma génération, ça paraît très étonnant...

AW. En effet, ça n'existait pas en France à l'époque. En, Allemagne, très fortement, un petit peu en Angleterre – mais pas en France.

MA. Poincaré n'a pas eu de descendance mathématique?

AW : Poincaré n'était pas un arithméticien par tempérament. Il faisait tout, dominait toutes les questions de très haut, de sorte qu'il a fait aussi de la théorie des nombres. Ce qui dominait la théorie des nombres à cette époque, c'était la théorie des idéaux. Quand j'ai présenté ma thèse à Emile Picard, au début, il était presque d'humeur d'accepter d'en faire le rapport lui-même, puis il a changé d'idées. Mais il m'a dit qu'il avait une fois, dans les années quatre-vingt-dix, fait son cours sur la théorie des idéaux dans les corps de nombres, et que cela lui était apparu comme une question de langage pas particulièrement intéressante.

MD : C'était l'arithmétique qui était mal considérée, ou l'algèbre en général?

AW : Les gens n'étaient pas du tout algébristes; pour eux, les mathématiques, c'était l'analyse. Et c'est une vieille histoire. Quand les italiens sont venus à la géométrie algébrique, ils se sont appuyés sur les allemands, pas sur les français.

MD : S'agissait-il d'un isolement particulier de la France, ou du fait que chaque pays a ses traditions?

AW : Chacun a ses traditions. En Italie, la géométrie algébrique a rapidement pris beaucoup d'importance, avec Corrado Segre pour commencer.

MA : Vous partez donc pour l'Allemagne, comme, vers la même époque d'autres jeunes normaliens, par exemple Aron ou Sartre. C'était peu après la guerre; était-ce difficile, une sorte de transgression, d'aller en Allemagne?

AW : En fait je crois avoir été le premier normalien a être allé en Allemagne. Aron, Sartre, c'était un peu plus tard; c'est moi qui ai lancé la mode. J'y suis allé, j'en suis revenu et j'ai dit que ça servait à quelque chose.

MA : Y a-t-il eu des réactions? L'Allemagne, c'était l'ennemi...

AW : S'il y a eu ce genre de réactions, elles ne m'ont pas touché du tout. Quand j'étais en Allemagne et que j'ai eu envie de suivre le cours de Wilamowitz sur Thucydide, il était tout content d'avoir de nouveau un français pour venir à son séminaire. Et il a été un peu déçu, le pauvre, quand il a su que je n'étais pas philologue.

La question des allemands aux congrès internationaux de mathématiques est restée aige jusqu'au congrès de Bologne en 1928 où les allemands ont pu venir. Mais aux congrès précédents, des gens comme Emile Picard étaient très braqués sur cet aspect des choses.

MD : Vous avez vécu plus de soixante ans d'histoire de mathématiques... En 1947 vous avez écrit cet article, L'Avenir des mathématiques (1). Est-ce que vous considérez aujourd'hui que la façon de faire des mathématiques a changé, ou que c'est toujours pareil?

AW : D'abord, il y a beaucoup plus de monde. Quand j'étais jeune, et même d'un âge moyen, je pensais que la mathématique courait le danger d'être étouffée par la foison des travaux médiocres. C'était aussi l'époque où les gens de Francfort, autour de Dehn et Siegel avaient l'idée qu'il ne fallait pas publier, pour que les choses n'aillent pas trop vite et qu'on puisse recommencer à zéro. Cette idée d'étouffement par la foule des travaux médiocres est naturelle, elle est venue à moi comme à pas mal de gens. Maintenant, je dirais plutôt que le danger est que la mathématique soit étouffée par l'abondance des très bons travaux. Il y a trop de bons mathématiciens, on ne peut pas suivre!

MD : Dans L'Avenir des mathématiques,

vous écrivez : "Déjà Hilbert se demandait "*Ne va-t-il pas devenir impossible au chercheur individuel d'embrasser toutes les branches de notre science*", et justifiait sa réponse négative, non seulement par l'exemple, mais en observant que tout progrès important en mathématiques est lié à la simplification des méthodes, à la disparition d'anciens développements devenus inutiles, à l'unification de domaines jusque là étrangers". Mais aujourd'hui, le sentiment de la nécessité de la spécialisation est très fort.

AW : C'est un grand danger. Je ne crois pas que si la mathématique perd son unité elle pourra subsister encore longtemps. C'est un danger véritable. Et il y a aussi trop de gens qui font des mathématiques difficiles et de très haut niveau. Pensez comme Euler était tranquille au XVIIIème siècle ! Il était tout seul. Il avait quelques correspondants : Clairaut qu'il estimait, d'Alembert qu'il ne mettait pas très haut et qu'il n'aimait pas personnellement... Il n'y avait qu'un tout petit nombre de gens dont il pouvait, sans complètement perdre son temps, lire les travaux. Il était tranquille pour suivre sa petite idée, dans tous les domaines des mathématiques, pures et appliquées.

MD : Dans ce foisonnement; voyez-vous des avancées qui sont plus particulièrement significatives...

AW : Là, je ne saurais pas répondre. Ca fait dix ans que je me considère comme incapable de suivre ce qui se passe. Je me fais expliquer un tout petit peu les nouveaux résultats de théorie des nombres, par Deligne, à Princeton, qui est très gentil. Mais je ne peux lire les démonstrations.

MD : Vous connaissez les résultats de type Arakelov; ne vont-ils pas dans le sens de votre programme ?

AW : Tout à fait.

MD : Et les nouvelles interactions entre physique et mathématiques ?

AW : J'ai toujours eu l'impression que dans l'histoire des mathématiques, il y a eu une constante alternance entre les périodes où les mathématiques avaient des contacts fructueux avec la physique et d'autres ou elles n'en avaient pas. L'essentiel de mon travail s'est fait à une période où la physique n'avait aucun intérêt pour nous...

MD : Vous étiez à Göttingen en 1926-1927 ?

AW : En effet. Les grandes découvertes de Heisenberg, et des autres, avaient commencé en 1925; tout cela se passait dans le département voisin; je parlais avec tous les mathématiciens, pas seulement Emmy Noether et van der Waerden, mais aussi avec Hans Lewy par exemple. Et jamais personne ne m'en a jamais parlé; personne ne m'a dit : "tu sais, il se passe des choses extraordinaires en physique; il faudrait aller regarder ce qui s'y passe".

MA : Mais Hermann Weyl s'y intéressait – et aujourd'hui, quand on parle du rapprochement entre mathématiques et physique, on parle de retrouver l'esprit dans lequel des gens comme Weyl ou von Neumann travaillaient.

AW : Je les connaissais tous les deux; il est évidemment possible que les problèmes de physique aient lancé von Neumann sur l'étude des anneaux d'opérateurs dans les espaces de Hilbert. Et von Neumann avait certainement étudié Dirac. Mais dans l'ensemble, c'est tout de même une période où les grands développements des mathématiques n'avaient pas leur origine dans la physique. Alors qu'au XIXème siècle les Cauchy, Poisson, Fourier étaient complètement au courant de la physique mathématique de leur époque. Il me semble que maintenant, d'après les conversations que je peux entendre, on est entré dans une période où des questions de physique peuvent être une source d'inspiration pour les mathématiciens. C'est un développement favorabe.

MA : Le couple mathématiques-physique est-il un couple privilégié ? Ou d'autres sciences que la physique peuvent-elles avoir des interactions avec les mathématiques tout aussi riches ?

AW : Ca m'étonnerait beaucoup. On ne m'a jamais rien dit de pareil.

MA : Je pensais à l'informatique – ou éventuellement à certaines sciences humaines.

AW : Je n'ai connaissance d'aucune chose vraiment importante de ce côté-là. Ce n'est pas un préjugé; j'ai fait une petite contribution à la thèse de Lévi-Strauss, comme vous le savez (2) ...

MD : Justement...

AW : Les tribus australiennes ne m'ont pas lancé sur un problème auquel j'attache une importance quelconque. Ca m'a beaucoup amusé de trouver que je pouvais faire quelque chose pour un ethnologue...

MA : A ce propos, est-il vrai que les idées de structures, à la Bourbaki, étaient empruntées à la linguistique, venaient de l'univers des sciences humaines?

AW : Je crois avoir dit dans mon autobiographie tout ce que je sais sur le sujet. Pour en dire plus, il faudrait que je consulte les philologues avec lesquels j'ai perdu le contact. Je ne sais pas exactement quand le mot de structure, la notion de structure, sont entrés dans l'esprit des linguistes. Il est exact que j'étais en contact avec eux, et que plus ou moins vers la même époque le mot est venu dans leur langage et dans celui de Bourbaki.

MA : Venons-en, si vous le voulez bien, à un tout autre sujet : celui de vos rapports avec la France après la guerre. Dans vos texte de 1938 et 1955 (3), vous n'étiez pas très tendre avec l'université française...

AW : A ce moment là, il y avait beaucoup de raisons d'être pessimiste pour les mathématiques en France. Il n'y avait pas encore des gens comme Serre, Koszul... Les mathématiques françaises ont repris spectaculairement vers 1946-1947. Si à ce moment là j'étais pessimiste sur l'avenir des mathématiques, je l'étais aussi sur l'évolution des mathématiques en France – et les faits m'ont donné un beau démenti.

MA : Les difficultés ont continué pendant un certain temps. Il y a eu les problèmes posés par le retour de Chevalley en France, à propos de quoi vous avez aussi écrit (4)...

AW : Toutes les universités du monde sont pleines d'intrigues de toutes sortes. On ne changera jamais cela : tant qu'il y aura des universités, il y aura des intrigues universitaires. L'opposition autour de Chevalley en France était due à des facteurs personnels qui n'ont aucune signification scientifique.

MA : Mais pour qui travaille en France, ce n'est pas sans intérêt de comprendre ce qui, dans nos institutions, était un facteur de blocage.

AW : La première fois que Chevalley a été candidat à un poste à la Sorbonne, il a été blackboulé. La deuxième fois, où il a été nommé, ça s'est passé de la manière suivante. Il devait aller faire un cours d'été en Amérique. Sa seconde femme, Sylvie, lui a dit : "*Claude, il faut aller faire renouveler ton passeport américain.*" A ce moment là il avait la double nationalité. Lors de sa première candidature, ses ennemis, si l'on peut dire, avaient posé la question de sa nationalité, parce qu'on savait qu'il s'était fait naturaliser américain. Par un jeu compliqué, il n'avait pas perdu sa nationalité française en devenant américain – ce qui n'était d'ailleurs pas trivial. Donc il avait la double nationalité. Il va au consulat américain; on lui dit : "*Sir, pouvez-vous remplir ce formulaire?*" Le formulaire posait les questions habituelles : "*Avez-vous l'intention d'assassiner le président des Etats-Unis?*" Il dit non. "*Avez-vous servi, depuis votre naturalisation, dans les forces armées d'un autre pays?* – Non. *Avez-vous voté dans les élections d'un pays étranger?*" Et là il a écrit oui. Et il a continué à remplir son formulaire? Après quoi il va au guichet, présente son formulaire, et la personne derrière le guichet jette un coup d'œil et lui dit : "*Monsieur, vous avez perdu la nationalité américaine. Au revoir Monsieur.*" Grâce à quoi, la rumeur s'étant répandue que Chevalley avait renoncé à la nationalité américaine, les communistes, qui s'apprêtaient à voter contre lui ont tous voté pour lui pour le récompenser de ce geste héroïque. C'est ainsi qu'il a été élu à la faculté des sciences! Mais évidemment, ce genre d'anecdote, qui sont si amusantes, ont ne peut pas dire qu'elles font partie de l'histoire des sciences!

MA : La question de savoir si Chevalley, ou d'autres, ont été aux USA ou ailleurs, ça fait une différence énorme pour ceux qui étudient les mathématiques ici ou là.

AW : Ca fait une différence? Chevalley a organisé un séminaire qui a eu une influence extraordinaire.

MA : Et vous, vous n'avez pas envisagé de rentrer en France?

AW : Naturellement, j'ai envisagé... Quand j'étais au Brésil, je savais que je ne pourrais pas y rester longtemps; c'était un contrat tout à fait temporaire, et je cherchais à me tirer de là. J'ai correspondu avec mes amis à Paris, qui ont pensé que la retraite de Lebesgue ouvrait une place au Collège de France qui aurait pu me convenir. Il a été question à ce moment là d'une candidature au Collège de France – et puis ils se sont rendus compte qu'il n'y aurait pas la majorité. Alors j'ai renoncé. Je serais venu au Collège de France si les chances avaient été favorables. C'est à ce moment là que j'ai reçu une lettre de Marshall Stone de Chicago qui disait qu'il voulait m'avoir à Chicago. En fait à ce moment précis je n'avais pratiquement pas le choix. Rien ne prouve que j'aurais fait des choses différentes, si j'étais rentré en France, de ce que j'ai fait à Chicago! De toute manière, je suis revenu souvent en France pendant toute la période où j'étais à Chicago puis à l'Institute.

MD : Vous avez dit tout à l'heure : "*Ca ne fait pas partie de l'histoire des sciences*". Vous-même avez d'ailleurs passé beaucoup de temps à l'histoire; et dans l'un de vos textes vous dites que vous avez d'abord pensé que rien ne valait l'étude directe des maîtres. Vous avez changé d'avis?

AW : Je suis devenu moins absolu; j'ai appris à nuancer beaucoup ce jugement. Je peux l'expliquer par le contraste avec ma sœur. Pour ma sœur, il n'y avait que les très grands poètes, ou peintres, ou mathématiciens. Pour elle, dans la littérature française, il n'y avait que Villon, même pas tout Racine, le Phèdre de Racine, il y avait peut-être aussi Valéry. Elle avait une liste très limitative de gens à qui elle accordait une existence. J'ai fini par m'apercevoir que les musées étaient pleins de très bonnes peintures sans avoir été peintes par Michel Ange ou Botticcelli.

MA : Ca s'étend aussi aux mathématiques?

AW : Ca s'étend aussi aux mathématiques. Autrefois, tout ce qui n'était pas Riemann ou Poincaré ou quelque chose comme ça, j'avais tendance à penser que cela n'existait pas. Je ne dirais plus ça maintenant, naturellement. De toute manière je dis quelque part, je crois, que les mathématiciens médiocres jouaient le rôle d'une caisse de résonance pour les émetteurs de son qu'étaient les très grands mathématiciens.

MD : C'est une phrase qui a fait couler beaucoup d'encre.

AW : Beaucoup d'encre, mais on n'a pas voulu voir que la résonance est une chose de la plus haute importance. Pourquoi y a-t-il des Stradivarius et de mauvais violons? C'est à cause de la caisse de résonance. Si on n'a que la corde, on n'a que ce que M. Jourdain appelle la trompette marine; c'est une instrument harmonieux, d'après M. Jourdain. On m'a reproché cette phrase. Des gens se sont vexés d'être la caisse de résonance.

MA : Vous avez évoqué votre sœur Simone. Dans vos œuvres complètes figure une lettre de vous à elle sur les mathématiques (5), où il est question de loi de réciprocité, de fonctions *L etc.* , et dans vos mémoires il y a une photo d'un congrès Bourbaki où elle est là, à côté de Dieudonné, Delsarte, Ehresmann... Pouvez-vous nous parler de son intérêt pour les mathématiques?

AW : Tous les philosophes, depuis Platon, accordent une très grande importance aux mathématiques. C'est une tradition. Ma sœur, s'est initiée à la philosophie par son maître Alain, c'est-à-dire Chartier; Chartier se rattachait aussi à cette tradition, il enseignait aussi l'importance des mathématiques. Et ma sœur, étant plus intelligente que beaucoup de philosophes, a rapidement compris que pour un philosophe, pour s'initier aux mathématiques de manière intellectuellement fructueuse, il ne fallait pas s'adresser aux mathématiciens modernes, qui sont beaucoup trop difficiles pour les philosophes, qui ne sont pas accessibles sans de longues études. Elle a compris que les mathématiques ont toujours été ce qu'elles sont, c'est-à-dire que la valeur d'un travail mathématique pour la philosophie est sans rapport avec l'époque où il a été écrit. Elle s'est mise à étudier elle aussi (et d'ailleurs j'étais là pour lui donner l'exemple) les mathématiques anciennes. Elle s'est mise à lire Archimède, Viète, Descartes – mais certainement beaucoup Viète. Et là elle a pris ce qu'elle jugeait nécessaire de prendre en ce qui concernait les mathématiques. A l'opposé, vous trouverez un certain nombre de philosophes qui se sont figuré tirer parti des mathématiques en farcissant leur vocabulaire de vocables pris aux mathématiques modernes sans comprendre de quoi ils parlaient.

MD : Après toutes ces années de mathématiques, que pensez-vous des objets mathématiques?

AW : Savoir s'ils existent? Il est impossible pour un mathématicien pratiquant (on peut parler de mathématiciens pratiquants comme on parle de catholiques pratiquants), il est impossible de ne pas se comporter comme si les objets mathématiques existaient, parce qu'il se bat avec, évidemment. Après ça, si l'on transpose la question sur le plan philosophique, on peut dire ce qu'on veut.

MD : Les variétés abéliennes, vous les avez découvertes ou inventées?

AW : Le mathématicien pratiquant est persuadé qu'il les découvre. Peu importe, du point de vue de la pratique du mathématicien, que ce soit vrai ou pas. On est forcé d'être platonicien.

Il y a une jolie anecdote sur Hermite, dont la position sur le sujet était bien connue. Je la tiens d'un petit-neveu d'Hermite qui se souvenait que son grand'oncle le promenait quand il était gosse. Et Hermite lui disait : "*Ah que nous serons heureux quand nous serons morts et que nous verrons e et π face à face.* Je suppose que ça voulait dire que quand il serait mort, étant dans un empyrée, l'empyrée des mathématiciens je suppose, il aurait une perception intuitive de e et π qui lui permettrait de voir directement qu'ils étaient transcendants. Et effectivement, la question de savoir si e et π sont transcendants, c'est une question objective, qui ne dépend pas de nous. Ils sont transcendants, il n'y a rien à faire! Descartes dit : "*Je pense, donc je suis.*" On peut aussi bien dire : "*π est transcendant, donc il est.*"

MA. Le programme de Bourbaki, peut-on dire qu'il est arrivé à ses fins?

AW : Il y a en tout cas une chose qui me paraît certaine. D'un côté il fallait Bourbaki. A l'époque où Bourbaki a été créée, il aurait manqué quelque chose à l'évolution des mathématiques si nous n'avions pas créé Bourbaki. C'était nécessaire, et ça a été fructueux. Maintenant, si Bourbaki n'existait pas, personne ne songerait à l'inventer. C'est bien votre avis?

MD : Sans doute; mais...

AW : Il pourrait bien s'amasser deux ou trois, ou à la rigueur quatre ou cinq types pour faire un travail. Mais personne ne recommencerait cette entreprise, ou même une entreprise analogue. Il est certain que les mathématiques avaient besoin de Bourbaki. Au risque de me répéter, car cette histoire est connue, ma fille Nicolette s'est mise à avoir du respect pour moi quand on lui a enseigné le $\emptyset$ pour l'ensemble vide, et que je lui ai dit que j'étais personnellement responsable de cette notation. Elle a été très impresionnée et est allé le dire à sa maîtresse d'école. C'est l'aspect un peu trivial des choses... Mais plus sérieusement, au moment où nous avons fait Bourbaki, personne n'était sûr qu'il n'y avait pas des parties des mathématiques pour lesquelles il fallait d'autres bases axiomatiques, par exemple la géométrie. Elie Cartan, vers cette époque-là, ou un peu avant, avait écrit : *"Il n'est pas facile de définir la notion de variété."* Il en avait une notion parfaitement nette, mais il ne se sentait pas en état ou en humeur de formuler une définition en forme. Maintenant, c'est le B. A. BA de n'importe quel étudiant.

MA : On en vient à une question qui est liée à Bourbaki, même si c'est peut-être un peu injuste, c'est la question de l'influence de Bourbaki dans l'enseignement des mathématiques.

MD : J'ai le souvenir qu'il y a trente et un ans vous m'avez dit : *"Si quelqu'un propose une réforme de l'enseignement, il faut premièrement la faire, deuxièmement le fusiller, pour ôter aux autres l'envie de recommencer. Mais si quelqu'un a envie de donner sa vie pour une réforme, ça vaut la peine d'essayer."*

AW : J'ai dit ça, moi?

MD : J'en suis garant.

AW : Je vous crois, mais je ne l'aurais pas cru.

MD : Mais revenons-en à la question...

AW : Je crois que l'effort de faire pénétrer le langage de Bourbaki à l'école secondaire, et même à l'école primaire, a été un désastre.

MA : C'est un fait, mais pourquoi?

AW : Pour la raison bien connue que le degré d'abstraction dont un individu dispose dépend de son degré de maturité, et par conséquent, ça n'apporte rien à un gosse. Une fois ma belle-mère, qui avait presque quatre-vingt-dix ans, et qui avait été institutrice, m'a apporté un livre qu'elle avait reçu d'une jeune collègue pour lui faire apercevoir comment s'enseignaient les mathématiques à présent. Le livre disait qu'il ne fallait jamais faire dire à un enfant : *"combien y a-t-il de morceaux de sucres dans ce panier?"* Qu'il fallait lui faire dire : *"quel est le nombre cardinal de l'ensemble des sucres contenus dans ce panier?"* Le bon sens indique que c'est du psittacisme. On peut obliger des gosses à parler comme ça – mais ça ne les instruit en aucune manière.

MA : On peut multiplier les exemples à l'infini. Mais de vraies questions se posaient, et se posent toujours – l'une d'entre elles étant de savoir comment enseigner la géométrie. Dieudonné expliquait qu'il fallait enseigner la géométrie comme conséquence de l'algèbre linéaire [(6)]. Et cette philosophie a été à la base de la réforme : la géométrie élémentaire devenait une conséquence de l'algèbre linéaire.

AW : Je répète! Dans la mesure où un certain degré d'abstraction est inutile, il est automatiquement mauvais. Il ne faut pas forcer les gosse à penser abstraitement. Il faut qu'ils y soient amenés d'une manière naturelle.

MD : Mais à partir de quel concret – en dehors des nombres entiers. Faut-il revenir à la façon dont les choses nous étaient enseignées au lycée?

AW : J'estime qu'on m'a très bien enseigné tout ça...

MD. et MA : Moi aussi... (rires)

MA : Vous avez parlé de l'abstraction inutile. Mais ne pensez-vous pas aussi que la contrainte de la démonstration, la contrainte de la rigueur, sont, dans l'enseignement, des contraintes parfois trop lourdes? Parce que le temps dont on dispose est limité.

AW : Lebesgue disait : *"l'avantage des livres courts, c'est qu'ils sont courts; la qualité des livres longs, c'est qu'ils sont longs"*

MA : Je devrais peut-être expliquer ma question par un exemple. Dans l'enseignement que j'ai reçu, en licence, au début des années soixante-dix, le plus souvent on n'arrivait jamais aux raisons pour lesquelles telle construction abstraite avait été faite. On n'apprenait que le "general nonsense". Et en effet, si

l'on fait un cours sur la théorie de Fourier, il est bien difficile d'y loger à la fois les théorèmes de convergence que l'exigence de rigueur impose, et la résolution explicite de l'équation de la chaleur, et des autres équations aux dérivées partielles de la physique, que l'exigence de contenu, l'exigence historique, imposeraient...

AW : Ce qui compte, ce n'est pas de tout démontrer. C'est que la possibilté de tout démontrer soit apparente. On peut bien ne pas faire telle ou telle démonstration... Mais ce qui distingue le mathématicien, c'est bien la démonstration – avec le caractère contraignant, sur le plan intellectuel, de la démonstration.

MD : Puisque dans une éducation humaniste, on ne peut pas tout enseigner, il faut bien faire des choix. Et en particulier en mathématiques.

AW : Quelle partie des mathématiques enseigner? Ca n'a aucune importance. Ce qui est important est que les élèves aient rencontré, au moins une fois, un raisonnement qui les ait convaincus de la vérité de tel résultat, alors même que cette vérité ne leur était pas intuitive. Se mettre devant une table, suivre un raisonnement et être certain, au terme de ce travail, que e ou π sont transcendants. Constater qu'un raisonnement aboutit à des choses non triviales, des choses dont on n'avait pas idée avant de commencer.

MD : Mathématiquement parlant, avez-vous des espoirs, ou des regrets?

AW : Quand j'étais jeune, j'espérais démontrer l'hypothèse de Riemann. Quand je suis devenu un peu plus vieux, j'ai encore eu l'espoir de pouvoir lire et comprendre une démonstration de l'hypothèse de Riemann. Maintenant, je me contenterais bien d'apprendre qu'il en existe une démonstration.

---

(1) In "*Les grands courants de la pensée mathématique*", éd. F. Le Lionnais, Cahiers du Sud, 1947. également, Œuvres complètes, vol. I, p. 359.

(2) *Sur l'étude algébrique de certains types de lois de mariage*, appendice à *Les Structures élémentaires de la parenté de Claude Lévi-Strauss*, PUF 1949; repris dans Œuvres complètes, vol. I, p. 390.

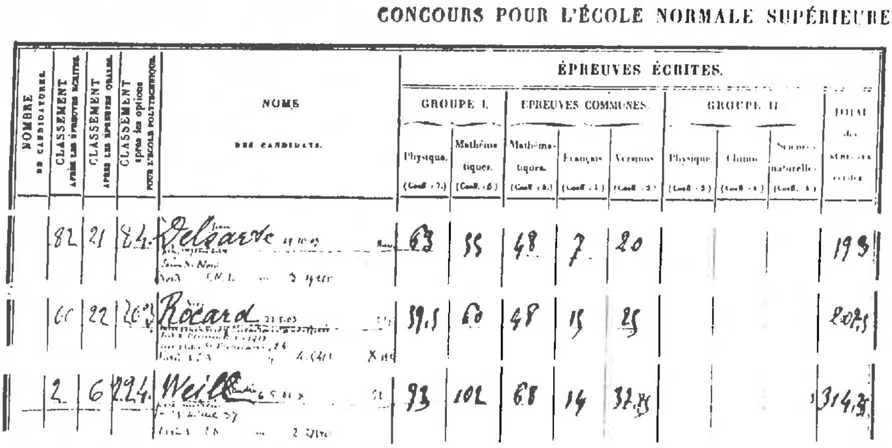
(3) "*Science française*", inédit,1938, in Œuvres complètes, vol. I p. 233; Science française? La nouvelle NRF n° 25, 1955; et in Œuvres complètes, vol. II, p. 232.

(4) Ibid.

(5) Œuvres complètes, vol. I, p. 244.

(6) *Introduction à l'Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964.

Extrait du registre du concours d'entrée de 1922



CONCOURS POUR L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Nombre de candidatures	Classement après les épreuves écrites	Classement après les épreuves orales	Classement après les options pour l'école polytechnique	Noms des candidats	Épreuves écrites — Groupe I: Physique (Coeff. 2)	Groupe I: Mathématiques (Coeff. 6)	Épreuves communes: Mathématiques (Coeff. 4)	Épreuves communes: Français (Coeff. 1)	Épreuves communes: Versions (Coeff. 2)	Groupe II: Physique (Coeff. 5)	Groupe II: Chimie (Coeff. 4)	Groupe II: Sciences naturelles (Coeff. 4)	Total des épreuves écrites
	82	21	84	Delsarte	63	55	48	7	20				193
	66	22	203	Rocard	39,5	60	48	15	25				202,5
	2	6	224	Weil	93	102	68	14	37,75				314,75

André Weil, Souvenirs d'apprentissage

Coll. Vita Mathematica, Birkhaüser, 1991.

Je ne voudrais pas non plus qu'on imputât à présomption qu'étant de petite et basse condition j'ose pourtant discourir du gouvernement des Princes et en donner les règles...

Dédicace du *Prince* de Machiavel

Weil n'a jamais douté qu'il serait mathématicien? Alors même qu'à l'évidence plusieurs autres voies lui étaient ouvertes : philologue, orientaliste, voire touriste-chroniqueur... Les lecteurs friants d'anecdotes sur les intrigues universitaires à Chicago ou à l'Institute resteront sur leurs faim, car les *Souvenirs d'apprentissage* racontent la première moité de la vie de l'éminent géomètre, depuis son enfance jusqu'à la fin de la guerre et sa nomination à l'université de Chicago en 1947; ses *Lehrjahre*. Années d'apprentissage, certes; mais, circonstances et inclinations de l'apprenti obligent, années de singulières aventures : voyages, guerre, prison...

Le jeune André eut d'emblée une idée toute personnelle de ce qu'est une suite arithmétique de raison -1 : entré en dixième en 1912, il passe en huitième en 1913, en cinquième en 1916, en troisième en 1917, en première en 1919, puis en math'élem en 1920. Bachelier à à peine quinze ans, puis reçu à l'Ecole normale supérieure après une seule année de taupe. De cette scolarité météorique, il garde le souvenir de quelques-uns de ses maîtres : Monsieur Monbeig, son professeur de 8ème, chomskien bien avant l'heure, qui lui apprit la grammaire; Monsieur Collin, son professeur de mathématiques en première et terminale, dont il a "plus appris, en mathématiques que de qui que ce soit d'autre, à l'exception seulement d'Hadamard", et à qui il doit d'avoir été présenté à son professeur de taupe, Monsieur Grévy, et, par lui, à Hadamard, en 1921.

Cette rencontre avec Hadamard est décisive. C'est sur son conseil que Weil commence, en taupe, la lecture du *Cours d'analyse* de Jordan et du *Treatise of Natural Philosophy* de Thomson et Tait. Dès l'année suivante, dans l'Université exsangue du début des années vingt, c'est au séminaire d'Hadamard, l'unique séminaire de mathématiques à Paris à cette époque, que Weil rencontre les mathématiques actuelles.

Et voici donc Weil mathématicien. Et d'emblée tout à fait certain qu'il apporterait sa pierre à l'édifice. Malgré (ou à cause de) cette certitude, ses années d'étudiant à l'Ecole normale semblent occupées à d'autres activités, la plus marquante étant la philologie, et tout particulièrement le sanskrit, découvert en 1921 pendant son année de taupe. Il sèche les cours de mathématiques pour fréqenter assidument, au Collège de France, ceux de Sylvain Lévi sur le *Meghadūta* de Kālidāsa, et de Meillet de linguistique indo-européenne et, à l'Ecole pratique des hautes études, celui de Jules Bloch de sanskrit.

En 1925 commence, pour lui, le temps des voyages. Le jeune homme (il n'a que dix-neuf ans) passe un an en Italie et se découvre de nouvelles aptitudes : "... j'avais pour ce métier [de touriste], ou pour mieux dire cet art, quelque aptitude naturelle, qui, jointe à une certaine facilité linguistique, n'a pas peu contribué au bonheur de ma vie". Il lit les quatre volumes de Berenson sur l'art italien, apprend l'italien – et se fait délivrer, en qualité d'étudiant étranger, une carte d'accès gratuit aux musées et monuments. Presque incidemment, on apprend qu'il a commencé à réfléchir à l'équation de Fermat; une conférence, à Rome, prononcée par une jeune mathématicienne américaine lui apprend la publication récente du mémoire d'un certain Mordell...

L'année suivante se passe en Allemagne, à Göttingen, Francfort et Berlin; le tourisme prend une dimension mathématique, avec la rencontre de Courant (à qui il explique ses idées sur le calcul fonctionnel, et qui en conclut qu'il serait "unproduktiv"), Siegel (avec qui un fécond dialogue mathématique s'amorce), Emmy Noether, Dehn (qui lui fait penser à Socrate)... Rencontres importantes. Visitant Hambourg, il rate Artin – mais se console en découvrant une exposition de Nolde qui lui fait forte impression. Il n'oublie pas les équations diophantiennes, et démontre le "théorème de décomposition" pour les courbes algébriques qui constitue le premier chapitre de sa thèse.

On pourrait évoquer plus longtemps ces années de voyages touristiques et intellectuels, mais il vaut mieux renvoyer au livre lui-même, bien distrayant. Car, si l'on me pardonne la comparaison, il y a un peu de Tintin dans Weil...

Un voyage cependant mérite une attention particulière, le voyage en Inde. Weil ayant suggéré à Sylvain Lévi qu'il serait intéressé par une séjour en Inde, celui-ci lui fait proposer une chaire de civilisation française à l'université d'Aligarh. Après plusieurs mois d'attente du décret de nomination, arrive un télégramme lui proposant à la place... une chaire de mathématiques! Il passe presque trois années en Inde, années passionnantes. Rencontre d'un immense pays et de sa culture. Mais c'est aussi un des temps forts de la lutte contre les anglais. Il approche Gandhi, et découvre la désobéissance civile – dont il fera usage, à sa manière, au moment de la guerre. Dans son travail, il est confronté aux problèmes de l'enseignement supérieur dans un pays colonisé, où tout fait problème. Le recrutement des collègues notamment : "En ce temps, beaucoup de savants européens pensaient que, pour un pays colonial, tout Européen est assez bon"... Il essaie même de réformer les programmes, ce qui mène à la publication d'un pamphlet contre les mathématiques françaises, qui, au contraire des mathématiques anglaises, ne conviennent pas au "génie indien".

De retour en France en 1932, et c'est bientôt l'aventure de Bourbaki qui commence. De longs passages y sont consacrés. Le livre dévoile notamment les mystères de sa création... Les anecdotes (les origines poldèves de Bourbaki...) se mèlent à des discussions plus sérieuses sur les origines du groupe (la rédaction "une fois pour toutes" de la démonstration de la formule de Stokes), son fonctionnement et ses motivations intellectuelles.

Le livre évoque aussi un aspect peu

connu des débuts du CNRS, l'affaire des médailles. Jean Perrin, l'inventeur du CNRS (qui n'était alors que la Caisse nationale de la recherche scientifique), avait imaginé de créer un système hiérarchique de médailles pour récompenser les chercheurs. Les jeunes bourbakistes pensent qu'il y aura là un instrument inévitable de corruption – et lancent une pétition contre les médailles. Weil la fait signer, parfois à l'occasion de ses visites pour sa premère candidature au Collège de France. La pétition recueille quatre cents signatures, est rejetée par le ministre pour finir par l'emporter à la faveur des ultimes navettes du vote budgétaire. Mais Weil n'est pas élu au Collège...

Quand la guerre survient, Weil est professeur à Strasbourg depuis six ans. Il s'était convaincu que la guerre n'aurait pas lieu parce que l'Angleterre perdrait certainement l'Inde si elle entrait dans la guerre – or elle n'accepterait jamais de perdre l'Inde! Mais Weil eut tort, ce qui nous vaut les passages les plus amusants du livre (même si l'on en éprouve un certain malaise : c'était la guerre, et pas n'importe quelle guerre...). Le chapitre VI relate ces aventures, parfois dramatiques : *La guerre et moi (ballet bouffe)*. Weil au vert en Finlande pour éviter la conscription; arrêté par les Finlandais pour espionnage au profit de l'URSS (ses manuscrits avaient été jugés suspects), et condamné a mort; sauvé par Nevanlinna qui suggère qu'on l'expulse de Finlande; en prison à Caen attendant son procès pour insoumission. Condamné, puis finalement soldat, quand même.

Mais Weil est Weil. En prison, il corrige les épreuves de son *Intégration dans les groupes topologiques*. Et il y a une de ses périodes les plus productives mathématiquement : c'est notamment la note aux Comptes rendus de 1940 *Sur les fonctions algébriques à corps de constante fini*, où il amorce ses travaux sur l'hypothèse de Riemann pour les courbes. Il envisage d'écrire un rapport au Service de la recherche du ministère qui commencerait par : "Monsieur le Chef de Service, ayant été récemment à même de constater personnellement les avantages considérables qu'offre pour la recherche pure et désintéressée le séjour dans les établissements de l'Administration pénitentiaire, j'ai l'honneur...". Quelques années plus tard, à Princeton, Hermann Weyl lui proposera d'utiliser son influence pour obtenir pour lui un nouveau et profitable séjour en prison.

Il serait malvenu pour l'auteur de cette recension, confortablement né après la guerre, de s'ériger en censeur. Mais on peut difficilement éviter de se demander comment il pouvait être si indifférent à propos de ce qui se passait. Si ses aventures furent le fruit du hasard, sa volonté d'échapper à la guerre était tout à fait délibérée. Pourtant, ayant beaucoup voyagé en Allemagne, ayant même lu *Mein Kampf* (l'exemplaire appartenant à Mme Nevanlinna), il savait très bien à quoi s'en tenir sur le nazisme. Et même si son judaisme jouait pour lui un rôle négligeable, ce n'en était pas moins une réalité qui donnait à la menace nazie une évidence personnelle particulière.

Dans les pages qu'il consacre à justifier son attitude, Weil évoque un ensemble de raisons. Comme pour bien des français, le souvenir de la première guerre était très fort. D'autant plus qu'étudiant, il avait fait l'expérience douloureuse de la catastrophe qu'avait été pour l'université française l'anéantissement de plusieurs générations d'intellectuels. A ce propos, Weil compare la politique des autorités allemandes pendant la guerre, qui avaient préservé les élites du service en première ligne, et donc du massacre, avec celle des autorités françaises qui ont mis les uns et autres autres à la même enseigne. La différence entre la vie scientifique à Göttingen et Paris dans les années vingt édifie l'étudiant Weil, et motive sa conduite de 1939.

