Revue d'Histoire des Mathématiques

Tome 25 Fascicule 1

2019

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

REVUE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Secrétariat :
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré
11, rue Pierre et Marie Curie, 75231 Paris Cedex 05
Tél. : (33) 01 44 27 67 99 / Fax : (33) 01 40 46 90 96
Mél : `rhm@smf.emath.fr` / URL : `http//smf.emath.fr/`

Périodicité : La *Revue* publie deux fascicules par an, de 150 pages chacun environ.

Tarifs : Prix public Europe : 94 €; prix public hors Europe : 105 €;
prix au numéro : 43 €.
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Diffusion : SMF, Maison de la SMF, Case 916 - Luminy, 13288 Marseille Cedex 9
Hindustan Book Agency, O-131, The Shopping Mall, Arjun Marg, DLF
Phase 1, Gurgaon 122002, Haryana, Inde

Maquette couverture : Armelle Stosskopf

Revue d’Histoire des Mathématiques

Journal for the History of Mathematics

Tome 25 Fascicule 1

2019

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Revue d'histoire des mathématiques
25 (2019), p. 1–107

L'ALGÈBRE SANS LES « FICTIONS DES RACINES » : KRONECKER ET LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES DANS LES *VORLESUNGEN ÜBER DIE ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN*

Cédric Vergnerie

Résumé. — Durant la seconde moitié du dix-neuvième siècle, Leopold Kronecker a donné un cours sur la théorie des équations algébriques, qui constitue ses leçons d'*algèbre*. Dans ces *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, il demande à l'algèbre d'être rendue « autant que possible indépendant[e] de toutes les fictions sur les racines des équations ». Nous allons montrer comment Kronecker, dans le contexte de la théorie des caractéristiques – une généralisation du théorème de Sturm –, aborde le concept de continuité et comment, dans sa pratique, la notion même de racine est interrogée.

Abstract (Algebra without "all the fictions about the roots of equations": the theory of characteristics in Kronecker's *Vorlesungen über die algebraischen Gleichungen*)

For the better part of the second half of the nineteenth century, Leopold Kronecker gave a course on the theory of algebraic equations, which represents his *Algebra* lectures. In this *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, he asked Algebra to be "as far as possible independent from all the fictions about the roots of equations". We will show how Kronecker, in the context of the theory of characteristics—a generalization of Sturm's theorem—, dealt with the concept of continuity and how, in his practice, the very notion of root is questioned.

Texte reçu le 2 juillet 2018, accepté le 3 novembre 2018, révisé le 26 décembre 2018.

C. Vergnerie, Université Paris Diderot – CNRS, Laboratoire SPHERE, UMR 7219, bâtiment Condorcet, case 7093, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris cedex 13, France.
Courrier électronique : `cedric.vergnerie@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55.

Mots clefs : Kronecker, Sturm, Gauss, Équation, Théorème fondamental de l'algèbre, histoire de l'algèbre, théorie des caractéristiques, continuité, racines.

Key words and phrases. — Kronecker, Sturm, Gauss, Equation, Fondamental theorem of algebra, history of algebra, theory of characteristics, continuity, roots.

1. INTRODUCTION

Dans un cours qu'il donne en 1891 à l'université de Berlin, Leopold Kronecker affirme que les « résultats de l'algèbre doivent être rendus autant que possible indépendants de toutes les fictions sur les racines des équations [Kronecker 1891, p. 10] ». C'est ainsi que, dès l'introduction de ses *Leçons sur la théorie des équations algébriques*[1], dans lesquelles on peut imaginer qu'une place importante sera réservée aux solutions de ces équations, Kronecker met en garde son auditoire sur la notion de « racines ». Cette réserve à propos d'une notion aussi fondamentale dans la théorie des équations va avoir des conséquences sur un certain nombre d'autres concepts, comme celui de continuité : ce dernier est en effet habituellement lié – par exemple chez Gauss ou Bolzano – à l'existence d'une racine réelle pour tout polynôme de degré impair.

Si les grands principes philosophiques de Kronecker sur les mathématiques influencent très certainement sa pratique, nous souhaitons ici examiner aussi comment cette dernière rend nécessaire la modification de certains concepts. Ainsi, l'étude de la controverse entre Kronecker et Camille Jordan sur la théorie des formes a permis à Frédéric Brechenmacher de mettre en évidence l'intrication entre la pratique et la pensée mathématique dans le travail de Kronecker. Il montre que la « nature arithmétique » de la théorie des formes amène Kronecker à privilégier des méthodes telles que le calcul de p.g.c.d dans le traitement de ces formes [Brechenmacher 2007]. La conception qu'il se fait des racines d'une équation intervient d'ailleurs dans cette controverse : l'un des arguments de Kronecker à l'encontre du critère de réduction de Jordan est la nécessité d'extraire toutes les racines d'un polynôme, ce qui en général ne peut être réalisé de façon effective. De même, l'étude de la réception de Gauss dans [Goldstein & Schappacher 2007a] et [Goldstein & Schappacher 2007b] est l'occasion pour Catherine Goldstein et Norbert Schappacher de préciser la conception des mathématiques de Kronecker. Notre propos est donc de montrer *in situ*, c'est-à-dire dans la pratique même de Kronecker, comment ce dernier est amené à mobiliser et à transformer l'idée de racine. Pour cela, nous utiliserons les cours sur la théorie des équations algébriques qu'il a professés entre 1872 et 1891, année de sa mort. Ces leçons, contrairement à celles que Kronecker a données sur l'intégration, les déterminants ou l'arithmétique, n'ont pas été publiées. Nous y avons accès uniquement par

---

[1] *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen.* Sauf mention contraire, les traductions proposées des textes en allemand sont les nôtres.

des manuscrits, issus pour la plupart du fonds Hensel et conservés à la bibliothèque de mathématiques de l'IRMA à Strasbourg. Ces manuscrits, qui sont en fait des mises en forme de notes prises par des étudiants, n'ont été pour le moment que rarement exploités : nous les utiliserons dans cet article comme source principale. Dans ses cours, notoirement difficiles et adressés à de jeunes mathématiciens en devenir, Kronecker présente ses recherches les plus récentes : il s'agit d'un matériel privilégié pour voir comment le mathématicien berlinois *fait* des mathématiques. Pierre Dugac a utilisé les cours que Weierstrass avait donnés à Berlin durant la même période pour en « dégager quelques notions essentielles », « en chercher l'origine » et en « suivre [l'] évolution et [les] transformations » [Dugac 1973, p. 43]. Il y montrait l'usage pertinent que l'on peut faire de ces leçons pour étudier la conception des mathématiques de Weierstrass. Nous nous proposons finalement de procéder ici de la même façon avec les cours de Kronecker.

Jules Molk, dans le traité qu'il consacre à la théorie de la divisibilité de Kronecker, affirme :

> Il faut, en un mot, montrer ce que l'on doit entendre par racine d'une équation algébrique, au point de vue arithmétique auquel nous nous sommes placés.
>
> Mais ces considérations m'écarteraient par trop de l'objet que j'ai principalement en vue. Elles rentrent dans un autre ordre d'idées et il convient de les exposer avec la théorie des *Caractéristiques* [Molk 1884, p. 5].

Dans les leçons de Kronecker, le lieu où ces notions de racine et de continuité semblent se cristalliser est le chapitre qu'il consacre au théorème de Sturm et dans lequel, en effet, il développe la *théorie des caractéristiques.* Cette dernière – fruit d'une volonté de généraliser le théorème de Sturm – n'a été que très rarement exposée, et presque toujours à partir de relectures qu'en ont faites des mathématiciens à la fin du XIX^{e} siècle. Dans son histoire du théorème de Sturm, Hourya Sinaceur remarque que :

> Du côté de la recherche, [*le théorème de Sturm*] ne resta pas (...) lettre morte. Il fut suivi, en effet, par toute une série de mémoires ou d'articles visant à l'améliorer ou le transformer de la plume des plus grands mathématiciens comme Sylvester, Cayley, Hermite ou Kronecker, et aussi de moins grands comme Borchardt ou Darboux. Il engendra ainsi ce que Sylvester a appelé "un cycle d'idées sturmiennes". Ce cycle s'acheva pourtant, sinon avec les travaux de Sylvester comme celui-ci voulait bien le croire, du moins avec la difficile théorie des caractéristiques de Kronecker [Sinaceur 1988, p. 103].

La théorie des caractéristiques – qui d'après H. Sinaceur clôture le « cycle d'idées sturmiennes »[2] – est le cadre dans lequel Kronecker donne une première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, théorème dont il dit qu'il est « le plus important de cette première partie, on pourrait presque dire (...) le seul théorème de la théorie des équations algébriques »[3]. Dans un article publié en 1991, Christian Gilain [Gilain 1991] réécrit l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre en remplaçant sa description ternaire usuelle[4], *conjecture – essai de preuve – preuve*, par une distinction entre deux théorèmes : le théorème fondamental de l'algèbre et le théorème de factorisation linéaire[5], c'est-à-dire entre l'existence d'un corps de décomposition d'un polynôme, et donc la *possibilité* de le factoriser dans ce corps par un produit de facteurs simples, et le fait que tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ admette une racine complexe. Il s'agit là d'une différence fondamentale entre la preuve de l'existence de racines d'un polynôme et la détermination de la nature de celles-ci pour un polynôme à coefficients réels. Il y a deux théorèmes, et donc deux histoires distinctes. À propos de la place de Kronecker dans ces histoires, Gilain affirme :

> Chez KRONECKER, la théorie des équations algébriques apparait unifiée sur la base de son théorème, désigné comme théorème fondamental de l'arithmétique générale et qui est une forme du TFL. L'énoncé classique du TFA est d'ailleurs, lui, écarté par KRONECKER qui, voulant fonder la théorie sur la seule base des nombres rationnels et des constructions finies à partir d'eux, est conduit à restreindre le champ des coefficients des équations et à modifier l'énoncé du problème de l'existence des racines [Gilain 1991, p. 128].

Pourtant, cet « important » théorème est introduit lors de la première partie du cours de Kronecker, dans laquelle les outils pour construire le TFL n'ont pas encore été mis en place. En utilisant les manuscrits de ses cours sur la théorie des équations algébriques, nous allons examiner le cadre dans lequel ce théorème est présenté. Plus particulièrement, à travers l'articulation entre théorème de Sturm, théorie des caractéristiques et théorème fondamental de l'algèbre, nous examinerons la façon dont Kronecker transforme le concept de *racines*, pour finalement s'attacher à leur *séparation*.

---

[2] Hourya Sinaceur reprend ici une expression utilisée par Sylvester dans [Sylvester 1853, p. 486] : « the cycle of Sturmian ideas ».

[3] [Kronecker 1891, p. 268] : (...) *für diesen ersten Teil des wichtigsten, ja, man könnte fast behaupten, einzigen Theorems der Lehre von den algebraischen Gleichungen* (...).

[4] Pour une histoire détaillée de ce théorème, voir [Gilain 1991], [Remmert 1991], [Petrova 1973] ou [Dhombres & Alvarez 2011] et [Dhombres & Alvarez 2013].

[5] TFA et TFL pour reprendre les abréviations de C. Gilain.

2. PRÉSENTATION DES *VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN*

Dans une lettre à son professeur Hjalmar Holmgren, Gösta Mittag-Leffler[6] décrit les enseignements qu'il a suivis à Berlin[7] :

> D'un point de vue scientifique, je suis très satisfait de mon séjour à Berlin. Nulle part je n'ai trouvé autant de choses à apprendre qu'ici. Weierstraß et Kronecker ont tous deux cette particularité, inhabituelle en Allemagne, d'éviter autant que possible les publications imprimées. Il est connu que Weierstraß ne publie presque rien, et Kronecker seulement des résultats sans démonstration.
>
> Les résultats de leurs recherches sont présentés dans leurs leçons. Les mathématiques de notre temps n'ont pas grand-chose qui puisse rivaliser avec la théorie des fonctions de Weierstraß ou l'algèbre de Kronecker. (...)
>
> Autant Weierstraß que Kronecker s'illustrent d'ailleurs par la plus complète clarté et la précision de leurs démonstrations. Ils ont tous deux hérité de Gauss la crainte de tout genre de métaphysique dans la fixation des concepts fondamentaux des mathématiques, et cela donne à leurs démonstrations une simplicité et un naturel que l'on a rarement vus conduits de façon aussi systématique avec un si grand degré de précision [Behnke & Kopfermann 1966, p. 54].

Mittag-Leffler met l'accent sur la nécessité d'avoir accès aux cours de Weierstrass et de Kronecker pour comprendre le contenu de leurs recherches, car leurs articles publiés sont rares ou ne comportent qu'une suite de résultats sans démonstration. Si ces cours se caractérisent, pour Mittag-Leffler, par une grande clarté, Harold Edwards a une opinion différente des travaux publiés par Kronecker :

---

6 Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), qui créa et dirigea les célèbres *Acta Mathematica*, obtient sa thèse, dont le sujet a trait à l'analyse complexe, en 1872 à Upsalla. Ce n'est qu'ensuite, en 1875, après avoir passé quelques temps à Paris, qu'il décide, sur les conseils d'Hermite, de suivre les cours de Weierstraß à Berlin.

7 Lettre du 16 février 1875 traduite en allemand du suédois dans [Behnke & Kopfermann 1966, p. 54] : Mit meinen Aufenthalt in Berlin bin ich in wissenschaftlicher Hinsicht sehr zufrieden. Nirgends habe ich so vieles zu lernen gefunden wie hier. Weierstraß und Kronecker haben beide die in Deutschland ungewöhnliche Eigenschaft, gedruckte Publikationen, soweit es möglich ist, zu vermeiden. Weierstraß publiziert bekanntlich gar nicht, und Kronecker nur Resultate ohne Beweise.

In ihren Vorlesungen legen sie die Resultate ihrer Forschungen vor. Kaum dürfte wohl die Mathematik unserer Tage etwas aufzuweisen haben, was mit der Funktionentheorie von Weierstraß oder der Algebra von Kronecker wetteifern kann. (...)

Sowohl Weierstraß als auch Kronecker zeichnen sich übrigens durch vollständigste Klarheit und Schärfe beim Beweisen aus. Zugleich haben sie von Gauss die Furcht vor aller Art Metaphysik bei der Fixierung der mathematischen Grundbegriffe geerbt, und dies gibt ihren Deduktionen eine Einfachheit und Natürlichkeit, die man wohl kaum früher so systematisch ausgeführt und mit dem höchsten Grad an Schärfe gesehen hat.

> Surely one of the principal reasons Kronecker is so little studied today (except, it seems to me, by the best mathematicians) is that his works are so very difficult to read. Jordan very aptly called them in 1870 "l'envie et le désespoir des géomètres." This shows that the difficulty we experience today in reading Kronecker's works is not merely the difficulty of reading an old text written in an outdated terminology. Kronecker's difficult style was difficult for his contemporaries, too. I have been working at it for many years, especially his Kummer Festschrift entitled "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen." I feel my efforts have been rewarded and that I will soon be able to publish papers that will convey something of what Kronecker was doing and that will, I hope, awaken the interest of others in studying Kronecker [Edwards 1988, p. 143].

Les difficultés dont Edwards parle en 1988 restent en partie présentes dans ses *Essays in Constructive Mathematics*[8], et confirment ce qu'il avait déjà écrit dans un article de 1987 lorsqu'il rappelait que Frobenius affirmait qu'à peine trois personnes comprenaient certains travaux de Kronecker[9]. H. Edwards ajoutait alors :

> My impression is that this estimate is generous. I believe there are important passages in Kronecker's work that *no one, ever* has fully understood, other than Kronecker himself [Edwards 1987, p. 29].

Trouvant « le style de présentation de Kronecker dans ses papiers publiés obscur et sans motivation »[10], Edwards a recherché son *Nachlass* [Edwards 1978], espérant trouver dans celui-ci quelques éclaircissements. Malheureusement, comme Pierre Dugac avant lui[11], Edwards n'est pas parvenu à localiser ce *Nachlass*.

Le fin mot de cette énigme se trouve finalement exposé dans un article de 1978 intitulé *On the Kronecker Nachlass*, où Harold Edwards retrace les péripéties de sa quête du *Nachlass* perdu. Nous savons que la tâche de s'occuper du *Nachlass* de Kronecker échut à Kurt Hensel, ancien élève de Kro-

---

8 Les difficultés mentionnées par Edwards concernent notamment la notion de *Modul System*, qui devient très importante dans le travail algébrique de Kronecker à partir de la publication des *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Voir [Edwards 2005, p. 5]).

9 Gab es unter seinen Fachgenossen kaum drei, die dem Fluge seiner Gedanken zu folgen vermochten [Frobenius 1893/1968].

10 Ma traduction de [Edwards 1978, p. 425].

11 Pierre Dugac, dans un article consacré aux travaux de Weierstrass et Dedekind, écrit ceci : « Signalons que nous n'avons pas pu trouver trace du *Nachlass* de Kronecker qui serait très utile pour comprendre cette époque (la correspondance de Kronecker avec tous les grands mathématiciens de son temps serait essentielle à cette fin) » [Dugac 1976, p. 11].

necker[12]. Celui-ci, *Privatdozent* à l'université de Berlin après y avoir soutenu sa thèse[13], enseigna à partir de 1901 à l'Université de Marburg.

Dans un premier temps, grâce à Helmut Hasse, un ancien élève de Hensel, et Walter Hayman, petit fils de Hensel et professeur de mathématiques à l'Imperial College de Londres, Edwards met la main sur quelques lettres adressées à Kronecker, et acquiert la certitude qu'Hensel possédait bien le *Nachlass* complet à Marburg au moment de sa mort. Il découvre ensuite que ce dernier était en 1943 en la possession de Hasse qui, malheureusement malade et âgé de 78 ans au moment où Edwards l'a interrogé, ne se souvenait absolument pas de ce qu'il avait pu faire de ces documents. Edwards réussit finalement à établir que Hasse confia en 1944 ses papiers les plus importants, et que ceux-ci furent mis en sécurité au fond d'une mine située à vingt kilomètres de Göttingen qui servait aussi de réserve pour des munitions. L'ensemble explosa en 1945 et presque tous les papiers furent perdus. Il semble donc bien que la presque totalité des *Nachlass* de Kronecker et de Hensel ait été détruite de cette façon.

Si les difficultés pour lire les textes de Kronecker ne peuvent pas être envisagées comme une caractéristique intrinsèque de son travail, il est certain que les notes de cours permettent d'éclairer certains de ses articles. Car l'une des difficultés est bien sûr d'interpréter rétrospectivement Kronecker, en particulier après la domination presque exclusive du structuralisme dans les mathématiques du XX^e siècle, et la mise en contexte est nécessaire pour approcher ces textes. Il ne faudrait pas non plus penser que l'œuvre de Kronecker n'a été ni lue ni comprise, et de nombreuses recherches récentes ont montré son influence dans les travaux de ses contemporains. Ainsi par exemple ses recherches autour de la « théorie de Galois » auront une influence notable à la fois en France avec Jules Molk, Jules Tannery ou Émile Picard et en Allemagne avec Felix Klein ou Heinrich Weber[14]. De même, de nombreux liens existent entre ses travaux et ceux d'Hermite sur les fonctions elliptiques[15].

Pour circuler dans les mathématiques de Kronecker et mettre en évidence le chemin qui l'amène à reconsidérer la notion de racine, la carte

---

12 Hensel lui-même l'affirma dans les introductions des éditions des œuvres de Kronecker. De plus, dans une lettre de Fuch publiée par Biermann dans son célèbre *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität*, adressée au ministre von Zedlik et datant de 1892, on trouve la demande de promotion d'Hensel au titre de *Extraordinarius* mentionnant l'attribution de cette tâche à ce dernier.

13 Sur l'histoire, compliquée, de la carrière de Hensel on pourra lire [Petri 2011].

14 À ce propos, on pourra lire [Brechenmacher 2011a] et [Brechenmacher 2011b].

15 À ce sujet, voir [Goldstein 2011a] et [Goldstein 2011b].

que nous nous proposons de suivre est sa série de cours sur la théorie des équations algébriques. L'accès à ces derniers se fait à partir de manuscrits[16] : contrairement à la plupart des autres cours que Kronecker a professés à Berlin, les *Vorlesungen über die Theorie der algebraichen Gleichungen* n'ont pas fait l'objet d'une édition[17]. Avant d'explorer plus en détail ces leçons, commençons par donner une présentation générale des cours de Kronecker, et du contexte de rédaction de ces manuscrits.

2.1. *Kronecker enseignant*

L'université de Berlin a été le lieu de formation de Kronecker, mais aussi celui où il aura passé l'ensemble de sa carrière de chercheur et d'enseignant[18]. Il y professe ainsi ses leçons, pendant 30 ans, sous différents statuts, entre le semestre d'hiver 1862-63 et celui de 1891-92. En 1861, il est élu, sur proposition de Kummer – proposition soutenue par Weierstraß et Borchardt – à l'Académie de Berlin, ce qui lui donne le droit d'enseigner à l'université de Berlin comme *lesendes Akademiemitglied*[19]. Encouragé par Kummer, il utilisera ce droit dès l'année suivante, et continuera jusqu'à sa mort en 1891. En 1864, il devient *Prädikat Professor*, et obtient enfin, en 1883, le statut d'*Ordentlicher Professor*. C'est finalement un lien fort qui unit Kronecker, la *Karl Friedrich-Wilhelm Universität*, les cours qu'il y a donnés et les étudiants qui ont pu y assister.

---

16 Il y a dix manuscrits accessibles de cette « théorie des équations algébriques », qui correspondent à sept sessions différentes : 1872/1873 [Kronecker 1873], 1878/1879 [Kronecker 1879], 1880/1881 [Kronecker 1881b], 1884/1885 ([Kronecker 1885a], [Kronecker 1885b], [Kronecker 1885c]), 1886/1887 ([Kronecker 1887d], [Kronecker 1887c]), 1888/1889 [Kronecker 1889] et 1890/1891 [Kronecker 1891].

17 Hensel, chargé du *Nachlass* de Kronecker, a publié ses cours sur l'arithmétique et les déterminants ([Kronecker 1901] et [Kronecker 1903]). Eugen Netto, ancien élève de Kronecker, a de son côté dirigé la publication de son cours sur les intégrales [Kronecker 1894].

18 L'une des particularités de l'université berlinoise est d'avoir, lors de sa création, accru l'importance de la recherche par rapport à l'enseignement, entre autres en développant un statut d'enseignant qui laisse du temps à la recherche : c'est ce que Gert Schubring appelle « the "dual role" of the teacher-researcher » [Mehrtens et al. 1981, p. 116]. Par ailleurs, entre sa thèse soutenue en 1845 et le début de ses enseignements en 1861, Kronecker aura eu une autre activité qui le retiendra dix ans à Liegnitz : il devra, à la mort de son oncle, s'occuper des affaires familiales. Il se mariera en 1848 avec sa cousine, Fanny Prausnitzer, et lorsqu'il retournera en 1855 à Berlin, il sera suffisamment à l'aise financièrement pour ne pas avoir à chercher un emploi rétribué (on pourra lire [Biermann 1981]).

19 On pourra lire à ce sujet [Biermann 1973, p. 100].

2.1.1. *Une publication souhaitée*

Hensel, dans l'introduction qu'il rédige pour le second tome de l'édition des *Vorlesungen*, explique que Kronecker lui-même souhaitait que ses leçons servent de base à une publication[20] :

> Kronecker lui-même m'a souvent et de façon détaillée parlé du dessein qu'il avait de faire publier ses leçons ; mais il insistait toujours sur le fait qu'il fallait pour cela encore les retravailler entièrement et les organiser. La valeur et l'attrait des leçons académiques reposent ainsi sur de tout autres qualités que celles d'un livre de cours sur le même sujet. Ici on ne doit pas donner tous les moyens pour l'examen approfondi de domaines entiers, mais l'enseignant doit plutôt éveiller l'enthousiasme pour cette discipline, il doit en quelque sorte introduire les auditeurs à l'intérieur de l'atelier des hommes qui ont réellement fait avancer la science. Ici on peut se passer d'une disposition entièrement rigoureuse, d'une représentation complète de tous les domaines, car cela les étudiants les trouveront plus tard dans les traités et les publications ; ici l'enseignant doit aborder des problèmes stimulants et prometteurs, même si les recherches ne peuvent pas encore être conduites jusqu'à leur achèvement, car justement des esprits réceptifs sont stimulés par de telles questions plus profondément que par des recherches pleinement menées. De plus les auditeurs des leçons de Kronecker étaient déjà en grande partie si bien initiés qu'il pouvait supposer connus de nombreux prérequis qui dans une représentation systématique, auraient nécessairement dû être traités en détail [Kronecker 1901, pp. VIII-IX].

Nous observons dans ce passage l'enthousiasme que souhaite susciter Kronecker dans ses leçons, et la place importante qu'il réserve à l'exposition de ses recherches les plus récentes. Nous possédons aussi, grâce aux ma-

---

20 Kronecker selbst hat über den Plan, seine Vorlesungen herauszugeben, oft und eingehend mit mir gesprochen ; aber er betonte dabei stets, dass sie für diesen Zweck noch ganz wesentlich umgearbeitet und systematisiert werden müssten. Liegt doch der Wert und der Reiz akademischer Vorlesungen in ganz anderen Vorzügen, als der eines Lehrbuches über denselben Gegenstand. Hier sollen nicht alle Hülfsmittel zur Durchforstung des ganzen Gebietes gegeben werden, wohl aber soll der Lehrer die Begeisterung für jene Disziplin wecken, er soll die Hörer gewissermaßen in das Innere der Werkstatt der Männer einführen, welche die Wissenschaft wirklich gefördert haben. Hier kann man auf eine völlig strenge Disposition, auf eine erschöpfende Darstellung des ganzen Gebietes verzichten, denn dies findet der Lernende später in den Lehrbüchern und Abhandlungen ; hier darf der Lehrer auf anregende und aussichtsvolle Probleme eingehen, auch wenn die Untersuchung noch nicht zu einem vollen Abschluss geführt werden kann, denn gerade solche Fragen werden empfängliche Geister viel tiefer zu eigenen Problemstellungen anregen, als vollständig durchgeführte Untersuchungen. Außerdem waren die Zuhörer der Kroneckerschen Vorlesungen großenteils bereits so gut vorgebildet, dass er viele Voruntersuchungen als bekannt voraussetzen konnte, auf die bei einer systematischen Darstellung notwendig ausführlich eingegangen werden musste.

nuscrits des cours de Kronecker, un témoignage direct de son regard sur les notes que prenaient ses étudiants[21] :

> Je souhaite ensuite vous demander si l'un ou plusieurs d'entre vous ont l'envie et la possibilité de préparer d'abord un sténogramme, puis une mise au propre de mes leçons. Peut-être plusieurs peuvent-ils se partager le travail. Pour ceux qui souhaiteraient faire cela pour moi, je vous demande de venir me voir jeudi à 12 heures. Je leur indiquerai alors les conditions plus précises [Kronecker 1885a, p. 16].

Nous ne savons malheureusement pas ce qui a pu se dire à ce rendez-vous, mais il semble bien qu'au moins trois des étudiants ont répondu présent[22]. Plusieurs témoignages corroborent le fait que Kronecker ait en effet souhaité publier ses leçons, mais Hensel précise qu'« après sa mort aucun travail préliminaire pour la réalisation de ce projet n'a été trouvé dans son *Nachlass* »[23]. Dans ce paragraphe, Hensel décrit aussi la forme que devrait prendre un cours aux yeux de Kronecker : nous retrouvons cette volonté d'allier enseignement et recherche qui caractérise l'université de Berlin au XIXe siècle. Nous avons aussi là un témoignage qui nous donne une première information sur la qualité des auditeurs de Kronecker : il s'agit bien d'étudiants avancés dans leurs études et prêts à suivre un cours basé sur des prérequis étendus.

2.1.2. *Des cours difficiles*

En effet, il leur fallait une connaissance assez vaste des mathématiques pour pouvoir suivre un cours dans lequel Kronecker exposait les résultats de ses recherches les plus récentes[24] :

> Ses leçons étaient exclusivement vouées aux objets auxquels il portait ses propres intérêts scientifiques, et ainsi les résultats de ses recherches étaient

---

[21] Ich möchte dann noch die Frage an Sie richten, ob nicht jemand oder mehrere Lust und Vermögen dazu hat, ein Stenogramm und danach eine Ausarbeitung meiner Vorlesung anzufertigen, vielleicht sich mehrere sie die Arbeit teilen. Diejenigen, welche die Idee haben sollten, das für mich zu machen, bitte ich, Donnerstag um 12 Uhr zu mir zu kommen. Ich werde Diesen dann die näheren Umstände mitteilen.

[22] Il y a trois rédacteurs différents du manuscrit des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* du semestre d'hiver 1884-85 [Kronecker 1885a].

[23] Nach seinem Tode fanden sich in seinem Nachlasse gar keine Vorarbeiten für die Ausführung dieses Planes [Kronecker 1901, p. IX].

[24] Seine Vorlesungen waren ausschliesslich den Gegenständen gewidmet, denen er sein eigenes wissenschaftlisches Interesse zugewandt hatte, und so waren seine Forschungsresultate dem Kreise seiner vertrauteren Schüler schon früh bekannt, und seine Vorlesungen gehörten, wenn auch nur den fortgeschrittenen und wissenschaftlich interessirten Schülern verständlich, zu dem Werthvollsten und Eigenartigsten, was die Berliner Universität dem Mathematiker bot.

> connus très tôt du cercle de ses étudiants les plus proches, et ses leçons faisaient partie, même si elles n'étaient compréhensibles que par les étudiants avancés et scientifiquement intéressés, de ce que l'université de Berlin avait de plus précieux et de plus particulier à offrir au mathématicien [Weber 1893, p. 15].

Ces cours, par leur contenu, attiraient des mathématiciens venant de toute l'Europe. Adolf Kneser[25], dans un discours écrit pour les cent ans de la naissance de Kronecker, donne une description de l'enseignant qu'il fut, et le décrit comme un orateur enthousiaste et pleins d'esprit[26] :

> Les traits d'esprit, c'était une chose à part entière. Kronecker aimait commencer avec une belle introduction préparée, dans laquelle un ensemble de traits aiguisés, pleins d'esprit étaient entrelacés, qui tombaient dans l'oreille de chaque auditeur, et qui insufflaient à chacun l'agréable illusion qu'il comprenait quelque chose à la question [Kneser 1925, p. 213].

Cependant, la difficulté de ses leçons décourageait beaucoup d'étudiants[27] :

> Les rangées d'auditeurs qui remplissaient au début la pièce s'éclaircissaient vite ; Kronecker supportait ce phénomène récurrent avec calme et sérénité, et il disait qu'il voulait faire accrocher un rideau tiré au milieu de la pièce, de façon à ce que, lorsque l'essaim s'était perdu, le cercle des initiés puisse s'assoir ensemble dans une intimité plus chaleureuse. Kronecker avait une joie infinie à communiquer ses pensées à ces initiés dans des conversations mathématiques [Kneser 1925, p. 213].

Mittag-Leffler, alors étudiant à Berlin, écrit d'ailleurs en 1875 une lettre à Hermite donnant une idée du nombre d'étudiants qui constituent ce cercle :

---

25 Adolf Kneser (1862-1930) a soutenu en 1884 sa thèse dirigée par Kummer et Kronecker à Berlin où il a suivi les cours de Kronecker.

26 Ja die Aperçus, das war eine eigene Sache. Kronecker liebte es, mit einer schön gefaßten Einleitung zu beginnen, in die eine Menge scharfgeschliffener, geistvoller Aussprüche eingeflochten waren, die jedem Zuhörer ins Ohr fielen und bei allen die angenehme Illusion erweckten, man verstünde etwas von der Sache.

27 Die Reihen der Zuhörer, die anfangs den Raum füllten, lichteten sich schnell ; Kronecker ertrug diese sich immer wiederholende Erscheinung mit heiterer Gelassenheit und sagte, er wolle einen Vorhang anbringen lassen, der durch die Mitte des Raumes gezogen werden solle, damit, wenn sich der Schwarm verlaufen habe, der Kreis der Eingeweihten in gemütlicher Enge beisammensitzen könne. Den Eingeweihten gegenüber hatte Kronecker eine unendliche Freude an der Mitteilung seiner Gedanken, am mathematischen Gespräch.

> Une chose étonnante, je trouve, c'est que Monsieur Weierstrass et Monsieur Kronecker peuvent trouver tant d'auditeurs – entre 15 et 20 – pour des cours si difficiles et si élevés... [Dugac 1973, p. 153]

C'est un enseignant n'hésitant pas à mettre dans ses cours les résultats de ses recherches les plus récentes qui est donc décrit par Kneser, Weber et Hensel. S'il perd une grande partie de son auditoire, ceux qui réussissent à le suivre et qui deviendront, pour la plupart, des mathématiciens à part entière, peuvent attendre de lui toute l'aide souhaitée[28] :

> Je voudrais encore noter, que je m'entretiens volontiers avec vous après les leçons, que je vous encourage expressément à venir me voir librement pour toute remarque ou tout doute, et ce directement après la leçon, de préférence les lundis et les jeudis, mais cela est possible les autres jours aussi [Kronecker 1885a, p. 15].

2.1.3. *Les atouts de l'oralité*

Dans certains des manuscrits apparaît l'une de ces « belles introductions préparées »[29], qui nous donne quelquefois un aperçu du point de vue de Kronecker sur ce que doit être un cours à l'université[30] :

> Dans un livre scolaire, l'auteur ne peut pas dire tout ce qu'il est autorisé à garder dans une présentation orale. Et s'il n'y avait qu'une différence, c'est que j'ai ici le droit et peut-être le devoir, de ne pas seulement donner les méthodes qui conduisent au but, mais aussi de vous mettre en garde contre celles qui ne peuvent pas réussir. C'est cette activité négative, cette mise en garde contre la déroute, que seule la parole orale peut transmettre. Oui, nous pouvons même

28 Ich möchte noch erwähnen, daß ich mich gerne von Ihnen nach den Vorlesungen sprechen lasse, daß ich Sie ausdrücklich ersuche bei jedem Bedenken, bei jeder Unklarheit ganz frei [sich] an mich zu wenden und zwar stets nach der Vorlesung, am liebsten Montags und Donnerstags, aber es geht auch an den anderen Tagen.

29 Tout particulièrement dans celui sur la théorie des équations algébriques de l'hiver 1884-85 [Kronecker 1885a].

30 In den Lehrbüchern kann der Verfasser nicht alles sagen, was dem mündlichen Vortrag ~~vorbehalten~~ gestattet bleibt, und wäre es nur der Unterschied, daß ich hier das Recht und vielleicht die Pflicht habe, nicht nur die Methoden anzugeben, durch die man zum Ziele gelangt, sondern auch Sie vor denjenigen zu warnen, welche keinen Erfolg haben können. Diese negative Thätigkeit, dieses Bewahren vor den Abwegen ist das, was nur das mündliche Wort geben kann. Ja, man kann fast sagen, daß eine vollendete schriftliche Darstellung gerade das Gegenteil von dem bewirkt, was sie bezweckt. Kaum wird es einen Leser geben, welcher aus einem Satz, der genau so viel besagt, wie er besagen soll, nicht zuerst doch etwas Abgeändertes herausließt. Der mündliche Vortag hat den Vorzug denselben Gedanken-Inhalt unter verschiedenen Formen mehrmals geben zu können, welche wie eine Anzahl Kreise ein Stückchen Gemeinsames haben, und diese Art der Begrenzung ist leichter als die durch nur eine Curve.

> dire qu'une présentation écrite achevée est le contraire complet de ce qu'elle a pour but de servir. Il n'y a que peu de lecteurs qui, d'une phrase qui dit exactement ce qu'elle doit dire, ne lisent pas d'abord quelque chose de différent. L'exposé oral a l'avantage de pouvoir donner le même contenu de la pensée plusieurs fois sous différentes formes, qui comme un nombre de cercles ont une petite partie commune, et il est plus facile de délimiter de cette façon que par seulement une courbe [Kronecker 1885a, p. 2].

La fonction du cours revêt ainsi pour Kronecker une grande importance, en particulier par la possibilité qui lui est laissée d'avancer d'un point à l'autre par de multiples chemins, dont certains, et il insiste sur ce point, n'ont pas d'issue. Il y a une difficulté intrinsèque à comprendre un texte mathématique écrit, que seule une explication orale permet de surmonter. Si une grande partie de cette oralité a certainement été perdue lors de la prise de notes[31], les manuscrits resteront une aide précieuse pour comprendre, et mieux interpréter, certains textes que Kronecker a publiés.

2.2. *Les manuscrits des cours de Kronecker*

Les manuscrits des cours de Kronecker sont donc des notes de cours prises par certains de ses auditeurs qui ont par la suite été mises en forme[32], souvent à la demande de Kronecker lui-même [Kronecker 1901, p. VI]. Nous avons vu que beaucoup de documents appartenant à Hensel avaient été détruits en même temps que le *Nachlass* de Kronecker. Sa bibliothèque, qui contenait environ 1500 volumes, a quant à elle été vendue rapidement après sa mort, en 1941, par sa famille. La *Reichuniversität* de Strasbourg – généreusement dotée car relais de la propagande en territoire récemment conquis – a acquis tous ces volumes. Il semble que les notes de cours personnelles de Kronecker que possédait Hensel aient fini comme le reste de ses documents : au fond de la mine.

La liste des manuscrits dont nous avons connaissance fait apparaître les quatre « grands » cours que donnera Kronecker au cours de sa carrière : la théorie des équations algébriques, la théorie des nombres (ou Arithmé-

---

31 Dans l'introduction du manuscrit [Kronecker 1885a], le rédacteur semble avoir pris en note l'ensemble du discours de Kronecker. La plupart des passages que nous utilisons pour essayer de donner quelques éléments de contexte sur le déroulé de ces leçons ont été probablement barrés en vue de l'édition de ce cours. Si cette dernière avait vu le jour, tous ces éléments en auraient certainement été expurgés. Ce rédacteur, qui ne semble faire aucun tri dans sa prise de note, laissera d'ailleurs sa place à deux autres étudiants pour la suite du cours.

32 Il y vingt-six manuscrits à la bibliothèque de Strasbourg, auxquels nous pouvons ajouter quelques notes de cours de Runge et Kneser, ainsi que deux manuscrits de cours supplémentaires présents à la bibliothèque de Göttingen.

tique), la théorie des déterminants et la théorie des intégrales simples et multiples[33].

Eugen Netto et Kurt Hensel ont édité, sous le titre de *Vorlesungen über Mathematik*, les trois derniers cours. Ils sont tous deux des anciens élèves de Kronecker, et Hensel a été chargé, comme nous l'avons vu, de faire paraître ses œuvres complètes. Netto a publié le premier volume des *Vorlesungen* : *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale* en 1893. Hensel publiera les *Vorlesungen über Zahlentheorie* en 1901 et les *Vorlesungen über Determinantentheorie* en 1903. C'est donc au seul à ne pas avoir été édité que nous nous intéresserons ici, c'est-à-dire à celui sur la théorie des équations algébriques.

2.2.1. *Comment était organisé le cycle des cours de Kronecker ?*

Pour Weierstrass, durant la période pendant laquelle lui-même, Kummer et Kronecker enseignaient à l'université[34] :

> [il a été possible] d'organiser les cours de mathématiques d'après un plan, auquel se joindra plus tard aussi volontairement et avec succès l'appui de forces plus jeunes, de sorte que les étudiants aient la possibilité dans un cursus de deux ans d'écouter une suite considérable d'exposés sur les plus importantes disciplines des mathématiques dans un ordre convenable, y compris un certain nombre qui n'était pas ou peu pratiqué dans les autres universités [Biermann 1973, p. 102].

L'ensemble des cours sera donc organisé sur deux ans[35], et Weierstrass, comme d'ailleurs Kronecker organiseront leur propre cycle à l'intérieur de ce cursus. Le journal interne de la *Königliche Technische Hochschule zu Berlin* publie en 1910 la nécrologie de l'un de ses *Privatdozent*, Eugen Meyer, qui a suivi à Berlin les cours de Kronecker[36] :

---

33 On peut aussi ajouter à cela son cours *Sur le concept de nombre en mathématiques* qu'il a donné en 1891, et que Jacqueline Boniface et Norbert Schappacher ont retranscrit et commenté dans la *Revue d'histoire des mathématiques* [Boniface & Schappacher 2001]. Il n'assura qu'une fois cet enseignement, l'année de sa mort.

34 Durch das Zusammmenwirken von Kummer, Weierstraß und Kronecker wurde es möglich, nach einem umfassenden [...] Plan, dem sich später auch herangezogene jüngere Kräfte willig und erfolgreich anschlossen, den mathematischen Unterricht in der Weise zu organisieren, daß den Studierenden Gelegenheit gegeben ist, in einem zweijährigen Cursus eine beträchtliche Reihe von Vorträgen über die wichtigsten mathematischen Disziplinen in angemessener Aufeinanderfolge zu hören, darunter nicht wenige, die an anderen Universitäten gar nicht oder doch nicht regelmäßig gelesen werden.

35 Parfois une troisième année sera nécessaire pour terminer un cycle.

36 p. 152 de ce journal : Er studierte zuerst in Gießen, wo Pasch, dann in Berlin, wo Kronecker einen entscheidenden Einfluß auf seine geistige Entwickelung ausübte.

> Il a étudié d'abord à Gießen, ensuite à Berlin, où Pasch puis Kronecker ont exercé une influence déterminante sur son développement intellectuel. Kronecker l'a rapidement remarqué et a chargé le jeune étudiant au troisième semestre de la rédaction de ses leçons sur les déterminants, au semestre suivant de celle de sa grande leçon sur les équations algébriques, rédactions qui ont fourni un matériel précieux lors de la publication des *Vorlesungen* de Kronecker.

Deux semestres consécutifs sont donc consacrés aux déterminants, puis à la théorie des équations algébriques. Nous remarquons que nous avons là une fois de plus un témoignage que les manuscrits que nous étudions ont bien été rédigés, au moins dans certains cas, à la demande de Kronecker. Hensel précise cette organisation dans l'introduction du second tome qu'il a consacré à l'édition des leçons de Kronecker[37] :

> Les leçons sur la théorie des déterminants dont je rends ici public le premier volume, forment la deuxième partie du cycle des conférences académiques sur l'arithmétique générale, que Léopold Kronecker a tenues entre 1883 et 1891 à l'université de Berlin. La trame était répartie dans ces trois leçons sur la théorie des nombres, la théorie des déterminants et l'algèbre de sorte que chacune d'entre elles fasse un tout et puisse être comprise sans la connaissance des deux autres [Kronecker 1903, p. V].

Il y a ainsi une volonté de rendre indépendant chacun des cours qu'un même enseignant donne : cela autorisera à ne professer un cours qu'une année sur deux, tout en permettant à l'ensemble des étudiants de les suivre. Si l'on regarde la liste des manuscrits, nous obtenons une image à peu près complète de ce en quoi devait consister l'enseignement de Kronecker, tout au moins les dix dernières années de sa vie : il enseignait en alternance tous les deux ans *Théorie des nombres/Théorie des déterminants* et *Théorie des équations algébriques/Théorie des intégrales.* À cela pouvait s'ajouter parfois un cours de moindre importance.

Kronecker wurde bald auf ihn aufmerksam und beauftragte den jungen Studenten im dritten Semester mit der Ausarbeitung seiner Vorlesungen über Determinanten, im folgenden Semester mit der seiner großen Vorlesung über algebraische Gleichungen, Ausarbeitungen, die bei der Herausgabe der Kroneckerschen Vorlesungen das wertvollste Material geliefert haben.

37 Die Vorlesungen über Determinantentheorie, deren ersten Band ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, bildeten den zweiten Teil in dem Cyklus akademischer Vorträge über allgemeine Arithmetik, welche Leopold Kronecker in den Jahren 1883 1891 an der Berliner Universität zu halten pflegte. Der Stoff war in diesen drei Vorlesungen über Zahlentheorie, Determinantentheorie und Algebra so verteilt, dass jede von ihnen ein Ganzes für sich bildete und ohne Kenntnis der beiden anderen vollständig verstanden werden konnte.

2.2.2. *Qui a rédigé ces cours ?*

Les manuscrits ne sont pas systématiquement signés, mais parfois un nom apparaît. Nous pouvons ainsi citer comme rédacteurs Georg Hettner, Carl David Tolmé Runge, Paul Stäckel, Karl Weltzien, Karl Friedrich August Gutzmer ou Eugen Meyer. Il s'agit toujours d'élèves de Kronecker qui soutiendront leur thèse deux à trois ans plus tard, et qui auront une carrière universitaire. Ce sont donc de jeunes mathématiciens en devenir, compétents, et maîtrisant certainement le contenu mathématique de ces cours. Nous les avons appelés « rédacteurs », mais nous ne pouvons en fait qu'affirmer que ces manuscrits sont tirés de leurs notes : l'identité du calligraphe est incertaine. En effet, il n'était pas rare que l'on fasse appel à des copistes professionnels pour mettre en forme un manuscrit. Pour Runge, nous pouvons comparer l'écriture du cours qui lui est attribué (*Vorlesungen* du semestre d'hiver 1881-82) avec des notes de sa main et il est tout à fait possible qu'il ait lui-même copié le manuscrit. Pour quelques-uns d'entre eux, il y a plusieurs rédacteurs. Par exemple, dans [Kronecker 1885a] il y a au moins trois rédacteurs, et les changements ont lieu à chaque nouveau cours. Nous imaginons sans peine les étudiants de Kronecker s'organiser pour mettre au propre à tour de rôle les notes prises à chaque séance.

2.2.3. *Une source crédible*

Quel statut pouvons-nous donner à ces manuscrits ? Nous ne possédons pas les notes de cours de Kronecker, nous n'avons presque aucune de ses lettres et très peu d'écrits dans lesquels il a exprimé son point de vue sur ceux-ci. Cependant, nous avons toutes les raisons de penser que ces manuscrits, s'ils ne sont pas de la main de Kronecker, correspondent à sa pensée. Déjà, les rédacteurs connus sont, comme nous l'avons vu, de futurs mathématiciens, tous aptes à retranscrire le déroulement des cours. Ensuite, la plupart de ceux-ci viennent du fonds Hensel : il n'y a donc presque aucun doute sur leur authenticité, et nous savons qu'ils ont servi, ou étaient destinés, à une édition des *Vorlesungen*. Enfin Kronecker a souhaité la rédaction de certains d'entre eux, en avait connaissance, et les prenait en compte dans la rédaction de ses articles[38] :

---

38 Ich will im Folgenden an meinen im Monatsbericht, vom Februar 1873 veröffentlichten Aufsatz einige weitere Entwickelungen knüpfen und werde dabei die dort angewendeten Bezeichnungen benutzen, ohne dieselben von Neuem zu erklären. Hierzu schicke ich die Bemerkung voraus, dass ich den ganzen Inhalt der ersten drei Abschnitte sowie das Wesentlichste des auf die Gleichungen vierten Grades bezüglichen letzten Theils schon in meinen Universitäts-Vorlesungen im Januar und Februar 1875 ausgeführt und bei der hier vorliegenden Darstellung desselben mich genau

> Je voudrais dans ce qui suit associer quelques autres développements à mon essai publié dans le *Monatsbericht* de février 1873 et j'utiliserai les mêmes notations que dans ce mémoire sans les expliquer de nouveau. Sur ce point j'indique au préalable que j'ai déjà développé le contenu entier des trois premiers chapitres ainsi que l'essentiel de la dernière partie portant sur les équations du quatrième degré dans mes leçons à l'université en janvier et février 1875, et lors de la présentation se trouvant ici, je me suis bien tenu à la rédaction d'un de mes auditeurs de l'époque, le docteur *Hettner* [Kronecker 1878b, p. 39].

Nous avons vu plus haut d'autres témoignages des interactions entre Kronecker et ces manuscrits : ils sont rédigés à la demande de Kronecker, qui choisit ses étudiants les plus brillants pour effectuer cette tâche. Nous estimons donc que ces manuscrits doivent être représentatifs, sinon du contenu réel, tout au moins du contenu que Kronecker souhaitait faire apparaître dans ses cours. C'est pourquoi, sauf cas particulier, nous choisissons d'attribuer à Kronecker le contenu de ces manuscrits.

2.3. *Les* Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen

Nous possédons dix manuscrits de la « théorie des équations algébriques », qui correspondent à sept sessions différentes entre 1872 et 1891. Il s'agit donc de cours manuscrits rédigés à partir de notes de cours d'élèves de Kronecker. La plupart des rédactions sont en *Kurrentschrift*[39], et font entre deux cents et sept cents pages chacune.

Nous n'avons pas connaissance de l'existence de manuscrits de son cours sur la théorie des équations algébriques datant d'avant 1872. Cependant, dans un article de 1881 intitulé *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabel*, Kronecker affirme avoir déjà présenté une grande partie des résultats de cet article dans ses cours des semestres d'hiver 1865-66 et 1870-71 [Kronecker 1881a, p. 301]. Or ces notions se retrouvent dans l'ensemble des manuscrits à notre disposition : Kronecker semble bien avoir commencé à travailler sur ces leçons dès ses premières années d'enseignement. La structure des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* évolue au fil des années, en fonction des expériences d'enseignement accumulées et des thèmes de recherche de Kronecker. Il est difficile de trouver des documents qui nous donneraient des indices sur la façon dont se déroulaient exactement les cours de Kronecker à l'univer-

---

an die Ausarbeitung eines meiner damaligen Zuhörer, des Hrn. Dr. *Hettner*, gehalten habe.

39 Le *Kurrentschrift* correspond à la forme manuscrite (et cursive) des diverses formes de gothique utilisées en Allemagne. Elle disparaît progressivement au XX^{e} siècle.

sité de Berlin. Cependant, dans l'un des manuscrits des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, les « apartés » de Kronecker sur l'organisation interne de ses leçons ont été retranscrits, nous apportant ainsi un précieux témoignage sur leur déroulé : les cours de Kronecker sur la théorie des équations algébriques sont habituellement de six heures hebdomadaires, réparties sur trois jours de la semaine. D'après E. Netto, la durée des cours pouvait être de deux heures, quatre heures ou six heures [Kronecker 1894, p. V] : il s'agit donc là du plus grand format classique de cours proposé par l'université de Berlin, et donc de l'un des « grands cours » que pouvait y suivre un étudiant.

2.3.1. *Permanence de la structure et évolution du contenu*

Lorsque nous observons les grands chapitres des différents manuscrits, nous trouvons finalement peu de changements au cours des années. À une exception près[40], le premier chapitre, plus ou moins développé, consiste en une introduction retraçant l'histoire de l'algèbre. Ensuite, Kronecker fait une introduction, qu'il appelle parfois *introduction concrète* (*sachliche Einleitung* [Kronecker 1885a, p. 38]) dans laquelle il donne quelques définitions, mais exprime aussi son point de vue sur certaines notions. Si le contenu de cette courte partie évolue au fil des ans, elle sera toujours présente.

Une fois ces deux introductions terminées, Kronecker commence systématiquement par présenter les équations du second et du troisième degré. Cette exposition, dont l'ampleur varie de quatre à cent pages, en donne évidemment la résolution, mais est aussi utilisée par Kronecker pour mettre en évidence une méthode, pour introduire un nouveau concept, etc.

Le chapitre suivant est consacré au passage aux équations de degré n. Le travail de Kronecker portera essentiellement sur la manipulation des racines des équations, et en particulier sur les polynômes symétriques des racines des équations. Les outils construits dans cette partie seront fondamentaux pour la suite de son cours, et lui permettront par exemple, comme l'a déjà fait Gauss en 1816, de produire une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. La première grande partie de son cours se termine alors par un chapitre sur le théorème de Sturm qui contient, lorsqu'elle est présente, la *théorie des caractéristiques.* La seconde partie, dont le volume et le contenu évoluent à chaque nouveau semestre,

40 Le manuscrit de 1884-85 donné par le Dr. Thiel [Kronecker 1885b].

contient dès l'hiver 1878-79 des éléments de la théorie des *Gattungen*[41], théorie qui prendra toute sa place après la publication des *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* en 1882 [Kronecker 1882a]. Il apparaît donc immédiatement que la structure, dans son ensemble, évolue très peu :

(1) Introduction historique et définitions préalables
(2) Équations quadratiques et cubiques
(3) Équation de degré n et fonctions symétriques
(4) Le théorème de Sturm (avec ou sans la théorie des caractéristiques)
(5) Théorie des *Gattungen* (ou théorie de l'élimination avant 1882, mais toujours avec les équations abéliennes et les principes de Galois)

Si la structure semble immuable, ce n'est pas le cas du contenu. Comme nous l'avons vu, Kronecker expose les sujets sur lesquels il travaille dans les cours qu'il professe à Berlin. Ainsi, par exemple, le contenu de son article de 1878 sur la théorie des caractéristiques [Kronecker 1878a] n'est pas présent dans le manuscrit de 1872-73, apparaît dans celui de 1878-79, disparaît à partir de 1884 pour réapparaître en 1890-91 : selon les préoccupations mathématiques de Kronecker, certains contenus peuvent être plus ou moins développés.

De même, la publication de son article de 1882 *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* marque un tournant dans la présentation qu'il donne de sa théorie des équations algébriques : il introduit la théorie des *Gattungen*, et réinterprète tout son travail sur Galois et Abel dans les termes de ses nouveaux concepts.

2.3.2. *Une introduction historique*

La presque totalité des cours de Kronecker commence par une introduction, plus ou moins longue, dans laquelle il donne une approche historique de la question qu'il souhaite traiter. Cette approche n'est pas systématique chez les autres enseignants de la *Friedrich-Wilhelms-Universität*[42], ni d'ailleurs dans les cours publiés dans le reste de l'Europe à la même époque[43]. Ainsi, la présence d'un véritable *cours d'histoire des mathématiques*

41 Théorie qui s'apparente à une théorie des extensions de corps. Un « domaine de genre $\mathfrak{G}'$ » (*Bereich der Gattung* $\mathfrak{G}'$ [Kronecker 1882a, p. 252]) est en fait une extension d'un corps de base $\mathbb{Q}(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$, que Kronecker nomme « un domaine de base » (*Stammbereich* [Kronecker 1882a, p. 252]). Pour plus de détails, on pourra lire [Penchèvre 2007].

42 Ce n'est pas le cas, par exemple, pour les cours de Weierstrass [Weierstrass 1881], [Weierstrass 1882a], [Weierstrass 1882b] et [Weierstrass 1883].

43 Voir par exemple : [Francoeur 1838], [Serret 1849], [Salmon 1885], [Weber 1895] ou [Netto 1900].

au début de ses leçons est particulièrement remarquable, d'autant plus que pour Kronecker « il n'y a pas d'autre discipline qui contienne comme l'algèbre un enseignement aussi riche dans son histoire »[44].

Il n'y a pas d'évolution à proprement parler pour la partie historique de l'introduction, mais selon les années et les manuscrits, elle est plus ou moins développée et plus ou moins indépendante de la partie consacrée à l'introduction des notations et des concepts. Cette introduction, qui peut dépasser dans certains manuscrits les quarante pages, s'étale quelquefois sur plusieurs séances.

Ce que Kronecker souhaite y faire, c'est présenter « à grands traits l'histoire de l'algèbre, dans laquelle toute l'histoire des mathématiques non mécaniques et géométriques est résumée »[45].

Cette introduction commence par un passage en revue des travaux sur la théorie des équations algébriques depuis Euclide. Il met en avant deux périodes dans cette histoire : avant et après les années 1770. Cette date correspond à la publication de deux traités, l'un de Vandermonde et l'autre de Lagrange ([Vandermonde 1771] et [Lagrange 1771]). Avant cette date, il présente une histoire de l'algèbre qui est une histoire de la résolution algébrique des équations, chaque étape permettant la résolution générale de l'équation de degré supérieur, jusqu'à celle de degré quatre par Ferrari. Kronecker distingue deux problèmes majeurs qui, d'après lui, « ont occupé de préférence pendant deux mille ans les algébristes » [Kronecker 1881b, p. 5]. Le premier, théorique, concerne la résolubilité par radicaux, résolue négativement d'après lui en 1826 par Abel. Un second, pratique, touche au nombre de racines réelles d'une équation entre deux bornes, problème auquel Sturm a répondu en 1829. Cette introduction historique est un exposé chronologique, qui commence en traitant les mathématiques d'Euclide et se termine par celles qui lui sont contemporaines. Kronecker montre une connaissance approfondie de l'histoire des mathématiques, et s'intéresse plus particulièrement aux recherches qui ont eu lieu aux XVIII^e^ et XIX^e^ siècle.

---

44 [Kronecker 1885a, p. 3] : Es enthält nun keine andere Disziplin, wie die Algebra, Lehrreiches in ihrer Geschichte.

45 [Kronecker 1885a, p. 10] : Wenn ich Ihnen morgen in großen Zügen die Geschichte der Algebra vorführen will, in welche die ganze Geschichte der nicht mechanischen und geometrischen Mathematik zusammengefasst ist, werde ich mit der Zeit anfangen, wo in Europa die Zahlzeichen eingeführt wurden und auch die ganze Welt eine neue Aera begann.

3. QUELLE ALGÈBRE ?

On sait qu'entre le début et la fin du XIX^{e} siècle, de profonds changements s'opèrent dans ce qui représentera l'*algèbre* pour les mathématiciens. Non seulement les méthodes, mais aussi les objets même de l'algèbre changent, au point qu'il est extrêmement délicat d'utiliser ce terme pour désigner un contenu spécifique sans tenter de le contextualiser. Au début du XIX^{e} siècle, l'algèbre correspond pour la plupart des mathématiciens à l'étude des équations polynomiales. Cependant, les formes que prennent ces études évoluent tellement au cours du siècle que l'algèbre de 1900 a finalement peu à voir, de par ses méthodes et ses objets, avec celle de 1800. Kronecker, qui produit ses mathématiques pendant la seconde moitié du XIX^{e} siècle, participe activement à cette évolution. Nous allons essayer de rendre compte de sa vision de l'algèbre à partir de ce qu'il en dit dans ses leçons sur la théorie des équations algébriques. Cela nous permettra dans un second temps de montrer comment sa pratique mathématique – dans le cas particulier du chapitre sur le théorème de Sturm que nous étudions ici plus particulièrement – participe à cette vision.

3.1. *L'algèbre comme formation à l'abstraction*

L'algèbre a pour Kronecker une place privilégiée dans son enseignement, car elle permet d'amener l'étudiant à un plus grand degré d'abstraction. En effet, d'après Kronecker, « nous avons affaire à l'abstraction non seulement dans les mathématiques, mais aussi dans toutes les sciences », et après le passage « des nombres aux calculs », un degré d'abstraction supplémentaire est obtenu par le passage « des calculs à l'algèbre »[46]. À propos de la grande difficulté de ses cours, Kronecker affirme[47] :

> Je devrai pour cela exposer votre endurance à un matériel qui semble très abstrait, voire sec, et peu habituel ; mais je sais, et pas seulement par ma propre expérience, que, une fois que l'on s'est habitué, on apprend à reconnaître les beautés partiellement cachées des équations algébriques, telles que

46 [Kronecker 1885a, pp. 1-2] : dann kommt die weitere Abstraktion von der Bestimmtheit der Zahlen zu den Unbestimmten. Diese beiden Schritte sind die zum Rechnen und vom Rechnen zur Algebra.

47 Ich werde dabei an Ihre Ausdauer bei ganz abstracten, fast trocken erscheinenden Materien Ansprüche, und zwar nicht gewöhnliche stellen müssen ; aber ich weiß und nicht bloß aus eigener Erfahrung, daß, wenn man sich hier hinein gewöhnt hat, man die etwas verborgenen Schönheiten der algebraischen Gleichungen erkennen lernt, ebenso wie die der jüngeren mathematischen Theorien, und dabei erwirbt man sich zugleich den großen Vorteil einer vortrefflichen Schulung in mathematischer Abstraction.

