

la Gazette

des **Mathématiciens**



- **Hommages à Jean-Marc FONTAINE et Jean-Pierre WINTENBERGER**
- **Mathématiques** – Une percée conceptuelle sur les empilements de sphères
- **Raconte-moi...** l'arbre continu brownien
- **Information** – Les 30 ans de MATH.en.Jeans : une célébration en haut lieu

Comité de rédaction

Rédacteur en chef

Damien GAYET

Institut Fourier, Grenoble
damien.gayet@ujf-grenoble.fr

Rédacteurs

Boris ADAMCZEWSKI

Institut Camille Jordan, Lyon
boris.adamczewski@math.cnrs.fr

Maxime BOURRIGAN

Lycée Sainte-Geneviève, Versailles
maxime.bourrigan@gmail.com

Christophe ECKÈS

Archives Henri Poincaré, Nancy
eckes@math.univ-lyon1.fr

Sébastien GOUËZEL

Université de Nantes
sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Sophie GRIVAUX

Université de Lille
grivaux@math.univ-lille1.fr

Fanny KASSEL

IHÉS
kassel@ihes.fr

Pauline LAFITTE

École Centrale, Paris
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

Romain TESSERA

Université Paris-Sud
romain.tessera@math.u-psud.fr

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. Le cône des diviseurs de toute variété Fano admet une décomposition naturelle en chambres polyédrales. Traverser un mur entre deux chambres adjacentes correspond à un pas dans le programme du modèle minimal. L'image représente la décomposition en chambre pour une surface del Pezzo définie sur \mathbb{Q} , obtenue en éclatant le plan projectif le long de trois orbites de tailles respectives 1, 2 et 5. (crédit : Stéphane LAMY).

N° 162

Éditorial

Il y a quelques jours, je discutais avec un jeune collègue, quand celui-ci m'a demandé soudain « mais c'est quoi Mathscinet ? ». Certes, je croise régulièrement des collègues qui n'ont jamais vu *Star Wars*, mais là c'était autre chose. Et puis un mathématicien de mon âge qui assistait à la discussion m'a fait gentiment remarquer que la génération de jeunes chercheuses et chercheurs, presque née avec internet, avait un usage des bases de données et des moteurs de recherche bien différent de ce qui se passait au milieu des années 90. C'est aussi à cette époque que notre communauté a acté l'étonnant tour de force de certaines maisons d'édition et de l'AMS de conserver leur chiffre d'affaires malgré le passage au numérique, passage qui généra rapidement d'in vraisemblables économies d'échelles aux dépens de nos budgets. Il s'avère que notre communauté s'empare de ce problème avec une fréquence qui s'intensifie, en témoigne par exemple le succès fulgurant (1200 votes en quelques jours) du mini-sondage¹ réalisé par le RNBM au sujet de Mathscinet et ses sévères augmentations constantes de tarif, malgré un bénéfice très conséquent ainsi qu'un actif net impressionnant de l'AMS². Inutile de vous révéler le vote de mon jeune collègue.

Il y a trois ans, une jeune mathématicienne ukrainienne, Maryna Viazovska, déposait sur Arxiv un preprint qui résolvait le problème de l'empilement optimal des boules en dimension 8. Avant elle, seuls les cas des dimensions 1, 2 et 3 étaient connus. Nous publions la traduction en français d'un article des *Notices* de l'AMS relatant cet exploit. Un groupe exceptionnel est derrière cette étrange dimension 8, ainsi que des formes modulaires. Ceux qui se demandent ce qu'il en est des hyperempilements d'hyperboulets d'hypercanons en dimension 24, auront également une réponse à cette hyperquestion.

Notre belle couverture déconstructiviste dévoile certains secrets des variétés de Fano, l'univers de prédilection de l'un des derniers médaillés Fields, Caucher Birkar. Un article particulièrement compréhensible décrit les prouesses du mathématicien kurdo-irano-britannique qui lui ont valu sa médaille. Le texte commence par la construction du plan projectif complexe et se termine par l'intrigant groupe de Cremona.