Plus profondément, Weil ne croit pas à l'impératif catégorique kantien; il n'existe pas de préceptes universels qui fondent une conduite éthique. Il croit au contraire, suivant la philosophie hindoue de la Gītā, à la nécessité pour chacun de déterminer son dharma – l'essence de sa nature personnelle. Le dharma de Gauguin était la peinture, celui de Weil les mathématiques, et c'eût été un péché de s'en détourner.

Pas de remords dans ces pages. Tout au plus perçoit-on un certain étonnement, oh combien bienveillant, dans le regard que porte le vieil homme sur ses certitudes d'un demi siècle plus tot.

Comme il l'explique dans son introduction, Weil n'est pas un Jean-Jacques. Peu d'émotion donc dans ce livre, si ce n'est à propos de deux personnages qu'il faut maintenant évoquer. Les premières lignes de l'avant-propos évoquent sa vie "singulièrement heureuse" qui s'est inscrite entre sa naissance et la disparition, le 24 mai 1986, de sa femme Eveline, à qui le livre est dédié.

Pour le grand public intellectuel, André est le frère moins connu de Simone. Pour les mathématiciens, Simone est la soeur célèbre du grand mathématicien. Mais pour lui, Simone était sa "petite soeur". Il en est peu question dans le livre (Weil renvoie à *La vie de Simone Weil* de Simone Piétrement). Mais les quelques allusions, notamment à leur correspondance, montre une relation étroite. Pourtant ses recherches l'éloignent d'elle : "Quant à parler à des non-spécialistes de mes recherches ou de toute autre recherche mathématique, autant vaudrait, il me semble, expliquer une symphonie à un sourd" (*Lettre à S.W.* du 29 février 1940, depuis la prison de Caen), alors même qu'elle manifeste un intérêt philosophique constant pour la science (voir la collection des lettres de Simone à son frère en prison, en partie rassemblées dans *Sur la science*, Gallimard, 1966); mais les préoccupations métaphysiques et existentielles de Simone restèrent étrangères à son frère : "... je n'ai compris que fort tard que sa vie s'était déroulée suivant ses lois propres et s'était déroulée de même." Leur relation fut interrompue prématurément; un jour d'août 1943; un télégramme arriva à New York: "SIMONE DIED PEACEFULLY YESTERDAY [...] Je n'eus pas le loisir de me livrer [à mon chagrin]; il m'incombait d'avertir mes parents."

1943 – on approche de la fin du livre. Weil a les plus grandes peines à trouver un travail décent aux Etats-Unis, et finit par passer plus de deux ans au Brésil, entre 1945 et 1947. Il cherche à rentrer en France, mais une nouvelle candidature au Collège de France échoue. C'est alors que Marshall Stone lui offre une chaire à Chicago, où il restera jusqu'à sa nomination à l'Institute for Advanced Study de Princeton. C'est la fin des grands voyages, sa carrière rentre dans les normes...

Ce compte rendu, bien incomplet, le serait encore plus s'il n'incitait le lecteur à consulter aussi les *Œuvres complètes* d'André Weil (trois voumes, chez Springer). C'est là en effet que se trouve la partie mathématique des mémoires. Le catalogue en est évidemment impressionnant... Mais le texte est considérablement enrichi par l'inclusion de quelques textes non mathématiques (dont les fameux *Science française?* et *L'avenir des mathématiques* ou certaines de ses lettres à Simone). Plus importants sont ses commentaires, en fin de chaque volume, sur chacun de ses articles – et sur quelques circonstances autour de leur rédaction.

Weil ne doutant pas; Weil au-dessus des lois de son pays; Weil anti-politique et farouchement individualiste; Weil froidement ironique à propos des choses les plus graves... Il n'a certes pas cherché à éveiller la sympathie de ses lecteurs. Mais notre irritation laisse souvent la place à d'autres sentiments: il y a aussi Weil contre l'autorité, l'anti-mandarinal; sa soif de vivre; la passion scientifique jointe au refus d'être un scientifique borné; le "routard" rencontrant l'Autre au hasard des trains...

Tout sentiment mis à part, espérons un grand succès aux *Souvenirs d'apprentissage*, livre pour le grand public autant que pour les mathématiciens, (à compléter, pour ces derniers, par les *Œuvres complètes*); un rare témoignage sur une époque et sur le fonctionnement d'un mathématicien; un livre qui informe, distrait... et fait réfléchir.

Martin ANDLER
D.M.I. – E.N.S.

C.N.R.S.

RECRUTEMENT DES DIRECTEURS DE RECHERCHE

Le dernier numéro de la Gazette donnait les classements du dernier Comité National siégeant en jury d'admissibilité. Mais depuis il s'est produit un événement important et rare : le jury d'admission a bouleversé l'ordre de classement du concours DR2 et les quatre candidats nommés directeurs sont en grande partie distincts des cinq classés premier par le jury d'admissibilité. Les candidats classés par la commission étaient J. Mossino, P. Philippon, J.Y. Charbonnel, F. Delon et J.-L. Sauvageot. Ceux retenus par le jury d'admission sont : P. Philippon, J.-L. Sauvageot, C. Sabbah et M. Esteban. Les autres classements n'ont pas été modifiés par leurs jurys d'admission respectifs.

Nous publions quatre textes sur ce sujet. Tout d'abord une lettre de protestation qui circule depuis juillet sous forme de pétition. Elle a été signée par plus d'une centaine de mathématiciens et par la quasi totalité de la commission sortante. Vous pouvez envoyer votre signature à B. Prum (Université de Paris V, 45 rue des Saints Pères, 75006 Paris). Le second texte est rédigé par P.A. Meyer qui fut à plusieurs reprises membre du jury d'admission et qui était membre du jury d'admissibilité. Le texte suivant émane du bureau de la S.M.F. et le dernier donne le point de vue de J.-P. Ferrier qui est directeur adjoint du département MPB du CNRS.

Une lettre de protestation

La décision du jury d'admission excluant de la promotion DR trois des cinq noms proposés par le jury de Mathématique nous a semblé inadmissible parce que prise par un jury constitué pour l'essentiel par des personnes provenant des secteurs non mathématiciens du CNRS, SPI, Chimie, Terre-Air-Océan, Sciences de la Vie et Sciences Humaines (le Directeur Scientifique et un représentant par département).

Le Département MPB était représenté par Daniel Thoulouze et André Neveu, tous deux physiciens : Kourilisky avait rayé, il y a quelques semaines, le nom de Paul André Meyer. Il n'y avait donc aucun Mathématicien dans ce jury pour y défendre les dossiers.

Ce déclassement est un déni du travail du jury d'admissibilité. Celui-ci émane du Comité National de la Recherche Scientifique, constamment présenté, y compris par le Directeur Général du CNRS, comme une instance d'évaluation scientifique exemplaire.

Il est constitué pour moitié d'élus par la Communauté, ayant à lui rendre des comptes, il effectue avec une extrême conscience un pesant travail d'évaluation de dossiers, dont une douzaine chaque année vérifient les critères les plus sévères de la compétition internationale. Il s'agit pour l'essentiel de chercheurs ayant fait leur carrière au sein du CNRS même, attendant que leur travail soit reconnu par cette Institution, alors que nombre de leurs collègues délaissent la Recherche à temps plein pour l'Université, ou quittent la France pour les Centres américains ou japonais. Il juge de la valeur des candidats, de la progression de leur carrière, des implications pour la Mathématique française de leur promotion. Il suit de session en session les dossiers des candidats, et donc en a une connaissance en profondeur, inaccessible à un rapporteur occasionnel. Il peut donc, au long d'une législature mener une politique cohérente. Cette tâche s'est encore vue compliquée par les contraintes imposées par la direction à équilibres Paris-Province.

Ce déclassement est sans appel. Notre jury n'a aucun moyen de défendre son jugement, ni de réfuter les arguments avancés par la Direction. Aucune concertation n'a lieu, le jury Mathématique sert en dernière analyse de caution scientifique : une instance où se mène une politique décidée ailleurs.

C'est un dénigrement personnel de Mathématiciens parmi les plus méritants : le jury d'admission traite ces êtres humains comme du matériel, sans se soucier de casser leur enthousiasme. Il nie : des chercheurs de grande valeur, choisis pour leurs résultats, mais aussi pour leur rôle de direction de recherche, la reconnaissance d'un travail accompli sur 10 ou 15 ans, au prix d'un investissement et d'une remise en cause personnelle constante.

Il fragilise encore la carrière de chercheur, déjà peu attrayante sur le plan matériel, si on la compare à celles offertes aux USA ou par le privé; l'industrie est prête à payer un mathématicien ouvert aux applications quelque trois fois plus que le CNRS! Il ne faut pas non plus négliger l'effet de découragement sur les jeunes : pourquoi s'engager dans une carrière où les avantages matériels sont infimes et les perspectives bouchées?

Il jette un doute sur l'intérêt du CNRS pour les Mathématiques, et ceci a un moment où, au contraire, la mobilisation de toutes les institutions françaises est indispensable pour relever le défi qui se présente à la communaute mathematique francaise. S'il s'agissait d'un tel choix, les conséquences en seraient extrêmement graves, surtout qu'il aurait été fait sans aucune concertation, ni du Comite National, ni des autres corps constitués de la communauté mathématique française. La question fondamentale serait alors : peut-on maintenir à la France sa position d'exception en Mathématiques si le CNRS refuse d'être un des piliers de l'Ecole mathématique française?

Le jury d'admission du C.N.R.S. par P.A. MEYER

Le jury d'admission du Concours DR2 au CNRS a rejeté en juillet 1991 trois chercheurs sur cinq, dans la liste proposée par la commission de Mathématiques. Pour comprendre comment cela a pu se faire, il faut savoir ce qu'est le jury d'admission. Je peux expliquer comment il fonctionne en pratique, car j'y ai participé quatre fois, sous la présidence de deux Directeurs Généraux successifs. J'ignore si le jury avait comporté des mathématiciens auparavant; en tout cas, il n'y en avait plus cette année. A mon avis, ce bouleversement de la liste n'aurait pu avoir lieu en présence d'un mathématicien, *n'importe lequel*, capable de défendre les dossiers contre des jugements sommaires.

Je ne veux pas dire que les mathématiciens constituent une maffia, mais que le jury possède seulement la compétence scientifique nécessaire pour veiller, avec une certaine prudence, à ce que les commissions ne prennent pas des décisions sous la pression de groupes internes ou externes. Il n'a pas du tout la compétence qu'il faudrait pour revoir complètement les classements. Pendant les années où j'y ai siégé, cela ne s'est d'ailleurs produit qu'exceptionnellement dans les sciences exactes (le premier cas grave concernait déjà les mathématiques l'an dernier), rarement dans les sciences industrielles, davantage dans les sciences humaines. De tels changements avaient le caractère de sanctions envers des commissions qui avaient voté de manière partiale ou légère, *et aussi* envers des candidats qui, de l'avis du jury, ne méritaient absolument pas de devenir DR2 (Maîtres de Recherches). Ayant participé aux délibérations de la commission, j'affirme que ce n'a été le cas ni pour celle-ci, ni pour les candidats, et il me semble que si j'avais siégé au jury j'aurais défendu le classement tel quel, sachant combien le choix dans l'énorme liste d'attente a été difficile.

Un même jury d'admission examine l'ensemble des concours, et représente donc tout le CNRS, mais non toutes les disciplines. Y siègent le Directeur Général, les directeurs scientifiques des départements, et des membres nommés chaque année par le Directeur Général. Nous avons depuis deux ans un directeur scientifique pour les mathématiques (J.P. Ferrier), mais il n'est pas directeur de département, et ne siège pas au jury d'admission. Cette année, le jury était strictement réduit au Directeur Général, aux directeurs scientifiques, et à un seul membre nommé par département, soit 16 personnes en tout. J'ai gardé l'impression d'assemblées plus larges les années précédentes, mais je n'ose l'affirmer faute de traces écrites. Le temps consacré à chaque dossier est bref, surtout depuis que le nombre de postes a augmenté, car le travail est énorme.

Avant la session, chaque membre du jury reçoit l'ensemble des dossiers des candidats, avec pour chacun une notice donnant des renseignements administratifs, mentionnant les "cinq principales publications", et "l'audience internationale" et contenant un bref rapport scientifique expliquant pourquoi le jury d'admissibilité présente ce candidat. Il est en général rédigé en "langue de bois", mais permet parfois aux membres du jury (s'ils le désirent et s'ils ont du flair) de deviner si un dossier est excellent, moyen ou faible. Sur l'ensemble du jury, mettons qu'il y ait quatre personnes en mesure de se faire une idée des recherches d'un candidat : son rapporteur, le directeur scientifique de son département (surtout s'il a assisté aux débats de la commission), éventuellement les rapporteurs et directeurs pour les disciplines voisines.

Le directeur scientifique joue un rôle très important, car il lui revient d'informer le jury sur la manière dont la commission a travaillé. Dans notre cas, déjà empoisonné par le problème de l'an dernier, ni D. Thouluze ni J.P. Ferrier n'ont été invités au concours, ce qui à mon avis était une erreur de la part de la commission. Mais le rôle capital revient au rapporteur (désigné par l'administration). Celui–ci est le seul à disposer, pour les candidats sur lesquels il rapporte, du dossier complet, avec la notice des titres et travaux, les tirages à part, et le rapport détaillé présenté au jury d'admissibilité. Un membre du jury ne rapporte pas nécessairement sur sa propre discipline: on m'a confié des dossiers de mathématiques bien sûr, d'économie, d'histoire des sciences, de physique théorique, ayant tous un certain caractère mathématique. Il est clair que j'étais scientifiquement incompétent dans beaucoup de cas (je l'aurais été même en mathématiques, si je n'avais pas assisté à la session de la commission!) mais on ne m'a jamais confié de dossiers très délicats hors de ma discipline, et j'ai été tenté au plus deux fois de modifier un classement, une fois vers le bas et une fois vers le haut; après information, je n'ai rien fait.

Il n'y a donc *en principe* rien d'anormal à ce que les rapports concernant les mathématiques soient confiés à un physicien – ceux-ci ayant d'ailleurs souvent une culture mathématique plus vaste que les mathématiciens. Mais la "culture" ne suffit pas pour juger sur le fond et comparer les mérites des chercheurs. Un rapporteur aura-t-il la présomption de trancher tout seul, sur un sujet dont il a au mieux une connaissance vague? Quand on rencontre un dossier délicat, il faut s'informer, et la source qui vient en premier à l'esprit est le président de la commission correspondante ou le rapporteur d'admissibilité. Leur en parler représente aussi une courtoisie élémentaire, sauf guerre ouverte avec la commission. Ayant obtenu leur avis, on reste libre du sien, et de s'informer aussi ailleurs. Que cela ne se soit apparemment pas fait entache de légèreté les décisions de cette année.

Il y a donc quatre éléments de poids dans les décisions du jury, par importance décroissante: le rapporteur du candidat, le directeur scientifique pour sa discipline, le Directeur Général (dont l'influence, selon tout ce que j'ai vu, s'exerce dans le sens de la modération) et en dernier lieu (non négligeable tout de même) le chœur des gens d'expérience. Si les deux premières personnes se connaissent trop bien et ont déjà fait leur délibération privée, le jury ne dispose plus de moyen d'information objective, et un groupe de gens honnêtes peut émettre des votes sans signification scientifique, et aux conséquences humaines désastreuses.

***

Tout le système d'évaluation scientifique, et pas seulement en France, repose sur la confiance. Cela ne signifie pas que l'on soit naïf, mais il n'existe pas d'autre possibilité : confiance entre collègues dans la commission, confiance de la direction dans les propositions du Comité National, sauf évidence en sens contraire. Dans le cas de J. Mossino, le plus douloureux puisqu'elle est refusée pour la seconde fois, j'ai fait et je fais encore confiance aux deux membres de la commission qui ont affirmé qu'il s'agissait d'un très bon dossier. Le très grave jugement en sens contraire, qui brise sa carrière au CNRS, a été prononcé sans appel par un rapporteur seul, non directement compétent, et dans une assemblée où personne n'était en mesure d'apporter une contradiction. *Je pense donc que le fonctionnement actuel du jury d'admission ne correspond pas aux règles habituelles de l'évaluation scientifique, ni même aux garanties de droit normales.* Idéalement, l'élimination d'un candidat proposé par le jury d'admissibilité devrait exiger deux rapports, (comme autrefois pour le Bac !)

P.A. MEYER
Directeur de Recherches au CNRS

Un écho sur le Conseil Scientifique du C.N.R.S.

Le Conseil scientifique s'est réuni le 19 septembre. Les résultats des concours, c'est-à-dire les décisions des jurys d'admission, ne figuraient à l'ordre du jour que sous forme de statistiques(1), présentées pour information aux membres du Conseil. Le Conseil n'avait pas qualité pour les mettre en cause. Cependant l'affaire des postes DR2 de mathématiques a été évoquée tout de suite, et elle a fait une certaine impression. Mon argumentation était simple, et je l'avais présentée trois semaines plus tôt, dans un long entretien téléphonique, à Daniel Thoulouze(2) : 1°) les mathématiciens dans leur ensemble sont très attachés aux instances du CNRS, même si, par suite du développement inégal des mathématiques au CNRS et dans les universités, ils se trouvent, relativement à d'autres disciplines scientifiques, sous-représentés; il y a contradiction entre la politique affichée du CNRS, de favoriser les mathématiques, et le coup porté par le jury d'admission à la confiance mutuelle entre le CNRS et la communauté mathématique; 2°) au plan général, il est aberrant que le rapporteur dans un jury d'admission prétende refaire le travail de toute une commission, et le jury d'admission devrait, en comparant les propositions des différentes commissions, se borner à accepter ou refuser, sans se permettre des interversions. Le directeur général, François Kourilsky, a immédiatement affirmé qu'il n'y avait rien à faire, et qu'il avait déjà reçu à ce sujet un volumineux et pesant courrier. Daniel Thoulouze a pris la défense du jury d'admission en critiquant les choix du jury d'admissibilité : candidats vieux, parisiens, et de moindre qualité que les suivants. Un autre membre du Conseil, littéraire, a pris la défense des prérogatives des jurys d'admission. D'autres ont épousé la thèse que j'avais présentée. D'autres ont évoqué une situation similaire en médecine. En apparence, le débat, non sanctionné par un vote, ne pouvait pas avoir d'effet.

Cependant l'impression peut se mesurer à deux tests. Le Conseil devait voter pour la réaffectation des postes non affectés, ou non attribués (cas de démission) dans les différentes sections. D'ordinaire, il s'agit d'une régularisation de routine, et qui va de soi. J'ai annoncé mon intention de voter contre, en raison de la réaffectation en section 05 d'un poste de DR2 de la section 03 (la réaffectation, en soi, n'est nullement scandaleuse; une réaffectation en sens inverse avait eu lieu l'année dernière), parce que je n'avais pas d'autre moyen de condamner le fonctionnement du jury d'admission. D'autres membres du conseil ont signalé des anomalies dans d'autres sections. Le vote n'a été acquis que par 14 pour, 6 contre et 7 abstentions, ce qui, compte-tenu de la composition du Conseil et du caractère du vote, me paraît être un sorte de vote de défiance.

A la fin de la séance, le Conseil était

invité à proposer de nouveaux membres pour le Conseil scientifique de l'ENS. Le nom d'André Neveu avait été prononcé lors d'entretiens entre Etienne Guyon et Daniel Thoulouze. Sur proposition du Directeur général, ce point a été retiré de l'ordre du jour.

Recrutements en CR2		
au CNRS	191 hommes	103 femmes
en MPB	36 hommes	11 femmes
Recrutements en CR1		
au CNRS	80 hommes	33 femmes
en MPB	10 hommes	1 femme
Recrutements en DR2		
au CNRS	235 hommes	67 femmes
en MPB	31 hommes	9 femmes
Recrutements en DR1 (postes affichés)		
au CNRS	4 hommes	0 femme
en MPB	2 hommes	0 femme

(1) Exemple : répartition hommes-femmes à l'admission comme CR ou comme DR2

(2) Directeur scientifique pour MPB (mathématiques et physique de base).

J.-P. KAHANE
Université Paris-Sud

Lettre de la S.M.F.

Monsieur le Directeur Général,

Le Bureau de la Société Mathématique de France a eu son attention attirée par plusieurs collègues sur la décision prise, en ce qui concerne les nominations de mathématiciens, par le jury d'admission des directeurs de recherche qui s'est tenu en juillet de cette année sous votre présidence.

Il s'est informé auprès des mathématiciens qui ont eu à connaître de ce dossier et auprès de la Direction Scientifique à laquelle les mathématiques sont actuellement rattachées.

En la circonstance il lui apparaît que l'absence complète de lien entre le jury d'admissibilité et cette instance a provoqué un vide de compétence scientifique qui a permis à des arguments non pertinents de prendre une place démesurée (ceci est patent dans le cas d'une candidate au moins). Il n'est pas dans l'objet de cette lettre de nier l'intérêt de voir des scientifiques extérieurs à notre discipline porter un regard sur elle, ni de refuser l'application d'une politique générale de l'organisme. Nous vous demandons cependant d'encourager, et d'imposer s'il le faut, la communication indispensable entre ces deux instances.

Au-delà du tort causé aux candidats non promus, nous sommes particulièrement inquiets des conséquences que ce mode de fonctionnement risque d'avoir sur l'instance fondamentale d'évaluation scientifique qu'est le Comité National. Y siéger constitue une responsabilité éminente et une charge très lourde pour quiconque apporte une attention soutenue aux dossiers qui lui sont soumis. On peut craindre de voir les scientifiques les plus scrupuleux renoncer à faire cette évaluation avec autant de sérieux (puisqu'elle peut être ignorée aussi légèrement), voire même tout simplement refuser de siéger au Comité National. Une telle éventualité serait dramatique pour la crédibilité du Centre National de la Recherche Scientifique dans la communauté scientifique, crédibilité à laquelle nous sommes tout particulièrement attachés.

Nous sommes prêts à vous entretenir plus précisément de nos craintes et aussi des attentes des mathématiciens vis-à-vis du C.N.R.S. si vous le jugez utile. En effet la communauté mathématique va devoir faire face dans la décennie qui commence à de très graves problèmes de renouvellement de son personnel, et ces problèmes ne pourront être résolus que si l'ensemble des institutions ayant en charge le potentiel de recherche national se mobilise. Il nous semble que le C.N.R.S. a une place éminente à jouer dans ce processus.

Au nom du Bureau de la Société Mathématique de France, je vous prie d'agréer, Monsieur le Directeur Général, l'expression de ma haute considération.

Jean Pierre BOURGUIGNON
Président de la Société Mathématique de France

A propos du concours DR par J.-P. FERRIER

La modification par le jury d'admission du classement des Directeurs de Recherches en Mathématiques, qui est inhabituelle dans la discipline, a causé un émoi auquel le CNRS est sensible. Un débat serein est plus que jamais nécessaire.

D'abord il convient de corriger des interprétations erronées. Ainsi l'absence de mathématicien dans le jury d'admission n'est que le résultat du fait que toutes les grandes disciplines ne peuvent être représentées, du souhait manifesté par le dernier mathématicien en place de ne plus être de ce jury et du désistement d'autres personnalités sollicitées. Dans l'avenir la présence d'un mathématicien reste souhaitable. Cependant des représentants d'une discipline dont le rôle stratégique est reconnu par toutes les autres doivent accepter à l'occasion le jugement d'autres scientifiques, surtout s'il s'en trouve un qui est des leurs par la compétence.

Contrairement à ce qui a pu être dit le jury d'admission s'appuie clairement sur le travail du jury d'admissibilité. D'abord son choix est limité à la liste établie en première instance. Ensuite il intègre toute l'information et les rapports que lui transmet ce premier niveau. Sa spécificité est d'intégrer dans son appréciation des éléments de politique scientifique globale du CNRS : équilibre Paris-province, ouverture vers les applications ...

Il n'y a pas de contradiction entre les deux niveaux. Par ailleurs il faut se rappeler que le bilan d'évaluation de la section ne se limite pas au seul concours DR; il convient d'y ajouter le travail de qualité effectué pour le recrutement des CR, les détachements, les promotions en DR1 ou DRCE ... opérations pour lesquelles des possibilités importantes ont été dégagées, avec notamment l'argument de la qualité des recrutés ou promus.

Plutôt que de faire le procès des jurys — cherchant des avis comparatifs indépendants sur quelques candidats admissibles ou non et quelques professeurs venant d'être nommés — ne vaut-il pas mieux réfléchir sur la place du concours dans la politique du CNRS?

Les Mathématiques ont évidemment besoin de la fonction de Directeur de Recherches : avec l'accroissement des charges à l'université, avec l'ouverture interdisciplinaire, avec la demande industrielle. Encore faut-il que l'exercice de cette fonction corresponde à une tranche de la vie de mathématicien au cours de laquelle la créativité, le rayonnement scientifique sont à leur sommet. Comme des mathématiciens le disent souvent "un Directeur de Recherche est autre chose qu'un Chargé qui n'a pas démérité".

Dans cet esprit le CNRS s'efforcera de développer une politique de fléchage pour mieux traiter l'aspect stratégique. Cherchant une utilisation plus pleine de la fonction de Directeur, il poursuivra l'ouverture de postes en détachement de haut niveau et de durée moyenne. Cela n'empêchera pas de recruter des DR parmi les CR, mais en harmonie d'âge et de qualité avec le recrutement des professeurs. Il faut en effet que les chercheurs les plus dynamiques, les leaders en puissance dans leur spécialité, aient le choix de rester dans l'organisme, voire d'y entrer. C'est la meilleur manière de donner de *l'espoir aux jeunes.*

Quand l'université peut ouvrir en Mathématiques 90 concours de professeur en une année, le CNRS ne peut se fermer sans risque d'asphyxie pour la discipline. Le sort des Chargés qui ont bien travaillé et se sentent bloqués ne peut reposer sur lui seul; les établissements qui les accueillent doivent également s'y intéresser.

Il faut en effet mesurer l'effort consenti au CNRS pour les Mathématiques : ainsi, faute d'un contingent déjà accumulé, un détachement lui coûte un poste à l'entrée avec une cascade de promotions pouvant aller jusqu'à la classe exceptionnelle. Aussi les mathématiciens doivent-ils apprécier la solidarité demandée aux autres disciplines à commencer par la Physique du département SPM.

Le Comité National discute de la politique scientifique avec la Direction du Département; son rôle est aussi d'élargir le débat à la communauté qu'il représente. Cela est d'autant plus important lorsque cette politique impose une évolution dans les habitudes, évolution qui traduit le voeu exprimé par les mathématiciens de voir le CNRS prendre plus de part à leur discipline. En faisant largement participer le milieu au débat il peut éviter incompréhensions et crises dont personne ne tire bénéfice.

Ainsi le message du Département avant le jury : *"Au niveau DR s'ajoute à l'intérêt de considérer la province l'obligation de maintenir un équilibre de qualité pour les promotions à Paris avec les recrutements sur les postes de professeur dans les grandes universités."* aurait pu donner lieu à davantage de discussion.

Le Département souhaite donc que s'instaure un vrai dialogue, sans lequel l'application d'une politique fût-elle idéale peut se révéler périlleuse. La qualité des Mathématiques Françaises, que le dernier congrès international a encore pu démontrer, le mérite.

Jean-Pierre FERRIER
Directeur adj. du Départ. MPB du CNRS

_ *ÉLECTIONS au COMITÉ NATIONAL de la RECHERCHE SCIENTIFIQUE* _

Ces élections viennent de se terminer. On trouvera ci-dessous le détail des divers tours ainsi que la liste des membres du Comité National (élus et nommés). Rappelons que, contrairement au comité sortant, il y avait cette fois collèges séparés entre chercheurs du CNRS et universitaires. Ceux-ci devaient d'ailleurs demander leur inscription sur les listes électorales. Le scrutin en rang A était uninominal à deux tours, celui en rang B et C était de liste.

Collège A1 *(directeurs de recherche)* 62 inscrits.
Il y avait quatre candidats pour trois sièges. Trois candidats étaient soutenus par le SNCS-FEN (D. Cioranescu, J.-Y. Girard et Y. Le Jan) et un par le SGEN-CFDT (A. Haraux).

Premier tour : 40 votants, 2 élus (J.-Y. Girard : 30 voix, Y. Le Jan : 27 voix). Ballotage entre D. Cioranescu (19 voix) et A. Haraux (18 voix).

Second tour : 37 votants, D. Cioranescu est élue (26 voix) contre 11 à A. Haraux.

Collège B1 *(chargés de recherche)* 197 inscrits.
Il y avait deux listes complètes pour trois sièges. Il y a eu 109 votants qui se sont répartis pour 79 pour la liste soutenue par le SNCS-FEN (J.-C. Sikorav, J.-Y. Chemin et P. Maisonobe) et 27 pour celle soutenue par le SGEN-CFDT (J.-Y. Etesse, P. Julg et C. Guillopé). Sont donc élus J.-C. Sikorav, J.-Y. Chemin et J.-Y. Etesse.

Collège A2 *(Professeurs)* 406 inscrits.
Il y avait au premier tour 11 candidats pour 3 sièges. Deux syndicats avaient fait connaître leurs soutiens. Le SNESup-FEN pour F. Digne, B. Prum et Raïs, le SGEN-CFDT pour M.-F. Coste, B. Prum et J. Saint Jean Paulin. Après les résultats du premier tour, le SNESup avait retiré deux de ses candidats en appelant à voter pour la liste soutenue par le SGEN. Par ailleurs, D.T. Le faisait connaître qu'il était soutenu au second tour par le SNESup. Après ces deux scrutins qui sont résumés dans le tableau ci-dessous, les trois élus furent M.-F. Coste, B. Prum et J. Saint Jean Paulin.

	1er tour	2nd tour			
votants	231	252			
exprimés	225	251		1er tour	2nd tour
Marie-Françoise Coste	96	143	Yvon Maday	35	38
Michel Chipot	21	15	Paul Malliavin	69	85
François Digne	32		Bernard Prum	107	142
Jean-Michel Ghidaglia	46	43	Mustapha Raïs	39	
Grigis Alain	69	82	Jeanne St Jean Paulin	52	91
Dung Trang Le	42	48			

Collège B2 *(Maîtres de conférences, Assistants)* 328 inscrits.
Il y avait deux listes complètes pour deux sièges. Les 207 votants ont apporté 108 suffrages à la liste présentée par le SNESup-FEN (S. Meleard, O. Michel) et 81 à celle soutenue par le SGEN-CFDT (Y. Mathieu et A. Szpirglas). Sont ainsi élus S. Meleard et Y. Mathieu.

Collège C *(Ingénieurs, Techniciens et Administratifs).* Deux listes en lice pour 3 sièges. Nous n'avons pu avoir le détail des scrutins mais seulement les élus : C. Bon Saint Côme et S. Chakoff (SGEN-CFDT) et G. Doclot (SNTRS-CGT).

COMPOSITION DE LA NOUVELLE COMMISSION

Si l'on s'intéresse à la situation administrative réelle (et pas de celle prise en compte par la commission électorale) la commission comprend :

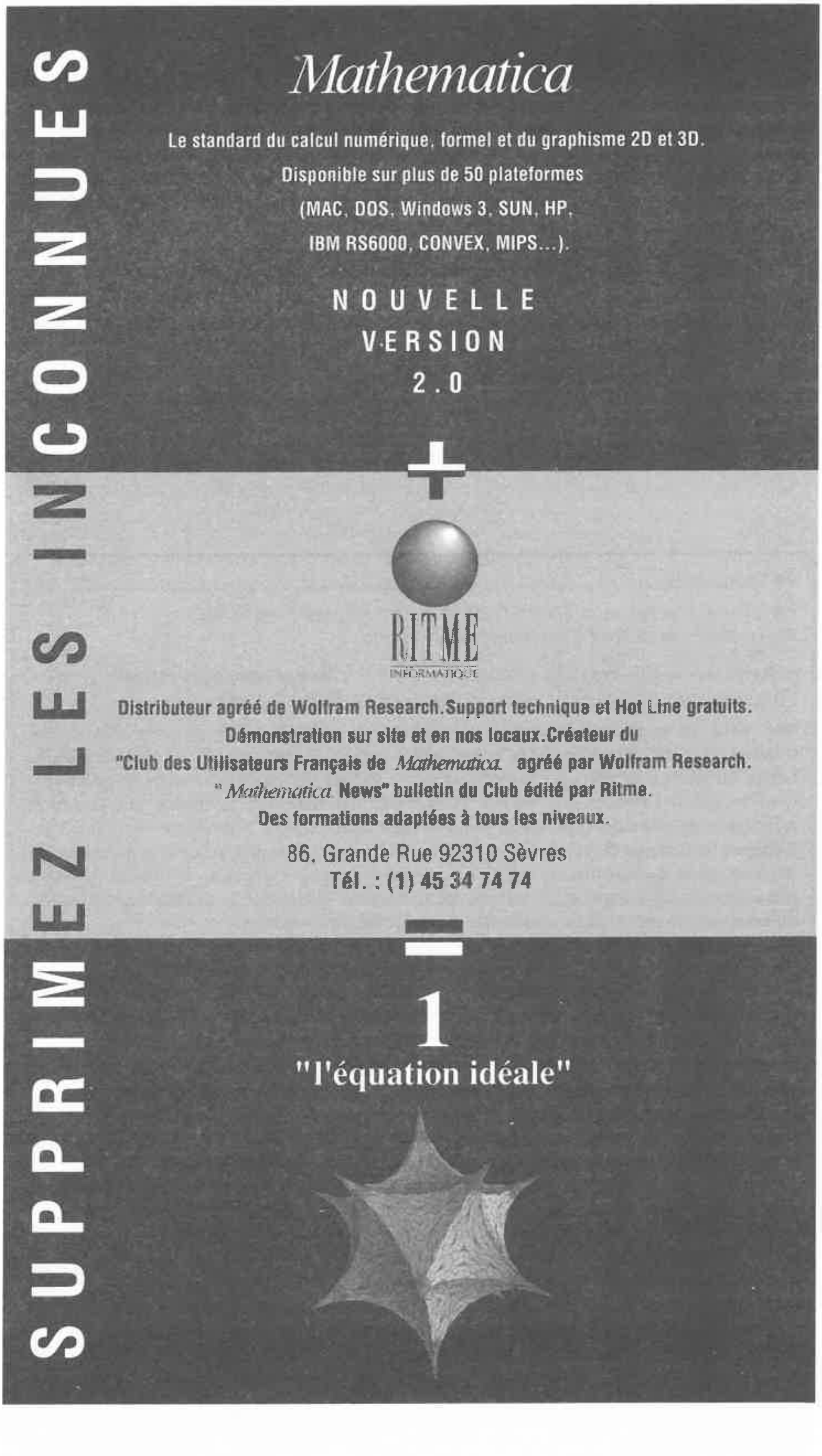
7 élus A : Doina Cioranescu (Paris 6), Marie-France Coste (Rennes), Jean-Yves Girard (Paris 6), Yves Le Jan (Paris 6), Bernard Prum (Paris 5), Jeanine Saint Jean Paulin (Metz) et Jean-Claude Sikorav (Toulouse)

4 élus B : Jean-Yves Chemin (Ecole Polytechnique), Jean-Yves Etesse (Rennes), Suzy Méleard (Paris 6) et Yves Mathieu (Marseille)

3 élus C : Chantal Bon Saint Côme (Bordeaux), Sonia Chakoff (Nice) et Ginette Doclot (Villeneuve d'Ascq)

Nommés : Pierette Cassou-Noguès (Bordeaux), Jean-Pierre Demailly (Grenoble), M. Perriot (Dassault), Jean-Yves Ramis (Strasbourg), Denis Serre (ENS Lyon), M. Stora, Bernard Teissier (ENS Ulm).

Cette nouvelle commission doit élire son président et son bureau dans le courant du mois d'octobre. ■


SUPPRIMEZ LES INCONNUES
Mathematica
Le standard du calcul numérique, formel et du graphisme 2D et 3D.
Disponible sur plus de 50 plateformes
(MAC, DOS, Windows 3, SUN, HP,
IBM RS6000, CONVEX, MIPS...).
NOUVELLE
VERSION
2.0
+
RITME
INFORMATIQUE
Distributeur agréé de Wolfram Research. Support technique et Hot Line gratuits.
Démonstration sur site et en nos locaux. Créateur du
"Club des Utilisateurs Français de Mathematica agréé par Wolfram Research.
"Mathematica News" bulletin du Club édité par Ritme.
Des formations adaptées à tous les niveaux.
86, Grande Rue 92310 Sèvres
Tél. : (1) 45 34 74 74
=
1
"l'équation idéale"

STASTISTIQUES SUR LES FORMATIONS DOCTORALES DE MATHÉMATIQUES

(établies par *J.-P. RAOULT,*
Président du Groupe d'Experts Sectoriel de Mathématiques
Ministère de la Recherche et de la Technologie)
Le 6 août 1991

1. Mode d'élaboration

Ces statistiques résultent du croisement de chiffres de la Direction de la Recherche et des Etudes Doctorales (Ministère de l'Education Nationale) et du bureau "Formation, Bourses et Allocations de Recherche" (Ministère de la Recherche et de la Technologie), avec (surtout pour les deux dernières années) vérifications auprès des responsables des formations doctorales en cas de chiffres contradictoires ou surprenants (dans un cas, il a été procédé à une procédure statistique d'estimation de données manquantes pour effectuer une ventilation entre nationalités qui semblait non disponible).

Il est regrettable qu'il n'ait pas été possible d'inclure dans ce travail les flux d'entrants annuels en doctorat (premières inscriptions post DEA), les chiffres à ce sujet étant inexploitables par suite de mauvaise interprétation, par une proportion importante des destinataires, des passages correspondants dans les questionnaires ministériels.