> celles des nouvelles théories mathématiques, et en même temps on acquiert le grand avantage d'un excellent apprentissage en abstraction mathématique [Kronecker 1885a, p. 1].

Pour Kronecker, l'algèbre fournit donc « un excellent exercice et une excellente formation en abstraction mathématique »[48], abstraction qui n'est pas le propre des mathématiques, mais qui au contraire est commune à toutes les sciences[49]. Si l'algèbre est particulièrement adaptée à cette tâche, c'est qu'il est a priori plus facile d'y être « pointu et complet »[50]. Mais si l'abstraction présente dans l'algèbre est commune à toutes les sciences, il ne faudrait pas comprendre que Kronecker estime que l'algèbre est une sorte de « logique mathématique »[51] :

> L'algèbre a été nommée la logique des mathématiques mais je ne souhaite pas y souscrire car toute la mathématique est logique et le comprendre et le faire comprendre est somme toute la tâche principale de la science, et notamment celle du professeur des Universités, à savoir celle que je crois devoir réserver à l'enseignant plutôt qu'au manuel [Kronecker 1885a, p. 2].

Il est d'ailleurs possible que Kronecker fasse ici allusion à l'ouvrage que Frege vient juste de publier : *Die Grundlagen der Arithmetik* [Frege 1884] paru en 1884 et dont le sous-titre est *Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*.

3.2. *De la* résolution *à la* théorie *des équations*

Kronecker affirme que[52],

> Dans le calcul on a les règles, dans l'algèbre les lois ; c'est presque comme un pas de l'art à la science [Kronecker 1885a, p. 2].

48 [Kronecker 1885a, pp. 2-3] : eine vortreffliche Uebung und Schulung in mathematischer Abstraction.

49 [Kronecker 1885a, p. 1] : « Nous avons affaire à l'abstraction non seulement dans les mathématiques mais aussi dans toutes les sciences. » « Wir haben es in der Mathematik nicht allein, sondern in allen Wissenschaften überhaupt mit der Abstraction zu thun. »

50 [Kronecker 1885a, p. 3] : scharf und vollständig.

51 Die Algebra ist einmal die Logik der Mathematik genannt worden, doch will ich das nicht unterschreiben, denn die ganze Mathematik ist Logik und das Einsicht geben und finden ist wie die Hauptaufgabe der Wissenschaft überhaupt, so insbesondere die des Universitätslehrers und zwar die, welche ich dem Universitäts-Professor den Lehrbüchern gegenüber vorbehalten zu müssen glaube.

52 Beim Rechnen hat man die Regeln, in der Algebra die Gesetze ; es ist das beinahe wie der Schritt von der Kunst zur Wissenschaft.

C'est le passage de la mise en place de techniques de résolution à une vraie théorie des équations que semble vouloir caractériser Kronecker par ces quelques mots. Les leçons de Kronecker ne s'intitulent pas *Vorlesungen über Algebra*, comme d'autres traités du XIX^{e} siècle[53], mais bien *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*. Si les équations algébriques sont bien les objets centraux de ses cours, est-ce pour autant que Kronecker voit dans leur étude la totalité de l'algèbre ?

Il répond en partie, dans l'introduction de son cours du semestre d'hiver 1884-85, à cette question[54] :

> Mes leçons doivent, en partant du plus simple, s'étendre aux parties de l'algèbre qui concernent les équations algébriques, soit qu'elles y aient leur fondement, soit qu'elles y trouvent leur but ; pourtant une grande partie de l'algèbre en reste exclue, même si de temps en temps une courte excursion dans tel domaine plus lointain est entreprise. La restriction se trouvant dans le titre est imposée par la grande extension de l'algèbre dont les résultats et les méthodes si divers ne trouvent plus maintenant de place dans une leçon. Une telle leçon pourrait plutôt, même si elle ne contenait que l'essentiel, tant qu'elle n'est pas complétée par des principes entièrement généraux, manquer de cohérence. Déjà dans la partie que je veux aborder, le systématisme n'est pas sans difficulté ; c'est pourquoi je n'annonce qu'un développement aussi systématique que possible. Ce n'est pas une construction comme dans la géométrie d'Euclide ou la théorie des nombres de Gauss, ce n'est qu'une certaine suite de choses ordon-

---

53 Par exemple l'*Algèbre supérieure* de Francoeur [Francoeur 1838], les *Leçons d'algèbre* de Louis Etienne Lefébure de Fourcy [Lefébure de Fourcy 1850], le *Traité d'algèbre supérieure* de Serret [Serret 1849] pour la première moitié du XIX^{e} siècle, et les *Lessons introductory to the modern higher algebra* de Salmon [Salmon 1885], le *Lehrbuch der Algebra* de Weber [Weber 1895] ou les *Vorlesungen über Algebra* de Netto [Netto 1900] pour la seconde moitié.

54 Meine Vorlesung soll vom Einfachsten ausgehend sich über die Teile der Algebra erstrecken, welche sich auf die algebraischen Gleichungen beziehen, sei es, dass sie hier ihren Entstehungsgrund haben, sei es, dass sie hier ihren Zielpunkt finden ; dabei werden immer große Teile der Algebra ausgeschlossen bleiben, wenn auch hin und wieder ein kurzer Streifzug in ein solches, ferner liegendes Gebiet unternommen werden wird. Die im dem Titel liegende Beschränkung ist durch die große Ausdehnung der Algebra geboten, deren so verschiedenartige Resultate und Methoden jetzt nicht mehr in einer Vorlesung Platz finden. Vielmehr möchte eine solche Vorlesung, wenn sie auch nur das Wichtigste nimmt, so lange sie nicht durch ganz allgemeine Prinzipien ergänzt wird, des Zusammenhanges ermangeln. Schon in den Teilen, welche ich auseinandersetzen will, hat das Systematische nicht geringe Schwierigkeiten ; ich habe deshalb nur eine möglichst systematische Entwicklung angekündigt. Es ist nicht ein Aufbau, wie der der Geometrie bei Euclid oder der Zahlentheorie bei Gauß, es ist nur eine überlegte durch sachliche, methodische und pädagogische Gesichtspunkte bedingte Reihenfolge, in welcher ich Ihnen die Entwicklungen geben werde.

nées selon un certain point de vue concret, méthodique et pédagogique, dans laquelle je vous donnerai des développements [Kronecker 1885a, p. 1].

L'algèbre de Kronecker ne se limite pas à l'étude des équations algébriques. Cependant, dans le cadre de ses leçons, il décide de se restreindre à ces dernières, que ce soit pour chercher à les résoudre ou pour les prendre comme objet d'étude. Ces restrictions ont deux raisons. Premièrement, l'immensité des domaines qui y trouveraient leur place est telle que le cadre d'un cours semestriel est bien trop étroit pour tous les contenir. Et ensuite, pour réussir à en donner une exposition systématique, il manque une théorie générale qui en serait le liant. Kronecker, décrivant ce qu'il cherche à faire dans ses cours, ajoute[55] :

> Jusqu'à il y a environ cent ans, la résolution des équations algébriques, qui fut aussi bien le motif et le but de l'invention en algèbre, constituait le centre de l'intérêt algébrique. Toutes les recherches algébriques se rattachaient à la résolution des équations algébriques, et toutes étaient élaborées en vue de leur résolution. Avec les larges développements de l'algèbre de ces derniers temps, les points de vue de la recherche sont devenus essentiellement autres. Le titre « Théorie des équations algébriques » n'est habituel que depuis environ une génération, et de même l'est son contenu [Kronecker 1891, p. 1].

La dernière génération, celle qui a su travailler à partir du « livre de tous les livres »[56], a multiplié les « points de vue » sur l'algèbre. Ce changement est caractérisé, selon Kronecker, par le passage du terme de *résolution* à celui de *théorie*. Cette distinction ne permet pas d'englober tout l'algèbre[57] :

> Dans l'ensemble, ce contenu est si immense que ces leçons ne peuvent seulement que promettre d'en donner un extrait. Convient-il d'en distinguer dès le départ par une définition ce qui lui appartient ? C'est tout à fait impossible, de

55 Noch vor hundert Jahren bildete die Auflösung der algebraischen Gleichungen, die ja auch Anlass und Ziel der Erfindung der Algebra war, den Mittelpunkt alles algebraischen Interesses. An die Auflösung der Gleichungen knüpften alle algebraischen Untersuchungen an, und alle arbeiteten auf sie hin. In der breiten Entwicklung der Algebra während der neusten Zeit sind die Gesichtspunkte der Forschung wesentlich andere geworden. Wie der Titel : « Theorie der algebraischen Gleichungen » seit einem Menschenalter etwa erst sich eingebürgert hat, so auch der Inhalt.

56 C'est ainsi que Kronecker qualifiait les *Disquisitiones Arithmeticae* [Boniface & Schappacher 2001, p. 219] : « Buch aller Bücher ».

57 Im ganzen ist dieser Inhalt ein so gewaltiger, daß diese Vorlesungen daraus nur einen Ausschnitt zu geben versprechen können. Soll von vornherein durch eine Definition abgegrenzt werden, was in ihn hineingehört ? Das ist ebenso unmöglich, wie die Durchführung einer strengen Systematik in seinem Verlaufe. Eine große Reihe von Beispielen bewahrheitet *Dirichlets* Ausspruch, daß es eine einzig wahre Methode in der Analysis nicht giebt.

> même que la parcourir de façon systématique. Une grande série d'exemples confirme les mots de *Dirichlet* disant qu'il n'y a pas une seule véritable méthode en analyse [Kronecker 1891, pp. 1-2].

Il est donc vain de tenter d'en donner une définition. Par contre, en rappelant comment Dirichlet a multiplié les méthodes dans son travail, sans poser de cloisons fictives entre les divers domaines des mathématiques, Kronecker donne l'une des clefs pour comprendre la façon dont il aborde lui-même l'« algèbre ».

3.3. *Une algèbre décloisonnée*

S'interdire des interactions entre les domaines des mathématiques ne fait pas que freiner le travail du chercheur, mais les domaines eux-mêmes se retrouvent en « danger »[58] :

> La partie de l'algèbre à laquelle nous avons affaire ici s'est éloignée du danger d'isolement depuis 1770 ; depuis ce temps elle est en lien étroit avec les autres disciplines mathématiques ; à partir de ce moment-là il s'exerce une interaction plus active entre analyse, géométrie et théorie des nombres d'un côté, et théorie des équations algébriques de l'autre [Kronecker 1887c, p. 2].

La date donnée par Kronecker comme début de ces interactions correspond à la date approximative de la publication de [Lagrange 1771] et [Vandermonde 1771]. Au début du XIX^{e} siècle, l'analyse n'est pas seulement une branche des mathématiques particulièrement féconde, c'est aussi celle qui est en train de remplacer la géométrie comme référence. Et c'est son degré de généralité et d'abstraction qui lui vaut cette place. C'est ainsi qu'en 1796 dans son *Exposition du système du monde*, Laplace écrit : « L'analyse algébrique nous fait bientôt oublier l'objet principal, pour nous occuper de combinaisons abstraites ; et ce n'est qu'à la fin, qu'elle nous y ramène. Mais en s'isolant ainsi des objets, après en avoir pris ce qui est indispensable pour arriver au résultat que l'on cherche ; en s'abandonnant ensuite aux opérations de l'analyse, et réservant toutes ses forces pour vaincre les difficultés qui se présentent ; on est conduit par la généralité de cette méthode, et par l'inestimable avantage de transformer le raisonnement en procédés mécaniques, à des résultats souvent inaccessibles à la synthèse » [Laplace 1835, p. 340]. L'analyse et l'algèbre,

58 Der Teil der Algebra, mit dem wir hier zu thun haben, ist seit 1770 der Gefahr der Isolierung völlig entrückt ; seit jener Zeit steht sie in innigem Konnex mit den übrigen mathematischen Wissenschaften ; von jener Zeit macht sich die lebendigste Wechselwirkung zwischen Analysis, Geometrie, Zahlentheorie einerseits und der Theorie der algebraischen Gleichungen anderseits geltend.

selon les circonstances et les auteurs, peuvent se confondre, et on voit là que Laplace encourage, pour progresser en géométrie, l'utilisation des méthodes de l'analyse.

Mais si ces interactions sont vieilles d'un siècle, Kronecker bouscule encore un peu plus les frontières, dont le dépassement n'est pas seulement une source de progrès, mais un « bouleversement » dans la façon de faire des mathématiques, qui « a son fondement dans le rapport de ces leçons avec ceux des leçons précédentes sur la "théorie des nombres" et "la théorie des déterminants"[59] ».

Kronecker a été considéré à plusieurs reprises comme un *algébriste* ou un *arithméticien*[60], sans d'ailleurs que le contenu de ces termes soit explicité. Ce serait une erreur de limiter son travail à un domaine des mathématiques, et d'ailleurs Frobenius ne s'y trompe pas[61] :

> Tous les mathématiciens louent les créations de Kummer en théorie des nombres [...]. Tous connaissent le travail fondationnel de Weierstrass dans la théorie des fonctions [...]. Mais il est bien plus difficile de caractériser rapidement et de façon pertinente la place de Kronecker dans la science, à cause des découvertes d'une grande portée qui lui assureront une gloire durable et qui ne restent pas dans le cadre d'une seule discipline mathématique [Frobenius 1893/1968, p. 8].

L'algèbre de Kronecker est tellement étendue, qu'en dresser les limites est voué à l'échec. Finalement, le terme même d'algèbre perd son sens, et c'est pourquoi Kronecker utilise essentiellement la notion de « théorie des équations algébriques », partie des mathématiques plus facilement identifiable, et qu'il cherche à fondre dans une « arithmétique générale ». Car, comme l'affirme déjà Kronecker en 1861 dans son discours d'entrée à l'Académie des Sciences de Berlin[62],

---

59 [Kronecker 1891, p. 2] : Ihren Grund hat diese Umwälzung in dem Zusammenhange dieser Vorlesungen mit den ihnen vorangehenden über die « Zahlentheorie » und « die Theorie der Determinanten ».

60 Eric Temple Bell le décrit comme « l'un des plus importants algébristes et arithméticiens du XIX^{e} siècle » (*one of the leading algebraists and arithmeticians of the nineteenth century* [Bell 1940, p. 170]) et Felix Klein affirmait qu'il « s'occupait surtout d'arithmétique et d'algèbre » (*er sich vorwiegend mit Arithmetik und Algebra* [Klein 1926, p. 281]).

61 Jeder Mathematiker rühmt Kummer's bahnbrechende Schöpfungen in der Zahlentheorie [...]. Jeder kennt die grundlegenden Arbeiten von Weierstrass in der Theorie der Functionen [...]. Ungleich schwerer ist es, Kronecker's Stellung in der Wissenschaft kurz und zutreffend zu kennzeichnen, weil die weittragenden Entdekkungen, die ihm dauernden Ruhm sichern, nicht in dem Rahmen einer einzelnen mathematischen Disciplin Platz finden.

62 La traduction, tirée de [Boniface 2002, p. 141] est de Jean Dieudonné : *Die Algebra ist insofern nicht eigentlich eine Disciplin für sich, sondern Grundlage und Werkzeug der*

> L'algèbre n'est pas vraiment une discipline en soi, mais un fondement et un outil pour l'ensemble des mathématiques, et son développement rapide dans les dernières années a été en fait suscité et dirigé par les besoins d'autres disciplines mathématiques [Kronecker 1861, p. 387].

Dans l'introduction de son cours de 1890-91, il affirme aussi que l'ensemble de ses leçons « devraient être mises ensemble et elles doivent construire une « arithmétique générale » dans laquelle l'arithmétique des nombres entiers, comme elle est systématisée par *Euclide*, sera étendue aux fonctions de variables indéterminées »[63]. Essayons de donner maintenant un aperçu de ce que signifie pour Kronecker cette arithmétique générale.

3.4. *L'arithmétisation chez Kronecker*

3.4.1. *L'arithmétisation de l'analyse*

À propos de Lagrange, on trouve dans les *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* de Kronecker l'affirmation suivante[64] :

> Il a partout reconnu et mis en avant le côté algébrique ; si bien qu'il a voulu algébriser l'analyse [Kronecker 1885a, p. 26].

Kronecker n'a pas cet « esprit algébrique » [Sinaceur 1991, p. 71], et la direction qu'il suit, persuadé des bienfaits d'une algèbre décloisonnée, sera plutôt celle de l'*arithmétisation* de l'analyse. Le terme « arithmétisation » a été employé à la fin du XIX^e siècle pour décrire diverses tentatives de fondation des mathématiques, et en particulier de l'analyse, sur des bases qui n'étaient plus géométriques. N. Schappacher et J. Boniface rappellent d'ailleurs dans [Boniface & Schappacher 2001] que, selon Jules Molk, le verbe « arithmétiser » (*arithmetisieren*) aurait été employé pour la première fois par Kronecker en 1887 dans son article *Sur le concept de nombre*[65]. Cette définition négative a permis à des programmes très divers de coexister au

---

gesammten Mathematik, und ihre neuere grossartige Entwickelung ist in der That durch das Bedürfnis anderer mathematischer Disciplinen erweckt und gefördert worden.

63 [Kronecker 1891, p. 2] : Mit diesen zusammen sollten und sollen sie bilden eine « allgemeine Arithmetik », in welcher die Arithmetik der ganzen Zahlen, wie sie systematisiert ist von *Euklid*, ausgedehnt wird auf Funktionen unbestimmter Variabeler.

64 Er hat überall die algebraische Seite herauserkannt und hervorgehoben ; das geht so weit, dass er die Analysis algebraisieren wollte.

65 Jules Molk (1857-1914) a suivi les cours de Kronecker à Berlin et a passé sa thèse en 1884 sous sa direction.

sein de ce *mouvement,* auquel Kronecker, à côté de Weierstrass et Dedekind, a participé[66].

Cette arithmétisation est dans un premier temps, au cours du XIX^{e} siècle, celle de l'analyse. On en date en général les prémisses dans le *Rein analytischer Beweis* [Bolzano 1817] de Bolzano et le cours de Cauchy de la même époque [Cauchy 1821], mais son apogée a lieu dans la seconde moitié de ce siècle, avec les cours de Weierstrass et de Kronecker, ainsi que les constructions des réels par Dedekind et Cantor. Kronecker affirme d'ailleurs, dans une lettre datée du 7 août 1883 adressée à Rudolf Lipschitz (1832-1903) que ce travail est celui auquel il aura consacré sa vie[67] :

> À cette occasion j'ai trouvé les fondations longtemps cherchées de toute ma théorie des formes entières qui achève en quelque sorte « l'arithmétisation de l'algèbre », à laquelle j'ai consacré ma vie de mathématicien [Lipschitz 1986, pp. 181-182].

Dans cette affirmation à la tonalité définitive qui fait suite à la publication des *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen,* Kronecker semble dire que son travail d'« arithmétisation » de l'algèbre est terminé. Son travail va pourtant se poursuivre, et il s'expliquera quelques années plus tard sur le sens qu'il donne au mot « arithmétique », dans son article intitulé *Sur le concept de nombre,* où il affirme[68] :

> Le mot "arithmétique" ne doit cependant pas être compris dans son sens usuel limité, mais on doit comprendre sous ce terme toutes les disciplines mathématiques à l'exception de la géométrie et de la mécanique, donc nommément, l'algèbre et l'analyse. Et je crois aussi que l'on parviendra un jour à "arithmétiser" le contenu entier de ces disciplines mathématiques, c'est-à-dire à le fonder purement et simplement sur le concept de nombre pris dans son sens le plus étroit et donc à dépouiller à nouveau ce concept des modifications et

---

66 Au sujet de l'arithmétique, B. Petri et N. Schappacher font la remarque suivante : « the term "arithmetization" was in use around 1900 as a generic description of various programmes which provided non-geometrical foundations of analysis, or other mathematical disciplines » [Petri & Schappacher 2007, p. 343].

67 Bei dieser Gelegenheit habe ich das lange gesuchte Fundament meiner ganzen Formentheorie gefunden, welches gewissermassen „die Arithmetisierung der Algebra“ – nach der ich ja das Streben meines mathematischen Lebens gerichtet habe – vollendet.

68 Traduction de J. Bonniface et N. Schappacher de : « Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesammten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu „arithmetisiren“ d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind » [Kronecker 1887b, p. 253].

élargissements le plus souvent provoqués par les applications à la géométrie et à la mécanique [Boniface 1999, p. 54].

Kronecker est lui aussi dans un processus d'« arithmétisation », certainement différent de celui de Weierstraß ou Bolzano, et dont l'une des caractéristiques est de poser comme fondation aux mathématiques le nombre entier[69].

3.4.2. *L'*arithmétique générale

Kronecker propose lors du semestre d'hiver 1889-90 un cours qu'il intitule *Allgemeine Arithmetik. I. Teil (Zahlentheorie)*[70] :

> L'impossibilité de marquer une délimitation entre la théorie des nombres et l'algèbre, ainsi que l'extraction de certaines méthodes de la première dans l'algèbre conduit à une réorganisation substantielle de la théorie des nombres, de sorte qu'il ne semble pas approprié de mettre le nom « théorie des nombres » au sommet de toute cette discipline, mais une nouvelle façon de la désigner est le titre « arithmétique générale », comme cette leçon le porte pour la première fois, bien que la théorie des nombres soit enseignée de cette façon depuis près de 15 ans [Kronecker 1890, p. 2-3].

Kronecker affirme en 1889 qu'il utilise le terme d'« arithmétique générale » dans le titre de l'une de ses leçons pour la première fois, et la lecture de l'introduction de son cours du semestre d'hiver 1887-88 sur la théorie des nombres nous confirme que ce dernier n'est pas décrit comme constituant une partie de cette « arithmétique générale » [Kronecker 1888]. La constitution d'un ensemble de cours réunis sous le titre d'« arithmétique générale » tel que Hensel le publie semble donc assez tardive. L'unité de ses trois grands cours, Kronecker la justifie ainsi en 1889[71] :

---

69 On peut lire à ce sujet le chapitre *On Arithmetization* de Birgit Petri et Norbert Schappacher dans [Petri & Schappacher 2007, p. 343].

70 Die Unabgrenzbarkeit der Zahlentheorie gegen die Algebra und die Entnahme gewisser Methoden der letzteren in die Algebra führten dazu, die Zahlentheorie wesentlich umzugestalten, sodass es auch nicht angemessen erscheint, den Namen „Zahlentheorie“ an die Spitze dieser ganzen Disciplin zu setzen, sondern eine neue Bezeichnungsweise ist der Titel „Allgemeine Arithmetik“, wie ihn diese Vorlesung zum ersten Male trägt, obgleich Zahlentheorie schon seit nahezu 15 Jahren so gelehrt wird.

71 Ein Fortschritt dieser Theorie könnte dann nach 2 Seiten geschehen : entweder eine Betrachtung der linearen Funktionen mehrerer Veränderlichen oder eine Behandlung von Funktionen einer Veränderlichen von höheren als dem ersten Grade. Die erstere führt uns zur Determinantentheorie, die letztern zur Theorie der algebraischen Gleichungen, die ja nichts Anderes ist als die Theorie der Funktionen einer Verändlichen, welche den Wert 0 haben sollen. Den letzen Teil des Stoffes, der in

> Un développement de cette théorie pourrait alors se produire dans 2 directions : soit en prenant en compte les fonctions linéaires de plusieurs variables soit par un traitement des fonctions d'une variable de degré supérieur à un. Le premier nous conduit à la théorie des déterminants, le second à la théorie des équations algébriques, qui n'est autre que la théorie des fonctions d'une variable, qui devrait avoir la valeur 0. La dernière partie de la substance à traiter en arithmétique générale serait alors constituée des fonctions de plusieurs variables dont le degré dépasse la première [Kronecker 1890, p. 3-4].

Ainsi, la « théorie des équations algébriques » semble être pour Kronecker, au même titre que la théorie des nombres et la théorie des déterminants, une partie de cette « théorie », c'est-à-dire ici ce qu'il nomme l'*arithmétique générale*[72]. Il ajoute, dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques [73] :

> Ce renouvellement a ses fondements dans le rapport de ces leçons avec ceux des leçons précédentes sur la « théorie des nombres » et « la théorie des déterminants ». Celles-ci devraient être mises ensemble et elles doivent construire une « arithmétique générale » dans laquelle l'arithmétique des nombres entiers, comme elle est systématisée par *Euclide*, sera étendue aux fonctions de variables indéterminées [Kronecker 1891, p. 2].

Le regroupement de l'ensemble de ces leçons à l'intérieur d'une *arithmétique générale* est encore à l'état de projet quelques mois avant la mort de Kronecker. Nous n'avons d'ailleurs pas trouvé trace du terme même d'« arithmétique générale » dans son œuvre avant la publication en 1887

---

der allgemeinen Arithmetik zu behandeln ist, würden dann die Funktionen mehrerer Veränderlichen beilden, deren Grad den ersten übersteigt.

72 Kant utilise le terme d'*arithmétique générale* pour désigner l'algèbre : « L'arithmétique générale (*algebra*) est une science si étendue que l'on ne peut nommer aucune science de la raison qui lui soit en cela semblable [...] de plus, les autres parties de la pure *mathesis* attendent leur croissance surtout de l'extension de cette doctrine générale des grandeurs. » ([Kant 1991, p. 327] : lettre de Kant à J. Schultz du 25 novembre 1788). Cependant, si le terme est identique, il ne faudrait pas y voir une filiation : l'algèbre que connaît Kant est celle du milieu du XVIII^e siècle, et comme le montre Frank Pierobon dans [Pierobon 2003], « l'algèbre représente, en quelque sorte, la limite de la conception kantienne des mathématiques; à partir du moment où réellement et historiquement, l'écriture (algébrique) s'émancipe et devient autonome par rapport à l'image (géométrique) qu'elle est censée symboliser, de nouvelles mathématiques apparaissent que Kant n'a pas eu le temps et-ou l'occasion d'évaluer à leur juste mesure. »

73 Ihren Grund hat diese Umwälzung in dem Zusammenhange dieser Vorlesungen mit den ihnen vorangehenden über die « Zahlentheorie » und « die Theorie der Determinanten ». Mit diesen zusammen sollten und sollen sie bilden eine « allgemeine Arithmetik », in welcher die Arithmetik der ganzen Zahlen, wie sie systematisiert ist von *Euklid*, ausgedehnt wird auf Funktionen unbestimmter Variabeler.

de son article *Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik*, dans lequel il la définit comme étant « la théorie arithmétique des grandeurs entières d'un domaine de rationalité naturel quelconque »[74]. Cette « arithmétique générale » peut apparaître comme le résultat des efforts d'« arithmétisation » de Kronecker, mais sa mise en place est finalement très tardive dans son œuvre : « les résultats de l' "Arithmétique générale" ou de "la théorie arithmétique des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers" » [Boniface 1999, P. 69] sont à examiner à la lumière des travaux qui découleront des *Grundzüge*.

3.5. *Conclusion*

Dans [Brechenmacher & Ehrhardt 2010], Caroline Ehrhardt et Frédéric Brechenmacher montrent à partir de plusieurs études de cas que ce qui est considéré comme algébrique au XIXᵉ siècle dépend amplement du réseau de pratiques mathématiques dans lequel on circule : il est donc nécessaire d'« analyser comment les acteurs eux-mêmes décrivent leur propres activités » [Brechenmacher & Ehrhardt 2010, p. 611]. Dans ses cours sur la théorie des équations, c'est une algèbre centrée autour des notions d'équations et de racines que Kronecker annonce. Mais il n'en dessine pas les contours – contours qui sont « si immenses que ces leçons ne peuvent seulement que promettre d'en donner un extrait » – et il fait appel à tous les outils des « mathématiques pures ». Si ce cours s'inscrit bien dans un mouvement d'arithmétisation, il le fait dans un format qui lui est propre, sans revendication explicite du mouvement d'arithmétisation de l'analyse. Kronecker présente donc une algèbre dont il est impossible de « distinguer dès le départ par une définition ce qui lui appartient ». Ce problème de délimitation est de deux ordres. Tout d'abord, il fait le constat d'un contenu « si immense » que ses « résultats » et ses « méthodes si divers ne trouvent plus maintenant de place dans une leçon »[75]. Ensuite, c'est une algèbre dont la délimitation avec les autres *disciplines* n'est ni pertinente ni souhaitable[76]. Bien plus, il affirme que c'est l'interaction avec la géométrie, l'analyse et l'arithmétique qui a produit les progrès de l'algèbre tout au long du XIXᵉ siècle. Finalement, si Kronecker utilise le terme d'algèbre, c'est aussi pour se placer dans une tradition, et c'est

[74] [Kronecker 1887a, p. 212] : die arithmetische Theorie ganzer Grössen eines beliebigen natürlichen Rationalitätsbereichs.

[75] [Kronecker 1885a, p. 1] : Die im dem Titel liegende Beschränkung ist durch die große Ausdehnung der Algebra geboten, deren so verschiedenartige Resultate und Methoden jetzt nicht mehr in einer Vorlesung Platz finden.

[76] Il s'agit du terme employé par Kronecker : *Disciplin*.

ainsi qu'il entame chacun de ses cours par une *histoire de l'algèbre* – *son* histoire de l'algèbre – dans laquelle il raconte comment celle-ci a « échappé aux dangers de l'isolement ». Utilisant sa connaissance encyclopédique des mathématiques de son époque, il produit une algèbre qui s'invite dans toutes les mathématiques, et qui invite toutes les mathématiques à participer à son évolution. Nous comprenons que Kronecker, loin de vouloir en clarifier les limites ou l'établir en tant que discipline, souhaite la décloisonner.

4. LA REPRISE PAR KRONECKER DU THÉORÈME DE STURM

Des deux problèmes qui, selon Kronecker, jalonnent l'histoire des recherches algébriques – la détermination du nombre de racines réelles d'un polynôme et la résolubilité de ces derniers par radicaux – le premier qu'il aborde dans son cours est celui résolu par Sturm. Cette partie est centrale pour notre propos[77], car il s'agit de celle dans laquelle il discute de la nécessité de repenser la notion de *racine*.

Les difficultés rencontrées au XVIII^{e} siècle pour donner une résolution algébrique générale (c'est-à-dire trouver les racines par une formule explicite) des équations polynomiales poussent la communauté mathématique du début du XIX^{e} siècle à développer des recherches sur les méthodes numériques[78]. Le théorème que Sturm expose ([Sturm 1829a] et [Sturm 1829a]) en 1829 à l'Académie des Sciences de Paris et dont il ne publie une démonstration qu'en 1835 est directement issu de ces travaux [Sturm 1835].

Un travail important a été fait par Hourya Sinaceur sur l'histoire de ce théorème[79], dans lequel elle propose une analyse globale des travaux d'algèbre de Sturm, de leur enracinement dans ceux de Fourier et de Lagrange. Ce que H. Sinaceur montre dans *Corps et modèles*, c'est le mouvement d'*algébrisation* qui a lieu autour de ce théorème, essentiellement par Hermite et Sylvester. Cependant, le chemin qu'elle choisit d'emprun-

---

77 Le chapitre qui lui est consacré est, dans la plupart des manuscrits, clairement identifié, quelquefois par un titre ([Kronecker 1881b, p. 85], [Kronecker 1885a, p. 236], [Kronecker 1887c, p. 131], [Kronecker 1889, p. 120] et [Kronecker 1891, p. 170]), et cela fait figure d'exception, ou quelquefois par un changement de rédacteur [Kronecker 1885a]. Ensuite, sous une forme ou sous une autre, de façon plus ou moins développée, ce chapitre est présent sans exception dans tous les manuscrits à notre disposition.

78 Voir par exemple le travail de Lagrange de 1870-71 : *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.*

79 Voir [Sinaceur 1988], [Sinaceur 1992], [Sinaceur 1991] et [Sinaceur 2009].

ter conduit à la construction des corps réels par Emil Artin (1898-1962) et Otto Schreier (1901-1923) ainsi qu'à l'utilisation que fera Tarski du théorème de Sturm dans ses travaux de logique. L'angle sous lequel nous l'aborderons ici est différent. Ce sont les lectures de Kronecker de ce théorème qui nous intéressent : sa lecture mathématique, mais aussi sa lecture historique.

Le théorème de Sturm est, quelle que soit l'année, toujours présent dans les *Vorlesungen* et Kronecker en propose trois présentations différentes :

(1) La première est, selon lui, basée sur des considérations « géométriques ».

(2) La seconde utilise la décomposition en fractions continues. Couplée avec le problème d'interpolation de Cauchy[80], elle compose la plus grande partie de son chapitre.

(3) La dernière est basée sur les travaux de Hermite et de Jacobi sur les formes quadratiques.

Nous allons nous intéresser plus précisément à la première qui, le plus souvent[81], constitue l'introduction de Kronecker au théorème de Sturm. Si les deux suivantes représentent l'essentiel du travail de Kronecker pour prolonger l'« algébrisation » du théorème de Sturm, c'est dans la première que les notions de racines et de continuité sont discutées. Pour que l'originalité de la réécriture de Kronecker nous apparaisse clairement, il est indispensable d'avoir à l'esprit les grandes étapes de la construction de ce théorème par Sturm.

4.1. *La démonstration de Sturm de 1835*

En 1835, six ans après après avoir énoncé son théorème, et quelques années après la publication de plusieurs démonstrations d'autres mathématiciens (par exemple [Crelle 1835]), Sturm donne sa propre preuve dans un *Mémoire sur la résolution des équations numériques* [Sturm 1835]. Dans celle-ci, Sturm examine l'équation suivante :

$$V = Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0,$$

80 Cette *méthode d'interpolation* constitue la *note V* du cours d'*analyse algébrique* de Cauchy [Cauchy 1821, p. 525] et prolonge sous certaines conditions la formule d'interpolation de Lagrange aux fractions rationnelles.

81 C'est le cas dans tous les manuscrits sauf celui de 1890-91.

où V est un polynôme dont les coefficients sont réels. Si $V_1 = V'$, la division euclidienne avec les restes modifiés permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} V &= q_1 V_1 - V_2 \\ V_1 &= q_2 V_2 - V_3 \\ \cdots &= \cdots \\ V_{r-2} &= q_{r-1} V_{r-1} - V_r. \end{aligned}$$

La suite des degrés des fonctions V_i étant strictement décroissante, le polynôme V_r est un nombre réel[82]. Il énonce ensuite son théorème : le nombre de racines réelles de V comprises entre A et B est la différence :

$$\begin{aligned} &\textit{Nombre de changements de signe dans la suite } (V(A), V_1(A), \ldots, V_r(A)) \\ -\ &\textit{Nombre de changements de signe dans la suite } (V(B), V_1(B), \ldots, V_r(B)) \end{aligned}$$

Le principe de la démonstration consiste à examiner comment varie le nombre de changements de signe dans la suite $(V(x), V_1(x), \ldots, V_r(x))$ lorsque x varie. Un changement apparaît dans la suite des signes uniquement si V ou l'un des V_i change de signe, et donc s'annule. Utilisant alors la formule de Taylor, Sturm montre que pour une racine c de V, on peut trouver un réel $u > 0$ suffisamment petit pour qu'il y ait une perte de signe dans la suite lors du passage de $c - u$ à $c + u$. Sur quoi repose cette démonstration ? En grande partie sur le théorème de Bolzano et sur une méthode consistant à effectuer de « petits accroissements ». Tous deux sont appliqués à une suite de fonctions auxiliaires que Sturm construit à partir de l'algorithme d'Euclide, mais dont il n'extrait pas explicitement les propriétés fondamentales qui permettent à sa méthode de fonctionner, même s'il est, comme le seront aussi ses principaux lecteurs, parfaitement conscient de ces conditions.

4.2. *Une vision* géométrique

Lorsqu'il aborde le théorème de Sturm, Kronecker commence systématiquement par se placer d'un point de vue qu'il qualifie de « géo-

---

82 Pour éviter le cas de racines multiples, Sturm choisit dans un premier temps de supposer $V_r \neq 0$.

métrique »[83]. Dans le manuscrit de 1880-81, Kronecker affirme qu'il renoue[84] :

> avec l'intuition géométrique[85], laquelle nous apprend que si une courbe $y = F(x)$ passe tantôt en dessous, tantôt au dessus de l'axe des abscisses, elle doit le couper, dans le cas où la courbe se déroule continuement [Kronecker 1881b, p. 104].

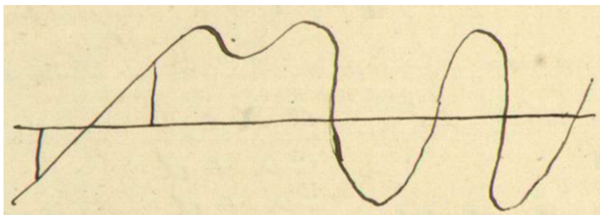


FIGURE 1. [Kronecker 1881b, p. 104]

Kronecker souhaite donc répondre à la question : combien y a-t-il de racines réelles entre deux bornes données ? Dans le manuscrit de 1886-87, il commence par rappeler que le théorème de Sturm n'est pas indispensable pour y répondre, mais qu'il s'agit sans doute de la réponse la plus « élégante »[86]. Nous pouvons en effet, dit-il, répondre à la question grâce à ce qu'il appelle des « interpolations géométriques »[87] : on remplace la résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la recherche des points d'intersection entre la « courbe parabolique $y = f(x)$ » et l'axe des abscisses[88]. Il développe cette conception sur les cas simples des équations quadratiques et

83 La démonstration que nous allons présenter conserve, au cours des années, une grande stabilité. Nous allons regarder plus précisément les versions des années 1880-81, 1884-85, 1887-88 et 1890-91.

84 Wir knüpfen an die geometrische Anschauung an, welche uns lehrt, daß wenn die Curve $y = F(x)$, bald oberhalb, bald unterhalb der Abszissenaxe verläuft, sie dieselbe schneiden muß, falls die Curve stetig verläuft.

85 Le terme utilisé par Kronecker est celui de *Anschauung*, c'est-à-dire l'*intuition* dans la terminologie kantienne. On peut aussi penser au concept d'*intuition* (*Anschauung*) chez le pédagogue allemand du début du XIX^{e} siècle Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827).

86 « Eleganz » [Kronecker 1887c, p. 131].

87 [Kronecker 1887c, p. 132] : Man kann aber die oben genannten Fragen, ohne von dem Sturmschen Satz Gebrauch zu machen, auf anderem weniger eleganten, aber theoretisch einfacheren Wege beantworten, wenn man sich der geometrischen Interpolation bedient.

88 [Kronecker 1887c, p. 132] : die parabolische Curve $y = f(x)$.

des équations cubiques. Il utilise le fait que la dérivée s'annule entre deux racines réelles, et il construit ainsi le discriminant : le signe de ce dernier donnera le nombre de racines réelles (Figures 2 et 3).

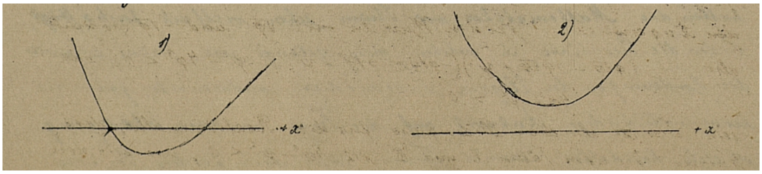


FIGURE 2. [Kronecker 1887d, p. 132]

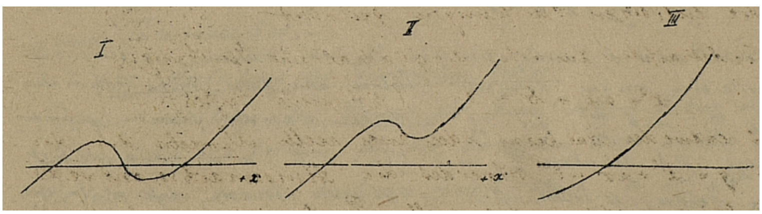


FIGURE 3. [Kronecker 1887d, p. 133]

Il appuie ici sa démonstration sur les différentes représentations possibles de la fonction, et il ne souhaite d'ailleurs pas prolonger ce processus au-delà du troisième degré.

Il ne s'agit pas là d'une méthode « géométrique » – Kronecker reprend en grande partie des méthodes algébriques que l'on trouve chez Lagrange – mais plutôt d'une présentation géométrique, au sens où elle fait appel à la représentation des courbes dans un repère du plan. Plus encore, c'est la « présentation géométrique » des racines qui est au cœur de la preuve qu'il propose du théorème, car il souhaite « construire la proposition de *Sturm* sur cette intuition géométrique des racines de $F(x) = 0$ »[89].

89 [Kronecker 1881b, p. 104] : Wir wollen nun, um auf diese geometrische Anschauung der Wurzele von $F(x) = 0$ den *Sturm*'schen Satz aufzubauen, ein Zeichen definiren, welches wir durch $[A]$ bezeichnen wollen und welches $-1, 0$ oder $+1$ vorstellen soll, je nachdem die als reell vorausgesetzte Größe A negativ, gleich null, oder positiv ist.

Le concept de racine est bien sûr ici fondamental, mais Kronecker aborde pourtant sa première démonstration du théorème de Sturm dans l'état d'esprit suivant[90] :

> Nous voulons supposer dans la suite que la notion de racine d'une équation est déjà définie. Nous reviendrons encore sur les justifications rigoureuses et les fondements de ces notions plus tard indépendamment des développements qui suivent maintenant [Kronecker 1881b, p. 104].

Il cherche à trouver le nombre de racines réelles (*reellen Wurzeln* [Kronecker 1887c, p. 131]) de l'équation, et si le sens et la nature de ce qu'il entend par *racine* d'une équation sont reportés à la suite du cours, il ne peut pas totalement éviter de s'y confronter. C'est ainsi qu'il souhaite « construire la proposition de *Sturm* sur cette intuition géométrique des racines de $F(x) = 0$ », c'est-à-dire sur l'intersection de la représentation graphique de la courbe avec l'axe des abscisses. Nous allons faire de même, et renvoyer cette question à la dernière partie de notre article.

4.3. *Continuité et théorème de Bolzano*

4.3.1. *Le théorème de Bolzano*

Avant de pouvoir en compter leur nombre, Kronecker se pose le problème de l'existence d'une racine entre deux bornes où la fonction prend des valeurs de signes contraires. Et à propos du théorème démontré par Bolzano dans le bien nommé *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, voilà ce qu'il dit[91] :

> Le fait que les erreurs logiques des déductions de Bolzano n'apparaissent pas d'emblée vient de sa forme elle-même, celle d'un dialogue, telle qu'elle apparaît chez Bolzano. Il pose toujours des questions auxquelles on ne peut répondre que par « oui » ou « non », mais il n'a pas cherché au préalable à savoir si ses questions sont posées de sorte que l'on puisse y répondre. Si c'est le cas, alors

90 Wir wollen in Folgenden annehmen, der Begriff der Wurzeln einer Gleichung sei bereits definirt. Auf die strenge Begründung und Fundamentirung dieses Begriffes werden wir später noch unabhängig von den jetzt folgenden Entwicklungen zurückkommen.

91 Dass die logischen Fehler der Bolzano'schen Deduction nicht so ohne Weiteres hervortreten, hat in der dialogischen Form derselben, wie sie bei Bolzano erscheint, seinen Grund. Er stellt immer Fragen, die nur mit „ja" oder „nein" beantwortet werden können, aber er untersucht nicht vorher, ob seine Fragen überhaupt so gestellt sind, dass sie der Beantwortung fähig sind. Sind sie dies, so ist der Beweis richtig, aber unnötig; im entgegengesetzten Fall ist die ganze Deduction falsch.

> sa démonstration est juste, mais pas nécessaire. Sinon la déduction entière est fausse [Kronecker 1887c, p. 156].

Il faut bien remarquer que le théorème de Bolzano est faux si l'on se restreint au corps des rationnels. Prenons la fonction continue $f(x) = x^2 - 2$: on a alors $f(0) = -2 < 0$ et $f(2) = 2 > 0$. Or $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution rationnelle sur l'intervalle $]0; 2[$. La démonstration de Bolzano doit donc utiliser la « complétude » du corps des réels.

Il y a ici une double affirmation : la géométrie n'a pas à intervenir dans l'arithmétique – donc l'arithmétique générale, qui contient l'analyse, ne peut reposer sur des concepts géométriques – et il souligne la nécessaire effectivité des réponses que l'on doit donner en mathématiques. Lorsqu'il cherche à savoir si une fonction s'annule, il ne veut pas se contenter d'un oui ou d'un non : il doit pouvoir *l'exhiber*. Kronecker poursuit en donnant l'exemple de :

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 z\pi}{n^2} - \frac{1}{16\sqrt{2}} \cdot \pi^2$$

À partir de cette expression, Kronecker montre ce qui ne convient pas, d'après lui, dans le théorème des valeurs intermédiaires tel qu'il est énoncé et démontré par Bolzano : il connaît certaines valeurs de cette fonction qui lui permettent d'affirmer que la fonction est positive pour $z = 0$ et négative pour $z = \frac{1}{4}$. La méthode que Bolzano emploie à partir de là est une méthode par dichotomie. Mais, fait remarquer Kronecker, nous n'avons aucun moyen de déterminer $F(\frac{1}{8})$ et donc de connaître son signe. La méthode générale présente dans la démonstration de Bolzano n'est donc pas effective dans le cas particulier exhibé par Kronecker. La question posée – c'est-à-dire $F(\frac{1}{8})$ est-il négatif – n'obtient pas ici comme réponse un « oui » ou un « non ».

On trouve déjà en juin 1870 un témoignage de cette opposition aux conclusions de Bolzano dans une lettre que Schwarz a écrite à Cantor[92] :

> Prof. Kronecker explique dans la lettre qu'il m'a adressée le (3./6. 70) que les conclusions de Bolzano sont évidemment de faux arguments ; il dit que mon beau-père[93], Borchardt et Heine se trouvent de son côté. Je suis content que toi, Thome et moi, soyons dans le camp de Weierstrass [Meschkowski 1967, p. 68].

---

92 Herr Prof. Kronecker erklärte in seinem an mich gerichteten Briefe (3./6. 70) die Bolzanoschen Schlüsse als offenbare Trugschlüsse ; er sagte, mein Schwiegervater, Borchardt und Heine befinden sich auf seiner Seite. Es ist mir lieb, daß Du, Thome und ich auf Weierstraß' Seite stehen.

93 Il s'agit de Kummer.

Cette partition, forcément simpliste, souligne toutefois que l'héritage de Bolzano est plus à chercher dans le travail de Weierstrass que dans celui de Kronecker[94]. Mais si Kronecker rejette l'*existence* de valeurs intermédiaires quelconques pour les fonctions continues, qu'en est-il de la continuité, dont la *Rein analystischer Beweis* donne un des premiers – si ce n'est le premier – exemples d'arithmétisation ?

4.3.2. *Continuité*

Dans son cours de l'hiver 1884-85, Kronecker affirme au début de son chapitre sur le théorème de Sturm[95] :

> Pour ce théorème Sturm a donné une démonstration très simple, qui, comme tout ce traitement, repose essentiellement sur des considérations de continuité. Je vais vous en donner une autre tout à fait différente qui renonce à ces considérations de continuité, et ce en la construisant palier par palier, pourrait-on dire, sur des fondements triviaux [Kronecker 1885a, p. 237].

La continuité, centrale dans la démonstration de Sturm, Kronecker souhaite s'en passer. Mais que recouvre exactement cette notion pour Kronecker ? Pour répondre à cette question, examinons la façon dont ce concept est présenté dans ses cours. Dans ses leçons du semestre d'hiver 1880-81, il propose deux façons d'envisager la continuité. La première, il la qualifie de « géométrique ». Gauss lui-même, dit-il « n'avait que l'intuition géométrique et le concept de la continuité géométrique »[96]. Cette continuité, il n'en donne aucune définition, affirmant que « le sens de cette continuité géométrique est intuitivement clair »[97].

La continuité *analytique* ([Kronecker 1881b, p. 104] : *analytisch*) est quant à elle définie par Kronecker dans son cours de la façon suivante[98] :

---

94 Nous pouvons, à ce propos, reprendre une lettre de Schwarz citée par P. Dugac dans [Dugac 1976, p. 77] : « sans les conclusions, qui ont été développées par Weierstrass à partir des principes de Bolzano, on n'aurait pas pu réussir dans de nombreuses recherches », qui montre que dès 1870 Weierstrass connaissait le travail de Bolzano et que ce dernier était l'une des sources de son travail de refondation de l'analyse.

95 Für diesen Satz hat Sturm auch eine sehr einfache Deduktion gegeben, die, wie alle diese Behandlungen, wesentlich an Kontinuitätsbetrachtungen anknüpft. Ich gebe Ihnen eine ganz andere, die von dieser Kontinuitätsbetrachtung absieht, und zwar habe ich allmählich diese auf, man kann sagen, trivialen Grund gebaut.

96 [Kronecker 1881b, p. 104] : Er besaß nur die geometrische Anschauung und den Begriff der geometrischen Stetigkeit.

97 [Kronecker 1881b, p. 104] : Der Begriff dieser geometrischen Stetigkeit ist aus der Anschauung klar.

98 analytisch werden wir die Funktion $F(x)$ als an der Stelle x stetig bezeichnen, wenn $F(x_1) - F(x_2)$, wo $x_1 < x < x_2$ sei, kleiner gemacht werden kann als jede beliebig kleine Größe, dadurch daß man x_1 und x_2 beliebig nahe an x heranrückt und

> nous désignerons analytiquement la fonction $F(x)$ comme continue en x, si $F(x_1) - F(x_2)$, où $x_1 < x < x_2$, peut être faite plus petite que n'importe quelle grandeur, lorsque l'on rapproche x_1 et x_2 aussi près de x que l'on veut et lorsque cette différence reste ensuite aussi plus petite que cette grandeur choisie aussi petite que l'on veut. Ce concept de continuité est si simple, mais aussi tellement moderne, qu'on ne le trouve pas encore chez Gauss [Kronecker 1881b, p. 104].

La continuité analytique correspond donc pour Kronecker à la définition que Bolzano en donne dans le *Rein analytischer Beweis* [Bolzano 1817] ou Cauchy dans son *Cours d'analyse* [Cauchy 1821]. Une lecture rapide de ces passages peut laisser quelque peu perplexe : nous avons vu le point de vue de Kronecker sur le théorème de Bolzano, et nous savons donc qu'il en rejette les conclusions.

Cette définition analytique est pourtant qualifiée de « simple » et « moderne », et Kronecker n'émet donc aucune critique à son encontre : il ne s'agit pas d'un rejet, comme il le fait du théorème de Bolzano. Pourtant, à partir du manuscrit de 1884-85, Kronecker propose une démonstration sans « considération de continuité » (*Kontinuitätsbetrachtungen*). Si le problème n'est pas dans la définition du concept de fonction continue (*stetig*), comment et pourquoi souhaite-t-il s'en passer ?

Dans ses leçons sur l'intégration [Kronecker 1894], Kronecker décrit la notion de continuité de la façon suivante[99] :

> Cette notion n'est pas initialement extraite de l'arithmétique mais des applications de l'analyse à la géométrie et à la physique. Mais sa signification géométrique et physique est très obscure. Une courbe n'est, ni comme on la trace, ni comme on l'imagine en principe continue ; on ne peut toujours envisager – physiquement et mentalement – qu'un seul point déterminé à la fois. Et dans la nature d'un côté chaque action à distance semble inconcevable, mais d'un autre côté aucun changement de lieu dans l'espace, c'est-à-dire aucun mouvement, ne se laisse en général imaginer sans l'hypothèse d'une quelconque discontinuité dans le remplissage de l'espace [Kronecker 1901, p. 11].

---

wenn diese Differenz dann auch kleiner als diese beliebig kleine Größe bleibt. So einfach dieser Begriff der Stetigkeit ist, so ist er doch so modern, daß er bei *Gauss* noch nicht vorkommt.

99 Dieser Begriff ist kein ursprünglich arithmetischer, sondern er ist aus den Anwendungen der Analysis auf die Geometrie und Physik entnommen. Seine geometrische und physikalische Bedeutung ist aber sehr dunkel. Eine Curve ist weder, wie man sie zeichnet, noch wie man sie denkt, eigentlich continuirlich ; man kann immer nur einzelne bestimmte Punkte körperlich wie geistig ins Auge fassen. Und in der Natur scheint einerseits freilich jede Fernwirkung unfassbar, andererseits aber lässt sich ohne Annahme irgend welcher Unstetigkeit in der Raumerfüllung überhaupt keine Ortsveränderung im Raume, d. h. Bewegung, denken.

Pour Kronecker, même Gauss se trompe, ou tout au moins travaille avec une version inadéquate de la continuité[100] :

> Dans l'analyse il s'agit toujours de la continuité des fonctions. Mais la conception géométrique de la continuité y a joué depuis longtemps un rôle. Ainsi chez Gauss la continuité d'une fonction y de x est introduite dans le sens suivant
>
> "Si x va de x_0 à x_1, et que l'on prend pour y en ces deux valeurs de la variable les valeurs de y_0 et y_1, alors il y a chaque fois entre x_0 et x_1 un x', pour lequel la fonction obtient n'importe quelle valeur y' choisie entre y_0 et y_1."
>
> On pense à une courbe qui connecte les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) et qui représente dans son cours ininterrompu le tracé des valeurs de la fonction [Kronecker 1901, pp. 11-12].

Cette définition, qui est finalement le théorème des valeurs intermédiaires, Kronecker la rejette. Bolzano ne souhaitait pas non plus que cette propriété soit utilisée comme définition de la continuité, mais il voulait au contraire la *démontrer*[101]. Pour Kronecker, le problème est ailleurs : le théorème des valeurs intermédiaires n'a aucun sens étant donné que seul le dénombrable est accessible. Nous nous trouvons donc face à des contradictions apparentes qu'il faut résoudre : Kronecker n'accepte pas les conclusions de Bolzano sur l'existence des racines, mais voit dans la définition de la continuité de ce dernier un réel progrès. Il refuse toute définition géométrique de la continuité, allant jusqu'à pointer – ce qui est rare – la façon dont Gauss s'est fourvoyé en l'utilisant. Il construit pourtant, tout au moins dans un premier temps, son travail sur une idée « géométrique » de la notion de racine.

4.3.3. *Une démonstration sans considération de continuité ?*

L'intuition géométrique dont Kronecker parle ne semble donc pas toucher directement à la continuité, mais plutôt aux *racines*, et il conclut que en effet, « nous n'avons pas vraiment besoin dans notre démonstration de

---

100 In der Analysis handelt es sich immer nur um die Stetigkeit von Functionen. Dabei spielte aber lange Zeit hindurch die geometrische Auffassung der Stetigkeit eine Rolle. So kommt bei Gauss der Begriff Stetigkeit einer Function y von x nur in folgendem Sinne vor :

„Geht x von x_0 bis x_1, und nimmt y für diese beiden Werthe der Variablen die Werthe y_0 und y_1 an, dann giebt es zwischen x_0, x_1 jedesmal ein x', für welches die Function den zwischen y_0 und y_1 beliebig gewählten Werth y' erhält". Es ist dabei an eine Curve gedacht, welche die beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) mit einander verbindet und in ihrem ununterbrochenen Laufe den Verlauf der Functionswerthe darstellt.

101 C'est ce qu'il fera en 1817 dans le *Rein analytischer Beweis* [Bolzano 1817].

considération de continuité »[102]. Nous allons examiner la façon dont Kronecker se dispense dans sa démonstration du concept de continuité[103]. Kronecker commence par prendre l'équation

$$x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n = 0$$

où il fait bien remarquer que les c_i sont des nombres réels (*reelle Zahlen* [Kronecker 1887c, p. 131]), puis il définit la notation suivante :

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} \frac{a}{|a|} \text{ si } a \neq 0 \\ 0 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

En posant $f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n$, en considérant $f_1(x)$ une fonction entière (un polynôme dans le vocabulaire de Kronecker) de degré $n-1$, telle que f et f_1 n'aient pas de racine commune, ainsi que la suite f_h engendrée par division euclidienne, modifiée par Sturm, Kronecker obtient alors :

$$(1) \sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f'(\xi) f_1(\xi)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)).$$

Pour Kronecker, cette formule est la « généralisation du théorème initial de Sturm »[104], et donc certainement la formule la plus importante de la partie sur le théorème de Sturm. On peut prendre pour $f_1(x)$ toute fonction de degré $n-1$ qui n'a pas de racine commune avec f. Si toutes les racines de cette dernière sont simples, on peut prendre $f_1 = f'$. Dans ce cas, on a

$$\operatorname{sgn}\left(f'(\xi) f_1(\xi)\right) = \operatorname{sgn}\left(f'(\xi)^2\right) = +1$$

et donc le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ comprises entre x_1 et x_2 (c'est-à-dire le nombre de ξ compris entre x_1 et x_2) est

$$-\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)).$$

Considérons les suites

$$f(x_1); f_1(x_1); \cdots; f_\nu(x_1)$$

102 [Kronecker 1885a, p. 244] : Wir haben in unserer Deduktion Kontinuitätsbetrachtungen eigentlich nicht gebraucht.

103 Pour la démonstration complète, on pourra se reporter à l'annexe A.

104 [Kronecker 1887c, p. 139] : die Verallgemeinerung des ursprünglichen Sturm'schen Satzes.

et

$$f(x_2); f_1(x_2); \cdots; f_\nu(x_2).$$

On note m_1 et m_2 le nombre de changements de signes dans ces suites (m comme *mutare*) et s_1 et s_2 le nombre de permanences de signes (s comme *servare*). Alors on a :

$$\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) = s_1 - m_1$$
$$\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)) = s_2 - m_2.$$

Comme de plus on a

$$s_1 + m_1 = s_2 + m_2$$

et ainsi

$$s_1 - s_2 = -(m_1 - m_2)$$

alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)) \\ = -\frac{1}{2}(s_1 - m_1) + \frac{1}{2}(s_2 - m_2) \\ = \frac{1}{2}(m_1 - m_2) + \frac{1}{2}(m_1 - m_2) \\ = m_1 - m_2. \end{aligned}$$

Et sous cette forme, il s'agit bien du théorème de Sturm. C'est donc un cas particulier de la formule qu'il vient de démontrer. L'égalité (1) est ainsi une généralisation du théorème de Sturm, généralisation dont d'ailleurs Kronecker ne s'attribue pas le mérite : c'est dans le travail de Sylvester que l'on trouve cette extension[105]. Ce qui est marquant dans cette version, c'est la présentation du théorème sous la forme d'une *formule*. On retrouve cette idée dans une lettre que Kronecker a écrite en 1884 à Cantor[106] :

105 Kronecker précise dans son cours du semestre d'hiver qu'il fait référence à l'article de Sylvester qui se trouve dans « les *Philosophical Transactions* de 1853 » [Kronecker 1891, p. 208]. Il s'agit donc du mémoire intitulé *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure* [Sylvester 1853].

106 La lettre est reproduite dans [Edwards 1995, p. 45] et provient de [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196]. Einen wahren wissenschaftlichen Werth erkenne ich – auf dem Felde der Mathematik – nur in concreten mathematischen Wahrheiten, oder schärfer ausgedrückt, 'nur in mathematischen Formeln.' Diese allein sind, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, das Unvergängliche. Die verschiedenen Theorien für die Grundlagen der Mathematik (so die von Lagrange) sind von der Zeit weggeweht, aber die Lagrangesche Resolvente ist geblieben !