1. <https://evento.renater.fr/survey/questionnaire-eclair...-5y2mm7z4>

2. <https://www.ams.org/journals/notices/201909/rnoti-p1507.pdf>, p. 1511.

L'impressionnant succès de Marina Viazovska ne doit pas faire oublier la situation statistique, qu'on peut qualifier de déprimante, de la parité en mathématiques. Vous trouverez dans ce numéro un compte-rendu rythmé des thèmes abordés lors de la dernière *Journée Parité* de juillet à l'Institut Henri Poincaré. Ne manquez pas la reproduction d'un article de 1911 narrant l'« Histoire navrante de la première femme reçue à l'agrégation des hommes », funeste avertissement à toutes ces femmes qui s'imaginent les égales des hommes en mathématiques. Ne manquez pas non plus la description d'un modèle probabiliste reproduisant une forme de plafond de verre.

Les préjugés concernant les femmes menacent de se répandre dans une sphère qu'on aurait pu penser neutre, celle de l'intelligence artificielle. Grâce à une interview de Jérôme Pesenti, ancien docteur en géométrie algébrique maintenant chef de l'intelligence artificielle chez Facebook, les lectrices et les lecteurs plongeront dans les problèmes bien concrets que posent à la société les méthodes d'apprentissage des systèmes d'IA. Il y sera question de notre monde transformé en trombones, de linguistes remplacés par des ingénieurs, et de robots tueurs.

Il s'avère que l'intervenant de la *Journée Parité* qui a présenté le modèle du plafond de verre nous a fait le plaisir de corédiger un limpide Raconte-moi sur l'*arbre brownien*. On y découvre que se promener sur le bord d'un grand arbre construit aléatoirement a affaire avec le mouvement brownien, et que ces arbres servent à construire un autre objet fascinant, la sphère brownienne, dont on ne se lasse pas de contempler les somptueuses images hérissées.

L'article misogyne de 1911 mentionné plus haut n'est pas paru dans la *Gazette*, heureusement ! En revanche, le Rétroviseur de ce numéro est une exécution en règle par Jean Leray en 1971 des fameuses *mathématiques modernes*, qui ont fait jadis les délices des futurs chercheurs en herbe, et les affres, sans doute, de tous les autres, y compris enseignants. Des manuels aux parents d'élèves en passant par les inspecteurs, ministres, et même un pauvre petit cochon ailé qui n'avait rien demandé, tout le monde en prend pour son grade !

Le monde p -adique est en deuil. Un carnet fourni recueille des témoignages mathématiques et amicaux de proches de Jean-Marc Fontaine et Jean-Pierre Wintenberger, décédés récemment.

Le comité de rédaction de la *Gazette* vous souhaite une bonne lecture.

Damien GAYET



N° 162

Sommaire

SMF	4
Mot du président	4
HOMMAGES À JEAN-MARC FONTAINE ET JEAN-PIERRE WINTENBERGER	7
Jean-Marc FONTAINE et Jean-Pierre WINTENBERGER – P. COLMEZ	7
Jean-Pierre WINTENBERGER – K. CHANDRASHEKHAR	9
Jean-Pierre WINTENBERGER - Les années strasbourgeoises – R. NOOT	10
Intensité et légèreté : quelques facettes de Jean-Pierre WINTENBERGER – A. DAVID	11
Souvenirs sur Jean-Marc FONTAINE – J.-P. SERRE	12
Jean-Marc FONTAINE – L. ILLUSIE	14
The China Legacy of Jean-Marc FONTAINE – Y. OUYANG	15
Jean-Marc – L. FARGUES	17
Memories of Jean-Marc and his mathematics – M. KISIN	18
MATHÉMATIQUES	21
Une percée conceptuelle sur les empilements de sphères – H. COHN	21
MMP et variétés de Fano, le travail de CAUCHER BIRKAR – J. BLANC	39
ENTRETIEN	47
Un interview de Jérôme PESENTI	47
PARITÉ	52
Parité, la pente est forte et la route sinueuse – I. CHATTERJI, J. LE ROUSSEAU et B. RÉMY	52
RACONTE-MOI	56
l'arbre continu brownien – N. CURIEN et I. KORTCHEMSKI	56
INFORMATION	65
Les 30 ans de MATH.en.Jeans : une célébration en haut lieu – L. DI MENZA	65
RÉTROVISEUR	69
Les mathématiques modernes	70
LIVRES	74