2. Commentaires

A partir de 1987, *il y a une croissance soutenue de la plupart des indicateurs relatifs aux D.E.A.*: sur 5 ans (85-86 à 89-90), on enregistre la multiplication par 1,31 des effectifs totaux et par 1,51 des nombres de diplômes délivrés; *si on se limite à la considération des étudiants français*, on enregistre pour la même période une multiplication par 1,76 des effectifs d'inscrits, et par 1,98 des effectifs de diplômés. Cette évolution se poursuit pour l'année universitaire en cours (90-91) : avec la même référence à 85-86, on a une multiplication par 1,43 des effectifs totaux, et par 1,90 des effectifs d'étudiants français.

On constate donc que *la croissance des effectifs est due uniquement aux étudiants français*, dont la proportion passe en 5 ans de 43% à 57%; durant cette période, le nombre d'étrangers reste stable (avec un creux en 87-88, dû vraisemblablement à des mesures plus restrictives dans le domaine de l'immigration à ce moment là). C'est à ce phénomène qu'est dû pour une bonne part l'augmentation du taux de reçus : il passe en 4 ans de 52% à 60%, mais pour les étrangers il reste stable aux alentours de 48%, alors que pour les français il oscille assez fortement, avec une tendance globale à la hausse (61% en 85-86, 69% en 89-90).

Cette évolution favorable bénéficie tout autant aux "petites" formations qu'aux plus grosses; depuis 1987, les nombres de DEA se situant en dessous de certains seuils diminuent régulièrement et rapidement quel que soit le critère retenu (effectifs totaux, effectifs français, total des reçus, reçus français).

En ce qui concerne les doctorats, l'introduction de la nouvelle thèse se traduit par une *baisse dans la période 87 à 89* (de 254 à 192), d'autant plus nette qu'il s'agit d'étudiants ayant fait leurs études de second cycle et de DEA dans une période "noire" pour les effectifs en Mathématiques. La remontée s'amorce en 1990, et déjà en 1989 pour les doctorats décernés à des français, alors que le nombre de doctorats décernés à des étrangers continue à diminuer.

On relèvera enfin (et regrettera) que, quel que soit l'indicateur choisi, *les chiffres concernant les étrangers issus de la CEE restent bas.*

1. Inscrits aux D.E.A.

Effectifs bruts	**85-86**	**86-87**	**87-88**	**88-89**	**89-90**	**90-91**
Total	914	925	938	1095	1196	1309
Français	397	415	487	578	695	751
C.E.E.	16	16	19	14	11	24
Autres étrangers	503	494	432	503	488	534
Pourcentage de Français	43 %	45 %	52 %	53 %	58 %	57%

Croissance annuelle	**85-86**	**86-87**	**87-88**	**88-89**	**89-90**	**90-91**
Total		1%	1 %	17 %	9 %	9 %
Français		5 %	17 %	19 %	20 %	8%
C.E.E.			non significatif			
Autres étrangers		-2 %	-13 %	16 %	-3 %	9 %

Sur Base 100 en 85-86	**85-86**	**86-87**	**87-88**	**88-89**	**89-90**	**90-91**
Total	100	101	103	120	131	143
Français	100	105	123	146	176	190
Autres étrangers	100	98	86	100	97	106

2. Diplômes d'études approfondies délivrés

Taux de Succès (dipl/inscrits)	**85-86**	**86-87**	**87-88**	**88-89**	**89-90**	**90-91**
Total	52 %	57 %	56 %	56 %	60 %	
Français	61 %	67 %	62 %	64 %	69 %	
C.E.E.		non significatif				
Autres étrangers	45 %	50 %	48 %	47 %	48 %	
Diplômés	**478**	**529**	**526**	**614**	**723**	
Français	242	276	303	372	480	
C.E.E.	11	5	14	8	9	
Autres étrangers	225	248	209	234	234	
Pourcentage de Français	51 %	52 %	58 %	61 %	66 %	

Croissance annuelle	**85-86**	**86-87**	**87-88**	**88-89**	**89-90**	**90-91**
Total		11 %	−1 %	17 %	18 %	
Français		14 %	10 %	23 %	29 %	
C.E.E.			non significatif			
Autres étrangers		10 %	-16 %	12 %	0 %	

Sur Base 100 en 85-86	85-86	86-87	87-88	88-89	89-90	90-91
Total	100	111	110	128	151	
Français	100	114	125	154	198	
C.E.E.		non significatif				
Autres étrangers	100	110	93	104	104	

3. Doctorats décernés

(3e Cycle, Docteur Ingénieur, Nouveau Régime à l'exclusion des Doctorats d'Etat)

Effectifs bruts	1987	1988	1989	1990	Total
Total	254	210	192	205	861
Français	107	83	93	115	398
C.E.E.	7	9	8	9	33
Autres étrangers	140	118	91	81	430
Pourcentage de Français	42 %	40 %	48 %	56 %	50 %

4. Dénombrement des formations doctorales aux effectifs inférieurs à certains seuils

Nbre d'inscrits	85-86	86-87	87-88	88-89	89-90	90-91
Eff. total ≤ 5	2	1	0	1	2	0
Eff. total ≤ 10	8	13	12	8	5	2
Eff. français ≤ 5	16	20	15	12	8	5
Eff. français ≤ 10	25	27	26	21	20	16

Nbre de diplômes	85-86	86-87	87-88	88-89	89-90	90-91
Eff. total ≤ 5	11	11	9	6	5	
Eff. total ≤ 10	25	23	21	18	12	
Eff. français ≤ 5	21	22	21	17	15	
Eff. français ≤ 10	34	35	33	29	23	

Nombre de doctorats décernés en 4 ans (1987 à 1990)

(Troisième Cycle, Docteur Ingénieur, Nouveau Régime *à l'exclusion des Doctorats d'Etat*)

Eff. total ≤ 10	10
Eff. total ≤ 20	27
Eff. français ≤ 10	37
Eff. français ≤ 20	42

N.B. 1: *Les formations de Didactique n'ont pas été prises en compte, faute de données statistiques suffisamment complètes.*

N.B. 2: *45 formations doctorales sont concernées par ces statistiques.* ■

D.E.A. CAMPAGNE 91

GET 10 : MATHÉMATIQUES ET LEURS APPLICATIONS

Pierre BÉRARD (Institut Fourier, Grenoble I)

Président du G.E.T. 10 "Mathématiques et leurs Applications"

Rapport sur la campagne d'habilitation 91

Quelques chiffres

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler quelques données concernant les deux campagnes précédentes (89 et 90) avant de parler de la campagne 91.

Campagne 89

Le GET 10 a examiné 53 demandes d'habilitation (pour 46 DEA sortants), dont 5 demandes de création ex nihilo, et trois demandes de création en remplacement d'un DEA existant (éclatement 1 → 3).

Le GET 10 a proposé deux créations (Clermont II, *Mathématiques Appliquées* et Paris I, *Modélisation et modèles mathématiques en Economie...*), une suppression, et le renouvellement des 45 autres DEA sortants (pour des durées allant de 1 à 4 ans); il a donné un avis défavorable aux autres demandes de création ou éclatement. Les avis du GET ont été suivis par l'administration, avec des modifications quant aux durées proposées pour les habilitations (en particulier, les habilitations proposées pour 4 ans ont toutes été ramenées à 2 ans pour permettre une "remise à plat" en 91).

Ainsi, à l'issue de la campagne 89, il y avait 47 DEA rattachés au GET 10 comme GET principal.

Campagne 90

Le GET 10 a examiné 7 DEA dont l'habilitation en 89 n'avait été reconduite que pour un an (faute de navette possible) et une demande de création déjà présentée en 89 et dûment modifiée sur suggestions du GET.

Le GET 10 a proposé la création du DEA de Montpellier II, *Bio-mathématiques* et la suppression d'un DEA. Ces propositions ont été suivies par l'administration et ont donné lieu à des habilitations pour un an (en vue de la "remise à plat" prévue pour 91).

A l'issue de la campagne 90, il y avait donc toujours 47 DEA rattachés au GET 10 comme GET principal.

Campagne 91

Cette année, le GET 10 a examiné 52 demandes d'habilitation. Parmi les 47 DEA sortants, trois ont demandé leur examen par un autre GET; il s'agit des DEA de Didactique de Bordeaux I, Paris VII et Grenoble I (+ co-habilitations); le DEA de Didactique de Strasbourg I reste rattaché au GET 10. Il y avait 9 demandes de création (3 demandes de création ex nihilo et 6 demandes correspondant à l'éclatement en 6 DEA de deux DEA existants).

A la suite des navettes qui ont eu lieu courant Mars, et sur suggestions du GET, une demande d'éclatement a été retirée, l'autre réduite à un éclatement 1 → 2. Il restait donc 44 renouvellements et 5 créations (dont un éclatement).

Le GET 10 a formulé les propositions suivantes :

(a) Créations refusées : 2;

(b) Création proposées : 3. Il s'agit des DEA suivants : Paris XIII, *Mathématiques pour leurs applications* et Paris VI, *Analyse et Modélisation* et *Algèbre et Géométrie* (éclatement du DEA de Mathématiques Pures en deux DEA).

(c) Renouvellements proposés : 43 (pour des durées de 4 ou 2 ans selon les cas; une des demandes a été transférée au GET 40 *(Informatique, Automatique)* les mathématiques n'y occupant pas une place prédondérante; l'habilitation de ce

DEA a d'ailleurs été proposée par le GET 40).

Le GET 10 a également donné son avis sur une dizaine de DEA ne relevant pas prioritairement des mathématiques (GET 10 = GET secondaire).

En résumé, 46 habilitations proposées pour des DEA dépendant prioritairement du GET 10 (12 pour 2 ans et 34 pour 4 ans), dont une création ex nihilo et deux créations en remplacement d'un DEA existant (éclatement); tous les renouvellements demandés ont été accordés.

Commentaires

a) Les demandes de création non satisfaites à l'issue des campagnes 89 et 90 n'ont pas conduit à de nouveaux dossiers. Sur suggestions du GET 10, les départements de mathématiques concernés ont cherché à se rapprocher de départements plus importants par le biais de co-habilitations, ou par des accords de collaboration. D'autres départements ont fait de même dans plusieurs régions. De ce fait, le nombre de DEA à sceaux multiples a sensiblement augmenté. Le GET se félicite de ce renforcement des capacités d'encadrement de DEA existants et de l'ouverture que cela représente pour les départements de mathématiques dont la taille est insuffisante pour assurer un DEA sur site. Il espère que cette politique sera favorisée par des soutiens explicites à l'accueil des étudiants de DEA et des doctorants implantés, à ce titre, dans des départements de petite taille (financement DRED, allocations MRT).

b) Par le jeu des co-habilitations et des accords de coopération, la France est "desservie" de manière presque satisfaisante par des DEA de Mathématiques. Presque, seulement, car la région Picardie n'a pas de DEA de Mathématiques; la région Champagne-Ardenne n'a pas elle non plus de DEA de mathématiques en propre, mais l'Université de Reims a des accords de coopération avec l'Université Paris VI au niveau des mathématiques).

c) Le GET a proposé des durées d'habilitation de 4 ans (34 DEA) et 2 ans (12 DEA). Il ne faut pas voir dans ces propositions un classement des DEA. Le GET a voulu, dans certains cas, se donner la possibilité de surveiller l'évolution d'un DEA. Il peut s'agir d'un DEA créé récemment, d'un DEA existant dont l'organisation a été modifiée en profondeur, d'un DEA dont une composante n'a pas encore atteint une maturité suffisante ou, plus rarement d'un DEA dont l'évolution inquiète le GET. Dans aucun cas la qualité scientifique globale du DEA et de la formation doctorale n'est mise en doute. Dans la majorité des cas, les propositions faites cette année sont en continuation avec celles faites en 89 et 90. Dans quelques cas particuliers, le GET a été déçu par l'évolution du DEA et n'a proposé que 2 ans.

Les propositions du GET 10 ont été suivies par le M.E.N. (à l'exception d'une proposition de renouvellement à deux ans ramenée à un an seulement par le M.E.N., pour cause de flux extrêmement faibles).

d) Comme par le passé, le GET a été très sensible aux effectifs: flux d'inscrits, mais surtout flux de diplômés; pourcentage des étudiants français ou issus de la CEE dans ces flux; flux de thésards. L'évolution des flux depuis 86 (voir les statistiques publiées dans ce numéro de la Gazette) est saisissante.

Quelques chiffres révélateurs (ils ne sont pas tout à fait définitifs) :

(a) Inscrits 86 → 91 : + 48%;

(b) Inscrits (Français + CEE) 86 → 91 : + 66 %;

(c) Diplômés 86 → 90 : + 54 %;

(d) Diplômés (Français + CEE) 86 → 90 : + 78 %;

(e) DEA ayant moins de 10 inscrits par an, en 86 : 9; en 91 : 2;

(f) DEA ayant moins de 10 diplômés par an, en 86 : 26; en 90 : 11.

S'il y a eu une augmentation des flux en DEA, toutes disciplines confondues, l'augmentation en mathématiques est bien supérieure à la moyenne. Il faut sans aucun doute s'en réjouir: le besoin en jeunes docteurs en mathématiques est important tant dans le secteur public (enseignement, recherche), que dans le secteur privé (bureaux d'études, banques,...). Il convient cependant de prendre garde. L'augmentation des effectifs ne doit pas se faire au détriment de la qualité (que ce soit celle liée au potentiel d'encadrement ou celle du recrutement); elle doit aussi rester compatible avec les possibilités de financement des thèses et les débouchés potentiels.

L'augmentation très importante du nombre d'allocations MRT (alliée à la création des bourses de monitorat) et la politique d'affichage (allocations MRT et postes d'AMN) ont, sans aucun doute, joué un rôle déterminant dans l'évolution des flux (en particulier d'étudiants français), en DEA comme en thèse, après une période de désaffection particulièrement difficile. Certaines difficultés subsitent cependant. Par exemple : durée de l'allocation MRT de base (a priori 2 ans) par rapport à la durée moyenne d'une thèse en mathématiques (3 ans, et il faut aussi tenir compte du délai pour trouver un emploi après la thèse); rigidité de certaines conditions d'attribution des allocations MRT (année d'obtention du DEA); financement des études pendant le DEA (nombre trop limité de bourses de DEA); inutile complexité et diversité des possibilités offertes aux normaliens (postes d'AMN, bourses BFR).

Le financement des études doctorales est assurément un élément important pour attirer des jeunes de talent dans nos DEA et dans nos formations doctorales et les jeunes y sont sensibles. Ces jeunes se préoccupent aussi de leur avenir à plus long terme. Si les débouchés offerts aux thésards se révélaient trop insuffisants (en particulier par rapport au nombre des allocataires) on risquerait de subir une nouvelle crise de vocation qui serait bien plus grave que la précédente car elle ferait suite à des espoirs suscités puis déçus. ■

Les Concours de Recrutements au Professorat du Second Degré (juillet 1991)

	Nbre de postes	Inscrits	Présents
Agrégation externe	485	1886	1242
CAPES externe	1543	2836	2122
CAPES interne	1059	1032	726

	Admissibles	Admis
Agrégation externe	619	415 + 4*
CAPES externe	1657	1201 + 7*
CAPES interne	444	327

* à titre étranger.

N.B. : *L'agrégation interne se passe au printemps.*

COMMENT NOUS AVONS AIDÉ NOS ÉTUDIANTS À MIEUX RÉUSSIR

Adina CALVO, Max KAROUBI, Christian LERUSTE

Comment améliorer la rentabilité d'un enseignement? Le dévouement des enseignants ne peut servir de réponse. Vous pourrez lire ci-dessous ce qui se passe dans un certificat de licence à Paris 7. Nous aimerions que d'autres enseignants nous fassent connaître ce qui se passe dans ce domaine. Pensez à transmettre ce que vous faites!

Le taux d'échec élevé des étudiants aux examens a toujours été un problème à l'université. Ce problème a certes une origine extérieure (pas de concours d'entrée), mais peut-être doit-on aussi changer certaines méthodes de notre enseignement.

En ce qui nous concerne, par une méthode traditionnelle (4 heures de cours magistral, 6 heures de TD, devoirs, partiel, examen) nous avions eu seulement 50 % de réussite en juin 1988 pour un enseignement d'algèbre de Licence. (1)

Déçus par ce mauvais résultat et devant le même enseignement en 1988–1989, nous avons tenté quelques variations importantes des méthodes pédagogiques. Ces changements ont été couronnés de succès puisqu'il y a eu 80 % de reçus à la session de juin 1989. Et cette nette amélioration n'a pas été obtenue de manière démagogique, mais grâce à un **véritable travail personnel** de nos étudiants.

La méthode utilisée est la suivante :

– chaque semaine 10 exercices sont soigneusement choisis et proposés à la réflexion des étudiants, en essayant d'éviter deux écueils : exercices trop techniques ou au contraire trop triviaux (ils sont élaborés par **toute** l'équipe enseignante);

– ceux-ci sont discutés en TD, par les étudiants entre eux, et dans les permanences mises en place par les assistants;

– au cours de ces permanences (4 heures par semaine), les étudiants posent leurs questions individuellement ou en petits groupes;

– la semaine suivante un test est proposé en amphi (durée moyenne de 15 minutes) **choisi parmi les 10 exercices**;

– le surcroît de travail ainsi imposé aux étudiants est compensé par une diminution des heures de TD (4 au lieu de 6).

Le système de contrôle des connaissances est le suivant :

30 points pour les tests (moyenne des 9 meilleures parmi les 10 notes, chaque absence étant comptée 0)
20 points pour partiel
50 points pour l'examen terminal :
Total 100 points.

Est déclaré reçu un étudiant ayant au moins un total de 50 points *ou* ayant obtenu la moyenne entre la note de partiel et la note d'examen terminal (avec la pondération ci-dessus). Il existe donc une forte incitation à réussir les tests, qui dans l'ensemble ont donné de bons résultats (moyenne de 25/30).

Il y a eu quelques aberrations (bonnes notes aux tests et résultats décevants à l'examen terminal) mais en nombre limité (guère plus de 5 %), et confirmés par un échec à l'oral.

Le système a été bien accepté par les étudiants qui en ont vite compris l'intérêt; ils ont participé régulièrement aux tests et sont venus aux permanences. Ils ont été aussi très sensibles à l'amélioration de leurs relations avec les enseignants.

Nous tenons à souligner que le partiel et l'examen terminal ont été de difficulté plutôt supérieure à la moyenne. Malgré cette difficulté, nous avons constaté au moment de la délibération que 70 % des étudiants auraient réussi même sans tenir compte des notes des tests. Ceci montre que le travail régulier à lui seul a été bénéfique.

En conclusion, l'expérience nous a

(1) *cf.* Annexe

semblé positive et adaptable à tout autre enseignement de premier ou deuxième cycle à condition de conserver les mêmes caractéristiques :

– périodicité *hebdomadaire* des *tests*;

– choix des exercices par *toute* l'équipe enseignante : il a été important que nous nous réunissions chaque semaine 1 h 30 environ pour les choisir;

– les exercices doivent nécessiter une *réflexion* certaine des étudiants tout en restant assez *brefs*;

– *permanences hebdomadaires* instaurées pour répondre aux questions individuelles ou par petits groupes;

– augmentation du travail *personnel* des étudiants par réduction des heures de TD.

Il faut noter aussi que le système n'impose pas de surcroît de travail important à l'équipe enseignante. La préparation des TD est en partie compensée par le choix délicat des exercices tests qui, dans notre cas, s'effectuait lors de déjeuners hebdomadaires... La correction des tests est rapide car ils sont courts.

Remarques d'ordre pratique : en reprenant l'expérience, on a constaté qu'il est préférable de donner en test un exercice légèrement différent de ceux qui ont été initialement proposés pour éviter un recours excessif à la mémorisation. L'exercice peut d'ailleurs varier avec chaque étudiant si l'enseignant en ressent la nécessité. Après quelques tests, on peut aussi convoquer les étudiants qui ont de mauvais résultats pour essayer de corriger leurs méthodes de travail. Cette initiative peut en outre inciter certains étudiants à venir plus souvent en permanence.

Adina CALVO adina@frmap711.bitnet
Max KAROUBI karoubi@frmap711.bitnet
Christian LERUSTE leruste@frmap711.bitnet
Université Paris VII
U.F.R. de Mathématiques / U.R.A. 212
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05

Annexe : Exemple de feuille d'exercices.

Feuille d'exercices n° 6

Distribuée le mardi 21 mars 1989 – Test le mercredi 19 avril

1. Soit G un groupe d'ordre p^r, avec p premier.

Démontrer par récurrence sur r qu'il existe un sous-groupe distingué H de G tel que $\mathrm{Card}(G/H) = p$.

2. On munit $\mathbf{Z}/2n$ de la loi $*$ définie par

$$u * v = u + (-1)^u v.$$

Montrer qu'on définit ainsi une loi de groupe et que $\mathbf{Z}/2n$ muni de la loi $*$ est isomorphe au groupe diédral $\mathcal{D}_n$.

3. Soit G un p-groupe abélien noté multiplicativement tel que l'équation

$$x^p = 1$$

ait au plus p solutions dans G.

Montrer que G est cyclique.

(Utiliser le fait que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/p^{\alpha_1} \times \mathbf{Z}/p^{\alpha_2} \times \ldots \times \mathbf{Z}/p^{\alpha_r}$.)

4. Soit $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique.

a) Montrer que, dans $\mathcal{S}_n$, il y a $(n-1)!$ cycles de longueur n.

b) En utilisant un théorème de Sylow, en déduire que, si p est premier,

$$(p-1)!+1$$

est divisible par p.

5. Ecrire l'équation des classes de conjugaison pour le groupe alterné $\mathcal{A}_4$. (Trouver les classes de conjugaison).

6. Soit H l'intersection de tous les p-sous-groupes de Sylow d'un groupe fini G.
Montrer que H est le plus grand p-sous-groupe distingué de G.

7. Soit G un groupe d'ordre $2m$ où m est un entier impair.

Montrer que, dans G, il existe un élément g d'ordre 2.

Montrer que la multiplication par g induit sur G une permutation de signature égale à -1.

En déduire que G n'est pas simple.

8. Soit G un groupe non commutatif d'ordre p^3 (p premier).

a) Rappeler brièvement pourquoi $Z(G)$ est cyclique et $G/Z(G)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/p \times \mathbf{Z}/p$.

Soit x, y des éléments de G tels que $xy \neq yx$.

b) Montrer que $\{x, y\}$ engendre G.

9. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. On pose

$$N_H = \{x \in G | xHx^{-1} = H\}.$$

Montrer que N_H est un sous-groupe de G et que H est distingué dans N_H.

Application : déterminer N_H si on prend $G = GL_2(\mathbf{R})$ et H le sous-groupe des matrices diagonales.

10. Déterminer le groupe des automorphismes du groupe additif $\mathbf{Z}/32$. ■

C.A.P.E.S. DE MATHÉMATIQUES

Nous avions publié dans le dernier numéro de la Gazette un texte à propos de l'épreuve professionnelle au C.A.P.E.S. de Mathématiques. Comme nous l'indiquions alors, la réflexion se poursuivait au Ministère. Celle-ci vient d'aboutir et vous trouverez ci-dessous des extraits du texte définitif, texte publié dans l'un des B.O.E.N. de la rentrée.

L'épreuve professionnelle

A compter de la session 1992 une *épreuve professionnelle* est insérée, par ajout ou par substitution, dans les épreuves d'admission des concours externes de recrutement des professeurs certifiés (CAPES et CAPET), des professeurs de lycée professionnel du 2ème grade et des professeurs d'éducation physique et sportive (CAPEPS).

Le contenu, la durée ainsi que le coefficient affecté à cette épreuve ont été précisés par les arrêtés du 30 avril 1991 publiés au Journal Officiel du 5 mai 1991. En outre, afin d'apporter aux candidats toutes informations utiles sur la nature de cette nouvelle épreuve, des notes de commentaires ont été établies pour chacune des sections des concours. Les arrêtés du 30 avril 1991 ainsi que les notes relatives au CAPET, au CAPEPS ainsi qu'au concours d'accès au 2ème grade des professeurs de lycée professionnel (disciplines d'enseignement professionnel) ont déjà fait l'objet d'une publication au B.O.E.N. (B.O. numéro spécial 6 du 11 juillet 1991). [...]

[...] Il s'agit d'une réforme importante, inséparable de la mise en place des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres dans toutes les académies à compter de l'année 1991-1992. Elle a été inspirée par deux principes fondamentaux :

– l'initiation des enseignants à leur futur métier commence dès avant leur recrutement et cette initiation est un des éléments de la préparation aux épreuves des concours dont la responsabilité incombe aux IUFM;

– les professeurs du second degré continuent d'être recrutés par des concours nationaux ouverts à l'ensemble des candidats remplissant les conditions requises et c'est à des jurys nationaux qu'il revient de fixer par ordre de mérite la liste des candidats proposés pour l'admission aux concours.

Pour donner toute sa place à l'épreuve professionnelle, il a été décidé :

– d'en faire une épreuve d'admission. C'est donc sur la base d'une prestation orale que les jurys seront conduits à se prononcer, ce qui est d'ailleurs cohérent avec la nature même du métier d'enseignant;

– de la doter d'un coefficient tel que son poids soit compris entre 20 % et 25 % de l'ensemble des épreuves de chaque concours.

Elle comporte, selon les concours deux ou trois options au choix du candidat qui permettent toutes d'apprécier son aptitude à analyser une situation didactique et pédagogique correspondant à l'enseignement de la discipline dans une classe de collège ou de lycée.

Elle prend appui :

– soit sur un travail réalisé par le candidat individuellement ou collectivement pendant la première année d'IUFM;

– soit sur des documents proposés par le jury dans le cadre d'un programme;

– soit, dans certaines sections, sur un dossier réalisé par le candidat dans le cadre de son activité professionnelle antérieure.

[...]

Qu'il s'agisse de la première option, qui prend appui sur les travaux effectués sur le terrain dans le cadre de l'IUFM, et donc sur des situations réelles d'enseignement, éclairées par une approche didactique et pédagogique, de la deuxième option, qui demande de la part des candidats, dans le cadre du programme, une connaissance des problèmes spécifiques de l'enseignement de la discipline,... dans tous les cas le candidat devra montrer qu'il s'est interrogé de façon constructive sur l'enseignement de la discipline. C'est bien le moins qu'on puisse attendre d'hommes et de femmes qui ont décidé d'embrasser une carrière où la compétence professionnelle se fonde sur l'articulation permanente des connaissances théoriques avec la pratique quotidienne.

Le caractère nouveau de cette épreuve ne doit pas pour autant susciter chez les futurs candidats des inquiétudes ou des interrogations excessives. Le cadre précis qui a été fixé permettra d'en faciliter la préparation ainsi que le déroulement. Le fait qu'elle s'appuiera toujours sur un support écrit, fourni par le candidat lui-même ou par le jury est un élément de nature à assurer son ancrage dans la réalité concrète de l'enseignement de la discipline. Loin d'être déroutés par l'épreuve, les candidats doivent saisir l'occasion de sa préparation pour enrichir leur connaissance de la discipline et de l'éclairer du point de vue qui devra être le leur dans leur carrière de professeur.

NOTE de commentaires relative à la nature des épreuves du concours externe du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré (CAPES)

Section Mathématiques

[...]

4. Description et objectifs des épreuves orales

Les deux épreuves orales présentent des aspects complémentaires.

A. Première épreuve.

"Exposé sur un thème donné", suivi d'un entretien avec le jury sur les questions soulevées par l'exposé du candidat. La préparation s'effectue sans document, sauf le texte des instructions du CAPES et les BO du MEN ou brochures CNDP contenant les programmes de mathématiques des lycées et collèges; les candidats doivent s'en munir.

Le sujet est choisi par le candidat parmi deux titres tirés au sort. Ces titres indiquent la nature et l'étendue de la question à traiter et fournissent, le cas échéant, des points de repère sur les interventions ou interactions à mettre en valeur. Cette épreuve est organisée autour de l'étude d'un concept; cette étude porte non seulement sur le développement théorique ou technique de définitions et de propriétés attachées à ce concept, mais aussi sur leur illustration par des exemples simples et sur leur interaction avec les problèmes mathématiques qui mettent en jeu ce concept. Selon les cas, ces problèmes pourront apparaître comme secteurs d'intervention de la théorie considérée, comme source de son développement, ou comme support pour ce développement.

Les candidats doivent intégrer à leur exposé les idées directrices des démonstrations des résultats jouant un rôle central dans le sujet considéré; ils doivent savoir développer ces démonstrations, sur demande du jury au cours de l'entretien.

Enfin, pour les sujets portant sur des concepts dont les bases sont peu approfondies dans l'enseignement secondaire (tels que l'orthogonalité, le produit scalaire, les notions de convergence et de limite, la continuité,...), le candidat peut, s'il le désire, faire appel à des concepts figurant au programme des épreuves écrites, notamment au titre B 1 III.1, B 1 IV.2., B 2 I. 1 et B 2 I. 2.

B. Epreuve professionnelle.

"Analyse d'une situation d'enseignement" composée d'un exposé suivi d'un entretien avec les membres du jury. Cette épreuve comporte deux options au choix du candidat formulé lors de son inscription :

– option 1 : analyse d'une situation choisie par le jury parmi celles observées par le candidat pendant la première année à l'institut universitaire de formation des maîtres ou mises en œuvre dans son enseignement.

– option 2 : analyse d'une situation proposée par le jury dans le cadre du programme.

I) OBJECTIFS GÉNÉRAUX DE L'ÉPREUVE.

Cette épreuve vise à évaluer :

– les capacités du candidat à analyser les pratiques de l'enseignement des mathématiques aux divers niveaux de l'enseignement secondaire ainsi qu'à concevoir et mettre en forme une situation d'enseignement;

– l'étendue de sa réflexion sur la conduite de la classe et les méthodes pédagogiques à privilégier pour aborder une notion donnée dans diverses situations et dans ses rapports éventuels avec d'autres disciplines : sciences physiques, chimie, biologie, technologie, économie ...

– ses capacités à utiliser une documentation de façon pertinente;

– ses aptitudes à l'expression orale, à la communication, à l'analyse et à la synthèse.

II) MODALITÉS DE L'ÉPREUVE.

Les candidats choisissent, lors de leur inscription au concours, l'une ou l'autre des options prévues pour cette épreuve par l'arrêté du 30 avril 1991.

Une partie très importante du travail du professeur de mathématiques avec ses élèves consiste en l'élaboration et en l'analyse de situations donnant lieu à des exercices ou à des problèmes. C'est pourquoi, quelle que soit l'option, il sera demandé aux candidats *d'effectuer la rédaction claire et détaillée d'une liste d'exercices* illustrant la situation abordée dans cette épreuve. Le terme *exercice* est à prendre au sens large; il peut s'agir d'applications directes du cours, d'exemples ou contre-exemples venant éclairer une méthode, de situations plus globales ou plus complexes utilisant éventuellement des notions prises dans d'autres disciplines.

Pour la préparation exclusivement, tous les documents, manuels du commerce, publications (notamment celles des IREM), dossier et notes personnelles, sont autorisés. En outre, les candidats disposent des ouvrages de la bibliothèque du concours dont la liste est jointe au rapport du concours précédent.

Option 1 : Une note de synthèse (2 à 3 pages) indique la liste des thèmes mathématiques (au moins quatre) abordés dans le dossier et, pour chacun, fait apparaître clairement la ou les situations observées avec l'objet de l'étude didactique correspondante. La variété des thèmes doit être suffisante pour permettre au jury, s'il l'estime utile, de choisir un thème dans un domaine complémentaire de celui de la première épreuve. Il serait inacceptable que la note de synthèse présente uniquement des situations relevant de l'analyse (resp. algèbre, géométrie, ...). Trois des thèmes doivent se rattacher à une liste publiée chaque année au BO du MEN.

La note de synthèse est remise au jury lors de la première épreuve. Il choisit une situation parmi celles qu'elle contient.

Option 2 : Le sujet est choisi par le candidat parmi deux titres fixés par le jury. Chacun d'eux précise le type et l'étendue du thème à étudier et fournit, le cas échéant, des points de repère pour les outils et méthodes à exploiter, des documents à analyser (programmes, annales du Brevet des Collèges ou du Baccalauréat, manuels ou ouvrages divers de mathématiques, ...). Cette épreuve est axée sur la mise en place d'un choix d'exercices pour étudier un type de problème mathématique.

Pour les deux options le candidat doit, pendant sa préparation, rédiger, sur une fiche qui lui est fournie, un résumé des commentaires qu'il compte développer dans son exposé et les énoncés des exercices qu'il propose. Ces énoncés comporteront, s'il y a lieu, un découpage de questions marquant les étapes de l'étude à mener ou fournissant des indications sur la méthode de résolution. La qualité de cette fiche intervient dans l'appréciation de l'épreuve.

L'épreuve, d'une durée de quarante-cinq minutes, comporte les étapes suivantes :

– le candidat remet sa fiche au jury; il ne garde que les notes écrites pendant sa préparation sur du papier qui lui a été fourni;

– il dispose d'au plus vingt-cinq minutes pour faire son exposé; le reste du temps est consacré à l'entretien avec le jury.

III) ÉVALUATION.

Exposé

Option 1 : Le jury attend du candidat une étude substantielle. L'exposé doit mettre en évidence l'intérêt de la situation observée et les raisons de son choix, la documentation rassemblée, le travail personnel du candidat, en particulier lorsque cette situation a donné lieu à un travail collectif. Le candidat présente son choix d'exercices en précisant leurs objectifs respectifs, les méthodes et outils mis en jeu, les connaissances nouvelles apportées ou évaluées. Il commente ensuite en détail deux ou trois d'entre eux et informe le jury des observations qu'il a faites à propos de leur résolution.

Option 2 : Le candidat expose la façon dont il a compris le sujet qu'il a retenu. Il explique avec précision les raisons qui ont présidé au choix de ses exercices, les objectifs recherchés (acquisition de connaissances, de méthodes, de techniques, évaluation), la progression suivie. Il présente ensuite en détail deux ou trois d'entre eux, situant le niveau des élèves auxquels ils s'adressent et leur place dans le déroulement des programmes, analysant la pertinence des différents outils mis en jeu.

Entretien

Il a pour but de compléter l'évaluation des qualités et des aptitudes professionnelles du futur professeur. Il porte aussi bien sur la présentation faite par le candidat que sur la résolution effective des exercices et toutes questions relatives au thème abordé et au contenu de la fiche qu'il a rédigée. Il permet d'approfondir certains points, de demander la justification des solutions adoptées, de vérifier l'étendue de la réflexion du candidat, de s'assurer de la solidité de ses compétences sur les questions qu'il a abordées.

Pour la totalité de l'épreuve, le jury tiendra compte d'une part des qualités d'exposition, d'argumentation et de raisonnement du candidat, d'autre part de son autonomie par rapport aux notes écrites pendant les deux heures de préparation.

C - Objectifs communs aux deux épreuves.

a) Les épreuves orales visent d'abord à *évaluer la capacité à concevoir, mettre en forme et analyser une séquence d'enseignement.* Le terme "séquence d'enseignement" est pris ici au sens large; il se réfère à une unité thématique, et non à une durée ou une classe donnée.

b) Pour chacune des deux épreuves, il convient impérativement de *se placer au niveau de l'enseignement secondaire,* c'est-à-dire de ne pas dépasser le niveau du Baccalauréat; le jury ne peut exiger des candidats des capacités faisant appel à des connaissances qui dépassent ce niveau lors de son exposé. Cependant, cela n'empêche pas, qu'au cours de cette phase des épreuves ou de l'entretien avec le jury, le candidat soit amené à faire appel à l'ensemble de ses connaissances, et notamment à celles acquises dans ses études supérieures, pour analyser et commenter la démarche suivie, éclairer un point conceptuel ou technique et situer la question traitée dans son contexte mathématique et scientifique.

En résumé, le discours mathématique se place essentiellement au niveau de l'enseignement secondaire, mais il est demandé une bonne maîtrise des concepts et des problèmes figurant à ces programmes. Cette maîtrise porte aussi bien sur la solidité des connaissances que sur la capacité à les organiser et à les analyser.

c) *La mise en valeur de l'enchaînement des idées constitue un objectif majeur.* Les candidats ne doivent en aucun cas se borner à l'exposé, si parfait soit-il, formellement, d'une liste de définitions, de théorèmes, d'exemples et d'exercices; il est indispensable d'analyser l'articulation mutuelle des différents éléments et d'esquisser les contextes dans lesquels ils se placent.

La complémentarité des deux épreuves permet à cet égard d'évaluer la capacité à analyser l'interaction entre le développement théorique et conceptuel et l'étude des problèmes.

d) Ces épreuves visent aussi à évaluer les capacités du candidat dans le domaine de l'expression orale : précision et clarté de l'expression, maîtrise de la langue française, qualité de l'élocution, organisation du travail au tableau, maîtrise de la communication lors de l'entretien. Etant donné la nature de la profession d'enseignant, ces capacités constituent un élément d'appréciation d'une importance capitale. ■

SESSION DE JUIN 1991 DU C.N.U. :

RECRUTEMENTS, MUTATIONS ET PROMOTIONS (fin)

Voici la liste des candidats retenus par le C.N.U. Après le nom de l'établissement, figure le nom du candidat recruté puis, entre parenthèses, ses origines professionnelles et géographiques (lorsque le C.N.U. nous les a communiquées).
Les commentaires sont dus à l'obligeance de G. Rhin, Président du C.N.U.