> Je reconnais la vraie valeur scientifique – dans le champ des mathématiques – seulement dans les vérités mathématiques concrètes, ou, pour l'exprimer plus nettement, seulement dans les formules mathématiques. Elles seules, comme l'histoire des mathématiques le montre, sont impérissables. Les diverses théories sur les fondations des mathématiques (comme celle de Lagrange) sont depuis longtemps tombées dans l'oubli, alors que la résolvante de Lagrange reste ! [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196]

La continuité a-t-elle été utilisée dans la démonstration précédente ? Kronecker suppose qu'une sorte de séparation des racines a été effectuée : l'existence de petits intervalles les contenant et dont les bornes rationnelles ont des signes opposés est admise. À partir de là, il développe son calcul sans aucune considération pour la continuité de la fonction, « même le passage de quotients de différences aux quotients différentiels qui s'y produit n'entre pas en ligne de compte car il est question seulement des signes et non des valeurs de la fonction »[107].

Le fait de ne manipuler qu'un ensemble discret qui contient trois éléments (nul, positif et négatif) semble l'exempter de toute considération de continuité. Il en est de même de la notion de *différentiel*. Pour bien saisir où se trouve le point en discussion, nous allons regarder la seconde démonstration qu'il fournit, et qui correspond, comme il le rappelle lui-même[108], à celle de Sturm de 1835.

Dans le manuscrit de 1886-87, Kronecker poursuit son travail en faisant ce qu'il appelle une *vérification du théorème de Sturm au moyen de considérations de continuité*[109]. En fait, sous une forme à peu près stable, cette démonstration se trouve dans la plupart des manuscrits : il s'agit cette fois d'une réécriture, et non d'une relecture, de celle que Sturm produit en 1835, et qui utilise – sans que cela soit nécessaire d'après Kronecker – des considérations de continuité.

Voici comment il procède :

La dérivée de $\frac{f}{f_1}$ est

$$d\left(\frac{f}{f_1}\right) = \frac{f'f_1 - ff_1'}{f_1^2}$$

107 [Kronecker 1887c, p. 140] : Selbst der Übergang von Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten, der dabei vorkam, ist nicht als solcher zu betrachten, weil es sich nur um Vorzeichen, nicht um Werte der Function selbst handeln.

108 [Kronecker 1881b, p. 108] : Wir lassen jetzt den Beweis folgen, welchen Sturm zu seinem Satze angewendet hat. / Nous allons maintenant suivre la preuve que *Sturm* a utilisée pour son théorème.

109 [Kronecker 1887c, p. 140] : Verification des Sturm'schen Satzes mit Hilfe von Continuitätsberachtungen.

donc pour toute racine ξ de f on a

$$d\left(\frac{f}{f_1}\right)(\xi) = \frac{f'(\xi)f_1(\xi)}{f_1^2(\xi)}$$

et ainsi (2), c'est-à-dire ce que Kronecker appelle le théorème de Sturm, devient

$$\sum_{f(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(d\left(\frac{f}{f_1}\right)(\xi)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)),$$

car $\operatorname{sgn}(f_1^2(\xi)) = 1$. En posant

$$\sigma(x) = \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x)f_h(x))$$

on a

$$-\sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(d\left(\frac{f}{f_1}\right)(\xi)\right) = \frac{1}{2}\sigma(x_1) - \frac{1}{2}\sigma(x_2).$$

Lorsque x varie, la fonction σ ne peut se modifier que lorsque $f_{h-1}(x)f_h(x)$ change de signe, et donc s'annule[110]. Cela n'arrive que lorsque $f_{h-1}(x) = 0$ ou $f_h(x) = 0$. Par ailleurs, ces deux fonctions ne peuvent s'annuler ensemble, car cela entraînerait l'existence d'une racine commune entre f et f_1.

Soit maintenant $\delta > 0$ et examinons pour $h = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ (le cas $h = 0$ sera traité plus loin) :

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h - \delta)f_h(\xi_h - \delta)) + \operatorname{sgn}(f_h(\xi_h - \delta)f_{h-1}(\xi_h - \delta))$$

et

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h + \delta)f_h(\xi_h + \delta)) + \operatorname{sgn}(f_h(\xi_h + \delta)f_{h-1}(\xi_h + \delta)).$$

Comme

$$f_{h-1} - g_h f_h + f_{h+1} = 0$$

et que $f_h(\xi_h) = 0$ on peut trouver δ suffisamment petit pour que

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h - \delta)) = -\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h - \delta))$$

et

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h + \delta)) = -\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h + \delta))$$

110 Kronecker utilise donc ici, comme Sturm, la méthode des variations.

et donc

$$\mathrm{sgn}(f_{h-1}(\xi_h - \delta))\mathrm{sgn}(f_h(\xi_h - \delta)) = -\mathrm{sgn}(f_h(\xi_h - \delta)\mathrm{sgn}(f_{h+1}(\xi_h - \delta))$$
$$\mathrm{sgn}(f_{h-1}(\xi_h + \delta))\mathrm{sgn}(f_h(\xi_h + \delta)) = -\mathrm{sgn}(f_h(\xi_h + \delta)\mathrm{sgn}(f_{h+1}(\xi_h + \delta)).$$

On peut passer, pour la suite f_{h-1}, f_h, f_{h+1}

- soit de $- + +$ à $- - +$,
- soit de $- - +$ à $- + +$,
- soit de $+ + -$ à $+ - -$,
- soit de $+ - -$ à $+ + -$.

Il n'y a donc aucune modification du nombre de changements de signes. Si ce dernier peut changer, ce sera ainsi uniquement pour $x = \xi$. On a pris f de sorte à ce qu'elle n'ait pas de racine double, donc

$$\mathrm{sgn}(f(\xi - \delta)f_1(\xi - \delta)) - \mathrm{sgn}(f(\xi + \delta)f_1(\xi + \delta)) = \pm 2$$

Or

$$f(\xi \pm \delta) = \pm f'(\xi)\delta + \cdots$$

et pour δ suffisamment petit, on a

$$\mathrm{sgn}(f(\xi \pm \delta)) = \mathrm{sgn}(\pm f'(\xi)) = \pm \mathrm{sgn}(f'(\xi)).$$

Si f passe du négatif au positif, alors f' est positive en ξ, et on passe ainsi de $-+$ à $++$. Si en revanche f passe du positif au négatif, alors f' est négative en ξ, et on passe ainsi de $+-$ à $--$. Il y a donc lors du passage par chaque racine ξ la perte d'un changement de signes. Entre x_1 et x_2, il y a donc finalement autant de racines à l'équation $f(x) = 0$, qu'il y a de pertes de changements de signes, c'est-à-dire $m_2 - m_1$.

Kronecker fait remarquer que cette forme généralisée, c'est-à-dire avec f_1 qui n'est plus forcément égale à f' est encore à attribuer à Sylvester[111].

Quelle est la différence avec la démonstration précédente ? Essentiellement dans l'utilisation de ces δ, caractéristique de la continuité *analytique*. Il s'agit d'une application de ce que H. Sinaceur nomme la « méthode des variations et des permanences de signes », c'est-à-dire l'examen des changements de signes que produit la variation des valeurs de l'inconnue lors du *passage* par les racines de l'équation donnée. C'est ce *passage* par la racine que Kronecker souhaite éviter. En effet, pour Kronecker ce passage n'a aucun sens *arithmétique*, même s'il accepte de lui en donner un *géométrique*. En s'appuyant ainsi sur une démonstration connue, qu'il met en pa-

111 Die obigen allgemeineren Betrachtungen rühren von Sylvester her [Kronecker 1887c, p. 142]. Cette idée est bien présente dans les écrits de Sylvester dès [Sylvester 1839], mais, comme le remarque Hourya Sinaceur [Sinaceur 1991, p. 99], Sturm l'émet expressément dans son article de 1835.

rallèle avec celle qu'il propose, il peut plus facilement convaincre ses étudiants de l'inutilité d'introduire ici la continuité.

4.4. *Interprétation géométrique*

Nous allons maintenant examiner en détail une interprétation graphique qu'il donne de sa *formule-théorème.*

Encore une fois, à propos du théorème de Sturm, Kronecker choisit délibérément un point de vue géométrique, et c'est ainsi qu'il interprète cette somme. On représente donc dans le plan muni d'un repère les deux courbes associées à l'équation :

$$F(x,y) = (y - f(x))(y - f_1(x)) = 0.$$

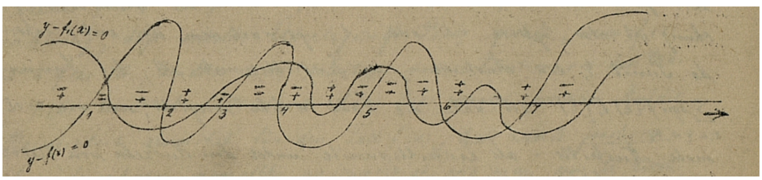


FIGURE 4. [Kronecker 1887c, p. 144]

Et Kronecker définit, « par analogie avec le cercle », *l'intérieur* (*Innere*) de cette courbe comme étant la partie du plan telle que

$$(y - f(x))(y - f_1(x)) < 0$$

et l'*extérieur* (*Äussere*) l'autre partie[112]. Il poursuit en définissant des points d'entrée et de sortie : lorsque l'on se déplace dans le sens croissant sur l'axe des abscisses, on considère les points d'intersection avec la courbe d'équation $y - f(x) = 0$. « Entrer » signifie entrer dans la surface définie par $(y - f(x)) \cdot (y - f_1(x)) < 0$ et « Sortir » signifie sortir de cette même surface. Ainsi dans le schéma précédent, les points $1, 2, 3, 5, 6$ sont des points de sortie (*Austrittspunkte*) tandis que $4, 7$ sont des points d'entrée (*Eintrittspunkte*).

Soit ξ une racine de $f(x) = 0$: si $f'(\xi)f_1(\xi) > 0$, F est croissante lorsque l'on passe par le point $(\xi, 0)$ en parcourant l'axe des abscisses dans

---

112 Cette comparaison avec le cercle peut faire penser au travail de Gauss, qui propose une définition similaire dans la première et quatrième démonstration du théorème fondamental de l'algèbre [Gauss 1799/1866] et [Gauss 1849/1866].

le sens croissant, alors $F(x,0) = f(x)\cdot f_1(x)$ passe des négatifs aux positifs, et $(\xi,0)$ est donc un point de *sortie*.

De même, si $f'(\xi)f_1(\xi) < 0$, F est décroissante lorsque l'on passe par le point $(\xi,0)$ en parcourant l'axe des abscisses dans le sens croissant, alors $F(x,0) = f(x)\cdot f_1(x)$ passe des positifs aux négatifs, et $(\xi,0)$ est donc un point d'*entrée*. On a

- $\operatorname{sgn}(f'(\xi)f_1(\xi)) = +1$ si $(\xi,0)$ est un point de *sortie*,
- $\operatorname{sgn}(f'(\xi)f_1(\xi)) = -1$ si $(\xi,0)$ est un point d'*entrée*,

et finalement, lorsque l'on parcourt l'axe des abscisses de x_1 à x_2 et que l'on regarde les points de $y - f(x) = 0$ que l'on intersecte, alors $\sum_\xi \operatorname{sgn}(f'(\xi)f_1(\xi))$ est la différence du nombre de points de sortie avec celui des points d'entrée. Si l'on note $\mathfrak{a}$ le nombre de points de sortie et $\mathfrak{e}$ le nombre de points d'entrée, on a en reprenant les notations précédentes :

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{e} = m_1 - m_2.$$

Dans le cas du travail de Sturm, où $f_1 = f'$, on a pour tout ξ :

$$\operatorname{sgn}(f'(\xi)f_1(\xi)) = \operatorname{sgn}(f'(x)^2) = +1.$$

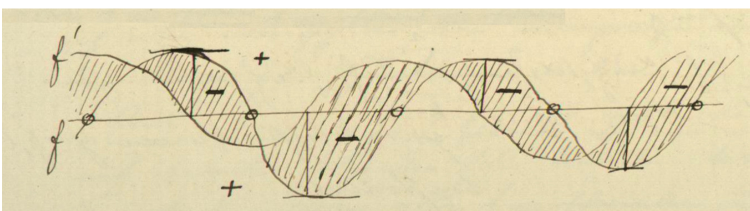


FIGURE 5. [Kronecker 1881b, p. 110]

Il n'y a donc que des sorties et $\sum_\xi \operatorname{sgn}(f'(\xi)f_1(\xi))$ correspond ainsi au nombre de racines réelles de $f(x) = 0$.

Kronecker propose ici une interprétation « géométrique » d'une formule qu'il a donnée dans un cadre algébrique. Les notions d'intérieur et d'extérieur y sont définies, et l'on pense tout de suite au théorème de Jordan qui affirme que

> toute courbe continue C divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini [Jordan 1893, p. 99].

ou, en des termes plus contemporains, que le complémentaire d'une courbe de Jordan a exactement deux composantes connexes[113], dont exactement l'une est bornée. Nous connaissons bien, depuis le travail de F. Brechenmacher[114], la controverse qui a eu lieu entre Jordan et Kronecker à propos des formes bilinéaires, et il ne faudrait pas confondre ce théorème de Jordan avec celui dont il est question dans cette controverse, à savoir celui sur la réduction des endomorphismes. Il s'agit ici d'un théorème de topologie, et ce qui est remarquable, c'est que ce théorème se déduira finalement assez naturellement de la théorie des caractéristiques de Kronecker[115], dont l'idée première, comme nous allons le voir maintenant, est issue d'une interprétation graphique du théorème de Sturm.

5. LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES

Kronecker décrit sa théorie des caractéristiques dans trois articles ([Kronecker 1869a], [Kronecker 1869b] et [Kronecker 1878a]) publiés en 1869 et 1878. Cependant, la présentation qu'il en donne étant bien trop succincte pour permettre à elle seule une compréhension réelle de la théorie, nous allons utiliser le contenu des *Vorlesungen* pour en donner une présentation. Contrairement à ses articles, les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont traités de façon détaillée dans ses cours. Lorsqu'il commence son chapitre sur la théorie des caractéristiques, Kronecker rappelle le théorème de Sturm sous la forme qu'il qualifie de « plus générale » [Kronecker 1891, p. 208] :

$$\sum_{x'<\xi<x''} \operatorname{sgn} f'(\xi) f_1(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{v} (\operatorname{sgn} f_{h-1}(x'') \cdot f_h(x'') - \operatorname{sgn} f_{h-1}(x') \cdot f_h(x')).$$

Nous avons déjà vu que cette généralisation, Kronecker l'attribue à Sylvester. Mais il insiste ici sur le fait que Sylvester n'a pas réussi à donner d'interprétation correcte de cette formule[116] :

---

113 Rappelons ici qu'une courbe de Jordan est l'image continue, dans le plan affine, du cercle trigonométrique.

114 Voir par exemple [Brechenmacher 2007].

115 La démonstration est basée sur l'indice de Kronecker, comme le fait remarquer Hadamard en 1910 : « La démonstration, d'après M. Ames, du théorème de M. Jordan sur les courbes fermées sans point double (n 306, 307) repose sur la considération de l'ordre d'un point ou, si l'on veut, sur la considération d'une variation d'argument. La généralisation, dans le cas où le nombre des dimensions dépasse deux, est fournie par l'indice de Kronecker » [Tannery & Hadamard 1910, p. 437].

116 Diese Verallgemeinerung der Sturmschen Formel rührt von *Sylvester* her, welcher darüber und über die in Vorhergehenden besprochenen kombinatorischen Aus-

> Cette généralisation de la formule de Sturm vient de *Sylvester*, qui a fait paraître plusieurs essais sur les expressions combinatoires précédentes, expressions qu'il a formées sous l'hypothèse de la décomposition d'une fonction en facteurs linéaires dans les *Philosophical Transactions* de 1853. Mais alors que pour le cas particulier où $f_1(x) = f'(x)$, la signification de la somme de signes est évidente, *Sylvester* s'est efforcé en vain d'interpréter de façon claire et exhaustive cette relation entre les signes, pour laquelle il a introduit le terme d'« intercalations » [Kronecker 1891, p. 208].

Comme Kronecker le précise dans son article de 1869, l'interprétation dont il parle est bien géométrique. C'est en partant d'une interprétation géométrique du théorème de Sturm qu'il introduit la théorie des caractéristiques. Il reprend l'interprétation géométrique précédente et conclut[117] :

> Ces remarques peuvent être généralisées en prenant à la place de l'axe des x une troisième courbe en plus des deux autres; il est pourtant nécessaire, pour poursuivre arithmétiquement ces recherches, d'introduire une nouvelle notion : la notion de caractéristique d'un système de fonctions [Kronecker 1891, p. 211].

C'est à partir de considérations géométriques qu'il introduit son chapitre : l'axe des abscisses pourra être remplacé par une courbe du plan. C'est l'annonce de ce qui constitue la théorie des caractéristiques dans le cas de trois fonctions à deux inconnues, et c'est à partir de ce cas que la généralisation au cas n se fait. Mais si l'intuition géométrique est un vecteur heuristique important, il faut fonder *arithmétiquement* cette nouvelle théorie. Kronecker commence par présenter la caractéristique de deux fonctions d'une variable, qui est particulièrement développée pour trois raisons. Tout d'abord, il met en évidence le lien entre caractéristique et théorème de Sturm, ce dernier se déduisant assez naturellement du premier. Ensuite, ce cas permet à Kronecker de développer certains résultats issus de son article intitulé *Über die Charakteristik von Funktionen-Systemen* [Kronecker 1878a], et donc d'intégrer dans son cours ses recherches

---

drücke, die er unter Voraussetzung der Zerlegung einer Funktion als Produkt von Linearfaktoren bildete, einige Aufsätze in den *Philosophical Transactions* z. Teil 1853 erscheinen ließ. Während aber für den Speziellen Fall, wo $f_1(x) = f'(x)$ gesetzt wird, die Bedeutung der Zeichensumme auf der Hand liegt, bemühte sich *Sylvester* vergeblich, diese allgemeineren Zeichenverbindungen, für welche er den Namen « intercallations » einführte, in Klarer und erschöpfender Weise zu interpretieren.

117 Diese Betrachtungen können verallgemeinert werden, indem man anstatt der x-Axe eine beliebige dritte Kurve zu den beiden anderen hinzunimmt; jedoch ist es, um diese Untersuchungen arithmetisch durchführen zu können, nötig, einen neuen Begriff einzuführen : den Begriff der Charakteristik eines Funktionsystems.

les plus récentes. Enfin, la caractéristique de deux fonctions réapparaîtra lorsque nous étudierons, plus loin, un paragraphe que Kronecker ajoute en conclusion de sa partie sur la théorie des équations algébriques en 1891. Ce dernier concernera la *notion de caractéristique*, notion qu'il tentera d'expurger de tout usage des racines d'une équation.

5.1. *La caractéristique de deux fonctions d'une variable*

Prenons deux fonctions polynômiales d'une variable φ et ψ que l'on supposera toutes les deux de degré n. Notons $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les racines de φ et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ celles de ψ et

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \varphi(z) & \psi(z) \\ \varphi'(z) & \psi'(z) \end{vmatrix}.$$

L'entier ou demi-entier :

$$-\frac{1}{2}\sum_{\xi} \operatorname{sgn} \Delta(\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{\eta} \operatorname{sgn} \Delta(\eta)$$

est appelé *caractéristique* du système de fonctions φ et ψ. On le note $\chi(\varphi, \psi)$.

Kronecker, dans ses *Vorlesungen*, pose deux conditions sur φ et ψ : les deux fonctions doivent avoir le même degré, et ce degré doit être pair. Il ne revient pas sur celles-ci, mais prolonge pourtant la définition aux autres cas. Dans son article de 1878 sur le théorème de Sturm [Kronecker 1878b, p. 59], Kronecker justifie cette extension : si φ et ψ n'ont pas le même degré, avec $\deg(\psi) < \deg(\varphi)$, on pose

$$\chi(\varphi, \psi) = \chi(\varphi, \varphi + \psi).$$

Dans le cas où les fonctions φ et ψ sont de degré impair, on peut toujours ajouter des facteurs $x-u$ et $x-v$ en choisissant u et v suffisamment grands. En utilisant cette définition, Kronecker démontre les trois propriétés suivantes :

(1) $\chi(\varphi, \psi) = -\chi(\psi, \varphi)$.
(2) Pour tout $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a

$$\chi(\alpha\varphi + \beta\psi, \gamma\varphi + \delta\psi) = [\alpha\delta - \beta\gamma]\chi(\varphi, \psi).$$

(3) $\chi(\varphi, \psi) = \chi(\varphi, a\varphi + \psi) = \chi(\varphi + a\psi, \psi)$.

Ce travail montre que, par une substitution linéaire, seul le signe de la caractéristique peut changer, mais sa valeur absolue reste la même.

5.1.1. *Interprétation graphique*

Kronecker propose une interprétation graphique de la caractéristique de deux fonctions. Il revient sur le travail qu'il a déjà effectué et où il avait montré que la somme

$$\sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn} f_1(\xi) f'(\xi)$$

représente la différence entre le nombre de points de sortie et le nombre de points d'entrée, tels que ceux-ci ont été définis précédemment entre les bornes x_1 et x_2. On a alors[118] :

> la caractéristique a la signification géométrique suivante : La caractéristique $\chi(\varphi, \psi)$ vaut la moitié de l'excédent des sorties sur les entrées lorsque nous nous déplaçons sur la courbe $y = \varphi(z)$, c'est-à-dire en prenant en compte les ξ et vaut de même la moitié de l'excédent des entrées sur les sorties lorsque l'on parcourt la courbe $y = \psi(z)$, c'est-à-dire en prenant en compte les η [Kronecker 1881b, p. 157].

Exemple : Dans le manuscrit de 1880-81, à partir de la figure 6, on obtient :

$$\chi(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}(2-4) = -1.$$

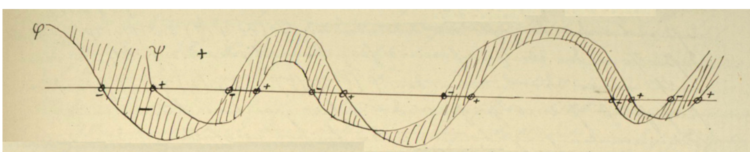


FIGURE 6. [Kronecker 1881b, p. 157]

5.1.2. *Lien avec le théorème de Sturm*

Maintenant que la définition de la caractéristique de deux fonctions d'une variable est posée, il est facile d'interpréter le théorème de Sturm en termes de *caractéristiques.* Soient $\varphi(z) = f(z)$ et $\psi(z) = (x-z)f_1(z)$. On a alors

$$\chi(f(z), (x-z)f_1(z)) = \frac{1}{2}\sum_{\xi}[(x-\xi)f_1(\xi) \cdot f'(\xi)].$$

118 Die Charakteristik folgende geometrische Bedeutung [hat] : Es ist die Charakteristik $\chi(\varphi, \psi)$ der halbe Ueberschuß der Austritte über die Eintritte, wenn wir uns auf der Curve $y = \varphi(z)$ bewegen, d.h. die ξ zählen und gleich dem halben Ueberschuß der Eintritte über die Austritte, wenn wir uns auf der Curve $y = \psi(z)$ bewegen, d.h. die η zählen.

On obtient

$$\begin{aligned}
&\chi(f(z),(x_2-z)f_1(z)) - \chi(f(z),(x_1-z)f_1(z)) \\
&\qquad = \frac{1}{2}\sum_{\xi}[(x_2-\xi)f_1(\xi)\cdot f'(\xi)] - \frac{1}{2}\sum_{\xi}[(x_1-\xi)f_1(\xi)\cdot f'(\xi)] \\
&\qquad = \sum_{x_1<\xi<x_2}[f_1(\xi)\cdot f'(\xi)],
\end{aligned}$$

car :

– si $\xi \in [x_1; x_2]$ alors $(x_2-\xi)$ et $(x_1-\xi)$ sont de signes opposés et on a

$$\frac{1}{2}[(x_2-\xi)f_1(\xi)\cdot f'(\xi)] - \frac{1}{2}[(x_1-\xi)f_1(\xi)\cdot f'(\xi)] = [f_1(\xi)\cdot f'(\xi)],$$

– si $\xi \notin [x_1; x_2]$ alors $(x_2-\xi)$ et $(x_1-\xi)$ sont de même signe et on a

$$\frac{1}{2}[(x_2-\xi)f_1(\xi)\cdot f'(\xi)] - \frac{1}{2}[(x_1-\xi)f_1(\xi)\cdot f'(\xi)] = 0.$$

On peut exprimer à l'aide de la caractéristique de deux fonctions et avec les bonnes conditions sur f_1, le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$ situées entre x_1 et x_2 : nous avons bien là le théorème de Sturm, qui n'est donc rien d'autre qu'une application de la théorie des caractéristiques dans un cas très particulier.

Une des propriétés fondamentales de la caractéristique d'un système de deux fonctions est la façon dont cette dernière se modifie lors d'une variation continue des coefficients des deux fonctions. Kronecker traite de cette modification pour un système de n fonctions dans son article de 1878. Dans celui-ci, il montre d'ailleurs que[119] :

> la modification de la caractéristique lors du passage d'un système de fonctions à un autre et donc lorsque seulement la caractéristique d'un seul système de fonctions est connue, permet de déterminer la caractéristique de tous les systèmes de fonctions correspondant aux différents points. En rendant la modification dépendante d'une seule variable x, on ramène cette détermination à l'évaluation de la caractéristique d'un système de deux fonctions d'une variable qui peut s'effectuer dans le cas des fonctions algébriques au moyen du procédé de Sturm [Kronecker 1878a, p. 77].

119 Hiernach lässt sich die Veränderung der Charakteristik beim Uebergang von einem Functionen-System zum andern und also, wenn nur die Charakteristik eines einzigen Functionen-Systems bekannt ist, die Charakteristik aller den verschiedenen Punkten entsprechenden Functionen-Systeme bestimmen. Diese Bestimmung findet sich dabei, indem der Uebergang von einer einzigen Variabein x abhängig gemacht wird, auf die Ermittelung der Charakteristik eines Systems von zwei Functionen einer Variabeln zurückgeführt, welche im Falle algebraischer Functionen mittels des *Sturm*'schen Verfahrens erfolgen kann.

Il ne s'agit donc pas d'un cas particulier : on peut toujours se ramener au cas de la caractéristique d'un système de deux fonctions d'une variable. Le contexte de la rédaction de cet article est donné par Kronecker lui-même en introduction[120] :

> À la suite des recherches que j'ai évoquées dans mon exposé d'il y a huit jours, je suis arrivé à la découverte d'une nouvelle propriété fondamentale de la caractéristique d'un système de fonctions de plusieurs variables que j'ai introduite dans ma communication du 4 mars 1869 et que j'ai alors exprimée par une intégrale multiple. La nouvelle propriété que je veux expliquer ici est obtenue par la variation du système de fonctions et peut être utilisée convenablement pour la détermination numérique de la caractéristique [Kronecker 1878a, p. 73].

On peut décrire – selon un angle topologique qui nous est contemporain – ce que montre Kronecker dans cet article. À partir de renseignements sur les racines d'une famille d'équations, il exhibe les composantes connexes d'un espace associé (dont la dimension dépend en partie du degré de l'équation) : une étude *topologique* d'un espace est ainsi associée à une étude algébrique d'une famille d'équations. Cette étude fait apparaître une théorie qui fait intervenir, dans le cadre de travaux algébriques, des éléments que nous qualifierions aujourd'hui de topologiques[121]. Nous allons maintenant passer à ce qui constitue le cœur de son chapitre sur la théorie des caractéristiques dans ses manuscrits : la théorie des caractéristiques de trois fonctions de deux variables.

5.2. *Le* Fortgangsprincip

Lorsque l'on commence à lire la partie du cours de Kronecker sur la caractéristique de trois fonctions de deux variables, la première notion qui apparaît est celle de *Fortgangsprincip.* Nous pouvons traduire le terme de « *Fortgangsprincip* » ou « *Fortgangsprinzip* » par *principe de parcours,* même si la traduction littérale serait plutôt *principe de continuation.* Il ne faudra pas

---

120 Im Verfolg der Untersuchungen, welche ich in meinem vor acht Tagen gehaltenen Vortrage erwähnt habe, bin ich zur Auffindung einer neuen Fundamental-Eigenschaft jener Charakteristik der Systeme von Functionen mehrer Variabeln gelangt, welche ich in meiner Mittheilung vom 4. März 1869 eingeführt und dort durch ein vielfaches Integral ausgedrückt habe. Die neue Eigenschaft, welche ich hier auseinandersetzen will, wird durch Variirung der Functionen-Systeme erlangt und kann füglich zur numerischen Bestimmung der Charakteristik benutzt werden.

121 Et en effet, la théorie des caractéristiques peut être envisagée comme l'un des premiers pas vers la construction de la topologie algébrique telle qu'elle se développera dans la première moitié du vingtième siècle.

oublier cependant l'aspect local de « continuation », au sens où ce que l'on définit devra répondre à la question : comment poursuivre mon chemin lorsque je suis en un certain point d'une courbe ? Bien sûr, cela correspondra la plupart du temps à un sens de parcours global sur la courbe, mais pour certains cas limites ce sera cet aspect local sur lequel il faudra se focaliser. Car nous verrons qu'il ne s'agit finalement de rien d'autre que de cela : dans quel sens doit-on parcourir une courbe ?

5.2.1. *Dans quel cadre ? En quoi consiste-il ?*

Essayons déjà d'avoir une première idée de ce principe. Son cadre général d'application est le suivant : à partir de $n+1$ fonctions $F_0, F_1, \dots, F_n$ de n variables à valeurs réelles suffisamment régulières on peut former $\frac{n(n+1)}{2}$ sous-variétés de dimension 1[122]. En effet l'ensemble des points de $(z_1, \dots, z_n)$ tels que $F_0 = F_1 = \cdots = F_{h-1} = F_{h+1} = \cdots = F_{k-1} = F_{k+1} = \cdots = F_n = 0$ est une sous-variété de dimension 1 que Kronecker qualifie de suite continue de points (*stetige Folge*) ou de lignes (*Linie*). C'est sur ces lignes qu'il définit son *Fortgangsprincip*, son *sens de parcours*.

Ainsi, dans le cas $n = 2$, on a la figure 7 où l'on cherche à déterminer un sens de parcours sur $F_0 = 0$, $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$.

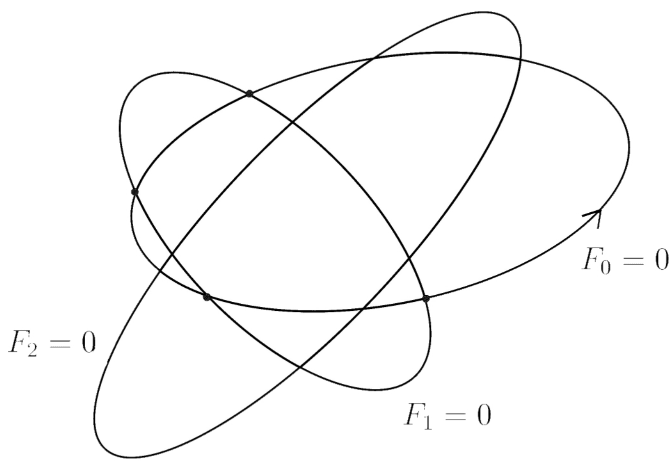


FIGURE 7.

[122] Dans le seul cours où Kronecker traite le cas général n, il nomme les fonctions $F_{00}, \dots, F_{n0}$ et il suppose implicitement qu'elles admettent des dérivées partielles (Voir [Kronecker 1879, p. 466]).

5.2.2. *Un concept « fondamental », mais peu présent*

Le terme de *Fortgangsprinzip* apparaît dans les écrits de Kronecker pour la première fois dans son article de mars 1869 *Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln,* où il introduit la théorie des caractéristiques. À son propos Kronecker affirme[123] :

> Le « principe de parcours » expliqué ici est le véritable fondement de mes recherches sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables [Kronecker 1869a, p. 178].

On ne trouve pourtant ce « principe fondamental » que quatre fois dans son œuvre publiée : trois fois dans [Kronecker 1869a] et une fois dans [Kronecker 1878a], et donc uniquement dans deux des quatre articles où il présente la théorie des caractéristiques. Par ailleurs, tout au moins sous le terme de *Fortgangsprincip*, ce principe n'a quasiment pas été repris par ses contemporains. À part dans un article de Paul Stäckel [Stäckel 1893] et dans [Landsberg 1911] nous n'avons trouvé aucun document le mentionnant. Il apparaît aussi quelquefois, mais sans être nommé, dans la présentation de la théorie des caractéristiques (par exemple dans le cours d'algèbre de Netto [Netto 1900]).

5.2.3. *Les raisons de l'introduction de ce principe*

Examinons ce qui amène Kronecker à introduire ce principe. Comme Gauss avant lui, lorsque Kronecker doit parcourir une courbe dans le plan, il détermine son sens de parcours comme étant celui qui laisse l'« intérieur » à gauche. Mais, comme il le remarque dans ses cours à l'université de Berlin, le passage à des dimensions supérieures devient problématique. En 1881, il écrit ainsi[124] :

> En règle générale on parcourt ainsi une courbe de sorte que l'intérieur reste à gauche, mais cette considération se limite aux figures planes. Nous voulons ainsi établir un critère purement analytique [Kronecker 1881b, p. 164].

et dans son dernier cours de 1891, il ajoute[125] :

---

123 Das hier auseinandergesetzte „Fortgangsprincip“ bildet die eigentliche Grundlage meiner Untersuchungen über Systeme von Functionen mehrer Variabeln.

124 In der Regel durchläuft man nun eine Curve so, daß das Innere links bleibt, doch ist diese Betrachtung auf ebene Gebilde beschränkt. Wir wollen daher ein rein analytisches Criterium aufstellen

125 Diese Festlegung der Richtung – wir wollen es das Fortgangsprinzip nennen – ist für den Fall der Ebene gleichbedeutend mit der Vorschrift, die Kurve so zu durchlaufen, daß das Innere zur Linken liegt. (...) Jedoch ist diese letztere Festsetzung schon für eine Bewegung in Raume nicht mehr anwendbar, da hier ein « rechts » oder

> Cette détermination de la direction – nous l'appellerons le principe de parcours – est dans le cas du plan équivalent à la règle fixant le sens de parcours de la courbe de sorte que l'intérieur reste à gauche. (...) Cependant cette dernière détermination n'est déjà plus applicable pour un déplacement dans l'espace, car ici une « droite » ou une « gauche » ne pourraient pas être différenciées, et pour entrer dans l'étude de variétés de plus grande dimension, fixer *arithmétiquement* un principe de parcours est bien une condition nécessaire préalable [Kronecker 1891, p. 232].

L'argument que développe Kronecker dans son cours porte donc sur la difficulté à étendre la notion de sens de parcours lorsque l'on est en dimension supérieure à deux. Pourtant, dans le cours de 1881 et dans celui de 1891, Kronecker ne traitera que des courbes du plan[126]. En fait, un seul des manuscrits des cours sur la théorie des équations algébriques présents à la bibliothèque de Strasbourg traite du cas n : il s'agit de celui de 1878/79, qui suit donc immédiatement la parution de son article *Über die Charakteristik von Funktionen-Systemen.* Il faut donc chercher aussi ailleurs que dans ses cours les raisons de l'introduction du *Fortgangsprincip.*

5.2.4. *Explication du principe dans le cas* $n = 2$

Comme nous l'avons dit, Kronecker ne traite essentiellement dans son cours que le cas des courbes du plan, c'est-à-dire le cas $n = 2$.

On a alors trois fonctions numériques F_0, F_1 et F_2 que Kronecker suppose différentiables par rapport aux deux variables x et y. On notera, comme Kronecker

$$F_{01} = \frac{\partial F_0}{\partial x} \qquad F_{02} = \frac{\partial F_0}{\partial y},$$

$$F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \qquad F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad F_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

« links » nicht unterschieden werden kann, und für den Eintritt in die Untersuchungen höherer Mannigfaltigkeiten wird es erst recht eine unerlässliche Bedingung, ein Fortgansprinzip *arithmetisch* zu fixieren.

126 Cependant il semble ici nécessaire de rappeler l'aspect spéculatif de ces remarques : nous ne sommes en possession que d'un manuscrit décrivant, peut-être de façon incomplète, la théorie dans le cas général. La prise de notes de Kneser de 1880-1881 pourrait laisser penser que la théorie des caractéristiques n'est pas abordée [Kneser 1881], alors que celle de Runge de la même année (mais qui contient peut-être aussi celle de 79) se termine par quelques notes sur la théorie pour $n + 1$ équations.

Soit de plus trois variables F_{00}, F_{10} et F_{20}. Alors on a le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{10} & F_{20} \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

et les sous-déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} \\ F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = F_{11} \cdot F_{22} - F_{21} \cdot F_{12}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} F_{01} & F_{21} \\ F_{02} & F_{22} \end{vmatrix} = F_{21} \cdot F_{02} - F_{01} \cdot F_{22}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} F_{01} & F_{11} \\ F_{02} & F_{12} \end{vmatrix} = F_{01} \cdot F_{12} - F_{11} \cdot F_{02}.$$

$F_0 = 0$, $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont les trois courbes – les 3 *lignes* dans le vocabulaire de Kronecker – sur lesquelles nous souhaitons nous déplacer. Le principe est le suivant : on parcourt une courbe en regardant les points d'intersection avec l'une des deux autres. On obtient alors 6 parcours différents : $[01], [10], [02], [20], [12], [21]$.

(1) $[01]$ correspond à un parcours de $F_2 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_0,
(2) $[10]$ correspond à un parcours de $F_2 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_1,
(3) $[02]$ correspond à un parcours de $F_1 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_0,
(4) $[20]$ correspond à un parcours de $F_1 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_2,
(5) $[12]$ correspond à un parcours de $F_0 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_1,
(6) $[21]$ correspond à un parcours de $F_0 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_2.

Regardons par exemple plus précisément $[12]$ et $[21]$:

[12] : On parcourt $F_0 = 0$ en regardant les points d'intersection avec $F_1 = 0$. Soit $M(x', y')$ un point de $F_0 = 0$ à partir duquel on veut se déplacer et $\Phi(x, y)$ une nouvelle fonction répondant aux mêmes conditions que les F_i et telle que la courbe $\Phi = 0$ passe par M.

Ce que souhaite Kronecker, c'est que

$$\frac{\partial \begin{vmatrix} F_{00} & \Phi & F_{20} \\ F_{01} & \Phi_1 & F_{21} \\ F_{02} & \Phi_2 & F_{22} \end{vmatrix}}{\partial F_{20}} \cdot d\Phi > 0,$$

où Φ_1 désigne $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, c'est-à-dire que

$$\begin{vmatrix} F_{01} & \Phi_1 \\ F_{02} & \Phi_2 \end{vmatrix} \cdot d\Phi > 0,$$

donc que[127]

$$(F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1) \cdot d\Phi > 0.$$

Notation

Pour comprendre ce qui suit, il faut se rappeler ce que représentent dx et dy pour Kronecker dans le cadre de cette étude. On est en train de se déplacer sur une courbe. Si l'on pose ds l'élément d'arc au point M, dx et dy sont les projections orthogonales de ds. Ainsi, on peut voir $\vec{t}(dx, dy)$ comme un vecteur tangent à la courbe $f = 0$. Comme $\vec{n}(f_1(x', y'), f_2(x', y'))$ est normale à cette même courbe en M, ces deux vecteurs sont orthogonaux et leur produit scalaire est donc nul :

$$f_1 dx + f_2 dy = 0$$

Cela ne semble pas nécessiter d'explications supplémentaires pour un lecteur de la fin du XIXᵉ siècle : dans les quatre manuscrits où Kronecker présente sa théorie des caractéristiques il pose sans aucune justification l'égalité précédente ([Kronecker 1873, p. 173], [Kronecker 1879, p. 513], [Kronecker 1882b, p. 164] et [Kronecker 1891, p. 232]). Même dans le cours de 1878-79, où la plupart des arguments sont explicités, cette égalité n'est qu'affirmée : il la tient donc pour acquise. Et en effet, cette conception est l'un des outils de la géométrie différentielle du XIXᵉ siècle, et fait partie des connaissances sur le calcul différentiel enseigné dans la seconde moitié du XIXᵉ siècle. On pourra lire par exemple le cours de Sturm à l'école polytechnique [Sturm 1901, p. 19] ou le cours de calcul infinitésimal pour ingénieurs de Rouché-Lévy [Rouché & Lévy 1900, p. 64].

Une autre façon d'interpréter cette égalité est la suivante : nous nous déplaçons sur une courbe où f est constamment nulle. Si l'on suppose

127 Kronecker écrit plutôt

$$\text{sgn } d\Phi = \text{sgn } F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1.$$

l'existence d'un paramétrage $(x(t), y(t))$ de cette courbe, alors $F(t) = f(x(t), y(t)) = 0$, donc $dF = x'(t)f_1(x(t), y(t))dt + y'(t)f_2(x(t), y(t))dt = 0$. En posant $x'(t)dt = dx$ et $y'(t)dt = dy$ on obtient l'égalité voulue. Dans les deux cas, Kronecker utilise des résultats de la géométrie différentielle lorsqu'il cherche à « arithmétiser » son principe de parcours.

Kronecker montre ensuite que cette condition est indépendante du choix de la fonction Φ en montrant que pour toute fonction Φ, il y a équivalence entre $F_{01} \cdot dy > 0$ et $(F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1) \cdot d\Phi > 0$. Examinons ce qui se passe dans les deux illustrations suivantes :

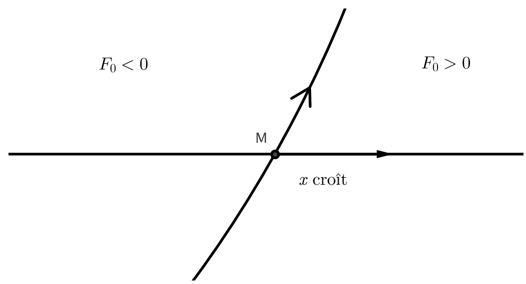


FIGURE 8.

Dans la figure 8, lorsque x croît, on passe de $F_0 < 0$ à $F_0 > 0$, donc F_0 croît et $F_{01} > 0$. Or $F_{01} \cdot dy > 0$, donc $dy > 0$. On doit donc, à partir de M, « monter ».

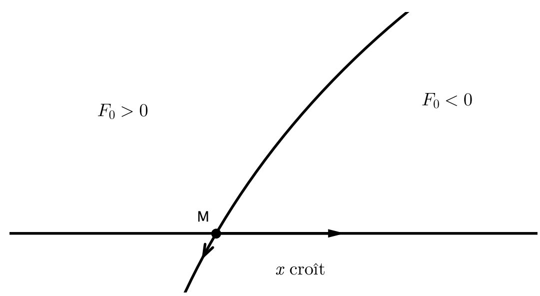


FIGURE 9.

Dans la figure 9, lorsque x croît, on passe de $F_0 > 0$ à $F_0 < 0$, donc F_0 décroît et $F_{01} < 0$. Or $F_{01} \cdot dy > 0$, donc $dy < 0$. On doit donc, à partir de M, « descendre ».

Kronecker poursuit en examinant l'inversion du sens de parcours et le cas des points doubles.

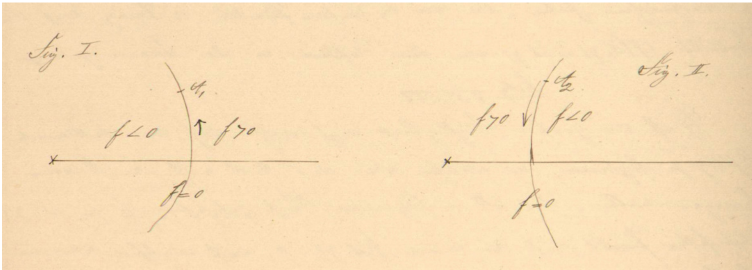


FIGURE 10. [Kronecker 1891, p. 231]

5.2.5. *Conclusion*

Le travail que nous venons de voir est valable pour une très grande variété de courbes, et pas seulement les courbes algébriques, bien que Kronecker considère uniquement ces dernières. Finalement, ce qui est utile ici, c'est plutôt leur aspect *lisse*[128], et donc leurs propriétés *analytiques* plutôt que *algébriques*.

Les références explicites à ce principe de parcours de Kronecker que nous avons pu trouver sont rares. On le trouve tout d'abord dans un article de Georg Landsberg publié en 1911 : *Beiträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie* [Landsberg 1911]. Landsberg a travaillé avec Kurt Hensel pour la rédaction en 1902 de la *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen : und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale* dans lequel il est question de la caractéristique [Hensel & Landsberg 1902, p. 609], au sens de Kronecker, d'un système de deux fonctions, et cette collaboration a certainement dû lui permettre d'avoir accès aux notes de cours de Kronecker. Dans ce mémoire, Landsberg cite Paul Stäckel : ce dernier a effectivement utilisé ce principe dans son article de 1893 *Ueber Systeme von Functionen reeller Variabeln* [Stäckel 1893]. Rappelons que Stäckel a suivi les cours de Kronecker à Berlin et a pris les notes à l'origine d'au moins l'un des manuscrits présents à Strasbourg [Kronecker 1886] : il a donc eu un accès direct et privilégié aux cours de Kronecker. Enfin, Johannes Knoblauch (1855-1915), dans ses *Grundlagen der differentialgeometrie* [Knoblauch 1913], utilise le terme de *Fortgangsprincip*. La notion est assez proche mais cependant différente : elles ne se rejoignent qu'accidentellement.

128 Au sens anglais du terme (*smooth*) : fonction extrêmement régulière qui a des différentielles de tout ordre, c'est-à-dire de classe C^{∞}.

Pourtant, au début du XX^{e} siècle, le lieu où vit le *Fortgangsprincip*, c'est-à-dire la théorie des caractéristiques, est d'après Hadamard « une notion qui est maintenant classique » [Tannery & Hadamard 1910, p. 437], et il en donne même un certain nombre d'applications. Ce à quoi Hadamard fait allusion, c'est en fait à la seconde partie du premier article de Kronecker, où il développe ce qui est aujourd'hui appelé *l'intégrale de Kronecker.* C'est sous cette version que cette extension de l'indice de Cauchy trouve une postérité à la fin du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e}, et cela ne correspond pas à ce que Kronecker expose dans ses cours. Ainsi, ce principe semble avoir été étudié uniquement par des mathématiciens ayant eu accès au cours de Kronecker sur la théorie des équations algébriques. Ce principe, qui permet de s'orienter sur les sous-variétés de dimension 1, n'a été que très peu commenté et repris. Nous pouvons donc raisonnablement nous poser la question : pourquoi avoir introduit ce principe ?

Dans le premier tome de son célèbre traité d'algèbre, Weber expose la théorie des caractéristiques uniquement dans le cas d'un système de trois fonctions [Weber 1898, p. 341]. Dans cet exposé, pourtant très complet, le *Fortgangsprincip* n'est pas décrit en tant que tel, et l'inégalité $(F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1) \cdot d\Phi > 0$ est regardée comme une conséquence du fait de laisser à « gauche » le domaine $F_0 < 0$. Mais lorsqu'il examine un système de trois courbes et regarde comme Kronecker les intersections de l'une d'entre elles avec une autre, il donne sans justification une règle pour effectuer ce parcours.

Une comparaison minutieuse du manuel de Weber et du cours de Kronecker nous permet de supposer que Weber a eu dans les mains le cours de Kronecker sur les caractéristiques. Si dans ce livre, qualifié encore aujourd'hui de « mine de résultats »[129], et que Leo Corry décrit comme le « standard German textbook on algebra » [Grattan-Guinness 2005, pp. 690-699], Weber a décidé de ne pas développer ce *Fortgangsprincip*, c'est certainement en grande partie parce que son exposition n'est pas nécessaire à la compréhension de la théorie des caractéristiques dans le cas $n = 2$. Ce principe a donc eu une très faible postérité, tout au moins sous cette forme. Weber, qui donne l'une des présentations de la théorie des caractéristiques la plus proche de celle de Kronecker dans ses cours, évite de l'exposer.

On voit bien la nécessité pour Kronecker de donner cette définition dans l'article de 1869 où il manipule des variétés de dimension n, mais pourquoi a-t-il introduit le *Fortgansprincip* dans ses cours ? On ne peut noter

129 Expression utilisée par Jean-Pierre Serre : voir [Schappacher & Volkert 1997, p. 6].

aucune différence fondamentale entre l'exposition qu'il en fait en 1881 et celle qu'il présente en 1891 : à part dans les termes employés, il n'y a donc pas ici, comme on peut le voir dans d'autres parties du cours, une réécriture qui prendrait en compte les nouveaux outils qu'il a construits dans les *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* [Kronecker 1882a], ce qui aurait justifié au moins sa présence en 1891.

Une première explication pourrait être la suivante. Le court paragraphe de l'article de Kronecker qui présente ce principe ne suffit pas à en faire saisir le fonctionnement : il permet à la rigueur de convaincre le lecteur de l'existence d'un tel principe. Il est donc tout à fait envisageable de voir le développement dans son cours du *Fortgangsprincip* dans le cas $n = 2$ comme un complément nécessaire pour la compréhension de la théorie générale des caractéristiques qu'il publie en parallèle. Ainsi, l'accès à cette théorie n'est pas simplement facilité par la lecture du cours, mais l'étude des *Vorlesungen* la rend *possible*.

Ensuite, ce principe est qualifié d'« analytique » en 1880 et d'« arithmétique » en 1890, et ces qualificatifs s'opposent tous deux à celui de « géométrique », qui désigne la méthode (à la Gauss) consistant à choisir un sens de parcours en utilisant les termes « gauche » et « droite » : en effet, on se rappelle que le mot « arithmétique » comprend pour Kronecker toutes les disciplines mathématiques sauf la géométrie et la mécanique. La volonté de faire une description analytique du *Fortgangsprincip* dans le cas des courbes du plan est une illustration de ce mouvement d'*arithmétisation* du travail de Kronecker.

5.3. *La caractéristique de trois fonctions à deux variables*

À partir du théorème de Sturm généralisé, Kronecker propose une interprétation géométrique qui l'amène à considérer un système de trois courbes dont l'une est l'axe des abscisses : il souhaite généraliser ses résultats pour le cas où cette dernière est quelconque, ou tout au moins a le même statut que les deux autres.

5.3.1. *Une proposition problématique*

Kronecker commence par donner la proposition suivante :

Proposition

Si $U(x,y)$ et $V(x,y)$ sont deux fonctions numériques suffisamment régulières (le plus raisonnable serait de les prendre algébriques) et fermées (au sens que lui donne Kronecker). Alors :

$$\sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}(dV) = 0 = \sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}\,(U_1V_2 - U_2V_1).$$

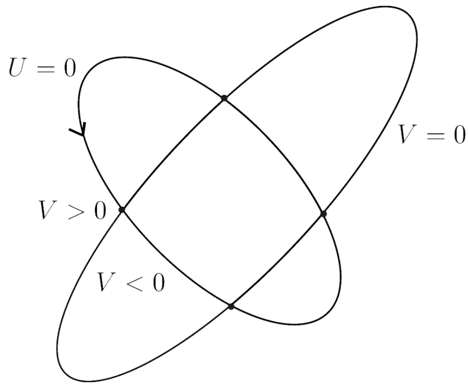


FIGURE 11.

En termes contemporains, on pourrait qualifier l'argument de Kronecker de « topologique ». Il s'agit de dire que, les courbes étant fermées, si l'on parcourt entièrement la courbe $U = 0$, on sera « entré » autant de fois dans la courbe $V = 0$ qu'on en sera « sorti ». Je rappelle qu'« intérieur » et « extérieur » de $V = 0$ sont définis respectivement par $V < 0$ et $V > 0$. Lorsque l'on entre dans $V = 0$, on passe de $V > 0$ à $V < 0$, donc $dV < 0$. Au contraire si l'on sort de $V = 0$, on passe de $V < 0$ à $V > 0$, donc $dV > 0$. Finalement

$$\sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}(dV) = 0.$$

Or, d'après le *Fortgangsprincip*, dV est soit toujours du même signe que $U_1V_2 - U_2V_1$, soit toujours du même signe que $-(U_1V_2 - U_2V_1)$. On a donc toujours

$$\sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}\ (U_1V_2 - U_2V_1) = 0.$$

Kronecker a utilisé ici – et d'ailleurs on retrouve cet argument à de nombreuses reprises dans son œuvre, de façon plus ou moins explicite – une argumentation dont Gauss s'est servi dans la première et la quatrième démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre[130] :

---

130 Ma traduction de « Iam ex geometria sublimiori constat, quamvis curvam algebraicam (sive singulas cuiusvis curvae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redeuntem aut utrimque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curvae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere ».

Alors d'après les mathématiques supérieures, il est établi que n'importe quelle courbe algébrique (ou bien chacune des branches de n'importe quelle courbe algébrique si elle se trouve être composée de plusieurs) ou bien revient sur elle-même, ou bien s'étend de part et d'autre vers l'infini, et donc si une branche d'une courbe algébrique entre dans un espace fini, cette même branche doit nécessairement sortir quelque part de cet espace [Gauss 1799/1866, p. 27].

Ce à quoi il ajoute la note suivante[131] :

Certes, il semble avoir été suffisamment bien démontré qu'une courbe algébrique ne peut ni s'interrompre brutalement quelque part (comme par exemple dans la courbe transcendante dont l'équation est $y = \frac{1}{\log x}$) ni, pour ainsi dire, se perdre après des spirales en un point (comme la spirale logarithmique) ; autant que je sache, personne n'a émis de doute à ce sujet. Cependant, si quelqu'un le demande, je me chargerai à l'occasion de donner une démonstration dont on ne pourra douter. Mais dans le cas présent, il est manifeste que si une branche, par exemple 2, ne pouvait sortir nulle part du cercle (fig. 3), on pourrait entrer en 0 et en 2, ensuite faire le tour de toute cette branche (qui devrait se perdre dans l'espace du cercle) et enfin on pourrait de nouveau sortir du cercle entre 2 et 4 de telle sorte que nulle part sur tout le chemin on n'aurait intersecté la ligne première. L'absurdité de cela est évidente du fait qu'au point où l'on est entré dans le cercle, on a eu la première surface au dessus de soi, mais à la sortie au dessous ; c'est pourquoi nécessairement on a dû quelque part rencontrer la première surface, à savoir en un point de la première ligne. Par ailleurs, d'après ce raisonnement reposant sur les principes de la géométrie de position, lesquels ne sont pas moins valides que ceux de la géométrie des grandeurs, il s'ensuit seulement que si on entre dans le cercle par une branche de la première ligne, on peut sortir du cercle à un

131 Ma traduction de « Satis bene certe demonstratum esse videtur, curvam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (uti e. g. evenit in curva transscendente, cuius aequatio $y = \frac{1}{\log x}$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (ut spiralis logarithmica), quantumque scio, nemo dubium contra hanc rem movit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam. In casu praesenti vero manifestum est, si aliquis ramus e.g. 2, ex circulo nllibi exiret (fig. 3), te in circulum inter 0 et 2 intrare, postea circa totum hunc ramum (qui in circuli spatio se perdere deberet) circummeare, et tandem inter 2 et 4 rursus ex circulo egredi posse, ita ut nullibi in tota via in lineam primam incideris. Hoc vero absurdum esse, inde patet, quod in puncto, ubi in circulum ingressus es, superficiem primam supra te habuisti, in egressu, infra ; quare necessario alicubi in superficiem primam ipsam incidere debulsti, sive in punctum lineae primae. Ceterum ex hoc ratiocinio principiis geometriae situs innixo, quae haud minus valida sunt, quam principia geometriae magnitudinis, sequitur tantummodo, si in aliquo ramo lineae primae in circulum intres, te alio loco ex circulo rursus egredi posse, semper in linea prima manendo, neque vero, viam tuam esse lineam continuam in eo sensu, quo in geometria sublimiori accipitur. Sed hic sufficit, viam esse lineam continuam in sensu communi, i. e. nullibi interruptam sed ubique cohaerentem ».

> autre endroit, toujours en restant sur la première ligne. Mais il ne s'ensuit pas que le chemin suivi soit une ligne continue au sens qui lui est donné dans la géométrie supérieure. Mais il suffit ici que le chemin soit une ligne continue au sens commun, c'est-à-dire nulle part interrompue mais cohérente partout [Gauss 1799/1866, p. 27].

Ainsi toute courbe algébrique, et donc aussi chaque branche d'une telle courbe qui entre à l'intérieur d'une courbe *fermée* doit en ressortir : en effet, « ou bien [elle] revient sur elle-même, ou bien [elle] s'étend de part et d'autre vers l'infini ». Il s'agit là du point problèmatique des deux démonstrations de Gauss. C'est en fait une propriété des courbes algébriques qui n'est pas du tout évidente et il faudra attendre 1920 pour que cette difficulté soit mise en évidence par Alexander Ostrowski dans [Ostrowski 1920], Gauss se contentant de souligner le caractère trivial de cette proposition, et Kronecker s'en servant de façon implicite. Nous pouvons retenir ici la définition de la continuité géométrique que fournit Gauss, « une ligne continue au sens commun, c'est-à-dire nulle part interrompue mais cohérente partout », qui est aussi celle de Kronecker. Nous verrons que le problème de la possibilité de l'intersection de deux lignes continues est lié aux difficultés que présente la notion de racine.

5.3.2. *Caractéristique de trois fonctions de deux variables*

À partir du *Fortgangsprincip* et de la proposition précédente, Kronecker déroule un certain nombre de calculs qui serviront de fondements à sa définition de la caractéristique[132]. On est dans la situation suivante : soient f, φ et ψ trois fonctions algébriques de deux variables x et y formant des courbes fermées. Nous allons parcourir l'une de ces trois fonctions en examinant les points d'intersection avec une seconde. En posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix},$$

où $f_1 = \frac{df}{dx}$ et $f_2 = \frac{df}{dy}$. Kronecker définit la caractéristique de trois fonctions de deux variables par :

$$\chi(f, \varphi, \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta.$$

132 Pour le détail de ces calculs, on pourra se reporter à l'annexe B.

Si maintenant on pose :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \ \Delta_2 = - \begin{vmatrix} f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Kronecker montre la caractéristique du système (f, φ, ψ) peut prendre les douze formes suivantes [Kronecker 1891, p. 236] :

$$\begin{aligned}
\chi(f, \varphi, \psi) &= -\frac{1}{2} \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta = -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=\psi=0} \operatorname{sgn} \Delta \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\psi=f=0} \operatorname{sgn} \Delta = \sum_{\substack{\psi<0 \\ f=\varphi=0}} \operatorname{sgn} (f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) \\
&= \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \operatorname{sgn} (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = \sum_{\substack{\varphi<0 \\ \psi=f=0}} \operatorname{sgn} (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=\psi=0} \operatorname{sgn} d(f \cdot \varphi) = -\frac{1}{2} \sum_{\psi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi \cdot \psi) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} d(\psi \cdot f) = -\frac{1}{2} \sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn} d(f \cdot \varphi) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi \cdot \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{\psi=\varphi=0} \operatorname{sgn} d(\psi \cdot f).
\end{aligned}$$

On arrive ainsi à une définition de la caractéristique que l'on pourrait presque qualifier d'arithmétique qui découle d'un long enchaînement d'égalités. L'interprétation géométrique ne sera donnée qu'a posteriori.

Kronecker donne trois interprétations graphiques, ou plutôt *géométriques*, de ce qui précède

Interprétation graphique 1

Considérons maintenant la partie du plan définie par $\varphi\psi < 0$, c'est-à-dire celle que Weber nomme « l'enclos » (*Binnenraum*) [Weber 1898, p. 341] et parcourons f en regardant les points d'intersection avec φ : un tel point sera qualifié *d'entrée* si on passe de l'extérieur à l'intérieur de l'enclos, c'est-à-dire si en ce point $d(\varphi \cdot \psi) < 0$. De même, on le qualifiera de *sortie* si on passe de l'intérieur à l'extérieur de l'enclos, c'est-à-dire si en ce point $d(\varphi \cdot \psi) > 0$. Si on note $\mathcal{E}$ le nombre d'entrées et $\mathcal{A}$ le nombre de sorties, on a

$$\chi(f, \varphi, \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi \cdot \psi)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\varphi=f=0} \text{sgn } -d(\varphi \cdot \psi)$$
$$= \frac{1}{2}(\mathcal{E} - \mathcal{A}).$$

C'est-à-dire que la caractéristique du système f, φ, ψ est la demi-somme de la différence entre le nombre d'entrées et de sorties de l'enclos. Les formules données par Kronecker montrent par ailleurs que ce nombre est indépendant du choix des deux fonctions pour former l'enclos.