N° 162

Mot du président

Chères et chers collègues,

Suite à de nombreuses situations qui se sont révélées délicates cet été, je souhaite vous faire part dans ce mot de quelques réflexions autour des relations entre agrégation et doctorat en mathématiques.

L'agrégation est un concours qui mène vers l'enseignement dans les établissements scolaires, majoritairement vers les lycées publics. Pour les mathématiques, le grand nombre de concepts abordés, la longueur des épreuves, leur difficulté et leur variété (avec l'épreuve de modélisation pas si facile à appréhender) rendent ce concours difficile d'accès. Cependant, même si le nombre de candidats diminue, l'agrégation reste encore très populaire, en particulier auprès des étudiants de master qui se dirigent vers un doctorat. Ceci est tout d'abord dû à ce que la préparation à l'agrégation constitue une excellente formation généraliste et exigeante en mathématiques - ainsi on peut être poussé vers le concours par sa directrice ou son directeur de thèse. Mais le fait qu'un poste de professeur agrégé constitue une alternative à l'emploi pour les étudiant.e.s qui s'engagent dans une thèse comme première expérience professionnelle, et qui une fois docteurs, ne veulent ou souvent ne peuvent continuer dans le monde de la recherche, est également un argument très répandu.

Une spécificité de l'agrégation, en mathématiques au moins, est que le stage d'enseignement est validé par un monitorat à l'université. Ainsi, on peut être titularisé comme fonctionnaire, en n'ayant finalement pas véritablement fait ses preuves d'enseignant devant une classe de lycée. C'est une chance qu'il faut s'attacher à préserver et à justifier.

Cependant, nous connaissons tous les difficultés de recrutement de professeurs de mathématiques en collège et en lycée (certains établissements n'ont aucun enseignant de mathématiques titulaire). Ainsi, l'éducation nationale souhaite absolument recruter, et peut parfois exiger le retour de « ses » agrégés en poste. Cet état de fait crée des tensions que beaucoup d'entre nous constatons. À la fin des 3 années « standards » durant lesquelles les reports

de stage, sauf exception, sont acceptés, débute donc une autre période plus épineuse. En effet, pour terminer ou prolonger ses travaux de recherche, les agrégés doivent émettre une demande de détachement (si poste ATER) ou de disponibilité (si post-doc à l'étranger). La première est soumise au rectorat concerné, la seconde au ministère, qui peuvent donc accepter, ou non, de telles demandes.

Cette situation est connue de l'ensemble des acteurs impliqués dans ces processus. Une note de service du ministère de l'Éducation nationale datant de décembre 2016 donnait justification aux recteurs d'académie pour refuser les délégations pour nécessité de service. La SMF, notamment avec la SMAI, a signalé les dérives que l'application brutale d'une telle note pouvait engendrer, notamment dans le cas de doctorants qui n'auraient pas encore soutenu leur thèse au terme de leur contrat doctoral.

Ainsi, les doctorant.es doivent bien réaliser la délicatesse potentielle d'une telle situation, et garder plusieurs choses à l'esprit.

Tout d'abord, il est important de respecter les délais légaux pour les procédures et les recours - le nouveau site web de l'agrégation agreg.org procure de précieuses informations sur les démarches et le timing à respecter, en fonction de sa situation.