RECRUTEMENTS et MUTATIONS

Principes généraux pouvant amener le CNU à modifier un classement.

Le CNU n'est amené à proposer à la nomination un candidat différent du candidat restant en tête, après que les candidats précédents aient été nommés sur d'autres postes, que si ce candidat ne lui semble pas constituer une première ligne raisonnable (compte tenu éventuellement du profil du poste).

Évolution et répartition Paris–province du pourcentage d'étrangers.

Des statistiques complètes seront données dans un prochain numéro de la Gazette. On peut déjà dire que la pression des candidats venant des pays de l'est s'est accentuée cette année, entraînant quelques problèmes spécifiques pour des candidats n'ayant jamais enseigné ou séjourné en France comme associé ou invité.

Recrutements dans les universités nouvelles et les IUFM.

En ce qui concerne les universités nouvelles, les problèmes qui sont apparus étaient surtout dûs au fait que les postes étaient gérés par d'autres universités, puisque ces établissements sont en cours de constitution. Un certain nombre de postes IUFM portaient le profil "Didactique des mathématiques" Ce nombre était sans doute supérieur au nombre des candidats didacticiens. Considérant qu'il s'agissait de postes d'établissements d'enseignement supérieur, le CNU a pourvu ces postes en adoptant les critères en vigueurs pour les autres postes. Mais comme il s'agissait d'établissements nouveaux le nombre de candidats était en général plus faible que pour les postes des universités.

Postes de professeurs

Postes 23.00 : 78 postes : 8 pourvus en mutation, 15 par des candidats en poste à l'étranger, 302 candidats hors mutation.

Mutations

Bordeaux 2 : Deshouillers Jean-Marc (PR Bordeaux 1); Caen : Cougnard Jean (PR Besançon); IUFM Clermont-Ferrand : Hennequin Paul-Louis (PR Clermont 1); IUFM Montpellier : Lehmann Daniel (PR Lille 1); Nantes : Le Mehaute Alain (PR); Paris 7 : Vogel (PR Nantes); IUFM Paris : Houzel (PR Paris 13); Toulon : Ferran ép. Pelissier Marie-C.;

Recrutements

Aix-Marseille 1 : Andjel Enrique (Argentine), Domergue Michel (MCF Aix-Marseille); Aix-Marseille 2 : Marion Jean (MCF Aix-Marseille); Aix-Marseille IUFM : Chevallard Yves (MCF Aix-Marseille); Aix-Marseille 3 : Tchamitchian Philippe (MCF Aix-Marseille 3); Amiens – St Quentin : Airault ép. Iwakura Hélène (CNRS); Angers : Alexander James (Australie, MCF Angers); Avignon : Seeger Alberto (Allemagne); Bordeaux 1 : Nikolski Nikolaie (URSS), Petkov Vesselin (Bulgarie), Jaulent

Jean-François (Bordeaux 1), Bruneau Charles-Henri (MCF, Paris 11); Brest : Boivin Daniel (Canada); ENS Cachan : Helein Frederic (Ing. ENSA); Caen : Levinski Jean-Pierre (Prag); Caen IUFM : Paysant-Leroux Roger (MCF Caen); Clermont-Ferrand 2 : Sureau Yves (MCF Clermont 2); Compiegne : Ha-Duong Huong (MCF Paris 6); Dijon : Bonnard Bernard (CNRS); Grenoble 1 : Guillou Lucien (MCF Paris 11); Grenoble 1 (Valence) : Chevalier Lucien (MCF Grenoble); Dijon IUFM : Piard Alain (MCF Dijon); Grenoble IUFM : Durrande ép. Laborde Colette (MCF Grenoble); Le Mans : Koutoians Iouri (URSS); Lille 1 (alg. log.) : Douai Jean-Claude (MCF Paris 6); Lille 1 (an. fonct.) : Chollet née Savaete Anne-Marie (MCF P11); Lille 1 (Calais) : Jeannin Pierre (MCF Lille 1); Lille Lens : Tuynman Gijsbert (MCF Lille 1); Limoges : Borel Jean-Pierre (MCF Limoges), Malivert Christian (MCF Limoges); Limoges IUFM : Harel Bernard (MCF Limoges); Lyon 1 : Ducloux Fokko (CNRS); Lyon IUFM : Bouvier Alain (MCF Lyon 1); Mulhouse : Brillard Alain (MCF Mulhouse); Nancy 1 : Anker (Suisse), Katz Mikhail (USA); Nancy-Metz IUFM : non pourvu; Nantes IUFM : Jambu Michel (MCF Nantes); Nantes Angers IUFM : Kazienko ép. Denkowsta (Pologne); Nice : Wojtkowiak (Pologne), Sable ép. Tougeron (MCF Rennes 1); Nice IUFM : Lozi René (CNRS); Orleans Tours IUFM : Rouchier André (MCF Orléans); Paris 6 : Henkine Guenadi (URSS); Paris 7 : Mathieu Olivier (CNRS); Paris 11 : Viterbo Claude (CNRS), Gérard Patrick (MCF ENS Ulm); Paris 13 : Delort Jean-Marc (CNRS); Pau : Ycart Bernard (MCF Pau); Reims : Alev Jacques (MCF Paris 6); Cergy Pontoise : Lust ép. Piquard Françoise (MCF, Paris 11), Demengel Françoise (CNRS), Merle Franck (CNRS); St Quentin/Versailles : Chauvin ép. Almayrac Brigitte (MCF Paris 10), Cossart Vincent (MCF Paris 6); St-Etienne : Diaz Guy (MCF St-Etienne); Strasbourg 1 : Schappacher Norbert (Allemagne), Kharlamov (URSS), Wintenberger Jean-Pierre (CNRS); Poitiers IUFM : Grelaud Gérard (MCF Poitiers); Reims IUFM : Lanne ép. Artigue Michèle (MCF Paris 7); Strasbourg 3 IUT : Muller Marie-Paule (MCF Strasbourg 1); Rennes IUFM : Merrien Jean (MCF Rennes); Toulouse 3 : Ledoux Michel (CNRS); Rouen/Le Havre IUFM : Tahraoui Rabah (Algérie); Tours : Lesigne Emmanuel (MCF Brest); Valenciennes : Mokkadem Abdelkader (MCF Paris 10); Strasbourg IUFM : Benoit ép. Bopp Nicole (MCF Strasbourg 1); Toulouse IUFM : Carral Michel (MCF Toulouse); Versailles IUFM : Perrin Daniel (MCF ENS Ulm)

Postes 23.04 : 15 postes, 101 candidats (hors mutation)

Recrutements
Bordeaux IUFM : Brousseau Guy (MCF Bordeaux 1); Grenoble 1 : Le Dimet François-Xavier (MCF Clermont 2); La Reunion : Costa ép. Genon-Catalot Valentine (MCF P7); Lyon 1 : Weitz ép. Chambat Michèle (MCF Lyon); Paris 9 : Morel Jean-Michel (MCF Paris 9); Paris 6 : Le Dret Hervé (CR CNRS P6); Reims : Frank Leonid (Hollande); Toulouse 3 : Raymond Jean-Pierre (MCF INP Toulouse), Besse Philippe (MCF Toulouse)

Mutations
Antilles-Guyane : Manuceau J. (PR Aix-Marseille 1); Nancy 1 : Roynette B. (PR Nancy 2); Paris 6 : Bougerolle P. (PR Nancy 1); Paris 10 : Millet A. (PR Angers); Rouen INSA : Gauthier J.-P. (PR Lyon 1)

Postes de maîtres de conférences

Postes 23.00 : 103 postes, 457 candidats (hors mutation)

Aix-Marseille 1 : Faivre Christian, Puech Suzanne ép. Ballet; Aix-Marseille IUFM : Sirvent ép. Joshua Marie-Alberte; Amiens F.M. : Ouaqa Abderhamane; Amiens IUFM : Gerboud Gilbert; Antilles-Guyane IUFM : Mercier Dany; Antilles-Guyane IUFM (Univ.) : Delcroix Antoine; Antilles-Guyane Detachement :

Vaillant Jean; Besancon (F.M.) : Ducel Yves; Bordeaux 1 : Solomon David; Bordeaux 1 : Hennecart François; Bordeaux 1 : Akkar Mohamed, Zarrabi Mohamed, Namah G.; Brest : Rahandrainy; Brest (Lorient) : Bouhaik Moustapha; Caen : Ramadanoff Yves-Pierre; Caen : Ageron Pierre; Dijon : Mourtada Abderaouf; Grenoble 1 : Bouche Thierry, Greenberg Peter; Corte IUFM : Najmi Mohamed; Creteil IUFM (Paris 13) : Lewandovski; Dijon IUFM : Ramanakoraisina Rodolphe; Grenoble 2 : Dorier Jean-Luc, El Methni; Lille 1 : Belmedhdi Saïd; Lille 1 (Alg. Log.) : Mammone Pascal, M'Zari Mohamed; Lille 1 (An. Fonct.) : Sacré Christine; Lille 1 (Geom.) : Doerane Jean-Paul, Freitas Raphaël; Lille 1 : Lechevalier François; Lille IUFM : Marcolinas Claire; Lille IUFM (Tech. educ.) : Vidal ép. Denis Liliane; Limoges : Benoist Joël; Limoges IUT (Stat.) Rybowicz Marc; Lyon ENS : Perret Marc; Lyon INSA : Jai Mohamed; Montpellier 2 : Brouzet; Montpellier 2 : Hubert-Coulin Catherine, Laurent ép. Rios Hélène; Mulhouse : Makhlouf Abdelacer, Akesbi Samir; Nancy 1 : Blind, Bernier, Doustaing; Nantes : Nicoleau; Nantes F.M. : Blanchet; Nice : Stahl ép. Nouri; Nice (Geom.) : Dillinger Hervé; Nice IUFM : Cherif; Nancy-Metz IUFM : Jeddi; Metz IUFM : Parzysz; Orleans : Estrade; Orleans (Bourges) : Grenon ép. Isselkou; Paris 6 : Koelblen, Dugret ép. Comte, Arnaudies, Xu, Kraus, Fang; Paris 6 (IUFM) : Khelif Anatole; Paris 11 : Klopp, Fieux, Détachement : Mme Flexor Marguerite; Paris 11 (Proba.Stat.) : Castelle Nathalie; Paris XI : Laborde Marc; Paris XI : Briane Marc, Fabre Sophie Caroline; Evry : Song Shigi; Paris 13 IUT : Perrier Valérie; Paris 6 : Laborde Marc; Pau : Luce Robert; Poitiers : Khaoua; Rennes 1 : Bauer Maximilian, Coquet François, Bekka; Cergy-Pontoise : Harge, Tardivel, Fan Hua; Rouen : Bouziad; Rouen (Proba.Stat.) : Raynaud de Fitte Paul; St-Quentin/Versailles : Becache Eliane; Strasbourg 1 : Blasco Laure, Al Amrani Abdellah; Strasbourg 2 : Giralt-Torres Juan; Rennes (Brest) IUFM : Boumaaz ép. Abadou; Toulouse 3 : Bauval Anne; Rouen IUFM : Castela Corinne; Tours : Gorman Noël, Quincampoix Marc; Valenciennes : Kabbaj ép. Baghery Fouzia; Valenciennes : 0 proposé; Versailles IUFM : Lambre Thierry; Versailles IUFM (Paris 11) : Arnaud Marie-Claude

Postes 23.04 : 34 postes, 250 candidats (hors mutation)

Recrutements

Bordeaux 1 : Driollet Denise ép. Aregba (Ingénieur CISI); Bordeaux 2 : Dordan Olivier; ENS Cachan : Fabre Sylvie; Clermont-Ferrand 2 : Sofonea Mirua; Corte : Delfini Pierre; Grenoble 1 : Biard Luc; Grenoble IUFM : Gaudoin Olivier; La Reunion : Langlois Philippe; Lille 1 : non proposé; Lille 3 : Lefèvre Françoise; Lyon ENS : Moussaoui Mohamed; Montpellier : Gannoun Ali; Orleans : James François; Paris CNAM (Anal. donnees : Tricot Laurence; Paris CNAM (Anal. num.) : Salaün Michel; Paris 5 : Froment Jacques; Paris 5 : Lavielle Marc; Paris 6 : 0 candidat proposé; Paris 6 (Proba.) : Mutation Babillot Martine ép. Cornaggia (Paris 10); Paris 11 (Anal. num.) : Asch Mark; Poitiers : Hnid Mohamed; Poitiers IUT : Beninel Farid; Reims : Debraux Laurent; Marne-la-Vallee : Lamberton Damien; Rouen : Kharab Rachid; Tarbes : Larrieu Michel; Toulouse 1 : Plazanet Philippe; Toulouse 3 (Calcul scient.) : 0 proposé; Toulouse 3 (Stat.) : Tap Gérard; Valenciennes IUT : Bellalij Mohammed

Mutations

Metz : Maul (Nancy 2); Paris 5 : Bacro (IUT Roanne); Paris 6 : Babillot, ép. Cornaggia (Paris 10); Toulouse INSA : Huard (Besançon)

PROMOTIONS (suite et fin)

Passages de classe.

On a constaté cette année une quasi-stagnation du nombre de promotions par rapport à 90. Les difficultés les plus importantes sont à signaler pour la hors-classe des maîtres de conférences (moins d'une promotion pour 100 promouvables) et pour le premier échelon de la classe exceptionnelle (14 promotions pour 277 promouvables).

Une première liste d'avancement au titre de la 23e section est parue dans la *Gazette de juin 1991, n° 49.*

Avancement spécifique. Pour l'avancement spécifique des professeurs, au titre de l'activité administrative ou pédagogique, la délibération a été préparée par une réunion des professeurs de la 23e section, membres du bureau élargi présidée par Caussinus.

Professeurs :

Avancement au choix à la 1ère classe :
Dijon : Gruet-Masson ép. Moret-Bailly Françoise; Dijon : Vignon Bernard; Grenoble 2 : Brodeau François; Nice : Marlin Roger; Nice : Cavarero Jean-Louis; Paris 13 : Basdevant Claude; Paris 1 : Haddad Georges; Rennes 1 : Herman Daniel; Toulouse 2 : Mercier Jean-Jacques; Toulouse 3 : Desq Roger

Avancement au choix à la classe exceptionnelle, 1er échelon :
Metz : Rhin Georges; Rennes 1 : Lenfant Jacques

Avancement au choix à la classe exceptionnelle, 2e échelon :
aucune proposition.

Maîtres de Conférences :

Le Groupe présente ses propositions sur le tableau ci-dessous, le nombre de promotions possibles à répartir sur le Groupe étant de **30** dont **12** au 1er janvier 1991 et **18** au 1er octobre 1990 en ce qui concerne la 1ère classe et de **13** dont **7** au 1er janvier 1991 et **6** au 1er octobre 1991 en ce qui concerne la hors-classe des maîtres de conférences.

Avancement au choix

MCF 1ère classe (promotions à effet du 01.01.91)
Dijon : Monnier-Fatet Brigitte; INP Grenoble : Brochier Alain; Le Mans : Lalos Michel; Montpellier 2 : Conquet Alain; Nancy 2 : Barthelemy Charles; Nantes : Blass Jean-Paul; Paris 6 : Spathis Dominique Paris 9 : Grelu-Serpollier Nicole; Rennes 1 : Monfort Laurent; Rennes 2 : Barumandzadeh Taghi; Tours : Corbin Michel; Valenciennes : Leroi Michel

MCF 1ère classe (promotions à effet du 01.10.91)
Amiens : Moreau Philippe; Besancon : Barrère Rémi; Besancon : Vuillemier-Lasalle M.-France; Bordeaux 1 : Billaud Michel; Bordeaux 1 : Sopena Eric; Clermont 2 : Peuchot Bernard; Lille 1 : Marti Jean-Claude; Lille ENSAM : Parsy Jean-Pierre; Lille IDN : Castelain Emmanuel; Paris 2 : M'Silti Mohamed; Paris 5 : Lévy Michel; Paris 6 : Oppman Irène; Paris 6 : Reynaud Francine; Pau : Turlot J.-Christophe; Rennes 2 : Legault Michel; INP Toulouse : Chaillet-Paillassa Béatrice; Toulouse 3 : Kokkinopoulos-Bensadoun Olga; Toulouse 3 : Marquié Daniel.

MCF hors-classe (promotions à effet du 01.01.91)
Besancon : Fontaine Jean-Claude; Bordeaux 1 : Garandel Gérard; Grenoble 1 : Chevalier Georges; Nancy 1 : Lavigne Jean-Pierre; Paris 9 : Scheneider Gisèle ép. Fritz; Rouen : Lannuzel Bernard; Toulouse 3 : Boschet Geneviève ép. Gillot

MCF hors classe (promotions à effet du 01.10.91)
Nantes : Bensmaïne Marc; Paris 5 : Matheron Jean-Patrick; Paris 6 : Auban Anne; Paris 9 : Robert-Blin Marie-José; Pau : Bordenave Michel; Tours : Rouillon André.

Texte voté à l'unanimité par la section à propos de la hors-classe des Maîtres de Conférences :

"Afin d'éviter la perte d'une possibilité de promotion à la hors classe des Maîtres de Conférences, la 23e section du CNU demande aux universités de ne pas classer en première position au titre de la hors classe des Maîtres de Conférences un candidat qu'elles proposent en première position pour un recrutement de professeur".

Georges RHIN, Président du CNU

Sur la hors-classe des Maîtres de Conférences : une première analyse

A la session de gestion du C.N.U. de juin 1991 nous avons examiné, pour la deuxième fois, les promotions à la hors classe des maîtres de conférences. Ce mouvement s'est déroulé de façon différente de celle de l'année dernière, car les promotions accordées au titre de la 23e section et celles accordées au titre du groupe V (collègues inscrits en 23e ou 24e sections et bénéficiant d'une prime pédagogique ou administrative) étaient examinées suivant des procédures totalement séparées. Il nous semble donc utile d'informer l'ensemble des collègues sur ces procédures et de leur fournir quelques indications sur les critères que nous avons utilisés et sur les problèmes de classement que nous avons rencontrés.

Tout d'abord, il s'agit d'un type nouveau de promotions, pour lesquelles le critère "recherche" n'est pas nécessairement prépondérant par rapport aux autres activités de notre métier. Comme l'année dernière, nous avons tenu compte de la motion votée par le C.N.U. en mai 1990, et dont nous rappelons ici un extrait :

> *"Ce nouveau cadre vise à assurer une carrière du même niveau que celle d'un professeur de 2e classe aux Maîtres de Conférences, enseignants et chercheurs, ayant consacré une grande partie de leurs activités au service de la communauté universitaire dans des tâches pédagogiques ou administratives".*

Compte tenu du faible nombre de promotions en 1991, le classement des candidats au niveau national tenait de la gageure. Il faut rappeler que le C.N.U. ne peut pas changer le classement fourni par les universités, et qu'il doit essayer d'arriver à un résultat final équilibré pour l'ensemble des établissements. Il faut tenir compte d'activités en recherche, en enseignement et en administration qui peuvent être extrêmement diversifiées, ainsi que des retards éventuels de carrière, tout en essayant de privilégier les candidats qui sont en mesure de bénéficier financièrement de la promotion.

Pour chacune des procédures de promotion, nous allons donner quelques chiffres et une analyse sommaire des résultats.

Promotions au titre de la 23e section

Statistiques : 501 promouvables, 39 promotions, 258 dossiers.
Age moyen des candidats promus : 52,7 ans (entre 45 et 61 ans).
Docteurs d'Etat ou Habilités : 15.
Nouvelle thèse ou thèse de 3e cycle : 14.
Sans thèse : 10 (ce qui ne veut pas dire absence de contact avec la recherche ; on rappelle que la thèse n'a pas toujours été obligatoire pour l'accès au grade de Maître Assistant, et que les MA qui en ont fait la demande sont actuellement MCF).

Dans tous les cas, les candidats promus avaient des activités qui dépassaient le cadre de leurs obligations statutaires (soit en encadrement de recherche, soit en responsabilités pédagogiques ou administratives, soit en activités intéressant la communauté mathématique, au niveau local ou national).

Promotions au titre du groupe V (Mouvement spécifique)

Statistiques :
En 23e section : 106 promouvables, 87 dossiers, 8 promotions.
Age moyen des candidats promus : 54 ans (entre 49 et 59 ans).
Docteur d'Etat : 1; 3e cycle : 4.

En 24e section : 66 promouvables, 59 dossiers, 5 promotions.
Age moyen des candidats promus : 47,8 (entre 44 et 50 ans).
Docteur Ingénieur :1; 3e cycle : 4.

Le mouvement spécifique est du ressort des présidents et vice-présidents des 23e et 24e sections. En Mathématiques, le travail de classement a été fait avec la collaboration de tous les rapporteurs ayant participé au mouvement non spécifique, dans un souci d'homogénéisation des critères. L'interclassement avec les informaticiens n'a pas introduit des distorsions, car la 24e section a travaillé avec des critères semblables aux nôtres (l'écart dans les statistiques provient plutôt des évolutions différentes des populations des deux disciplines que d'une divergence dans les critères de sélection des dossiers).

Conclusion

La mise en place des promotions des Maîtres de Conférences à la hors-classe se fait dans des conditions difficiles : pénurie du nombre des promotions, et absence de critères établis de longue date pour effectuer les classements. Néanmoins, nous pensons que les collègues promouvables doivent candidater largement, et nous renouvelons notre demande pour qu'ils remplissent des dossiers contenant des informations très précises sur leurs activités de recherche, d'enseignement, d'administration et d'intérêt collectif. Rappelez-vous qu'un rapporteur au C.N.U. a souvent à sa charge de 20 à 40 dossiers, et qu'il doit juger d'après le dossier qui lui est remis (les coups de téléphone et les les informations fournies en séance étant à proscrire, dans un souci d'équité). Pour étoffer le dossier sommaire demandé par l'administration, tout candidat peut ajouter un dossier personnel (dont un CV très précis), et tout rapport extérieur qu'il juge indispensable (ne pas joindre des travaux, mais donner leur référence précise).

Un dernier point est à souligner : ces deux dernières années, lorsqu'une université a classé un même candidat en première place pour un poste de professeur et pour une promotion à la hors classe, aucune promotion à la hors classe n'a été attribuée à cette université (conformément au texte de la motion publiée dans la *Gazette, n° 45, p. 37.*

Myriam Déchamps, 2e vice-président de la 23e section

VIE DE LA SOCIÉTÉ

Le bureau de la société a fixé les dates des réunions des organes de la société pour l'année 1991-1992 :

– **Conseil** : le *16 novembre 1991*, le *18 janvier*, le *16 mai* et le *20 juin* 1992; chaque réunion est prévue pour la journée entière, l'après-midi étant réservée à un débat sur un thème précis avec dossier préparatoire :
  - *thème 1* : les premiers cycles (D.E.U.G., classes préparatoires, I.U.T., projets d'I.U.P.);
  - *thème 2* : les I.U.F.M. et les seconds cycles;

- *thème 3* : démographie des mathématiciens.

– **Journée Annuelle** : le *23 mai*;

– **Bureau** les vendredis après-midis : en 1991 le *18 octobre*, le *15 novembre*, le *13 décembre*, et en 1992 le *17 janvier*, le *27 mars*, le *15 mai* et le *19 juin*.

A PROPOS DU CONGRÈS EUROPÉEN DE MATHÉMATIQUES

Après les changements qui ont eu lieu au printemps au sein du comité d'organisation, la préparation du Congrès Européen de Mathématiques a repris et avance.

Les lecteurs de la Gazette trouveront avec ce numéro un formulaire de pré-inscription au congrès. Il est nécessaire de renvoyer celui-ci, si l'on veut recevoir la deuxième annonce qui paraîtra en novembre et comprendra le bulletin d'inscription.

Le Congrès aura lieu à la Sorbonne du 6 au 10 juillet 1992. Il comprendra une partie classique, avec dix conférences pleinières données par :

V.I. ARNOLD, L. BABAI, C. DE CONCINI, S. DONALDSON, B. ENGQUIST, P.-L. LIONS, W. MŨLLER, D. MUMFORD, A.-S. SZNITMAN, M. VERGNE.

ainsi que quarante conférences en parallèle : la liste de ces conférenciers, choisis par le Comité Scientifique, sera rendue publique en novembre.

Le Congrès comprendra également des tables rondes, qui en constituent une originalité essentielle. Elles aborderont les interactions que les mathématiques développent tant avec les autres sciences qu'avec la société qui les entoure. Pour cela auront lieu seize tables rondes, au cours desquelles des spécialistes présenteront leurs points de vue, avant qu'une discussion ne s'engage entre eux et les personnes présentes.

Ces tables rondes seront préparées par des échanges entre les intervenants au cours de toute l'année précédant le congrès. Certaines auront demandé un travail important de recueil de données, souvent à l'échelle de toute l'Europe. Elles donneront lieu à des rapports, qui seront publiés dans les actes du congrès, et pour certaines d'entre elles à des documents beaucoup plus amples, fournissant la substance de livres.

Les sujets abordés peuvent être – de façon un peu arbitraire – classés en trois thèmes :

• **Mathématiques et société**

– "*Mathématiques et grand public*" essaiera d'intéresser les mathématiciens aux problèmes posés par les contacts avec le grand public, et le public aux problématiques de notre discipline.

– "*Collaboration avec les pays en voie de développement*" cherchera à élaborer des propositions concrètes d'aide après avoir fait un inventaire de ce qui existe et une évaluation des besoins.

– "*Femmes et Mathématiques*" fera des propositions concrètes relatives à la situation des femmes mathématiciennes.

– "*L'Europe mathématique : mythe ou réalité historique*" se demandera s'il est légitime de parler de mathématiques européennes, du point de vue de l'Histoire.

– "*Philosophie des mathématiques : pourquoi, comment?*"

– "*La question de la mathématisation dans les sciences humaines*" (titre provisoire).

• Mathématiques et Europe

Ces Tables Rondes se pencheront sur les questions d'organisation de la recherche et de l'enseignement, en particulier vues sous l'angle de l'ouverture européenne.

- "*Harmonisation des diplômes et échange d'étudiants*" évaluera les programmes d'échange au niveau européen, comparera les diplomes, et tâchera d'estimer les besoins des mathématiciens des pays de l'Est.
- "*Bibliothèques*" traitera de l'outil fondamental du mathématicien (problèmes liés à l'informatisation, nouvelles techniques de diffusion). Elle se dédoublera peut-être par la création d'une Table Ronde "Publications, édition".
- "*Politique éducative*" évaluera la place des Mathématiques dans l'enseignement supérieur et secondaire par l'examen de données statistiques, des programmes, et l'étude des styles d'enseignement.
- "*Cultivons les Mathématiques au Lycée*" s'intéressera aux expériences de renouvellement des modes d'enseignement des mathématiques au lycée (clubs, journaux, compétitions,...).
- "*Politique mathématique européenne*" se demandera quelles structures doivent être développées pour mener des actions communes à l'échelle de l'Europe.

• Mathématiques et autres sciences

Plusieurs tables rondes examineront les liens complexes entre notre discipline et les sciences voisines (mathématiques de service ou moteur du développement? application des Mathématiques ou sources de nouvelles recherches en Mathématiques?)

- "*Mathématiques et industrie*", "industrie" fera référence aux applications industrielles de la discipline.
- "*Mathématiques et informatique*"
- "*Mathématiques et économie*"
- "*Mathématiques et biologie-médecine*"
- "*Mathématiques et chimie*".

THÈSES ET HABILITATIONS SOUTENUES EN 1989

Informations recueillies par F. Gramain auprès des correspondants de la Gazette

RECTIFICATIF *Gazette n° 48 - avril 91, p.36*

Université de Grenoble I

MUSTAPHA CHELLALI, sous la direction de J.-L. Nicolas et G. Robert, Doctorat d'Etat : *Congruences, nombres de Bernoulli et polynômes de Bessel* (23-01).

COMPLÉMENTS

Université de Montpellier II

AHMED BACHIR, sous la direction de Mme J. Charles, Thèse : *L'intersection de l'image et du noyau d'une dérivation généralisée* (23).

SAAD AHMAD, sous la direction de A. Micali, Thèse : *Algèbres symétriques à gauche et algèbres de couleurs* (23).

HASSAN RIAHI, sous la direction de H. Attouch, Thèse : *Quelques résultats de stabilité en analyse épigraphique : approche topologique et quantitative* (23).

ABDELAZIZ AIT MOUSSA, sous la direction de P. Suquet, Thèse : *Modélisation et études des singularités de contraintes d'un joint collé très mince* (23-04).

CHRISTIAN FRANCQ, sous la direction de A. Berlinet, Thèse : *Identification et minimalité de séries chronologiques* (23-04).

Université de Tours

ABDELILAH GMIRA, sous la direction de L. Véron, Doctorat d'État : *Comportements asymptotiques et singularités des solutions de problèmes quasilinéaires* (23-03).

DES JEUNES SUR LA PLANÈTE MATHS

Le Congrès Mathématique Junior

(6 au 8 juillet 1992, à la Cité des Sciences et de l'Industrie, La Villette)

1. C'est un congrès pour près de 200 lycéen(ne)s,, qui se tiendra en même temps que le premier Congrès Européen de Mathématique, avec lequel il aura **des contacts organisés**. Pour des lycéens, mais aussi **par** : ils et elles auront des choses à présenter au congrès, préparées collectivement durant toute l'année scolaire; et il n'y aura pas d'auditoire en situation passive. Ce congrès n'est nullement réservé aux seuls "forts en maths". Donc sa composition ressemblera à celle d'une classe de lycée; mais d'une classe motivée, puisque par intérêt et curiosité, elle accepte de passer près de trois jours à baigner dans les maths...

2. Ce "CMJ" est organisé conjointement par l'APMEP et l'association Maths À Venir – donc aussi par UPS, SMF, SMAI, Femmes et Mathématiques, membres de l'association. Un dossier détaillé sur le CMJ, expliquant la démarche suivie pour réaliser (1); et un Appel à Contributions (qui demande à toute la profession des exposés oraux et écrits), sont envoyés à (si possible) tous les centres de mathématiques. Nous espérons donc que vous trouverez cet *Appel CMJ* **affiché dans votre lieu de travail**; sinon le réclamer à :

CMJ – APMEP, 26 rue Duméril, 75013 Paris – Tél. (1) 43 31 34 05

3. Beaucoup d'entre nous sont convaincus qu'il faut **agir auprès des jeunes**, afin de faire évoluer les idées reçues concernant les mathématiques, leurs filières et débouchés. Le Congrès Junior est une bonne occasion de mettre cette conviction en accord avec des actes. Acte 1 : vous informer sur l'Appel CMJ, de la façon indiquée en (2); en discuter avec vos collègues, et enfin nous faire part de vos réactions et suggestions. Actes suivants : ceux qui, à l'échelle de notre profession, permettront un CMJ réussi sur trois plans. A savoir : i) des professionnels de notre discipline parlent aux jeunes, de leur sujet et métier; ii) ces professionnels écoutent ces jeunes, et dialoguent avec eux; iii) le CMJ et son jumelage avec "notre" Congrès Européen sont médiatisés, répercutés pour contribuer à l'évolution de l'image de notre discipline.

Les organisateurs du CMJ comptent sur vous, et vous donnent un premier rendez-vous : sur vos panneaux d'affichage, et en écrivant à l'adresse ci-dessus...

Appel à participer au 7e CONGRÈS INTERNATIONAL DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUES

(ICME 7)

à Québec, du 16 au 23 août 1992

Ceci est un appel plus qu'une annonce. L'enseignement des mathématiques intéresse tout le monde (élèves, parents, enseignants forment déjà une bonne portion de l'espèce humaine). C'est un métier, pratiqué par les enseignants de mathématiques à tous les niveaux. C'est l'objet d'une discipline, qui en français s'appelle la didactique des mathématiques et qui, dans les pays anglo-saxons, est mieux définie par ceux qui la pratiquent et s'appellent "mathematics educators". Et c'est aussi l'enseignement d'une science en mouvement, dont les praticiens sont les chercheurs-mathématiciens, ou, comme on dit aussi, les mathématiciens professionnels.

Ainsi, un Congrès international de l'enseignement mathématique doit être un lieu de rencontres et d'échanges entre enseignants, didacticiens, et mathématiciens – ces catégories s'interpénétrant d'ailleurs. Et les débats doivent porter sur tous les terrains où l'enseignement des mathématiques est un enjeu social : le contenu et la manière, la formation générale et celle des spécialistes – y compris des enseignants –, l'image dans le public et la vulgarisation, l'évaluation, l'influence des technologies, l'histoire, les traditions, les novations, *etc.* Le congrès serait boiteux si les mathématiciens pesaient trop lourd, et si l'enseignement supérieur tenait trop de place. Mais le risque est dans l'autre sens. Lors des deux derniers congrès (Adélaïde 1984, Budapest 1988) la participation des mathématiciens professionnels était insuffisante globalement, et très insuffisante de la part de la France si on tient compte de son apport à la recherche mathématique dans le monde. Or les exposés de mathématiciens ont été très appréciés par le public du congrès; à Budapest par exemple, Pal Erdös a été l'objet d'une véritable ovation, et l'exposé en séance plénière de Laszlo Lovacs sur mathématiques structurelles a été l'un des plus appréciés. Je pense avec regret au succès qu'auraient eu des prestations d'homologues français d'Erdös ou de Lovacs. D'autre part, les mathématiciens ont beaucoup à apprendre des praticiens et des théoriciens de l'enseignement mathématique. Aucune autre science que la nôtre n'entretient avec son enseignement de rapports aussi étroits et conflictuels, et les didacticiens me paraissent avoir mieux réfléchi à ces rapports que les mathématiciens.

L'organisation du Congrès de Québec, qui s'inspire de celle des précédents congrès, comporte un minimum de séances plénières : les séances où Miguel de Guzman et Mogens Niss, président et secrétaire, présenteront la Commission internationale de l'enseignement mathématique – CIEM=ICMI –, et les conférences plénières de Colette Laborde, Geoffrey Howson et Benoît Mandelbrot. Il y aura une trentaine de conférences en parallèle, un très grand nombre d'ateliers, en parallèle également, sur les sujets les plus divers, allant des idées fausses et inconséquences de pensée chez les étudiants (atelier n° 2) aux méthodologies de la recherche en didactique mathématique (atelier n° 23), et d'autres sessions sur les compétitions, les relations art/mathématique, la télévision en classe, les jeux, etc. Les groupes affiliés à la CIEM (histoire, psychologie, femmes) auront chacun 4 sessions de 90 minutes, ainsi que les études déjà menées par la CIEM sur l'influence de l'informatique, la vulgarisation mathématique, les examens et l'évaluation. C'est une organisation efflorescente, comme il est nécessaire avec plus de 3 000 participants qui entendent être actifs.

Les organisateurs du congrès accordent une réduction pour les inscriptions avant le 15 décembre, et je donne ci-dessous leurs coordonnées. Le répondant français de la CIEM est la SCFCIEM (sous commission française) présidée par Jean-Philippe Labrousse, de Nice : c'est elle qui administre les subventions, généralement accordées sur programme (non nécessairement contribution, mais déclaration d'intention, et engagement de compte-rendu). Pour ceux que le tourisme intéresse, la vallée du Saint-Laurent est inépuisable, et Québec a été reconnue par l'UNESCO comme "ville du patrimoine mondial".

Jean-Pierre KAHANE

Congrès ICME 7, Université Laval, Québec QC, Canada G1K7P4
Téléphone : 1.418.656.7592
Téléfax : 1.418.656.2000
Courrier électronique : ICME 7 LAVALVM1.BITNET ou ICME7 VM1.ULAVAL.CA

LES PRIX DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES 1990

Ils ont été décernés lors de la séance du 26 novembre 1990. Voici (avec grand retard!) la liste des lauréats.

Ampère de l'Électricité de France (200 000 F). — Le prix est décerné à M. **Jean-Michel Bismut**, Professeur de Mathématiques à l'Université Paris-Sud (Orsay).

Les premiers travaux de Jean-Michel Bismut ont porté sur divers sujets de calcul des probabilités, notamment la Mécanique Aléatoire, la généralisation de la formule du changement de variables d'Itô, le flot inverse d'une équation différentielle stochastique, le calcul de Malliavin. Il a montré l'intérêt d'associer à une structure riemannienne sur une variété compacte un mouvement brownien en obtenant, par des voies nouvelles, tout un ensemble de résultats profonds et difficiles, précédemment connus ou non connus. Il a pu dégager ainsi des interprétations et des relations très éclairantes concernant le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer, l'aire du lacet brownien, les inégalités de Morse et de Demailly et surtout l'indice des familles. Ces techniques lui ont permis de résoudre de nombreux problèmes difficiles dans la théorie du déterminant de l'image directe qu'on peut associer à une famille d'opérateurs elliptiques, en particulier par l'établissement d'un théorème de courbure. Ses résultats ont des applications en géométrie algébrique, en géométrie d'Arakélov et en arithmétique. Tous ces travaux spectaculaires utilisent des techniques originales et très difficiles prises dans les domaines les plus divers des mathématiques. Ils témoignent d'une grande culture générale et d'un grand esprit d'invention.

Prix Leconte (30 000 F). — Le prix est décerné à M. **Jacques Neveu**, Professeur à l'Ecole Polytechnique, pour l'ensemble de son œuvre en calcul des probabilités. Ses travaux ont porté notamment sur les chaînes de Markov et leurs états fictifs, sur les lemmes maximaux et la théorie ergodique, la théorie du protentiel récurrent, les martingales et le calcul stochastique, ainsi que les modèles d'arbres dans l'étude de processus du branchement.