Interprétation graphique 2

Kronecker regarde la caractéristique du système $f\Delta_1, \varphi, \psi$. On sait, d'après le tableau précédent, que

$$\chi(f, \varphi, \psi) = \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1$$

donc on a :

$$\begin{aligned}\chi(\Delta_1 f, \varphi, \psi) &= \sum_{\substack{\Delta_1 f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1 \\ &= \sum_{\substack{\Delta_1<0 \text{ et } f>0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1 + \sum_{\substack{\Delta_1>0 \text{ et } f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1 \\ &= \sum_{\substack{f>0 \\ \varphi=\psi=0}} (-1) + \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} (+1)\end{aligned}$$

On peut donc dire que « la caractéristique de ce système donne l'excès des points d'intersection de φ et ψ à l'intérieur de $f = 0$ sur ceux à l'extérieur de $f = 0$ » [Kronecker 1881b, p. 166].

Interprétation graphique 3

De

$$\begin{aligned}\chi(f, \varphi, \psi) &= \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) \\ &= \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\Delta_1) \\ &= \sum_{\substack{f<0, \Delta_1>0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\Delta_1) + \sum_{\substack{f<0, \Delta_1<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\Delta_1) \\ &= \sum_{\substack{f<0, \Delta_1>0 \\ \varphi=\psi=0}} (+1) + \sum_{\substack{f<0, \Delta_1<0 \\ \varphi=\psi=0}} (-1),\end{aligned}$$

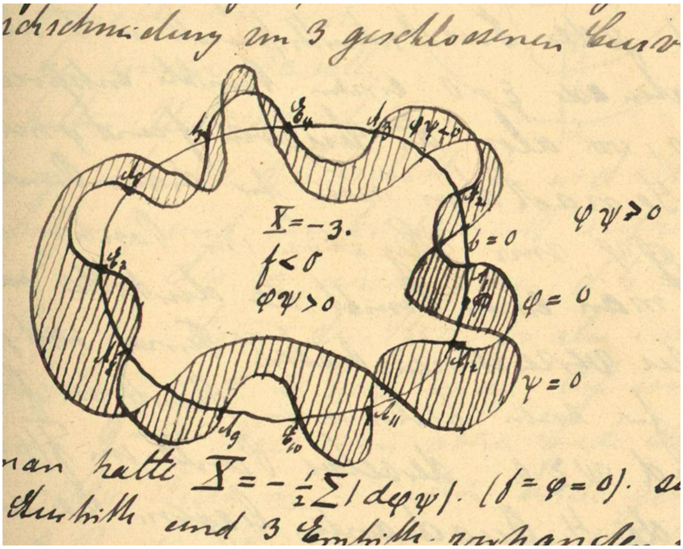


FIGURE 12. Caractéristique de 3 courbes [Kronecker 1879, p. 526]

on déduit que la caractéristique est le nombre de points d'intersection de $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ à l'intérieur de $f = 0$ pour lesquels Δ_1 est positif moins celui pour lesquels Δ_1 est négatif. Autrement dit, la caractéristique est le nombre de solutions à l'intérieur du domaine $f = 0$ du système d'équations $\varphi = 0, \psi = 0$ pour lesquelles le déterminant fonctionnel est positif moins celui pour lesquelles le déterminant fonctionnel est négatif.

Souhaitant étendre le domaine d'application de sa théorie, Kronecker s'attaque ensuite, sans difficulté, aux courbes qui ne sont pas fermées. Le principe est de se restreindre à un disque de diamètre fini et que l'on peut déterminer *arithmétiquement* à l'intérieur duquel se trouvent tous les points d'intersection de ces courbes. La détermination du rayon de ce cercle est d'ailleurs une étape importante des démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre de Gauss, ainsi que de ses reprises par Kronecker.

5.3.3. *Conclusion*

On mesure donc l'importance que revêt pour Kronecker l'interprétation graphique de sa théorie. On voit apparaitre deux types d'interprétations : celles qui s'expriment uniquement en termes d'intersections de points, et celle dans laquelle intervient le signe du discriminant. Cette dernière sera à la base de l'une des premières applications de la théorie des caractéristiques, à savoir la détermination du nombre de solutions, de « racines », d'un système de n équations à n inconnues à l'intérieur d'un compact. Nous avons jusqu'à maintenant, sur les conseils mêmes de Kronecker, repoussé les discussions autour du concept de *racine*, qui pourtant est toujours présent dans le travail que nous venons de décrire. Il est donc temps d'essayer de décrire la façon dont Kronecker aborde cette notion dans ses leçons.

6. LES RACINES D'UNE ÉQUATION

Si pour Kronecker l'*Algèbre* ne se limite pas à la résolution des équations, l'objet central des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* reste l'équation, et la notion de racine est donc bien sûr primordiale, que l'on parle de leur recherche, de leur existence ou de leur nature, ces trois qualités étant intimement liées. Des discussions sur ce concept apparaissent plus particulièrement dans ses leçons à la fois dans les chapitres introductifs et dans la partie qu'il consacre au théorème de Sturm et à la théorie des caractéristiques. Nous allons examiner comment dans ces passages Kronecker reconsidère la place de la « racine » dans l'algèbre.

6.1. *Le mythe de la résolution par radicaux*

Dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques, Kronecker affirme que [133] :

---

[133] Es lag nahe, die Operation bei der *potestas pura* vorerst umkehren und rückwärts wieder x aus dem Wert

$$x^n = y$$

$(x, n, y$ ganze positive Zahlen) bestimmen zu wollen. Das Mittelalter schuf dafür das Zeichen : $x = \sqrt[n]{y}$, und weil sich diese Gleichungen angenähert auflösen lassen, so nahm man später das Zeichen für die durch dasselbe angedeutete Operation. Nun ist dieses Zeichen zwar ganz ausschließlich den <u>reinen</u> Gleichungen angepaßt. Als aber mit seiner Hilfe die Wurzeln aller Gleichungen des zweiten und später gar des dritten und vierten Grades dargestellt waren, da war von der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts an die mathematische Welt widerstandslos beherrschst von dem Aberglauben, daß jede *potestas affecta* beliebigen Grades umkehrbar sei durch Wurzelausziehung. *Vieta, Descartes, Fermat, Newton, Euler* waren fest überzeugt, daß jede Gleichung sich auflösen lassen müsse. Aber alle Beweise von der Existenz der Wurzeln jeder algebraischen Gleichung würden [Correction dans la marge : « waren »], wie *Gauss* aufdeckte, fehlerhaft. Das hatte seinen Grund darin, daß auch die größten Mathematiker sich über den Begriff der Wurzeln nicht genug Rechenschaft gegeben hatten. *Gauss* legt Gewicht darauf, daß er in den *Disquisitiones* die Kreisteilungsgleichungen aufzeigt als ein Paar von Gleichungen, welches durch Wurzelziehung wirklich auflösbar ist. Er knüpft daran die Bemerkung, daß die Bemühungen um die allgemeine Auflösung vielleicht gescheitert seien an der Unmöglichkeit der Sache.

Il semblait logique de vouloir d'abord inverser les opérations dans les *potestas pura* et de retrouver ensuite x à partir de la valeur

$$x^n = y$$

(x, n, y sont des nombres entiers positifs).

Le Moyen-Âge créa pour cela le symbole : $x = \sqrt[n]{y}$, et comme ces équations se laissent résoudre de façon approchée, nous avons pris plus tard ce symbole pour l'opération en question elle-même. Ce symbole est maintenant certes adapté exclusivement aux équations pures. Mais comme avec son aide les racines du second, et même plus tard celles du troisième et du quatrième degrés ont été représentées, il domine au milieu du XVI$^{\text{e}}$ siècle dans le monde mathématique, sans opposition, la croyance que toutes les *potestas affecta* de n'importe quel degré sont résolubles par extraction de racine. *Viète, Descartes, Fermat, Newton* et *Euler* étaient fermement convaincus que toute équation peut être résolue.

Mais toutes les preuves de l'existence des racines d'une équation algébrique, comme *Gauss* l'a montré, étaient défectueuses. Cela est dû aussi au fait que les grands mathématiciens ne se sont pas suffisamment penchés sur le concept de racine. *Gauss* met l'accent sur le fait qu'il montre dans les *Disquisitiones* les équations cyclotomiques comme un ensemble d'équations qui sont réellement résolubles par extraction de racine. Il fait à ce propos remarquer que les efforts sur la résolution générale risquent d'échouer de par l'impossibilité de la chose [Kronecker 1891, p. 8].

Le *symbole* racine fait seulement référence à la *possibilité* de donner, par une méthode qu'il reste à définir, une résolution approchée (*angenähert auflösen*). Il n'est cependant pas question de parler de valeur approchée : elle ferait ainsi référence à une valeur exacte qui pour Kronecker n'a en général pas d'existence avérée. La suite de la citation fait allusion à la première partie de la thèse de Gauss de 1799 où celui-ci revient sur les diverses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre [Gauss 1799/1866] et montre leurs faiblesses. Mais surtout, c'est de son travail sur les polynômes cyclotomiques dont Kronecker parle : Gauss a montré que dans ce cas particulier une résolution par radicaux est possible[134], mais il a plusieurs fois remarqué que la possibilité d'une résolution *générale* par radicaux des équations algébriques de degré quelconque était douteuse. Ce travail de Gauss sur les polynômes cyclotomiques, Kronecker le poursuit et aboutit d'ailleurs au théorème sur les extensions abéliennes auquel son nom est associé. Le nom d'Abel n'apparaît pas ici alors qu'il aurait toute sa place. Kronecker poursuit en précisant sa pensée[135] :

134 Le n^{e} polynôme cyclotomique est : $\Phi_n(X) = \prod_{0 \leq k < n,\ k \wedge n = 1} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)$, et donc ses racines sont les racines n^{es} de l'unité.

135 Die Unklarheiten des Wurzelbegriffes entsprangen verschiedenen Quellen. Einerseits traten aus der Praxis heraus die Gleichungen auf als « Rätsel », die bestimmt

> Les ambiguïtés de la notion de racine proviennent de différentes sources. D'un côté, d'un point de vue pratique, les équations apparaissent comme une « énigme » qui permet de déterminer une solution. En effet un nombre rationnel x s'élève à une *potestas affecta* :
>
> $$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = y,$$
>
> de sorte que puissent être retrouvés à partir du y fourni les rationnels x. D'un autre côté les équations pures se laissent résoudre par approximations. Pour l'équation $x^2 - 2 = 0$ on peut trouver des nombres ξ_1 et ξ_2 de sorte que
>
> $$0 < \xi_1^2 - 2 < \tau, 0 > \xi_2^2 - 2 > -\tau',$$
>
> où τ, τ' sont des rationnels positifs aussi petits que l'on veut. On dit alors que la « valeur réelle » de $|\sqrt{2}|$ se trouve entre ξ_1 et ξ_2 et on peut avec de tels nombres ξ_1 et ξ_2 approcher d'aussi près que l'on veut $\sqrt{2}$. On oublie ainsi complètement que $\sqrt{2}$ s'explique uniquement par l'équation : $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ et que l'on peut s'approcher avec une suite de nombres d'un nombre <u>existant</u> (donc rationnel), mais pas d'un être qui est seulement « défini » par une exigence [Kronecker 1891, p. 9].

Une équation, dit Kronecker, peut être vue comme un problème à résoudre : il est alors naturel de chercher à en donner une solution. Et si l'on conçoit la résolution d'une équation comme synonyme de *trouver x*, alors une confusion peut survenir : $\sqrt{2}$ n'est pas un « un nombre <u>existant</u> ». Ce qui « existe », c'est l'équation $x^2 - 2 = 0$, ce n'est pas $\sqrt{2}$. Un irrationnel n'aura donc pas de valeur approchée, même rationnelle, étant donné qu'il n'existe pas en tant que nombre. l'objet principal, pour Kronecker, est l'équation elle-même, dont d'ailleurs les coefficients sont plutôt des nombres entiers.

---

eine Auflösung zuließen. Denn war eine rationale Grundzahl x erhoben zu einer *potestas affecta* :

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = y,$$

so mußte rückwärts aus dem vorgelegten y das rationale x wieder zu erraten sein. Anderseits ließen die reinen Gleichungen sich angenähert lösen. Für die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ ließen sich Zahlen ξ_1 und ξ_2 finden, so daß

$$0 < \xi_1^2 - 2 < \tau, 0 > \xi_2^2 - 2 > -\tau',$$

wo τ, τ' beliebig kleine positive rationale Zahlen sind. Man sagte dann, der « wahre Wert » von $|\sqrt{2}|$ läge zwischen ξ_1 und ξ_2 und man könne sich mit solchen Zahlen ξ_1 und ξ_2 der $\sqrt{2}$ beliebig nähern. Man vergaß dabei ganz, daß $\sqrt{2}$ allein erklärt ist durch die Gleichung : $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ und daß man sich mit einer Reihe von Zahlen wohl einer <u>vorhandenen</u> (also rationalen) Zahl nähern könne, nicht aber einem Wesen, das allein durch eine Forderung « definiert » ist.

6.2. *Arithmétique et géométrie*

Kronecker analyse ensuite l'origine de cette *épouvantable confusion* (*entsetzliche Confusion*)[136] :

> Cette conception était alimentée par la géométrie analytique. On voit ou on sait en effet que la courbe
>
> $$y = x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$$
>
> passe pour des grandeurs négatives x sous l'axe des x, pour des grandeurs positives au dessus. Ne doit-elle pas au moins une fois, comme elle est en effet continue, couper l'axe des x ? Chaque équation cubique ne possède-t-elle pas au moins une racine réelle ?
>
> C'est cette « déduction » qui est encore et toujours une *petitio principii* grossière, bien que *Gauss* aussi ait pris comme principe la proposition disant que toute équation de degré impair a une racine réelle. En réalité y se laisse calculer uniquement pour des x rationnels, mais n'est jamais réalisée entre les points ainsi obtenus une continuité, une « courbe ». C'est pourquoi sont aussi trompeuses les déductions de Bolzano, un ecclésiastique catholique de Prague, qui veut démontrer pour une fonction continue quelconque, que si elle a des signes différents dans son domaine de continuité, elle doit passer une fois par zéro [Kronecker 1891, p. 10].

C'est donc la conception géométrique d'une courbe qui nous leurre, ainsi que son pendant analytique, c'est-à-dire en fait le théorème des valeurs intermédiaires : le théorème de Bolzano est une fois de plus une partie du problème et non de la solution. Kronecker pose ainsi la question suivante qui, selon lui, n'a pas encore été résolue : « mais une chose reste non élucidée : la nature de la racine réelle »[137]. La racine a-t-elle

---

136 Eine beständige Nahrung fand diese Vorstellung in der analytischen Geometrie. Wußte oder sah man doch, daß die Kurve

$$y = x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

für großes negatives x unterhalb der x Achse, für großes positives oberhalb verläuft. Muß sie also nicht wenigstens einmal, da sie doch stetig ist, die x Achse schneiden ? Besitzt nicht also jede kubische Gleichung mindestens eine reelle Wurzel ?
Es ist diese « Folgerung » immer wieder dieselbe grobe *petitio principii*, obgleich auch *Gauss* den Satz zur Grundlage nimmt, daß jede Gleichung ungeraden Grades eine reelle Wurzel hat. In Wahrheit läßt sich allein für rationales x das zugehörige y berechnen, niemals aber zwischen den so gewonnenen Punkten, seien ihrer auch noch so viele, eine Stetigkeit, eine « Kurve » erzielen. Deshalb sind auch trügerisch die Deduktionen Bolzanos, eines katholischen Geistlichen aus Prag, der nun gar von einer beliebigen stetigen Funktion beweisen will, daß, wenn sie im Bereiche der Stetigkeit verschiedenes Zeichen hat, sie einmal durch Null hindurchgehen muß.

137 [Kronecker 1891, p. 249] : Aber eines blieb unaufgeklärt : die Natur der reellen Wurzeln.

un statut géométrique ou arithmétique ? ces statuts sont-ils équivalents ? Kronecker affirme à propos de la notion de racine que Gauss lui-même « s'en tient à illustrer géométriquement sa signification et avait la ferme conviction d'avoir donné ainsi une définition suffisante. »[138]. Et il cite alors une remarque que fait Netto dans la traduction en allemand des preuves de Gauss qui venait à peine d'être publiée : la première et quatrième preuves que Gauss donne du théorème fondamental de l'algèbre, consistent à « transférer sans plus d'examen la continuité géométrique sur des grandeurs arithmétiques, et donc, pour l'esquisser rapidement, faire correspondre à chaque distance entre deux points un nombre arithmétique »[139].
Ce qui intéresse ici plus particulièrement Kronecker, c'est le rapport entre le point de vue géométrique et arithmétique du nombre. Il rappelle d'ailleurs, dans une note en bas de page, ce que serait dans ce contexte un « nombre arithmétique »[140] :

> On doit comprendre par « nombres arithmétiques » des grandeurs sur lesquelles on peut appliquer les opérations arithmétiques de l'addition, la multiplication, la division, etc. et pour lesquelles la proposition suivante reste valable : si un produit est nul, alors l'un des facteurs doit toujours être nul [Kronecker 1891, p. 250].

On voit au passage l'importance de la notion d'intégrité dans l'arithmétique pour Kronecker. Ce qu'il dénonce, et ce sera finalement ce qui le différencie de Gauss, c'est l'identification entre la notion géométrique de distance et la notion arithmétique de nombre[141] :

---

138 [Kronecker 1891, p. 249] : emphGauss begnügte sich, ihre Bedeutung geometrisch zu veranschaulichen und war der festen Überzeugung, damit eine ausreichend Definition derselben gegeben zu haben.

139 [Netto 1876, p. 80] : die geometrische Stetigkeit ohne weiteres auf die arithmetischen Größen übertragen, und also, um es kurz anzudeuten, einer jeden Streckenlänge eine arithmetische Zahl entsprechen lassen.

140 Unter « arithmetischen Zahlen » sind Größen zu verstehen, auf welche die arithmetischen Operationen der Addition, Multiplikation, Division usw. anwendbar sind und für welche der Satz gültig bleibt : Ist ein Produkt gleich Null, so muß jedenfalls einer der Faktoren gleich Null sein.

141 Das werden alle diejenigen Mathematiker mit um so weniger Bedenklichkeit thun, welche auch die irrationalen und imaginären Größen durch geometrische Quantitäten als « definiert » erachten. Daß Gauss auch dieser letzteren Ansicht war, geht aufs deutlichste aus einem Ausspruch hervor, welchen er in einer Vorlesung der Göttingen Societät gethan hat. (abgedruckt in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1831, 64. März, Werke V). Er sagt dort am Schlusse dieses seines Versuchs, den imaginären Größen eine feste Unterlage zu geben : « Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr

> Tous ces mathématiciens utiliseront cela avec d'autant peu de scrupules qu'ils considéreront aussi les grandeurs irrationnelles et imaginaires comme définies par des quantités géométriques. Que Gauss ait aussi été de ce dernier avis ressort le plus clairement d'une remarque qu'il a faite dans une leçon à la société de Göttingen. (Imprimée dans le Göttinger gelehrte Anzeigen de mars 1831, étude 64[142].) Il cherche, à la fin de ses essais, à donner aux grandeurs imaginaires un fondement solide : « Ici la possibilité de donner une signification intuitive à $\sqrt{-1}$ est donc complètement justifiée, et il n'en faut pas plus pour autoriser ces grandeurs dans le domaine des objets de l'arithmétique » [Kronecker 1891, p. 250].

Et finalement, la confusion s'accroît concernant le statut de ces nombres lorsque l'on est trompé par leur représentation géométrique (le plan pour les nombres complexes et la droite pour les nombres réels). C'est l'occasion pour Kronecker de rappeler son point de vue sur les interactions possibles entre géométrie et arithmétique[143] :

> Les mathématiciens qui font leur ce point de vue qui nous paraît douteux ne tiennent aucun compte du fait que certes les rapports arithmétiques sont transférables et applicables aux concepts géométriques intuitifs et que certes la géométrie a contribué et contribuera toujours aux progrès des sciences arithmétiques, mais que jamais un pur concept « arithmétique » ne pourra et ne devra être <u>défini</u> par une illustration géométrique.
>
> Ainsi nombreux sont ceux qui pensent avoir par exemple suffisamment fixé la notion de racine carrée de 2 comme un nombre véritablement arithmétique lorsqu'ils disent qu'elle correspond à la longueur de la diagonale d'un carré

---

bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen ».

142 Il s'agit en fait des *Göttingische gelehrte Anzeigen* du 23 avril 1831.

143 Die Mathematiker, welche eine solche, uns sehr bedenklich scheinende Ansicht zu der ihrigen machen, lassen dabei völlig außer Acht, daß zwar die arithmetischen Beziehungen auf die anschaulichen geometrischen Begriffe übertragbar und anwendbar sind, und daß die Geometrie freilich stets ganz wesentlich zum Fortschritt der arithmetischen Wissenschaften beigetragen hat und beitragen wird, daß aber niemals der rein „arithmetische" Begriff durch geometrische Veranschaulichung <u>definiert</u> werden kann und definiert werden darf.
So glauben viele z.B. den Begriff der Quadratwurzel aus 2 als eine wirkliche arithmetische Zahl hinlänglich fixiert zu haben, wenn sie sagen, sie entspräche der Länge der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite als der Einheit gleich angenommenen würde. Sie vergessen dabei, daß sie auch hier schon vorausgesetzt haben, daß einem jeden Punkte der graden Linie bei willkürlich gewählter Maßeinheit eine arithmetische Zahl entspricht. Und um die Richtigkeit dieser letzteren Voraussetzung aufzuzeigen, ist für sie doch unbedingt wieder jene geometrische Begriffsbestimmung des Irrationalen unentbehrlich. Aber wie kann denn überhaupt ein geometrische Strecke einen arithmetischen Begriff „definieren"? Richtet sich denn der Verstand nach den Sinnen, oder ist es nicht vielmehr der Verstand, welcher durch die Sinnenwelt ordnende Fäden legt, um sie so zu beherrschen?

> dont le côté est égal à l'unité. Ils oublient à cette occasion qu'ici aussi ils ont déjà supposé qu'à tout point de la ligne graduée avec une unité arbitrairement choisie correspond à un nombre arithmétique. Et pour montrer la justesse de cette dernière supposition, cette définition géométrique des irrationnels leur est à nouveau absolument nécessaire. Mais alors comment au juste un segment de droite géométrique peut « définir » un concept arithmétique ? Car la raison se conforme-t-elle aux sens, ou n'est-ce pas plutôt la raison qui tend à travers le monde sensible des fils qui permettent de le mettre en ordre ? [Kronecker 1891, p. 250]

Pour Kronecker, arithmétique et géométrie ne sont pas incluses l'une dans l'autre, et si la géométrie est une « source d'inspiration », il n'est pas question de définir un concept arithmétique à partir de celle-ci. Bolzano est une fois de plus pris comme exemple à ne pas suivre[144] :

> Bolzano, un prêtre catholique de Prague, s'est beaucoup occupé de telles questions plus transcendantales et philosophiques dans les mathématiques ; c'était un mathématicien plein de talent, mais concernant la question précédente il était dans l'erreur. Cela est dû au fait qu'il n'a pas pu s'affranchir de l'erreur qui consiste à mélanger la géométrie et l'arithmétique. « Mais ce pont entre l'arithmétique et la géométrie ne réussira pas » [Kronecker 1887c, p. 156].

Bolzano définit pourtant, on l'a vu, une continuité arithmétisée, et la *Rein analystischer Beweis* a pour origine en grande partie sa volonté d'extraire toute considération géométrique de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. Il construit d'ailleurs une classification des mathématiques dans laquelle la géométrie est une science appliquée[145], contrairement à l'algèbre ou l'analyse qui sont des sciences pures : les premières doivent trouver leur fondement dans les secondes. Le problème vient ici très précisément du fait que Bolzano ait considéré les grandeurs géométriques comme des *nombres*. Maintenant que nous avons vu l'origine des ambiguïtés et des problèmes que pose la notion de *racine*, nous allons voir comment Kronecker se propose de les dépasser.

---

144 Bolzano, ein Katholischer Geistlicher in Prag, hat sich viel mit solchen mehr transcendentalen und philosophischen Fragen in der Mathematik beschäftigt ; er war ein talentvoller Mathematiker, aber in bezug auf die vorliegende Frage ist er im Irrtum. Das liegt besonders daran, dass er von dem Fehler, Arithmetik und Geometrie zu vermengen, sich nicht losmachen konnte. „Diese Brücke aber zwischen Arithmetik und Geometrie zu schlagen, wird nicht gelingen".

145 Dans les *Considérations pour un exposé mieux fondé des mathématiques* [Bolzano 1810].

6.3. *La séparation des racines*

Une partie essentielle de l'unique article (*Über den Zahlbegriff* [Boniface 1999]) où Kronecker a publié son point de vue sur les mathématiques traite de la séparation des racines. Et dans son cours du semestre d'hiver de 1886-87 sur la théorie des équations algébriques – c'est-à-dire durant l'année qui précède la publication de cet article – il affirme que si le but essentiel du théorème de Sturm est la « détermination du nombre des racines réelles des équations algébriques »[146], la plupart des ouvrages se trompent en considérant ce problème comme définitivement résolu. Ce qu'il reste à accomplir, c'est la séparation des racines, c'est-à-dire que[147] :

> La tâche serait résolue si nous étions en mesure de préciser le plus grand intervalle de la structure qui, où que nous placions son point de départ, ne contiendra jamais plus d'une racine réelle de l'équation [Kronecker 1887c, p. 155].

En fait, le but de Kronecker est de trouver un intervalle dans lequel cette fonction ne change pas plus d'une fois de signe. Et pour cela, que ce soit dans son cours ou dans son article, il commence par déterminer un intervalle dont les bornes sont rationnelles et en dehors duquel la fonction ne changera plus de signe. Cette première étape est aussi celle qu'il met en place, à la suite de Gauss, dans le cadre de ses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre : il construit un cercle à l'intérieur duquel se trouvent toutes les *intersections* entre les deux courbes algébriques qu'il considère. Il « compactifie » le problème en se restreignant à un fermé borné du plan ou de la droite.

Pour construire cet intervalle, Kronecker tire profit des propriétés des polynômes symétriques en les appliquant aux racines du polynôme : il utilise donc les racines de l'équation. À la fin de son travail, Kronecker résume ce qu'il vient de faire[148] :

---

146 [Kronecker 1887c, p. 155] : die numerische Bezeichnung der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen.

147 Die Aufgabe wäre gelöst, wenn wir im Stande wären, das grösste Intervall von der Beschaffenheit anzugeben, dass in ihm, wohin wir auch seinen Anfangspunkt legen nie mehr als eine reelle Wurzel der Gleichung liegt.

148 Fassen wir das Ergebnis der vorstehenden Entwicklungen noch einmal zusammen, so hat sich folgendes gezeigt. Wir können aus dem Gebiete der reellen Grösse z ein solches endliches Intervall $-g \cdots + g$ aussondern, dass ausserhalb desselben $F(z)$ von null verschieden ist; wir können dies Intervall wieder in Teilintervalle von der Grösse $\frac{1}{2G}$, wo G ein bestimmt definierte Zahl ist teilen, so dass in jedem dieser Teilintervalle die Function $F(z)$ entweder ihr Zeichen beibehält oder nur einmal wechselt und dass die Function dann beliebig klein wird ; und wesentlich bei Allem war, dass wir

> Si nous regroupons les résultats des développements précédents, alors nous avons montré ce qui suit. Nous pouvons séparer un tel intervalle fini $-g \cdots + g$ du domaine des grandeurs réelles, tel que en dehors de celui-ci $F(z)$ n'est pas nulle; nous pouvons à nouveau découper cet intervalle en intervalles de taille $\frac{1}{2G}$, où G est un nombre défini, de sorte que dans chacun de ces intervalles la fonction $F(z)$, soit garde le même signe, soit change seulement une fois de signe et donc la fonction devient aussi petite que l'on veut; et le plus important de tout est que nous avons déterminé nos intervalles par des nombres rationnels. Habituellement on exprime cette propriété des équations en disant que dans un intervalle où la fonction $F(z)$ a des signes différents à ses bornes, il y a une « racine » de l'équation, que l'on ne peut certes pas donner sous forme de nombres rationnels, mais qui existe bien [Kronecker 1887c, p. 165].

Kronecker a ainsi pu séparer les *racines*, et même donner une méthode effective pour les séparer, sans utiliser le concept de nombre réel. On voit bien ici que pour lui, la notion de racine d'une équation est indépendante de celle de nombre réel, et que le travail de recherche des solutions exactes, qui n'a pas de sens ou qui est impossible, est donc remplacé par la séparation des racines, sous la forme d'une suite d'intervalles à bornes rationnelles. Ainsi ces « solutions », ces « racines » sont en fait la donnée d'une méthode permettant de trouver un intervalle rationnel que l'on peut rendre aussi petit que l'on veut aux bornes duquel la fonction a des signes opposés. Cette première réponse de Kronecker est une réponse pratique à la recherche des solutions d'une équation. Cependant, l'utilisation des racines dans le corps de la démonstration reste problématique et on peut se demander comment la notion de racine peut s'insérer dans son *arithmétique générale*. En 1884, Kronecker écrit à Cantor[149] :

> J'ai donc choisi de baser toutes les mathématiques pures sur la théorie des nombres entiers et je *pense* que cela peut être fait sans exception. Toutefois, il s'agit seulement de ma *croyance*. Mais partout où cela a fonctionné, j'y ai vu un vrai progrès, même si – ou parce que – c'est une régression aux principes les

unsere Intervalle durch rationale Zahlen bestimmt haben. Gewöhnlich drückt man diese Eigenschaft der Gleichungen so aus, dass man sagt, in einem Intervall, an dessen Anfang und Ende die Function $F(z)$ verschiedenen Zeichen hat, liege eine „Wurzel" der Gleichung, die man zwar nicht als rationale Zahl angeben könne, die aber doch existiere.

149 Ich bin deshalb darauf ausgegangen, Alles in der *reinen* Mathematik auf die Lehre von den ganzen Zahlen zurückzuführen, und ich *glaube*, dass dies durchweg gelingen wird. Indessen ist dies eben nur mein *Glaube*. Aber wo es gelungen ist, sehe ich darin einen wahren Fortschritt, obwohl – oder weil – es ein Rückschritt zum Einfachsten ist, noch mehr aber deshalb, weil es denn beweist, dass die neuen Begriffsbildungen wenigstens nicht *nothwendig* sind.

plus simples, d'autant plus que cela prouve que les nouveaux concepts qui sont introduits sont pour le moins *superflus* [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196].

On sait que le concept de nombre (*Zahlbegriff*) tient une place importante dans les mathématiques de Kronecker, et dans l'article qu'il lui consacre, ce qu'il cherche principalement à éviter, c'est l'introduction de nouveaux concepts, soit qu'ils lui semblent « superflus », soit qu'il estime qu'ils sont étrangers à l'arithmétique. Car s'il prône une algèbre décloisonnée, il va chercher, tout au moins à partir des *Grundzüge*, à en proscrire, lorsqu'il le peut, certains concepts qu'il considère étrangers à l'arithmétique. Il pourra par exemple se restreindre à l'utilisation des nombres entiers avec l'introduction de l'indéterminée X, et en raisonnant *modulo* des polynômes à coefficients entiers :

> Mais avec l'introduction principielle de l'« indéterminée » (indeterminatae), qui remonte à Gauss, la théorie particulière des nombres entiers s'est élargie à la théorie arithmétique générale des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers. Cette théorie générale permet de se passer de tous les concepts étrangers à l'arithmétique véritable : les nombres négatifs, fractionnaires, réels et algébriques imaginaires [Boniface 1999, p. 59].

Il peut ainsi se passer des entiers négatifs en travaillant *modulo* $(x + 1)$. Pour les nombres rationnels, le système qu'il met en place est plus complexe, et utilise plusieurs indéterminées et plusieurs modules. Ces *Systèmes modulaires* (*Modulsystem*) sont introduits dans les *Grundzüge* et constituent l'un des outils essentiels de ce texte. Les irrationnels ne sont quant à eux pas considérés comme des nombres, au sens où ils ne font pas partie de l'arithmétique, mais de la géométrie. Cependant, on peut avoir accès aux irrationnels algébriques *modulo* un polynôme irréductible à coefficients entiers, et c'est de cette façon qu'il développera son *théorème fondamental de l'arithmétique*[150].

Kronecker affirme ainsi que[151] :

> Les résultats de l'algèbre doivent être rendus autant que possibles indépendants de toutes les fictions sur les racines des équations. Cela n'a pas encore été réussi dans l'important champ de la théorie de l'élimination. Certes ses résul-

---

150 Voir son article intitulé *Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik* [Kronecker 1887a].

151 Die Resultate der Algebra sind nach Möglichkeit von allen Fiktionen über die Wurzeln der Gleichungen unabhängig zu machen. Noch nicht gelungen ist dies bisher auf dem wichtigen Felde der Eliminationstheorie. Zwar ihre Resultate als solche sind ganz unabhängig vom Begriff der Wurzeln, aber eine Herleitung derselben ohne Zuhilfenahme der Wurzeln ist noch nicht möglich geworden.

> tats en tant que tels sont complètement indépendants de la notion de racine, mais une dérivation de ceux-ci sans l'aide des racines n'a pas été encore possible [Kronecker 1891, p. 10].

Plus encore, c'est le concept même de *racine* qu'il s'agit d'exclure de la théorie de l'élimination. On obtient d'importants résultats dans la théorie des équations en passant par la forme factorisée d'une équation, et donc en utilisant ses racines. On a vu que, dans les parties mêmes où Kronecker cherche à justifier le fait que l'on n'ait plus besoin de faire appel aux racines, les racines sont au cœur de sa démonstration. Les propriétés que l'on obtient, comme par exemple celles relatives au discriminant, ne font pas toujours apparaître ces racines : il faut maintenant, dit Kronecker, s'évertuer à ne pas les utiliser lors de la démonstration de ces propriétés. Ce programme, nous allons examiner comment Kronecker le réalise dans sa théorie des caractéristiques.

6.4. *Retour sur la notion de caractéristique*

Comme « jamais un pur concept « arithmétique » ne pourra et ne devra être <u>défini</u> par une illustration géométrique », Kronecker, dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques [Kronecker 1891], termine son exposé sur la théorie des caractéristiques par un chapitre intitulé *Clarification de la notion de caractéristique, des racines réelles et de la décomposition d'une fonction entière en fonctions réelles.*[152]. En effet, au vu de l'importance que revêt pour lui cette notion de caractéristique, il souhaite la rendre « indépendante de l'hypothèse de racines réelles des fonctions entières »[153] qui pour lui appartiennent aux grandeurs *géométriques.*

6.4.1. Rationalisation *du problème*

Pour cela, Kronecker examine de nouveau le cas de la caractéristique de deux fonctions à une inconnue $\chi(V(x), W(x))$. Nous avons vu que :

$$\begin{aligned}\chi(V(x), W(x)) &= -\frac{1}{2}\sum_{V(x)=0} \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} V(x) & W(x) \\ V'(x) & W'(x) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{V(x)=0} \operatorname{sgn} \lim_{h=0} \begin{vmatrix} V(x) & W(x) \\ \frac{V(x+h)-V(x)}{h} & \frac{W(x+h)-W(x)}{h} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

152 [Kronecker 1891, p. 247] : Klärung des Begriffs der Charakteristik, der reellen Wurzeln und der Zerlegung einer ganzen Funktion in reelle Funktionen

153 [Kronecker 1891, p. 253] : Wir wollen zunächst den Begriff der Charakteristik unabhängig machen von der Voraussetzung reeller Wurzeln ganzer Funktionen.

En simplifiant le déterminant, nous obtenons :

$$\chi(V(x), W(x)) = -\frac{1}{2} \sum_{V(x)=0} \operatorname{sgn} \lim_{h=0} \frac{1}{h} \begin{vmatrix} V(x) & W(x) \\ V(x+h) & W(x+h) \end{vmatrix}$$

et en sommant non seulement sur les x pour lesquels $V(x) = 0$, mais aussi sur ceux pour lesquels $W(x) = 0$, on obtient :

$$\chi(V(x), W(x)) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{V(x)=0 \\ W(x)=0}} \operatorname{sgn} \lim_{h=0} \frac{1}{h} \left(W(x) \cdot V(x+h) - V(x) \cdot W(x+h)\right).$$

Le problème, pour le moment, c'est que nous nous servons des racines de $V(x)$ et $W(x)$. Mais Kronecker souhaite « supprimer l'utilisation de la notion de racine réelle dans cette dernière expression de la caractéristique »[154]. Il faut bien remarquer que c'est la notion de racine *réelle* qui pose problème, et que la difficulté reste celle de la nature de ces nombres réels.

Pour cela, Kronecker somme non plus sur les « racines », mais sur « toutes ces valeurs rationnelles de x » pour lesquelles on a $V(x) \cdot V(x+h) < 0$ ou $W(x) \cdot W(x+h) < 0$[155]. En fait, il part d'une valeur rationnelle x_0 inférieure à la plus petite des racines, puis il l'augmente de h en h, où h est une grandeur rationnelle. Tout l'art de Kronecker sera dans la détermination de cette grandeur.

On cherche ensuite à supprimer dans l'expression précédente le passage à la limite : il nous suffit de prendre h suffisamment petit pour que dans tout intervalle de longueur h il n'y ait au plus qu'une seule valeur pour laquelle $V(x) \cdot V(x+h) < 0$ et une seule valeur pour laquelle $W(x) \cdot W(x+h) < 0$. Cela n'a rien de difficile et Kronecker a déjà procédé ainsi lorsqu'il cherchait à *séparer* les racines. Mais ne serions-nous pas en train d'effectuer une somme infinie, qui certes peut peut-être converger, mais n'est certainement pas calculable de façon effective ?

Non, car Kronecker a déjà montré que nous pouvons nous restreindre à un intervalle borné lorsque nous examinons les racines d'un polynôme, ou plutôt, comme Kronecker le présente, lorsque nous regardons les changements de signe d'un polynôme. Il est intéressant de noter ici que Kronecker, pour décrire la méthode utilisant les racines du polynôme, parle de « langage habituel » ([Kronecker 1891, p. 255] : *gewöhnliche Sprache*). Le

154 [Kronecker 1891, p. 254] : Wir können nun die Benutzung des Begriffs der reellen Wurzeln aus diesen letzten Ausdrücken für die Charakteristik ausmerzen.

155 [Kronecker 1891, p. 254] : über alle diejenigen rationalen Werte von x.

langage qu'il utilise est donc *inhabituel*, et c'est donc dans celui-ci qu'il faut trouver l'originalité de son travail.

Cet intervalle borné est donc découpé en intervalles de longueur h ne contenant qu'une seule valeur pour laquelle $W(x) \cdot V(x+h) < 0$ ou une seule valeur pour laquelle $V(x) \cdot W(x+h) < 0$: il n'y a donc qu'un nombre fini de ces valeurs, et Kronecker utilisera cette propriété pour justifier que la somme qu'il calcule est finie. Pour une telle valeur de x, on voit facilement que l'on a :

$$\frac{-\operatorname{sgn} V(x) \cdot W(x+h) + \operatorname{sgn} W(x) \cdot V(x+h)}{2} = \operatorname{sgn}\left(-V(x) \cdot W(x+h) + W(x) \cdot V(x+h)\right).$$

Si maintenant on note $x_0, x_1, \ldots, x_l$ les rationnels $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots, x_0 + lh$, on obtient :

$$\chi(V(x), W(x)) = -\frac{1}{8} \sum_{k=0}^{l-1} \begin{vmatrix} \operatorname{sgn} V(x_k) & \operatorname{sgn} V(x_{k+1}) \\ \operatorname{sgn} W(x_k) & \operatorname{sgn} W(x_{k+1}) \end{vmatrix}.$$

Kronecker a donc discrétisé le problème en le réduisant à une recherche parmi un nombre fini d'intervalles rationnels, dont la longueur sera aussi petite que l'on veut. Ce long travail lui permet de conclure qu'il a construit « une expression de la caractéristique qui se laisse déterminer de façon strictement arithmétique, sans l'utilisation de racines réelles »[156].

Et s'il est si important pour lui, dans le cas particulier de la théorie des caractéristiques, de montrer qu'il est possible de fournir une méthode ne dépendant pas de la notion de racine, c'est aussi parce que dans ses leçons, les premières démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre sont issues de cette théorie. En effet, il réserve dans son cours une place toute particulière à ce théorème. Plus encore, il affirme que[157] :

> La proposition, que *Gauss* nomme le théorème fondamental de l'algèbre, qui forme aussi véritablement le fondement de l'algèbre, doit apparaître dans ces leçons plutôt au début qu'à la fin [Kronecker 1891, pp. 1-2].

Cependant, le nombre de travaux préliminaires pour arriver à ce théorème est tel qu'il n'apparaîtra en fait jamais avant le milieu de son cours. Kronecker se réfère très souvent aux travaux de Gauss. Cette influence est déterminante dans la façon dont il aborde dans son cours le théorème fon-

---

156 [Kronecker 1891, p. 259] : (...) einen Ausdruck für die Charakteristik erlangt haben, welcher sich streng arithmetisch (...).

157 Der Satz, den *Gauss* den Fundamentalsatz der Algebra nennt, der gemeinhin auch wirklich das Fundament der Algebra bildet, soll in diesen Vorlesungen erst gegen den Schluß hin erscheinen.

damental de l'algèbre. Cependant, la nature des racines d'une équation revêt chez Kronecker un statut très particulier qui l'amène à modifier les démonstrations de Gauss.

6.4.2. *Le théorème fondamental de l'algèbre*

Gauss a fourni, entre 1799 et 1849 quatre preuves du théorème fondamental de l'algèbre, essentiellement différentes. Traditionnellement, on considère que la première et la quatrième sont de nature topologique, tandis que la seconde est très fortement algébrique (Gauss dirait analytique), et la troisième utilise l'intégration des fonctions de deux variables et l'analyse complexe. On en tire ainsi, en première approche, une classification en trois grands types de preuves[158]. Le premier type (première et quatrième preuves de Gauss) regroupe toutes les preuves qui étudient les propriétés des polynômes complexes, et en particulier leur continuité sur un compact (c'est-à-dire en fait le principe du maximum) ou celles, plus récentes, qui utilisent les notions de topologie algébrique comme l'homotopie et le groupe fondamental. Elles se rattachent historiquement à la preuve de d'Alembert. Le second type (seconde preuve de Gauss) rassemble les preuves qui recherchent une utilisation minimale des notions étrangères à l'algèbre. On sait qu'une preuve qui ne prendrait pas en compte, ne serait-ce que de manière très lointaine, la construction des réels aurait peu de chance d'aboutir. Les démonstrations de ce groupe utilisent ainsi en général l'existence d'un corps de décomposition pour tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$. On en trouve les prémices dans les démonstrations d'Euler (1749) et de Lagrange (1772) ; et les démonstrations plus récentes qui utilisent la théorie de Galois sont parfois incluses dans ce groupe. Le dernier type enfin (troisième preuve de Gauss) est celui qui regroupe les preuves qui utilisent des résultats de l'analyse complexe, que ce soit le théorème de Liouville ou celui de Rouché.

Nous avons vu que Gilain distinguait deux théorèmes, le théorème fondamental de l'algèbre et le théorème de factorisation linéaire, et donc deux histoires. Celles-ci se croisent plusieurs fois, en particulier lors des quatre démonstrations que donne Gauss du théorème fondamental de l'algèbre. Les démonstrations de Gauss ne sont pas forcément les premières à être « justes »[159], mais ce sont certainement les premières

158 S.S. Petrova [Petrova 1973] divise les preuves du Théorème fondamental de l'algèbre en deux types : les preuves "analytiques" et les preuves "algébriques". Les premières se subdivisent ensuite en deux groupes : celles qui utilisent les propriétés topologiques des courbes algébriques et celles qui utilisent l'analyse complexe.

159 Voir à ce sujet [Gilain 1991], [Houzel 1989] et [Bachmacova 1960].

à mettre en évidence l'existence de deux théorèmes : il ne démontrera pas, comme ses prédécesseurs, le TFA en supposant admis le TFL, mais regardera toujours séparément l'existence d'une racine et sa nature. Cependant, même s'il ne voit pas le TFL comme un théorème admis ou une évidence qui n'a pas à être démontrée, ce n'est qu'un moyen pour accéder au TFA[160]. Kronecker affirme dans son cours de l'hiver 1890-91, à propos du théorème fondamental de l'algèbre, que[161] :

> Le cœur de la première et la quatrième preuves de ce théorème de *Gauss* (1799 resp. 1849) n'est au fond rien de plus que la détermination de la caractéristique [Kronecker 1891, p. 243].

Il donne ainsi comme application de sa théorie deux démonstrations différentes du théorème fondamental qui reprennent la première, la troisième et la quatrième démonstrations de Gauss. Au fur et à mesure de ses publications, son exposition du théorème fondamental de l'algèbre évolue. La reprise des démonstrations de 1799 et 1849 s'appuie sur des phénomènes d'invariance de la caractéristique, et s'intègre ainsi de plus en plus dans son chapitre consacré à cette théorie. Celle de la démonstration bien plus « algébrique » de 1816 – celle-ci n'apparaît que dans la dernière section de son cours – va dans un premier temps suivre presque exactement le mémoire de Gauss, pour devenir dans les derniers cours un théorème différent qui portera le nom de *théorème fondamental de l'arithmétique*.

L'évolution des termes de l'énoncé du théorème que Kronecker propose nous apporte en fait des renseignements précieux sur les changements qui sont à l'œuvre dans son cours. Dans le cours de 1872-73, Kronecker discute, en se reportant à Gauss, l'utilisation de coefficients complexes. Cependant, la formulation de l'énoncé est parfaitement classique[162] :

> Toute équation de degré n a précisément n racines [Kronecker 1873, p. 185].

Dans le manuscrit de 1878-79, le théorème est démontré, mais n'est pas énoncé. Cependant, il n'y a aucune différence quant à ce que Kronecker

---

160 Il ne faudrait pas croire que le TFA ait été accepté comme vrai par les mathématiciens du XVIII^{e} siècle : Leibniz, en cherchant la solution de l'équation $x^4 + a^4$ se trouve confronté à des facteurs du type $x \pm a\sqrt{\sqrt{-1}}$ qu'il n'arrive pas à combiner pour en faire des facteurs réels et conclut que le TFA est faux.

161 Der Kern des ersten und vierten Beweises dieses Satzes von *Gauss* (1799 bzw. 1849) ist im Grunde genommen nichts anderes als die Bestimmung der Charakteristik.

162 Jede Glch n^{ten} Grades hat gerade n complexe Wurzeln.

souhaite prouver. Les changements apparaissent à partir du cours de 1884-85, c'est-à-dire, rappelons-le, après la publication des *Grundzüge*. Voilà comment Kronecker y énonce ce qu'il souhaite démontrer[163] :

> Gauss a seulement mis en évidence que l'on doit juste montrer qu'il y a des grandeurs telles que si on utilise sur elles les opérations requises par l'expression $ax^n + bx^{n-1} + \cdots$, elles rendent cette expression aussi petite que l'on veut, ou exprimé autrement, si une équation est donnée, alors on doit montrer qu'il y a des grandeurs de la forme $\xi + \eta i$, où ξ et η sont des nombres rationnels pour lesquels l'expression devient en valeur absolue aussi petite que l'on veut [Kronecker 1885a, p. 382].

La discussion sur les coefficients a complètement changé : ceux-ci ne sont ni réels ni complexes, mais rationnels. La notion de racine a elle-même disparu et il s'agit plutôt, comme nous l'avons vu, de trouver des intervalles dans lesquels la fonction change exactement une fois de signe.

À partir de 1887 et de son *théorème fondamental de l'arithmétique*, on trouvera aussi un énoncé complètement différent du théorème. En effet, il construira alors un *Primmodulsystem*

$$(f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y' - c', y'' - c'', \ldots)$$

avec lequel on a la congruence[164] :

$$\mathcal{F}(x) \equiv \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) \ (modd.\, f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y' - c', y'' - c'', \ldots).$$

Il n'est pas question ici de s'étendre sur le terme de *Primmodulsystem* ou de décrire exactement à quel type de congruence on a affaire[165], mais nous voyons que le théorème fondamental change alors de nature pour devenir un *théorème de factorisation linéaire*, c'est-à-dire, en langage moderne, un théorème portant sur la possibilité de factoriser tout polynôme dans son corps de décomposition.

---

163 Gauss erst hat hervorgehoben, dass man gerade beweisen müsse, dass es Grössen von der Art gebe, dass wenn man auf sie die durch den Ausdruck $ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ geforderte Operation anwende, sie diesen Ausdruck beliebig klein machen, oder anders ausgedrückt, wenn eine Gleichung gegeben ist $x^n + ax^{n-1} + \cdots = 0$, so soll man zeigen, dass es Grössen von der Form $\xi + \eta i$ giebt, wo ξ und η rationale Zahlen sind, welche für x eingesetzt, den Ausdruck dem absoluten Betrage nach beliebig klein machen.

164 Voir par exemple [Kronecker 1887d, p. 319].

165 Les *Vorlesungen* de Kronecker nous permettraient d'approfondir sa théorie des *Modulsystem* et finalement le contenu des *Grundzüge*, mais cela demanderait de tels développements que nous le renvoyons à un travail ultérieur.

Néanmoins, dans le manuscrit de 1890-91, Kronecker ne traite pas uniquement du théorème de factorisation linéaire, mais il consacre aussi une partie de son cours sur la théorie des caractéristiques au théorème fondamental de l'algèbre. Dans celui-ci, il donne un énoncé du théorème dans lequel le terme de racine n'est pas employé[166] :

> Soit $\Theta(x+yi)$ une fonction entière de degré n de la variable complexe $(x+yi)$ avec des coefficients complexes et soit après le rassemblement de tous les termes réels et complexes :
>
> $$\Theta(x+iy) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y);$$
>
> alors les courbes définies par $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ ont toujours n points d'intersection [Kronecker 1891, p. 241].

Dans cet énoncé, l'objet de départ est bien un polynôme de degré n[167]. Cependant, Kronecker ne le donne ni en termes de racines, ni en termes d'intervalles. C'est l'aspect géométrique qui est mis en avant : on regarde le nombre d'intersections de certaines courbes, et donc une propriété plus topologique que métrique. Ce qui explique l'évolution de l'énoncé du théorème fondamental de l'algèbre dans les cours de Kronecker, c'est en fait le « statut de la racine réelle ». Kronecker, qui comme on l'a vu, cite ici Netto, distingue en fait plusieurs contenus dans le théorème fondamental de l'algèbre. Le premier, « purement analytique », est basé sur une notion « géométrique » de racine. Ce contenu, avec de plus en plus de précautions (intervalles plutôt que racines, coefficients rationnels,...), est exposé dans la partie de son cours dédiée à la théorie des caractéristiques et il correspond en fait aux première, troisième et quatrième preuves de Gauss. Mais si on l'énonce ainsi, on utilise une correspondance géométrique entre nombre et longueur. Kronecker pose la question suivante à laquelle il refuse de répondre : « Mais alors comment au juste un segment de droite géométrique peut “définir” un concept arithmétique [Krone-

166 Es sei $\Theta(x+yi)$ eine ganze Funktion n-ten Grades der komplexen Variablen $(x+yi)$ mit komplexen Koeffizienten und nach Sammlung aller reellen und komplexen Glieder :

$$\Theta(x+iy) = \varphi(x,y) + i \cdot \psi(x,y);$$

dann haben die durch $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ definierten Kurven stets n Schnittpunkte.

167 On rappelle que dans le vocabulaire de Kronecker une fonction entière (*eine ganze Funktion*) est un polynôme. Ici Kronecker ne précise pas la nature des coefficients, mais dans le cadre de son cours du semestre d'hiver 1890-91, ces coefficients peuvent être considérés comme des nombres rationnels.

cker 1891, p. 251] » ? Plus encore, d'un point de vue arithmétique le théorème devient faux[168] :

> Si nous voulons « appréhender et fonder de façon strictement arithmétique le soi-disant théorème fondamental de l'algèbre » sans aucun soutien géométrique, alors nous pouvons prétendre que le véritable théorème fondamental, à savoir que chaque fonction entière rationnelle de degré n est décomposable en un produit de n facteurs linéaires réels ou imaginaires, n'est pas du tout correct [Kronecker 1891, p. 251].

Kronecker propose alors un nouvel énoncé dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques[169] :

> Ce que nous pouvons démontrer et ce que nous démontrerons, et ce qu'en substance Gauß a aussi seulement démontré, c'est que à partir de chaque fonction rationnelle entière de degré n on peut en fabriquer une autre par une variation du système de coefficient de la première aussi petite que l'on veut, cette dernière pouvant être découpée en un produit de m facteurs linéaires et $\frac{n-m}{2}$ facteurs quadratiques et ce de sorte que les coefficients de tous les facteurs soient des nombres <u>rationnels</u> [Kronecker 1891, pp. 251-252].

Plutôt que des racines dont l'existence, pour Kronecker, n'est pas assurée, plutôt que des intervalles comme il l'a fait précédemment, Kronecker utilise des petites variations des coefficients[170]. Il remarque en effet qu'« il n'est en général pas possible de factoriser une fonction entière donnée $f(x)$ de degré n en un produit de facteurs linéaires dont on pourrait donner des coefficients une interprétation arithmétique vraiment précise et exhaustive »[171]. Ce que Kronecker montre à l'aide de la théorie des carac-

---

168 Wenn wir den sogen Fundamentalsatz der Algebra „streng arithmetisch fassen und begründen" wollen ohne jegliche geometrische Stütze, so können wir behaupten, daß der eigentliche Fundamentalsatz, daß nämlich jede ganze, rationale Funktion n-ten Grades in ein Product von n linearen, reellen oder imaginären Faktoren zerlegbar sei, überhaupt nicht richtig ist.

169 Was wir beweisen können und beweisen werden und was, im Grunde genommen, auch Gauß nur bewiesen hat, ist, daß sich aus jeder ganzen rationalen Funktion n-ten Grades eine andere durch eine Variirung des Koeffizientensystems der ersteren um beliebig kleine Größen herstellen läßt, welche in ein Produkt von m linear-und $\frac{n-m}{2}$ quadratischen Faktoren zerlegt werden kann und zwar so, daß die Koeffizienten dieser sämtlichen Faktoren <u>rationale</u> Zahlen sind.

170 On peut rapprocher cet énoncé du travail de Kronecker de 1878 sur la théorie des caractéristiques : là aussi, il fait varier les coefficients d'un polynôme, pour ensuite examiner la façon dont la caractéristique du système correspondant évolue.

171 [Kronecker 1891, pp. 267-268] : Es ist im allgemeinen nicht möglich, eine vorgelegte ganze Funktion $f(x)$ vom n-ten Grade selbst in ein Produkt von linearen Faktoren zu zerlegen, deren Koeffizienten einen wirklich genauen und erschöpfenden arithmetischen Deutung fähig wären.

téristiques, c'est que pour toute fonction entière f on peut déterminer une fonction entière f_r dont les coefficients sont « aussi petits que l'on veut » et telle que la différence $f - f_r$ puisse être factorisée en produit de facteurs linéaires ou quadratiques à coefficients *rationnels*. L'approximation d'une racine est remplacée par une forme d'approximation rationnelle de la factorisation : le théorème de factorisation linéaire prend le pas sur le théorème fondamental de l'algèbre. Sous cette forme, Kronecker affirme que « le contenu du théorème fondamental dans sa version et justification purement arithmétique est présenté de manière exhaustive. »[172]. Mais cette présentation *arithmétique* n'est pas dénuée de difficulté[173] :

> On s'aperçoit pourtant qu'une fonction encore si voisine, pour ce qui concerne les propriétés algébriques, sera en général différente *toto genere* de celle présentée initialement, et que donc une telle décomposition ne promet vraiment aucun avantage pour des recherches de théorie algébrique [Kronecker 1891, p. 252].

Ainsi cet énoncé n'est pas pour Kronecker le seul énoncé pertinent [174] :

> Mais cela n'est qu'un aspect, celui de la version arithmétique du théorème fondamental. Pour les recherches algébriques, nous allons prouver la possibilité d'une deuxième décomposition fondamentalement différente de celle donnée, qui n'est pas valable au sens de l'égalité mais seulement en tant que

---

172 [Kronecker 1891, p. 268] : (...) so ist der Inhalt des Fundamentaltheorems in seiner rein arithmetischen Fassung und Begründung erschöpfend zur Darstellung gebracht.

173 Man erkennt jedoch, daß eine wenn auch noch so sehr benachbarte Funktion, was ihre algebraischen Eigenschaften betrifft, von der ursprünglich vorgelegten im allgemeinen *toto genere* verschieden sein wird, und daß also eine solche Zerlegung für theoretisch-algebraische Untersuchungen keinerlei Nutzen verspricht.

174 Aber dies ist auch nur die eine Seite, die arithmetische Fassung des Fundamentaltheorems. Für algebraische Untersuchungen werden wir die Möglichkeit einer zweiten von der angeführten grundverschiedenen Zerlegung nachweisen, welche nicht im Sinne der Gleichheit, sondern nur als Kongruenz für ein Primmodulsystem besteht. Wir werden nämlich die Richtigkeit der folgenden Kongruenz aufzeigen :

$$F(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n \equiv (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$
$$(\mathit{modd.}\ f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y - c),$$

wenn

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} - \cdots \pm f_n;$$

$x_1 \cdots x_n$ unbestimmte Variable, y eine gewisse von der algebraischen Beschaffenheit der Funktion $F(x)$ abhängende, nicht symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und c eine rationale Zahl ist, die zu y in derselben Beziehung steht, wie die Größen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bezw. zu $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Nur wenn man so den arithmetischen und den algebraischen Teil des Fundamental-Theorems in aller Strenge sondert, ist es möglich, seinen Inhalt wirklich scharf zu fassen.

congruence pour un *Primmodulsystem.* Nous allons en effet montrer la validité de la congruence suivante :

$$F(x) = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - \cdots \pm c_n \equiv (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$
$$(modd.\ f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y - c),$$

lorsque

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n - f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} - \cdots \pm f_n;$$

$x_1 \cdots x_n$ sont des variables indéterminées, y une certaine variable dépendant de la qualité algébrique de la fonction $F(x)$, qui n'est pas une fonction symétrique de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et c est un nombre rationnel qui est pour y dans le même rapport que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ pour resp. $c_1, c_2, \ldots, c_n$. C'est seulement lorsque l'on sépare ainsi en toute rigueur la partie arithmétique et algébrique du théorème fondamental, qu'il est possible d'appréhender véritablement précisément son contenu [Kronecker 1891, p. 252].

Dans son dernier cours sur la théorie des fonctions algébriques, Kronecker propose donc finalement deux énoncés. Le premier, qu'il qualifie d'« arithmétique » et qui est lié à la théorie des caractéristiques, est obtenu dans un premier temps en remplaçant le concept de racine par celui d'intervalle rationnel : il affirme ainsi la *possibilité* de séparer les racines. Kronecker en propose ensuite, tout au moins dans son dernier cours, une méthode permettant de donner une *approximation* rationnelle de la décomposition d'une fonction entière. Le second, qui est lui qualifié d'« algébrique », est en fait le théorème de factorisation linéaire qu'il présente dans son article de 1887.