Si malgré cela, l'on est confronté à un refus, la SMF, lorsqu'elle est prévenue à temps (disons entre mi-juin et fin juillet), peut intervenir auprès des recteurs et d'autres interlocuteurs pour débloquer la situation - cela se produit très régulièrement.

Certaines académies sont plus réticentes que d'autres à accorder des détachements. Dans ces cas, il faut redoubler d'attention dans le montage du dossier et des motivations, et dans le respect des délais impartis (en particulier, ne pas attendre la rentrée du lycée dans lequel on est affecté pour entamer un dernier recours).

Il est difficilement compréhensible de différer sa prise de poste de plus de 5 ans. L'éducation nationale est en droit de se questionner sur la véritable motivation d'un agrégé qui souhaite partir 3 ans en post-doc alors qu'elle ou il a été reçu il y a déjà 5 ans.

Le concours d'agrégation réservé aux docteurs offre une alternative intéressante. Pour les docteurs, non-agrégés ou qui ont dû renoncer à leur agrégation, cela leur permet de mettre à profit leurs trois années de travail pour obtenir un poste d'enseignant.

Enfin, le monde académique et le monde de l'éducation ne sont pas les seules alternatives à la sortie de thèse. De beaux défis professionnels attendent

les docteurs en mathématiques dans le privé. Beaucoup d'entreprises sont prêtes à recruter des docteurs, qui ont acquis des compétences cruciales et uniques pendant leurs années de thèse, qui, j'insiste, constituent une véritable expérience professionnelle, et pas simplement une formation par la recherche. C'est un enjeu important pour nos filières et notre matière que les débouchés qu'elles offrent soient nombreux et variés.

C'est notre rôle et notre responsabilité de directrice et directeur de thèse de diffuser le plus largement possible ces informations.

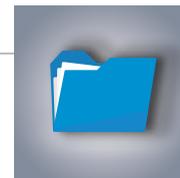
Bien à vous,

Le 1^{er} octobre 2019

Stéphane SEURET, président de la SMF

Le monde p -adique français est en deuil. Après Michel Raynaud l'an dernier, ce sont Jean-Pierre Wintenberger et Jean-Marc Fontaine qui nous ont quittés en janvier, à une semaine d'intervalle.

HOMMAGES À JEAN-MARC FONTAINE ET JEAN-PIERRE WINTENBERGER



Jean-Marc FONTAINE et Jean-Pierre WINTENBERGER

• P. COLMEZ



Jean-Marc Fontaine, né en 1944, entre à l'École polytechnique en 1962 et au CNRS en 1965 avec, comme il le disait, à peine l'équivalent d'un DEA (actuel M2) en poche. Il commence alors une thèse sous la direction de Pisot; au bout de 2 ans de calculs sur les sous-

groupes de ramification des groupes de Galois d'extensions de corps locaux, il est invité, en décembre 1967, à donner un exposé qui allait changer le cours des choses au séminaire Delange-Pisot-Poitou. Comme il aimait à le raconter, à la fin de l'exposé, Poitou, très diplomate, lui dit « C'est très bien ce que vous nous avez raconté; vous devriez le rédiger dans le style de "Corps locaux" ». Il s'est donc jeté sur cet ouvrage¹ dont il ignorait l'existence et y a découvert beaucoup de résultats qu'il avait retrouvés, mais il restait heureusement suffisamment de matière pour un article².

Il y a un monde entre ces calculs initiaux et le programme qu'il a mis en place des années plus tard, mais on y voit quand même, a posteriori, des signes annonciateurs des questions qui allaient l'occuper

toute sa vie, et mener à son programme (connu sous le nom de « programme de Fontaine » ou « théorie de Fontaine » ou encore « théorie de Hodge p -adique ») de classification des représentations p -adiques des groupes de Galois des corps locaux. La théorie de Fontaine est l'outil le plus puissant dont on dispose pour attaquer des questions « globales », i.e. des questions ayant trait aux représentations p -adiques des groupes de Galois des corps de nombres : elle intervient dans la plupart des avancées récentes sur la correspondance de Langlands pour les corps de nombres (dans le sens Galois \rightarrow automorphe, le plus difficile et le plus intéressant pour un théoricien des nombres).