Prix Élie Cartan (25 000 F). — Le prix est décerné à M. **Jean Bourgain**, Professeur à l'Institut des Hautes Études Scientifiques à Bures-sur-Yvette, pour la résolution de problèmes difficiles sur les espaces de Banach et pour ses recherches en analyse mathématiques, espaces H^p et théorie ergodique.

Prix Servant (10 000 F). — Le prix est décerné à M. **Étienne Ghys**, Directeur de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique au Département de Mathématique de l'École Normale Supérieure de Lyon, pour ses résultats sur la théorie des feuilletages et la dynamique qualitative. Il a obtenu plusieurs résultats liés à la dynamique du cercle : stabilité avec conjugaison C^∞ – et pas seulement topologique – de feuilletages sur des fibrés hyperboliques, introduction et étude d'un groupe "remarquable de difféomorphismes, propriétés de la classe d'Euler d'une représentation du π_1 d'une surface dans les difféomorphismes du cercle. Notons ensuite des travaux remarquables sur la classification des feuilletages totalement géodésiques en codimension un, sur les flots d'Anosov en dimension 3 et tout récemment sur la cohomologie bornée.

Prix Carrière (4 500 F). — Le prix est décerné à M. **Olivier Mathieu**. Il a 31 ans. Il est chargé de recherche au CNRS, professeur à Rutgers. A la rentrée 1991, il a été nommé professeur à l'université Paris 7. Ses contributions portent sur la théorie des groupes et algèbres de Lie : démonstration de la conjecture de Kac sur la classification des algèbres graduées simples, représentations rationnelles des groupes réductifs et de Kac-Moody, géométrie de la variété des drapeaux, représentations des algèbres de Virasoro, topologie du spectre premier de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble.

Prix Poncelet (4 000 F). — Le prix est décerné à M. **Jean-Yves Girard**. Il a 44 ans; il est directeur de recherche de première classe au CNRS; il travaille dans l'équipe de logique à l'université Paris 7. Il est spécialiste de théorie de la démonstration et d'informatique théorique. Il est principalement connu pour ses travaux sur la consistence de l'analyse, qui l'ont amené à introduire le système F qui a connu un grand essor en informatique théorique. Plus récemment, ses travaux ont porté sur la logique linéaire, logique où l'on tient compte du nombre d'utilisations d'une hypothèse.

Prix Victor Noury (4 000 F). — Le prix est décerné à M. **Jean-Michel Coron.** Ancien élève de l'Ecole polytechnique, Jean-Michel Coron est professeur à l'université Paris-Sud depuis 1987. Ses recherches sur les équations aux dérivées partielles qui donnent lieu à des problèmes variationnels lui ont permis de démontrer des résultats importants concernant le problème de Yamabe, les surfaces à courbure moyenne constante et les applications harmoniques. Ses travaux ont également pour objet la stabilisation des systèmes non linéaires en théorie du contrôle.

Prix Marquet (4 000 F). — Le prix est décerné à M. **Alain Lascoux**, Directeur de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique à l'Université Paris VII, pour son œuvre qui développe les applications des méthodes combinatoires à des problèmes difficiles de géométrie algébrique.

Prix Monpetit (30 000 F). — Le prix est décerné à M. **Gérard Berry.** Il est directeur de recherche au centre de mathématiques appliquées de l'école des mines de Paris, du corps des Mines, est l'un des chercheurs les plus inventifs et complets de la scène informatique internationale. Après avoir contribué aux fondements sémantiques des langages de programmation, en découvrant notamment la notion de fonction stable, il a travaillé á la mise au point de langages prototypes compilés pour la séquentialité et pour le temps réel . Il travaille actuellement à la conception effective (en collaboration avec le laboratoire PRL de Digital) de circuits pour le temps réel.

Prix Blaise Pascal du GAMNI-SMAI (10 000 F). — Le prix est décerné à M. **Denis Serre**, Professeur à l'École Normale Supérieure de Lyon, pour ses travaux sur les invariants et les oscillations de haute fréquence dans les systèmes hyperboliques non linéaires et M. **Jacques Blum**, Professeur à l'Université Joseph Fourier (Grenoble I), pour les méthodes numériques qu'il a développées pour l'étude des tokamaks et les méthodes de contrôle optimal qu'il a créées.

Prix Montyon (6 000 F). — Le prix est décerné à M. **Xavier Fernique**, Professeur à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, pour ses travaux en statistique des processus gaussiens qui lui ont permis d'obtenir des estimations optimales pour les normes de Banach de ces processus, ainsi que pour leurs modules de continuité.

Fondation Charles-Louis de Saulses de Freycinet. — Ue prix de 6 000 F est décerné à M. **Jean-Louis Lacoume**, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour ses travaux en traitement statistique du signal.

Fondation Paul Doistau-Émile Blutet. — Un prix de 5 000 F est décerné conjointement à MM. **Dominique D'Humières** et **Pierre Lallemand**, Directeurs de Recherche au Centre National de la Recherche Scientifique à l'École Normale Supérieure, pour leurs travaux sur la simulation d'écoulements par la méthode des gaz sur réseaux.

LA BIBLIOTHÈQUE MATHÉMATIQUE-RECHERCHE DE JUSSIEU

Madame O. Vigeannel-Larive, Conservateur de la Bibliothèque Mathématiques-Recherche des Universités Paris VI et Paris VII (Jussieu, Tour 56, 4e étage) vient de nous informer que, dans le cadre d'un regroupement des bibliothèques de recherche, la décision a été prise au Ministère de l'Education Nationale, et sans aucune concertation avec les principaux intéressés, de déménager la Bibliothèque dans un immeuble qui va bientôt être construit dans le Campus de Jussieu à proximité du Monde Arabe.

Cette décision, si elle se confirme, est désastreuse à plusieurs points de vue :

a) la Bibliothèque sera éloignée de ses principaux utilisateurs et cessera d'être un lieu vivant des mathématiques françaises;

b) la Bibliothèque, compte tenu de son emplacement actuel, est en partie financée par les différents Laboratoires de Mathématiques qui se trouvent dans son très proche voisinage; en cas de déménagement, ce financement va se tarir, ce qui obligera la Bibliothèque à restreindre substantiellement ses achats;

c) il est probable qu'il n'y aura aucun gain de superficie.

Il nous faut réagir promptement et vivement si nous voulons faire avorter cette entreprise dangereuse pour les mathématiques.

Les personnes désireuses de réagir sont priées de se mettre en relation avec :
Madame Odile Vigeannel-Larive, Bibliothèque de Mathématique-Recherche
Universités de Paris VI-VII, Tour 56, 4e étage, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05
Tél. (1) 44 27 37 23.

Des renseignements peuvent aussi être obtenus directement à la Bibliothèque.

Claude DELLACHERIE, Jean-Marie STRELCYN
Université de Rouen

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DU LUXEMBOURG

Les **29 et 30 juin 1992**, la Société Mathématique du Luxembourg organisera un COLLOQUE sur le thème :

LE DÉVELOPPEMENT DES MATHÉMATIQUES ENTRE 1900 ET 1950

La réunion sera placée sous les auspices de la Société Mathématique Européenne; elle bénéficiera du patronage du gouvernement luxembourgeois et de différentes sociétés scientifiques.

Le but du colloque est de dégager l'apport mathématique au cours de la première moitié du XXe siècle et son impact sur les mathématiques actuelles.

Une dizaine de conférences, suivies de discussions, seront consacrées à cette analyse.

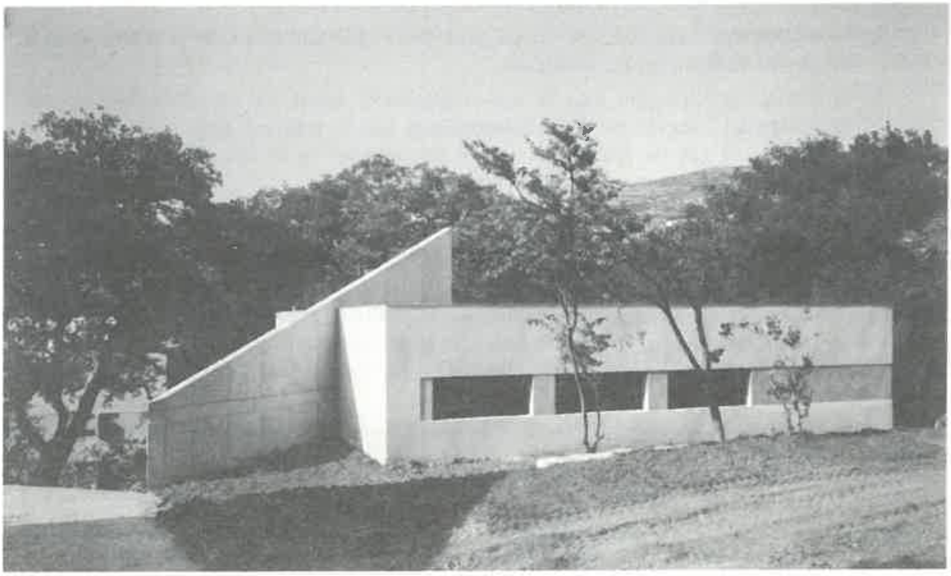
Lieu des travaux : Château de Bourglinster, près de Luxembourg-ville.

Comité scientifique provisoire : V. Ahlfors (Boston), A. Borel (Princeton), F. Bureau (Liège), P. Butzer (Aachen), H. Cartan (Paris), G. Choquet (Paris), J. Dieudonné (Paris), S. Eilenberg (London), G. Fichera (Roma), P. Halmos (San José), J.-P. Kahane (Paris), P. Lelong (Paris), G. Mackey (Harvard), P. Remmert (Münster), R. Thom (Paris).

Comité de coordination : Pierre Dugac, membre correspondant de l'Académie des Sciences de Paris; Beno Eckmann, professeur à la Eidgenössische Technische Hochschule de Zurich; Jean Mawhin, professeur à l'Université catholique de Louvain; Jean-Paul Pier, professeur au Centre universitaire de Luxembourg.

Renseignements :
Société Mathématique du Luxembourg, Centre Universitaire de Luxembourg,
162 A, Avenue de la Faïencerie,
L–1511 Luxembourg.

MAISON DE LA S.M.F. : L'INAUGURATION

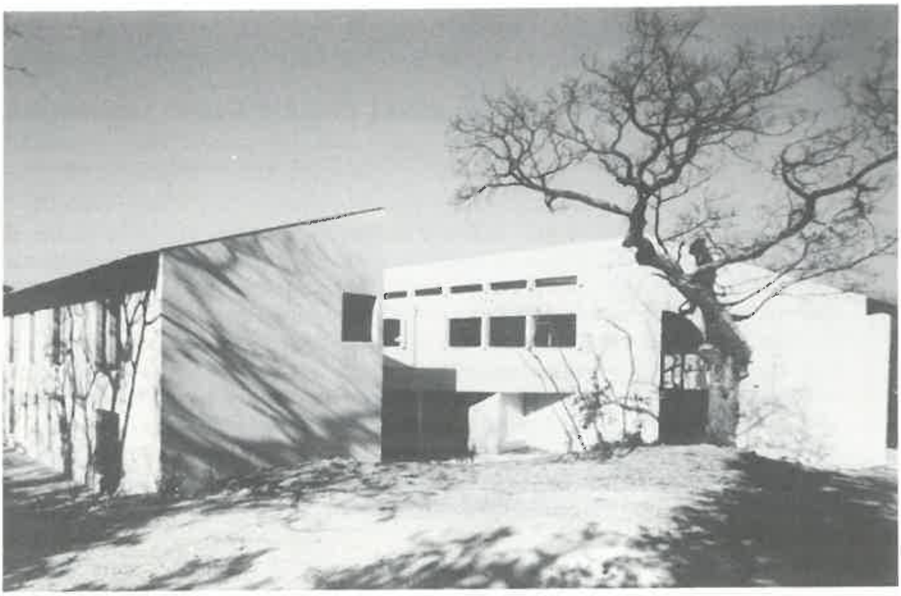


Maison de la S.M.F.

Le campus de Luminy vient de s'enrichir de deux nouvelles constructions à proximité immédiate des bâtiments du C.I.R.M. Il s'agit de la Maison de la S.M.F., où se trouve maintenant le secrétariat des revues de la Société – dont la Gazette –, et de la Médiathèque. Ces bâtiments furent construits et équipés grâce à l'aide du Ministère de l'Education Nationale (DRED), de la région Provence-Côte d'Azur et de la ville de Marseille.

L'inauguration a eu lieu le mardi 11 juin en présence de V. Courtillot, directeur de la DRED, représentant L. Jospin, ministre d'Etat; de C. Détraz, conseiller technique, représentant H. Curien, ministre de la recherche et de la technologie, de M. Chevallier, conseiller régional, représentant M. Gaudin, président de la région PACA et de M. Rey, adjoint au maire, représentant M. Vigouroux, maire de Marseille.

Etaient aussi présents de nombreuses personnalités, dont le Recteur d'Académie, les présidents des universités marseillaises, des représentants des institutions scientifiques locales et des collectivités locales. Mentionnons du côté des mathématiciens le président de la S.M.F., J.-P. Bourguignon, le directeur de la DS1 à la DRED, J. Giraud et le directeur adjoint du département MPB du CNRS, J.-P. Ferrier. De très nombreux mathématiciens marseillais étaient venus pour l'occasion.



Médiathèque

Intérieur de la Médiathèque

D. Revuz, Université de Paris VII;
M. Yor, Université Pierre et Marie Curie, Paris

Continuous Martingales and Brownian Motion

1991. IX, 533 pp. 8 figs. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 293)
Hardcover FF 586,– ISBN 3-540-52167-4

This work provides a detailed study of Brownian Motion, via the Itô stochastic calculus of continuous processes, e.g. diffusions, continuous semi-martingales: it should facilitate the reading and understanding of research papers in this area, and be of interest both to graduate students and to more advanced readers, either working primarily with stochastic processes, or doing research in an area involving stochastic processes, e.g. mathematical physics, economics. The emphasis is on methods, rather than generality. After a first introductory chapter, each of the subsequent ones introduces a new method or idea, e.g. stochastic integration, local times, excursions, weak convergence, and describes its applications to Brownian motion; some of these appear for the first time in book form. One of the important features of the book is the large number of exercises which, at the same time, give additional results and will help the reader master the subject more easily.

M. Ledoux, Université Louis Pasteur, Strasbourg;
M. Talagrand, Université de Paris VI and The Ohio State University, Columbus, OH

Probability in Banach Spaces

Isoperimetry and Processes

1991. XII, 480 pp. 1 fig. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, Vol. 23) Hardcover FF 608,–
ISBN 3-540-52013-9

New isoperimetric inequalities and random process techniques have recently appeared at the basis of the modern understanding of Probability in Banach spaces. Based on these tools, the book presents a complete treatment of the main aspects of Probability in Banach spaces (boundedness and continuity of random processes, integrability and limit theorems for vector valued random variables, . . .) and of some of their links to Geometry of Banach spaces.

Its purpose is to present some of the main aspects of this theory, from the foundations to the latest developments, treated with the most recent and updated tools. In particular, the most important features are the systematic use of isoperimetry and related concentration of measure phenomena (to study integrability and limit theorems for vector valued random variables), and recent abstract random process techniques (entropy and majorizing measures). Some examples of these probabilistic ideas to classical Banach space theory complete this exposition.

LIVRES REÇUS

ENSEIGNEMENT

Calcul différentiel complexe

Daniel Leborgne

PUF, coll. "Que sais-je?", 128 p., 1991.

Ce petit livre amène son lecteur des débuts de la théorie de Cauchy sur les fonctions analytiques aux surfaces de Riemann, sans renoncer à donner des preuves et en mettant les idées importantes en évidence. On notera la présence d'un mémento pour l'explicitation de quelques termes, d'une bibliographie pour pouvoir approfondir et d'un index.

Analyse de Fourier et applications Filtrage, calcul numérique et applications

Claude Gasquet, Patrick Witomski

Masson, 1990, 356 p., 240 F.

Destiné aux étudiants en mathématiques, en physique et en sciences de l'ingénieur, ce livre est une introduction à un certain nombre d'idées en analyse (transformée de Fourier, intégrale de Lebesgue, espaces de fonctions, convolutions, distributions...) et à leur application aux signaux. L'ensemble est réparti en petites leçons, assorties de formulaires et d'exemples.

Algorithmes et complexité

H.S. Wilf

Masson, 1989, traduit du livre **Algorithms and complexity**, Prentice Hall, 1986.

Cet ouvrage présente les différents aspects de la notion de complexité des algorithmes. Il s'appuie sur de nombreux exemples dans des domaines aussi variés que la théorie des graphes et l'arithmétique en faisant une large place aux algorithmes récursifs et la NP-complétude.
Le niveau est celui du second cycle universitaire.

Collection Vuibert-Prépa :

*Les éditions Vuibert, connues dans le milieu mathématique pour le périodique "Revue de Mathématiques Spéciales", a lancé il y a peu de temps une nouvelle collection. Sous le titre explicite de "***Vuibert-Prépa***", on trouve au format de poche des ouvrages de cours et essentiellement d'exercices. En voici quelques titres : dérivations, fonctions et courbes; séries; analyse. Comme on le voit les sujets sont très classiques. Le traitement est lui aussi sans surprises. La page 4 de couverture d'un de ces ouvrages indique "nous espérons que cette série sera utile aux candidats des classes préparatoires".*

Mathématique Financière

G. Ansion et **T. Houben**

Armand Colin, Collection U, 1989, 129 F.

Cet ouvrage traite des problèmes d'intérêts composés, d'annuités, de prêt, d'emprunt et d'investissement. Les outils mathématiques sont élémentaires, mais de nombreuses applications sont proposées qui permettent de résoudre les problèmes concrets que l'on peut rencontrer.

Problèmes de Mathématique financière, corrigés et commentés

G. Ansion et **T. Houben**

Armand Colin, Collection U, 1989, 119 F.

Ce livre présente les solutions d'exercices proposés dans le précédent. Des rappels en tête de chaque chapitre lui assure une certaine autonomie.

Analyse. Algorithmes et programmes en Pascal

J.-L. Jardrin

Dunod, 1989, 150 F.

Ce livre complète le livre du même auteur : Algèbre. Algorithmes et programmes en Pascal. *Il s'adresse aux étudiants de niveau 1er cycle universitaire. Il y a des rappels théoriques sur les notions de polynomes, approximation de fonctions, dérivation et intégration numérique, résolution d'équations, optimisation, accompagnés de programmes écrits en Pascal.*

Introduction à l'informatique théorique, Calculabilité et complexité

Q. Saloma

Armand Colin, Collection U, 1989, 320 F.

Traduit du livre "Computation and Automata" publié par Cambridge University Press, cet ouvrage s'adresse aux étudiants du niveau 2e cycle universitaire et traite de la théorie des langages, des automates, des machines de Turing, de grammaire, de systèmes de réécriture, de la théorie de la complexité et d'un peu de cryptographie.

MONOGRAPHIES

Méthodes mathématiques pour la CAO

J.-J. Risler

Masson, 1991, Collection Recherches en Mathématiques appliquées, n° 18, 160 F.

Ce livre est tiré d'un cours de 3e cycle de l'université P. et M. Curie à Paris et intéresera les chercheurs ou ingénieurs, des milieux universitaires ou industriels, qui recherchent une base mathématique solide pour la CAO. On y trouvera par exemple les courbes de Béziers ou B-splines, la triangulation de Delaunay et la théorie de l'élimination algébrique. L'ouvrage est très bien présenté et illustré.

L'équation diophantienne du second degré

Alain Faisant

Hermann, 1991, 238 p., 148 F.

Pour la recherche des racines entières des équations du second degré à coefficients entiers, ce livre propose un contexte théorique, un outil de résolution (les fractions continuées, expression qu'il préfère à celle de "fractions continues") et leur mise en oeuvre pour une résolution concrète. Il est accompagné d'exercices dont la plupart sont corrigés.

Comparaison de populations

T. Bulle

Editions Masson, 128 p.

Cet ouvrage présente les méthodes statistiques permettant de comparer plusieurs échantillons, qui sont de deux types : classiques (comparaison des moyennes, analyse des variances), ou non-paramétriques (tests de White, de Friedman, de Kruskal et Wallis, etc.). La présentation des tests est accompagnée de programmes informatiques permettant de les mettre en œuvre. Les méthodes présentées sont particulièrement utiles en sciences naturelles, et en sciences humaines.

Statistique mathématique

P.G. Hoel

Armand Colin, 304 p.

Il s'agit de la traduction de la 5e édition du premier tome d'un traité classique d'introductions aux statistiques. Après plusieurs chapitres de probabilités de base, l'auteur présente la théorie de l'échantillonnage, puis les méthodes de régressions, chaque chapitre étant illustrés d'exercices. D'autres thèmes plus avancés seront traités dans le deuxième tome.

Mathématiques appliquées à la gestion

C. Goujet, C. Nicolas

Editions Masson, 280 p.

Exercices corrigés, avec compléments de cours

C. Atlan et G. Trigano, 326 p.

Destinés aux étudiants en formation courte de gestion, ces deux livres complémentaires présentent les bases du calcul des probabilités, et de l'estimation statistique, ainsi que des notions de théorie des graphes et de programmation linéaire. Un chapitre sur l'analyse des données termine ce cours. Le livre d'exercices contient la correction des exercices du premier livre, ainsi que des rappels de cours.

PHILOSOPHIE, HISTOIRE, VULGARISATION

Mathématiques et philosophie. De l'antiquité à l'âge classique

Hommage à Jules Vuillemin.

Roshdi Rashed (édité par)

Editions du CNRS, 1991, 316 p., 275 F

Les diverses contributions qui composent *ce livre, au travers de l'étude historique de cas précis, se posent la question des relations réciproques qu'ont entretenues mathématiques et philosophie depuis l'antiquité jusqu'au XVIIe siècle. Ce sont tant les questions que les philosophes se sont posées à partir des mathématiques que les réflexions élaborées par des mathématiciens dans le contexte de leur pratique qui sont ici objet d'étude.*

Corps et modèles

Hourya Sinaceur
Vrin, collection Mathesis, 1991, 496 p., 198 F.

Ce livre suit les différents contextes mathématiques dans lesquels le théorème de Sturm, sur le nombre de racines de polynômes à coefficients réels, a été repris depuis son énoncé, au début du XIXe siècle. L'auteur montre comment il a accompagné les réflexions menant à l'élaboration de l'algèbre réelle abstraite, pour se retrouver ensuite à une position centrale dans les travaux de logique, en particulier chez Tarski.

Pour l'histoire de la science hellène

Paul Tannery
deuxième édition, 1930
repris aux éditions Jacques Gabay, 462 p., 1990, 414 F.

Cette collection de monographies, réunies en un livre, présente des fragments parvenus jusqu'à nous des premiers philosophes grecs et des textes présentant leurs idées en physique, le tout accompagné d'une présentation. Publiées pour la première fois en 1887, elles ont été rééditées par A. Diès en 1930 pour tenir compte des modifications que Tannery comptait y apporter et de publications majeures sur les présocratiques, faites dans l'intervalle. Un long appendice est consacré à l'arithmétique pythagoricienne et à sa descendance.

PÉRIODIQUES

Quadrature, n° 6 (octobre 1990)

Editions du Choix, 66 p. 35 F.

L'on trouve entre autres au sommaire de ce numéro quelques quadratures de la parabole (J.M. Lévy-Leblond), une présentation critique de sondages (E. Kosmanek), une présentation de l'analyse non-standard (A. Deledicq), quelques propos sur Mahematica (B. Autin), des considérations sur les fractions continues (F. Jabœuf et al.)...

n° 7 (janvier 1991) : *le jeu icosien, d'après Edouard Lucas; analyse non-standard (fin), par A. Deledicq; diviseurs de nombres remarquables, par M.D. Indjoudjian; des nombres remarquables : 26, par S. Tuffery.*

n° 8 (mai-juin 1991) : *musique et mathématiques : deux principes musicaux contradictoires et leur application, par J.F. Laslier; Boole, par L.G. Vidiani; l'algorithme de l'élagueur, par G.T. Guilbaud; trois variations sur la structure de groupe, par C. Soland; groupes et relation de Chasles, selon J.M. Huard et A. Joyal, par M. Audin et J.C. Sidler; oscillations électriques dans un circuit R.L.C., par F. Drapier et E. Cambier.*

n° 9 (juillet-août 1991) : *jeux de Nim et généralisations, par J. Bouteloup; la cryptographie à clefs publiques, par M.D. Indjoudjian; les courbes de Péano, par R. Ferréol; quasi-cristaux et pavages, par M. Guillemot; deux cubiques du plan d'un triangle, adapté de F. Lang, par P. Audin; cartes de fidélité dans les cinémas, par F. James et L. Mazliak.*

OUVRAGES PARAMATHÉMATIQUES

Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année

Cette brochure, publiée par la commission inter IREM-université est un ouvrage collectif qui regroupe des textes présentant diverses expériences d'enseignement en DEUG, expériences s'appuyant sur (et contribuant à) la réflexion théorique des didacticiens des mathématiques. Il s'agit en premier lieu de prendre en compte les caractéristiques nouvelles de la population étudiante. Ces caractéristiques sont étudiées dans la première partie de la brochure. Dans une deuxième partie sont repris quelques principes directeurs motivant les exemples exposés dans la troisième partie (la plus importante). Une quatrième partie introduit des thèmes (utilisation de l'histoire *des mathématiques par exemple), encore insuffisamment approfondis au stade actuel de la réflexion, mais considérés comme prometteurs.*

COMPTES RENDUS

Ondelettes et Opérateurs, tome I

Yves Meyer

Hermann, 1990.

Ce livre est un pari audacieux : présenter un traité complet sur une théorie agée de deux années (à l'époque de la rédaction). En effet, c'est à partir de 1985–1986 sous l'influence de Yves Meyer que s'est développée la théorie mathématique des bases orthonormées d'ondelettes, *sujet de ce volume (le premier d'une série de trois volumes). Les noms attachés à cette théorie sont principalement, outre Y. Meyer, I. Daubechies, P. G. Lemarié et S. Mallat.*

Disons tout de suite que ce pari est essentiellement tenu. Avec passion et enthousiasme, Yves Meyer nous fait voyager au coeur d'un sujet en plein bouillonnement. Le contenu de ce livre forme un tout cohérent et, sans être exhaustif, l'auteur présente quantité de résultats montrant et précisant l'utilité mathématique de ces objets appelés ondelettes. Bien sûr, les aspects plus récents de cette théorie ne pouvaient pas être pris en compte. Le lecteur intéressé pourra consulter à ce sujet le livre de Ingrid Daubechies [D], livre qui, d'ailleurs, aura une ouverture plus «appliquée» que celui dont nous discuterons ici, ou bien se plonger dans la déjà vaste littérature sur le sujet.

Le livre de Yves Meyer a plusieurs niveaux de lecture. Il s'adresse tout d'abord à l'étudiant de 3ème cycle ayant une solide connaissance de la théorie de la mesure, des distributions et de la transformation de Fourier. Confronté au style très «littéraire» de l'auteur, l'étudiant devra s'armer de courage pour reconstituer dans les démonstrations les détails qui ne sont parfois qu'esquissés. Ce livre s'adresse aussi au chercheur non-spécialiste qui pourra en extraire rapidement les résultats essentiels sans être noyé dans une masse de détails. Le spécialiste quant à lui trouvera en ce livre une référence utile.

Qu'est ce qu'une base orthonormée d'ondelettes? En dimension 1, il s'agit d'une famille de fonctions ψ_λ de la variable réelle x indexées par les intervalles dyadiques $\lambda = \lambda(j,k) = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Ces fonctions sont construites par la règle $\psi_\lambda(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ si $\lambda = \lambda(j,k)$ et l'on demande que $\{\psi_\lambda\}$ forme une base orthonormée de l'espace de référence $L^2(\mathbf{R})$. Le premier exemple qui vient à l'esprit est la base de Haar où $\psi(x) = 1$ si $x \in [0, 1/2[$, -1 si $x \in [1/2, 1[$, 0 ailleurs.

Il est remarquable que l'on puisse également obtenir des bases orthonormées en choisissant astucieusement ψ tout en lui imposant le fait d'être à la fois régulière, bien localisée *et* oscillante. *Régularité veut dire qu'il existe un entier $r > 0$ tel que ψ soit r fois dérivable, localisation signifie que pour tout $0 \leq k \leq r$ et $M \geq 1$, $|\psi^{(k)}(x)| \leq C(M,k)(1+|x|)^{-M}$ et oscillation que $\int_{\mathbf{R}} x^k \psi(x)\,dx = 0$ pour les mêmes valeurs de k. Dans ce cas ψ est appelée une* ondelette r-régulière. Les coefficients en ondelette *sont les produits scalaires $\langle f, \psi_\lambda\rangle$ et l'opération $f \longrightarrow \{\langle f, \psi_\lambda\rangle\}$ s'appelle la* transformation en ondelette.

L'intérêt de telles contraintes réside dans le fait que le coefficient $\langle f, \psi_\lambda\rangle$ peut alors s'interpréter au sens de la dualité distributions-fonctions de test si f est une distribution dont l'indice de régularité est compris entre $-r$ et r. On peut ainsi sortir du cadre L^2 et analyser d'autres espaces fonctionnels de distributions. (Les distributions dont je parle ici sont des distributions définies modulo les polynômes, je ne rentre pas plus avant dans les détails.) Lorsque $\lambda = \lambda(j,k)$ ce coefficient fournit une information moyenne et locale pour la distribution f autour de la fréquence $\xi = 2^j$ et du point $x = k2^{-j}$ à une échelle 2^{-j}, inversement proportion-

nelle à celle de la fréquence en accord avec le principe d'incertitude. Ce coefficient est petit si f est régulière dans un voisinage de $k2^{-j}$ de largeur approximativement 2^{-j}. Si en revanche f est singulière dans ce même voisinage, ce coefficient (et les coefficients «voisins») sera significatif. La transformation en ondelette peut donc s'interpréter comme une transformation de Fourier locale qui détecte les singularités, localement et à toutes les échelles.

L'appartenance à un espace fonctionnel donné comme, par exemple, les espaces de Lebesgue L^p, $1 < p < \infty$, de Hardy H^p, $p \leq 1$, BMO, les espaces de Hölder, de Sobolev, de Besov ..., se lit sur le module des coefficients en ondelette grâce à une règle d'assemblage précise. La formule de reconstruction

$$f(x) = \sum \langle f, \psi_\lambda \rangle \psi_\lambda(x) \qquad (1)$$

permet de traduire isomorphiquement ce même espace fonctionnel en un espace de suites. C'est en voulant caractériser les espaces de Hardy à l'aide de bases inconditionnelles que J. O. Strömberg a inventé les ondelettes régulières en 1981. Sa construction est passée inaperçue à l'époque et Y. Meyer les a redécouvertes en 1985.

Ce type de décomposition trouve sa source mathématique dans la théorie de Littlewood-Paley. (Les ondelettes ont également apparu sous diverses formes dans d'autres domaines scientifiques comme le traitement de signal : acoustique, visuel ou autre; la mécanique quantique : états cohérents; ou bien la renormalisation des champs.) Même si ce n'est pas l'idée originale de Littlewood et Paley, la théorie qui porte leur nom repose sur une idendité due à Calderón :

$$\int_0^\infty Q_t Q_t^* \frac{dt}{t} = Id \qquad (2)$$

où Q_t dénote un opérateur de convolution avec une fonction $1/t\,\psi(x/t)$. La fonction ψ satisfait, par exemple, les conditions de régularité, de localisation et d'oscillation d'une ondelette r-régulière et vérifie de plus la relation de normalisation

$$\int_0^\infty |\hat{\psi}(t\xi)|^2 \frac{dt}{t} = 1 \qquad \forall \xi \neq 0.$$

Si l'on pose $\psi_{t,b}(x) = t^{-1/2}\psi(\frac{x-b}{t})$, alors (2) se réécrit

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{t,b} \rangle \psi_{t,b}(x) \frac{dt\, db}{t^2} = f(x).$$

La relation (1) apparaît alors comme une version discrétisée de (2).

Les fonctions $\psi_{t,b}$ sont dans la terminologie inventée par R. Coifman et G. Weiss des molécules centrées en b de largeur t. Une des raisons d'être de ces fonctions est d'être conservées sous l'action des intégrales singulières telles la transformée de Hilbert (et en dimension supérieure les transformées de Riesz ...). Plus précisement, ces opérateurs envoient une molécule sur C fois une molécule de même centre et même largeur, la constante C étant indépendante de la molécule choisie. La classe d'opérateurs considérée ici est celle des intégrales singulières de Calderón-Zygmund qui vérifient $T(1) = T^*(1) = 0$ ainsi qu'une propriéte dite de continuité faible. On comprend alors l'intérêt d'une formule du type (1) qui permet de réduire la continuité d'un opérateur sur un espace fonctionnel à celle d'une matrice infinie sur l'espace de suites qui lui est isomorphe. Cette approche a permis, par exemple, à Ph. Tchamitchian de résoudre par la négative le problème du calcul symbolique pour cette classe d'opérateurs.

Comme on le voit donc, il y a toujours deux versants aux représentations en ondelette (orthogonales ou non) du type (1). La décomposition des espaces fonctionnels adaptés à ces ondelettes et l'étude des opérateurs qui ont amené à définir ces notions de molécule et d'ondelette. L'un et l'autre vont de pair et il est parfois mal aisé de les séparer. Yves Meyer a choisi d'aborder le versant opérateur dans le tome II pour se consacrer uniquement au premier versant dans le tome I : construction systématique des ondelettes et décompositions des espaces fonctionnels.

Avant d'en examiner le contenu, il est bon de mettre ce tome en perspective en disant quelques mots du tome II, consacré aux opérateurs de Calderón-Zygmund. Comme l'auteur l'explique dans son introduction générale, l'étude de ces opérateurs a été motivée par le lien très fort, mis en évidence par A. Calderón et A. Zygmund, qui les unissaient aux équations aux dérivées partielles. Si, en 1986, la plupart des résultats fondamentaux sur cette classe d'opérateurs étaient connus (sans recourir aux bases d'ondelettes mais aux molécules citées plus haut), il n'en reste pas que l'utilisation de ces bases permet une présentation élégante et efficace de (presque) toute cette théorie. Nous en avons donné un exemple ci-dessus et le lecteur en trouvera bien d'autres à la lecture de ce volume.

Nous examinons maintenant le contenu du tome I. Ce livre, 200 pages environ, est fort de six chapitres et d'une bibliographie conséquente. Il manque cependant une annexe de notations. Chaque chapitre est pourvu d'une introduction et d'une conclusion ou de compléments qui lui sont propres indiquant par là une certaine indépendance entre les chapitres. Plutôt que de les suivre linéairement, relevons ce qui nous semble être les temps forts de ce livre.

L'auteur ne se contente pas de nous faire savourer les délicieuses ondelettes (chapitre III), il nous propose également une recette gourmande intitulée *Analyse Multirésolution* (chapitre II). De quoi s'agit-il? Restons en dimension 1. Une analyse multirésolution est, par définition, une suite croissante pour l'inclusion de sous-espaces fermés V_j, $j \in \mathbf{Z}$, de $L^2(\mathbf{R})$ telle que le projecteur orthogonal E_j sur V_j converge fortement dans $L^2(\mathbf{R})$ vers l'identité si j tend vers $+\infty$ et vers 0 si j tend vers $-\infty$. De plus les espaces V_j sont reliés entre eux par $f(x) \in V_j$ si et seulement si $f(2x) \in V_{j+1}$. Enfin, l'espace V_0 est engendré par une base de Riesz $g(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$. Cette fonction $g(x)$ engendre l'analyse multirésolution. Cette dernière est dite r-régulière si la fonction g est r-régulière, c'est-à-dire si g est régulière et localisée au sens défini plus haut (on ne demande pas en revanche que g soit oscillante; en fait g ne peut pas l'être). Les espaces V_j, tous identiques par changement d'échelle, sont considérés comme un stock de fonctions simples dans lequel on puise une approximation $f_j = E_j(f)$ à une fonction arbitraire f donnée. La suite d'opérateurs E_j est donc une approximation de l'identité mais ne ressemble pas aux approximations de l'identité classiquement définies à l'aide de la convolution.

L'hypothèse de régularité sur l'analyse permet de montrer que les opérateurs E_j sont aussi des approximations de l'identité dans divers espaces fonctionnels : les espaces de Lebesgue L^p, $1 \leq p < +\infty$, de Sobolev H^s, $-r < s < r$ et bien d'autres. Ceci anticipe sur la caractérisation au chapitre VI de ces espaces en termes d'ondelettes.

Les ondelettes justement apparaissent au chapitre III. Etant donné une analyse multirésolution r-régulière V_j, on dénote pour tout j par W_j le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1}. Les espaces W_j sont mutuellement orthogonaux et leur somme est L^2 tout entier. Ces espaces étant de plus tous identiques par changement d'échelle, une base orthonormée de la forme $\psi(x-k)$, $k \in \mathbf{Z}$, dans l'espace W_0 fournira une base orthonormée d'ondelettes de L^2. C'est par de simples manipulations algébriques que l'on construit une telle fonction ψ dans W_0. Le choix de ψ n'est pas unique mais parmi tous les choix possibles, on trouve au moins une fonction r-régulière. De plus, le caractère oscillant de cette fonction est une conséquence automatique de l'algorithme qui l'a déterminé.