7. CONCLUSION

Dans une lettre datée du 18 août 1884, Kronecker écrit à Cantor[175] :

Comme vous avez suivi mes cours il y a plus de 20 ans et que vous êtes depuis lors en contact avec moi de façon presque ininterrompue, vous avez entendu mes vues assez souvent pour comprendre mieux que je ne saurais l'exprimer ici que – ayant approfondi très tôt mes études de philosophie sous les conseils de Kummer – je reconnais, comme il le faisait, l'incertitude de telles spécula-

175 Da Sie vor mehr als 20 Jahren selber noch meine Vorlesungen gehört und auch seitdem, in fast ununterbrochenen Beziehungen zu mir stehend, oft genug meine Ansichten vernommen haben, so wissen Sie besser, als ich es Ihnen jetzt auseinanderzusetzen vermöchte, dass ich – sehr früh unter Kummers Anleitung in philosophische Studien vertieft – nachher gleich ihm, die Unsicherheit aller jener Spekulationen erkannt und mich in den sicheren Hafen der wirklichen Mathematik geflüchtet habe. Was natürlicher, als dass ich in dieser Mathematik selbst nun mich bemüht habe, ihre

> tions, et je me réfugie dans le paradis des vraies mathématiques. Quoi de plus naturel alors que je me sois efforcé dans mon travail mathématique d'exprimer ses phénomènes (*Erscheinungen*) et ses vérités (*Wahrheiten*) dans une forme aussi indépendante que possible de concepts philosophiques. [...] Je pense publier l'essentiel de mes vues très bientôt, et par la même occasion formuler mes objections aux déductions de Stoltz, que vous connaissez déjà par mes communications orales. Pourra-t-on alors discuter de toutes ces choses *publice sine ira et studio*? [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196]

Kronecker exprime ici sa volonté de ne pas faire intervenir la philosophie dans les mathématiques, ce qui correspond d'ailleurs à la position qu'il tiendra dans l'article annoncé[176]. Mais surtout, il ressort de ce passage que si l'on souhaite obtenir des témoignages de ses « vues » sur les mathématiques, nous devons les chercher dans ses communications et ses cours, et non dans ses articles publiés. La disparition de son *Nachlass* rend donc d'autant plus précieuses les retranscriptions de ses cours : non seulement le lien fort que Kronecker entretient entre enseignement et recherche fait de ces leçons une entrée naturelle à ses mathématiques, mais ces notes représentent aussi un accès privilégié à la pensée de Kronecker *sur* les mathématiques.

Les *Leçons sur la théorie des équations algébriques* représentent sans aucun doute le « cours d'algèbre » de Kronecker, et le concept de racine y est central. Lorsqu'il aborde le théorème de Sturm, puis la théorie des caractéristiques, il ne rejette pas l'« intuition géométrique » (*geometrische Anschauung*) à partir de laquelle il présente dans un premier temps les racines d'un polynôme. Cependant, il met en avant les problèmes que représentent, par rapport à son cadre philosophique, la « continuité géométrique » et le théorème de Bolzano. Il extrait en fait de cette intuition géométrique et de l'ensemble de ses interprétations graphiques le noyau arithmétique du concept de racine. Dans celui-ci, la continuité n'a pas sa place et il affirme par exemple que « le théorème de *Sturm* ne détermine par là rien d'autre que le nombre des intervalles (...) dans lesquels a lieu

---

Erscheinungen oder ihre Wahrheiten möglichst frei von jeden philosophischen Begriffsbildungen zu erkennen. [...] Ich werde das Wesentlichste meiner Ansichten ja nächstens einmal im Druck bekannt zu geben haben und dabei noch meine Einwendungen gegen jene Stolz'sche Deduction – die Sie ja aus meinen mündlichen Mittheilungen kennen – formuliren. Dann mögen diese Dinge p*ublice sine ira et studio* erörtert werden?

176 Il s'agit très certainement de l'article *Über den Zahlbegriff* publié trois ans plus tard en 1887 [Kronecker 1887b].

un changement de signe[177] ». C'est en entrant dans les mathématiques de Kronecker, en examinant les détails de ses démonstrations et l'intitulé exact de ses énoncés que l'on peut comprendre comment certains points de vue de Kronecker sur les mathématiques sont intriqués à l'intérieur même de ses mathématiques. En effet, les difficultés épistémiques du concept de continuité l'amènent à modifier la démonstration du théorème de Sturm à partir de la possibilité de produire des intervalles dans lesquels a lieu un unique changement de signe. Cette possibilité lui sert alors de base sur laquelle il reconstruit le concept de racine pour l'introduire ensuite dans sa théorie des caractéristiques. On voit ainsi se dessiner des allers-retours entre philosophie et pratique des mathématiques. Ce mouvement réflexif et nécessaire, Kronecker le décrit ainsi[178] :

> Il y a partout dans le cours de la science des moments où elle réfléchit sur elle-même, et revient à un point de vue abandonné depuis longtemps, mais plus riche en contenu et en expérience. Chaque science produit dans son développement un grand ensemble de nouvelles ressources qu'elle systématise, schématise et érige inconsciemment à des fins de recherche. L'algèbre doit aussi rester consciente qu'elle a produit par la mise en œuvre d'un schématisme uniforme des fictions conceptuelles et desquelles elle retourne à l'exploration des choses données par la nature elle-même. Même si elle est enrichie par le mélange de l'analyse et de la géométrie, elle ne doit pas se soumettre aux concepts et aux idées de ces disciplines étrangères. Mais si elle se détache de nouveau de l'analyse et de la géométrie, elle devient en soi « arithmétique » [Kronecker 1891, p. 2].

Si la notion géométrique de racine permet à Kronecker de construire sa théorie des caractéristiques, cette dernière ne devient réellement arithmétique qu'une fois débarrassée des « fictions » attachées au concept de ra-

177 [Kronecker 1881b, p. 120] : Der *Sturm*'sche Satz bestimmt daher eigentlich nichts anderes als die Anzahl der oben charakterisirten Intervalle $x_1 - x_2 = \frac{\Theta}{\mathcal{M}}$, zwischen welchen ein Zeichenwechsel stattfindet.

178 Es ist überall der Gang der Wissenschaft, daß sie von Zeit zu Zeit, sich besinnend auf sichselbst, zurückkehrt zu einem lange zuvor verlassenen Standpunkt, aber reicher an Inhalt und an Erfahrung. In ihrer Entwicklung erzeugt jede Wissenschaft eine große Menge neuer Hilfsmittel, die sie systematisiert, schematisiert und unbewußt vom Mittel zum Zwecke der Untersuchung erhebt. Auch die Algebra muß sich dessen bewußt bleiben, daß sie zur Durchführung eines uniformierenden Schematismus begriffliche Fiktionen geschaffen hat und von denen zurückkehrt zur Ergründung der von der Natur selbst gegebenen Gebilde. Wenn sie auch durch die Vermischung mit der Analysis und Geometrie auf das Reichste befruchtet ist, so darf sie sich doch darum nicht den Begriffen und Vorstellungen dieser an und für sich ihr fremden Disciplinen unterwerfen. Löst sie aber sich wieder los von Analysis und Geometrie, so wird sie von selbst „arithmetisch“.

cine. Lorsque l'on prend en compte à la fois la succession de ses cours et la chronologie interne à chaque manuscrit, on se rend compte que Kronecker a mis en place un mouvement en trois temps. Il souhaite tout d'abord séparer les notions de racines et de continuité, pour ensuite montrer que l'on peut éviter d'utiliser la continuité dans ses démonstrations. La continuité étant écartée, il transforme la façon d'aborder le concept de racine en proposant non plus de les *chercher*, mais de les *séparer*.

C'est dans ce cadre – celui de la séparation des racines – que s'articulent pour Kronecker le théorème de Sturm, la théorie des caractéristiques et le théorème fondamental de l'algèbre : il transforme le concept même de racine et le remplace, dans ses derniers cours, par la recherche d'une factorisation d'un polynôme. Dans les leçons de Kronecker, la distinction que fait Gilain entre les deux histoires du théorème fondamental de l'algèbre – celle qui mène à la démonstration de l'existence d'une racine et celle qui aboutit au théorème de factorisation linéaire – s'opère de façon très claire. Si pour Gauss la construction du TFL est une étape vers le TFA, pour Kronecker il devient le « véritable » théorème. Sur la base de la théorie des caractéristiques, il donne dans la première partie de son dernier cours un énoncé original de ce théorème : il propose une méthode permettant d'approximer toute fonction entière par une autre, aussi « proche » que l'on veut, et qui se factorise en produit de facteurs linéaires et quadratiques à coefficients rationnels. En parallèle de ce résultat, qu'il qualifie d'« arithmétique », Kronecker annonce le théorème central de la seconde partie de son cours et qu'il considère comme représentant le contenu « algébrique » du théorème fondamental de l'algèbre. Ce théorème, qui affirme la possibilité de décomposer un polynôme selon un système de congruences, il le nomme pourtant « théorème fondamental de l'arithmétique », et sa construction est issue des résultats qu'il obtient dans les *Grundzüge*. Ainsi, une étude approfondie de la seconde partie des *Leçons sur la théorie des équations algébriques* permettrait d'apporter des clarifications supplémentaires sur les rapports complexes entre *Algèbre*, *Arithmétique* et *Arithmétique générale* dans l'œuvre de Kronecker.

APPENDICE A
DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STURM PAR KRONECKER

Soit l'équation :

$$x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n = 0.$$

On rappelle la notation :

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} \frac{a}{|a|} \text{ si } a \neq 0, \\ 0 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant une fonction réelle $F(x)$, de la variable réelle x, dérivable sur l'intervalle $[x_1; x_2]$ et dont la dérivée a les mêmes propriétés sur ce même intervalle. Kronecker remarque alors que cette fonction a sur cet intervalle le « caractère d'une fonction entière »[179], c'est-à-dire que ce qui suit pourra donc s'appliquer essentiellement (mais pas uniquement) aux polynômes. Supposons que :

$$\operatorname{sgn}(F(x_1)) = -\operatorname{sgn}(F(x_2)).$$

On obtient facilement que :

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2)).$$

On suppose de plus qu'entre x_1 et x_2 la fonction F s'annule pour une unique valeur ζ, et posons :

$$x_1 < \zeta_1 < \zeta < \zeta_2 < x_2.$$

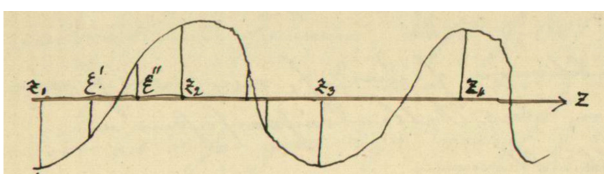


FIGURE 13. [Kronecker 1881b, p. 105]

On a bien sûr :

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{F(\zeta_2) - F(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2))$$

179 [Kronecker 1887c, p. 136] : Charakter einer ganzen Function.

et pour ζ_1 et ζ_2 suffisamment proches de ζ :

$$\operatorname{sgn}\left(F'(\zeta)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2)).$$

Si maintenant on suppose que pour

$$x_1 < z_2 < z_3 < \cdots < x_2$$

on a dans chaque intervalle $[x_1, z_2]$, $[z_2, z_3], \ldots$ une unique racine de F que l'on désignera par $\zeta', \zeta'', \ldots$, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\left(F'(\zeta')\right) &= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(z_2)) \\
\operatorname{sgn}\left(F'(\zeta'')\right) &= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(z_2)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(z_3)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{F(\zeta)=0, x_1<\zeta<x_2} \operatorname{sgn}\left(F'(\zeta)\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2)). \tag{1}$$

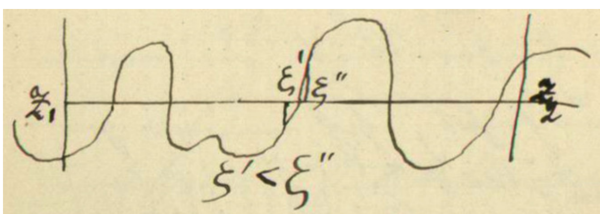


FIGURE 14. [Kronecker 1881b, p. 105(2)]

Kronecker précise que l'on a supposé ici que F et F' ne s'annulent pas ensemble sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, et il en précise l'interprétation graphique (la courbe n'est à aucun moment tangente à l'axe des abscisses). On pose maintenant

$$f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n$$

et $f_1(x)$ une fonction entière (un polynôme dans le vocabulaire de Kronecker) de degré $n-1$ telle que f et f_1 n'aient pas de racine commune.

Kronecker applique la division euclidienne, modifiée par Sturm :

$$\begin{aligned} f - g_1 f_1 + f_2 &= 0 \\ f_1 - g_2 f_2 + f_3 &= 0 \\ \cdots &= 0 \\ f_{\nu-1} - g_\nu f_\nu &= 0 \end{aligned}$$

où f_ν est une constante.

On pose

$$F_h(x) = f_{h-1}(x) f_h(x),$$

donc

$$F'_h(x) = f_{h-1}(x) f'_h(x) + f'_{h-1}(x) f_h(x).$$

Si on note ξ_h les racines de $f_h(x) = 0$ et ξ_{h-1} les racines de $f_{h-1}(x) = 0$, alors

$$F'_h(\xi_h) = f_{h-1}(\xi_h) f'_h(\xi_h)$$

et

$$F'_h(\xi_{h-1}) = f'_{h-1}(\xi_{h-1}) f_h(\xi_{h-1}).$$

On peut appliquer (1) à F_h et on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{F_h(\zeta)=0, x_1<\zeta<x_2} \operatorname{sgn}\left(F'_h(\zeta)\right) \\ &\quad = \sum_{f_{h-1}(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(F'_h(\xi)\right) + \sum_{f_h(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(F'_h(\xi)\right) \\ &\quad = \sum_{f_{h-1}(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f'_{h-1}(\xi) f_h(\xi)\right) \\ &\qquad + \sum_{f_h(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f_{h-1}(\xi) f'_h(\xi)\right) \\ &\quad = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{\nu} \left(\sum_{\substack{f_{h-1}(\xi)=0 \\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f'_{h-1}(\xi) f_h(\xi)\right) + \sum_{\substack{f_h(\xi)=0 \\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f_{h-1}(\xi) f'_h(\xi)\right) \right) \\ &\quad = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)), \end{aligned}$$

or

$$f_{h-1}(x) - g_h(x) f_h(x) + f_{h+1}(x) = 0,$$

donc

$$f_{h-1}(\xi_h) + f_{h+1}(\xi_h) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h)) = -\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h))$$

et par conséquent :

$$\sum_{h=1}^{\nu}\left(\sum_{\substack{f_{h-1}(\xi)=0\\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f'_{h-1}(\xi)f_h(\xi)\right) - \sum_{\substack{f_h(\xi)=0\\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f_{h+1}(\xi)f'_h(\xi)\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)),$$

on peut simplifier le membre de gauche et on obtient :

$$\sum_{f(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f'(\xi)f_1(\xi)\right) - \sum_{f_\nu(\xi_\nu)=0, x_1<\xi_\nu<x_2} \operatorname{sgn}\left(f_{\nu+1}(\xi_\nu)f'_\nu(\xi_\nu)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)).$$

Or $f_{\nu+1} = 0$ et $f'_\nu = 0$ donc on a la formule :

$$(2)\quad \sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f'(\xi)f_1(\xi)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)).$$

Cette formule correspond à ce que Kronecker considère comme le théorème de Sturm, ou tout au moins son extension par Sylvester.

APPENDICE B

CARACTÉRISTIQUE DE TROIS FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Soient f, φ et ψ trois fonctions algébriques de deux variables x et y formant des courbes fermées.

On rappelle les notations suivantes :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

où $f_1 = \frac{df}{dx}$ et $f_2 = \frac{df}{dy}$.

Dans le déterminant précédent, si l'on considère f, φ et ψ comme des variables et que l'on développe ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\Delta = f \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} - \varphi \begin{vmatrix} f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \psi_2 \end{vmatrix} + \psi \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}$$

et donc

$$\frac{\partial \Delta}{\partial f} = \Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = \Delta_2 = -\begin{vmatrix} f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \psi} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

On applique la propriété

$$(1) \qquad \sum_{U=V=0} \mathrm{sgn}(dV) = 0 = \sum_{U=V=0} \mathrm{sgn}\ (U_1V_2 - U_2V_1)$$

pour $U = f$ et $V = \varphi \cdot \psi$, ce qui est possible car si $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ sont des courbes fermées, il en est de même pour $\varphi \cdot \psi$. On obtient :

$$\sum_{f=\varphi\cdot\psi=0} \mathrm{sgn}\ \left(f_1(\varphi_2\psi + \varphi\psi_2) - f_2(\varphi_1\psi + \varphi\psi_1)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{f=\varphi\cdot\psi=0} \mathrm{sgn}\ \left(\psi(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) + \varphi(f_1\psi_2 - f_2\psi_1)\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{f=\varphi\cdot\psi=0} \mathrm{sgn}\ (\psi\Delta_3 - \varphi\Delta_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{f=\varphi=0} \mathrm{sgn}\ (\psi\Delta_3) - \sum_{f=\psi=0} \mathrm{sgn}\ (\varphi\Delta_2) = 0,$$

donc

$$\sum_{f=\varphi=0} \mathrm{sgn}\ (\psi\Delta_3) = \sum_{f=\psi=0} \mathrm{sgn}\ (\varphi\Delta_2)\,.$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_{f=\varphi\psi=0} \mathrm{sgn}\ (d(\varphi\cdot\psi)) = 0.$$

On peut séparer en deux cette somme : la partie où $\varphi = 0$ et la partie où $\psi = 0$. Mais il faut se souvenir que le *Fortgangsprincip* doit être appliqué, et donc que les sens de circulation sur $f = 0$ dans $\sum_{f=\varphi=0}$ et $\sum_{f=\psi=0}$ sont inverses l'un de l'autre. Ainsi :

$$\sum_{f=\varphi=0} \mathrm{sgn}\ (d(\varphi\psi)) - \sum_{f=\psi=0} \mathrm{sgn}\ (d(\varphi\psi)) = 0$$

et donc

$$\sum_{f=\varphi=0} \mathrm{sgn}\ (d(\varphi\psi)) = \sum_{f=\psi=0} \mathrm{sgn}\ (d(\varphi\psi))$$

Ensuite, dans le cas d'une somme du type $\sum_{f=\varphi}$, le *Fortgangsprincip* nous dit que sgn $(d\varphi) = $ sgn $(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) = $ sgn Δ_3. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi \cdot \Delta_3) &= \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi \cdot d\varphi)\\ &= \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi \cdot d\varphi + \varphi \cdot d\psi)\\ &= \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (d(\psi \cdot \varphi))\end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (d(\psi \cdot \varphi)) = \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi \cdot \Delta_3)\,.$$

Comme $\Delta = f\Delta_1 + \varphi\Delta_2 + \psi\Delta_3$, on a aussi

$$\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi \cdot \Delta_3) = \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\Delta)$$

et

$$\sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn}\ (\varphi \cdot \Delta_2) = \sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn}\ (\Delta)\,.$$

On obtient aussi des formules symétriques aux précédentes en appliquant la propriété (1) pour $U = \psi$ et $V = f\varphi$.

Si on applique la propriété (1) pour $U = f$ et $V = \varphi$, il vient :

$$\begin{aligned}&\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta_3 = 0\\ &\sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi<0}} \operatorname{sgn} \Delta_3 + \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi>0}} \operatorname{sgn} \Delta_3 = 0.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta = \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta_3\psi = \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi>0}} \operatorname{sgn} \Delta_3 - \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi<0}} \operatorname{sgn} \Delta_3.$$

Et ainsi :

$$\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta = \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \psi\Delta_3 = 2 \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi>0}} \operatorname{sgn} \Delta_3 = -2 \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi<0}} \operatorname{sgn} \Delta_3.$$

En posant

$$\chi(f, \varphi, \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta,$$

alors $\chi(f,\varphi,\psi)$ est un nombre entier et en rassemblant toutes les égalités précédentes on obtient :

$$\begin{aligned}\chi(f,\varphi,\psi) &= -\frac{1}{2}\sum_{f=\varphi=0}\operatorname{sgn}\Delta = -\frac{1}{2}\sum_{\varphi=\psi=0}\operatorname{sgn}\Delta\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\psi=f=0}\operatorname{sgn}\Delta = \sum_{\substack{\psi<0\\ f=\varphi=0}}\operatorname{sgn}(f_1\varphi_2-f_2\varphi_1)\\ &= \sum_{\substack{f<0\\ \varphi=\psi=0}}\operatorname{sgn}(\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1) = \sum_{\substack{\varphi<0\\ \psi=f=0}}\operatorname{sgn}(\psi_1 f_2-\psi_2 f_1)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\varphi=\psi=0}\operatorname{sgn} d(f\cdot\varphi) = -\frac{1}{2}\sum_{\psi=f=0}\operatorname{sgn} d(\varphi\cdot\psi)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{f=\varphi=0}\operatorname{sgn} d(\psi\cdot f) = -\frac{1}{2}\sum_{f=\psi=0}\operatorname{sgn} d(f\cdot\varphi)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{\varphi=f=0}\operatorname{sgn} d(\varphi\cdot\psi) = -\frac{1}{2}\sum_{\psi=\varphi=0}\operatorname{sgn} d(\psi\cdot f).\end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

BACHMACOVA (Isabella)

[1960] Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques, *Archives internationales d'histoire des sciences*, 13 (1960), p. 211–222.

BEHNKE (Heinrich) & KOPFERMANN (Klaus), dir.

[1966] *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, 1815-1965*, Köln/Opladen : Westdeutscher Verlag, 1966.

BELL (Eric Temple)

[1940] *The Development of Mathematics*, New York, London : McGraw-Hill, 1940.

BIERMANN (Kurt-Reinhard)

[1973] *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810-1920 : Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung*, Berlin : Akademie, 1973.

[1981] Kronecker, Leopold, dans Gillispie (Charles), dir., *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, New York : Scribner, 1981, p. 505–509.

Bolzano (Bernard)

[1810] *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik : erste Lieferung*, vol. 1, Prague : Caspar Widtmann, 1810.

[1817] *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague : Gottlieb Haase, 1817.

Boniface (Jacqueline) & Schappacher (Norbert)

[2001] *Sur le concept de nombre en mathématique* : Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891), *Revue d'histoire des mathématiques*, 7 (2001), p. 207–275.

Boniface (Jacqueline)

[1999] Kronecker et le concept de nombre : traduction et présentation, *La Gazette des mathématiciens*, 1999, p. 49–70.

[2002] *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Paris : Ellipses, 2002.

Brechenmacher (Frédéric)

[2007] La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'histoire des mathématiques*, 13 (2007), p. 187–257.

[2011a] Self-portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan), *Revue d'histoire des mathématiques*, 17 (2011), p. 273–371.

[2011b] Galois Got his Gun, 2011 URL `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00630975`; prépublication.

Brechenmacher (Frédéric) & Ehrhardt (Caroline)

[2010] On the identities of algebra in the 19th century, *Oberwolfach Reports*, 7-1 (2010), p. 604–612.

Cauchy (Augustin Louis)

[1821] *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique :* 1ère partie *: Analyse algébrique*, Paris : Imprimerie royale, 1821.

Crelle (August Leopold)

[1835] Die Sätze von Fourier und Sturm zur Theorie der algebraischen Gleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13 (1835), p. 119–144.

Dhombres (Jean) & Alvarez (Carlos)

[2011] *Une histoire de l'imaginaire mathématique : vers le théorème fondamental de l'algèbre et sa démonstration par Laplace en 1795*, Paris : Hermann, 2011.

[2013] *Une histoire de l'invention mathématique : les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville*, Paris : Hermann, 2013.

Dugac (Pierre)

[1973] Éléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, 10 (1973), p. 41–174.

[1976] Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique au xix^e^ siècle : Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind, *Historia Mathematica*, 3-1 (1976), p. 5–19.

EDWARDS (Harold Mortimer)

[1978] On the Kronecker Nachlass, *Historia Mathematica*, 5-4 (1978), p. 419–426.

[1987] An Appreciation of Kronecker, *The Mathematical Intelligencer*, 9-1 (1987), p. 28–35.

[1988] Kronecker's place in history, dans Aspray (William) & Kitcher (Philip), dir., *History and philosophy of modern mathematics*, Minneapolis : University of Minnesota Press, 1988, p. 139–144.

[1995] Kronecker on the Foundations of Mathematics, dans Hintikka (Jaakko), dir., *From Dedekind to Gödel : Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Dordrecht : Kluwer, 1995, p. 45–52.

[2005] *Essays In Constructive Mathematics*, New York : Springer, 2005.

FRANCOEUR (Louis-Benjamin)

[1838] *Algèbre supérieure*, Bruxelles : Meline, Cans, 1838.

FREGE (Gottlob)

[1884] *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau : Wilhelm Koebner, 1884.

FROBENIUS (Ferdinand Georg)

[1893/1968] Gedächtnisrede auf Leopold Kronecker, dans *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, Berlin : Springer, 1893/1968, p. 707–724.

GAUSS (Carl Friedrich)

[1799/1866] Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (thèse, Helmstedt), dans *Werke*, vol. III, Göttingen : Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1799/1866, p. 1–30.

[1849/1866] Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen, dans *Werke*, vol. III, Göttingen : Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1849/1866, p. 71–85.

GILAIN (Christian)

[1991] Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral, *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (1991), p. 91–136.

GOLDSTEIN (Catherine)

[2011a] Charles Hermite's stroll through the Galois fields, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17-2 (2011), p. 211–270.

[2011b] Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite, dans Flament (Dominique) & Nabonnand (Philippe), dir., *Justifier en mathématiques*, Paris : MSH, 2011, p. 129–165.

GOLDSTEIN (Catherine) & SCHAPPACHER (Norbert)

[2007a] A Book in Search of a Discipline (1801–1860), dans Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), dir., *The Shaping of Arithmetic after Carl-Friedrich Gauss's* Disquisitiones arithmeticae, Berlin : Springer, 2007, p. 2–65.

[2007b] Several Disciplines and a Book (1860–1901), dans Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), dir., *The Shaping of Arithmetic after Carl-Friedrich Gauss's* Disquisitiones arithmeticae, Berlin : Springer, 2007, p. 66–103.

GRATTAN-GUINNESS (Ivor), dir.

[2005] *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Amsterdam : Elsevier Science, 2005.

HENSEL (Kurt) & LANDSBERG (Georg)

[1902] *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, Leipzig : Teubner, 1902.

HOUZEL (Christian)

[1989] D'Alembert et le théorème fondamental de l'algbre, dans Émery (Monique) & Monzani (Pierre), dir., *Jean D'Alembert, savant et philosophe : portrait à plusieurs voix*, Paris : Édition des archives contemporaines, 1989, p. 351–360.

JORDAN (Camille)

[1893] *Cours d'analyse de l'École polytechnique,* vol. 1, Paris : Gauthier-Villars et fils, 1893.

KANT (Immanuel)

[1991] *Correspondance*, Paris : Gallimard, 1991.

KLEIN (Felix)

[1926] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, vol. 24, Berlin : Springer, 1926.

KNESER (Adolf)

[1925] Leopold Kronecker, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 33 (1925), p. 210–228.

[1881] *Algebraische Gleichungen*, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 1881 ; Manuscrit, Cod. Ms. A. Kneser B2.

KNOBLAUCH (Johannes)

[1913] *Grundlagen der Differentialgeometrie*, Leipzig : Teubner, 1913.

KRONECKER (Leopold)

[1861] Antrittsrede bei der Aufnahme in die Akademie der Wissenschaften am 4. Juli 1861, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1861, p. 637–642 ; *Werke*, vol. V, 387–393.

[1869a] Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Erste Abhandlung, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1869, p. 159–193 ; *Werke*, vol. I, 177–212.

[1869b] Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Zweite Abhandlung, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1869, p. 688–698 ; *Werke*, vol. I, 215–226.

[1873] *Cours du semestre d'hiver 1872–1873, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1873 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/51549`.

[1878a] Über die Charakteristik von Funktionen-Systemen, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1878, p. 95–121 ; *Werke*, vol. II, 71–82.

[1878b] Über Sturm'sche Functionen, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1878, p. 95–121 ; *Werke*, vol. II, 39–70.

[1879] *Cours du semestre d'hiver 1878–1879, Theorie der algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1879 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/52337`.

[1881a] Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 91 (1881), p. 301–334 ; *Werke*, vol. II, 193–236.

[1881b] *Cours du semestre d'hiver 1880–1881, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1881 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/54535`.

[1882a] Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 (1882), p. 1–122 ; *Werke*, vol. II, 237–388.

[1882b] *Cours du semestre d'hiver 1881–1882, Höhere Zahlentheorie*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1882 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/63440`.

[1885a] *Cours du semestre d'hiver 1884–1885, Theorie der Algebraischen Gleichungen, Teil I*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1885 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/54352`.

[1885b] *Cours du semestre d'hiver 1884–1885, Theorie der Algebraischen Gleichungen, don du Dr Thiel*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1885 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/60188`.

[1885c] *Cours du semestre d'été 1885, Theorie der Algebraischen Gleichungen, Teil II*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1885 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53779`.

[1886] *Cours du semestre d'hiver 1885–1886, Über die Affecte der Gleichungen, welche in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1886 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/61293`.

[1887a] Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 100 (1887), p. 490–510; *Werke*, vol. IIIa, 209–240.

[1887b] Über den Zahlbegriff, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 101 (1887), p. 337–355; *Werke*, vol. IIIa, 249–274.

[1887c] *Cours du semestre d'hiver 1886–1887, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 1887; Manuscrit, Signatur : 8 Cod. Ms. philos. 40 xf : 2.

[1887d] *Cours du semestre d'hiver 1886–1887, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1887; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53647`.

[1888] *Cours du semestre d'hiver 1887–1888, Zahlentheorie*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1888; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/37880`.

[1889] *Cours du semestre d'hiver 1888–1889, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1889; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53321`.

[1890] *Cours du semestre d'hiver 1889–1890, Allgemeine Arithmetik. I. Teil. (Zahlentheorie)*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1890; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/38360`.

[1891] *Cours du semestre d'hiver 1890–1891, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Manuscrit inédit, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1891; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53004`.

[1894] *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale*, Leipzig : Teubner, 1894.

[1901] *Vorlesungen über Mathematik*, vol. 1, Leipzig : Teubner, 1901.

[1903] *Vorlesungen über Mathematik*, vol. 2, Leipzig : Teubner, 1903.

LAGRANGE (Joseph Louis)

[1771] Réflexions sur la résolution algébrique des équations, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres*, 1 (1771), p. 134–215.

LANDSBERG (Georg)

[1911] Beiträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie, *Mathematische Annalen*, 70(4) (1911), p. 563–579.

LAPLACE (Pierre-Simon)

[1835] *Exposition du système du monde*, Paris : Bachelier, 1835.

LEFÉBURE DE FOURCY (Louis-Étienne)

[1850] *Leçons d'algèbre*, Paris : Bachelier, 1850.

LIPSCHITZ (Rudolf)
[1986] *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen*, éd. Scharlau (Winfried), Braunschweig/Wiesbaden : DMV et Vieweg, 1986.

MEHRTENS (Herbert), BOS (Henk JM) & SCHNEIDER (Ivo), dir.
[1981] *Social History of Nineteenth-Century Mathematics*, Boston : Birkhäuser, 1981.

MESCHKOWSKI (Herbert)
[1967] *Probleme des Unendlichen : Werk und Leben Georg Cantors*, Berlin, Heidelberg : Springer, 1967.

MESCHKOWSKI (Herbert) & NILSON (Winfried), dir.
[1991] *Georg Cantor : Briefe*, Berlin, Heidelberg : Springer, 1991.

MOLK (Jules)
[1884] Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination, *Acta mathematica*, 6 (1884), p. 1–166.

NETTO (Eugen)
[1876] *Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren oder zweiten Grades*, Leipzig : Wilhelm Engelmann, 1876.
[1900] *Vorlesungen über Algebra*, Leipzig : Teubner, 1900.

OSTROWSKI (Alexander M.)
[1920] Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 8 (1920), p. 50–58.

PENCHÈVRE (Erwan)
[2007] La théorie arithmétique des grandeurs algébriques de Kronecker, dans *Actes de la Journée en l'honneur de Christian Houzel, IHP (Paris), 23 novembre 2007*, 2007 ; À paraître.

PETRI (Birgit)
[2011] *Perioden, Elementarteiler, Transzendenz : Kurt Hensels Weg zu den p-adischen Zahlen*, Thèse, TU Darmstadt, Darmstadt, 2011.

PETRI (Birgit) & SCHAPPACHER (Norbert)
[2007] On arithmetization, dans Goldstein (Catherine), Norbert (Schappacher) & Schwermer (Joachim), dir., *The Shaping of Arithmetic after Carl Friedrich Gauss's* Disquisitiones Arithmeticae, Berlin : Springer, 2007, p. 343–374.

PETROVA (Svetlana S.)
[1973] From the history of the analytic proofs of the fundamental theorem of algebra, *History and methodology of the natural sciences*, XIV (1973), p. 167–172.

Pierobon (Frank)
[2003] *Kant et les mathématiques*, Paris : Vrin, 2003.

Remmert (Reinhold)
[1991] The Fundamental Theorem of Algebra, dans Ebbinghaus (Heinz-Dieter) *et al.*, dir., *Numbers*, New York : Springer, 1991, p. 97–122.

Rouché (Eugène) & Lévy (Lucien)
[1900] *Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs,* vol. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1900.

Salmon (George)
[1885] *Lessons introductory to the modern higher algebra*, Dublin : Hodges, Figgis, and Co., 1885.

Schappacher (Norbert) & Volkert (Klaus)
[1997] Heinrich Weber : un mathématicien à Strasbourg, 1895–1913, *L'Ouvert*, 1997, p. 1–18.

Serret (Joseph Alfred)
[1849] *Cours d'algèbre supérieure*, Paris : Mallet-Bachelier, 1849.

Sinaceur (Hourya)
[1988] Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de Ch. F. Sturm, *Revue d'histoire des sciences*, 41-2 (1988), p. 99–132.

[1991] *Corps et Modèles : essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Mathésis, Paris : Vrin, 1991.

[1992] Cauchy, Sturm et les racines des équations, *Revue d'histoire des sciences*, 45-1 (1992), p. 51–68.

[2009] L'Œuvre algébrique de Charles François Sturm, dans Pont (Jean-Claude), dir., *Collected Works of Charles François Sturm*, Bâle : Birkhauser, 2009, p. 13–24.

Stäckel (Paul)
[1893] Ueber Systeme von Functionen reeller Variabeln, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 112 (1893), p. 141–146.

Sturm (Charles)
[1829] Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques, *Bulletin de Férussac*, 11 (1829), p. 419–422.

[1835] Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires présenté par divers savants étrangers à l'Académie royale des sciences*, 6 (1835), p. 273–318.

[1901] *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, vol. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1901.

SYLVESTER (James Joseph)
[1839] On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory elimination, *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science*, 15 (1839), p. 428–435.
[1853] On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure, *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 1853, p. 407–548.

TANNERY (Jules) & HADAMARD (Jacques)
[1910] *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, vol. 2, Paris : Hermann, 1910.

VANDERMONDE (Alexandre-Théophile)
[1771] Mémoire sur la résolution des équations, *Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les Mémoires de mathématique et de physique*, 1771, p. 365–416.

WEBER (Heinrich)
[1893] Leopold Kronecker, *Mathematische Annalen*, 43-1 (1893), p. 1–25.
[1895] *Lehrbuch der Algebra*, vol. 1, Braunschweig : Vieweg, 1895.
[1898] *Traité d'algèbre supérieure*, Paris : Gauthier-Villars, 1898.

WEIERSTRASS (Karl)
[1881] *Cours du semestre d'hiver 1880–1881, Theorie der elliptischen Functionen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1881 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/61734`.
[1882a] *Cours du semestre d'hiver 1881–1882, Theorie der Abelschen Functionen. Theil 1*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1882 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/62265`.
[1882b] *Cours du semestre d'hiver 1881–1882, Theorie der Abelschen Functionen. Theil 2*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1882 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/62796`.
[1883] *Cours du semestre d'hiver 1882–1883, Theorie der analytischen Functionen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1883 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/39821`.

Revue d'histoire des mathématiques
25 (2019), p. 109–194

A PLURALITY OF (NON)VISUALIZATIONS: BRANCH POINTS AND BRANCH CURVES AT THE TURN OF THE 19TH CENTURY

Michael Friedman

Abstract. — This article deals with the different ways branch points and branch curves were visualized at the turn of the 19th century. On the one hand, for branch points of complex curves one finds an abundance of visualization techniques employed. German mathematicians such as Felix Klein or Walther von Dyck were the main promoters of these numerous forms of visualization, which appeared either as two-dimensional illustrations or three-dimensional material models. This plurality of visualization techniques, however, also resulted in inadequate images that aimed to show the varied ways branch points could possibly be represented. For branch (and ramification) curves of complex surfaces, on the other hand, there were hardly any representations. When the Italian school of algebraic geometry studied branch curves systematically only partial illustrations can be seen, and branch curves were generally made "invisible". The plurality of visualizations shifted into various forms of non-visualization. This can be seen in the different ways visualization techniques disappeared.

Texte reçu le 9 novembre 2017, accepté le 16 juillet 2018, révisé le 15 août 2018.

M. Friedman, Humboldt University, Cluster of Excellence *Matters of Activity. Image Space Material*, Sophienstr. 22a, Berlin 10178, Germany.
Courrier électronique : michael.friedman@hu-berlin.de

2000 Mathematics Subject Classification : 01A55, 01A60, 14–03, 14H30, 14J99.

Key words and phrases : Visualization techniques, their disappearance, three-dimensional models, branch point, branch curve, ramification curve, algebraic geometry.

Mots clefs. — Techniques de visualisation et leur disparition, modèles tridimensionnels, point de branchement, courbe de branchement et courbe de ramification, géométrie algébrique.

Research for this paper was funded by the Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG, German Research Foundation) under Germany's Excellence Strategy - EXC 2015/1.

RÉSUMÉ (Une diversité de visualisations et non-visualisations : points de branchement et courbes de ramification autour de 1900.)

L'article traite des différentes façons de visualiser les points et les courbes de branchement autour de 1900. De nombreuses techniques de visualisation ont été employées pour les points de branchement de courbes complexes. Des mathématiciens allemands comme Felix Klein ou Walther von Dyck ont été les principaux promoteurs de cette multitude de visualisations, que ce soit sous la forme d'illustrations ou de modèles matériels tridimensionnels. Cependant, cette pluralité de techniques a également été à l'origine d'images inadéquates visant à montrer les diverses manières possibles de représenter des points de branchement. Pour les courbes de branchement (et de ramification) de surfaces complexes, il est difficile de trouver une visualisation. Lorsque les courbes de branchement ont été systématiquement étudiées par l'école italienne de géométrie algébrique, seules des illustrations partielles ont pu être trouvées, et les courbes de branchement ont été généralement rendues « invisibles ». La pluralité des visualisations s'est transformée en une pluralité de non-visualisations, dont témoignent différents modes de disparition des techniques de visualisation.

INTRODUCTION

Ever since Bernhard Riemann (1826–1866) introduced the now well known *Riemann surfaces* in his 1851 doctoral dissertation on complex function theory, as the covering of the complex line (or of the projective complex line) for multi-valued analytic functions in a complex region, attempts have been made to visualize these coverings—and especially their branch points. The question concerning how to visualize these functions was also dealt with before Riemann's introduction of curves as covering: a complex valued curve $y = f(x)$ is embedded in a four dimensional space $\mathbb{C}^2$; every point (x_0, y_0), when $x_0, y_0 \in \mathbb{C}$ such that $y_0 = f(x_0)$ can be represented then in a four-dimensional real space $\mathbb{R}^4$ via a quadruple $(\mathrm{Re}(x_0), \mathrm{Im}(x_0), \mathrm{Re}(y_0), \mathrm{Im}(y_0))$. Hence visualizing these complex points (x_0, y_0) as a drawing on paper (by drawing for example only the *real* points in $\mathbb{R}^2$, i.e., the points for which $\mathrm{Im}(x_0) = \mathrm{Im}(y_0) = 0$) or as model in a three-dimensional space (by constructing models of surfaces whose points are either $(\mathrm{Re}(x_0), \mathrm{Im}(x_0), \mathrm{Im}(y_0))$ or $(\mathrm{Re}(x_0), \mathrm{Im}(x_0), \mathrm{Re}(y_0))$ would always risk being insufficient from a mathematical as well as from a visual point of view.[1] Notwithstanding this insufficiency, Riemann's con-

[1] To recall: for a given complex number $c = a + bi$, (where $i = \sqrt{-1}$), $\mathrm{Re}(c) = a$, $\mathrm{Im}(c) = b$.

cept of the complex curve as a covering, as I will show, prompted a variety of visualizations.

The present article deals with the various visualizations of a special phenomenon arising when considering these curves as covering of the complex line. To give an example, consider the function $y^2 = x - 1$ and its projection to the x-axis:

$$p : \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = x - 1\} \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto x.$$

Generically, every point $x' \in \mathbb{C}$ has two different preimages (x', y_1), $(x', y_2) \in \mathbb{C}^2$ such that $(y_1)^2 = x' - 1$ and $(y_2)^2 = x' - 1$. However, for $x' = 1$, the number of the preimages is less than two (explicitly, there is only one preimage: $(1, 0)$). One might say that when considering the points $x'' \in \mathbb{C}$ which are close to $x' = 1$, the two preimages of x'' "come together," or "coincide" into one point when x'' approaches x'. Considering only *smooth* functions, these points, whose number of preimages is lower than the expected one, are called *branch points*;[2] while the points on the curve, for which few of the preimages "come together," are called—in current terminology—*ramification points.* However, as the terminology regarding these points was not standardized in the 19th century, they were also usually referred to as branch points ("Verzweigungspunkte" or "Windungspunkte" in German), a usage I will follow. It should also be noted that when n preimages "come together," one says that the branch point is of order $n - 1$.

The same phenomenon may also happen when considering complex surfaces as a cover of the complex plane $\mathbb{C}^2$, when in this situation, the collection of branch points is in fact a complex curve in $\mathbb{C}^2$, called the *branch curve* of the complex surface (when considered as a covering).[3] The question that this paper would like to answer concerns the nature of the various visualizations of branch points and branch curves during the 19th and the 20th century. More precisely, the paper, concentrat-

---

2 In fact, the map p can be any surjective holomorphic map between a Riemann surface and the projective complex line (using current terminology).

3 And the corresponding curve on the surface is called in current terminology *ramification curve* (see Section II). The explicit computation of branch curves (and also of branch points) can be easily done—from a computational point of view—, at least when one deals with projections. For example, given a cubic surface: $f(z) = z^3 - 3az + b$, where a and b are homogeneous forms in (x, y, w) of degrees 2 and 3 respectively, and the projection is given by $(x, y, w, z) \to (x, y, w)$. In these coordinates, the ramification curve is given by the intersection of the surface and its derivative with respect to z, i.e., of $f = 0$ and $df/dz = 0 = z^2 - a = 0$ and the branch curve B is therefore given by $b^2 - 4a^3 = 0$, being a curve of degree 6.

ing on the years between 1874 and 1929, aims to show in Section I that while for *branch points* (of finite order)—either on the complex line or on the curve—there was an abundance of visualizations or a plurality of visual interpretations, for *branch curves*, the situation, as I will examine in Section II, was actually quite the opposite: while for branch points the different three-dimensional models and two-dimensional illustrations were at times epistemological and stimulated further research, for branch curves, similar illustrations—in the cases when they even existed—were mostly considered technically;[4] visualization techniques were ignored or considered unnecessary. It is here where one notices a shift in the mathematical practice of visualization: from a plurality of such techniques to either a rejection of them or partial visualization of an "auxiliary machinery," not, however, of the object itself. In some cases, this "auxiliary machinery" eventually became the object of research itself. In most cases, however, as will be elaborated in the concluding Section III, one can see that the plurality of visualizations was replaced by a plurality of non-visualizations, prompted by different modes of disappearance.

1. BRANCH POINTS: EPISTEMOLOGICAL VISUALIZATIONS

In this first section, I will deal with what may be thought of as a counter position to the situation concerning the visualization of branch curves, a topic that will be dealt with in the second section. This section will aim to show how branch points of complex curves were usually thought of during the second half of the 19th century as what could (and should) be visualized. This does not mean that all of the attempts at visualizing them

---

[4] With these distinctions I follow throughout this article Hans-Jörg Rheinberger's differentiation between epistemic and technical objects. According to Rheinberger "epistemic objects [...] present themselves in a characteristic, irreducible vagueness. This vagueness is inevitable because, paradoxically, epistemic things embody what one does not yet know." [Rheinberger 1997, p. 28] These objects, their purpose, or the field of research that they open and the questions that they may propose are not yet defined or not yet canonically categorized. This is exactly what makes them into an epistemological object, as they are in the process of becoming "well-defined" or "stable." But "in contrast to epistemic objects, [...] experimental conditions"—and technical objects, as Rheinberger later adds—"tend to be characteristically determined within the given standards of purity and precision. [...] they restrict and constrain" the scientific objects [Rheinberger 1997, p. 29]. But while it seems that there is a clear distinction between the not yet defined epistemological object and the clearly defined technical one, Rheinberger immediately adds "The difference between experimental conditions and epistemic things, therefore, is functional rather than structural." [Rheinberger 1997, p. 30]

were considered successful, satisfactory or even accepted by the entire mathematical community. What I aim to show, by contrast, is how these attempts were directed at illustrating and showing what branch points *looked like*. Given that the research on the history of Riemann surfaces is vast, a full-blown examination of how branch points were visualized during this period and afterwards is beyond the scope of this paper.[5] Thus, for example, I will not deal with Hermann Weyl's influential book *Die Idee der Riemannschen Fläche* [Weyl 1913]. Rather I will examine a few different examples, especially from the last quarter of the 19th century and the first quarter of the 20th century, which indicate that the research of branch points of Riemann surfaces was coupled not only with analytical investigation within the domain of function theory, or with algebraic calculations, but also with visual practices.

1.1. *1850–1865: Puiseux, Riemann and Neumann*

A year before Riemann's presentation of his dissertation, Victor Puiseux (1820–1883) in 1850 published his manuscript *Recherches sur les fonctions algébriques*, dealing with complex functions defined by an equation $f(u,z) = 0$. Puiseux, one might say, viewed complex curves as a covering of the complex line $\mathbb{C}$, which would be defined, as noted above, using contemporary notation, as follows:

$$\mathrm{pr} : \{(u,z) \in \mathbb{C}^2 : f(u,z) = 0\} \to \mathbb{C}, (u,z) \mapsto z.$$

Assuming that for the function $f(u,z)$ the degree of z is p, given a complex point z_0 on the z-axis, Puiseux asks what would happen to the p solutions of the equation $f(u,z_0) = 0$, that is, to the points in the set $\mathrm{pr}^{-1}(z_0) = u_1(z_0), \ldots, u_p(z_0)$, when the point z_0 moves along a closed path, which avoids passing through points z' for which two or more values $u_i(z')$ coincide (recall that the z axis is the complex line $\mathbb{C}$, which is topo-

5 On the development of the concept of the n-dimensional manifold beginning from the 1850s with Riemann and his concept of covering, see e.g., [Scholz 1980; 1999] The topic concerning the various visualizations of Riemann surfaces (and not necessarily their branch points), starting from the second half of the 19th century, also deserves a more elaborate discussion than that presented here, one which would also take into account their digital visualization.

For an extensive survey of Riemann's work and the responses to it, see [Gray 2015, p. 153–194]; see also [Bottazzini & Gray 2013, p. 259–341] for a similar discussion, also containing other figures of branch points, similar to what is shown in this paper; Bottazzini and Gray show that Gustav Holzmüller in his 1882 book *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen* [Holzmüller 1882, p. 271] and Felice Casorati with his sketches of Riemann surfaces in 1864 also drew figures of different visualizations of branch points [Neuenschwander 1998, p. 23].

logically a two-dimensional real space). Puiseux is explicitly interested in the following situation: "Let A be a point for which the p roots of the equation $f(u, z) = 0$ become equal."[6] [Puiseux 1850, p. 385] He initially looks at what happens on the z-axis: first denotes by a the z-value of the point A, that is $pr(A) = a$. Taking C, a point on the z-axis being close to a, he "draws" an infinitesimal loop called "$CLMC$" (see fig. 1.(I)), encircling the point a, beginning and ending at a point C.[7] Finally he examines, moving the z coordinate along this loop (beginning and ending at C), what happens to the solutions $u_1, \ldots, u_p$ of the equation $f(u, z) = 0$. As Puiseux describes, after one time encircling along this loop, the values $u_1, u_2, \ldots, u_p$ are permuted *cyclically* to $u_2, \ldots, u_p, u_1$ [Puiseux 1850, p. 387–388].

For Puiseux the way to understand this phenomenon was mainly by way of analytical reasoning, though he did refer to drawings. While Puiseux calculates algebraically what happens to the values $u_1, u_2, \ldots, u_p$ when the point z moves along the "contour fermé," the figures of this loop and of other loops that Puiseux refers to support his reasoning, although they are not essential to the argument. While one may suggest that for Puiseux, the way to understand the transformation and permutations of the points $u_1, u_2, \ldots, u_p$ was also enabled by means of a visualization of the system of loops, the drawing of the loops is extremely technical. This is to be seen with two other articles: the first, in another paper of Puiseux from 1851 "Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques," which contains only a single drawing [Puiseux 1851, p. 230]. Although the paper is a continuation of the 1850 paper and often refers to it, the almost total lack of figures shows that for the simple case of cyclic permutation, a depiction of what a loop is actually unnecessary. The second indication of the marginality of these illustrations is to be noticed with the 1861 German translation of Puiseux's 1850 paper: "Untersuchungen über die algebraischen Functionen," which Hermann Fischer made [Puiseux 1861]. In contrast to Puiseux where the figures in the 1850 paper are to be found on a separate sheet, Fischer combines the figures adjacent to the text. Not underestimating this relocation of the figures, which certainly helped the reader to *see* what is meant directly, Figure 9 of the 1850 Puiseux's paper

6 "Soit maintenant A un point pour lequel p racines de l'équation $f(u, z) = 0$ deviennent égales." Later Puiseux [1850, p. 385–386] notes that this condition is equivalent to the vanishing of derivatives $d^i f / du^i$, for $i = 1, \ldots, p - 1$ at the point A, when $d^p f / du^p(A)$ is not equal to 0.

7 "Décrivons autour de ce point $[a]$ un contour fermé de dimensions infiniment petites CLMC, fig 9." [Puiseux 1850, p. 385]

was omitted. This was the figure that showed the basic loop encircling the branch point on the (complex) line. [8]

That said, during the investigation of the behavior of the preimages Puiseux neither distanced himself from any form of illustration nor did he attempt to dissuade the reader from visualizing certain aspects of this behavior. While investigating this behavior for curves with double point or with triple point, Puiseux analyzed loops, which—when deformed—either go around the image of the singular point or encircle it. Here the reference to the figures is essential, in order to understand the deformation of the loop and correspondingly, how the preimages of the curve change (see Fig. 1.(II), (III)) and how the preimages behave while encircling a singular point. Indeed, when investigating the case of a double point, where locally the degree of the curve is 2, as Puiseux explicitly notes, "Figures 18, 19 and 20 *show us* how [...] the points U_1 and U_2 [the preimages] are changed, while the loop CLMC, while being deformed, has to cross the point A [the image of the singular point]." [9] [Puiseux 1850, p. 423] In this case, Puiseux points the reader to the immediacy of the transmitted knowledge enabled by the figures.

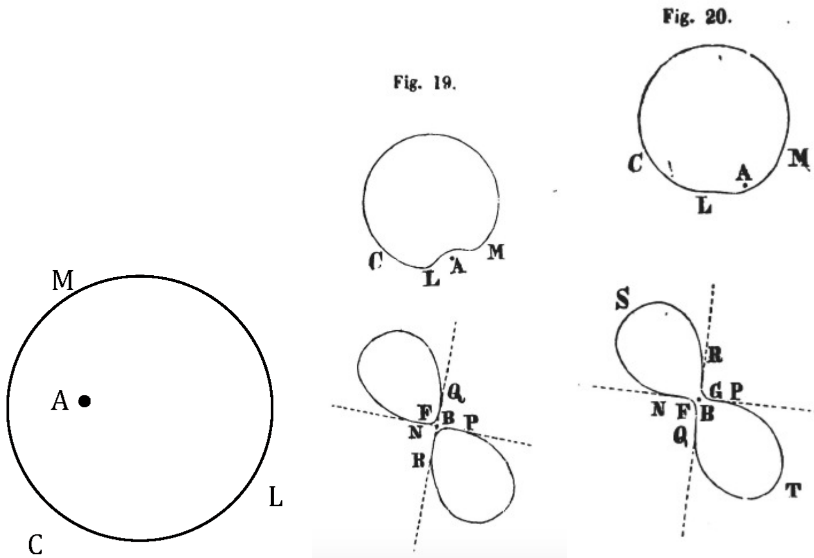
Although he may seem to follow a similar reasoning, when turning to Riemann we can see how the role of visualization (and also of the senses) was given greater emphasis. This is apparent in his writings and in his lectures notes. In his 1851 dissertation, Riemann starts with the following definition of a surface as a covering: "For the following treatment we permit x, y to vary only over a finite region. The position of the point 0 is no longer considered as being in the plane A [i.e., on the complex line], but in a surface T spread out over the plane. We choose this wording since it is inoffensive to speak of one surface lying on another, to leave open the possibility that the position of 0 can extend more than once [mehrfach erstrecke] over a given part of the plane [...]." [10] [Riemann 1851, p. 7]

8 Although it is clear from the numeration of the figures in the 1861 translation that Figure 9 should have been added.

9 "Les Fig. 18, 19 et 20 montrent comment se modifient [...] les points U_1 et U_2, lorsque le contour *CLMC*, en se déformant, vient à franchir le point A." The German translation is as follows: "Aus den Figuren 18, 19 und 20 ist *sofort ersichtlich*, welche Modificationen die von den Punkten U_1, U_2 beschriebenen Curven erleiden, wenn die Curve *CLMC* bei der Verschiebung den Punkt A überschreitet."[Puiseux 1861, p. 65–66] The key expression is "*sofort ersichtlich*"—"immediately apparent".

10 "Für die folgenden Betrachtungen beschranken wir die Veränderlichkeit der Grössen x, y auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes 0 nicht mehr die Ebene A selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche T betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der es unanstössig sein wird, von auf einander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes 0

Riemann implicitly suggests the imagining of the surface through the use of visual metaphor: “a surface T spread out over the plane [...] more than once.” The question that then logically arises is how this surface behaves



(I) (II) (III)

FIGURE 1. (I): Depiction of Puiseux’s *CLMC* loop, encircling the branch point A [Puiseux 1850, Planche I, fig. 9].[11] (II), (III): Puiseux’s depiction of a deformation of a loop which originally went through A, being the image of the double (singular) point B [Puiseux 1861, p. 65, 66].[12]

at a neighborhood of a branch point. In his 1851 dissertation Riemann calls these points “turning points [Windungspunkte]” [Riemann 1851, p. 8], and his description is similar to Puiseux’s: when a point on a plane A (i.e., on the complex line $\mathbb{C}$)[13] moves around (“umkreisen”) the branch point, a permutation (“Anordnung”) of the values of the surface occurs. Riemann asks the reader to fix a distinctive image in his mind by drawing

über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke [...].” Translation taken from: [Baker et al. 2004, p. 4].

11 Drawing by M.F.

12 The figures are taken from [Puiseux 1861], as one can hardly recognize the deformation of the curve in the figures found in [Puiseux 1850, Planche I].

13 Or on the projective complex line $\mathbb{CP}^1$.

certain figures: when he describes the permutation of the values, he first indicates that in order to "fix *ideas* [Zur Fixierung der *Vorstellung*], *draw a circle* of radius R around the point 0 in the plane A and draw a diameter parallel to the x-axis [...]." [Riemann 1851, p. 26] [14] In 1857 he calls this point a branch point: "Verzweigungspunkte," using explicitly visual metaphors, indicating that the different parts of the function in the neighborhood of a branch point are called "branches [*Zweige*]". [15] He then defines a simple branch point and a branch point of multiplicity $\mu + 1$:

> A point of the surface T at which only two branches are connected, so that one branch continues into the other and vice versa around this point, is called a *simple branch point* [*einfacher Verzweigungspunkt*].
>
> A point of the surface around which it winds $\mu+1$ times can then be regarded as the equivalent of μ coincident (or infinitely near) simple branch points. [16] [Riemann 1857, p. 110]

Although Riemann drew neither a single sketch nor a single drawing of branch points *in his published papers* (either on the complex line or on the surface itself), one can discover a few drawings of the local behavior of the sheets of a Riemann surface in a neighborhood of a branch point in the lecture series "Theorie der Functionen complexer Variabeln". At the end of the summer semester of 1861 when these lectures were coming to a close, Riemann dealt with "multivalued functions" ["Mehrwerthige Functionen"] [Neuenschwander 1996]. Riemann considers these as a surface T covering the z-plane, and first defines the branch point on the complex line z as "a point around which one sheet continues into

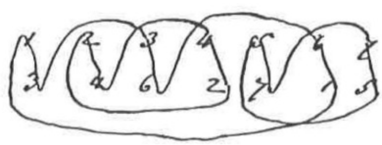
---

14 "Zur Fixirung der Vorstellungen denke man sich um den Punkt 0 in der Ebene A mit dem Halbmesser R einen Kreis beschrieben und parallel mit der x-Axe einen Durchmesser gezogen [...]." Translation taken from: [Baker et al. 2004, p. 23] (Cursive by M.F.).

15 [Baker et al. 2004, p. 80–81]: "[...] the different prolongations of a given function in a given region of the z-plane will be called *branches* of the original function and a point around which one branch continues into another a *branch-point* of the function." ([Riemann 1857, p. 90]: " [...] sollen die verschiedenen Fortsetzungen *einer* Function für denselben Theil der z-Ebene *Zweige* dieser Function genannt werden und ein Punkt, um welchen sich ein Zweig einer Function in einen andern fortsetzt, eine *Verzweigungsstelle* dieser Function.")

16 "Ein Punkt der Fläche T, in welchem nur zwei Zweige einer Function zusammenhängen, so dass sich um diesen Punkt der erste in den zweiten und dieser in jenen fortsetzt, heisse ein *einfacher Verzweigungspunkt*. Ein Punkt der Fläche, um welchen sie sich $(\mu+1)$ mal windet, kann dann angesehen werden als μ zusammengefallene (oder unendlich nahe) einfache Verzweigungspunkte." Translation taken from: [Baker et al. 2004, p. 101].

another is called a branch value of the function"[17] [Neuenschwander 1996, p. 74]. He then goes on to describe the neighborhood of a branch point on the surface using a visual metaphor: "In the neighborhood of such a point, the surface T can be regarded as a screw surface of infinitely small height of the screw thread, the axis of which is perpendicular to the z-plane at that point."[18] [Neuenschwander 1996, p. 74] Riemann then considers a surface (covering) of degree n, and looks at the n preimages $w_1, \ldots, w_n$ of the variable z when this variable runs through a closed curve, which encircle *several* branch points in the z-plane (but which does not go through them). [Neuenschwander 1996, p. 75] Indicating that the permutation can be decomposed into a composition of cyclic permutation, Riemann's aim is to describe the permutation of these preimages—each of which corresponds to a specific branch point. He accompanies this explanation with *two* drawings: "Let for example the initial sequence of the roots $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7$, which changes, as a result of returning to the starting point of a closed path on the z-plane, to the following sequence: $w_3, w_4, w_6, w_2, w_7, w_1, w_5$. Thereupon one has, following the diagram [Schema],



the permutation cycle:

$$\begin{array}{ccc|cc|cc} w_1 & w_3 & w_6 & w_2 & w_4 & w_5 & w_7 \\ w_3 & w_6 & w_1 & w_4 & w_2 & w_7 & w_5 \end{array}$$

Each cycle is distinct from the others and indicates a *special branch point.*" [Neuenschwander 1996, p. 75–76] To explicate what is meant, Riemann draws the following figure (see Figure 2) in his lecture:[19] As can be seen here Riemann associated *diagrammatic* visualization (of the interchanging of the sheets, see Figure 2) with a *symbolic* illustration of the permutation

[17] "Ein Punkt, um welchen sich ein Blatt in ein anderes fortsetzt heißt ein Verzweigungswert der Function."