La théorie de Fontaine repose sur la construction d'anneaux aux propriétés un peu magiques (aux noms ésotériques \mathbf{B}_{dR} , \mathbf{B}_{cris} , \mathbf{B}_{st} – prononcer béde-rahm, bécrisse, béesté – \mathcal{E} , $\widehat{\mathcal{E}^{nr}}$) qui ont épouvanté³ ses contemporains : un géomètre (complexe) a déclaré un jour « quand j'entends le nom de \mathbf{B}_{dR} , je sors mon revolver »; il est frappant de constater qu'il a fallu attendre la génération suivante pour trouver des gens commençant à vraiment utiliser ces fameux anneaux. Les constructions de Fontaine feraient plutôt pencher la balance du côté de ceux qui pensent que l'on crée les maths.

Après sa thèse d'État sous la direction de Serre,

1. *Corps locaux*, de Serre, est l'ouvrage de référence du sujet.

2. Extensions finies galoisiennes des corps valués complets à valuation discrète, Séminaire Delange-Poitou-Pisot 1967-68, http://www.numdam.org/item/SDPP_1967-1968__9_1/

3. Pour ne pas provoquer de traumatisme chez les lecteurs de la *Gazette*, le comité de rédaction a préféré ne pas publier l'article compagnon de cet hommage expliquant les tenants et les aboutissants du programme de Fontaine et incluant une construction de ses anneaux.

Fontaine obtient un poste de Maître de conférences (actuel professeur seconde classe) puis de Professeur à l'université de Grenoble où il a un certain nombre d'étudiants dont Guy Laffaille et Jean-Pierre Wintenberger (il en part en 1988 pour rejoindre l'université d'Orsay où il reste jusqu'à la fin de sa carrière, et où il a comme élèves Christophe Breuil, Frédéric Cherbonnier, Laurent Herr, Nathalie Wach, Maja Volkov, Oliver Brinon et Jérôme Plût).



Jean-Pierre Wintenberger, né en 1954, entre à l'École normale de la rue d'Ulm en 1973, à une période dorée pour la théorie des nombres : les promotions 72-73-74 d'Ulm et Sèvres ont vu défiler Henri Carayol, Laurent Clozel, Hélène Esnault, Étienne Fouvry, Guy Henriart, Gérard Laumon, Jean-François Mestre, Colette Moeglin, Bernadette Perrin-Riou, Joseph Oesterlé, Jean-Loup Waldspurger...

La thèse de 3^e cycle de Wintenberger porte sur la théorie du corps des normes, dont un embryon se trouve dans un exposé rédigé⁴ de Fontaine au séminaire de théorie des nombres de Grenoble en décembre 1971. Cette théorie associe, de manière fonctorielle (mais plus ingénieuse que naturelle), à toute tour raisonnable d'extensions de K , avec $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$, une extension finie de $F_p((T))$, ce qui fournit un pont entre les groupes de Galois absolus des extensions finies de \mathbb{Q}_p et ceux des extensions

finies de $F_p((T))$. Elle a donné naissance un peu plus de dix ans plus tard à la théorie des (φ, Γ) -modules de Fontaine qui fournit une classification complète de toutes les représentations p -adiques des extensions finies de \mathbb{Q}_p .

Après sa thèse de 3^e cycle, Wintenberger est nommé, en 1978, attaché de recherche au CNRS à Grenoble⁵. Sa thèse d'État contient un résultat qui est encore mal compris à l'heure actuelle, à savoir l'existence d'un scindage naturel de la filtration de Hodge pour les variétés projectives sur un corps p -adique (on n'a toujours pas de théorie des formes harmoniques p -adiques qui justifierait l'existence de ce scindage).