Chaque analyse multirésolution r-régulière fournit donc (au moins) une base orthonormée d'ondelettes r-régulières de L^2. L'auteur donne quelques exemples concrets parmi lesquels on trouve des ondelettes dans la classe de Schwartz, des ondelettes à decroissance exponentielle ou encore des ondelettes à support compact (qui donc généralisent la base de Haar) découvertes par I. Daubechies. On peut également construire à volonté des analyses multirésolution grâce à un algorithme assez simple découvert par S. Mallat. Enfin, il existe une version n-dimensionnelle de la construction d'une base d'ondelettes de $L^2(\mathbf{R}^n)$ à partir d'une analyse multirésolution pour cet espace. Nous n'utiliserons par la suite que des bases d'onde-

lettes régulières provenant d'analyses multirésolution régulières (il y a en effet des exemples montrant que ce n'est pas toujours le cas).

Intéressons-nous maintenant à titre d'exemple à la caractérisation des espaces de Sobolev inhomogènes H^s à nouveau en dimension 1. On peut approximativement considérer les fonctions de W_j comme ayant une transformée de Fourier supportée dans une couronne dyadique $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$. Cela est même rigoureusement vrai pour une famille d'exemples. Pour $-r \leq s \leq r$, r étant la régularité de l'analyse multirésolution, les inégalités de Bernstein permettent d'estimer la norme H^s de $f \in W_j$ par 2^{js} fois la norme L^2 de f. Ces deux quantités sont en fait équivalentes. En ce qui concerne une fonction f de V_j sa norme H^s est seulement contrôlée par 2^{js} fois sa norme L^2. On voit donc que partant d'une fonction arbitraire f, sa projection sur V_j fournit une information «basse fréquence» dans une gamme de fréquences inférieures à 2^j, la projection sur W_j quant à elle fournit une information «haute fréquence» dans une bande de fréquences équivalentes à 2^j.

Appelons ensuite D_j le projecteur orthogonal sur W_j, il vient $D_j = E_{j+1} - E_j$, donc $f = E_0(f) + D_0(f) + D_1(f) + \cdots$ pour toute fonction f. Compte tenu des remarques sur le domaine fréquentiel de chacune des fonctions composant cette série, cette décomposition rappelle une des formes de la décomposition de Littlewood-Paley dyadique où E_0 et les D_j seraient des opérateurs de convolution. Ainsi, comme pour la décomposition de Littlewood-Paley, on obtient si $-r < s < r$

$$\|f\|_{H^s} \sim \|E_0(f)\|_{L^2} + \left(\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{2js} \|D_j(f)\|_{L^2}^2\right)^{1/2},$$

et ceci s'applique dès que $f \in H^{-r}$.

Les ondelettes interviennent finalement en remarquant que les fonctions

$$2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad k \in \mathbf{Z},$$

forment une base orthonormée de W_j. On peut ainsi remplacer dans la série précédente par $\sum_k |\langle f, \psi_\lambda \rangle|^2$ le terme $\|D_j(f)\|_{L^2}^2$ où $\lambda = \lambda(j,k)$. La norme $\|E_0(f)\|_{L^2}^2$ quant à elle est soit équivalente à $\sum_k |\langle f, g(. - k)\rangle|^2$ où g engendre l'analyse multirésolution d'où proviennent les ondelettes, soit égale à $\sum_{j \leq -1} \sum_k |\langle f, \psi_\lambda \rangle|^2$ en décomposant $E_0(f)$ sur les ondelettes ψ_λ où $\lambda = \lambda(j,k)$ avec $j \leq -1$.

Ceci montre le lien annoncé entre H^s et un espace de suites. Le fait que l'équivalence ci-dessus résume un isomorphisme entre espaces de Banach provient du fait que la décomposition d'une fonction dans une base est unique. Signalons que M. Frazier et B. Jawerth ont développé un algorithme, appelé la «φ-transform», de décomposition des distributions similaire à la transformation en ondelette. Leur formule de représentation est analogue à (1) mais ils n'imposent ni orthogonalité entre les ψ_λ ni unicité de la représentation. Par des techniques différentes, ils obtiennent effectivement une équivalence entre normes fonctionnelles et normes de suites, mais par manque d'unicité cela ne se traduit pas en un isomorphisme (voir le très beau texte [FJW]).

Il existe des énoncés semblables à celui que nous avons présenté pour la version homogène de l'espace H^s et pour bien d'autres espaces encore (chapitre VI).

Pour finir abordons le chapitre V. L'auteur y traite la décomposition par ondelettes de l'espace de Hardy H^1 et de son dual BMO. Plutôt que de partir d'une des définitions de H^1 classiquement présentées dans les livres d'analyse harmonique, l'auteur choisit de partir d'un espace défini à l'aide d'ondelettes.

Toujours en dimension 1, étant donne une base d'ondelettes, disons r-régulières, $r > 0$, et à support compact, on dit que $f \in H^1$ si $f \in L^1$ et si la série (1) converge inconditionnellement dans L^1 vers f. Il est important d'observer que H^1 est nécessairement plus petit que L^1. Sinon, par dualité, la décomposition en ondelettes de la fonction constante égale à 1 conduirait à l'égalité numérique absurde $1 = 0$, ceci parce que les ondelettes sont d'intégrale nulle. Si l'on avait remplacé L^1 par L^p, $1 < p < \infty$, l'espace H^p ainsi défini aurait *simplement été L^p tout entier. Il y a donc une rupture pour $p = 1$.*

L'identification de H^1 se fait par le détour d'une fonctionnelle quadratique qui rappelle, comme l'explique Y. Meyer, la fonction d'aire de Lusin dont A. Calderón avait montré comment elle caractérise l'espace de Hardy holomorphe $\mathcal{H}^1$.

Appelons χ_λ la fonction caractéristique de l'intervalle λ et $|\lambda|$ sa mesure de Lebesgue. Soit $g(f)$ la fonctionnelle quadratique définie par

$$g(f)(x) = \left(\sum |\langle f, \psi_\lambda\rangle|^2 \frac{1}{|\lambda|}\chi_\lambda(x)\right)^{1/2}$$

Alors pour $f \in L^1$, $f \in H^1$ si et seulement si $g(f) \in L^1$. Ce sont ensuite les ensembles de niveaux de cette fonctionnelle qui permettent de procéder à des regroupements dans la série (1), ce qui est licite puisqu'elle converge inconditionnellement dans L^1 avec notre hypothèse : elle devient alors une décomposition atomique, au sens de l'espace «atomique» H^1, de la fonction f. Ainsi notre espace H^1 n'est autre que H^1. Ce résultat remarquable implique alors la caractérisation de BMO en termes d'ondelettes par dualité avec l'espace H^1 maintenant identifié à H^1.

Références bibliographiques [(*)]

[D] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, NSF series in Applied Mathematics, S.I.A.M. (in press 1991).

[FJW] M. Frazier, B. Jawerth, G. Weiss, *Littlewood-Paley theory and the study of function spaces*, to appear as a monograph of the N.S.F. conference series in Mathematics (1991).

Pascal AUSCHER
Université de Rennes I

(*) Nous n'avons pas inclus les références citées dans le livre de Y. Meyer

Lambda Calcul, Types et Modèles

J.-L. Krivine
Masson, 1990.

Ce livre remarquablement clair réussit à rendre compte en moins de deux cents pages d'un nombre important de résultats actuellement utiles sur le Lambda-calcul, qui apparaît aujourd'hui comme un outil fondamental en informatique et en logique mathématique. Il est agréable de pouvoir lire cet ouvrage en français. Il est organisé en courts chapitres (reflétant la division en séances du cours dont il est issu), dont aucun ne manque la promesse d'établir des propriétés substantielles, et ce sans préliminaires ennuyeux.

Il ne s'agit pas d'un livre complet sur le Lambda-calcul, tel n'est pas son but. Il n'existe à ce jour que trois autres livres récents consacrés au Lambda-calcul. Le livre de Barendregt est un ouvrage de référence essentiel sur le Lambda-calcul sans types, dans lequel il n'est pas aisé de pénétrer en apprenti. Le livre de Hindley et Seldin est un tr'es bon ouvrage d'introduction, au rythme plus lent que celui de Krivine, dont les chapitres les plus avancés traitent de l'inférence de types. Le livre de Girard (traduction et appendices de Lafont et Taylor), issu d'un cours de DEA de J.-Y. Girard professé en même temps que celui de Krivine, replace le Lambda-calcul dans le contexte de la théorie de la démonstration.

Qu'est-ce que le Lambda-calcul? Un calcul de termes extrêmement simple (des variables, une opération d'application, et une opération unaire et liante d'abstraction), inventé autour de 1930 par Church, à une époque de formalisation triomphante des mathématiques, d'abord sans types, puis avec types pour faire face aux paradoxes. Mais il semble que le Lambda-calcul n'a connu son essor véritable que plus tard (la fin des années 60) en théorie de la démonstration et en informatique. Le Lambda-calcul de second-ordre, ou polymorphe – un langage des preuves pour la logique propositionnelle intuitioniste de second ordre – a été identifié et mis en avant par J.-Y. Girard dans un contexte de théorie de la démonstration, puis plus tard, indépendamment, par J. Reynolds dans ses recherches sur le polymorphisme dans les langages de programmation.

Le Lambda-calcul n'est probablement pas *l'outil ultime. Il a des défauts maintenant bien identifés, grâce à des travaux plus ou moins indépendants (encore!) en théorie de la démonstration et en informatique. La logique linéaire de J.-Y. Girard repose sur des symétries profondes, déjà présentes dans le calcul des séquents, et quelque peu occultées dans le Lambda-calcul. Les divers calculs de processus parallèles sur lesquels travaillent des chercheurs en informatique sont porteurs du même genre d'idées : il devrait y avoir symétrie entre entrées et sorties.*

Il n'est donc pas évident que le Lambda-calcul stricto sensu reste central dans ces deux disciplines – théorie de la démonstration et informatique –. Mais les modèles de calcul plus récents déjà disponibles, par exemple les réseaux de preuve de la logique linéaire, vont dans le sens d'un prolongement plus que d'un remplacement. L'apprentissage des bases du Lambda-calcul reste une majeure dans un cursus informatico-logique, et, au-delà, devrait attirer la curiosité de mathématiciens intéressés par les applications.

Ce qui suit est un commentaire du contenu du livre de Krivine, dans l'ordre des chapitres. Notons que les références ou indications historiques sont trop laconiques.

Le chapitre 1 commence par un traitement précis des captures de variables (quand on substitue sous un lieur, il faut souvent renommer des variables liées pour éviter de capturer des variables libres). Ce traitement un peu technique donné d'emblée peut être un peu déroutant, mais le lecteur non averti peut continuer sa lecture sans crainte : on travaille sur les Lambda-termes comme sur les rationnels : à équivalence près des représentants. Le lecteur averti, quant à lui, appréciera la précision du traitement de cette question, comparé à celui, trop allusif, de Barendregt. On peut signaler qu'un traitement différent, peut-être plus intuitif, est fourni par la notation de De Bruijn. Le premier chapitre émerge de ce problème "trivial", mais important (le renommage coûte en machine, autant le comprendre bien formellement) en s'achevant sur la propriété de confluence de la bh-reduction, dont l'importance pour le calcul est considérable : le résultat d'une expression ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les calculs.

Le chapitre 2 est consacré à la calculabilité : le Lambda-calcul permet de formaliser la notion de fonction calculable, et cette définition est équivalente à une autre (disons celle de Kleene-Herbrand), et donc à toutes les autres, par la thèse de Church (le même!).

Les chapitres 3 et 4 établissent des résultats de normalisation. Ils sont démontrés de manière originale, via le typage et la réalisabilité. Ces deux mots-clef font l'unité de l'ouvrage. La réalisabilité est une technique inventée par Kleene dans les années 40 : l'idée de base est de prendre au pied de la lettre l'interprétation fonctionnelle des formules : la formule $A \Rightarrow B$ peut-être réalisée comme une fonction qui envoie tout réalisateur de A sur un réalisateur de B. Les modèles de réalisabilité ont été d'abord utilisés pour des preuves d'indépendance (voir par exemple les dernières pages du livre classique de Kleene, Mathematics of Metamathematics, ou le plus récent ouvrage de Troelstra - Van Dalen). La technique de réalisabilité est ici appliquée à la démonstration de résultats syntaxiques dont le principal est le suivant : tout terme typable est fortement normalisable (et réciproquement, pour un système de types dû à Coppo). Confluence et normalisation forte (i.e. terminaison de tous les calculs) assurent la décidabilité de la théorie équationnelle.

Le chapitre 5 est un modèle de clarté. Je n'avais jamais pu suivre dans le détail jusqu'alors la démonstration du théorème de Böhm, au moins aussi important pour son énoncé (la théorie $\beta\eta$ est maximale parmi les théories cohérentes de Lambda-termes) que pour la technique employée dans sa preuve, remarquablement démontée dans le livre : les transformations dites de Böhm sont des outils permettant d'extraire des sous-termes : typiquement une telle transformation T peut servir à construire un terme $T(M)$ dont M est un sous terme et qui se réduit sur un sous-terme de M fixé au départ (et dont T dépend).

Le chapitre 6 fournit un traitement logique précis de l'équivalence entre Lambda-calcul et logique combinatoire. Ce calcul sans variables liées développé par Curry a connu un grand succès à cause de sa relative facilité d'implantation en machine. Il est à mentionner que des combinateurs issus d'une autre équivalence, celle entre Lambda-calcul et Catégories Cartésiennes Fermées, se sont révélés récemment au moins aussi utiles à la compilation du Lambda-calcul.

Le chapitre 7 est une synthèse originale des principaux modèles connus du Lambda-calcul sans types, que l'auteur ramène à une construction unique originale.

Le reste du livre aborde un thème de recherche actuel de l'auteur : l'utilisation des types, non pas seulement pour vérifier (partiellement), mais pour synthétiser des programmes. Ceci est expliqué, sans doute un peu trop vite, dans les dernières pages du chapitre 8. L'édifice opère sur deux étages. D'abord le Lambda-calcul de second ordre, ou système F d'après la terminologie originale de J.-Y. Girard, est introduit dans le chapitre 8. Il y est montré, outre la normalisation forte, que certains types permettent le codage de structures de données usuelles.

Puis, dans le chapitre 9, le système F, basé sur la logique propositionnelle intuitionniste de second ordre, est plongé dans le monde plus riche de l'arithmétique fonctionnelle de second ordre $AF2$, basée sur le calcul des prédicats du second ordre. Les définitions de la réalisabilité peuvent être internalisées dans ce langage. Le résultat principal qui fonde la technique proposée d'extraction de programme est le suivant. Si t a le type A, alors t a aussi le type " t réalise A". Donc t réalise A. Si maintenant A est une formule qui précise qu'une fonction f est totale sur les entiers, et si E est un système d'équations la caractérisant (par exemple le prédecesseur est la fonction p telle que $p_0 = 0$ et $p(n+1) = n$), alors "t réalise A", par définition de la réalisabilité et de A, n'est autre que " "x réalise "x est entier" " implique "$t(x)$ réalise "$f(x)$ est entier" " ". la formule "x est entier" a la propriété remarquable que "y réalise "x est entier" " implique $x = y$. Donc pour x entier, l'on a $t(x) = f(x)$. Reste donc, pour construire le programme t, à construire une démonstration de "t réalise A", dans la théorie de $AF2$ augmentée de E.

La synthèse de programme au sens de Krivine consiste donc à "compiler" des définitions (primitives) récursives d'algorithmes en Lambda-termes. L'utilité pratique de ces extractions n'est pas évidente : la représentation de types de données usuels par des types du second ordre n'est pas a priori efficace. Mais ce qui donne à l'approche tout son intérêt, c'est que les programmes ainsi extraits sont corrects, et leur exécution termine toujours. On peut citer dans cet esprit les travaux de T. Coquand, G. Huet et C. Paulin sur le calcul des constructions.

Le chapitre 10, enfin, prouve un résultat de Girard : les fonctions sur les entiers représentables dans le système F sont celles qui sont prouvablement totales dans le système $AF2$. Les résultats des chapitres 8 et 10 peuvent être aussi lus dans le livre de Girard, Lafont et Taylor, mais il faut noter que les techniques employées par Krivine sont assez largement originales.

Ce livre devrait intéresser un public assez large, et je lui souhaite un très vif succès. Aux spécialistes, il offre une vision profonde et unifiée du sujet, tant dans les aspects de la syntaxe que des modèles. Il se termine sur l'exposé d'un sujet de recherche vivant et fascinant, celui de la synthèse de programmes et de l'extraction d'algorithmes à partir de preuves mathématiques.

P.-L. CURIEN
Laboratoire d'Informatique, E.N.S. Ulm

A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960

Jean Dieudonné

Birkhäuser, Boston Basel, 1989, 648 p.

*La topologie algébrique, comme branche spécifique des mathématiques, ne date que de notre siècle. Il est d'usage d'en lire la préhistoire dans les travaux sur les polyèdres et la généralisation de la formule d'Euler d'une part, et dans la classification et l'intégration sur des surfaces (puis des variétés) d'autre part. Ces préoccupations et d'autres laissent leurs traces dans l'*Analysis Situs* de Poincaré (1895) et ses *Compléments* (1899-1905), qui constituent la référence obligée et une des principales sources d'inspiration en topologie dans la première moitié du XXe siècle. Sur une variété V, différentiable et de dimension n, Poincaré définit une relation d'*homologie* entre des sous-variétés v_i orientées sans bord de dimension $q-1$:*

$$n_1 v_1 + n_2 v_2 + \cdots + n_\lambda v_\lambda \sim 0$$

pour des entiers relatifs n_i, s'il existe une sous-variété de dimension q dont le bord soit composé de $|n_1|$ variétés proches de (au sens, assez ambigu, de "déformable continûment en") v_1, $|n_2|$ variétés proches de v_2, etc. , le signe des n_i prenant en compte l'orientation. Sur les questions délicates des variétés chez Poincaré, cf. E. Sschoz, Geschichte der Mannigfaltigkeits begriffs, von Riemann bis Poincaré, Birkaüser (1980). Poincaré indique qu'on peut additionner et soustraire ces relations comme des équations et définit le q^e-nombre de Betti P_q comme le plus petit nombre s pour lequel s sous-variétés compactes connexes de dimension q soient nécessairement liées par une homologie non triviale. Il énonce ensuite, et tente de prouver à l'aide de formes d'intersection, que $P_q = P_{n-q}$ et propose des méthodes pour calculer ces nombres dans divers cas particuliers. Enfin, partant d'une variété décomposable en un nombre fini de polyèdres généralisés, curvilignes, il étend la relation d'Euler en exprimant la somme alternée du nombre de "faces" de dimension donnée à l'aide des nombres de Betti.

Des quiproquos sur la définition de ces derniers – les "ordres de connexion" définis originellement par Riemann et Betti ne prenaient pas en compte les multiplicités $|n_i|$ – et les difficultés liées aux inextricables complications des intersections de variétés réelles l'amenèrent dans un second temps à inverser sa démarche *en partant cette fois directement d'une décomposition polyédrique : les objets de base sont les combinaisons linéaires à coefficients entiers relatifs de cellules polyédriques, le bord d'une telle combinaison est défini formellement (Poincaré montrant au passage que le bord d'un bord est nul) et les notions et résultats précédemment exprimés sous forme géométrique se retrouvent de même. Cette approche propice à l'emploi de techniques combinatoires domine le domaine dans les décennies suivantes, mais pose aussi une partie des problèmes qui l'alimentent, en particulier tous ceux liés à l'existence sur une variété ou un espace topologique d'une décomposition polyédrique et à la dépendance des constructions par rapport à cette décomposition. Il découle par exemple des travaux de Thom de 1954 que les classes d'homologie ne sont pas toujours représentables par des sous-variétés!*

C'est donc très raisonnablement avec un exposé du travail de Poincaré que s'ouvre le livre de Jean Dieudonné, dont l'objectif est de retracer les développements de la topologie (essentiellement algébrique) jusque dans les années 60. L'ouvrage est divisé en trois parties :

- *La première détaille la construction des diverses théories d'homologie (simpliciale, singulière, de Čech, etc.) d'abord pour compléter ou simplifier les résultats de Poincaré (en particulier prouver l'invariance de ses constructions par homéomorphisme), ensuite pour les étendre à des espaces topologiques de plus de plus généraux (ne possédant par exemple pas de triangulation finie polyédrique!).*

Phénomène connexe qui participe bien sûr à un mouvement très général des mathématiques du début de notre siècle sous l'influence de l'école d'E. Noether, on assiste à l'algébrisation progressive *des notions étudiées : les combinaisons linéaires de cellules polyèdriques de dimension q (ou leurs analogues selon les théories considérées) sont vues comme éléments d'un $\mathbb{Z}$-module C_q, le bord est un morphisme $d_q : C_q \longrightarrow C_{q-1}$ vérifiant $d_q \circ d_{q+1} = 0$ dont les relations d'homologie décrivent le noyau. Le calcul des nombres de Betti d'une variété V se subordonne désormais à l'étude des groupes d'homologie $H_q(V, \mathbb{Z}) = \ker d_q / \operatorname{im} d_{q+1}$ et l'égalité entre nombres de Betti $P_q = P_{n_q}$ apparaît comme conséquence d'une dualité (dite de Poincaré, bien sûr!) entre groupes, celle-ci constitue un des moteurs du développement de théories jumelles de cohomologie.*

La comparaison des différentes théories d'homologie conduit dans les années 40 à une axiomatisation de ces théories (à vrai dire déjà proposée, à une échelle bien plus réduite, dès 1905, par Dehn et Heegard) et, avec le succès qu'on sait, à la mise en place de l'algèbre homologique. C'est au cours de ce processus que sont dégagées les notions maintenant familières de suite exacte, produits tensoriels, foncteurs et catégories, etc.

Un autre aspect de l'évolution du sujet concerne le domaine des coefficients des combinaisons linéaires considérées : $\mathbb{Z}$ à l'origine chez Poincaré, les corps finis ensuite ($\mathbb{F}_2$ permettant de retrouver les ordres de connexion originels de Betti), puis n'importe quel groupe abélien fixe d'abord, variable ensuite à partir des travaux de Steenrod et surtout de Leray dans lesquels les coefficients sont par exemple les sections d'un faisceau. Remarquons au passage que les nombres de Betti "modernes" sont les dimensions des $H_q(X, \mathbb{Q})$, laissant donc de côté la torsion.

- *La seconde partie rassemble en chapitres à peu près indépendants des résultats connexes au développement de l'homologie, tels les travaux de Brouwer définissant le degré d'une application continue et qui s'appuient sur une méthode d'approximation simpliciale reprise par Alexander en théorie homologique; on y trouve également des résultats sur l'invariance de la dimension (resp. du domaine) (i.e. le fait qu'il n'existe pas d'homéomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ (resp. ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$) si $m \neq n$) et des théorèmes de points fixes, qui permettent d'évoquer les liens entre topologie combinatoire et "générale". D'autres sections sont consacrées aux calculs de groupes d'homologie pour des espaces particuliers, espaces quotients, groupes de Lie, espaces homogènes. Enfin un chapitre fourre-tout aborde certaines relations à la géométrie algébrique ou à l'analyse, avec en particulier les débuts des théories de Hodge et de Morse.*

- *La troisième partie, la plus longue, regroupe les résultats concernant les groupes d'homotopie et les fibrations. Là encore l'initiateur reconnu est Poincaré qui, dès 1895, introduisit le groupe fondamental $\pi_1(X, x_0)$ d'un espace topologique X (pour lui une variété) comme l'ensemble des classes de lacets "à déformation près" d'origine imposée x_0, muni d'une composition des lacets par juxtaposition. C'est Hurewicz qui, en 1935, donna la définition par induction, désormais usuelle, des groupes d'homotopie généraux : l'espace des lacets lui-même, muni de la topologie compacte-ouverte, et d'un point privilégié (le lacet constant en x_0) a un groupe fondamental qui est alors pris comme $\pi_2(X, x_0)$ de l'espace de départ et on itère le procédé. Les groupes $\pi_n(X, x_0)$ ainsi obtenus sont tous commutatifs à partir de $n = 2$.*

Parmi les questions soulevées figurent entre autres celle de la classification d'espaces à partir de leurs groupes d'homotopie et la détermination explicite de groupes d'homotopie d'espaces particuliers. Le premier type est illustré par exemple par le travail de Whitehead (1940) sur les espaces lenticulaires qui fournissent des exemples d'espaces non homéomorphes ayant mêmes groupes d'homotopie, ou l'existence de complexes particuliers ayant pour groupes d'homotopie une famille de groupes (abéliens à partir du deuxième) fixée arbitrairement. Le second est représenté naturellement par le calcul des groupes d'homotopie des sphères (qui n'est toujours pas complètement résolu). Pour $m < n$, $\pi_m(S_n) = 0$ et $\pi_n(S_n) = \mathbb{Z}$, *l'isomorphisme étant fourni par l'application degré. A part quelques cas particuliers, les groupes $\pi_m(S_n)$ pour $m > n$ durent attendre les travaux de Serre de 1951 sur l'homologie et de la cohomologie singulières des espaces fibrés, et entre autres sa transposition à ce cadre des suites spectrales définies par Leray : il en déduisit que $\pi_m(S_n)$ est fini pour n impair ou $m \neq 2n-1$, et somme d'un groupe fini et de $\mathbb{Z}$ pour n pair et $m = 2n-1$. La détermination complète n'est connue que pour de petites valeurs de $m-n$.*

Figurent aussi au programme de cette troisième partie les résultats sur le cobordisme (en particulier la détermination par Thom de la structure de $\bigoplus M_n$ où les M_n est le groupe des classes de variétés de dimension n pour la relation de cobordisme), la naissance de la K-théorie, les opérations de cohomologie (carré de Steenrod par exemple), les relations entre homotopie et homologie, les espaces classifiants, etc.

C'est dire que cette brève esquisse ne fait qu'effleurer le contenu d'un ouvrage extrêmement dense : je vais maintenant essayer de donner une idée sur sa forme. L'aspect le plus déroutant du livre est son titre, pour deux raisons.

La première est la place subalterne accordée à la topologie différentielle. Celle-ci est concentrée en un très court chapitre (6 pages!) au milieu de la première partie, qui explique très rapidement le résultat fondamental de Whitney de 1935 (toute variété différentiable de dimension n peut être plongée dans un $\mathbb{R}^{2n+1}$) et retrace le développement des travaux d'Elie Cartan et de De Rham : l'emplacement du chapitre laisse entendre que son but est surtout de permettre l'interprétation de la cohomologie en termes de formes différentielles, la dualité de Poincaré se lisant comme l'intégration d'une telle forme sur un cycle (pour des compléments, cf. V. Katz, "Differential Forms - Cartan to De Rham", Arch. for Hist. of Ex. Sc., 1985). Une quinzaine de pages dans les applications à l'analyse traite comme je l'ai déjà signalé de théorie de Morse. La part la plus importante est celle relative à la notion de fibré et au cobordisme, c'est-à-dire celle qui entretient les liens les plus étroits avec le développement de la topologie algébrique. En particulier le théorème de Sard et ses nombreuses variantes sont simplement énoncés sans esquisse de leurs preuves, les liens avec la géométrie différentielle, la physique ou l'étude qualitative des équations différentielles (où Poincaré, encore lui, avait aussi joué les initiateurs), ne sont pas directement évoqués.

La seconde est qu'il ne s'agit pas du tout d'un livre d'histoire des mathématiques, mais bien d'un livre de mathématiques! Tout d'abord à cause du rôle très ambigu de la chronologie. L'auteur a en fait choisi un découpage thématique qui lui est propre et n'est justifié explicitement que par des raisons de commodité. Il n'a bien sûr aucune raison de correspondre aux découpages, d'ailleurs fluctuants, qu'ont pu privilégier les acteurs eux-mêmes; ceux-ci ne lui sont que très rarement, et semble-t-il anecdotiquement, confrontés. C'est seulement à l'intérieur d'une même sous-section que la progression est chronologique : ainsi le travail de Brouwer de 1910-1912 sur le degré et l'approximation simpliciale apparaît seulement dans la deuxième partie alors qu'Alexander s'en sert dès le deuxième chapitre de la première partie (c'est-à-dire vers 1914).

L'arbitraire du tri par rapport aux critères d'époque est surtout sensible dans les portions les plus anciennes : ainsi 1924 est l'année de parution de deux livres, l'un de Lefschetz (L'Analysis Situs et la Géométrie Algébrique), l'autre de Lebesgue (L'Analysis Situs), dont seul le premier est étudié ici, sélection qu'il aurait par exemple été nécessaire de commenter dans un travail à vocation historienne.

Autre tarte à la crème des historiens, la modernisation des notations et des concepts sans évaluation détaillée de ses effets : on découvre ainsi dans une note de la page 460 que la notation indicielle (et non exponentielle) pour l'homologie n'apparaît que vers 1945 dans des papiers d'Eilenberg; mais c'est cette notation qui est utilisée tout *au long du livre.*

En fait, ces exigences ne prennent sens que si l'on s'intéresse à la restitution en contexte d'une œuvre ou d'un milieu mathématique donné : celui dans lequel évolue Poincaré n'est pas celui de l'école américaine, ni celui du séminaire Cartan, et la rigueur mathématique n'est pas le seul critère d'évolution en cause. Sources d'inspiration contemporaines et habitudes de pensée éclaireraient aussi les démarches et les voies de prédilection suivies : ainsi les recherches de Poincaré renvoient bien sûr aux travaux antérieurs de Riemann et Betti dans le même sujet (cf. M. Bollinger, "Geschichte der Entwicklung des Homologiebegriffs", Arch. for Hist. of Ex. Sc., 1973), mais peut-être autant à ceux de Picard voire de l'école anglaise sur les invariants (cf. C. Houzel, " Aux origines de la géométrie algébrique", Appendice à H. Gispert, La France mathématique 1870-1914, Cahiers d'Histoire et Philosophie des Sciences, 1991, et E. Scholz, op. cit.). Autre exemple : dès 1905, Brouwer exprimait dans Vie, Art et Mysticisme les prémisses de l'intuitionnisme, lié à une vision très pessimiste de l'existence humaine et du rôle du langage : " Le langage en soi n'a pas de signification... La logique est la vie du cerveau humain : elle peut accompagner la vie en dehors de celui-ci, elle ne peut jamais servir de guide en vertu de ses seuls pouvoirs." L'accent est mis tout particulièrement sur la vérité profonde et seule significative des constructions intuitives personnelles. Or, à la même époque, dans l'Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, largement diffusé, Dehn et Heegard cherchaient au contraire à dégager de la représentation géométrique trop soumise à l'intuition le travail de Poincaré par une axiomatique à valeur combinatoire. Cette tension entre deux choix divergents est à l'œuvre dans beaucoup de recherches du tournant du siècle qui s'intéressaient au comportement déconcertant des fonctions réelles et donnèrent naissance entre autres à la topologie générale. Indépendamment du jugement que la postérité a porté sur les orientations de Brouwer, celles-ci éclairent probablement dès le début de son œuvre les options qu'il a prises dans les débats contemporains et son travail proprement mathématique : leur prise en compte rendrait en tout cas l'attitude de Brouwer vis à vis de l'homologie simpliciale moins "énigmatique" que ne le dit Jean Dieudonné ("puzzling", p. 168).

Les lectrices et lecteurs intéressés par ce type de questions trouveront de nombreuses indications pour y réfléchir au fil des chapitres de ce livre, mais les problématiques historiques n'en constituent nullement le fil directeur et organisationnel. Un détail significatif est l'absence quasi-complète (deux exceptions) de références aux travaux historiques antérieurs sur les mêmes sujets, dont les titres mentionnés dans ce compte rendu ne forment qu'un tout petit extrait. Même pour les recherches plus récentes, souvent illustrées de renseignements sur les relations (professionnelles...) des différents protagonistes, les articles sont fréquemment morcelés en de multiples portions selon les thèmes abordés; leur reconstitution est rendue d'autant plus difficile que le repérage bibliographique est purement numérique (une référence de la forme [Lefschetz, 1930] aurait été à mon avis infiniment préférable à [304], modèle adopté, surtout avec 526 titres dans la bibliographie!). Il est donc souvent difficile d'apprécier pleinement le mouvement général des idées ou la dynamique nouvelle créée par une approche : ainsi le contenu de la thèse de Serre de 1951 est réparti dans les sections concernant l'homologie singulière cubique (p. 151), les fibrations et le relèvement des homotopies (p. 400 et 404), les suites spectrales (p. 443), la notion de suspension (p. 472), le calcul de l'homotopie des sphères (p. 484), la localisation de l'homotopie (p. 495) et les opérations de cohomologie (p. 525)... Signe de richesse sans doute, mais qu'un tel éparpillement un peu arbitraire n'aide pas à saisir.

En fait, comme le disait Lebesgue, le mathématicien ne s'intéresse à l'histoire du passé qu'en fonction de l'avenir, et à ce titre, le livre de Jean Dieudonné est certainement précieux. Il offre un re-

cueil thématique de notions et résultats mathématiques resitués dans leur évolution génétique (pour la distinction historique\ génétique, cf. H. Edwards, Fermat's last theorem, Springer, 1977, Preface) et destinés aux mathématiciens et mathématiciennes, particulièrement aux topologues souhaitant redonner une perspective à leurs outils quotidiens : de nombreuses démonstrations sont expliquées dans leurs grandes lignes avec une précision qui permet d'en saisir les idées directrices. Dans cette optique, le découpage par sujets offre en fait des d'avantages, dont l'accessibilité n'est pas le moindre, car la difficulté technique du livre varie selon les sections. Les notions nécessaires sont présentées au fur et à mesure, en général de manière très compréhensible, et la pente variable autorise et même sollicite une lecture dans le désordre, l'approche ordonnée continue de ce gros volume étant sans doute réservée aux topologues motivés.

Les introductions de chaque chapitre et section sont en fait des résumés assez techniques mais clairs et informatifs de ce qui suit; il est donc utile d'y prendre un premier contact avec l'ensemble du livre pour y dépister les parties les plus alléchantes avant de consulter ensuite une section précise à partir de l'index ou de suivre un ou plusieurs thèmes. Je recommanderai pour ma part tout particulièrement une initiation expresse (30 pages) et efficace au travail de Leray (suites spectrales incluses) dans le quatrième chapitre de la première partie, les chapitres de la seconde partie qui sont autant de courts et utiles aperçus sur des sujets variés et tous intéressants, l'introduction à l'homologie des espaces fibrés, et, last but not least, un cadeau p. 580 (vu son emplacement qui semble le vouer à la clandestinité, il est destiné sans doute à récompenser les plus émérites, mais on peut certainement tricher et le lire d'entrée) : une présentation vivante et digeste des genres des surfaces et du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch.

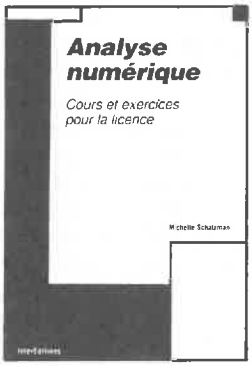
Si ce livre n'est ni une histoire des mathématiques, ni un manuel classique de topologie algébrique, il est bourré de mathématiques intéressantes, à déguster par morceaux, et certainement très stimulant par les questions enchevêtrées qu'il ne manque pas de susciter.

Catherine GOLDSTEIN
Université de Paris Sud

N O U V E A U T É S

Analyse numérique
Cours et exercices pour la licence
Michelle Schatzman

Ce cours de mathématiques s'adresse tout particulièrement aux étudiants de licence et leur propose des clés pour aborder certains problèmes fondamentaux d'analyse numérique. L'algèbre et l'analyse fonctionnelle s'y trouvent étroitement associées à la partie strictement numérique. Ainsi l'étude des formes quadratiques et du quotient de Rayleigh fait appel à l'algèbre linéaire et à l'analyse des opérateurs autoadjoints, tandis qu'approcher des fonctions par des polynômes permet d'énoncer aussi bien des résultats algébriques (propriétés des polynômes orthogonaux, formule de Newton d'interpolation) qu'analytiques (théorèmes de densité et formules d'erreur).



*1991, 357 pages, 190 F**

Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser
Serge Alinhac
Patrick Gérard

Ce cours, fondé sur l'enseignement dispensé par les auteurs à l'Ecole Normale Supérieure dans le cadre du magistère de mathématiques fondamentales et appliquées et d'informatique, s'adresse aux étudiants de troisième cycle en mathématiques et peut également intéresser les chercheurs désireux d'aborder des sujets qui ne leur sont pas familiers. A partir de notions, supposées connues, d'analyse fonctionnelle, d'analyse de Fourier et de théorie des distributions, cet ouvrage présente des concepts importants qui sont à la base de développements récents et aboutit à l'énoncé de vrais théorèmes : régularité elliptique micro locale, pro-pagation des singularités, existence de solutions de systèmes hyper-boliques quasi linéaires, existence de prolongements isométriques et théorème de Nash-Moser.