[18] "In der Umgebung eines solchen Punktes kann die Fläche T als eine Schraubenfläche von unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges betrachtet werden, deren Axe in jenem Punkte senkrecht zur z-Ebene steht."

[19] As can be seen from Neuenschwander's transcription [Neuenschwander 1996, p. 76], not all students in Riemann's course found it necessary to draw this image in their notebooks. However, Neuenschwander notes that "such representations [of Riemann surfaces] later became very widespread" [Neuenschwander 1998, p. 23].

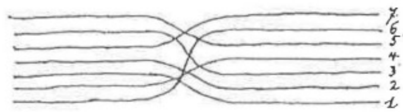
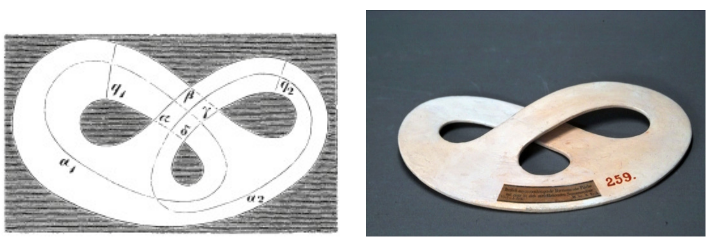


FIGURE 2. Riemann's drawing of seven strings, depicting, "geometrically speaking," "the order of the indices [...] how the layers [Blätter] of the surface T are intertwined with each other [ineinander übergehen]." [Neuenschwander 1996, p. 76]

cycle; contrary to Puiseux, diagrams have the same status as symbolic notation.

It is worth emphasizing that apart from Riemann's lecture notes and those of his students, he also drew figures to illustrate certain concepts in numerous of his papers. Riemann drew, for example, the double- and triply-connected surfaces—illustrations, according to which three dimensional models were prepared [see Figure 3.(I); Riemann 1857, p. 96].



(I) (II)

FIGURE 3. (I) Riemann's depiction of triply connected Riemann surface. The aim of these drawings is, according to Riemann, to make n-connected Riemann surfaces more "anschaulich" [Riemann 1857, p. 95]. (II) Material model of a triply connected Riemann surface. © 2019 Model collection of the Mathematical Institute, Göttingen University. The model was constructed in ca. 1888, and was mentioned in the 4th edition of Brill's catalogue *Catalog mathematischer Modelle* [Brill 1888, p. 36], where the author refers explicitly to Riemann's 1857 drawing. In addition, it is noted that "these models with thin walls are made of more durable material than plaster, in order to prevent accidental breakage."[20] [Brill 1888, p. 36]

20 "Diese Modelle mit dünnen Wandungen sind aus dauerhafterem Material als Gips hergestellt, um ein Zerbrechen bei zufälligem Auffallen zu verhüten."

What role did visualization play for Riemann? It is first useful to remember that in his 1854 talk *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* Riemann used the term *Mannigfaltigkeit* [manifold] in connection with 'magnitude'. He did this when he stated that he set himself "the task of constructing the notion of a multiply extended magnitude" [Riemann 1854, p. 273]—invoking various motivations when first using the term. When talking about continuous manifolds, the intuitions Riemann provides for choosing the term "Mannigfaltigkeit" are related to the positions of sensuous objects and colors:

> [...] occasions which give rise to notions whose measurement involves the consideration of continuous manifolds are so rarely encountered in everyday life that the location of material objects perceived through the senses, and colors [die Orte der Sinnengegenstände und die Farben], are perhaps the only simple examples of concepts whose modes of determination [Bestimmungsweisen] constitute a multi-dimensional manifold [Baker et al. 2004, p. 274, Riemann 1854, p. 258].

What Riemann meant by manifolds of color is clearly influenced by the philosopher Johann Friedrich Herbart.[21] Taking the concept of color, each particular color is a mode of determination [Bestimmungsweisen] of the general concept of color [Ferreirós 2007, p. 63], the totality of which forms a manifold. Therefore, as a colored point changes in the manifold of color, it does so continuously and "different colored points are thereby determined." [Banks 2013, p. 23] These references to colors as well as to objects of the senses already show a favorable attitude toward the role of visualization, as what is perceived through the sense of sight.

Secondly, it is in this context that Riemann sees his new conception of the concept "function" as what may also be regarded as "geometric investiture" ["geometrische Einkleidung"]—a means of "visualization" ["Zur Veranschaulichung"] [Riemann 1851, p. 40]. Needless to say, Puiseux in no way attempted to use such metaphors.[22] Riemann also mentions the "*anschauliche* meaning" of the principal curvatures of a surface [Riemann 1854, p. 281] or the "spatial *Anschauung*," respectively the "geometric in-

---

21 "Herbart proposes a more or less psychological explanation of continuity, which emerges from the 'graded fusion' [abgestufte Verschmelzung] of some of our mental images [...]. His preferred examples were those of the [...] colors, which produce a triangle with blue, red and yellow at the vertices, and mixed colors in between." [Ferreirós 2007, p. 46]; See also: [Scholz 1982].

22 Note that Riemann did refer to Puiseux in his early lectures of functions of several variables [Neuenschwander 1996, p. 12]. Hence there was certainly a shift towards a more visual thinking, when comparing Riemann to Puiseux.

terpretation" of the Gaußian complex plane [Neuenschwander 1996, p. 5, Riemann 1851, p. 22]. Detlef Laugwitz notes that Riemann's treatment of branch points and branch cuts was done by means of a "visualization [of] the two leaves [Blätter], [which] penetrate along the branch cut". [Laugwitz 1996, p. 99] This is obviously noticeable when considering how Riemann visualized several branch points of the surface together (see Figure 2), pointing towards the way symbolic thinking (with the permutation group) and visual thinking are intertwined. The fact that Riemann had a favorable view regarding visualization and employing visual means and metaphors (such as "leaves" or "branches") to transfer his ideas was also noticed later, at the end of the 19th as well at the beginning of the 20th century. In 1886, Weierstraß criticizes Riemann's image of an n-layered Riemann surface as a "means of sensualisation" ["Versinnlichungsmittel"], which cannot be transferred to the case of functions with several variables [Weierstraß 1988, p. 144]. In 1925, Hermann Weyl indicates that Riemann used multi-layered Riemann surfaces for the "illustration of the multiple values of analytical functions" ["Veranschaulichung der Vieldeutigkeit analytischer Funktionen"] [Weyl 1988, p. 18].

However, it is also essential to emphasize that Riemann was also interested in the numerical relations between the different invariants of the curve. In his 1857 paper "Theorie der Abel'schen Functionen," Riemann notes that $2\,(p-1) = w - 2n$, where n is the degree of a covering $S \to \mathbb{CP}^1$, w the number of simple branch points, and p is the genus of the surface S [Riemann 1857, p. 114]. Zeuthen, Hurwitz, Chasles, Cayley, Brill and others gave proofs and generalizations of this numerical approach. The most well known generalization is the Riemann-Hurwitz formula for any covering of a Riemann surface $f : S \to T$,

$$2g - 2 = n \cdot (2g' - 2) + \sum_p (e_p - 1),$$

where g is the genus of S, g' is the genus of T, n the degree of f, and e_p the multiplicity of the branch point p. As we will see later at Section I.4, for Hurwitz these numerical relations were connected with algebraic reasoning, and not necessarily with visual reasoning.

* * *

It must be noted, however, that drawings of the *real part* of complex curves $f(x, y) = 0$ existed long before Riemann considered these curves as (branched) covering the complex line $\mathbb{C}$ or the projective line $\mathbb{CP}^1$—

such drawings were prompted by the introduction of analytic geometry.[23] These drawings also included drawings of *singular* curves in the real plane, and hence also of their singularities (nodes, cusps etc.). The problem was that once these curves were considered as Riemann surfaces, although the behavior of complex functions in the neighborhood of branch points (and hence also of singular points) became well understood from an analytical point of view, the two-dimensional drawings and three-dimensional material models that were made during the second half of the 19th century indicated that what was missing was a visualization of branch points as points of the Riemann surfaces, in addition to a clear depiction of a *neighborhood* of them.

It was Carl Gottfried Neumann (1832–1925), a German mathematician, known for his work on integral and differential equations and for his contributions to electromagnetism, who introduced, in his 1865 book *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale* a plurality of two-dimensional illustrations of branch points of Riemann surfaces, as well as of their neighborhood. As I will show in the later sections below, these figures were subsequently redrawn in different textbooks and manuscripts, and in addition, few three-dimensional models followed Neumann's two-dimensional figures while being constructed.

Neumann begins his book by indicating that the new theory of abelian and elliptical integrals is in somewhat of a poor state; however, this "grievance" can be resolved once "the new ways of *Anschauung* [neue Anschauungsweise]" of Riemann surfaces are taken into account. As we will see momentarily, these new "ways of *Anschauung*" are done with new methods of visualization.[24] Nevertheless, it also must be noted that this approach was not restricted to Riemann surfaces. Neumann explicitly notes that: "There are other parts of the mathematical science on which this way of *Anschauung* [jene Anschauungsweise] will probably have no less powerful effect." [Neumann 1865, p. iv] Thus, for example, Neumann mentions the Gauss plane of the complex numbers as what may enable not only the "obtaining [of] an *anschauliche* idea [Vorstellung]" of a pair of complex number, but also "to sensualize [versinnlichen] all pairs of values through it." [Neumann 1865, p. 45]. A similar expression appears later. When discussing an integral between two points, Neumann notes

23 Although these drawings were not necessarily thought of in terms of drawing a real part of a *complex curve*.

24 Indeed, Neumann calls for developing exactly these "new methods" [Neumann 1865, p. iv].

that one can "obtain an *anschauliches* image [Bild], when one is assisted with certain geometric ideas" [Neumann 1865, p. 63].[25]

If one considers how branch points were visualized, Neumann points not only towards new visualization techniques, but also towards the material construction of mathematical objects. Explicitly, chapter five of Neumann's book deals exactly with the new ways of visualizing branch points, among other objects. Neumann presents in this chapter several illustrations, which depict branch points. One of them, being an illustration of a simple branch point, points towards the construction of a material model. Still using Riemann's old coinage for the branch point, i.e., "Windungspunct" (and not "Verzweigungspunkt"), Neumann notes:[26]

> We shall [...] be able to obtain a restricted branched surface [Windungsfläche] by superimposing two flat circular surfaces (Fig. 34) [see Figure 4.(I)], slitting them along two superimposed radii, and then stitching together the opposite edges of the upper and lower slits namely the edge α with β' and β with α' [Neumann 1865, p. 165–166].

The point C, obtained via this cut and stitch process (see Figure 4.(I)), is the branch point. Here one cannot say that the "cut and stitch process" is simply a metaphor, since it clearly directs the reader to perform these material actions in order to "sensualize" the researched mathematical object. That said, the process of stitching does not have to be exact: Neumann then notes that the curve connecting the two edges should not be necessarily a straight line—it is in fact "inessential" that it would be straight—but rather the connecting curve can have an "arbitrary form [Gestalt]" [Neumann 1865, p. 166]. The illustration in Figure 4.(I) is therefore not exact and does not aim to be so; this is also clear from the fact that the Riemann surface does not intersect itself (although it might be so implied, when constructing the model materially; compare Section I.3, Figure 6).

Immediately after this section, Neumann suggests another way to visualize the behavior of the different sheets in the neighborhood of a branch point: this is done by sketching a circular loop on the Riemann surface, encircling the branch point on it [Neumann 1865, p. 167–168]. The loop obtained illustrates a path on the different sheets, describing their relation

25 "[Man kann] ein anschauliches Bild verschaffen, wenn man gewisse geometrische Vorstellungen zu Hülfe nimmt."

26 "Wir würden [...] eine solche begrenzte Windungsfläche auch dadurch erhalten können, dass wir zwei ebene Kreisflächen (Fig. 34) übereinanderlegen, dieselben längs zweier über einanderliegenden Radien aufschlitzen, und sodann die entgegengesetzt liegenden Ränder des oberen und des unteren Schlitzes mit einander zusammenheften, nämlich den Rand α mit β' und β mit α'".

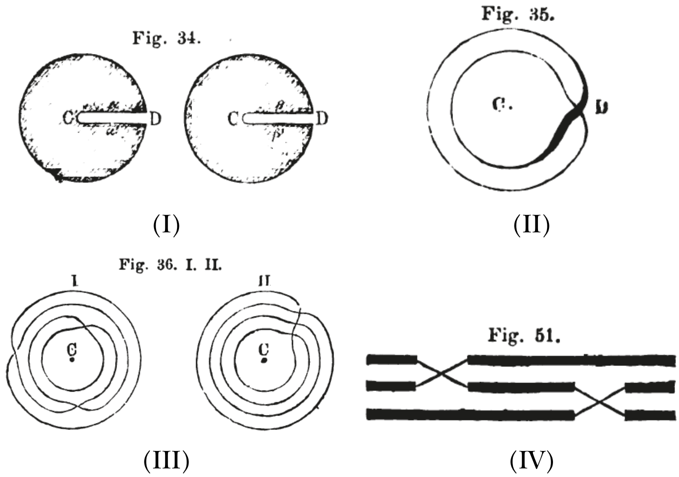


FIGURE 4. Three of Neumann's suggestions for visualizing branch points and their neighborhoods: (I): stitching together two circles to depict a simple branch point [Neumann 1865, p. 166]. (II), (III): Sketch a loop on the Riemann surface, encircling a simple branch point and two branch points of order 3 [Neumann 1865, p. 167, 168]. (IV): A section of a Riemann surface in the neighborhood of two branch points [Neumann 1865, p. 199].

to the branch point. While Figure 4.(II) describes this loop encircling a simple branch point, corresponding to Figure 4.(I), Figure 4.(III) depicts the behavior of the sheets in the neighborhood of two different branch points of order 3; producing a material model of these two types would be more problematic from a material point of view, and Neumann indeed does not even suggest it.

An even more simplified representation is later suggested by Neumann—indeed, he notes explicitly that the surfaces are "represented [dargestellt]" by these new figures [Neumann 1865, p. 198]. These figures represent the behavior of the sheets in a neighborhood of branch points, as can be seen in Figure 4.(IV) (compare Riemann's drawing in Figure 2). In this Figure Neumann draws a (plane) section of the Riemann surface of the function $\sqrt[3]{\frac{z-A}{z-B}}$ in the neighborhood of the two branch points A and B [Neumann 1865, p. 199]. One could say that Neumann draws a braid here. This method of presenting a section of a neighborhood of a branch point as a braid we already saw in Riemann's lectures and will be seen again in the works of Francesco Severi and Federigo Enriques, among other mathematicians, in the 20th century (see Section I.5). However, already here it is important to note that Neumann emphasizes that this depiction is not exact: the fact, that "the lines [in Figure 4.(IV)] are straight and lie one over the other is non essential."[27] [Neumann 1865]

1.2. *Klein and the new type of Riemann surfaces*

Despite the many new ways Neumann visualized branch points, these also indicated a need for more exact visual aids. What is clear, however, is that Neumann's approach towards visualization was more explicit than Riemann's and more sympathetic than Puiseux's. Neumann's attitude is clearly expressed in his attempts to "sensualize" the new *anschauliche* methods. This is done either by means of diagrams or materially, through cutting and gluing pieces of paper. Yet Neumann also emphasized that these new methods may be inaccurate—or to be more exact, that their accuracy of representation is not essential. This resulted in the above necessity, which is especially apparent in a series of papers Felix Klein wrote on Riemann surfaces, their singularities and their dual curves written between 1874 and 1876.[28] Klein notes at the beginning of his 1874 paper "Über eine neue Art der Riemannschen Flächen":[29]

> In the investigation of the algebraic functions y of a variable x, two different *illustrative aids* [*anschauungsmäßiger Hilfsmittel*] are employed. One represents either y and x uniformly as the coordinates of a point of the plane, where the real values of the plane alone are represented, and the image [das Bild] of the algebraic function becomes the algebraic curve; or that one spreads the complex values of the variable x over a plane [i.e., $\mathbb{C}$] and denotes the functional relations between y and x by the Riemann surface constructed over the plane. It must be desirable in many respects to have a transition between these two *illustrative images* [*Anschauungsbildern*] [Klein 1874, p. 558].

Presenting the two methods of visualizing algebraic functions: either considering only the real part of the complex curve in $\mathbb{R}^2$, or considering

---

27 "Dass diese Linien gerade über einander liegen, ist unwesentlich."

28 See: [Parshall & Rowe 1994, pp. 168–169].

29 "Bei der Untersuchung der algebraischen Funktionen y einer Veränderlichen x pflegt man sich zweier verschiedener *anschauungsmäßiger Hilfsmittel* zu bedienen. Man repräsentiert nämlich entweder y und x gleichmäßig als Koordinaten eines Punktes der Ebene, wo dann die reellen Werte derselben allein in Evidenz treten und das Bild der algebraischen Funktion die algebraische Kurve wird—oder man breitet die komplexen Werte der einen Variabeln x über eine Ebene aus und bezeichnet das Funktionsverhältnis zwischen y und x durch die über der Ebene konstruierte Riemannsche Fläche. Es muß in vielen Beziehungen wünschenswert sein, zwischen den beiden *Anschauungsbildern* einen Übergang zu besitzen.“ (Cursive by M.F.)

the surface embedded in a three-dimensional space obtained from considering x as a complex variable in the $\mathbb{C}$ (having two coordinates) and the real values of y—Klein finds both unsatisfying. The first is only an image ("Bild") of the real part of the function—hence incomplete; the second, though being a complete image ("ein vollständiges Bild" [Klein 1874, p. 559]), does not represent singularities (such as nodes) well, likewise neither inflection points nor branch points. The problem was therefore to give a satisfying "Anschauungsbild," that would account for the unique structure of the curve, and hence, for its branch points.

Klein's solution was to investigate, together with the given curve, another curve: the dual curve in the projective complex plane. The dual curve, whose points correspond to the set of lines tangent to the original curve C, is obtained by sending each point to the point dual to its tangent line.[30] Most of Klein's drawings did not consider the visualization of branch points and singular points as points on a Riemann surface, but rather followed Plücker's investigation of the connections between the invariants of algebraic curves to the corresponding invariants of their dual curves; specifically, Klein aimed also towards "visualizing [Veranschaulichung]" these relations [Klein 1876, p. 404]. However, at the end of his 1874 paper a sketch is given of how a branch point of a singular curve of the third degree looks like: "one awards to the [Riemann] surface an [...] outgoing branching [...], as illustrated [in Figure 5], for example, in a symmetrical manner, by the drawing."[31] [Klein 1874, p. 566]

However, from the sketch alone it is not clear how the different branches "interact" with each other or how one may pass from one branch to the other. Although the different directions of the drawn diagonal lines on each layer refer to different visual perceptions (or even to different haptic sensations, as if touching a similar engraved surface would transmit the difference between the layers), Klein in no way elaborates on this. This problematic, of how actually the different branches "behave," is only dealt with visually in the 1880s.

1.3. *Material models and the coloring of branch points*

Several years later, Klein's ideas were taken a step further. It is essential to note that the drawings in Klein's series of papers from 1874–1876 were not the only suggestion that he made for visualizing Riemann surfaces. At

30 Note that the dual curve $C^\vee$ is a curve in the dual projective space $(\mathbb{CP}^2)^\vee$.

31 "[...] man [erteilt] der Fläche eine [...] ausgehende Verzweigung [...], wie sie etwa, in symmetrischer Weise, durch die beigesetzte Zeichnung veranschaulicht ist."

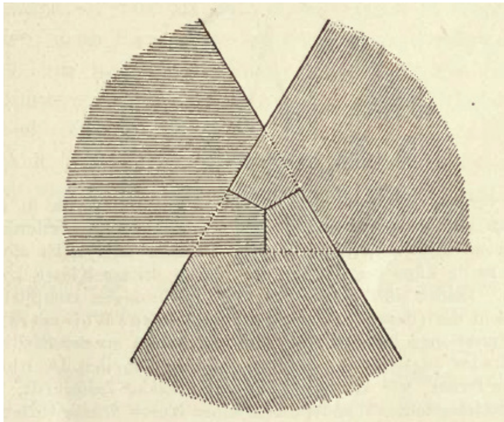


FIGURE 5. Klein's visualization of an order 2 branch point [Klein 1874, p. 566]. Compare Figure 6.

the end of this section and also in Section I.4, I will discuss Klein's other visualizations. One should also note that Klein's paper "Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen," appearing four years after his 1874 paper, points to a *three*-dimensional model made by the mathematician Walther von Dyck (1856–1934) in order to visualize a Riemann surface; this was done while investigating the simple group of 168 elements [Klein 1879, p. 132, footnote 29].[32] In this article Klein also declares that his goal is to "design the most *anschauliches* image [Bild] of the branching of the Riemann surface" [Klein 1879, p. 91].[33] To emphasize: in Neumann's figures (see Figure 4 in this present article) as well as in Klein's figure (see Figure 5), the neighborhood of the branch point (of the discussed Riemann surface) is visualized via *two*-dimensional images ["Bild"] of (the real part of) a Riemann surface, which is embedded in a three-dimensional space. One may ask, and it is something I will address later (see Section I.6), what Klein precisely means by "the most *anschauliches* image," when several models are given. Dyck's three-dimensional model indicates that it is with the popularization and spread of the material models of mathematical objects in Germany during the last quarter of the 19th

32 For a drawing of this model, see: [Gray 1982, p. 65]. The Riemann surface is now known as the Klein's quartic (having the equation $x^3y + y^3z + z^3x = 0$), and the group is the automorphism group of this curve.

33 "[...] ein möglichst anschauliches Bild von der Verzweigung der Riemannschen Fläche zu entwerfen."

century that new methods of visualizing branch points were promoted, as already noted above.

The tradition of manufacturing models of mathematical objects (from plaster, wood, cardboard, strings etc.), which began in France from the second quarter of the 19th century, became abundant in Germany starting from the 1860s. [34] Several leading mathematicians—such as Klein, Alexander Brill and Dyck—supported and advocated the dissemination of such models, even if the entirety of the mathematical community in Germany did not support this *anschauliche* geometry. The aim of these models, as was the vision of Klein and Brill, was the transmission of mathematical knowledge visually as well as materially (and certainly not only symbolically). In that sense, the material models were epistemological, as they prompted the emergence of new knowledge. [35] This transmission—not via formulas, or via the proof of theorems—was considered not only as a legitimate activity, but also as what offers a complementary view concerning the mathematical object. [36] The influence on the research was clear, at least for Brill and Klein. Thus, for example, Klein remarked in 1872 that: "For geometry a model—be it realized and observed or only vividly imagined—is not a means to an end but the thing itself" [37] [Klein 1872,

34 A famous example is the various models from plaster of the cubic surface with the 27 real lines on it, made by, among others, Christian Wiener and Adolf Weiler. See: [Rowe 2013; Tobies 2017]. For recent studies on material mathematical models during the end of the 19th century, see e.g.,: [Mehrtens 2004; Rowe 2017; Sattelmacher 2013; Schubring 2017].

35 See: [Mehrtens 2004, p. 289–291] regarding models as "epistemic things". See also: [Sattelmacher 2013].

36 The clearest indication to that is the relatively high number of mathematical exhibitions, aimed either to scientists or also to the general public. These exhibitions took place during 1876 and 1925 in London, Munich, Chicago, Heidelberg and Edinburgh, among other places. In the German exhibitions especially, there was a greater emphasis on the situation of the then contemporary mathematics and making such mathematics visual and haptic. This occurred precisely during the period when mathematical objects were beginning to be considered in a more non-visual way. A key moment was the 1893 exhibition in Munich, as well as the later exhibition in Chicago in the same year. See: [Hashagen 2015; 2003, p. 425–436].

37 "Ein Modell—mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein—ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke sondern die Sache selbst." Translation taken from [Mehrtens 2004, p. 289]. Mehrtens notes that with this remark, Klein distances himself from the strict abstract nature of his program. Moreover, Klein also emphasizes the pedagogical role of material models, as they serve the visualization of mathematical objects ("Die Anschauung hat für ihn [den mathematischen Inhalt] nur den Werth der Veranschaulichung, der allerdings in pädagogischer Beziehung sehr hoch anzuschlagen ist. Ein geometrisches Modell z. B. ist auf diesem Standpuncte sehr lehrreich und interessant. " [Klein 1872, p. 42])

p. 42]. At the end of the 1880s Brill notes the success of this tradition, essentially contributing to research on mathematical objects. Indeed, he claimed in 1887: "Often the model prompted conversely subsequent, retroactive investigations regarding the peculiarities of the presented form" [38] [Brill 1887, p. 77]. Klein was one of the supporters of the material model tradition in particular and of visualization in general. In a lecture given in Chicago in 1893, he notes that "mathematical models and courses in drawing are calculated to disarm [...] the hostility directed against the excessive abstractness of university instruction [in mathematics]" [Klein 1911, p. 109]. Two years later, in the lecture "Über Arithmetisierung der Mathematik" given on the 2 November 1895, Klein notes that for him, while—as noted above—one should look for the most "*anschauliches* Bild," namely models as well as two-dimensional drawings, this *Anschauung* is twofold: both cultivated (with the help and influence "of logical deduction") and "naive *Anschauung*, largely a natural gift, which is unconsciously increased by minute study of one branch or other of the science." Moreover, Klein maintains "that mathematical *Anschauung*—so understood—is always far in advance of logical reasoning and covers a wider field" [Klein 1896, p. 246]. Hinting towards the connection between the mathematical *Anschauung* and models and drawing, Klein adds: "Modern psychologists distinguish between visual, motor and auditory characteristics; mathematical *Anschauung* [...] appears to belong more closely to the first two classes [...]" [Klein 1896, p. 247]. It is no coincidence that Klein relates the visual and the haptic (i.e., the "motor") to the mathematical *Anschauung*. Indeed, in 1892, Walther von Dyck asked the physicist Ludwig Boltzmann, the editor of the catalogue of the exhibition *mathematisch-physikalischer Apparate, Modelle und Instrumente*, to write a contribution entitled "Über die Methoden der theoretischen Physik". Klein was heavily involved in the preparation of this exhibition, and wrote the opening article in the catalog, called "Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen" [Klein 1892]. In the same part of the catalogue, where Klein's paper appears, Boltzmann describes in his contribution that material mathematical models served "to make the results of our calculation perceptible [anschaulich zu machen] and that not merely by the imagination [Phantasie], but visible to the eye and at the same time palpable to the touch by means of gypsum and cardboard" [Boltzmann

38 "Öfter veranlasste umgekehrt das Modell nachträgliche Untersuchungen über Besonderheiten des dargestellten Gebildes."

1892, p. 90; translation taken from: Boltzmann 1915, pp. 201–202].[39] What is evident in Boltzmann's 1892 conception—which, as I claim, Klein follows—is his differentiation between the senses: the seeing eye versus the touching hand. When a merger supposedly occurs, or at least an agreement, this happens between two senses with the help of the material model and the drawing.

Given this background, it is not at all surprising to find also material, three-dimensional models of branch points of Riemann surfaces; and indeed, two types of material models appeared starting from the middle of 1880s,[40] and both were presented during the 1893 exhibition in Munich and later in the catalogue of the exhibition. The exhibition took place during the third annual meeting of the German Mathematical Society (*Deutsche Mathematiker-Vereinigung*) organized by Dyck, which consisted mostly of mathematical models.

The first model (see Figure 6) might be considered as a three-dimensional realization of a Riemann surface in the neighborhood of a branch point of order 2, as Neumann depicted in Figure 4.(I) (for a simple branch point) and as Klein depicted in Figure 5. The model, described in the fourth edition of Brill's *Catalog of mathematical models* [Brill 1888, p. 48] and in Dyck's catalogue as one of three models of different Riemann surfaces, is described simply as a model of a "*three-leaves simply connected Riemann surface*, which has at its center a branch point of the second order."[41] [Dyck 1892, p. 176] Comparing it to the two-dimensional image that Klein drew, this three-dimensional model is a better visualization of what the Riemann surface looks like. The arrows drawn on this model also help to understand visually what happens on the surface, in terms of monodromy, when the Riemann surface is considered as a covering of the complex line; the arrows show the movement of the different points on the surface, while—when taking into account Puiseux's ideas—considering the preimages moving along a small loop (on the complex line) encircling the point 0 being the branch point. This model, though it is not known exactly when it was made, shows visually what Puiseux described algebraically.

---

39 "[…] die Resultate des Calcüls anschaulich zu machen und zwar nicht blos für die Phantasie, sondern auch sichtbar für das Auge, greifbar für die Hand, mit Gips und Pappe."

40 It is essential to emphasize that the earliest catalog of mathematical models, which lists the models discussed in this section, is Brill's 1888 catalog. Brill's catalog of mathematical models from 1885 [Brill 1885] does not present these models.

41 "Modell einer *dreiblättrigen einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche*, welche in ihren Innern einen Windungspunkt *zweiter* Ordnung enthält."

FIGURE 6. A model of a branch point of second order on a Riemann surface, preserved in the Göttingen Collection of Mathematical Models and Instruments (compare with Figure 2). A similar model of a branch point of first order on a Riemann surface was also produced. © 2019 Model collection of the Mathematical Institute, Göttingen University.

Nevertheless, this model might have been as problematic: an untrained student might have thought, seeing the model, that the Riemann surface intersects itself, which is not at all the case. The problem with this visualization stems, as noted above, from the attempt to visualize a complex curve in $\mathbb{C}^2$ as an object in a three-dimensional space $\mathbb{R}^3$. Whereas it might be thought that the curve intersects itself when only looking at the model, this confusion actually stems from ignoring the different colors drawn on the model. The "self intersection" is only due to the fact that for a complex curve, given by the equation $f(x, y) = 0$ (when $x, y \in \mathbb{C}$) only a three-dimensional section is (and can be) presented, i.e., of the points $(\mathrm{Re}(x), \mathrm{Im}(x), \mathrm{Re}(y))$. This mode of presentation causes points, which only differ in their $\mathrm{Im}(y)$-values, to coincide in the three-dimensional model. The way to show that these points are actually different was to color the model: in the neighborhood of the "intersection line" there are different colorings, i.e., black lines are drawn on one layer, in order to differentiate it from the second "intersecting" layer, which is white. This is done in order to make it visually clear that these layers do not really intersect, and the method shows that coloring the model had a unique function of its own: to designate the fourth coordinate.

The second model presented at Dyck's 1893 exhibition, which was already produced in 1886 under the guidance of Dyck in Munich at the *Technische Hochschule*, is somewhat more surprising. Under the heading "16 models for presenting of functions of complex variables," the description in Dyck's catalog begins with addressing the above-mentioned difficulty:[42]

> The present series of models was developed following an introductory lecture on function theory. The difficulty of a *visual description* [*anschaulichen Schilderung*] of the behavior of a function in the neighborhood of singular points led to the desire, to have also in this field, and at least for the most important singular points, the means of *spatial intuition* [*räumlicher Anschauung*], which has proven itself during teaching so appropriate and favorable in a number of other fields.
>
> In order to *visualize by a spatial representation* [um ... durch eine *räumliche Darstellung zu veranschaulichen*] the behavior of a function of a complex variable in the neighborhood of certain singular points, and also the whole behavior of certain types of functions of a complex variable, both the real and the imaginary part of the value of the function are considered as being a coordinate above the plane of the complex argument. Thus, every function of a complex argument is represented by two surfaces, which are denoted by R and I, the simultaneous consideration of which gives an *image* [*Bild*] of the behavior of the function [Dyck 1892, p. 176].

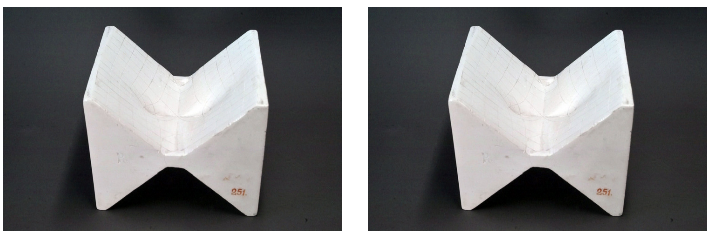
The goal of the models was to present visually and materially—in a more precise way than the depiction in Figures 1 or 2—the way complex functions behave in the neighborhood of branch points. Indeed, while Dyck notes explicitly that he is interested in the visualization of the neighborhood of "singular points," several of the functions, which are investigated, are not singular (e.g., the function $w^2 = z^2 - 1$) but rather

---

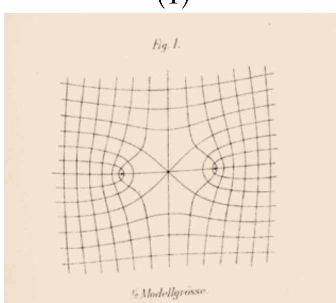
42 "Die vorliegende Serie von Modellen ist entstanden im Anschluss an eine einleitend Vorlesung über Functionentheorie. Die Schwierigkeit einer möglichst anschaulichen Schilderung des Verhaltens einer Function in der Umgebung singulärer Stellen liess den Wunsch aufkommen, auch auf diesem Gebiete und wenigstens für die wichtigsten singulären Vorkommnisse das Hilfsmittel räumlicher Anschauung zu besitzen, das schon auf einer Reihe anderer Gebiete so zweckmässig und fördernd im Unterricht sich erwiesen hat.

Um den Verlauf einer Function einer complexen Veränderlichen in der Umgebung gewisser singulärer Stellen und ebenso den Gesamtverlauf gewisser Typen von Functionen einer complexen Veränderlichen durch eine *räumliche Darstellung zu veranschaulichen*, sind in der bekannten Weise sowohl der reelle als auch der imaginäre Teil der Functionswerte über der Ebene des complexen Argumentes als Ordinaten aufgetragen. So wird jede Function eines complexen Argumentes durch zwei mit R und I bezeichnete Flächen versinnlicht, deren gleichzeitige Betrachtung ein *Bild* des Functionsverlaufes liefert." (cursive by M.F.) An almost identical text appears in Brill's 1888 *Catalog mathematischer Modelle*, when describing these models [Brill 1888, pp. 48–49]: models 173–182 are described as "16 Models for the representation of functions of a complex variable. Executed under the direction of Prof. Dr. Walther Dyck." ("16 Modelle zur Darstellung von Functionen einer complexen Veränderlichen. Ausgeführt unter Leitung von Prof. Dr. *Walther Dyck.*"). The passage that follows is identical to the second passage in the above citation.

have branch points when considered as a covering. Comparing this to Klein remarks in 1874, that the three-dimensional surface is a complete image (“ein vollständiges Bild”), it seems that Dyck rather urged that the consideration of *two complementary* images, or models, were needed. Given a complex function $f(w, z) = 0$, Dyck guided his students to construct two models, while considering w as a complex variable on the plane: the first, by considering the values $(\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w), \mathrm{Re}(z))$ as a three-dimensional surface (denoted by R in the above citation); the second, considering the values $(\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w), \mathrm{Im}(z))$ as a second three-dimensional surface (denoted by I in the above citation). Thus, *two* three-dimensional models are presented for several functions. For example, the two models for the function $w^2 = z^2 - 1$ are presented in Figure 7.(1), where the branch points are located above $z = 1$ and $z = -1$.



(1)



(2)

FIGURE 7. (1) The two models, produced by A. Wildbrett under the guidance of Dyck [Brill 1888, p. 49], of the surface $w^2 = z^2 - 1$, as preserved in Göttingen. Left: the real (R) part of the surface $w^2 = z^2 - 1$; right: the imaginary (I) part of the surface $w^2 = z^2 - 1$. © 2019 Model collection of the Mathematical Institute, Göttingen University. (2) The “orthogonal system” of the surface $w^2 = z^2 - 1$, apparently belongs to the real part, which was used to construct the two models [Dyck 1886, p. plate 1, Figure 1].

Indeed, these models are more surprising. Not only are they an alternative to Klein's proposals regarding the visualizations of Riemann surfaces (with the dual curve), but they also show the limits of the visualization of Riemann surfaces. Klein already noted the two common methods to visualize complex curves (drawing only their real part or producing the material model, i.e., the surface R in the above modeling) are insufficient. The above method attempts to fix this insufficiency, but it does so only by highlighting the fact that the complex curve defined by the equation $f(w,z) = 0$ in fact naturally "lives in" $\mathbb{C}^2$, that is, in a four-dimensional real space. Every one of the two models R and I are hence only partial models of the curve. The question thus rises—what in fact the visual relations between the two models and the curve itself are? What are the relations between these models and the (drawing of the) real part of this curve (i.e., when one considers the hyperbola $w^2 = z^2 - 1$ as a curve on the real plane)? And what is the role of the solid, plaster model, when it is clear that only the points lying *on* the surface are points that satisfy the equation of the (real or imaginary part of the) surface? While the analytical relations are clear, the models themselves need an elaborate explanation to enable a "transition" between them as Klein suggested, in order that they will actually serve the goals that the *anschauliche* geometry posited.

Indeed, while Dyck (or one of his students) writes in a manuscript that documents these models, that they should "sensualize [versinnlichen] the behavior in the multi-valued function in the neighborhood of a branching point"[43] [Dyck 1886, p. 4] the explanation that follows concentrates on the analytical description of the surfaces. As Dyck describes, for the surface $w^2 = z^2 - 1$, substituting $w = u + iv$, $z = x + iy$ in the equation and separating the real and the imaginary part of w, one obtains the surfaces R and I as two real surfaces (in a three-dimensional real space) of the 4th degree:[44]

$$(R.) \quad u^4 - (x^2 - y^2 - 1)u^2 - x^2y^2 = 0$$
$$(I.) \quad v^4 + (x^2 - y^2 - 1)v^2 - x^2y^2 = 0$$

As the manuals concisely describe, in order to construct these models an "orthogonal system" had to be drawn as a two-dimensional figure, taking

43 "[...] das Verhalten in der mehrwertigen Function in der Umgebung eines Verzweigungspunkts versinnlichen."

44 Moreover, as Gerd Fischer notes, the individual sheets of the real and the imaginary part of the models were indicated by coloring. However, these colorations have not survived into the 21st century, as can be seen in Figure 4. See [Fischer 1986b, p. 78]. See also: [Fischer 1986a, photos 123, 124, p. 120–121].

$u = constant$ and $v = constant$, and obtaining a series of curves which may be considered as level curves [Fischer 1986a]. An example for this system is presented in Figure 7.(2), where the branch points are the points, which in their neighborhood the squares of the orthogonal system become increasingly smaller.

To sum up this section, it is worth noting that in 1897 Klein himself presented another drawing of branch points, this time referring implicitly, via a two-dimensional drawing, to the three-dimensional model of the branch point (see Figure 6). In the first volume of the book *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen,* written by Klein and Robert Fricke, the authors sketch "inner branch points [innere Verzweigungspunkte]" [Fricke & Klein 1897, p. 372] (see Fig. 8). As can be seen from the drawing, from the inner point a line exits, one side of it is darkened, the other side is bright. This not only depicts another way of visualizing branch points, but also that the gradual darkening used differentiates between the different values around the branch point, and that the supposed self-intersection does not take place in the four-dimensional space.

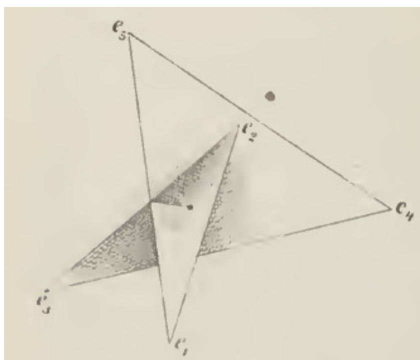


FIGURE 8. Different coloring in the neighborhood of a branch point (to be seen at the center of the image); Cf. the colored model in Figure 6.

These various illustrations and models[45] already indicate a plurality of two- and three-dimensional practices of visualization. I will discuss the epistemological implications of this plurality later (see Section I.6), but one may already ask what the implications of such plurality were. I claim that one possible implication might be a turn towards an approach being less

45 The same models and almost identical descriptions also appear in subsequent catalogs, see: [Schilling 1903, p. 119–120]; [Schilling 1911, p. 159].

visually polymorphic, i.e., an algebraic-symbolical approach, as can be seen with Adolf Hurwitz.

1.4. *Hurwitz and the shift to the algebraic approach*

Not every German mathematician during the 1890s who investigated branch points thought their visualization necessary, either materially or with a drawing. This is seen with Adolf Hurwitz's 1891 paper "Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten". The goal of the paper was "to investigate the totality of the n leafed Riemann surfaces, which are branched in a prescribed manner at w points,"[46] [Hurwitz 1891, p. 2] and one of the questions Hurwitz would like to answer is what is the number N of "n-leafed" Riemann surfaces (that is, of degree n), which are branched along the given w branch points.

It is already clear from the references Hurwitz mentions that he was well aware of the traditions mentioned above regarding the visualization of Riemann surfaces in general, and of branch points in particular. For example, Hurwitz refers at the beginning of his paper to Klein's article "Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" [?]. In this article Klein used a new approach "to illustrate the intimate connection between the genus p of a surface and the number of crossing points that arise from the flows on it." [Parshall & Rowe 1994, p. 179] Inspired from potential theory, current flows on surfaces and Maxwell's *Treatise on Electricity and Magnetism*,[47] Klein presented new visualizations related to Riemann surfaces by means of numerous figures and sketches of

---

46 "Die Gesammtheit der n blättrigen Riemann'schen Flächen zu untersuchen, welche an w gegebenen Stellen in vorgeschriebener Weise verzweigt sind". I follow here also the analysis given in [Epple 1999, p. 186–192].

47 It is worth noting that Maxwell's concept of "analogy" between the physical phenomena he researched points to and echoes the plurality of visualization techniques and their epistemological role—not only in pure mathematics but also in mathematical physics—as treated thoroughly by Karin Krauthausen. Following Krauthausen [2014], while developing his theories on electricity and magnetism, extending Michael Faraday's work, Maxwell aimed in 1855 at finding a "geometrical *model* of the physical phenomena" [Maxwell 1856, p. 158] (cursive by M.F.), using analogies as a "method of investigation which allows the mind at every step to lay hold of a clear physical conception, without being committed to any theory founded on the physical science." [Maxwell 1856, p. 156] One might argue that Maxwell's conception of the model reflects the plurality of visualization techniques taking place in mathematical research (recall Maxwell's 1874 clay model of the thermodynamic surface [Maxwell 2002, p. 148]), as described in this paper for the case of branch points; however, the influences between mathematical physics and pure mathematics regarding these techniques of modeling and visualization is beyond the scope of the present paper. See however [Epple 2016, p. 15–18].

flows on various Riemann surfaces (see Figure 9) in his article.[48] Hurwitz also refers to a paper by Dyck from 1880, in which the latter offers a visual model of Riemann surfaces: "in so far as our subsequent investigations are essentially guided by Riemann's surface itself, it is first and foremost a question of their *visual [anschauliche] presentation*."[49] [Dyck 1880, p. 477]

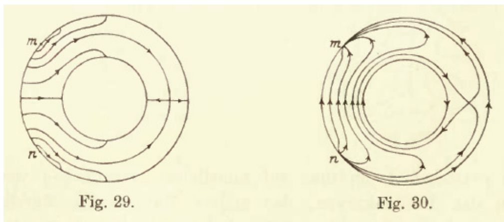


FIGURE 9. Two of Klein's drawings of currents on Riemann surfaces [?, p. 536].

Returning to Hurwitz's paper, how does he approach the problem of counting the number N of Riemann surfaces of degree n branched over w points $a_1, \dots a_w$ lying at a plane E? As Moritz Epple notes [Epple 1999, p. 187], the beginning of Hurwitz's discussion is very similar to Puiseux's treatment. Hurwitz first chooses a point O on the two-dimensional real plane E and then draws non intersecting paths $l_1, \dots, l_w$ from O to $a_1, \dots, a_w$. It is essential to note here that in his paper Hurwitz mentions two other articles that dealt with the question of the construction and representation of Riemann surfaces. The first is Lüroth's "Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche" [Lüroth 1871], which constructs a set of loops in a *certain order* on the complex line (here the plane E), encircling the branch points. The permutations induced from the loops indicate how the Riemann surface is to be constructed. The second is Clebsch's "Zur Theorie der Riemann'schen Flächen" [Clebsch 1872], continuing Lüroth's work by proving that in fact any set of loops can be taken when considering effects on the induced permutations while changing the set of loops. In contrast

48 See: [Parshall & Rowe 1994, p. 177–182] regarding Klein's conception of Riemann surfaces in the above context.

49 "[...] insofern unsere folgenden Untersuchungen wesentlich an der Riemann'schen Flache selbst geführt werden, handelt es sich zuvörderst um deren *anschauliche Darstellung*." Dyck then offers to think a Riemann surface not as a covering of the plane, when the layers are one *over* the other, but rather that the different layers are *side by side*.

to Lüroth, Clebsch draws a figure, which illustrates the change of the loops in this set (see Figure 10).

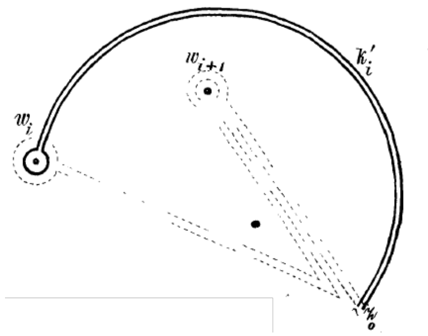


FIGURE 10. Given two branch points w_i and w_{i+1} on the complex line $\mathbb{C}$ and two loops (presented in dashed curves) encircling them, Clebsch [Clebsch 1872, p. 219] draws a new set of loops (k'_i), encircling w_i.

This visualization indicates that Clebsch maintained the position that Riemann surfaces and their construction according to the branch points should be visualized. Hurwitz transformed this point of view into an algebraic investigation.

Following Clebsch's and Lüroth's works, Hurwitz constructed the surface itself: "The Riemann surface is now formed by connecting the n leaves along the cuts $l_1, \dots, l_w$ in the following manner."[50] [Hurwitz 1891, p. 4] Hurwitz does draw several drawings of this system of paths [Hurwitz 1891, p. 34, 36], but as becomes clear, his intention *in this research* is *not* following the tradition of *anschauliche* geometry,[51] which might have led him to visualize the surface itself, but rather follows a more algebraic-combinatorial practice. Indeed, instead of continuing by describing the construction of the Riemann surface visually, Hurwitz expresses the problem using algebraic terms and conditions. For each of the paths $l_1, \dots, l_w$ Hurwitz assigns a permutation: S_i, where $1 \leqslant i \leqslant w$. If $S_i = \begin{pmatrix} 1, & 2, \dots, & n \\ \alpha_1 & \alpha_2, \dots, & \alpha_n \end{pmatrix}$ is the permutation sending 1 to α_1, 2 to α_2 etc., then along the path l_i the leaves numbered $1, \dots, n$ of the Riemann surface are connected to the

50 "Die Riemann'sche Fläche entsteht jetzt, indem man die n Blätter längs der Schnitte $l_1, \dots, l_w$ in folgender Weise mit einander verbindet."

51 In other mathematical investigations, Hurwitz did visualize his geometrical constructions, for example, by folding a paper. See [Oswald 2015].

leaves $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Here Hurwitz expresses the necessary and sufficient conditions for the existence and construction of a Riemann surface in algebraic terms:

> The substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_w$, which are chosen for the construction of the surface, should only satisfy the following two conditions: (I) The transition from any element to any other is to be possible by substitutions. (II) The composition of all substitutions is to give the identity, i.e., $S_1 S_2 \cdots S_w = 1$.[52] [Hurwitz 1891, p. 4]

The first condition forces the group to be transitive, which is equivalent to saying that the surface constructed would be connected. The second condition ensures that while circling the point O (which is not a branch point), the order of the leaves will not be permuted. What is essential to note is that via this algebraic formulation, it becomes irrelevant *where* the branch points $a_1, \ldots, a_w$ are located on the complex line $\mathbb{C}$, and the initial question was "reduced to a purely group theoretic question" [Epple 1999, p. 187]. Therefore Hurwitz has proved that while one can construct the Riemann surface topologically when giving a number of sheets, the position of its branch points, and the permutations describing the number of sheets, can thus only give the algebraic data *equivalently*.

This is clearly to be seen in the way Hurwitz considers a Riemann surface, as an *w-tuple* of permutations: $(S_1, S_2, \ldots, S_w)$, where "obviously, the substitution S_i immediately gives the 'type' of the branching at the point a_i."[53] [Hurwitz 1891, p. 6] How this branch point may be visualized is completely irrelevant, as this aspect is replaced with an algebraic element: a permutation. And to emphasize this point of view, the question whether two Riemann surfaces, symbolized by two w-tuples $(S_1, S_2, \ldots, S_w)$ and $(S'_1, S'_2, \ldots, S'_w)$, are topologically the same, is equivalent to answering the question whether there is a permutation T such that for every i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $S_i = TS'_iT^{-1}$. Moreover, the question concerning the number N is answered via *combinatorial* arguments,[54] and the treatments of

52 "Die Substitutionen $S_1, S_2, \ldots, S_w$, welche man zur Herstellung der Flache wählt, sollen nur folgenden beiden Bedingungen genügen: I) Vermöge der Substitutionen soll ein Uebergang von jedem Element zu jedem andern möglich sein. II) Die Zusammensetzung aller Substitutionen soll die Identität ergeben, es soll also $S_1 S_2 \cdots S_w = 1$ sein."

53 "Offenbar ergiebt die Substitution S_i sofort die 'Art' der Verzweigung in dem Punkte a_i."

54 See for example: [Hurwitz 1891, p. 7–22]. According to [Epple 1999, p. 188–192], the other sections of the paper deal with what may be termed the first mathematical appearance of the braid group and the pure braid group, when considering the move-

Clebsch and Lüroth are re-presented in an algebraic way [Hurwitz 1891, p. 31–34]. Hence a shift clearly occurred: from a visual approach to the branch points towards an algebraic approach, which marginalized the different techniques of visualization. That said, as can be seen from Hurwitz methods, the existing techniques of visualization were unable to offer any solution to the questions he posed.

1.5. *Severi draws a "braid"*

Jumping ahead to the beginning of the 20th century, other visualization techniques appeared. Referencing Neumann's work, these attempted to be simpler than the then current three-dimensional models. In 1908 Francesco Severi's book *Lezioni de geometria algebrica* appeared, which was translated in 1921 to German as *Vorlesungen über Algebraische Geometrie* (see [Guerraggio & Nastasi 2006, p. 104–107]). Severi (1879–1961), one of the leading Italian mathematicians during the first half of the 20th century, specialized in algebraic geometry and the theory of complex functions. Chapter 7 of his book deals with the theme of algebraic functions as analytic functions and Riemann surfaces.

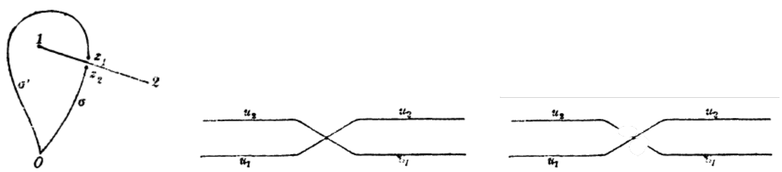
Concerning the behavior of functions in the vicinity of branch points, the first section of this chapter summarizes the research of Puiseux, Riemann, and Hurwitz, among others, and combines the more visual approaches of Puiseux and Riemann and the more algebraic approaches of Hurwitz. On the one hand, Severi draws loops on the complex line $\mathbb{C}$ [Severi 1921, p. 246, 256–257, Severi 1908, p. 198, 205]; on the other, he discusses the ways in which these loops can be presented as additions to other loops, implying their group-theoretical structure. Severi investigates how the permutations that encircle a loop around a branch point on $\mathbb{C}$ are induced, as well as the algebraic consequences (regarding the construction of Riemann surfaces) when choosing another set of loops encircling the branch points,[55] following Clebsch's treatment [Severi 1921, p. 256–258, Severi 1908, p. 205–208]. Severi combines visual and algebraic approaches, but he mainly summarizes the results described above.

Indications of a return to a simpler approach of representing curves and their branch points can be discovered, however, by means of a drawing Severi adds, when he describes—both in the 1908 Italian original and in

ment of the branch points $a_1, \ldots, a_w$ themselves. A discussion on this topic is outside the scope of this section; see however Section II.3.1.(I) below.

55 Severi also draws a sketch of the old and the new set of loops.

the 1921 translation—the construction of Riemann surfaces with the process of gluing two branches, called u_1 and u_2, along their "branch cut" ["taglio," "Verzweigungsschnitt"], i.e., a path on the surface that connects two (simple) branch points called 1 and 2 [Severi 1921, p. 261, Severi 1908, p. 211]. Very similar to Neumann's approach, starting from a loop on the complex line $\mathbb{C}$ encircling the branch point 1, Severi describes that when approaching the point z_1 (resp. z_2) on this loop (see Figure 11.(I)), the two leaves interchange. After depicting what happened on the complex plane, Severi draws a similar illustration to Neumann's. If we consider the loop encircling branch point number 1, the illustration displays how the leaves of the curve itself interchange while going along the loop. Severi notes the following: "[…] the figure [see Figure 11.(II))] […] refers us to […] the cut of two leaves with a plane perpendicular to the cut 1–2 [taglio 1–2]. The fact that the values taken by u on the first sheet can be transfered by continuous variation to the values taken by the function on the second sheet is thus *represented in a concrete way* […]." [56]



(I) (II) (III)

FIGURE 11. (I) A loop around the branch point 1, dissected into two parts; (II) The interchanging of the leaves, presented through a section along the path. [Severi 1921, p. 261, Severi 1908, p. 211] (III) The correct depiction of the interchanging of the two leaves. [57]

56 [Severi 1908, p. 261–262]: "[…] come indica lo schema […], che riferiscesi […] dei due tagli con un piano perpendicolare al taglio 1–2. Il fatto che I valori assunti da u sul 1 foglio possono ricommettersi per variazione continua cui valori assunti dalla funzione stessa sul secondo foglio, viene cosi *rappresentato in modo concreto* […]." (cursive by M.F.). The German translation is the following: "[…] sie [Die Skizze (in Figure 7.(II))] stellt einen Durchschnitt der beiden Blätter mit einer zum Verzweigungsschnitt 1–2 senkrechten Ebene dar. Die Tatsache, daß die Werte welche die Funktion u auf dem ersten Blatt annimmt, durch stetige Veränderung in die Werte übergeführt werden können, welche dieselbe Funktion auf dem zweiten Blatt annimmt, ist somit in konkreter Weise *veranschaulicht*." [Severi 1921, p. 211] That is, the German translation shifts the role of the diagram from the Italian "representation" to "visualization" ("*veranschaulicht*").

57 Figure changed by M.F.

The changing of values is illustrated with Figure 11.(II). Its presentation indicates the approach already presented in Riemann's lecture notes and in Neumann's 1865 book (see Figures 2 and 4.(IV)): this illustration—the representation "in a concrete way"—simplifies how the values change in the neighborhood of the point 1 on the surface, in the sense that the branches are presented as straight lines, creased at a certain point.[58] Also, it is obvious that the two branches *do not* intersect each other—otherwise the surface would be singular and the two branches would intersect at a node on the surface. However, as Severi describes, this is certainly not the case (see Figure 11.(III) for how Severi—and Neumann—should have drawn the two branches).

It is important to note that Severi hardly drew any diagrams or drawings in his book. Most of the drawings appear in the seventh chapter. Indeed, only in this chapter does he note that one can obtain a more concrete and more intuitive ["intuitivo," "anschaulich"] "model" of a Riemann surface of genus p, by thinking of it as a sphere with p handles attached to it [Severi 1921, p. 262, Severi 1908, p. 212]. That is, while Riemann surfaces could have been thought of as having a spatial, *anschaulich* model, other objects of algebraic geometry were considered more abstract, in the sense that a *concrete* model for them was unnecessary and hence a drawing was unnecessary as well. However, Severi's visualization of the behavior of curves at the neighborhood of branch points also appeared in other textbooks, extending his visualization that only applied to simple branch points. For example, Federigo Enriques, in the first volume of his book *Teoria Geometria delle Equazioni e delle funzioni algebriche*, published in 1915, presented Figure 12, indicating that it presents the case for a Riemann surface of degree 5 with a branch point of three leaves. Also here, the simplification may have caused a certain confusion just as in Severi's figure, implying (wrongly) that the various branches cut each other at the neighborhood of a branch point. Looking however at Figure 4.(IV), it is clear that Neumann was aware of this problematic representation since the width of the lines in this figure, connecting the different sheets of the Riemann surface, is narrower. This problematic visualization, seen already with the three-dimensional model of the branch point presented at Figure 6, was solved, among others, by Chisini's novel techniques of visualizing these points in the 1930s, as I will shortly survey in Section III.[59]

58 Compare Figure 4.(II) and also Figure 6, where a circular section of the three-dimensional model would not be composed of straight lines.

59 See also Figure 21 in this paper.

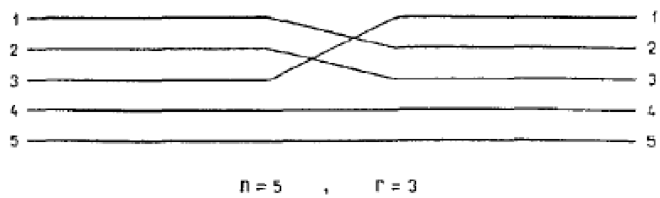


FIGURE 12. Enriques' illustration [1915, p. 361] of a cyclical interchanging of three leaves of a degree 5 Riemann surface.

What Severi's method and Enriques' generalization of it may have pointed to is a future investigation of curves using the techniques of braid theory. However, braid theory was only developed with Emil Artin in his paper "Theorie der Zöpfe" [Artin 1925].[60] Although Hurwitz already implicitly discussed braids (though from another point of view, see [Epple 1999, p. 189–192]), Severi and Enriques, with their explicit sketch—though *without* any algebraic theories resulting from it—did indeed indicate a possible way for future presentations of algebraic curves and their branch points.

1.6. *Visualization of branch points: between abundance and excess*

As was seen above, a plurality of visualization techniques existed for illustrating and rendering haptic and tangible branch points—either on the surface itself or on the complex line, when these surfaces are considered as covering and the complex line is considered as a two-dimensional (real) plane. This plurality of two-dimensional drawings as well as three-dimensional models existed side by side with other mathematical practices, which treated branched covering: the analytical and the algebraic.

That said, the plurality of visual and haptic approaches to the abstract mathematical object encountered resistance. Firstly, as I noted above, Weierstraß doubted the usefulness of Riemann's visualization. And while for Klein the models were considered epistemic things, Herbert Mehrtens remarks that Klein later "interpreted them [the models] as applied mathematics. But by the end of the century mathematicians took the models as imperfect representations of geometrical entities that could be used as an aid in communication about mathematics. The models were not 'evidence' in any sense of the term." [Mehrtens 2004, p. 301] Needless to say, other mathematicians in Germany rejected the appeal to the senses

60 See also [Epple 1999, p. 314–322].

or to the *Anschauung* as what might assist in mathematical understanding or research. Frege, for example, in 1884 claimed "[...] sensations are of absolutely no concern to arithmetic. No more are mental pictures, formed from the amalgamated traces of earlier sense-impressions." [Frege 1884, p. vi] Pasch also rejected the grounding of geometrical knowledge on the senses. As he noted, "after [the axioms of geometry] are established it is no longer necessary to resort to sense perceptions" [Pasch 1882, p. 17]. One may also claim that these objections come on the background of the crisis of the *Anschauung* [Volkert 1986]. Against this retroactive projection of the grand narrative of this crisis, however, it is essential to remember that most of the actors I have surveyed were affirmative and sympathetic towards the "*anschauliche* images" of branch points. It is unnecessary to add that branch points of Riemann surfaces were never thought of as one of the objects prompting this above-mentioned crisis. Hence when looking at the plurality of images as what can be classified under this crisis (either as an implicit initiator or as an outcome) would be an inadequate forcing of this narrative.

It is therefore instructive to examine the views of the individual actors themselves. As we have seen, various mathematicians presented various images of the branch point: various three-dimensional models (von Dyck), colored sketches (Klein), braids (Riemann, Neumann, Severi) or even knotted curves (Neumann). I would like to suggest that these different images of the same mathematical object caused its relativization. This plurality and the relativization it prompted stood in direct contrast to Klein's 1879 request to find "the most *anschauliches* image" of a branch point. Indeed, the problem with the different images of the branch points was that they presented different aspects of these points. For example, what did the different sheets look like around a section near the branch point (e.g., Figure 2) in contrast to how they appear at the neighborhood of this point, including this point itself (see Figure 6). These images did not only present different aspects of the branch point, they also had different functions with respect to how they visualized this point: they either aimed to be *exact*—i.e., represent exactly what the mathematical object was (as with the R and I models of Dyck) and, at the same time, attempt to aid the mathematical inference—, or they were *co-exact*, i.e., allowing manipulation, as with the diagrams of Neumann, Severi and Enriques. In this instance I follow Kenneth Manders' insight regarding exact and co-exact diagrams: while *exact* diagrams are unstable when subject to change (e.g., lengths of line segments, which cannot be varied without affecting the argument), *co-exact* ones are "insensitive to the effects of a range of variation in diagram entries" [Manders 2008,

p. 69] (e.g., inside-outside relations). While Manders treated the case of the Euclidean diagram, it is clear from the discussion above that this treatment can also be applied to other visualizations within other mathematical domains (see also [Larvor 2017]). The point is that several authors stated explicitly that their diagrams were not only capable of manipulation, but also "arbitrary" (e.g., Neumann), or simply did not represent the surfaces (as the straight lines in Severi's and Enriques' diagrams, which ignore the metrical properties). In that sense, this arbitrariness may have prompted a preference for a more algebraic or analytical approach.

This plurality of images—these visualizations—raises the question of epistemological relevance. Apart from the fact that Klein and Brill saw for a certain period of time the three-dimensional models as epistemic things (hence placing the images of branch points under a narrative in which mathematical *Anschauung* advances with the visual and motoric perceptions), the various visualizations of the branch points did not generally speaking result in new discoveries or novel research questions. By contrast they were regarded more as a means of illustrating and transmitting four-dimensional objects to the senses. That being said, there are two exceptions to this general claim: Firstly, Riemann, Neumann, Severi and Enriques presentation of the neighborhood of the branch point as a braid (although never using such terminology) led and prompted Chisini to look at algebraic plane curves (and at branch curves in particular) in terms of a factorization of braids; this resulted in several conjectures and a prospering field of research in Italy between 1930 and 1950 (see Section III). Secondly, one can also note that the inadequate plurality of visualization techniques possible caused a turn towards a more algebraic, non-visual approach (e.g., Hurwitz). To emphasize—Hurwitz was well aware of several of the different visualizations, but his line of investigation, which distances itself from this tradition, prompted new research questions and methods, which were not raised by these visualization techniques. Hence such distancing acted as an epistemic operation.

* * *

Considering a few of the problematic aspects that several of the mathematicians surveyed above encountered, while trying to visualize branch points of complex algebraic curves, it is not surprising that one hardly finds any visualization or drawing of branch *curves* of complex algebraic surfaces, when these surfaces were considered as a covering of the complex plane. The investigations of complex algebraic surfaces, done at the end of the 19th century,[61] showed that the algebraic-topological nature of these surface is much more complicated when compared to the corresponding situation with complex curves. Algebraic complex surfaces are four (real) dimensional objects, embedded in $\mathbb{C}^3$ or $\mathbb{CP}^3$, that is, in a six (real) dimensional space. The set of branch points of these surfaces, as mentioned in the introduction, is therefore not a set of isolated points, but rather an algebraic curve, called the branch curve, which is usually singular.

Without undermining this difficulty, as I will claim in Section II, visualization was not entirely abandoned or conceived of as useless. Although the branch curve itself (or the ramification curve on the surface) was never depicted, sketched or drawn at the turn of the century, visualization techniques were employed in order to make visible *other*, different mathematical machinery that was used to investigate the branch curve.

2. BRANCH CURVES: VISUALIZATION BETWEEN DISAPPEARANCE AND ABSENCE

Turning now to the mathematical research on the branch curve of a complex surface,[62] it is important to emphasize that three-dimensional models of such surfaces did exist, but mostly consisted of a model of the real part of the surface.[63] When considering only the branch curve, however, one notices an absence, resulting from obstacles in the visualization of these objects. One however should mention that the mathematical consideration of branch and ramification curves was initiated long before Riemann's investigation of branch points. Gaspard Monge, who looked at projections of three-dimensional bodies to the plane and considered under the context of tracing shadows of a body. Monge notes in 1785: "The projection of a body's shadow on any surface is therefore the figure

61 For a survey of the work of Castelnuovo and Enriques of algebraic surfaces, see [Gray 1999].

62 Note that I do not deal in this article with *real* branch curves that arise from the consideration of three-dimensional real manifolds as *real* covering of the 3-sphere (branched over a link or a knot), although these branched coverings and their branch curves were certainly visualized. This research also took place at the beginning of the 20th century, with Poul Heegaard, James W. Alexander, G. B. Briggs and Heinrich Tietze among others (see: [Epple 2004, p. 332–336; Stillwell 2012, Epple 1999]). To concentrate on this theme, however, would take us beyond the scope of this section that strictly concerns visualization techniques of *complex* branch curves.

63 That is, if the surface is given by $z = p(x, y)$, then three-dimensional models were representing the surfaces such that the points x, y, and $z = p(x, y)$ were real. A famous example is the model of the cubic surface with the 27 *real* lines on it; complex points of this surface could not have been visualized.

that the extensions of the rays of light tangent to the body's surface end on that surface."[64] He then notes: "In the following operations we will geometrically determine only the projections of the contours of the pure shadows, they are *the only ones* that it is necessary to have exactly in the drawings."[65] (see also Figure 13). The projection of the contour of the pure shadow is—in modern terminology—the branch curve, and Monge adds a figure—the first figure of a branch curve in a mathematical context, and almost surely the last one to explicitly appear during the 19th and the 20th centuries. Étienne Bobillier [1827–1828] found out during the late 1820s that ramification curves are on the intersection of the surface and its polar (see the following subsection),[66] though he did not investigate branch curves, and was not aware of Monge's research on them. It is only with George Salmon that one can find a systematic study of ramification curves, and as a result, of branch curves.

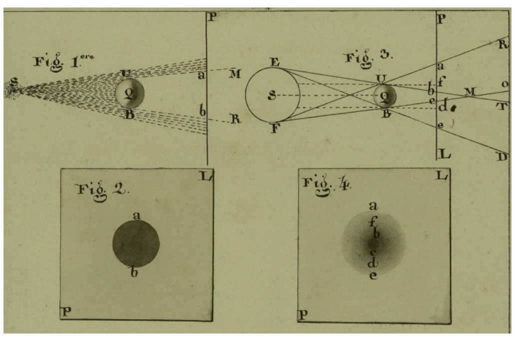


FIGURE 13. From Monge's *Des Ombres*: Figure 1 and 2 describe the illumination of a sphere from a point outside of it. © Collections École polytechnique-Palaiseau.

Since Monge, and later Bobillier, hardly or never considered explicitly branch curves as an object of mathematical investigation (and thus signaled the absence of more complex drawings or sketches of branch curves during the first quarter of the 19th century), I will begin with

64 "La projection de l'ombre d'un corps sur une surface quelconque est donc la figure que terminent sur cette surface les prolongements des rayons de lumière tangents à la surface du corps." [Monge 1847 [1785], p. 27].

65 "Dans les opérations suivantes nous ne déterminerons géométriquement que les projections des contours des ombres pures, *ce sont les seules* qu'il soit nécessaire d'avoir exactement dans les dessins [...]" [Monge 1847 [1785], p. 29].

66 On the work of Bobillier, see: [Haubrichs dos Santos 2015]. Bobillier however did coin the term "polar surface" [Bobillier 1827–1828, p. 181], which Salmon later used.

Salmon and his systematic investigation. This section will therefore survey the oscillation in visualization techniques between illustrating only the local behavior of the curve,[67] sketching other mathematical instruments or ignoring completely the possibility of visualizing any of the two options above. This ignorance may be termed "making invisible," an expression I will discuss more thoroughly later (see Section III). I begin with the third option, where the ignorance can be seen in one of the influential manuscripts written on surfaces in three-dimensional space: George Salmon's 1862 book *A treatise on the analytic geometry of three dimensions.*

2.1. *Salmon: The (almost) complete absence of illustrations*

George Salmon (1819–1904) was an Irish mathematician and theologian. He worked in the field of algebraic geometry for two decades, and then devoted the rest of his life to theology. Known especially today for his joint research, together with Cayley, on the 27 lines of the cubic surface,[68] his name and research, as Row Gow mentions, "would scarcely attract any attention among mathematicians so many years after his death if his reputation was based only on his research papers. [...] Salmon's lasting fame lies in the influence exerted by four textbooks he wrote. These were: *A Treatise on Conic Sections*; *A Treatise on the Higher Plane Curves*; *Lessons Introductory to the Modern Higher Algebra*; *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions.*" [Gow 1997, p. 38][69]

How did these influential books treat surfaces and their branch curves? In order to understand Salmon's approach, it is instructive to take a step back and look at his approach to complex curves and their branch points. Salmon treats these subjects in his 1852 book *A Treatise on the Higher Plane Curves*, but from an entirely different point of view when compared to Riemann and Puiseux.

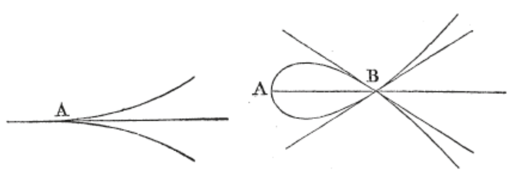
For Salmon, a plane curve, denoted by U, is represented by an algebraic equation as follows: "The general equation of the n-th degree between two variables may be written: $A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 + \cdots + Px^n + Qx^{n-1}y + \cdots + Rxy^{n-1} + Sy^n = 0$". [Salmon 1852, p. 18] Salmon does supply several drawings of what *singular* points look like; see Figure 14.(I) for illus-

67 At the neighborhood of its singular points, for example.

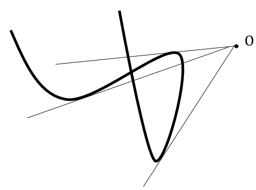
68 Salmon however was not involved in the preparation of the various models of the cubic surface and its lines.

69 See also [Gow 1997] for a summary of Salmon's mathematical work. See also: [Flood 2006, p. 208–209].

tration of a node and of a cusp.[70] However, illustrations of branch points are lacking. When reading how Salmon treats curves, it is also clear why. Salmon treated branch points on the curve only when considering a projection, similar to Puiseux and Riemann. But while the latter authors explicitly considered the curve (as covering) by taking into account the projection on the (complex) x-axis and drawing loops on it, investigating then the resulting permutations, Salmon's point of view was different. Salmon was interested in two types of projections: a projection from a point O on a curve, and a projection from a point O not on a curve (see Figure 14.(II)). However, Salmon uses neither the term "covering" nor the term "projection". Taking the context of Salmon's investigation into account, branch points *on the curve* would be, when considering the methods of Puiseux and Riemann, the points for which the lines exiting from O are tangent to the curve (see Figure 14.(II), when the point O is *not* located on the curve). While Puiseux and Riemann considered this point of view only implicitly, *starting* from an investigation of a neighborhood of the branch point on the complex line, Salmon concentrated on the branch points on the curve, seen as tangency points, *starting* with an investigation of a curve and the lines exiting from a point O and not on it. Since Salmon did not even consider the concept of the branches of a curve in the Riemannian sense or according to the theory of complex functions (Puiseux), the branch point for him was only a tangency point of a line exiting from a point O to the curve C. Hence, there was, one might say, nothing to visualize.



(I)



(II)

FIGURE 14. (I) Salmon's drawings of singular points: cusps (left) and a node (right). [Salmon 1852, p. 30] (II) a possible visualization of Salmon's conception of branch points on the curve.[71]

70 A *node* is locally as the point *(0,0)* of the curve $(y-x)(y+x) = 0$; a *cusp* is locally as the point *(0,0)* of the curve $y^2 - x^3 = 0$.

71 Drawing by M.F.

For Salmon, these branch points are given as the intersection points of the original curve with another curve, called the (first) polar curve. Salmon states that the equation of this polar curve, [72]

$$\Delta U = 0, \quad \text{or} \quad x\left(\frac{dU}{dx}\right)_1 + y\left(\frac{dU}{dy}\right)_1 + z\left(\frac{dU}{dz}\right)_1 = 0$$

> would enable us to find the point of contact of tangents drawn through a given point. Were we given the point $x_2\, y_2\, z_2$, then the point of contact $x_1\, y_1\, z_1$ must satisfy the equation
> $$x_2 \frac{dU}{dx} + y_2 \frac{dU}{dy} + z_2 \frac{dU}{dz} = 0.$$
> Hence the points of contact of tangents which can be drawn from a given point to a curve of the n-th degree lie on a curve of the $(n-1)$-th degree: viz., on the first polar of $x_2 y_2 z_2$, with regard to the given curve [...] [Salmon 1852, p. 62].

Hence, according to Bezout's theorem, [73] "from a given point [not on the curve] there can be drawn $n(n-1)$ tangents to a curve of the n-th degree." [74] [Salmon 1852]

Salmon does not mention the term "branch point" for obvious reasons—the term itself did not yet exist and was coined in German only by Riemann in 1857. However, even without the terminology, the point of view is completely different. And this point of view is carried out in the case of complex surfaces. Salmon already started in 1847 dealing with this subject. In a paper written in this year he gives a numerical analysis of the properties of the ramification curve (number of "cuspidal" and "ordinary double lines"), and notes, after discussing the formula for the number of tangent lines to a curve exiting from a given point: "[a]s I am not aware that the corresponding question as to reciprocal surfaces has been before investigated, I purpose in the present paper to enquire [this] [...]." [Salmon 1847, p. 65] A more detailed analysis appears in 1862—after Riemann's coinage already appeared—when Salmon publishes his book *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions*, he now considers complex projective surfaces in the complex projective three-dimensional space $\mathbb{CP}^3$. His treatment follows a similar line of interpretation as his

72 Recall that the projective (complex) plane has three coordinates x, y, z and hence a projective plane curve is expressed with three variables.

73 Bezout's theorem (for curves) was published in 1779. Étienne Bézout proves that given two complex projective curves of degree n and m, without a common component, these curves then intersect at mn points (counted with their multiplicities).

74 The theorem was already stated in 1818 by Poncelet [Poncelet 1817–1818, p. 215], whose writings Salmon knew well [Gow 1997, p. 53, 45–46].

treatment of complex curves: given a smooth surface U in $\mathbb{CP}^3$, choosing a point $O = (x' : y' : z' : w')$ not lying on the surface, and examining the tangent lines to U passing through O. Salmon calls this collection of all lines tangent to the surface the "tangent cone" [Salmon 1862, p. 190], and notes:

> [...] consider the case of tangents drawn through a point not on the surface. [...] we see that the points of contact of all tangent lines (or of all tangent planes) which can be drawn through $x'y'z'w'$, lie on the first polar [denoted by ΔU], which is of the degree $(n - 1)$: viz.
>
> $$x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} + z' \frac{dU}{dz} + w' \frac{dU}{dw} = 0.$$
>
> And since the points of contact lie also on the given surface, their locus is the curve of the degree $n(n - 1)$, which is the intersection of the surface with the polar. [Salmon 1862, p. 62]

Here Salmon implicitly considers projections of the surface from a point, though he does not say where the surface is projected. The "curve of the degree $n(n - 1)$, which is the intersection of the surface with the polar" in contemporary terminology is called the *ramification curve*, although this term obviously does not stem from Salmon as such. Though being current terminology, I will use this term from now on, to distinguish between this curve (which is on the surface) and the branch curve (which is on the complex plane $\mathbb{C}^2$, being the image of the ramification curve, when one indeed considers a projection $U \to \mathbb{C}^2$ or $\mathbb{CP}^2$).

Salmon, as was indicated above, did not draw a single sketch to illustrate how this curve might look like on a surface.[75] Notwithstanding, and considering the fact that he did make drawings of curves in general, one might wonder why he did not draw any branch curves, being the projection of the ramification curve on a complex plane. This question is justified given that Salmon did take into account in his investigations the branch curve, as I will now show.

After defining the ramification curve, Salmon continues to investigate two types of special tangents to it (see an illustration in Figure 15). The first are tangent lines called "inflexional tangents," which are not only tangent to the surface, but in addition are also tangent to the ramification curve

75 Salmon did not draw a single sketch of any complex surface in the 1862 book, but rather only partial images of concrete situations (e.g., tangent planes or tangent lines, for example; see [Salmon 1862, p. 274 or p. 296]). This might be also due to constraints on printing techniques during this period, but also in accordance to how Monge and his followers were using concrete images.

itself. Salmon proves that these points lie on the intersection of the ramification curve and the *second* polar of the surface, i.e., the surface $\Delta\,(\Delta U)$ or $\Delta^2 U$. Salmon indicates: "Through a point not on the surface can in general be drawn $n\,(n-1)\,(n-2)$ inflexional tangents. [...] consider the *xyzw* of any point on the tangent as known; its point of contact is determined as one of the intersections of the given surface U, which is of the n-th degree, with its first polar ΔU, which is of the $(n-1)$-th, and with the second polar $\Delta^2 U$, which is of the $(n-2)$-th. There are therefore $n(n-1)(n-2)$ such intersections." [Salmon 1862, p. 191] The second type of special tangents to the surface are lines which are tangent to the surface at two different points. Salmon indicates the following: "Through a point not on the surface can in general be drawn $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ double tangents to it." [76] [Salmon 1862]

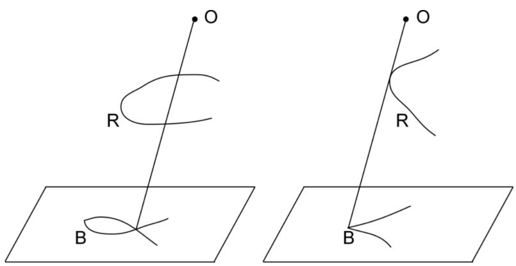


FIGURE 15. How special tangents to the surface S (not drawn) from a point O result in either a node (left: two points on the ramification curve R are projected to the same point) or a cusp of the branch curve B (right: the tangent to the surface is also tangent to the ramification curve R). (Figure drawn by M.F.)

It is after discussing these two special tangents that Salmon notes the special properties of the branch curve, i.e., the image of the ramification curve on a generic plane (which does not pass through O): "We have proved then that the tangent cone which is of the degree $n(n-1)$ has $n(n-1)(n-2)$ cuspidal edges, and $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ double edges; that is to say, any plane meets the cone in a section having such a number of cusps and such a number of double points." [Salmon 1862, p. 192] The branch curve here, although, again, not termed as such, is the curve obtained by a "plane [that] meets the cone in a section". This curve, which hardly stands at the center of Salmon's investigation, therefore has

76 Identical calculations appear already in [Salmon 1874].

$n(n-1)(n-2)$ cusps and $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ nodes.[77] However, one may wonder why Salmon did not take notice of the special properties of the branch curve of a cubic surface, a surface that was one of his specialties. As Salmon briefly indicates: "The general theory of surfaces [...] gives the following results, when applied to cubical surfaces. The tangent cone whose vertex is any point, and which envelops such a surface is, in general, of the sixth degree, having six cuspidal edges and no ordinary double edge." [Salmon 1862, p. 376] However, as we will see later (see Section II.3.2), when considering the branch curve of the (smooth) cubic surface, i.e., the intersection of "any plane" with the tangent cone (following Salmon's formulation), its six cusps lie on a conic; and Salmon indeed had the tools to discover it.[78]

Whereas Salmon was not interested in visualizing curves on surfaces, let alone ramification curves or their projection, attempts, however, were made to employ visual tools to study the branch curve. As we will see, Wilhelm Wirtinger was the first to *visually* consider a neighborhood of a singular point of the branch curve.

2.2. *Wirtinger draws a knot*

Wilhelm Wirtinger (1865–1945), an Austrian mathematician, was known for his work in complex analysis and knot theory, and especially for his presentation of the fundamental group of the complement of a knot in $\mathbb{R}^3$. At the end of the 19th century, as well as at the beginning of the 20th century, Wirtinger began research on branch curves of complex surfaces. While this research did not mature into a full-blown theory, it nevertheless prompted a re-contextualization of the research of singular complex plane curves by means of knots associated to their singular points.

When researching complex surfaces in the 1890s, Wirtinger considered projections of them. While Salmon only considered these projections implicitly, he was nevertheless aware that this projection could be done from any point—whether this point would lie on the surface or not. Viewing

---

77 As we will see later these nodes and cusps will play a special role in Beniamino Segre's work.

78 The German translation of Salmon's book, called *Analytische Geometrie des Raumes. II. Theil. Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen*, done by Wilhelm Fiedler does mention material models of several surfaces in the appendix, mostly made in Germany, [Salmon 1874, p. 622–623, 663, 667], but does not add in the book any figure or change the point of view regarding the treatment of branch curves.

these surfaces in the complex three-dimensional space $\mathbb{C}^3 = (x, y, z)$, Wirtinger solely thought about a very specific projection to complex plane $\mathbb{C}^2 = (x, y)$. That is, following Puiseux and Riemann and given a complex surface defined by an equation $f(x, y, z) = 0$, the projection was done from a point "in infinity," i.e.,:

$$p : \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : f(x, y, z) = 0\} \to \mathbb{C}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y).$$

How did Wirtinger think about branch curves? Wirtinger dealt with these curves in a letter written to Felix Klein on 22 December 1895 and in a 1905 lecture. I will first examine the letter,[79] and then analyze the shift Wirtinger made in his lecture ten years after.

As he explicates in the letter, Wirtinger's aim "is to show that an arbitrary system of $n-1$ dimensional algebraic varieties [Gebilde] with an associated branching scheme can always be understood as a system of branch manifolds of a function of n variables."[80] [Epple 1995, p. 398] As we will see with the investigations of Federigo Enriques and Beniamino Segre, the question that arose in the early 20th century was whether Wirtinger's statement here was correct. Wirtinger himself, as we will see, also indicates the possibility that not every $(n-1)$-dimensional manifold can be a branch manifold of an n-dimensional function. Explaining his motivation, he notes: "With one variable, the question is simple because in the neighborhood of a branch point the cyclic functions of the values are unique, that is, the n-th root of the variable itself is unique. *The germ of generalization lies in this setting*."[81] [Epple 1995, p. 398]

However, as Wirtinger immediately notes, the case of Riemann surfaces—i.e., when $n = 1$—does not entirely contain the germ of generalization, and one has to distinguish between two cases: when the branch manifold is smooth and when the branch manifold ["Verzweigungsmannigfaltigkeit"] is singular.[82] The distinction between the two cases does

79 The letter is to be found in Klein's Nachlass in Göttingen (Cod. Ms. Klein XII, 391). A transcription of it can be found in [Epple 1995, p. 397–399].

80 "Mein Ziel ist dabei zu erweisen, dass man ein beliebiges System algebraischer Gebilde von $n-1$ Dimensionen mit zugehörigem Verzweigungsschema *immer* als System von Verzweigungsmannigfaltigkeiten einer Function von n Variablen auffassen kann."

81 "Bei einer Variablen liegt die Frage deshalb so einfach, weil in der Nähe eines Verzweigungspunktes die cyclischen Functionen der Werte eindeutig werden, also die n-te Wurzel der Variablen selbst eindeutig ist. *In dieser Fassung liegt der Keim der Verallgemeinerung.*"

82 Note that Wirtinger usually uses the word "Verzweigungsmannigfaltigkeit" when talking about the branch variety, i.e., a singular one. The term "Gebilde" (variety) is used for more general descriptions, usually for smooth covering.

not arise in the case of Riemann surfaces—since there the branching manifold is a collection of points, and hence is always smooth.

As Wirtinger notes the analogy with Riemann and Puiseux's treatments is still valid for smooth branch manifolds: "The cyclic behavior remains true for arbitrary branching manifolds [...]."[83] [Epple 1995, p. 398] This means, as we saw with Puiseux, and in order to give an example, that the only permutations that can be induced by encircling a branch *point* are those that permute the branches cyclically, i.e., the values $u_1, u_2, \ldots, u_p$ are permuted to $u_2, \ldots, u_p, u_1$, or, in Wirtinger's words, the Galois group is cyclic (i.e., generated by one element, in this case, the above permutation). However, the situation is completely different when the branch manifold is singular. Wirtinger first determines, without giving any justification, that in this case, "then every Galois group is possible." [Epple 1995, p. 398] The example that Wirtinger gives is a cubic surface in $\mathbb{C}^3 : \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : z^3 + 3zx + 2y = 0\}$. The branch curve $\{x^3 + y^2 = 0\}$, which has a cusp at (0,0), is not specified by Wirtinger. However, he does note that the Galois group is not cyclic, but rather it is the whole symmetric group on three letters. Perhaps this is what led him to the above conclusion, that every Galois group is indeed possible.

Several passages later, however, Wirtinger formulates his statement as a question: "The kernel of the whole thing lies now for me in the investigation of the group of a branch point, that is to say [...] in the question: Can this group be arbitrarily pre-determined, or is it bound to conditions, so that associated functions exist?"[84] [Epple 1995, p. 398] Assuming that Wirtinger deals only with the projection of n-dimensional smooth manifolds, what he asks is what the possible singular points are that the $(n-1)$-dimensional branch manifold might have under a generic projection of an n-dimensional manifold. Or might the branch manifold have any type of singularity appear? Looking at branch curves of complex surfaces, Salmon already showed that the branch has (at least) two types of singular points: cusps and nodes.[85] Wirtinger ignores, however, the fact that a branch curve might also have nodes, and hardly deals with the investigation of branch curves in his letter to Felix Klein.

---

83 "Das cyclische Verhalten bleibt aufrecht für beliebige Verzweigungsmannigfaltigkeiten [...]."

84 "Der Kern der ganzen Sache liegt jetzt für mich in der Eruirung der Gruppe eines Verzweigungspunktes, also eigentlich [...] in der Frage: Kann man diese Gruppe willkürlich vorgeben, oder ist sie an Bedingungen gebunden, damit zugehörige Functionen existieren?"

85 Note that Salmon did not prove that these are the *only* types of singular points a branch curve of a smooth surface may have.

During the following years Wirtinger did not work on this problem. In 1901 in his article on algebraic functions and their integrals for the *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Wirtinger reformulated the question that he posed to Klein. For functions of several variables, as Wirtinger notes, "one has not yet succeeded in determining a given algebraic variety [algebraische Gebilde] by a finite number of data in a similar way as is possible with the different forms of a Riemann surface." [86] Referring directly to Hurwitz and the determination of a Riemann surface via a "finite number of data" (i.e., branch points, the number of sheets, and the permutations), Wirtinger asks whether this determination is possible for general branched covering (of dimension n). Taking Wirtinger's letter to Felix Klein into consideration, one might assume that what Wirtinger meant also involved considering the singularities of the $(n-1)$-dimensional branch manifold.

In a 1905 lecture entitled "Über die Verzweigungen bei Funktionen von zwei Veränderlichen" a shift of context occurs in the way Wirtinger examines branch curves. Although the lecture itself is not available, Moritz Epple [1995] has reconstructed it and shown that Wirtinger, inspired by Poul Heegaard's 1898 dissertation, decided to consider only the local neighborhood of singular points of branch curves. Not only does Wirtinger ignore his former questions, such as those regarding the possible singular points of the branch curve or what is the necessary "finite number of data," but he also re-contextualizes the problem in his lecture. As Epple shows, Wirtinger now no longer considers the branch curve as a whole, but rather only the *intersection* of a neighborhood of a singular point of the branch curve with the 3-sphere. [87] For the case of the branch curve of the cubic surface presented by Wirtinger, one obtains the following: $\{x^3+y^2=0\} \cap \{|x|^2+|y|^2 = c\}$, for c small and positive number, and when $x, y \in \mathbb{C}$. Wirtinger recognized this intersection as the *trefoil knot,* and he most likely drew a figure (see Figure 16) during his lecture. With the help of this figure he then calculated the fundamental group of the complement of this knot (thought as embedded now in $\mathbb{R}^3$), as the Galois

86 Translation taken from: [Epple 1995, p. 383].

87 "Heegaard's idea was to study singular points of algebraic surfaces by looking at the restriction of the branched covering of defined by the equation of the surface to a 3-sphere bounding a small neighborhood of the singular point in question" [Epple 1995, p. 384]: For an analysis of Heegaard's thesis, see: [Epple 1999, p. 246–251]. It is essential to note that Heegaard called in his thesis explicitly for visualization of complex surfaces [Epple 1999, p. 247].

group of the cusp, proving that it is isomorphic to the symmetric group on three letters.[88]

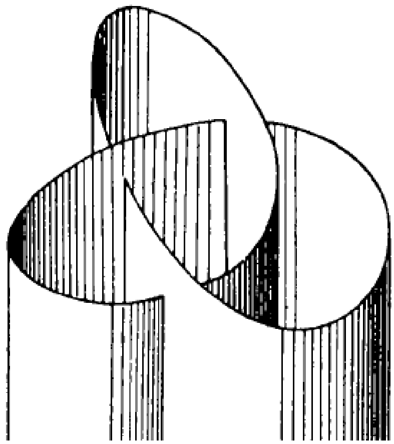


FIGURE 16. The drawing of Emil Artin of the trefoil knot, inspired from Wirtinger's lecture. Artin remarks: "One finds easily the generators of the fundamental group and the defining relations with the help of a method developed by Herr Wirtinger in his lectures [...]."[89] [Artin 1925, p. 58]

Wirtinger had "shown how to form a very intuitive picture of the topological situation around the branch point" [Epple 1995, p. 386]—hence following Klein's *anschauliche* geometry, and certainly supportive of the way visualization was used in mathematics. Indeed, Wirtinger, in a letter to Klein in 1896, "imagined the mathematician of the 20th century [...] like a painter who looks at the world with a painter's eyes, thinking about the way in which he would like to paint it. Correspondingly, the mathematician should try to 'see the mathematical problem' in whatever form she

88 The figure appeared several times in different contexts during the early 20th century. See: [Epple 1995, p. 384]: "There is a picture in Artin's article, which illustrates these techniques. The same picture had been described in words by Tietze, and it reappeared in Brauner's article. Finally, it was reprinted in Reidemeister's *Knotentheorie*. In all of these cases, the use of this picture in order to derive a presentation of the knot group is ascribed to Wirtinger."

89 "Die Erzeugenden der Fundamentalgruppe und die definierenden Relationen findet man nun wohl am einfachsten mit Hilfe einer Methode, die Herr Wirtinger in seinen Vorlesungen entwickelt hat [...]."

or he encounters it." [Epple 1995, p. 387] [90] Following Epple, Wiritinger calls not only for a concrete investigation, but also for a "productive imagination" [Epple 1999, p. 256] done with the help of a drawing, being not merely a "passive" visualization, but one, like the painter, which produces its own reality. This conception of visualization as epistemic and productive certainly aligns with Klein's ideas. That said, Wirtinger's novel method and the illustration that followed it have certainly led to a problematic approach in the research on branch curves. While Wirtinger tried to visualize how the singular points of the branch curve look like *locally*, he ignored the *global* question that he himself had indicated several years previously: can every curve with this local behavior be a branch curve? Although being one of the first attempts to actually illustrate a branch curve, the problematic issue lay in what Wirtinger did not consider and could not have considered with his illustration: that the singular points of the branch curve are to be found in a special position with respect to each other—i.e., if one would have liked to visualize the branch curve, then a global image would have been necessary. One may claim that the image of the local behavior in fact hindered this understanding and that Wirtinger's visualization may have led also to a dead lock in his research on branch curves. The importance of this point of view is hinted at unreservedly by Enriques and clearly expressed by Zariski and Segre at the end of the 1920s, as I will now show.

2.3. *Branch curves in Italy: Enriques, Zariski, Segre*

While discussing the attempts so far to visualize branch points and branch curves, most of the mathematicians I have dealt with were German as we saw in Section I.6. Whereas not all of the mathematicians in Germany had a favorable view towards what might be called *anschauliche* geometry, Riemann, Klein, Brill, Dyck and many more mathematicians in-

---

90 Epple cites the following sentences from a letter from Wirtinger to Klein sent on 22 May 1896: "I imagine the mathematician of the 20th century in such a way that, like the painter, as often as he wants, he sees the world painterly and thinks how he would paint it (and not just of classical gallery paintings), also as often as he wants to see the mathematical problem, wherever and in whatever form it appears. As a result of general mathematical education, I now think of the ability of this seeing, at least in principle." ["Ich stelle mir den Mathematiker des 20 Jahrhunderts so vor, dass er, wie der Maler, so oft er will, die Welt malerisch sieht u. denkt wie er sie malen würde (u. nicht blos an classische Galeriebilder), auch so oft er will das mathematische Problem sieht, wo u. in welcher Gestalt immer es entgegentritt. Als Resultat der allgemeinen mathematischen Bildung, denke ich mir nun die Fähigkeit dieses Sehens, wenigstens im Princip."] [Epple 1995, p. 387]

fluenced by them, certainly had supported a concrete visualization of the geometrical objects in general and of branch points of Riemann surfaces in particular. When the discipline of algebraic geometry was developed in Italy, however, the approach towards visualization techniques began to change: these techniques, I claim, were increasingly marginalized, and when they were employed, they were mainly considered merely technical.

The reasons for this change in approach are diverse. While material models flourished in Germany for usage in research and even were mass-produced, the production of mathematical-physical models for the purpose of research had not taken root in Italy (see: [Giacardi 2015a;b; Palladino & Palladino 2009]). Models were indeed bought by Italian mathematicians for mainly pedagogical reasons, but there was hardly an equivalent tradition in Italy, which could be compared with the German one. The attempt of Giuseppe Veronese (1854–1917) to establish a national laboratory for the production of models failed. Nevertheless, a workshop for constructing models was founded (for teaching projective geometry) at the university of Naples. During the first decades of the 20th century, Guido Castelnuovo and his students also constructed models of surfaces. That said, these were by and large exceptions with respect to the situation in Italy as a whole. When models were needed they were acquired mainly from Germany. Livia Giacardi explains that this rejection is due to the mathematical tradition of geometry in Italy of the 19th and the 20th centuries, which consisted of several rather abstract mathematical approaches: the theoretical, analytical approach, the logical approach of the foundations of geometry, and the Italian school of algebraic geometry. One would expect that the usage of models would have been preferred by the algebraic geometry school, however, as Giacardi [Giacardi 2015a, p. 12] notes: "In spite of this, they [the members of this school] did not use physical models in their research work, but preferred to employ the *Gedankenexperiment*." [91]

However, as already seen above with Severi and Enriques, illustrations were used in published articles and books. As noted, Castelnuovo and Enriques did appreciate this mathematical tradition and also considered it

91 Giacardi notes that the models that Beltrami himself manufactured for the hyperbolic plane were an exception (see: [Capelo & Ferrari 1982]). Note moreover that although the political and scientific relations between the Berlin-Rome mathematical axes were more intensive starting from the 1920s onwards (see: [Remmert 2017]), at this time the tradition of model production in Germany was in decline.

even in an explorative way. The following 1928 citation from Castelnuovo serves as evidence of this Italian tradition: [92]

> We had constructed [...] a large number of surface models [...] [placed] in two showcases. One contained the regular surfaces for which everything proceeded as in the best of all possible worlds [...]. But when we tried to verify these properties on the surface of the other window, the irregular ones, trouble began and there were exceptions of every kind. In the end, the assiduous study of our models had led us to divine some properties that had to exist, with appropriate modifications, for the surfaces of both showcases; we then put these properties into practice with the construction of new models. If they resisted the test, we were looking for the logical justification for the last phase. With this procedure, which resembles the one carried in the *experimental sciences*, we have succeeded in establishing some distinctive traits for families of surfaces [Castelnuovo 1928, p. 194].

As the objects of algebraic geometry become more and more complex, however, fewer and fewer attempts at visualization were to be found; Norbert Schappacher indicates:

> "substantial basic knowledge required of any researcher preparing to work in Algebraic Geometry was invested with an essential illustrative component. More generally, there can be no doubt that basic objects of algebraic geometry [...] were naturally pictured (with or without actually drawing them) by all those working with them. [...] [However,] Italian geometers were led to analyzing constellations of objects which are increasingly difficult to visualize adequately [...]." [Schappacher 2015, p. 2806]

What Schappacher emphasizes is that several algebraic objects and methods could not be drawn at all and that algebraic arguments, though leading to results regarding curves and surfaces, were not followed by corresponding illustrations. In partially following Schappacher's view, when looking on the research on branch curves done in the Italian school of algebraic geometry, the role visualization played oscillated between three

92 "Avevamo costruito [...] un gran numero di modelli di superficie [...] e questi modelli avevamo distribuito [...] in due vetrine. Una conteneva le superficie regolari per le quali tutto procedeva come nel migliore dei mondi possibili [...]. Ma quando cercavamo di verificare queste proprietà sulle superficie dell'altra vetrina, le irregolari, cominciavano i guai e si presentavano eccezioni di ogni specie. Alla fine lo studio assiduo dei nostri modelli ci aveva condotto a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superficie di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle *scienze sperimentali*, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le famiglie di superficie."

positions: an epistemological procedure, a technical tool and a complete absence.

2.4. *Enriques and the two visualizations*

Federigo Enriques (1871–1946) was one of the driving forces behind advancements in the school of algebraic geometry in Italy, especially in the field of birational geometry (See: [Brigaglia & Ciliberto 1995, esp. p. 97–124]). He was one of the first mathematicians to deal seriously with questions concerning branch curves, and especially on how constructions, which were done for branch points and Riemann surfaces (i.e., complex curves), can be generalized for the case of branch curves and complex surfaces.

Concerning branch curves, in 1923 Enriques is considered as the initiator of research on these questions. As Anatoly Libgober indicates, "[d]escribing the origins of the studies of the complements one should probably start with the work of Enriques [...] on multi-valued algebraic functions of several variables [...] since, it seems, they contain the earliest results on their fundamental groups of the complements." [Libgober 2011, p. 3] Libgober refers to Enriques' 1923 article entitled "Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curve diramazione". Yet it should be noted that Enriques in fact had similar questions in mind already at the close of the 19th century, and attempted to answer them in various ways.

2.4.1. *Enriques draws a rotating line*

Already in 1897, Enriques writes to Guido Castelnuovo (1865–1952), concerning an 1881 article by Leopold Kronecker, that "you yourself asked the question whether 'two multiple planes with the same branch curve can be represented [mapped] one to the other.' "[93] The question comes on the background of Enriques' investigation of complex surfaces that began in 1893 and also involved arguments regarding their branch curves, as can be seen in the correspondence with Castelnuovo [Bottazzini et al. 1996, e.g., p. 42, 56, 62, 70, 100]. These letters do not contain any visualization of the branch curve. Moreover, questions in some of them concern specific types of surfaces. The general question posed in 1897, which remains merely suggested, is whether two complex surfaces (called here "multiple

[93] Letter of 5th June, 1897, in: [Bottazzini et al. 1996, p. 340]: "Tu stesso anzi ponevi la questione se 'due piani multipli colla stessa curva di diramazione sieno rappresentabili uno sull' altro'."

planes"),[94] having the same branch curves, are in fact equivalent (up to a certain transformation). Within a space of two years Enriques explicitly formulates this question, as we will see.

Kronecker's paper that Enriques refers to deals with the discriminant of an algebraic function with *one* variable.[95] Although the question Enriques and Castelnuovo are interested in concerns the branch curve of an algebraic function with two variables, the former claims that the question may be resolved by methods similar to Kronecker's. Enriques, however, indicates that it is easy to find the numerical invariants of the surface (among them, as he indicates, are the linear genus, the arithmetical genus and the geometrical genus) only by knowing the numerical invariants of a branch curve. Nevertheless, he remarks that he does not have time to deal with this question. In 1905 a similar approach is indicated. In a letter written to Castelnuovo on 1 February 1905, Enriques notes that once a branch curve, together with its degree and its number of nodes and cusps, are given one can then determine the degree of the branched surface from the relations between the various numerical invariants [Bottazzini et al. 1996, p. 603]. However, once again, Enriques does not develop his general remarks into a more comprehensive theory.[96]

As should be noted, the numerical approach to branch curves did not take into account any form of visual reasoning, and Enriques did not even treat the question of what the branch curve *looked like* or how it could be visualized. In 1899, however, he approached the research on the branch curve from another direction, employing a more visual form of reasoning. In another letter Enriques wrote to Castelnuovo on 26 February 1899 two questions are presented. The first: Can a branch curve be arbitrary? I.e., can any curve be a branch curve? The second: Given a branch curve, is there a *unique* complex surface of degree n branched along it? The arguments presented in the letter are concise but unclear, and Enriques indeed improved them in subsequent papers. I will cite the whole relevant section from this letter, however, as in it Enriques draws a sketch, which supports his argument.

---

94 The term "multiple plane" [piano multiplo] was used to denote surfaces covering the complex plane .

95 Indeed, the paper is called "Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln" [1881].

96 This is only done in [Enriques 1912b], which deals only with numerical invariants of the branch curve and the constraints they impose on the surface. As the paper does not even hint towards visualization of branch curve, it is beyond the scope of the paper.

Answering an old question proposed by you, it seems to me that the branch curve of a multiple plane cannot be arbitrary, and that if a plane curve C is the branch curve of a multiple plane of degree n, it will define in general a unique n-multiple plane. This is why.

Take on the plane a pencil of lines passing through O and consider a (n degree) line a through O. It defines a certain number μ of objective curves $K_1, \dots, K_\mu$; chose one curve K_1. Rotating the line a around O, we continually follow what happens to the curve K_1. After a whole turn, the curve K_1 generally permutes with $K_2 \dots$ or K_μ. However, this must be ruled out if C is a branch curve of a degree n multiple plane. But if we impose the condition that K_1, for example, separates rationally between the μK's represented above the n-degree line, generally it will not happen the same for $K_2 \dots$ or K_μ [Bottazzini et al. 1996, p. 400–401].[97]

Enriques' settings are as follows: a plane curve C is given (when C is not necessarily a branch curve), together with a point O, not on C, and a pencil of lines passing through O, which can be thought of as a rotating line: i.e., as the family of lines $\{y = tx : t \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0\}$, when $O = (0,0)$. Choosing one line a from this family, it intersects the curve C in several points. Enriques considers the μ Riemann surfaces of degree n which are ramified over these points, denoting these surfaces by $K_1, \dots, K_\mu$. Enriques' claim is that once we rotate the line a (inside the pencil of lines) to do a full round, the movement of the intersection points with C will induce a permutation of the Riemann surfaces, i.e., a permutation of the set $K_1, \dots, K_\mu$. However, Enriques claims that if C is a branch curve, then the induced permutation might be in fact the identity permutation—for example, choosing a Riemann surface K_1 it will not be permuted with any other of the Riemann surfaces $K_2, \dots, K_\mu$.

97 "Ripensando ad una vecchia questione che tu proponevi, mi par di vedere che la curva di diramazione di un piano multiplo non possa darsi ad arbitrio, e che se una curva p[ia]na C è curva di diramazione d'un p[ia]no n-plo, essa definirà *in generate* un unico p[ia]no n-plo. Ed ecco perché. Prendi nel p[ia]no un fascia O e considera una retta (n-pla) per a [Lapsus per: una retta [...] a per O]. Essa definisce un certo numero μ di curve obiettive $K_1, \dots, K_\mu$; scegliamone una K_1. Facciamo ruotare a attorno ad O, e seguiamo per continuità ciò che diventa K_1. Dopo un giro completo, in generale K_1 si permuterà con $K_2 \dots$ o K_μ. Ciò invece deve escludersi se la C e curva di diramazione di un p[ia]no n-plo. Ma se imponiamo Ia condizione che K_1, ad es[empio], si separi raz[ionalmen]te fra le μK rappresentate sulla retta n-pla a, in generale non accadrà lo stesso per $K_2 \dots$ o K_μ."

Enriques' arguments are at once both vague and condensed. It is clear that he relies on several arguments from Hurwitz's 1891 paper,[98] who also considered a similar situation. Given a set of points $a_1, \ldots, a_w$ in $\mathbb{C}$, Hurwitz sought to investigate what would happen to the set $F_1, F_2, \ldots$ of the Riemann surfaces of degree n, which are branched over these points, when the points $a_1, \ldots, a_w$ simultaneously start to move. Hurwitz found the following case—when the points eventually return to the initial position, though not necessarily in the same order—most interesting. For Hurwitz, "[e]ach closed path [geschlossenen Bahn] of the system of points $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ corresponds to a certain permutation

$$\begin{pmatrix} F_1 & F_2 & \ldots \\ F_1' & F_2' & \ldots \end{pmatrix}$$

of the Riemannian surfaces" [Hurwitz 1891, p. 23].

Enriques took a specific case of this "closed path," and visualized it, when the points $(a_1, a_2, \ldots, a_w)$ are actually intersection points of a line a with a given curve C. The "closed path" is formed when the line a performs a full rotation. It is clear that if C is a branch curve, then (at least) one of the Riemann surfaces $K_1, \ldots, K_\mu$ (branched along $a \cap C$) is a plane section of the complex surface, whose branch curve under a covering map is the given branch curve. However, it seems that what Enriques assumes is that there is only one complex surface of degree n branched along C—since in this case Enriques hints that the corresponding Riemann surface will not permute with any of the other of the Riemann surfaces, which is not a plane section a section of a complex surface.

Indeed, the visualization that Enriques proposed does not help to clarify his two claims that he sets up to explain: (1) why any plane complex curve cannot be a branch curve, and (2) why does a branch curve uniquely determine the surface.[99] There it is reasonable to pose the question, whether the sketch was indeed needed. Both Enriques and Castelnuovo knew that this sketch cannot represent in any way a branch curve, since a branch curve is always singular when the degree of the surface is higher

---

98 Enriques mentions Hurwitz's research on Riemann surfaces in a letter to Castelnuovo on 7 June 1897 in: [Bottazzini et al. 1996, p. 341].

99 The claim that the branch curve determines the surface uniquely—i.e., that there are no two different surfaces branched over the same curve—was first conjectured by Oscar Chisini in 1944 for surfaces of degree greater than 4 [Chisini 1944], and only proved during the 21st century by Viktor S. Kulikov, with a single exception [Kulikov 1999a, 2008]. How Chisini investigated branch curves is beyond the scope of this paper; however, see the conclusion to Section III. Hence, it is not clear how Enriques thought about proving the uniqueness of a surface branched along a given curve.

than two. It seems, however, that it was essential for Enriques to present the new component—the rotating line—in his construction, as a new ingredient of an "experimental" visualization, anticipating Castelnuovo's reference to material models as "experimental sciences". Indeed, both Enriques and Castelnuovo were exposed to material models in Turin, since "in Turin the first acquisitions [of material mathematical models] thanks to Enrico D'Ovidio date from 1880–1881" [Giacardi 2015a, p. 20]. For Enriques, as someone who appreciated this tradition, (and for Castelnuovo, who obtained the sketch) the drawing was a way to prompt visual reasoning and connect the investigation of the branch curves with Hurwitz' more algebraic reasoning. It is important to note that Corrado Segre, who in 1907 was in charge of the Library in Turin instead of D'Ovidio, already commented in 1891—eight years before the letter from Enriques to Castelnuovo was sent—that "sometimes we [in Turin] even resorted to drawings or models of geometric figures to *see* certain properties [...] that could not be obtained with deductive reasoning."[100] [Segre 1963 (1891), p. 400] This approach, that there are types of reasoning beyond the merely deductive, certainly influenced Enriques, as we will also see in the following section when dealing with other attempts at drawing objects related to the branch curve.

Indeed, abandoning the second question (why does a branch curve uniquely determine the surface) and concentrating on the first, in two papers, written in 1912 and 1923, Enriques explains in more detail why branch curves cannot be just any curve. He does this by combining two types of reasoning: an algebraic one and a visual one, making his approach from the letter of 26 February 1899 more precise.

2.4.2. *Enriques and the loops encircling a branch curve*

In 1912 Enriques published his first paper on the subject of the branch curve, entitled "Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes".[101] As Enriques later (in 1923) notes, the 1912 paper was not precise enough. I will review the 1923 paper in more detail later, but for the moment it is worth briefly examining the 1912 paper as a turn towards a more algebraic approach is taken.

100 [...] "talvolta si è persino avuto ricorso a disegni o modelli di figure geometriche per *vedere* certe proprietà [...] che col solo ragionamento deduttivo non si sapevano ottenere."

101 Recall that a second paper on the numerical invariants of the branch curve and their connection to the numerical invariants of surfaces was also published in 1912 by Enriques [1912b].

At the beginning of this paper, Enriques describes the state of the research regarding branch points of his period and the construction of Riemann surface branched above them: given $2m$ simple branch points, n the degree of the to be constructed Riemann surface, and the $2m$ transpositions[102] corresponding to the branch points, forming a transitive group inside the symmetric group of n elements, a Riemann surface exists branched over these $2m$ points [Enriques 1912a, p. 419]. Like Hurwitz, Enriques algebraically formulates the conditions for the construction of the Riemann surface, where the only essential condition is that the set of transpositions corresponding to the branch points would be transitive and that their product would be the identity permutation. The question that Enriques poses is whether the same situation can be generalized to branch curves and the construction of complex surfaces.

Enriques immediately notes that the branch curve can be considered in two different ways: either as a complex *curve* in the (x, y) plane, "in the sense of algebraic geometry," or as a surface in a (real) 4-dimensional space, which "supplies the representation of complex points on the plane (x, y)" [Enriques 1912a, p. 419]. Indeed, Enriques hints at the two different approaches of representing complex curves, but does not elaborate on them. Instead, the main question is whether from a given (complex) curve, as discussed above, one can construct an n-degree complex surface branched along this curve. Enriques repeats his claim that the curve cannot be arbitrary, now explaining more clearly why: "given the invariants $(p_a, p^{(1)})$ of the [surface[103] given by the] equation $F(xyz) = 0$ one finds that in general the [branch] curve $f(xy) = 0$ has a certain number of nodes which are > 0 for $n > 3$ and a certain number of cusps which are > 0 for $n > 2$, when these numbers can be calculated with the help of the known formulas" [Enriques 1912a, pp. 419–420]. Enriques then states two claims, which are given offhand, without any proof. The first, that branch curves do not have higher singularities;[104] the second, that given two plane curves of the same degree, with the same number of nodes and cusps, it may be that one would be a branch curve, while the other not [Enriques 1912a, p. 420]. This is an important statement, as it

102 A transposition is a permutation, which permutes only two elements. A simple branch point may be defined as a branch point whose corresponding permutation is transposition.

103 Here, p_a is the arithmetic genus of the surface, and $p^{(1)}$ is the linear genus of the surface. See: [Hazewinkel 1995, pp. 111–112]

104 Ibid.: "on exclura qu'il y ait des singularités plus élevées." This was only proved in 2011, in: [Enriques 1912a, pp. 419–420].

indicates that the variety $V_{n,\delta,\varkappa}$,[105] which parameterizes all plane curves with degree n with δ nodes and $\varkappa$ cusps, with no other singularities (as a subvariety in the projective complex space $\mathbb{CP}^{\frac{n(n+3)}{2}}$), may be, for given n, δ, and $\varkappa$, reducible: i.e., having *several* non-intersecting components. Such a claim is given—surprisingly—in a very casual way, without any proof or example. The first example of this reducibility involving branch curves is Zariski's from 1929, proving that $V_{6,0,6}$ has two disjoint components (see Section II.3.2).

It seems that what led Enriques to make the second claim are the necessary and sufficient conditions that he proposed for a curve as a branch curve. These conditions are stated in a completely algebraic way, and, as Enriques claims, due to their complexity, do not hold for every curve. Specifically, when Enriques denoted the degree of the branch curve as $2m$, the question is how to assign transpositions for each of the $2m$ branches (of the branch curve), transpositions that would describe the way the complex surface is branched. In order to find the sufficient and necessary conditions, Enriques considers two types of critical points of the branch curve: simple ones ("which correspond to parallel lines to the y axis, tangent to $f = 0$ at a simple point" [Ciliberto & Flamini 2011]) and cusps. Enriques then poses three purely algebraic conditions for the associated transpositions,[106] indicating that if they are satisfied then the curve is a branch curve and one can construct a complex surface branched along it. The claim, however, is made without proving that those conditions

---

105 I am using modern notation here.

106 Enriques calls the set of simple branch points set (1), and the set of cusps set (2). He then states the following: "If there exists an irreducible algebraic function $z(xy)$ of $n > 2$ branches $z_1, \dots, z_n$ corresponding to the branch curve $f(xy) = 0$, we have $2m = 2n + 2p - 2$, $p \geq 0$ [where p is the genus of the branch curve, $2m$ the degree of it] and the following conditions are satisfied:

1. The transpositions between the $2m$ branches, corresponding to the points in set (1), form an intransitive group. More precisely, the $2m$ branches $y_1, \dots, y_{2m}$ would be divided in relation to this group in a certain number ρ, $\rho \geq n - 1$, of intransitive systems, comprised respectively of $t_1, t_2, \dots, t_\rho$ elements, when $t_1 + t_2 + \cdots + t_\rho = 2m$.

2. To these ρ intransitive systems, one can associate ρ pairs of [different] number $(i\ s)$, when i, s belong to the set $1, 2, \dots, n$, in the following manner: every transposition between $y_1, \dots, y_{2m}$, corresponding to a point in set (2), will take a branch y corresponding to a system $(i\ s)$ into a branch corresponding to a system $(r\ h)$, where the two couples $(i\ s)$ and $(r\ h)$ have a joint element (either $h = i$ or $h = s$).

3. The transposition $(i\ s)$ corresponding to the $2m$ points $y_1, \dots, y_{2m}$ generate a transitive group regarding [the permutation group of] $1, 2, \dots, n$ and the product of all the $2m$ transpositions, taken in a suitable order, is reduced to the identity.

Conversely, *if conditions 1, 2, 3 are satisfied, there will always be an algebraic function $z(xy)$ with n branches, of which $f(xy) = 0$ is the branch curve.*" [Enriques 1912a, pp. 420–421].

are necessary and sufficient. Surprisingly, the nodes of the branch curve and the conditions they might have implied regarding their associated transpositions go unmentioned.

However, this pure algebraic consideration is re-formulated in a 1923 paper where it shifts into a more topological context that increasingly relies on visualization. I claim that this 1923 paper is a combination of the 1912 paper and Enriques insights from the 1899 letter.

* * *

In the 1923 paper entitled "Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione," Enriques declares at the outset that while submitting the 1912 paper, he already encountered several difficulties. As he states, it was precisely due to such difficulties that he now wished to resubmit the paper [Enriques 1923, p. 185].

As Enriques notes in the 1923 paper, not just any plane curve can be a branch curve [Enriques 1923, p. 185]—but once more he fails to give even a single example. As in the 1912 paper, Enriques' aim is to provide a proof for the necessary and sufficient conditions for a curve being a branch curve, formulating more precisely and more extensively the algebraic conditions of eleven years ago. The paper begins with the same setting of the 1899 letter: a plane curve C is given, assuming it is a branch curve of a surface F; a point O not on C is also given, and a pencil of lines $y = tx$ on this plane, passing through O. The parameter t is a complex one, whose values vary in the (complex) plane denoted by τ. Taking $t = 0$, the line $y = 0$ cuts the curve C in m points: $A_1, \ldots, A_m$. When considering the section of the surface F above this line,[107] The above-mentioned section is the intersection of P and F. one obtains a (smooth) Riemann surface, denoted by K_0, which is considered as a branched cover of the line $y = 0$, branched over $A_1, \ldots, A_m$, which are simple branch points.

Enriques' key move that enables him to later visualize his arguments is to note that the line $y = 0$ is a complex line, homeomorphic to a two-dimensional real plane. Hence, following the common method of investigation of a Riemann surface, one can look at a "system of loops" [Enriques 1923, p. 187] which are denoted by l_i, in the two-dimensional real plane $y = 0$, going out from O and encircling the points $A_1, \ldots, A_m$. Every loop then corresponds to a permutation $S_i = (r_i\ s_i)$,[108] which describes the

[107] Denoting by O' the point from which one projects F to the complex plane, one considers a plane P passing through O' and $y = 0$.

[108] The notation $(r\ s)$ stands for a permutation, which permutes between r and s and leaves all the other numbers as they are.

permutation of the sheets r_i and s_i of the Riemann surface: while moving along l_i (inside the real plane $y = 0$), the n preimages of the starting point of l_i: $p_1, \ldots, p_{r_i}, \ldots, p_{s_i}, \ldots p_n$ permute between themselves such that after one circling (when returning to the initial point of l_i) the values permuted equal to $p_1, \ldots, p_{s_i}, \ldots, p_{r_i}, \ldots p_n$. Following the arguments from 1899, Enriques then moves the line $y = 0$ (as a member in the family of lines $y = tx$), claiming that after moving t along a loop on the plane τ, the resulting permutations should be identical. This results in conditions of invariance that should hold concerning these permutations, which Enriques claims are true for every branch curve. Enriques' task is to explicitly formulate these conditions.

This is done in the main section (Section III) of Enriques' paper. Enriques starts by noting that while rotating the line $y = 0$ in the pencil of lines, the rotated line might intersect three types of critical points of the curve C: simple tangent point (denoted by $T_1, \ldots, T_\mu$ on the lines in the family $y = tx$ with C), nodes of C (denoted by $D_1, \ldots, D_\delta$) and cusps of C (denoted by $Q_1, \ldots, Q_\chi$). Before analyzing what happens to the above-mentioned permutations S_i while approaching one of these critical points, Enriques makes an observation regarding the loops l_i. This observation, and the argument that follows it, is mainly visual in orientation.

The question Enriques poses is the following: when moving t along a loop on the plane τ, what happens to the loops l_i when approaching one of these critical points? Assuming that $y = t_c x$ is a line which intersects C at a critical point, then there are two intersection points A_{r_i} and A_{s_i} which are merged (see Figure 17).[109] Remunerating the points of intersection, one can assume that the points A_1 and A_2 are merged. But if one takes a value t_0 very close to t_c, what would be the relative position of the loops l_1 and l_2?