Collection Savoirs actuels
*1991, 192 pages, 195 F**
Publié en coédition avec les Editions du CNRS

*Prix public TTC au 15.7.91

InterEditions
7, rue de l'Estrapade - 75005 Paris

EN MARGE DE L'APOLOGIE DE WITTEN

Daniel BENNEQUIN (Université de Strasbourg)

– I –

1. Mécanique quantique et théorie de Morse

Pour décrire un système de Mécanique Quantique, on se donne un espace vectoriel V (en général complexe et hilbertien); un *état* du système est une droite complexe dans V (on le repère par un vecteur ψ qu'on peut choisir unitaire mais il demeure une indétermination de phase), et un *observable* du système est un opérateur A (hermitien et souvent non borné) dans V. L'*énergie* H est l'observable qui provoque l'évolution temporelle du système :

sur les états $\quad i\hbar\dot{\psi} = H\psi$ (Schrödinger),

sur les observables $\quad i\hbar\dot{v} = [v, H]$ (Heisenberg).

Une *symétrie* du système est un opérateur (unitaire) U qui commute avec H.

Les coefficients d'un observable $\langle\psi''|A\psi'\rangle$ s'appellent des amplitudes (de probabilités).

Le système le plus simple est une particule libre (il s'agit plutôt d'une contrainte librement consentie) : V est l'espace des fonctions de carré intégrable sur une variété riemannienne M et l'énergie H_0 est (moins) le laplacien. (Si M est $\mathbb{R}^3$, les opérateurs de déplacement $\frac{d}{dx}$, *etc.* ou les opérateurs de rotation $r_x = y\frac{d}{dz} - z\frac{d}{dy}$, *etc.* sont des générateurs de symétries : $U = \exp(A)$.)

Un peu plus compliqué est le système avec interaction potentielle $H = H_0 + u$, où u est l'opérateur de multiplication par une fonction sur M.

Un exemple de système *supersymétrique* est le laplacien de Hodge-de Rham $H_0 = dd^* + d^*d$ sur l'espace $V = \Omega = \bigoplus_{p\geq 0} \Omega^p$ des formes différentielles de tous les degrés p sur une variété riemannienne M; les ("générateurs de") supersymétries sont $d + d^*$ et $i(d - d^*)$; ils échangent formes de degrés impairs Ω^- et formes de degrés pairs Ω^+.

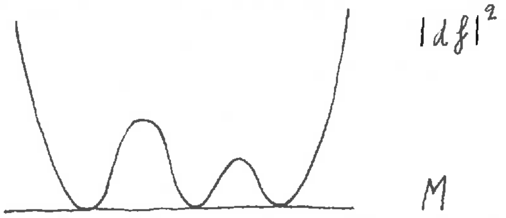
Witten étudie (dans (1)) une déformation de ce système : si f est une fonction (C^∞) sur M et t un paramètre réel (qu'il faudra bientôt penser positif et très grand),

$$H_t = e^{-tf} H_0 e^{tf}$$

qui s'écrit encore

$$H_t = H_0 + u_t + t \cdot K(D^2 f)$$

où u_t est le potentiel scalaire $t^2|df|^2$, et où $K(D^2f)$ est un endomorphisme du fibré $\Lambda(T^*M)$.



Ce système conserve des supersymétries

$$e^{-tf}de^{tf} + e^{tf}d^*e^{-tf} \quad \text{et} \quad i(e^{-tf}de^{tf} - e^{tf}d^*e^{-tf})\ ;$$

on posera $d_t = e^{-tf}de^{tf}$ et alors $d_t^* = e^{tf}d^*e^{-tf}$.

Les états d'énergie nulle ($H_t\psi = 0$) sont supersymétriques (annulés par les supersymétries) et, à la multiplication près par e^{-tf} ce sont les mêmes que ceux de H_0, à savoir les formes harmoniques. En degré p il y en a b_p qui sont linéairement indépendants, où b_p est le $p^{\text{ième}}$ nombre de Betti de M.

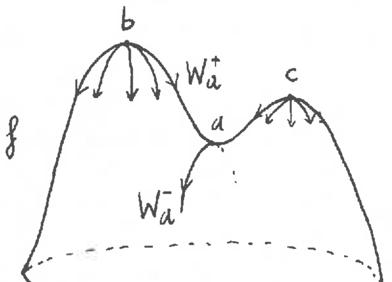
Supposons M fermée (c'est-à-dire compacte sans bord) et f de Morse (c'est-à-dire à points critiques isolés et non dégénérés), et notons m_p le nombre de points critiques d'indice p (c'est-à-dire où D^2f a p valeurs caractéristiques négatives); alors Witten fait les observations suivantes dans (1).

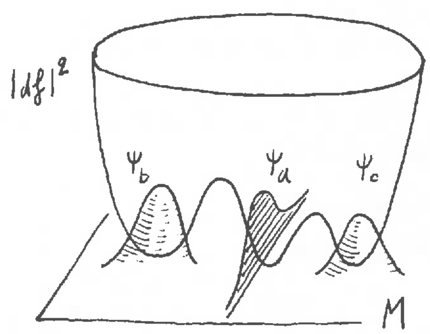
Lorsque t tend vers $+\infty$ la plupart des valeurs propres de H_t s'échappent vers $+\infty$ (comme une puissance de t), mais quelques-unes restent bornées (en fait elles tendent exponentiellement vite vers 0); et l'on peut dire précisément à quoi ressemblent les états propres correspondants (états "accessibles") :

ce sont des formes homogènes, il y en a m_p en degré p, et chacune d'elles se concentre le long de la variété instable W_x^- de $-\operatorname{grad}(f)$ en un point critique x.

(Si $(x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées sur M centrées en x et $(x_1, \ldots, x_p)$ des coordonnées sur W_x^-, notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les valeurs caractéristiques de $D_x^2 f$, alors ψ_x ressemble à la gaussienne :

$$dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p e^{-\frac{1}{2}\sum_1^n |\lambda_i| x_i^2}\ .)$$





De plus, entre deux états ψ_a et ψ_b concentrés près des points critiques a et b d'indices respectifs $p-1$ et p l'amplitude $\langle b|d_t a\rangle$ est asymptotiquement égale à

$$e^{-t(f(b)-f(a))}n(a,b),$$

où $n(a,b)$ est un nombre entier relatif qui compte la façon dont la variété *instable* W_b^- rencontre la variété *stable* W_a^+ le long des trajectoires de $-\operatorname{grad} f$ qui mènent de b à a. (Ceci est vrai si f est "générique".)

Le nombre $n(a,b)$ compte (algébriquement) le nombre d'*instantons* de b à a; l'amplitude $\langle b|d_t a\rangle$ $(= \langle a|d_t^* b\rangle)$ calcule l'*effet tunnel* dans le système en mécanique quantique.

Le nombre $n(a,b)$ est aussi le *nombre d'incidence* pour le complexe associé à f par Thom, Milnor, Smale, Bott... $\langle a, \partial b\rangle$. (Voir l'exposé de [Bott]).

De là on peut déduire facilement les *inégalités de Morse* :

$$m_0 \geq b_0$$
$$m_1 - m_0 \geq b_1 - b_0$$
$$m_2 - m_1 + m_0 \geq b_2 - b_1 + b_0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et l'égalité de Poincaré et Hopf :

$$m_0 - m_1 + m_2 - m_3 + \cdots = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \cdots$$

qui exprime la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M) = \Sigma(-1)^\ell b_\ell$ de la variété M en fonction des points critiques de f.

Avec cette manière de prendre les choses, on arrive à décrire toute l'homologie entière de M à l'aide d'une variante de la théorie des formes harmoniques; en quelque sorte, Witten interpole entre le complexe de Hodge-de Rham et le complexe de Thom-Smale :

si C_p est l'espace vectoriel engendré par les états propres de H_t (avec t grand) dans Ω^p associé aux petites valeurs propres, et si l'on pose $\partial(\psi_b) = \sum_a n(a,b)\psi_a$, le $p^{\text{ième}}$ groupe de Betti de M, $H_p(M)$ est le $p^{\text{ième}}$ groupe d'homologie du complexe :

$$C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_p \xrightarrow{\partial} C_{p-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow C_0.$$

(c'est-à-dire $H_p = \ker(\partial : C_p \to C_{p-1}))/(\operatorname{Im}(\partial : C_{p+1} \to C_p))$.)

L'article (1) ne fait pas la démonstration mathématique de tout ça, il le justifie par des principes physiques et le "calcul des perturbations"; cependant l'Analyse semi-classique retrouve ces résultats (voir [Helffer et Sjöstrand]).

Comme références d'ensemble, on peut consulter :

(1) [WITTEN] *Supersymmetry and Morse theory*, J. Differential Geometry **17** (1982) 661–692.

[BOTT] *Morse Theory indomitable*, Publ. Math. IHES **68** (1988) 99–114.

[HENNIART] *Les inégalités de Morse (d'après E. Witten)*, Sém. Bourbaki 617 (1983/84), Astérisque 121–122.

[HELFFER-SJÖSTRAND] *Points multiples en mécanique semi-classique IV, étude du complexe de Witten*, Comm. part. Diff. Equ. **10** (1985) 245–340.

voir aussi :

[THOM] *Sur une partition en cellules associée à une fonction sur une variété*, C.R. Acad. Sci. Paris **228** (1949) 661–662.

[SMALE] *Differentiable dynamical systems*, Bull. A.M.S. **73** (1967) 747.

[MILNOR] *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton (1965).

2. Espaces de lacets, localisation et théorèmes d'indices

Les *modèles σ non linéaires* les plus simples décrivent une théorie des champs en dimension $2 = 1 + 1$ (c'est-à-dire une dimension d'espace et une dimension de temps), à valeurs dans une variété riemannienne. Ici, un champ classique "possible" du *modèle* sera une application f du cyclindre plat $S^1 \times \mathbb{R} = C$ à l'intérieur d'une variété riemannienne compacte M de dimension n et l'action classique "euclidienne" sera (un multiple de) l'intégrale sur C du carré de la norme de la dérivée de f. L'espace des configurations, qui correspond au M du paragraphe 1, décrit les possibilités à temps constant, c'est donc l'espace $X = \mathcal{L}(M)$ des lacets paramétrés dans M (applications du cercle S^1 dans M).

En fait ces champs proviennent de modèles d'interactions entre spineurs en dimension $4 = 3 + 1$, et la lettre σ désignait un champ scalaire ajouté par Gellman et Levy à un triplet de générateurs de l'algèbre de Lie su_2 (pions $\vec{\pi}$); la non-linéarité est apparue lorsque $(\sigma, \vec{\pi})$ s'est mis à prendre ses valeurs dans une sphère S^3. Mais ces modèles servent à étudier les "cordes" à basse énergie (et dans ce cas ils sont en dimension 2); les théories de super-cordes donnent lieu aux modèles supersymétriques.

Dans ces modèles *σ-non linéaires supersymétriques*, les fonctions sur X sont remplacées par des formes différentielles de tous degrés sur X, et le hamiltonien doit être un analogue du laplacien de Hodge-de Rham en dimension infinie.

La "variété" X est natuellement munie d'une structure riemannienne : un vecteur tangent à X en un point γ de X est une variation de γ, c'est-à-dire un relèvement du lacet γ au fibré tangent $T(M)$; le produit scalaire de deux variations sera l'intégrale sur S^1 du produit scalaire dans $T(M)$.

Pourtant la définition des opérateurs d et d^* s'avère délicate et on s'attend à d'assez mauvaises propriétés pour un H_0 qui serait $dd^* + d^*d$; un meilleur comportement est espéré avec les dérivées extérieures "équivariantes" : $d_s = d + si(Z)$; dans cette formule, s est un paramètre $\neq 0$, et $i(Z)$ désigne le produit intérieur par le champ de vecteurs Z sur X qui engendre les rotations à la source des lacets $(\gamma(\theta) \mapsto \gamma(\theta+\alpha))$. (Le champ Z respecte la métrique de X).

Le hamiltonien $H_s = d_s d_s^* + d_s^* d_s$ est mieux défini en mathématiques (c'est le travail de [Bismut] avec le pont brownien) et il a de bonnes propriétés "phénoménologiques" (quand M est S^n ou $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$, n très grand, on y retrouve certains aspects de la physique des particules; voir [Polyakov]).

Les opérateurs $Q_s^+ = d_s + d_s^*$ et $Q_s^- = i(d_s - d_s^*)$ sont des *supersymétries* de la théorie : l'espace vectoriel Φ qui quantifie le système est un espace de formes différentielles sur X; il se décompose en "formes paires" et "formes impaires" Φ^+ et Φ^-, échangées par Q_s^+ et Q_s^-.

(Pour étudier H_s, Witten introduit encore les déformations $d_{s,t} = e^{-tf} d_s e^{tf}$, où f est une fonction appropriée sur X, et les états d'énergie nulle du $H_{s,t}$ correspondent à ceux de H_s).

Witten considère aussi les opérateurs hermitiens

$$Q_{1,s} = \sqrt{i}\, d_s + \frac{1}{\sqrt{i}} d_s^* \quad \text{et} \quad Q_{2,s} = \frac{1}{\sqrt{i}} d_s + \sqrt{i}\, d_s^*$$

(ainsi que leurs déformations $Q_{a,s,t}$); si l'on pose

$$P_s = 2is(i(Z) \circ d + d \circ i(Z)),$$

on a

$$Q_1Q_2 + Q_2Q_1 = 0\,, \quad Q_1^2 = H + P\,, \quad Q_2^2 = H - P$$

(où les indices s et t sont sous-entendus; au § 3, $s = -\frac{1}{2}$).

Ces relations sont celles d'une théorie supersymétrique relativiste avec (H, P) vecteur (énergie, moment).

(Dans un espace-temps de dimension 2, si R est le générateur des transformations de Lorentz continues, on doit avoir $[R, H] = P$, $[R, P] = H$, $[R, Q_1] = \frac{1}{2}Q_1$, $[R, Q_2] = -\frac{1}{2}Q_2$, et (Q_1, Q_2) se transforme comme un spineur).

Les relations analogues pour Q^+ et Q^- sont les suivantes : $(Q^+)^2 = (Q^-)^2 = H$, $Q^+Q^- + Q^-Q^+ = 0$, car $d_s^2 = -d_s^{*2} = \frac{1}{2i}P$ (traduisant que Z est une champ de Killing).

Lorsque M est munie d'une structure spinorielle, il existe sur Φ un opérateur de symétrie γ_5, tel que $\gamma_5^2 = 1$, généralisant l'étoile de Hodge en dimension infinie; les projecteurs $\frac{1+\gamma_5}{2}$ et $\frac{1-\gamma_5}{2}$ décomposent Φ en formes autoduales et antiduales, Φ_+ et Φ_-, et Q_1, Q_2 anticommutent avec γ_5.

L'opérateur qui remplace γ_5 pour la décomposition $\Phi^+ \oplus \Phi^-$ est habituellement noté $(-1)^F$ par les physiciens (F est le "nombre de fermions").

L'espoir (justifié !?), c'est que les traces de γ_5 et de $(-1)^F$ sont bien définies et données par des théorèmes d'indice.

L'ensemble des points fixes de Z est l'ensemble des lacets qui se réduisent à un point, c'est-à-dire la variété M elle-même; si X était une variété de dimension finie et que l'on se trouvait dans une situation analogue, avec un champ de Killing Z d'une métrique riemannienne sur X, dont l'ensemble des points fixes est une variété M (alors totalement géodésique), et cetera, on aurait plein de relations topologiques entre X et M, données par les opérateurs d, Q, H ; c'est ce qu'ont montré Atiyah, Singer, Hirzebruch, Bott,... par exemple :

l'indice de $Q^+ : \Phi^+ \longrightarrow \Phi^-$ (c'est-à-dire $\mathrm{Tr}((-1)^F) = \dim \mathrm{Ker}\, Q^+ - \dim \mathrm{Coker}\, Q^+$) serait égal à la caractéristique d'Euler $\chi(M)$, on en déduirait que X et M ont la même caractéristique d'Euler;

si M était spinorielle, l'indice de $Q_1 : \Phi_+ \longrightarrow \Phi_-$ (c'est-à-dire $\mathrm{Tr}(\gamma_5)$) serait égal à la signature de M, $\sigma(M)$ (*i.e.* la différence entre la dimension des formes harmoniques autoduales (de degré pair) et la dimension des formes harmoniques antiduales (également de degré pair), on aurait donc $\sigma(X) = \sigma(M)$;

enfin la dimension du noyau de $H_s : \Phi \longrightarrow \Phi$ (somme des nombres de Betti de X), $b(X)$ serait supérieure à la somme des nombres de Betti de M, d'où l'inégalité

$$b(X) \geq b(M).$$

Dans (1), Witten donne des arguments heuristiques et "physiques" (voir aussi (2)), pour qu'il en aille de même avec l'espace des lacets X et la variété M. C'est en partie justifié mathématiquement par Bismut, Freed, Quillen, Taubes,... et cela recouvre de l'analyse dure (*cf.* [Bismut]). (Pour les formes différentielles sur un espace de lacets, voir [Getzler, Jones, Petrack] et [Jones, Léandre]).

Une conséquence fâcheuse pour la phénoménologie des σ-modèles est que leurs supersymétries ne sont jamais brisées (à cause de $b(X) \geq b(M) \geq 2$ lorsque M est fermée, *i.e.* compacte sans bord). Ceci n'arrête pas Witten qui se demande si, après tout, la relation entre l'indice des opérateurs elliptiques géométriques sur M et l'analyse sur l'espace des lacets $X = \mathcal{L}(M)$ ne pourrait pas expliquer quelques mystères des formules d'indices.

Effectivement, nous allons voir qu'en appliquant (naïvement ?) une *formule exacte de localisation*, qui s'appelle, en dimension finie, principe de la phase stationnaire de Duistermaat-Heckman, on peut retrouver ainsi la formule de Hirzebruch pour l'*indice d'un opérateur de Dirac*.

(Des constructions analogues donnent les indices de suffisamment d'opérateurs elliptiques au-dessus de M pour retrouver la formule d'Atiyah-Singer générale par des arguments de K-théorie, *cf.* [Bismut] et [Atiyah-Bott-Patodi]).

Soit $\gamma \in X$ un lacet dans M; la dérivée covariante ∇_γ le long de γ est une application antisymétrique de $T_\gamma(X)$ dans lui-même, et c'est presque une structure symplectique ω sur X (son noyau est de dimension finie; par exemple, il contient Z quand γ est une géodésique).

De plus, lorsque M est orientée, de dimension paire et munie d'une structure spin (c'est-à-dire un relèvement à Spin(n) du groupe structural $SO(n)$ de $T(M)$), l'espace X est orienté naturellement, et le *déterminant régularisé* de ∇_γ s'interprète comme le carré du Pfaffien de la forme ω au point γ; on peut le calculer (avec les règles d'usage en théorie des champs, qui remontent à Singer essentiellement), et l'on trouve

$$\mathrm{Pff}_\gamma(\omega) = \chi^+(h_\gamma) - \chi^-(h_\gamma),$$

où h_γ est l'holonomie le long de γ et où χ^+ et χ^- sont les caractères des représentations spinorielles paire et impaire, spin$^+$ et spin$^-$ (c'est-à-dire $(\frac{1\pm\gamma_5}{2})$ spin) de Spin(n).

Comme la variété M est spin, on peut définir un fibré des spineurs $\not S$ sur M qui se scinde en $\not S^+ \oplus \not S^-$ (à l'aide de $\frac{1\pm\gamma_5}{2}$), et un opérateur de Dirac $\not D$ sur $\not S$ qui échange $\not S^+$ et $\not S^-$; le laplacien associé est $\not H = \not D^2$, on note $\not H^+ = \not D^* \not D \colon \not S^+ \to \not S^+$ et $\not H^- = \not D \not D^*$ $(= \not D^* \not D) : \not S^- \to \not S^-$.

Depuis Atiyah, Singer, Bott, Patodi,... (*cf.* [Atiyah-Bott-Patodi]) on sait qu'il faut écrire :

$$\mathrm{Indice}(\not D \colon \not S^+ \to \not S^-) = \mathrm{Tr}\, e^{-\frac{1}{2t}\not H^+} - \mathrm{Tr}\, e^{-\frac{1}{2t}\not H^-}$$

(pour tout réel $t > 0$),

et depuis quelque temps, on a pris l'habitude d'écrire

$$\mathrm{supertrace}(\not H) = \mathrm{Tr}(\not H^+) - \mathrm{Tr}(\not H^-) = s\,\mathrm{Tr}(\not H),$$

donc

$$\mathrm{Ind}(\not D) = s\,\mathrm{Tr}\, e^{-\frac{1}{2t}\not H}.$$

Introduisons l'énergie $E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 |D\gamma|^2 ds$; la formule qui généralise celle de Feyman-Kac s'écrit :

$$\mathrm{Tr}\, e^{-\frac{1}{2t}\not H^\pm} = \int_X \left(e^{-tE(\gamma)} d\gamma\right) \chi^\pm(h_\gamma),$$

où $e^{-tE(\gamma)}d\gamma$ est une mesure de Wiener, un objet qui existe, et $d\gamma$ une très hypothétique "mesure de Liouville".

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(\not D) &= \int_X e^{-tE(\gamma)} d\gamma (\chi^+(h_\gamma) - \chi^-(h_\gamma)) \\ &= \int_X e^{-tE(\gamma)} d\gamma\, \mathrm{Pff}(\omega_\gamma) \end{aligned}$$

Si X était de dimension finie ℓ l'intégrale qui est là vaudrait

$$\int_X \frac{\omega^\ell}{\ell!} e^{-tE(x)},$$

or c'est exactement ce genre d'intégrale que Duistermaat et Heckman calculent par "localisation" sur M.

En effet, la fonction $E(\gamma)$ est le hamiltonien du champ Z par rapport à la structure symplectique ω, et Z engendre une action symplectique du cercle; or, c'est avec cette hypothèse que Duistermaat et Heckman savent exprimer l'intégrale ci-dessus. Le résultat est une intégrale sur M (points fixes de Z) qui dépend de ω et de E (qui valent 0 ici sur M), des classes de Chern du fibré normal $N(M)$ à M dans X, et des caractères de l'action de S^1 sur $N(M)$:

$$\int_X e^\omega e^{-tE(x)} = \int_M \frac{e^\omega e^{-tE|M}}{\prod\limits_{1\leq j\leq k} (tm_j - i\nu_j)},$$

où $2k$ est la codimension de M dans X, et, si $N = \overset{k}{\underset{1}{\oplus}} N_j$ est la décomposition irréductible sous l'action du cercle de $N(M)$, $m_j \in \mathbb{Z}$ est l'exposant de S^1 sur N_j et ν_j la première forme de Chern du fibré en droite complexe N_j.

(Pour calculer l'intégrale de droite, il faut développer formellement en polynôme des ν_j, multiplier dans $\Omega(M)$ par e^ω et retenir la forme de degré n; notons que le dénominateur dans l'intégrant peut aussi s'écrire :

$$\Pi(tm_j - i\nu_j) = \mathrm{Pff}\,(\frac{tJ+R}{2\pi})$$

où J est l'endomorphisme antisymétrique de $N(M)$ qui engendre l'action du cercle (vu comme 2-forme sur N) et où R est la courbure (sur deux vecteurs tangents à M, elle respecte N et commute avec J).) (voir [Duistermaat-Heckman], [Bismut]).

Miracle : si on applique la formule à l'espace des lacets X de M, cette intégrale sur M est celle de la forme $\widehat{A}$ de Hirzebruch (*i.e.* $\widehat{A} : \Pi \frac{\alpha_j/2}{sh\,\alpha_j/2}$, quand le caractère de Chern $\mathrm{ch}(M)$ vaut $\Pi(1+\alpha_j)$), donc

$$\mathrm{Ind}(\not{D}) = \widehat{A}(M).$$

(En effet, dans ce cas $N(M)$ est donné par les séries de Fourier sans terme constant à valeurs dans le fibré tangent complexifié de M, on a donc :

$$\begin{aligned}\prod(m_j - i\nu_j) &= \prod_{p=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n}(p^2+\alpha_j^2)\\ &= (\prod_{p=1}^{\infty} p^2)^n \prod_{1}^{n} \frac{sh\,\pi\alpha_j}{\pi\alpha_j}\end{aligned}$$

mais $\prod_1^{\infty} p = \sqrt{2\pi}$ (une formule qu'Euler n'aurait pas reniée), et le terme de degré n dans l'inverse de ce produit coïncide avec celui du $\widehat{A}$, voir [Atiyah] et [Bismut]).

Quelques références sur ce paragraphe, en plus de [Witten] (1);

(2) [WITTEN] *Fermion quantum numbers in Kaluza-Klein theory*, Shelter Island conference, M.I.T. Press (1985).

[ATIYAH] *Circular symmetry and stationary-phase approximation*, Colloque Schwartz, Astérisque (1985).

[BISMUT] *Localization formulas, superconnections and the index theorem for families*, Commun. in Math. Phys. n° 108 (1986).

[DUISTERMAAT-HECKMAN] *On the variation in the cohomology of the symplectic form on the reduced phase-space*, Invent. Math. **69** (1982).

[GETZLER, JONES, PETRACK] *Differential forms on loop spaces and the cyclic bar complex*, (à paraître).

[JONES, LÉANDRE] *L^p Chern forms on loop spaces*, (à paraître).

voir aussi

[ATIYAH-SINGER] *The index of elliptic operators*, I à V, Annals of Maths (1968).

[ATIYAH-BOTT-PATODI] *On the heat equation and the index theorem*, Inventiones Math. **19** (1973).

[POLYAKOV] *Gauge fields and strings*, Contemporary concepts in physics, vol. 3, Harwood academic publishers (1987).

3. Genres elliptiques, super-cordes et formes modulaires

Un *genre* associe à chaque variété fermée orientée M un nombre complexe $\varphi(M)$ de sorte que le genre d'une réunion disjointe est la somme des genres, que le genre d'un produit est le produit des genres et que le genre est le même pour deux variétés cobordantes. (Dans ce numéro les variétés dont on calcule les genres auront des dimensions multiples de 4, et on posera $\varphi = 0$ pour les autres).

Des exemples de genres sont la signature $\sigma(M)$, donnée par la formule de Hirzebruch $\langle M, L(TM)\rangle$ (où L est la classe caractéristique exponentielle qui vaut $c/th(c)$ pour un fibré réel orienté de rang 2 de classe d'Euler c), et aussi le genre $\widehat{A}(M)$, discuté au paragraphe précédent, qui fournit l'indice des opérateurs de Dirac des variétés spinorielles (pour $\widehat{A}$ la fonction génératrice est $(c/2)/sh(c/2)$).

En 1986, pour résoudre un problème posé en 1983 par Witten sur les indices équivariants des opérateurs de Dirac tordus (voir un peu plus loin), S. Ochanine associa un genre à toute *intégrale elliptique* (sous forme quartique de Jacobi), de façon que :

$$\sum_{n\geq 0} \varphi(\mathbb{P}^{2n}(\mathbb{C}))\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-2\delta t^2+\varepsilon t^4}} \cdot$$

Cette expression est le logarithme du genre φ; il dépend de deux paramètres complexes δ et ε et se note $g(x)$; le genre en question est baptisé *elliptique* à cause de la formule de son logarithme.

Le nombre δ s'interprète comme $\varphi(\mathbb{P}^2(\mathbb{C}))$ et le nombre ε comme $\varphi(\mathbb{P}^2(\mathbb{H}))$. Les genres L et $\widehat{A}$ sont des dégénérescences de genres elliptiques : si $\delta = \varepsilon = 1$, on a $g(x) = \operatorname{arg\,th} x$ et $\varphi(M) = \sigma(M)$; si $\varepsilon = 0$ (et $\delta = -1/8$), φ donne le genre $\widehat{A}$ (dans ce cas $g(x) = 2 \operatorname{arg\,sh} x/2$).

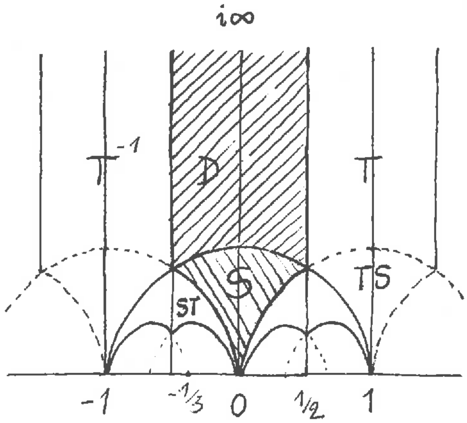
Afin de mettre ensemble tous les genres elliptiques, on introduit le réseau Γ dans $\mathbb{C}$ des périodes de l'intégrale g et la courbe elliptique $E = \mathbb{C}/\Gamma$ (qui est non singulière si le discriminant $\Delta = \varepsilon(\delta^2 - \varepsilon)^2$ est différent de zéro); l'inverse $s(z)$ de $g(x)$ est Γ-périodique, c'est une fonction elliptique impaire qui possède deux pôles simples dans E et qui s'annule sur une demi-période non nulle. Si ω et ω' sont deux générateurs de Γ on pose $\tau = \pm\frac{\omega'}{\omega}$, pour que la partie imaginaire $\mathrm{Im}(\tau)$ soit strictement positive, et puis $q = \exp(2\pi i\tau)$. Lorsque δ est multipliée par λ^2, où $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, et ε par λ^4, le réseau Γ est changé en $\lambda^{-1}\Gamma$ et $\varphi(M)$ en $\lambda^{\frac{n}{2}}\varphi(M)$ si $n = \dim(M)$.

Une fonction $f(\tau)$ définie dans le demi-plan supérieur H est une *forme modulaire* de poids $2k$ (de niveau 1) si elle est holomorphe, qu'elle se prolonge continûment en $i\infty$, et qu'elle satisfait

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{2k} f(\tau) \tag{1}$$

chaque fois que a, b, c, d sont des nombres entiers relatifs tels que $ad - bc = 1$; de même f est une forme modulaire (de niveau 2) de poids $2k$, pour le sous-groupe $\Gamma_0(2)$ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, si elle est holomorphe dans H, qu'elle se prolonge continûment en $i\infty$ et en 0 et qu'elle satisfait (1) à la condition que le nombre c soit pair. (Le groupe $\Gamma_0(2)$ est un sous-groupe d'indice 3 non distingué de $SL_2(\mathbb{Z})$; $H/\Gamma_0(2)$ est l'ensemble des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques munies d'une structure spin non triviale.)

Il est possible de définir δ et ε en fonction de τ pour que les $\varphi(M)$ soient formes modulaires de niveau 2 et de poids $\frac{1}{2}\dim(M)$ (Landweber, Stong, D. et G. Chudnovsky, Zagier); on note alors $\varphi_q(M)$ le genre, et on l'appelle *genre elliptique universel*; c'est une forme modulaire de niveau 2 et de poids $\dim(M)/2$ pour $\Gamma_0(2)$.



La pointe en $q = 1$ ($\tau = 0$) correspond à la signature et l'autre pointe en $q = 0$ ($\tau = i\infty$) au genre $\widehat{A}$.

La formule du s de Landweber et Stong pour le réseau $\Gamma = 2\pi i(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ est :

$$s(u) = 2\,\mathrm{sh}\,\frac{u}{2}\prod_1^\infty\Big(\frac{(1-q^n e^u)(1-q^n e^{-u})}{(1-q^n)^2}\Big)^{(-1)^n}$$

(voir Zagier dans [Landweber et al.]); alors, si l'on définit pour tout fibré E les sommes formelles

$$\Lambda_t(E) = \bigoplus_{k\geq 0} t^k \Lambda^k(E)$$

$$S_t(E) = \bigoplus_{k\geq 0} t^k S^k(E),$$

des puissance alternées et symétriques, et le produit infini

$$\begin{aligned}\Theta_q(E) &= \bigotimes_{n\geq 1} \Lambda_{q^{\frac{2n-1}{2}}}(E) \bigotimes_{n\geq 1} S_{q^n}(E)\\ &= 1 + \sqrt{q}E + q(E\oplus\Lambda^2 E) + q\sqrt{q}(E\oplus E\otimes E\oplus\Lambda^3 E) + \cdots\end{aligned}$$

il vient

$$\varphi_q(M) = \langle M, \widehat{A}(M)\,\mathrm{ch}\,\Theta_q(T(M))\rangle\Big(\prod_1^\infty \frac{1+q^{m-\frac{1}{2}}}{1-q^m}\Big)^{-\dim(M)} \tag{2}$$

Avec un autre choix de δ et ε en fonction de q, qui revient à faire la transformation $S(\tau) = \frac{-1}{2\tau}$ et à changer u en $\frac{u}{\tau}$, on trouve un autre genre φ'_q et une autre fonction elliptique :

$$s'(u) = 2\,\mathrm{th}\,\frac{u}{2}\prod_1^\infty\Big(\frac{1+q^n}{1-q^n}\Big)^2\prod_1^\infty\frac{(1-q^n e^u)(1-q^n e^{-u})}{(1+q^n e^u)(1+q^n e^{-u})}$$

(toujours avec le réseau $2\pi i(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$); et, en posant

$$\Theta'_q(E) = \bigotimes_{n\geq 1} \Lambda_{q^n}(E) \bigotimes_{n\geq 1} S_{q^n}(E) \otimes \Lambda(E\otimes\mathbb{C})^{\frac{1}{2}}$$

il vient

$$\text{(3)} \qquad \varphi'_q(M) = \langle M, \widehat{A}(M)\,\mathrm{ch}\,\Theta'_q(T(M)) > \Big(\prod_1^\infty \frac{(1+q^m)}{(1-q^m)}\Big)^{-\dim M}$$

Remarques. —

1)

$$\prod_1^\infty \frac{1+q^m}{1-q^m} = \frac{\eta(q^2)}{\eta^2(q)} \quad \text{si } \eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \textstyle\prod_1^\infty (1-q^m) \quad \text{(eta de Dedekind)}$$

$$= \frac{1}{\Theta(0)} \quad \text{si } \Theta(v) = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2} \cos(2nv) \text{ (theta de Jacobi)}$$

et

$$\prod_1^\infty \frac{1+q^{m-\frac12}}{1-q^m} = q^{-\frac{1}{48}} e^{-\frac{i\pi}{24}} \frac{\eta(-\sqrt{q})}{\eta^2(q)} = \frac{\Theta_1(0)^{\frac12}}{\prod_1^\infty (1-q^m)^{\frac32}}$$

si $\Theta_1(v) = 1 + 2\sum\limits_1^\infty q^{n^2}\cos(2nv)$ (theta de Riemann).

2) Le discriminant Δ de la courbe elliptique $\mathbb{C}/\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$ est égal à $(2\pi)^{12}$ $\eta(q)^{24}$; c'est une forme modulaire de poids 12 (voir [Serre]).

3) La série caractéristique de Hirzebruch associée au genre φ est donnée par $P(u) = \frac{u}{s(u)}$ où $s = g^{-1}$; on retrouve φ à partir de P :

$$\varphi(M) = \langle M, \Pi P(\alpha_i)\rangle$$

si $\mathrm{ch}(M) = \Pi(1+\alpha_i)$.

Quand la variété M est spin, les coefficients de la série entière $\varphi_q(M)$ ainsi que ceux de $\varphi'_q(M)$ sont des entiers relatifs (sinon ils appartiennent à $\mathbb{Z}[1/2]$); en fait, $\varphi'_q(M)$ est un caractère virtuel [Segal (1)] : il existe deux représentations unitaires projectives $\Phi^\pm_M$ du groupe $\mathrm{Diff}(S^1)$ des difféomorphismes du cercle telles que :

$$\varphi'_q(M) = \mathrm{Tr}\left(e^{2\pi i\tau P}|\Phi^+_M\right) - \mathrm{Tr}\left(e^{2\pi i\tau P}|\Phi^-_M\right),$$

où P est le générateur des rotations sur S^1.

Une explication de toutes ces coïncidences est venue de la *théorie quantique des champs* : s'inspirant du travail de Schellekens et Warner sur les anomalies en théorie des cordes, Witten interprète $\varphi'_q(M)$ (et $\varphi_q(M)$) comme l'indice équivariant d'un opérateur agissant au-dessus de l'espace des lacets X de M; cet opérateur est naturel en théorie des cordes et super-cordes, son indice peut se calculer par une méthode de localisation dans l'espace des lacets $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}\mathcal{L}(M)$ (*cf.* § 2) et Witten sait analyser ses propriétés avec l'intégrale de Feynman de la théorie des champs. Nous allons voir que pour φ'_q, ce n'est pas autre chose que l'opérateur de la signature $Q_1 : \Phi_+ \to \Phi_-$ rencontré p. 75 et 76.

Soit M une variété riemannienne orientée de dimension $n = 4k$; si M est spinorielle, $X = \mathcal{L}(M)$ est munie d'une orientation canonique. Si de plus la première classe de Pontryagin $p_1(M)$ est nulle, X elle-même peut être munie d'une structure spin; admettons qu'on puisse définir un bon analogue du fibré des spineurs sur X, soit $\$ = \$^+ \oplus \$^-$ et un bon analogue de l'opérateur de Dirac, soit $\not{D} = \$^\pm \to \$^\mp$.

La variété X possède une action isométrique du cercle (par rotation du paramètre à la source, *cf.* p. 75); le long de l'ensemble M des lacets constants, le fibré normal $N(M)$ dans X est donné par les coefficients de Fourier à valeurs dans $T(M)$ (*cf.* p. 78), donc, du point de vue de l'action de S^1 (avec $q = \exp 2\pi i\tau$) on a $N(M) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}^\times} q^\ell T(M)$.

Witten en tire un choix naturel de $\$_{|M}$ (*cf.* [Segal (1)] et [Witten (3) & (4)]) :

$$\$_{|M} = q^{\frac{n}{24}} \$(M) \bigotimes_{\ell=1}^{\infty} \Lambda_{q^\ell} T(M)$$

(c'est une racine carrée de la puissance extérieure complexifiée, et le coefficient $q^{\frac{n}{24}}$ vient de la régularisation à la Euler $\prod_1^\infty q^\ell = q^{-1/12}$).

A présent, soit V un fibré vectoriel sur X sur lequel l'action du cercle se relève; il existe un opérateur de Dirac "tordu" compatible avec l'action : $\not{D}_V$ qui va des sections de $\$^+ \otimes V$ dans celles de $\$^- \otimes V$. Cet opérateur a un *indice équivariant* $\psi_V(q)$:

si $q = \exp(2\pi i\tau) \in S^1$, et si ρ_+ est la représentation de S^1 dans $\operatorname{Ker} \not{D}_V$ et ρ_- la représentation dans $\operatorname{Coker} \not{D}_V$

$$\psi_V(q) = \operatorname{Tr} \rho_+(q) - \operatorname{Tr} \rho_-(q).$$

On peut espérer que ψ_V est calculable par localisation le long de X dans $\mathcal{L}(X)$, et puis de M dans X, et ça donne la formule suivante :

$$\psi_V(q) = \int_M \widehat{A}(M) \operatorname{ch} \Big(\bigotimes_{\ell>0} S_{q^\ell}(T(M)) \otimes \bigoplus_m q^m V_m \Big) q^{-\frac{n}{24}} \tag{4}$$

(où les V_m sont les composantes de poids m de V sous l'action du cercle le long de M).

L'*opérateur de la signature* Q_1 sur X est l'opérateur de Dirac tordu par le fibré des spineurs lui-même, d'où l'indice équivariant de Q_1, et la formule cherchée (*cf.* (3))

$$\psi_{\$}(q) = \varphi'_q(M) \Big(\frac{\eta(q^2)}{\eta^2(q)} \Big)^{\dim(M)} \tag{5}$$

En fait Q_1 est tout aussi bien (ou mal) défini sans l'hypothèse $p_1(M) = 0$, et on peut croire à la formule (5) pour toute variété spinorielle M; d'ailleurs en dimension finie la condition pour définir $\not{D}_V$ et avoir l'analogue de la formule (4) est $w_2(T(X)) = w_2(V)$ (*cf.* [Witten (4)]).

De même Witten montre que le développement $\varphi_q(M)$ du genre elliptique s'obtient avec l'indice équivariant d'un opérateur assez familier en théorie des super-cordes, qui correspond à des conditions différentes pour les spineurs selon qu'ils se propagent en avant ou en arrière sur le cercle (un "secteur Ramond" et un "secteur Neveu-Schwarz").

Enfin l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac non tordu, défini seulement si $p_1(M) = 0$, est égal à

$$\psi(q) = q^{-\frac{n}{24}} \int_M \widehat{A}(M) \operatorname{ch} \overset{\infty}{\underset{1}{\otimes}} S_{q^m}(T(M))$$

et $\eta(q)^{+n}\psi(q)$ est une forme modulaire de poids $n/2$ (pour $SL_2(\mathbb{Z})$).

(Dans [Zagier], il est montré que la série caractéristique correspondante est

$$P_W(u) = \frac{u/2}{\operatorname{sh}^{u/2}} \prod_{n \geq 1} \frac{(1-q^n)^2}{(1-q^n e^u)(1-q^n e^{-u})} = e^{\sum_{k>0} u^{2k} \frac{G_{2k}}{2k}}$$

où les G_{2k} sont les séries d'Eisenstein de $2\pi i(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$.)

Pour expliquer la modularité des genres elliptiques et l'apparition de représentations projectives des difféomorphismes du cercle, retournons à l'origine des opérateurs géométriques sur l'espace des lacets, c'est-à-dire aux σ-modèles non-linéaires de la page 74.

Soient C_β le cyclindre plat $S^1 \times [0, \beta]$, S_- son bord en 0 et S_+ son bord en β; l'*action euclidienne* d'une application f de C_β dans la variété riemannienne M est

$$S(f) = \frac{1}{2} \int_{C_\beta} |Df|^2.$$

L'espace des états du modèle quantifié est un espace vectoriel V de fonctions sur les conditions initiales (ou finales) du champ classique, c'est-à-dire $f_- = f_{|S_-}$ (ou $f_+ = f_{|S_+}$). (On peut voir la collection des f_- comme une base de V, de même que les masses de Dirac δ_x, $x \in \mathbb{R}$, forment une "base" de $L^2(\mathbb{R})$).

L'*amplitude* de f_- à f_+ est formellement une espérance :

$$\langle f_+, f_- \rangle = Z_{f_-, f_+} = \int_{\partial f = (f_-, f_+)} e^{-S(f)} df.$$

C'est donc une *fonctionnelle des conditions aux bords*, et on la considère en théorie quantique des champs comme le *noyau d'un opérateur* T_β de V dans V.

La localité du lagrangien (l'intégrant de l'action) entraîne la propriété de semi-groupe $T_{\beta_1+\beta_2} = T_{\beta_1} T_{\beta_2}$, donc l'existence d'un opérateur H, le hamiltonien, tel que

$$T_\beta = e^{-\beta H}.$$

Le hamiltonien est censé décrire l'évolution temporelle, mais ici le temps est devenu imaginaire pur; si l'on était parti de l'action lorentzienne (ce qui est légitime pour une théorie relativiste), l'intégrale de Feynman serait celle de $e^{\frac{i}{\hbar}S}$ et l'évolution redeviendrait unitaire comme il se doit. La théorie euclidienne, utilisée de plus en plus souvent, et en particulier par Polyakov et Witten, se rapproche de l'étude (par matrices de transfert) des systèmes de mécanique statistique (aussi bien classiques que quantiques).

Les rotations R_θ du cercle S_- (d'angles $\theta \in [0, 2\pi]$) agissent aussi dans V : les amplitudes $\langle f_+, f_- R_\theta \rangle$ forment le noyau d'un opérateur

$$R_\theta = e^{i\theta P};$$

où P, par définition, est le moment (ou l'impulsion).

La *fonction de partition* Z de la théorie est

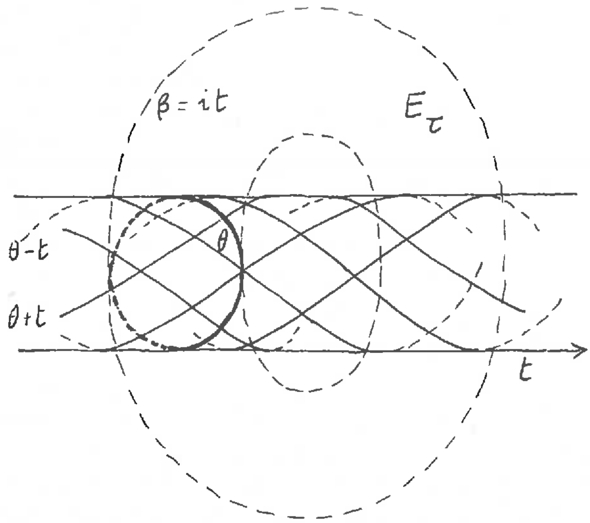
$$\mathrm{Tr}(e^{-\beta H + i\theta P}) = \int_{f : C_{\beta,\theta} \to M} e^{-S(f)} df, \tag{6}$$

où $C_{\beta,\theta}$ est le tore obtenu en recollant S_- et S_+ après avoir tourné S_- de l'angle θ; du point de vue conforme c'est la courbe elliptique E_τ de module $\tau = \frac{1}{2\pi}(\theta + i\beta)$. (L'existence des fonctions de partitions, définies par Trace, est un axiome des théories relativistes, *cf.* [Nahm]).

On introduit aussi les opérateurs $L_0 = \frac{H+P}{2}$ et $\overline{L}_0 = \frac{H-P}{2}$, qui engendrent des translations sur les branches du cône de lumière (particularité de la dimension 2); et en posant $q = e^{2\pi i \tau}$, on a

$$\mathrm{Tr}\left(q^{L_0} \overline{q}^{\overline{L}_0}\right) = \int_{f : E_\tau \to M} e^{-S(f)} df = Z(q, \overline{q}) \tag{7}$$

(car $2\pi i \tau L_0 - 2\pi i \overline{\tau} \overline{L}_0 = i\theta P - \beta H$).



Pour les σ-modèles non linéaires supersymétriques il faut introduire au niveau "classique" une quantité suffisante de champs de fermions (ψ), et l'intégrale d'énergie devient un mélange d'intégrale ordinaire et d'intégrale de Berezin (voir [Green, Schwarz et Witten]); mais le principe reste le même. L'espace des états V est remplacé par un espace Φ de formes différentielles (de degré et de codegré infinis) sur les conditions initiales, *i.e.* $X = \mathcal{L}(M)$. On peut encore introduire les analogues de H et P, de L_0 et $\overline{L}_0$, et il y a une formule qui tient lieu de (7); à ceci près qu'on doit spécifier une structure spin sur $C_{\beta,\theta}$, c'est-à-dire un point d'ordre 2 sur la courbe elliptique E_τ.

Si l'on s'intéresse aux formules d'indices d'opérateurs au-dessus de X (les supercharges) comme les $Q^\pm$, Q_1 du § 2, il faut aussi savoir quelque chose sur les amplitudes de certains *observables* de la théorie; par exemple $(-1)^F$ ou γ_5 (*cf.* § 2, p. 75).

Les indices équivariants des opérateurs géométriques sont les *valeurs moyennes* des observables associés; par exemple :

$$\chi_q(X) = \mathrm{Tr}\left(q^{L_0}\overline{q}^{\overline{L}_0}(-1)^F\right)$$

ou

$$\psi\!\!/\!\!\!\delta(q) = \sigma_q(X) = \mathrm{Tr}\left(q^{L_0}\overline{q}^{\overline{L}_0}\gamma_5\right) \ ;$$

et toutes ces quantités correspondent à des intégrales de Feynman

$$Z(q;\rho) = \int_{(f,\psi):sE_\tau\to sM} e^{-S(f,\psi)}df\,d\psi\,s\,\mathrm{Tr}(\rho(f,\psi))$$

(où le préfixe s est le signe du super, et ρ un observable approprié).

Ces formules généralisent celles de Atiyah-Bott-Patodi et de Feynman-Kac que nous avons vues à la page 77. (En particulier la lettre q dans χ_q ou σ_q signifie plutôt $\exp(i\theta)$ et dans les traces elle veut dire $\exp(i\theta - \beta)$.)

Ainsi, on comprend mieux le rapport entre les indices et les formes modulaires : l'action étant invariante par transformations conformes, les intégrales fonctionnelles ne devraient dépendre que de la classe d'isomorphisme conforme de E_τ (la restriction à $\Gamma_0(2)$ venant de la structure spin). Pourtant les intégrales ne sont pas exactement des invariants modulaires; certains choix, brisant la symétrie conforme sont nécessaires pour donner un sens plus précis, même perturbatif, aux amplitudes quantiques (par exemple des déterminants "fermioniques" font apparaître les phases des facteurs η). Malgré tout, le résultat ne s'écarte pas trop d'une fonction modulaire, c'est ce que le travail de Ochanine, Landweber, Stong, D. Chudnovsky, G. Chudnovsky et Zagier démontre.

Il faut signaler l'existence de théories quantiques des champs de dimension 1 ou 2, dites chirales, dont les fonctions de partition sont de vraies fonctions modulaires (voir [Nahm]). Par exemple, la théorie étudiée par Frenkel, Lepowsky et Meurman (une théorie de dimension 1 à valeurs dans le quotient $\mathbb{R}^4/L$ de $\mathbb{R}^{24}$ par le célèbre réseau de Leech), où le "gentil monstre" de Griess-Fisher, le plus grand des groupes finis simples sporadiques, est exhibé comme groupe de symétrie de tous les champs locaux, a pour fonction de partition

$$Z(q) = j(q) - 744 = q^{-1} + 196884q + \cdots$$

où j est l'invariant modulaire habituel ($1728\,\frac{g_2^3}{(g_2^3 - 27g_3^2)}$).

Afin d'expliquer le dernier mystère et savoir pourquoi le genre elliptique est une différence de caractères de représentations unitaires d'une extension centrale des difféomorphismes du cercle, Gepner et Witten font appel à l'objet fondamental des théories de champs : la densité d'impulsion-énergie (ou énergie-moment).

Au niveau classique (et du point de vue de la relativité générale), c'est un tenseur symétrique deux fois contravariant donné par la dérivée variationnelle de l'action par rapport au tenseur métrique $\Sigma g_{ij}dx_i dx_j$:

$$\delta S = -\frac{1}{2}\int_{\text{(espace-temps)}} T^{ij}\delta g_{ij}\sqrt{-g}dx.$$

Les équations de conservation expriment que la divergence covariante de T^{ij} est nulle; et dans une théorie à invariance conforme la trace de T^{ij} est nulle (*i.e.* $\Sigma T_i^i = 0$). Dans notre cas, en dimension 2 d'espace-temps plat, notons $x^0 = t$ la coordonnée de temps et $x^1 = \theta$ la coordonnée d'espace (on a $ds^2 = dt^2 - d\theta^2$); on aura $T^{00} = T^{11}$ (car $T_1^1 = -T^{11}$, $T_0^0 = +T^{00}$) et $T^{01} = T^{10}$. En posant $T = \frac{1}{2}(T^{00} + T^{01})$ et $\overline{T} = \frac{1}{2}(T^{00} - T^{01})$, les équations de conservation s'écrivent $(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial t})T = 0$ et $(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial t})\overline{T} = 0$; si bien qu'en version euclidienne avec $\beta = it$, $z = \theta + i\beta$ et $\overline{z} = \theta - i\beta$, on aura $\frac{\partial T}{\partial \overline{z}} = 0$ et $\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} = 0$; il est donc naturel de demander que T soit holomorphe et $\overline{T}$ antiholomorphe.

Notons que H et P s'obtiennent en intégrant les fonctions T^{00} et T^{01} sur les sections du genre espace; leur conservation vient de ce que $\frac{\partial}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ sont ici des champs de Killing de g_{ij}. Dès lors L_0 (resp. $\overline{L}_0$) (p. 85) doit correspondre à la moyenne de T (resp. $\overline{T}$) sur l'espace S^1. On introduit la suite des coefficients de Fourier de T et $\overline{T}$ sur le cercle :

$$L_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}T(\theta)d\theta$$

$$\overline{L}_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\overline{T}(\theta)d\theta.$$

(Ici le cercle doit plutôt être vu comme quotient de l'espace-temps par l'une des familles de branches du cône de lumière).

Après quantification les L_n et $\overline{L}_n$ deviennent des opérateurs dans l'espace des états (ou plutôt dans une complétion convenable de cet espace), et ils forment deux *algèbres de Virasoro* (revêtement universel de l'algèbre de Lie complexifiée des champs de vecteurs sur le cercle) :

(8) $$[L_n, L_m] = (n-m)L_{m+n} + \frac{c}{12}\delta_{m+n,0}n^3\,,$$

(si $\ell_n = ie^{in\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}$, on a $[\ell_n, \ell_m] = (n-m)\ell_{n+m}$; le nombre c est appelé *charge centrale*). Tous les L_n commutent avec tous les $\overline{L}_m$.

Remarque. — Soient $z = \theta + i\beta = \theta - t$ et $w = \exp(-iz)$; on a $T(z) = -w^2T(w) - \frac{c}{24}$, et si l'on pose $T(w) = \sum \widetilde{L}_n w^{-n-2}$ les opérateurs $\widetilde{L}_n$ satisfont à l'analogue de (8) avec $n^3 - n$ à la place de n^3. En représentation "plane" w, L_0 est remplacé par $\widetilde{L}_0 = L_0 + \frac{c}{24}$ (décalage de valeur moyenne) et $\widetilde{L}_n = L_n$ si $n \neq 0$.

La présence de représentations d'algèbres de Virasoro est la caractéristique des théories de champs conformes en dimension 2; cela s'explique assez bien :

au niveau classique, pour former le tenseur énergie-moment on peut se restreindre aux variations de la métrique δg_{ij} qui proviennent d'un changement de coordonnées $x'^0 = x^0 + \delta x^0$, $x'^1 = x^1 + \delta x^1$, et l'on trouve en notations euclidiennes :

$$\frac{\partial S}{\partial g} = \int T(z)\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\delta z)dz d\overline{z} + \int \overline{T}(\overline{z})\frac{\partial}{\partial z}(\delta\overline{z})dz d\overline{z}\,,$$

si bien que T apparaît comme une distribution sur l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur l'une des branches du cône de lumière (et $\overline{T}$ sur l'autre); et l'on comprend aussi pourquoi T (resp. $\overline{T}$) se comportera comme la composante d'un tenseur en $(dz)^2$ sur l'espace conforme rendu euclidien.

Au niveau quantique, la charge centrale c apparaît à cause du choix de vide qu'il faut faire pour définir des opérateurs de valeurs moyennes finies; elle compte (avec des poids convenables) les champs du modèle. Si bien que les difféomorphismes du cercle ne seront représentés que projectivement (c'est-à-dire que seule leur action sur les directions sera définie), mais n'oublions pas qu'un état quantique est (au mieux) une droite dans un espace vectoriel complexe. (En particulier, T ne se comportera pas tout à fait comme un tenseur quadratique; il apparaîtra des dérivées schwarziennes, comme pour les connexions projectives :

$$T(z)dz^2 = T(w)dw^2 + \frac{c}{12}S(w;z)dz^2$$

où $S(w;z) = \frac{w'''}{w'} - \frac{3}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$; *cf.* Remarque.)

On dit qu'on a affaire à une représentation d'*énergie positive* (resp. négative) des $\widetilde{L}_n$ si toutes les valeurs propres de $\widetilde{L}_0$ sont positives (resp. négatives).

Dans le cas du σ-modèle non-linéaire supersymétrique, la représentation des deux algèbres de Virasoro est unitarisable, elle est d'énergie positive pour les $\widetilde{L}_n$ et d'énergie négative pour les $\overline{\widetilde{L}}_n$. De plus, le long de M dans $\mathcal{L}(M)$, l'opérateur de Dirac tordu par les spineurs $\not{P}_S = Q_1$ commute avec tous $\overline{L}_n$ ($n \in \mathbb{Z}$); il ne commute pas avec les L_n mais l'action des L_n sur $\Phi = \Phi_+ \oplus \Phi_-$ est supersymétrique, si bien que le spectre de L_0 disparaît de l'indice de Q_1 et que la "signature équivariante de $\mathcal{L}(M)$" est la différence de deux caractères gradués de représentations "unitaires" et "positives" (au $-\frac{c}{24}$ près) de l'algèbre de Virasoro, comme on le souhaitait :

$$\sigma_q(\mathcal{L}(M)) = \mathrm{Tr}\left(q^{L_0}\bar{q}^{\overline{L}_0}\gamma_5\right) = \mathrm{Tr}\, e^{i\theta P}|\Phi_M^+ - \mathrm{Tr}\, e^{i\theta P}|\Phi_M^-.$$

(Sur $\Phi_M^\pm = \mathrm{Ker}(Q_{1|\Phi_\pm}), P = -\overline{L}_0$ car $Q_1^2 = 2L_0$, *cf.* page 75. Au-dessus d'une fibre du fibré normal à M dans $\mathcal{L}(M)$, Q_1^2 apparaît comme $2i\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -\frac{\partial}{\partial\beta} + i\frac{\partial}{\partial\theta}$.)

Les modèles de théorie quantique des champs conformes ont permis la construction des représentations unitaires les plus importantes des algèbres de Kac-Moody (*cf.* [Nahm] et [Gawedski]); par exemple l'extension centrale universelle du groupe des lacets dans le groupe orthogonal $O(n)$ apparaît comme groupe de structure du fibré des spineurs sur l'espace des lacets d'une variété de dimension n. Ainsi, Gepner et Witten ont "expliqué" l'invariance modulaire de la théorie des caractères gradués des représentations unitaires projectives d'algèbres de lacets.

Les théories conformes *rationnelles* ont des fonctions de partition modulaires :

$$(9) \qquad Z(q) = \Sigma N_{r,s;r',s'} e^{-\frac{i\pi c_m}{12}} \chi_{c_m;h_{r,s}}(q)\overline{\chi}_{c_{m'};h_{r',s'}}(q)\ ;$$

où les $N_{r,s;r's'}$ sont des entiers et les $\chi_{c;h}$ des caractères irréductibles de Virasoro de charges $c_m = 1 - 6/m(m+1)$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$) et de niveaux $h_{r,s} = \dfrac{((m+1)r - ms)^2 - 1}{4m(m+1)}$ $(r, s \in \mathbb{N}, 1 \leq r \leq m-1, 1 \leq s \leq r)$. (Le niveau h est la plus petite valeur propre de $\widetilde{L}_0$; les autres étant de la forme $h + \ell$, $\ell \in \mathbb{N}$. On dit qu'une représentation de l'algèbre de Virasoro est de plus haut poids s'il existe un vecteur dont les images par l'algèbre engendrent tout l'espace (c'est un vecteur "cyclique" dénommé "vide") et qui est annulé par tous les L_n pour $n > 0$. Les caractères $\chi_{c,h}$ de la formule (9) sont ceux de toutes les représentations de plus haut poids possédant une charge c strictement comprise entre 0 et 1 (Kac, Feigin, Fuchs).)

La liste de ces fonctions de partition correspond aux séries A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 (Cappelli, Itsykson, Zuber, Kac, Wakimoto); c'est-à-dire que les théories rationnelles sont classifiées par les groupes de symétrie des polygones réguliers (Léonard de Vinci) et par les groupes de symétrie des polyèdres de Platon, le tétraèdre, l'octaèdre et le cube, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

En s'appuyant sur l'intuition donnée par la théorie quantique des σ-modèles, Witten a su indiquer la voie que Taubes a suivi pour résoudre le problème qu'Ochanine se posait lorsqu'il a inventé les genres elliptiques (*cf.* [Taubes]) : si M est une variété spin munie d'une action du cercle, l'indice équivariant de l'opérateur de Dirac tordu par l'espace tangent de M (opérateur de Rarita-Schwinger) est constant. Il en va de même pour le genre elliptique universel (Ochanine, Taubes). On en déduit $\varphi(M) = \varphi(F)\varphi(B)$ si $M \to B$ est un fibré en variétés spin F à groupe structural compact connexe (voir [Segal 1]).

D'autre part, Landweber, Ravenel et Stong ont construit algébriquement la théorie cohomologique associée au genre elliptique : dans cette théorie, il y a des classes de Chern généralisées (*i.e.* la théorie est "orientée"), et la classe de Chern w du produit $E \otimes F$ de deux fibrés en droites complexes E et F s'exprime en fonction des classes x de E et y de F grâce à la loi du groupe formel découvert par Euler :

$$w = \frac{x\sqrt{P(y)} + y\sqrt{P(x)}}{1 - \varepsilon x^2 y^2},$$

où $P(x) = 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4$.

Cette théorie s'appelle *cohomologie elliptique* et se note $\mathrm{E}\ell\ell^*$; la cohomologie d'un point est l'anneau gradué $R = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\left[\delta, \varepsilon, \varepsilon^{-1}\right]$, avec δ de degré -4 et ε de degré -8. (Des théories voisines inversent $\delta^2 - \varepsilon$ ou Δ à la place de ε, elles correspondent à d'autres sous-groupes de niveau 2 de $SL_2(\mathbb{Z})$ que $\Gamma_0(2)$.)

Parmi les groupes formels (commutatifs, de dimension 1) $\big(w = F(x,y);\ F(x,0) = F(0,x) = x;\ F(x,y) = F(y,x);\ F(F(x,y),z) = F(x,F(y,z))\big)$, celui qui est associé au cobordisme (presque-)complexe ΩU^* est universel : l'anneau du point est $L = \mathbb{Z}[x_2, x_4, x_6, \ldots]$ (Thom, Milnor, Novikov) et tout groupe formel sur tout anneau commutatif (avec unité) A s'obtient en transportant la loi de $L[[x,y]]$ dans $A[[x,y]]$ par un homomorphisme d'anneaux de L dans A. (C'est un théorème de Quillen et la loi sur L est le groupe universel de Lazard; *cf.* [Adams]). De même, la loi du cobordisme orienté Ω^*, lorsqu'on la localise en dehors de 2 (*i.e.* $\Omega^* \otimes \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$), devient universelle pour les groupes formels impairs (*i.e.* $F(-x,-y) = -F(x,y)$) sur des anneaux où 2 est inversible. L'anneau de cobordisme orienté (localisé) d'un point est $L_0 = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\left[x_4, x_8, \ldots\right]$ (Thom, Rochlin, Wall, Averbuch, Milnor); le genre elliptique universel définit un homomorphisme de L_0 dans R et transporte le groupe formel du cobordisme sur le groupe formel d'Euler; de sorte que

$$\mathrm{E}\ell\ell^*(M) = \Omega^*(M) \underset{L_0}{\otimes} R$$

pour tout espace topologique M.

Pour démontrer qu'on forme ainsi une théorie cohomologique extraordinaire, un résultat de Landweber dit qu'il suffit de satisfaire à certaines contraintes arithmétiques : ici les contraintes sont des relations de congruences pour les polynômes de Legendre (D. et G. Chudnovsky, *cf.* [Landweber et al.]).

La K-théorie complexe K^* répond au groupe formel multiplicatif $w = x + y + xy$; le genre de Todd Td : $\Omega U \to \mathbb{Z}$ (défini pour les variétés presque complexes; de fonction génératrice $\frac{u}{1-e^{-u}}$) donne l'isomorphisme $K^*(M) \cong \Omega U^*(M) \underset{L}{\otimes} \mathbb{Z}$. De même, la K-théorie réelle orientée localisée hors de 2, $KO^*\left[\frac{1}{2}\right]$ (qui est facteur direct dans $K^*\left[\frac{1}{2}\right]$), s'obtient à partir du cobordisme orienté en passant par le genre $\widehat{A}$. (Pour toutes ces questions, voir le livre [Adams et al.] et en particulier l'article de Novikov qui y est reproduit).

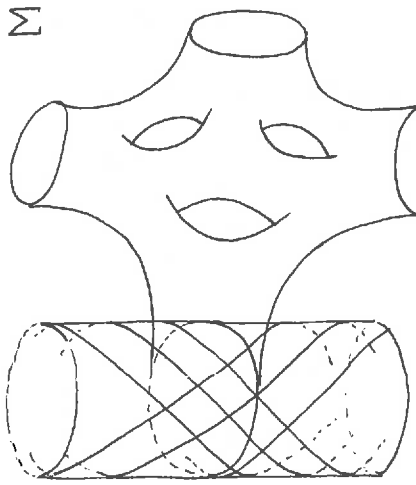
La plupart des applications de la K-théorie à la topologie et à l'analyse sont dues à l'interprétation géométrique en termes de fibrés vectoriels (et d'indices d'opérateurs elliptiques (Grothendieck, Atiyah, Hirzebruch, Singer)). Par exemple un élément de $K^0(M)$ est une classe d'équivalence stable de fibré vectoriel virtuel (E, F) au-dessus de M ($(E, F) \sim (E', F')$ si il existe un fibré trivial ε^N et un isomorphisme $E + F' + \varepsilon^N \approx E' + F + \varepsilon^N$); et un élément de $K^{-1}(M)$ est une classe d'équivalence stable d'isomorphisme $\alpha : E \to F$ au-dessus de M. L'interprétation géométrique de la cohomologie elliptique est encore un problème ouvert, mais l'approche de Witten montre certainement la bonne direction : généraliser la théorie des fibrés, connexions, etc, en théorie des cordes et des super-cordes (ce serait un pas vers les théories de champs de cordes).

Des travaux récents (G. Segal, J.-L. Brylinski) ont commencé à préciser cette idée : un fibré vectoriel (muni d'une connexion) au-dessus d'un espace topologique M est une représentation du groupoïde des chemins dans M dans la catégorie des espaces vectoriels (*cf.* par exemple Novikov loc. cit.); remplaçons donc les points de M par les lacets (paramétrés) dans M et les chemins dans M par des cylindres conformes orientés à bords paramétrés, puis formons une catégorie $\mathcal{E}$ (en fait un semi-groupe) avec les classes d'isomorphismes conformes de cylindres; un *objet elliptique* (au sens de Segal) est une représentation "projective" de $\mathcal{E}$ dans la catégorie des espaces vectoriels (de dimensions infinies, mais avec des conditions de traces et de positivités convenables, *cf.* [Segal 1, 2 & 3], afin de pouvoir au moins définir une fonction de partition).

La source des objets elliptiques est la théorie des champs conformes; le fibré des spineurs sur l'espace des lacets d'une variété spin M (avec $p_1(M) = 0$) en est un exemple. A partir de là, comment mettre en place la cohomologie elliptique? Quelques équipements supplémentaires sont sans doute nécessaires (structures spin, marquages des bords,...), on doit trouver les bonnes notions d'équivalences,... Le contenu géométrique et arithmétique promet d'être riche (*cf.* [Segal 1] et [Brylinski]).

En ne regardant que les cylindres dégénérés (de largeur nulle), il apparaît des représentations de l'algèbre de Virasoro qui doivent être sommes directes de représentations de plus haut poids et d'énergie positive. Comme le souligne Segal, le passage aux anneaux remplace l'inexistante complexification du groupe $\mathrm{Diff}_+(S^1)$. Mais l'extension complexe ne s'arrête pas là : $\mathcal{E}$ n'est que la composante de l'identité de la catégorie de toutes les surfaces de Riemann compactes à bords paramétrées, et les propriétés modulaires des objets elliptiques vont devoir s'étendre à tous les genres $g \geq 0$ (avec un nombre arbitraire $n \geq 0$ de composantes du bord). Les théories de champs conformes dévoilent ainsi l'un de leurs plus beaux trésors :

à partir du moment où le temps est devenu imaginaire, une théorie quantique des champs conformes se prolonge à toute surface de Riemann.



D'ailleurs les interactions de cordes exigent $n \geq 3$, et si la théorie des cordes veut réaliser la quantification de la gravitation universelle, elle doit exister pour tous les genres de surfaces (le genre g décrit l'ordre en $\hbar^g$; *cf.* [Neveu, Schwarz et Witten] et [Witten (5)]).

Par exemple la fonction de partition devient une métrique hermitienne sur un fibré holomorphe (projectivement plat) au-dessus de l'espace des modules des courbes analytiques complexes (fermées) de genre g (Quillen, Friedan, Shenker,...); la valeur moyenne de l'énergie-moment est une connexion projective sur un fibré en droites projectives au-dessus des modules.

De là Segal extrait les foncteurs modulaires [Segal (3)], et puis surviennent les invariants topologiques des nœuds et des variétés de dimension 3,...; mais ceci est plutôt l'histoire des paragraphes suivants.

Quelques références pour ce paragraphe :

(3) [WITTEN] *Elliptic genera and quantum field theory*, Commun. in Math. Physics, **109** (1987), 525–536.

(4) [WITTEN] *The index of the Dirac operator in loop space*, dans le livre [Landweber et al.] L.N. 1326 (1988), 161–180.

(5) [WITTEN] *Physics and Geometry*, International Congress of mathematicians, Berkeley, 1986, vol. 1, 267–303.

[GEPNER et WITTEN] *String theory on group manifolds*, Nud. Phys. B, **278** (1986), 493–549.

[GREEN, SCHWARZ et WITTEN] *Superstring theory*, vol. 1 et 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[OCHANINE] *Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques*, Topology **26** (1987), 143–151.

[LANDWEBER ET AL.] *Elliptic curves and modular forms in algebraic topology*, Proceedings, Princeton 1986. Lecture Notes in Math. n° 1326 (1988). Articles de [Landweber], [D.V. Chudnovsky et G.V. Chudnovsky], [Ochanine], [Ravenel], [Smith et Stong], [Witten (4)] et [Zagier].

[NAHM] *Quantum field theories in one and two dimensions*, Duke Math. Journal. **54** (1987), 579–613.

[SEGAL] (1) *Elliptic cohomology (after Landweber-Stong, Ochanine, Witten and others)*, Séminaire Bourbaki 1987–88, n° 695, Astérisque 161–162 (1988), 187–201.

(2) *The definition of conformal field theory*, (1987) Differential Geometrical Methods in Th. Physics, 165–171.

(3) *Two-dimensional conformal field theories and modular functors*, IXth. Int. Congress on Math. Physics, Swansea (1989), 22–37.

[SERRE] *Cours d'arithmétique*, PUF (1970).

[TAUBES] *S^1 actions and elliptic genera*, Comm. in Math. Physics (1989).

[ATIYAH] *K-theory*, Benjamin (1967).

[ADAMS] *Stable homotopy and generalised homology*, Chicago Lectures in Mathematics, Univ. of Chicago Press, (1974).

[ADAMS ET AL.] *Algebraic topology. A student's guide*, London Math. Society, Cambridge University Press (1972).

[GAWEDSKI] *Conformal field theory*, Sém. Bourbaki 1988–89, n° 704, Astérisque 177–178 (1989), 95–126.

[BRYLINSKI] *Representation of loop groups, Dirac operators on loop space, and modular forms*, Topology 29 (1990), 461–480.

■

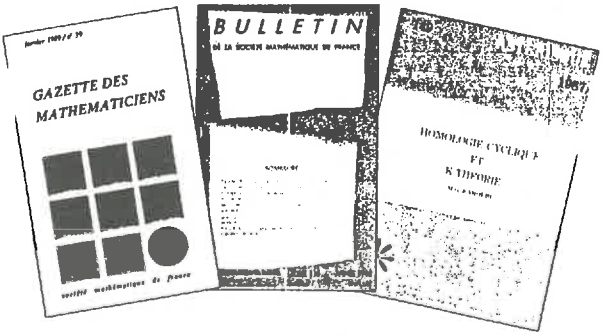
Histoire et Missions de la SMF

Fondée en 1872, la Société Mathématique de France (SMF) s'est fixé pour mission de contribuer à l'avancement des mathématiques pures et appliquées. Depuis son origine elle favorise les échanges à l'intérieur de la communauté mathématique. Elle compte ou a compté parmi ses membres les mathématiciens les plus illustres ; au nombre de ses fondateurs figurent les noms de Laguerre, Chasles, Darboux, Jordan...

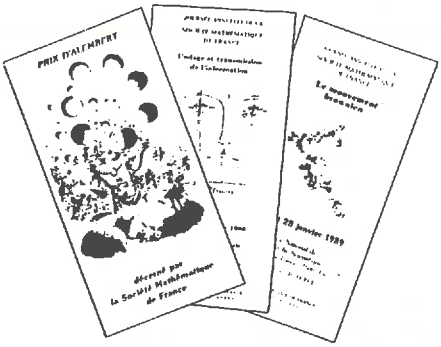
La Société s'est modernisée pour devenir un outil efficace au service de la communauté et accroître son rôle et son influence comme association représentative auprès des pouvoirs publics. Elle a pour vocation de s'intéresser à tous les aspects de la vie mathématique : recherche, enseignement, politique scientifique, relations avec le monde économique, vulgarisation, image des mathématiques dans les médias et le public.

Charles Hermite (1822-1901)
Archives de l'Académie des Sciences de Paris

Publications



La SMF propose à ses membres deux publications d'informations scientifiques. L'Officiel des Mathématiques, circulaire mensuelle, comprend les annonces de séminaires et colloques et les autres nouvelles utiles à la communauté. La Gazette des Mathématiciens présente à la fois des articles mathématiques s'adressant à des non spécialistes et des informations générales sur le milieu mathématique. C'est aussi un lieu privilégié de débats et de discussions.



La Société édite deux revues mathématiques de réputation internationale qui contribuent au renom de l'école mathématique française. Fondé en 1873, le Bulletin, avec son supplément les Mémoires, publie des articles originaux de haut niveau. La revue Astérisque, créée à l'occasion du centenaire de la Société, publie des monographies de qualité ainsi que des comptes rendus de grands colloques internationaux.

COTISATIONS POUR 1991

à remplir par tout membre individuel

En cas de première inscription, nom du membre S.M.F. qui la parraine : ______________________

NOM ______________________ Prénoms ______________________

Adresse postale (pour l'envoi des publications) ______________________

____

______________ Code postal__________ Ville et Pays______________________

une COTISATION obligatoire	
SMF (avec droit à la Gazette) [1]	390 F
SMF+SMAI	550 F
cotisation conjoint [2]	120 F
cotisation retraité et < 30 ans	195 F
PUBLICATIONS	
Officiel	100 F
Officiel (courrier rapide)	150 F
Bulletin (sans Mémoires)	250 F
Bulletin et Mémoires	410 F
Astérisque (12 numéros)	680 F
Sté Mathématique Européenne	100 F
TOTAL	

(cocher les options retenues)

Mode de paiement

○ Chèque postal à l'ordre de :
S.M.F. compte 5215 Z Paris

○ Chèque bancaire
n° ______________
banque ______________

○ Carte de Crédit
○ Visa
○ Mastercard
n° ______________
Date d'expiration ________

Si vous n'avez pas choisi de payer par carte de crédit, vous devez joindre à ce formulaire votre chèque.

Date Signature

[1] La cotisation SMF+SMAI donne droit à la Gazette et à Matapli. Pour les retraités elle est de 385F.

[2] La cotisation conjoint est accessible à tout conjoint d'un membre SMF: elle donne droit à la carte de membre et aux votes lors des Assemblées Générales (mais non pas à la Gazette).

adresse postale : Société Mathématique de France, Ecole Normale Supérieure, Tour L, 1 rue Maurice Arnoux, 92120 MONTROUGE

secrétariat général : tél. 40 84 80 54, publications : tél. 40 84 80 55; FAX : 40 84 80 52