Denoting by L_0 the complex line $y = t_0 x$, the question that Enriques poses concerns, in current terminology, the finding of a well-ordered basis for the fundamental group of the complement of the intersection points $A_1, A_2, \ldots$ of L_0 with $C : \pi_1(L_0 - \{L_0 \cap C\}) \simeq \pi_1(\mathbb{C} - \{A_1, A_2, \ldots\})$. Enriques then asks if one can always rearrange the loops in this group such that l_1 and l_2 would be "fairly close" ["onestamente vicini"], meaning that they "tend to merge without including any other point A or crossing other

109 The fact that there are *two* points that coincide is due to the nature of the critical points (tangent point, node or cusp). Were there other types of singular points, this might not have been the situation. However, Enriques does not prove—also in this paper—that the only singular points of a branch curve are nodes and cusps.

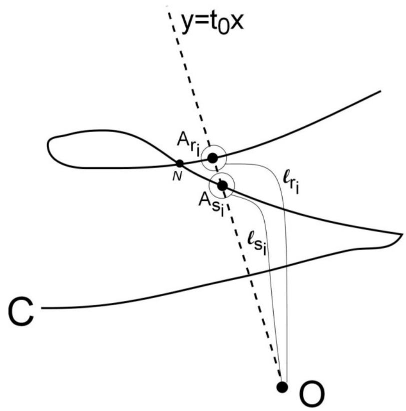


FIGURE 17. The complex (dashed) line $y = t_0x$ intersects the curve C near a singular point (here: the node N), and the points of intersection A_{r_i} and A_{s_i} will be merged at this point. The complex line $y = t_0x$ is homeomorphic to a two-dimensional real plane, and the loops ℓ_{r_i} and ℓ_{s_i}, which surround the intersection points, are drawn in this plane (figure drawn by M.F.).

loops."[110] [Enriques 1923, p. 189] Enriques suggests two cases: either the loops are already in this situation, i.e., already "fairly close" or, although being close to each other, other loops interrupt them to be merged while approaching the critical points. He then gives two drawings as examples for the second situation (see Figure 18):

What Enriques immediately notes is that "for simplicity, in this elementary case, we can demonstrate that one can transform the loops, permitting us to reduce it to the case when l_1 and l_2 would be fairly close"[111] [Enriques 1923, p. 190]. The transformation is shown in Figure 19.

Immediately afterwards Enriques proves that this transformation does not change the corresponding permutations S_1 and S_2. The above transformation, however, relies completely on a visual argument. Taking only these two cases into account, in Figure 19 Enriques solely *draws* the transformations of the loops. The argument of how to transform the basis of the above fundamental group is completely visual, relying eventually on the

110 "[...] può accadere che l_1 e l_2, per $t = t_c$, diventino o possan farsi diventare *onestamente vicini*, cioè tendenti a confondersi senza includere alcun altro punto A o attraversare altri cappi."

111 "Ma, riferendoci per semplicità a questo case elementare, possiamo dimostrare ehe, in ogni case, una conveniente trasformazione dei cappi, permette di ridursi al ease in cui l_1 e l_2, diventino onestamente vicini."

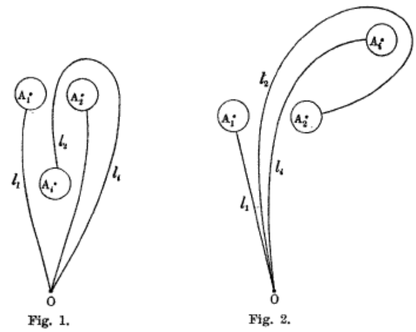


FIGURE 18. Enriques' depiction of two cases of a loop "interrupting" the loops encircling the points A_1 and A_2 to come together [Enriques 1923, p. 190].

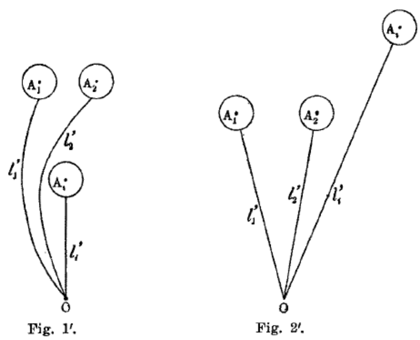


FIGURE 19. Enriques' depiction of the transformation of the loops from Figure 18 [Enriques 1923, p. 190].

ability of the reader to *imagine* more complex cases when another, more complicated loop l_i would be between l_1 and l_2.

With these assumptions, denoting as above the loops in the vicinity of a critical point as l_1 and l_2, Enriques deals with the three types of critical points, investigating what the relations between the induced permutation S_1 and S_2 are. He starts by investigating what happens in the neighborhood of a tangent point T. Enriques then asks what happens to the loops on the (complex) line L_0 (given by $y = tx$) and their corresponding permutations when the line encircles the point T (recall that the loops l_1 and l_2 encircle the points A_1 and A_2). When encircling the point T, Enriques subsequently indicates that it is clear from the analytical power series around this point[112] that what happens is a 180° turn of the points A_1 and A_2 [Enriques 1923, p. 191],[113] which results in a deformation of the loops. Enriques then adds a figure in order to depict this deformation (see Figure 20).

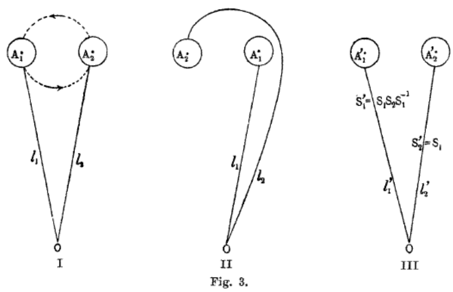


FIGURE 20. Enriques' three drawings of the change of the loops, which encircle the points A_1 and A_2, while the complex line $y = tx$ encircles the branch point T [Enriques 1923, p. 191].

While the passage from the first part of the figure (see Figure 20, part I) to the second (part II) describes the changing basis of the loops (from l_1 and l_2 to l_1' and l_2') and can be derived from the analytical power series, the third part of the figure indicates the algebraic relation between the permutations S_1 and S_2 corresponding to l_1 and $l_2$and the permutations S_1' and S_2' corresponding to l_1' and l_2'. "[...] [L]ooking at fig. 3 [Figure 20.III here]," Enriques subsequently notes, "where the three drawings I, II, III, which represent the sucessive states of the transformation, where the transition from II to III consists in transporting l_2 from the right to the left of l_1: we see that the permutations S_1 and S_2 change respectively in $S_1' = S_1S_2S_1^{-1}, S_2' = S_1$."[114] [Enriques 1923, p. 192].

While the argument here is also visual, there is no explicit algebraic proof. Enriques implies that any automorphism of the group $\pi_1(L_0 - \{L_0 \cap C\}) \simeq \pi_1(\mathbb{C} - \{A_1, A_2, \ldots\})$, being in this case the automorphism sending l_1 to $l_1' = l_1 l_2 l_1^{-1}$ and $l_2$to $l_2' = l_1$, also occurs at the

112 Being "$x - x_c = \lambda(t - t_c)^{1/2} + \cdots$" [Enriques 1923, p. 190].

113 "È chiaro che tale effetto si riduce a quello di un cerchio infinitesimo che circondi T, a cui risponde un cerchietto descritto dai punti A_1 e A_2, ognuno dei quali percorre uno dei due archi $A_1 A_2$, indicati nella fig. 3.I [here Figure 18.I]."

114 "Ebbene, osserviamo nella fig. 3 i tre disegni I, II, III, che rappresentano gli stati successivi della trasformazione, dove il passaggio dalla II alla III consiste nel trasportare l_2 dalla destra alia sinistra di l_1: vediamo cosi che le sostituzioni S_1 e S_2, si cambiano rispettivamente in $S_1' = S_1S_2S_1^{-1}$, $S_2' = S_1$."

level of the corresponding permutations to the l_i's. This claim, however, deserves either an algebraic proof or at least a reference to where it is proved. Yet Enriques provides neither of these, giving a visual justification instead. This might suggest that the visualization here plays a double role: both functioning as an indispensible inference method, and at the same time concealing the fact that an algebraic-symbolical proof may also be given. What this implicitly indicates is that an algebraic proof is unnecessary even though, as we will see later, Zariski followed this algebraic line of thought. This perspective, however, misses the bigger framework within which Enriques worked. Taking into account his familiarity with Hurwitz's algebraic formulation of the same procedure, Enriques rather decided to give more weight to the visualization of the loops themselves encircling the branch curve. Indeed, Hurwitz already provided the algebraic proof in 1891 [Hurwitz 1891, p. 28–31].

After using this visual argument, Enriques then employs algebraic inference methods, proving that in this case of the tangency point, $S_1' = S_1, S_2' = S_2$. Using the same argumentation, though without drawing any figures, he subsequently investigates what happens in the neighborhood of a node and a cusp. In the case of a node, Enriques proves that locally the corresponding permutations should be disjoint (e.g., $S_1 = (12), S_2 = (34)$) while in the case of a cusp, the corresponding permutations should have only one index in common (e.g., $S_1 = (12), S_2 = (23)$).

The recapitulation of the theorem, appearing at Section IV of Enriques' paper, summarizes the necessary conditions for a curve to be a branch curve, i.e., what results when it is known that C is a branch curve. The theorem might be thought of as algebraic, presenting the map sending the loops (in the complex line $y = tx$, encircling the points $A_1, \ldots, A_m$) to their corresponding permutations. While the language that Enriques employs is partially algebraic (describing the relations between the permutations), it is also to a certain degree visual-topological: the algebraic map determined while one follows "any path [cammino] of t that approaches a critical point $t = t_c$" [Enriques 1923, p. 196]. In other words, at *every* neighborhood of a critical point there is a (possible) visualization of the path (of t) approaching it as well as of the corresponding loops (though a loop of the t path is never drawn). Eventually, as Enriques described in Section III of his paper, one considers a loop of t at the complex line τ (thought as a two dimensional real plane). While the algebraic conditions are presented as local ones (what happens at the neighborhood of each critical point), the visual argumentation hints at a global consideration: one should consider the branch curve in its entirety, as the line $y = tx$

performs a complete rotation while moving t along a loop on the plane τ. Proving afterwards that the conditions presented above are not only necessary but also sufficient, Enriques formulates his theorem in terms of "elementary loops" ["giri elementari" or "sistema primitive di cappi"] [Enriques 1923, p. 198]. This already indicates a more algebraic formulation, using the tools of group theory. Nevertheless, Enriques fails to develop this any further.

2.5. *Zariski and the group-theoretic approach*

Such a development takes place only several years later, by Oscar Zariski (1899–1986), in two papers written in 1928 and 1929 respectively.[115] As we will see, his approach is almost purely algebraic: i.e., when Zariski does draw a figure, it is purely technical.

In the 1928 paper "Sopra il teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili" Zariski already notes that while Enriques was the first to pose the problem of the necessary and sufficient conditions of a curve to be a branch curve, the answer he gave did not explicitly introduce "the concept of the fundamental group" [Zariski 1928, p. 134].[116] By the "concept of the fundamental group," denoted in Zariski's paper by G, he means the group of loops in the "residual space $S_4 - D$," [Zariski 1929, p. 306] when S_4 is a real 4-dimensional space (i.e., $\mathbb{R}^4$), and D is the branch curve. The same formulation appears in the 1929 paper "On the Problem of Existence of Algebraic Functions of Two Variables Possessing a Given Branch Curve," a translation of the 1928 paper with new results also added. Zariski in fact shifts the mathematical domain in which the problem was normally situated. "The complete solution of the existence problem depends upon the solution of the following purely topological problem: *Given an algebraic curve, to find its fundamental group.* In this paper we attempt to throw some light upon the structure of the fundamental group." [Zariski 1929, p. 305] Zariski therefore points out that the investigation of branch curves should be focused on finding "the structure of the fundamental group" and not on visualizing the curve or this group.

---

115 For a detailed biography of Zariski and his work, see [Parikh 1991; Slembek 2002].

116 See also: [Libgober 2011, p. 4]: "Today we recognize Enriques relations among the permutations as the same as the relations satisfied by the generators of the fundamental group".

His investigation is therefore completely algebraic, and more specifically, group theoretic.[117]

Indeed, Zariski reformulates Enriques' results in an algebraic way. According to Zariski, "[a] finite set of generators of G [the fundamental group] can easily be constructed," using Solomon Lefschetz's method of finding a more convenient basis to work with,[118] when "the generators g_i [of the group G] satisfy several relations, called *generating relations*." [Lefschetz 1924, p. 307] These generators are what Enriques called a "primitive system of loops" ("sistema primitivo di cappi" [Enriques 1923, p. 198]), but Zariski takes this vague formulation and makes it precise using group theory. By looking at the relations between the generators, relations which are induced from the critical points of the branch curve, Zariski turns Enriques' visual investigation into an algebraic one: the relations of the corresponding permutations, induced from Enriques' analytical-visual argument, turn into algebraic relations between the different generators g_i. [Zariski 1929, p. 310–311] The only figure that appears in this context is a merger of Enriques' three figures (see Figure 20) into one figure (see Figure 21), while the argument is completely independent of any visual demonstration: Zariski notes that for a tangent critical point, "g_1 is transformed into g_2 and g_2 is transformed into $g_2^{-1}g_1g_2$ [...] (see Fig. 1). This leads to the generating relation: $g_1 = g_2$." [Zariski 1929, p. 310] Stating also the relations induced from a node and a cusp of the branch curve, Zariski reformulates Enriques' results in an algebraic way:

> The following theorem is an implicit consequence of the existence theorem, as it is stated by Enriques: THEOREM 4. The elementary generating relations together with the relation $g_1 g_2 \cdots g_n = 1$, form a complete set of generating relations, i.e., every relation between the generators is a consequence of them. [Zariski 1929, p. 312]

117 This group theoretical approach highlights Zariski's growing interest in the algebraization of geometry, which culminates in the latter half of the 1930s. As Carol Parikh notes, "[Zariski] began [during the early 1930s] with the books of two algebraists who had been deeply influenced by Emmy Noether in Göttingen, B. L. van der Waerden's *Modern Algebra* and Wolfgang Krull's *The Theory of Ideals*." [Parikh 1991, p. 52]. See also [Parikh 1991, pp. 51–57]. Zariski's connection with Emmy Noether and the German algebraic school mark an important turning point in his conception of algebraic geometry.

118 [Zariski 1929, p. 307]: "It can be shown,* that any circuit g is equivalent to a circuit g' belonging to a generic 'line' l [...] through O (a two-dimensional manifold, homeomorphic to a sphere)." In the footnote * Zariski refers to: [Lefschetz 1924, p. 33]. Lefschetz's analysis at Chapter III "the topology of algebraic surfaces" (to which Zariski refers) does not contain a single illustration.

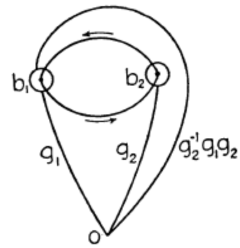


FIG. 1

FIGURE 21. Zariski's depiction of the change of the loops while encircling a branch point. [Zariski 1929, p. 310]

Another additional development can be seen in Zariski's papers when compared to Enriques' work. While Enriques only hinted at the fact that there are curves that are not branch curves but have the same numeric invariants as branch curves, Zariski clearly formulates this claim. In 1928, Zariski asks "is the number of the cusps enough for determining the fundamental group of a given curve, or does this group depend also on the position of the cusps?" [Zariski 1928, p. 137] Zariski gives as an example two curves of order 6 with 6 cusps: the first, a branch curve of a complex surface of degree 3: [119] the branch curve is of degree 6, has 6 cusps lying on a conic, [120] and the fundamental group of the complement of this curve is isomorphic to a group generated by two elements g_1 and g_2 such that $(g_1)^3 = 1$ and $(g_2)^2 = 1$. [121] The second curve is also of degree 6, when the 6 cusps are in general position. Nevertheless, Zariski asks whether the two curves have the same fundamental group [Zariski 1928, p. 138]. Initially there is a negative answer to this question [Zariski 1929, p. 320], but only in few years later Zariski proves that "the fundamental group of a sextic with six cusps not on a conic is cyclic" [Zariski 1937, p. 357], that is, this group is generated by one element g, with only one relation $g^6 = 1$. The computations that Zariski performs in both cases are completely algebraic, and he does

119 Under a generic projection from a point not on a surface.

120 This result was in no way obvious since a unique conic passes through 5 points in a generic position, i.e., there is no conic that passes through 6 points in a *generic* position.

121 See: [Zariski 1929, p. 325]: "The fundamental group of a sextic curve f possessing 6 cusps on a conic (branch curve of the general cubic surface) is generated by two elements of orders 2 and 3 respectively." In: [Zariski 1928, p. 137] a different yet equivalent description for the relations is given: the relations presented there are $g_2g_1g_2 = g_1g_2g_1$ and $(g_1g_2)^3 = 1$.

not visualize the corresponding curves or the loops involved. Moreover, as we will see in the next subsection, in 1930 by using completely different methods Segre proved the fact that the second curve is *not* a branch curve.

If the global position of the cusps played such a crucial role for Zariski, why did he not offer a visualization of the global position of these cusps to the reader? [122] The answer is already hinted at above: for Zariski the drawings related to the branch curve were technical, and their investigation was found in another—algebraic—mathematical context. Heisuke Hironaka, a student of Zariski, notes that for his teacher, “you don’t get algebraic intuition from the geometric intuition” [Parikh 1991, p. 81]. In so doing Hironaka indicates Zariski’s preference for not relying on figures and drawings. While it might seem that at least in the case of the branch curve of the cubic surface, visualization was perhaps possible, it is essential to recall that in order to compute the fundamental group of a sextic with six cusps not on a conic, Zariski used a deformation argument by “remov[ing] a certain number of cusps” [Zariski 1937, p. 356] from a generic sextic with 9 cusps. These deformation processes were only visualized in exceptional cases.

With Zariski’s emphasis on the group-theoretical investigation, as well as on transforming the visualization into a technical or even an obsolete method, one can note a shift in the way visualizations were considered. When Zariski posed his questions on the positional aspect of the singular points of the branch curve, he did so without even implying their possible visualization. Segre further advanced this approach, as we will see in the next section.

2.6. *Segre and special position of the singular points*

A year after the publication of Zariski’s 1929 paper, which presented the example of the branch curve of a surface of degree 3, Beniamino Segre (1903–1977) published his paper “Sulla Caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali”. Segre was an extremely productive algebraic geometer. Though Segre published only one paper in 1930 dealing with the branch curve, this paper pointed towards a different direction for research and generalized Zariski’s results in two ways. Firstly, while Zariski showed that the cusps of the branch curve of a (smooth) complex

---

122 Interestingly, in his 1928 paper Zariski does mention Wirtinger’s construction—which *was* accompanied by a drawing—concerning the intersection of a three-dimensional sphere with a neighborhood of a cusp, resulting in a “Dreiblattschlinge” [Zariski 1928, p. 137] (though the usual term was and is “Kleeblattschlinge”). However, Zariski was not interested in the local investigation of the cusps, but rather in their global behavior.

surface of degree 3 are in a special position (i.e., all of them lie on a conic), Segre shows the singular points of any branch curve of a (smooth) complex surface of degree n—*for any* n, $n \geq 3$—are in a special position. This means that the position of these singular points is not generic. Secondly, Segre pursues the questions posed by Enriques and Zariski: what are the necessary and sufficient conditions for a nodal cuspidal plane curve to be a branch curve of a smooth complex surface embedded in the (projective complex) three-dimensional space $\mathbb{CP}^3$. Segre, however, does not follow their methods. [123]

The way to this generalization for Segre involved a shift in the methods of inference used as well as of the mathematical domain, in which the problem was located. Segre notes at the beginning of his paper that with the approaches of Zariski and Enriques "group-theoretic and topological considerations are essentially involved—while leading to remarkable results, these do not exhaust the argument. The difficulties encountered in the above approaches depend on the fact that not every algebraic plane curve is a branch curve of a (non cyclic) multiple plane: it is a matter of *characterizing* branch curves of such [multiple] planes." [124] [Segre 1930, p. 97]

How does Segre characterize branch curves? The method Segre presents is completely novel, when compared to the methods of Enriques and Zariski. Concentrating only on complex smooth surfaces embedded in the $\mathbb{CP}^3$, Salmon already knew the numerical invariants of a branch curve of a surface of degree n (see Section II.1), and Segre references his work: [Segre 1930, p. 99] The degree of the branch curve is $n(n-1)$, the number of nodes is $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ and the number of cusps is $n(n-1)(n-2)$. Segre then uses the machinery of *adjoint curves*: Given a plane curve C, a second curve A is said to be *adjoint* to C if it contains each singular point of C of multiplicity r with multiplicity at least $r-1$. In

123 While Segre refers explicitly to Enriques' and Zariski's papers, his motivation (as well as Enriques' and Zariski's) also lied in the investigation of the variety $V_{n,\delta,\varkappa}$ (of curves of degree n with δ nodes and $\varkappa$ cusps). Zariski proved that $V_{6,0,6}$ has two disjoint components, and Segre was inspired by this discovery to see whether one can obtain—via an investigation of branch curves—decompositions of other varieties $V_{n,\delta,\varkappa}$ (i.e., for different n, δ and $\varkappa$). Regarding the investigation of this variety, Aldo Brigaglia and Ciro Ciliberto note, that due to remarks also made by Zariski regarding the difficulties investigating this variety, "the research on moduli [i.e., the variety $V_{n,\delta,\varkappa}$] suffered the same fate as that concerned with the fundamental theorem of irregular surfaces, that is, it was left incomplete and inconclusive." [Brigaglia & Ciliberto 1995, p. 102]

124 " [...] nelle quali entrano in gioco in modo essenziale considerazioni gruppali e topologiche—pur conducendo a risultati notevolissimi, non esauriscono l'argomento. Le difficoltà che s'incontrano nella suddetta estensione, dipendon dal fatto che non ogni curva piana algebrica è curva di diramazione d'un piano multiplo (non ciclico): si tratta dunque di *caratterizzare* le curve di diramazione di tali piani."

particular, A is adjoint to a nodal-cuspidal curve C if it passes through all nodes and all cusps of C. For example, for the branch curve of a surface of degree 3, the six cusps lie on a conic; hence the conic is an adjoint curve to this branch curve. Already in the first section of the paper, one sees that Segre considers neither the visualization of curves nor their fundamental group. His main results in this section involve proving—using *non-visual*, algebraic-geometric methods, such as the existence and properties of linear series, equivalence of divisors and Noether's $AF + BG$ theorem—that, for example, the following adjoint curves to the branch curve exist:

(1) Two adjoint curves of degrees $(n-1)(n-2)$ and $(n-1)(n-2)+1$ passing smoothly through the nodes and the cusps of the branch curve. [Segre 1930, p. 100, 102]

(2) An adjoint curve of degree $n(n-1)-2$, having nodes at the cusps of the branch curve and passing smoothly through the nodes of the branch curve. [Segre 1930, p. 101]

Nevertheless, Segre's main result runs in the opposite direction: that is, he proves the following theorem:

> A nodal-cuspidal plane curve B of degree $n(n-1)$ with $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)(n-3)$ nodes and $n(n-1)(n-2)$ cusps is the branch curve of a generic projection of a smooth surface of degree n in $\mathbb{CP}^3$ *if and only if* there are two adjoint curves of degrees $(n-1)(n-2)$ and $(n-1)(n-2)+1$ passing through the nodes and the cusps of the curve [Segre 1930, p. 111].

Just as before the proof uses tools and methods from algebraic geometry, which Segre failed to visualize generally. He also ignored the possibility of drawing the special relations between the singular points of the branch curve. This is no surprise: taking a look at the three volumes of Segre's *Opere scelte* [Segre 1987a;b; 2000] there is not a single sketch or figure in his papers. Beniamino Segre's preference for the symbolical algebraic-geometrical method over the more visual-topological one is clear. This stands in sharp contrast to his uncle, Corrado Segre, "the leader of the Italian School of algebraic geometry," who, as Giacardi notes, "increased the collection of models [in Turin]. In fact he believed that the models could sometimes pave the way to discovery" [Giacardi 2015b, p. 2785]. Beyond this personal preference, however, one should note two fundamental differences when comparing to the visualizations of Enriques and Zariski. Firstly, all of Enriques' sketches and most of Zariski's sketches and figures related to branch curves, were of local nature: that is, what was drawn was a depiction of what occurs (to certain loops) in a local neighborhood of the singular points of the branch curve. An attempt to construct a three-dimensional model or to sketch a two-dimensional figure of the branch curve entirely, as was done in the case of Riemann surfaces and their branch points, was not even attempted.

If one compares the German to the Italian tradition of constructing material models, a second difference can be seen. The construction of a three-dimensional model of the branch curve (as, for example, the real part of a singular Riemann surface) required practical specialty and expertise in handcraft that the Italian school of algebraic geometric did not have. As mentioned above, while models of surfaces were mostly bought from Germany, they were hardly produced in Italy. However, this only adds up to an imperfect explanation as to why the lack of visualization methods of branch curves is linked to the almost non-existent expertise of the Italians in making models. Certainly, a more elaborate explanation is required.

Indeed, it should also be remembered that the thesis advisor of B. Segre in Turin was his uncle, Corrado Segre, who, as noted above, supported the construction of material mathematical models and even considered them epistemic things, carrying their own reasoning. As already mentioned, these models were also constructed in Turin. Even if he did not include a single sketch or reference to models in his writings, B. Segre must have been at least aware of this tradition and also of the ideas of his uncle regarding such models. However, to emphasize—the production of the models of branch curves had to take into account the special position of the nodes and the cusps. As remarked above, it is unclear whether in Turin the necessary expertise for constructing such models existed. This is to be contrasted with the situation in Germany. As David Rowe notes [Rowe 2018], models of surfaces were produced in Germany that visualized the special position of singular points of surfaces. To be more precise, such models visualized how six nodes of a quartic surface lie on a conic [Rowe 2018, p. 63]—a situation which was almost identical to the special position of the six cusps of the branch curve of a surface of the third degree. Hence, one may claim that either the Italian mathematicians, who in practice did construct or buy models, were unaware of *these* German models, or that they did not have sufficient expertise in model construction to visualize the special position of the singular points of the branch curve.

3. CONCLUSION: THE MANY FACES OF BRANCH POINTS AND BRANCH CURVES

After his 1930 paper, Segre did not investigate branch curves any further. As Edoardo Vesentini remarks [Vesentini 2005, p. 188], the "memoir by B. Segre on the characterization of the branch curve of a multiple plane, that appeared in 1930 and was inspired by a paper of Enriques, followed shortly by a paper by O. Zariski on the same topic. But a critical remark made by O. Zariski on an infinitesimal method used by Enriques in earlier papers on the moduli of an algebraic surface, set some doubts on the validity of Enriques' argument and, consequently on the papers that Segre devoted to this topics."[125] In addition, as Edoardo Sernesi notes, other mistakes in some of Segre's related research were discovered.[126] These mistakes may explain why Segre failed to develop his research on branch curves further.

Research on branch curves did not stop, however, and with it new horizons of visualization appeared after Segre's work. Nevertheless, such developments coincided with new forms of inexperience and the eventual disappearance of visualization. Before concluding, I would like to survey briefly the historical development that took place in the years following—the 1930s.

On the one hand, Egbert van Kampen (1908–1942) in 1933 presented a precise algebraic computation of the fundamental group of the complement of a complex plane curve;[127] his treatment, however, does not contain a single drawing. Zariski's 1935 treatment of branch curves in his book *Algebraic Surfaces* followed van Kampen's formulation.[128] Additionally, Zariski emphasized the topological nature of Enriques' discoveries and less their algebraic context.[129]

---

125 Zariski's critical remark concerns an implicit assumption Enriques made regarding the completeness of the "characteristic system of a complete continuous system of surfaces," a proof of which, according to Zariski, "is not likely to be an easy undertaking". [Zariski 1935, p. 99] This assumption was eventually disproved by Wahl, by finding a counterexample, in 1974. See [Wahl 1974, p. 573].

126 As Edoardo Sernesi notes, another paper by Segre [Segre 1929] deals with the construction of "new components" [of $V_{n,\delta,\varkappa}$] starting from those given and aiming to establish for which values of $n, \delta, \varkappa$, the variety $V_{n,\delta,\varkappa}$ is not empty [Sernesi 2012, p. 446]. However, Sernesi adds that while "Segre's procedure seems to be correct," "his conclusions, as they stand, are incorrect." [Sernesi 2012, p. 447].

127 Van Kampen remarks, while discussing Enriques' results, that "as the resulting proof [of Enriques for finding the relations of the fundamental group of , when is a complex plane curve] seemed too algebraic for this simple and nearly purely topological question, Dr. Zariski asked me to publish a topological proof which is contained in this paper" [van Kampen 1933, p. 255].

128 See: [Parikh 1991, p. 49]: "Most valuable to Zariski was the hiring of E. R. van Kampen, a gifted topologist from Holland. Warm and charming, part Indonesian, he shared with Zariski a lively interest in fundamental groups."

129 [Zariski 1935, p. 162]: "The following comment on the theorem of Enriques may be of interest. From a purely topological point of view the theorem of Enriques says

The works of Oscar Chisini (1889–1967), one of Enriques' students, should also be taken into account, on the other hand. Already in 1920–1921, probably following Enriques, he initiated a research on branch curves, which dealt with the question of the birational equivalence of two complex surfaces having the same branch curve; nevertheless, this paper did not contain a single drawing or a sketch [Chisini 1921]. In the 1930s, 1940s and the 1950s, however, while returning to research complex surfaces as coverings of the complex projective plane and their branch curves, he arrived at the idea of "realizing a visible model of the fundamental group of the complement of an algebraic curve in the complex projective plane [...] being particularly relevant in the theory of multiple planes. The model in question is that by Chisini called the *characteristic braid* of the algebraic curve, and allowed him to place in evidence the topological-combinatorial aspects of the theory of curve singularities and multiple planes." [Brigaglia & Ciliberto 1995, p. 113–114] In 1933 Chisini first integrated braids (in Italian "treccia" [Chisini 1933, p. 1151]) as a visual aid into the research of complex curves and their branch points. Given a complex curve as a cover of the complex line, Chisini investigated the preimages of a loop (on the complex line) surrounding the image of singular and branch points of the curve (see for example Figure 22). [130] However, how Chisini continued to research braid theory and branch curves—leading him in 1944 to conjecture that the branch curve uniquely determines the associated branched covering once the degree of the cover is larger than 4—is beyond the scope of the current paper. [131]

that the relations [Enriques found] give a complete set of conditions for the existence of k-fold covering manifolds with f as branch curve (4-dimensional Riemannian varieties consisting of k samples of the projective plane P connected in a proper manner along the curve f). However, from this does not follow immediately the completeness of the set of generating relations [...] for the fundamental group G, proved by van Kampen."

130 Chisini, it is essential to note, did not use in 1933 the machinery of algebraic braid theory, as developed by Artin in 1925.

131 Chisini conjecture [Chisini 1944] is as follows: Let B be the branch curve of a generic ramified covering of degree at least 5. Then the branched covering is uniquely determined by the branch curve. This stands in contrast to the situation of Riemann surfaces and Hurwitz's formulation. Recall that Hurwitz noted that by specifying the number of sheets, the position of its branch points, and the local monodromy behavior at these branch points, one can determine the Riemann surface. Chisini conjectured *almost the contrary*: that, in fact, for complex algebraic surfaces, once the degree of the branch curve is big enough, one does not need to specify the number of sheets (i.e., the degree of the surface) or the permutations of the sheets (i.e., the epimorphism to the symmetric group)—and only the "position" of the branch curve is enough to determine uniquely the surface.

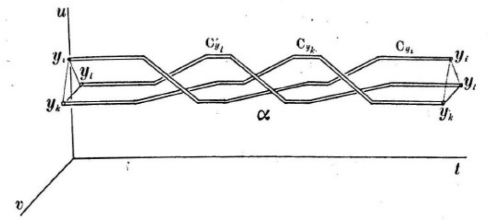


FIGURE 22. Chisini's "model" [Chisini 1933, p. 1141] for depicting the preimages of a loop encircling a branch point (figure taken from: [Chisini 1933, p. 1153]).

* * *

For branch points, as was seen in the first section, there was an abundance or rather plurality of visualizations both two- and three-dimensional. To emphasize the obvious: two-dimensional sketches were more easily produced, usually not requiring any special training and being a part of the writing process—as can be seen with Enriques' sketch; this stands in opposition to the production of three-dimensional models, which did require special craftmanship. Nevertheless, the various illustrations and three-dimensional models, which at times were inadequate to each other, prompted indirectly, as I suggested, along with the various inherent (dimensional) restrictions (i.e., visualizing the ramification curve as a curve on a four-dimensional object (the surface) in a six-dimensional space), an "invisibility" of the branch curve, when mathematicians came to deal with them.[132] Only a partial visualization of the entire branch curve was undertaken (or it was considered in its entirety to be non-visualizable). And this happened in several modes: Wirtinger, to give a first example, made only the local behavior of the singular points of the branch curve visible, prompting incomprehension of the global behavior of these points. Although the real part of the branch curve could have been drawn, all of the actors surveyed in Section II decided not to do so. Even if we consider Enriques' 1899 sketch as an exception, he was not even attempting to illustrate the unique characteristics of this curve. Besides the fact that they considered visualization unnecessary or technical, the reason why Segre and Zariski did not make a single drawing might be due to the special position of nodes and cusps. If one wanted to draw the (real part of the) branch curve, one had to find an equation for this curve where all of the singular points were real (in order to show their special position), a task that would result in tedious calculations. When Zariski finally

132 Regarding making invisible scientific objects and procedures, see: [Nasim 2018].

posed the question regarding the position of the cusps with respect to each other, to give a second example, he did not draw a single illustration of the global position of these points. Zariski also shifted the research from one on branch curves to an algebraic research on the fundamental group of a complement of a curve as such. Visualization as a mean of mathematical reasoning or as an inference step, as was seen with Enriques' loops, led to another kind of invisibility. Not only one can consider certain loops as those, which should have been drawn (recall Enriques' loop of the parameter t on the complex plane τ) but were not; but this invisibility occurred in two additional ways: firstly, it concealed the necessity of an algebraic argument; secondly, and precisely due to this lack of consideration when it came to algebraic arguments, it may have resulted in a more algebraic approach, which can be seen in Zariski's work. And eventually, with Segre and Zariski, a process involving the differentiation of research traditions and mathematical practices took place, leading to a diminishment in the epistemological advantages that visualization techniques may have provided, and favoring instead group-theoretic or algebraic-geometrical methods.

Becoming technical—as with Zariski's usage of diagrams—points towards another mode of becoming invisible, one in which the epistemological aspect of the visualized object disappears. This can be seen with Zariski's illustration in particular, and with the Italian usage of three-dimensional material models in general, located in an essentially different culture of visualization than that which occurred in Germany. As was noted, in Germany there were models that showed singular points in a special position, but those models were probably not a part of the German-Italian exchange

To conclude, I would like to return shortly to the differentiation I mentioned at the conclusion of Section I.6. There I discussed how visualization techniques oscillated between being exact and co-exact. That is, they fluctuated between being the *exact* material or illustrated representation of the mathematical object (for example, the three-dimensional models of a branch point of Riemann surfaces) and between being a *co-exact* visualization of partial, non-metrical (i.e., non-sensitive to quantitative parameters) (for example, the loops of Enriques or the braids drawn by Sevei, Enriques and Chisini). The oscillation of these techniques, between being exact and co-exact, between being epistemological and technical, created not only new mathematical approaches to the visualization of branch curves and branch points, but also engendered new approaches—algebraic or analytical, for example—which rendered the mathematical object—in this case, the branch curve—invisible.

Acknowledgements

I would like to thank warmly the two anonymous referees for their extremely useful comments and references.

REFERENCES

Artin (Emil)
[1925] Theorie der Zöpfe, *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 4 (1925), pp. 47–72.

Baker (Roger), Christenson (Charles) & Orde (Henry), eds.
[2004] *Collected Papers of Bernhard Riemann (1826–1866)*, Heber City: Kendrick Press, 2004.

Banks (Eric C.)
[2013] Extension and measurement: A constructivist program from Leibniz to Grassmann, *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, 44(1) (2013), pp. 20–31.

Bobillier (Étienne)
[1827–1828] Recherche sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827–1828), pp. 253–269.

Boltzmann (Ludwig)
[1892] Über die Methoden der theoretischen Physik, in Dyck (Walther v.), ed., *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, Munich: Wolf, 1892, pp. 89–99.
[1915] On the Methods of Theoretical Physics, *The Monist*, 25-2 (1915), pp. 200–211.

Bottazzini (Umberto), Conte (Alberto) & Gario (Paola)
[1996] *Riposte Armonie: Lettere di Federigo Enriques a Guido Castelnuovo*, Torino: Bollati Boringhieri, 1996.

Bottazzini (Umberto) & Gray (Jeremy)
[2013] *Hidden Harmony - Geometric Fantasies. The Rise of Complex Function Theory*, New York: Springer, 2013.

Brigaglia (Aldo) & Ciliberto (Ciro)
[1995] *Italian Algebraic Geometry between the Two World Wars*, Kingston (Ontario): Queen's University, 1995.

Brill (Alexander)
[1887] Über die Modellsammlung des mathematischen Seminars der Universität Tübingen (Vortrag vom 7. November 1886), *Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteilungen*, 2 (1887), pp. 69–80.

BRILL (Ludwig)

[1885] *Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, Darmstadt: Brill, 1885; 3. ed.

[1888] *Katalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*, Darmstadt: Brill, 1888; 4. ed.

CAPELO (Antonio C.) & FERRARI (Mario)

[1982] La 'cuffia' di Beltrami: storia e descrizione, *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 2–2 (1982), pp. 233–247.

CASTELNUOVO (Guido)

[1928] La geometria algebrica e la scuola italiana, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Vol. I, Bologna: Zanichelli, 1928, pp. 191–201.

CHISINI (Oscar)

[1921] La risoluzione delle singolarità di una superficie mediante trasformazioni birazionali dello spazio, *Memorie della reale Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna*, 7e ser., 8 (1921), pp. 1–42.

[1933] Una suggestiva rappresentazione reale per le curve algebriche piane, *Rendiconti del reale istituto lombardo di scienze e lettere*, 66 (1933), pp. 1141–1155.

[1944] Sulla identita birazionale delle funzioni algebriche di due variabili dotate di una medesima curva di diramazione, *Rendiconti del reale istituto lombardo di scienze e lettere*, 77 (1944), pp. 339–356.

CILIBERTO (Ciro) & FLAMINI (Flaminio)

[2011] On the branch curve of a general projection of a surface to a plane, *Transactions of the American Mathematical Society*, 363–7 (2011), pp. 3457–3471.

CLEBSCH (Alfred)

[1872] Zur Theorie der Riemannschen Flächen, *Mathematische Annalen*, 6 (1872), pp. 216–230.

DYCK (Walter v.)

[1880] Ueber Untersuchung und Aufstellung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemann'scher Flächen, *Mathematische Annalen*, 17 (1880), pp. 473–509.

[1886] *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut der k. technischen Hochschule in München. Modelle zur Functionentheorie (Zu Serie XIV)*, Munich, 1886.

DYCK (Walter v.), ed.

[1892] *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, Munich: Wolf & Sohn, 1892.

Enriques (Federigo)
[1912a] Sur le théorème d'existence pour les fonctions algébriques de deux variables indépendantes, *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 154 (1912), pp. 418–421.

[1912b] Sui moduli d'una classe di superficie e sul teorema d'esistenza per funzioni algebriche di due variabili, *Atti della Accademia delle scienze di Torino*, 47 (1912), pp. 300–307.

[1915] *Teoria geometria delle equazioni e delle funzioni algebriche,* vol. 1, Bologna: Zanichelli, 1915.

[1923] Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione, *Annali di matematica pura ed applicata*, ser. 4, 1 (1923), pp. 185–198.

Epple (Moritz)
[1995] Branch Points of Algebraic Functions and the Beginnings of Modern Knot Theory, *Historia Mathematica*, 22 (1995), pp. 371–401.

[1999] *Die Entstehung der Knotentheorie: Kontexte und Konstruktionen einer modernen mathematischen Theorie*, Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg, 1999.

[2004] Knot Invariants in Vienna and Princeton during the 1920s: Epistemic Configurations of Mathematical Research, *Science in Context*, 17(1/2) (2004), pp. 131–164.

[2016] 'Analogien', 'Interpretationen', 'Bilder', 'Systeme' und 'Modelle': Bemerkungen zur Geschichte abstrakter Repräsentationen in den Naturwissenschaften seit dem 19. Jahrhundert, *Forum Interdisziplinäre Begriffsgeschichte*, 5 (1) (2016), pp. 11–30.

Ferreirós (José)
[2007] *Labyrinth of Thought. A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, Basel: Birkhaüser, 2007.

Fischer (Gerd), ed.
[1986a] *Mathematical Models: From the Collections of Universities and Museums,* Braunschweig: Vieweg and Sohn, 1986.

[1986b] *Mathematical Models: From the Collections of Universities and Museums (Kommentarband),* Braunschweig: Vieweg and Sohn, 1986.

Flood (Raymond)
[2006] Mathematicians in Victorian Ireland, *Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 21–3 (2006), pp. 200–211.

Frege (Gottlob)
[1884] *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: W. Koebner, 1884.

Fricke (Robert) & Klein (Felix)
[1897] *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen,* 1, Leipzig: Teubner, 1897.

GIACARDI (Livia M.)

[2015a] Models in Mathematics Teaching in Italy (1850–1950), in Bruter (Claude), ed., *Proceedings of Second ESMA Conference, Mathematics and Art III*, Paris: Cassini, 2015, pp. 9–33.

[2015b] Geometric Models in Mathematics Teaching in Italy at the Turn of the Twentieth Century, *Oberwolfach Reports*, 47 (2015), pp. 2784–2788.

GOW (Row)

[1997] George Salmon 1819–1904: his mathematical work and influence, *Bulletin of the Irish Mathematical Society*, 39 (1997), pp. 26–76.

GRAY (Jeremy)

[1982] From the History of a Simple Group, *The Mathematical Intelligencer*, 4–2 (1982), pp. 59–67.

[1999] The Classification of Algebraic Surfaces by Castelnuovo and Enriques, *The Mathematical Intelligencer*, 21 (1) (1999), pp. 59–66.

[2015] *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*, Cham: Springer, 2015.

GUERRAGGIO (Angelo) & NASTASI (Pietro)

[2006] *Italian Mathematics Between the Two World Wars*, Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser, 2006.

HASHAGEN (Ulf)

[2003] *Walther von Dyck (1856–1934): Mathematik, Technik und Wissenschaftsorganisation an der TH München*, Stuttgart: Franz Steiner, 2003.

[2015] Mathematics on Display: Mathematical Models in Fin de Siècle Scientific Culture, *Oberwolfach Reports*, 47 (2015), pp. 2838–2841.

HAUBRICHS DOS SANTOS (Cleber)

[2015] *Étienne Bobillier (1798–1840) : parcours mathématique, enseignant et professionnel*, Ph.D. thesis, Nancy: Université de Lorraine, 2015.

HAZEWINKEL (Michiel), ed.

[1995] *Encyclopaedia of Mathematics*, Dordrecht: Kluwer, 1995.

HOLZMÜLLER (Gustav)

[1882] *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der conformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik*, Leipzig: Teubner, 1882.

HURWITZ (Adolf)

[1891] Über Riemannsche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, *Mathematische Annalen*, 39 (1891), pp. 1–61.

VAN KAMPEN (Egbert R.)

[1933] On the fundamental group of an algebraic curve, *American Journal of Mathematics*, 55 (1933), pp. 255–260.

Klein (Felix)
[1872] *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Erlangen: Duchert, 1872.
[1874] Ueber eine neue Art der Riemannschen Flächen (Erste Mitteilung), *Mathematische Annalen*, 7 (1874), pp. 558–566; repr. in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. 2, pp. 89–98.
[1876] Ueber eine neue Art der Riemannschen Flächen (Zweite Mitteilung), *Mathematische Annalen*, 10 (1876), pp. 398–416; repr. in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. 2, pp. 136–155.
[1879] Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen, *Mathematische Annalen*, 10 (1879), pp. 398–416; repr. in *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, vol. 3, pp. 90–134.
[1892] Geometrisches zur Abzählung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen, in von Dyck (Walther), ed., *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*, Munich: Wolf, 1892, pp. 3–15.
[1896] The Arithmetizing of Mathematics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2–8 (1896), pp. 241–249.
[1911] *The Evanston Colloquium. Lecture on Mathematics*, New York: American Mathematical Society, 1911.

Krauthausen (Karin)
[2014] Der unmögliche ‘Teste’ und der mögliche ‘Léonard’: Zu Paul Valérys Modellierung (in) der Literatur, in Balke (Friedrich), Siegert (Bernhard) & Vogl (Joseph), eds., *Modelle und Modellierung*, Paderborn: Wilhelm Fink, 2014, pp. 89–103.

Kronecker (Leopold)
[1881] Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 91 (1881), pp. 301–334.

Kulikov (Viktor S.)
[1999a] On Chisini’s Conjecture, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk: Seriya Matematicheskaya*, 63–6 (1999), pp. 83–116.
[1999b] On Chisini’s Conjecture II, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk: Seriya Matematicheskaya*, 72–5 (1999), pp. 63–76.

Larvor (Brendan)
[2017] From Euclidean Geometry to knots and nets, *Synthese*, 2017; `https://doi.org/10.1007/s11229--017--1558-x`.

Laugwitz (Detlef)
[1996] *Bernhard Riemann 1826–1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Basel et al.: Birkhäuser, 1996.

Lefschetz (Solomon)
[1924] *L’analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris: Gauthier-Villars, 1924.

LIBGOBER (Anatoly)

[2011] Development of the theory of Alexander invariants in algebraic geometry, in Cogolludo-Agustín (José Ignacio) & Hironaka (Eriko), eds., *Topology of Algebraic Varieties and Singularities*, Contemporary mathematics, vol. 538, Providence, RI: American Mathematical Society, 2011, pp. 3–17.

LÜROTH (Jacob)

[1871] Note über Verzweigungsschnitte und Querschnitte in einer Riemann'schen Fläche, *Mathematische Annalen*, 4–2 (1871), pp. 181–184.

MAHR (Bernd)

[2012] On the Epistemology of Models, in Abel (Günter) & Conant (James), eds., *Rethinking Epistemology*, vol. 1, Berlin/Boston: de Gruyter, 2012, pp. 301–352.

MANDERS (Kenneth)

[2008] Diagram-Based Geometric Practice, in Mancosu (Paolo), ed., *The Philosophy of Mathematical Practice*, Oxford: Oxford Univ. Press, 2008, pp. 65–79.

MAXWELL (James C.)

[1856] On Faraday's Lines of Force, *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, 10 (1856), pp. 155–229.

[1861] On Physical Lines of Force, part I: The Theory of Molecular Vortices applied to Magnetic Phenomena, *Philosophical Magazine*, ser.4, 21 (1861), pp. 161–175.

[2002] *The Scientific Letters and Papers: 1874–1879,* vol. 3, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002.

MEHRTENS (Herbert)

[2004] Mathematical Models, in de Chadarevian (Soraya) & Hopwood (Nick), eds., *Models: The Third Dimension of Science*, Stanford: Stanford University Press, 2004, pp. 276–306.

MONGE (Gaspard)

[1847 [1785]] Des ombres, in Olivier (Théodore), ed., *Applications de la géométrie descriptive*, Paris: Carilian-Gœury et Dalmont, 1847, pp. 26–35.

NASIM (Omar W.)

[2018] Making Invisible: The Other Side of Scientific Visualization, in Fiorentini (Erna) & Elkins (James), eds., *Visualization: A Critical Survey of the Concept*, Berlin: IT Verlag, 2018; forthcoming, `https://www.academia.edu/23480639/Making_Invisible_The_other_side_of_Visualization_in_Science`.

NEUENSCHWANDER (Erwin)

[1996] *Riemanns Einführung in die Funktionentheorie*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 1996.

[1998] Documenting Riemann's Impact on the Theory of Complex Functions, *The Mathematical Intelligencer*, 20(3) (1998), pp. 19–26.

Neumann (Carl)
[1865] *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*, Leipzig: B. G. Teubner, 1865.

Oswald (Nicola)
[2015] Adolf Hurwitz faltet Papier, *Mathematische Semesterberichte*, 62–2 (2015), pp. 123–130.

Palladino (Nicla) & Palladino (Franco)
[2009] I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate, *Ratio Mathematica*, 19 (2009), pp. 31–88.

Parikh (Carol)
[1991] *The Unreal Life of Oscar Zariski*, Boston: Springer, 1991.

Parshall (Karen Hunger) & Rowe (David E.)
[1994] *The Emergence of the American Mathematical Research Community, 1876–1900*, Providence (RI)/London: American Mathematical Society/London Mathematical Society, 1994.

Pasch (Moritz)
[1882] *Vorlesungen über neueren Geometrie*, Leipzig: Teubner, 1882.

Poncelet (Jean Victor)
[1817–1818] Questions résolues. Solution du dernier des deux problèmes de géométrie proposés à la page 36 de ce volume; suivie dune théorie des pôlaires réciproques, et de réflexions sur lélimination, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 8 (1817–1818), pp. 201–232.

Puiseux (Victor)
[1850] Recherches sur les fonctions algébriques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 15 (1850), pp. 365–480.

[1851] Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 16 (1851), pp. 228–240.

[1861] *Untersuchungen über die algebraischen Functionen*, trans. Fischer (Hermann), Halle: Schmidt, 1861.

Remmert (Volker R.)
[2017] Kooperation zwischen deutschen und italienischen Mathematikern in den 1930er und 1940er Jahren, in Albrecht (Andrea), Danneberg (Lutz) & De Angelis (Simone), eds., *Die akademische Achse Berlin-Rom*, Oldenburg: de Gruyter, 2017, pp. 305–321.

Rheinberger (Hans-Jörg)
[1997] *Toward a History of Epistemic Things: Synthesizing Proteins in the Test Tube*, Stanford: Stanford University Press, 1997.

RIEMANN (Bernhard)
[1851] Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse, in Dedekind (Richard) & Weber (Heinrich), eds., *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Leipzig: Teubner, 1892, pp. 3–45.

[1854] Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, in Dedekind (Richard) & Weber (Heinrich), eds., *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Leipzig: Teubner, 1892, pp. 272–287.

[1857] Theorie der Abel'schen Functionen, in Dedekind (Richard) & Weber (Heinrich), eds., *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Leipzig: Teubner, 1892, pp. 88–142.

ROWE (David E.)
[2013] Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces, *Mathematische Semesterberichte*, 60–1 (2013), pp. 1–24.

[2017] On Building and Interpreting Models: Four Historical Case Studies, *The Mathematical Intelligencer*, 39(2) (2017), pp. 6–14.

[2018] On Models and Visualizations of Some Special Quartic Surfaces, *The Mathematical Intelligencer*, 40-1 (2018), pp. 59–67.

SALMON (George)
[1847] On the degree of a surface reciprocal to a given one, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 2 (1847), pp. 65–73.

[1852] *A Treatise on the Higher Plane Curves*, Dublin: Hodges and Smith, 1852.

[1862] *A Treatise on Analytic Geometry of Three Dimensions*, Dublin: Hodges and Smith, 1862.

[1874] *Analytische Geometrie des Raumes,* II. Theil*: Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen,* transl. Wilhelm Fiedler, Leipzig: Teubner, 1874.

SATTELMACHER (Anja)
[2013] Geordnete Verhältnisse: Mathematische Anschauungsmodelle im frühen 20. Jahrhundert, in Heumann (Ina) & Hüntelmann (Axel), eds., *Bildtatsachen,* Sonderheft von *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte,* vol. 36 (4), 2013, pp. 294–312.

SCHAPPACHER (Norbert)
[2015] Remarks about Intuition in Italian Algebraic Geometry, *Oberwolfach Reports,* 47 (2015), pp. 2805–2808.

SCHILLING (Martin), ed.
[1903] *Catalog mathematischer Modelle* (6th ed.), Halle: Martin Schilling, 1903.

[1911] *Catalog mathematischer Modelle* (7th ed.), Leipzig: Martin Schilling, 1911.

Scholz (Erhard)
[1980] *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré,* Boston: Birkhäuser, 1980.
[1982] Herbart's Influence on Bernhard Riemann, *Historia Mathematica,* 9(4) (1982), pp. 413–440.
[1999] The Concept of Manifold, 1850–1950, in James (Ioan Mackenzie), ed., *History of Topology,* Amsterdam: North-Holland, 1999, pp. 25–64.

Schubring (Gert)
[2017] Searches for the origin of the epistemological concept of model in mathematics, *Archive for History of Exact Sciences,* 71 (2017), pp. 245–278.

Segre (Beniamino)
[1929] Esistenza e dimensioni di sistemi continui di curve piane algebriche con dati caratteri, *Rendiconti dell'accademia nazionale dei Lincei,* ser. 6, 10 (1929), pp. 31–38.
[1930] Sulla Caratterizzazione delle curve di diramazione dei piani multipli generali, *Memorie della Reale accademia d'Italia, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali,* 4 (1930), pp. 5–31.
[1987a] *Opere scelte,* vol. 1, Bologna: Cremonese, 1987.
[1987b] *Opere scelte,* vol. 2, Bologna: Cremonese, 1987.
[2000] *Opere scelte,* vol. 3, Bologna: Cremonese, 2000.

Segre (Corrado)
[1891] Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche: Osservazioni dirette ai miei studenti, *Rivista di Matematica,* 1 (1891), pp. 42–66; repr. in *Opere,* vol. IV, Roma: Edizione Cremonese, 1963, pp. 387–412.

Sernesi (Edoardo)
[2012] The Work of Beniamino Segre on Curves and Their Moduli, in Coen (Salvatore), ed., *Mathematicians in Bologna 1861–1960,* Basel: Springer, 2012, pp. 439–450.

Severi (Francesco)
[1908] *Lezioni de geometria algebrica,* Padova: Angelo Draghi, 1908.
[1921] *Vorlesungen über Algebraische Geometrie,* Wiesbaden: Springer, 1921.

Slembek (Silke)
[2002] *Weiterentwicklung oder Umbruch? Zu Oscar Zariskis Arithmetisierung der algebraischen Geometrie,* Ph.D. thesis, Univ. Strasbourg & Univ. Mainz, 2002.

Stillwell (John)
[2012] Poincaré and the early history of 3-manifolds, *Bulletin of the American Mathematical Society,* 49–4 (2012), pp. 555–576.

Tobies (Renate)
[2017] Die Clebsche Diagonalfläche in der Korrespondenz Darboux – Klein, in Binder (Christine), ed., *Namenspatrone und Taufpaten: Wie mathematische Begriffe zu ihrem Namen kamen,* Vienna: Technische Universität, 2017, pp. 38–51.

VESENTINI (Edoardo)
[2005] Beniamino Segre and Italian geometry, *Rendiconti di matematica*, ser. 7, 25 (2005), pp. 185–193.

VOLKERT (Klaus)
[1986] *Die Krise der Anschauung: eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*, Göttingen: Vandenhoek & Ruprecht, 1986.

WAHL (Jonathan M.)
[1974] Deformations of Plane Curves with Nodes and Cusp, *American Journal of Mathematics*, 96 (4) (1974), pp. 529–577.

WEIERSTRASS (Karl)
[1988] *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*, ed. Siegmund-Schultze (Reinhard), Vienna: Springer, 1988.

WEYL (Hermann)
[1913] *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Leipzig/Berlin: Teubner, 1913.
[1988] *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie*, Berlin: Springer, 1988.

ZARISKI (Oscar)
[1928] Sopra il teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili, in *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 3–10 Settembre 1928*, vol. 4, Bologna: Zanichelli, 1928, pp. 133–138.
[1929] On the Problem of Existence of Algebraic Functions of Two Variables Possessing a Given Branch Curve, *American Journal of Mathematics*, 51 (1929), pp. 305–328.
[1935] *Algebraic Surfaces*, Berlin: Springer, 1935.
[1937] On the topological discriminant group of a Riemann surface of genus p, *American Journal of Mathematics*, 59 (1937), pp. 335–358.

Sommaire

Contents

Revue d'histoire des mathématiques / *Journal for the History of Mathematics*

Éditée par la Société Mathématique de France, la *Revue d'histoire des mathématiques* publie des articles originaux (en français ou en anglais) consacrés à l'histoire des mathématiques, de l'Antiquité à nos jours. Dans ces textes, les sciences mathématiques peuvent être considérées aussi bien dans leur développement propre que dans leurs rapports à d'autres disciplines ou dans leurs contextes (culturel, institutionnel, social). La *Revue d'histoire des mathématiques* a l'ambition de servir la communauté internationale des historiens des mathématiques en offrant un espace de débat critique ouvert à des bilans historiographiques et des notes prospectives ou programmatiques. Elle s'adresse, au-delà de cette communauté, aux mathématiciens, aux historiens et philosophes des sciences, aux sociologues, aux anthropologues, et à tous ceux qu'intéresse une réflexion sur les mathématiques et leur développement.

Edited under the auspices of the French Mathematical Society (Société Mathématique de France), the Journal for the History of Mathematics *publishes original papers (in French or in English) devoted to the history of mathematics, from Antiquity to the present. The* Journal *welcomes manuscripts dealing with the development of the mathematical sciences proper as well as papers bearing on relationships to other disciplines or on the institutional, cultural, and social contexts. The ambition of the* Journal for the History of Mathematics *is to serve the historians of mathematics' international community by offering a forum for critical debate, open to historiographic essays and programmatic contributions. Beyond the professional community, the* Journal *is addressed to mathematicians, historians and philosophers of science, sociologists, anthropologists, and to all those interested in understanding mathematics and its development.*

À propos des indicateurs bibliographiques / *Bibliographic indicators*

Le Comité de rédaction de la *Revue d'histoire des mathématiques* souhaite exprimer sa position sur les facteurs d'impact et autres indicateurs présents sur le marché des revues scientifiques, comme le taux d'acceptation des articles. En 2009, la *Revue d'histoire des mathématiques* avait déjà, comme la très grande majorité des revues d'histoire des sciences, signé l'appel « Journals under Threat : A Joint Response from HSTM Editors », contre le classement en A, B, C de ces revues. Tant les mathématiciens que les spécialistes de sciences humaines et sociales ont établi que les indicateurs bibliométriques usuels n'ont pas de pertinence individuelle — en particulier parce qu'ils varient d'une discipline à une autre, et même d'une sous-discipline à une autre —, qu'ils ne permettent pas d'évaluer la qualité scientifique d'articles ou d'auteurs, et que la plupart d'entre eux sont faciles à manipuler. Dans un domaine en plein développement théorique comme l'histoire des mathématiques, le Comité de rédaction estime aussi que la qualité d'une revue n'est pas mesurée par son refus d'une grande quantité d'articles (ce qu'il est toutefois amené à faire), mais par sa capacité à améliorer les articles par des rapports détaillés et par l'encadrement des auteurs jusqu'à la publication. Il ne rendra donc public aucun indicateur de ce type.

The Editorial Board of the Revue d'histoire des mathématiques *wishes to express its point of view concerning impact factors—and other indicators such as acceptance rates—that are currently being used in the scientific journal market. In 2009, the* Revue d'histoire des mathématiques*, like most history of science journals, signed the call "Journals under Threat: A Joint Response from HSTM Editors" against the ranking of these journals on an A, B, and C scale. Mathematicians as well as scholars in the social sciences and in the humanities have established that standard bibliometric indicators are meaningless for ranking individual papers; they vary from one discipline to another, and even from one sub-discipline to another, they also do not assess the scientific quality of articles and authors, and most are easy to tamper with. In a field in full conceptual development such as the history of mathematics, the Editorial Board also believes that the quality of a journal is not measured by its rejection of a large number of articles (which it is always obliged to do), but by its ability to improve articles through detailed referee reports and through working with authors at each step of the publication process. The Editorial Board of the* Revue d'histoire des mathématiques *will thus not make public any indicators of this kind.*

Sommaire

Société Mathématique de France

SMF

Société Mathématique de France