Après un bref passage à Orsay, où il a suivi Fontaine, Wintenberger est nommé, en 1991, professeur à l'université de Strasbourg qu'il ne quittera plus. C'est là qu'il obtient, en collaboration avec Chandrashekhara Khare (et avec l'aide de Mark Kisin pour l'étape finale), un résultat qui lui vaut une place spéciale au panthéon des mathématiciens : une preuve de la conjecture de modularité de Serre pour les représentations modulo p de dimension 2 du groupe de Galois absolu de \mathbb{Q} , énoncée dans une lettre à Tate datée du 1^{er} mai 1973 et publiée finalement en 1987 (sous une forme renforcée et précisée impliquant le grand théorème de Fermat, la conjecture de Taniyama-Weil et des tas d'autres résultats miraculeux). La preuve repose sur les travaux de nombreuses personnes (en premier lieu ceux de Wiles ayant débouché sur une preuve du grand théorème de Fermat) et est une récurrence délicate sur l'ensemble des nombres premiers, dont le point de départ est un résultat de Tate énoncé dans une lettre à Serre du 2 juillet 1973 dans laquelle il démontre le résultat pour $p = 2$ (grâce au fait que $2^{5/2} = 5,656... < \frac{\pi e^2}{4} = 5,80...$). La théorie de Fontaine (en particulier, ce que l'on appelle la théorie de Fontaine-Laffaille) y joue un rôle fondamental.

4. Corps de séries formelles et extensions galoisiennes des corps locaux, Séminaire de théorie de nombres de Grenoble 1971-72, http://www.numdam.org.ezproxy.math.cnrs.fr/volume/STNG_1971-1972__1/.

5. C'était l'époque où le CNRS nommait les attachés de recherche fraîchement recrutés auprès de leur directeur de thèse pour qu'il puisse continuer à les guider jusqu'à l'obtention d'une thèse d'État. Depuis les années 1990, le CNRS préfère nommer les chargés de recherche fraîchement recrutés loin de leur patron pour qu'ils puissent développer leur autonomie.

Jean-Pierre WINTENBERGER

• K. CHANDRASHEKHAR

It was with great sadness that I learnt of the passing on of Jean-Pierre Wintenberger on January 23rd, 2019. I had last seen him in the hospital Pitié-Salpêtrière in Paris in July 2018. He seemed mentally alert, but physically worn out. I had hoped to see him again this year, but that was not to be. In his last years he suffered from Parkinson's disease.

I got to know Jean-Pierre well through our work together on Serre's modularity conjecture. We arrived at working on the conjecture by different paths. Jean-Pierre was interested in proving cases of the Mumford-Tate conjecture for abelian varieties defined over number fields, and in particular in the first case of it which was still open : that of a 4-dimensional abelian variety defined over a number field. I came to it more directly, and since my PhD thesis in 1995 had been interested in Serre's conjecture. I studied congruences between modular forms in my thesis, and then got interested in questions of lifting Galois representations. Thus we came from different mathematical backgrounds to Serre's conjecture and I think our collaboration benefited from this diversity of interest and training we brought to it.

Jean-Pierre invited me to visit him for a month in Strasbourg, and I visited him in Fall of 2004. Little did I expect that we would spend the month proving the first cases of Serre's conjecture which made no superfluous hypotheses on the residue characteristic and image of the representation! Combining observations we had each made independently, we had a result on Serre's conjecture almost the day I arrived in Strasbourg and then we spent my month's stay making sure of the details. Jean-Pierre explained to me his beautiful idea of "killing ramification" in the first days of my visit. The idea is used to reduce the general case of Serre's modularity conjecture to the level one case. It struck me as an idea that could perhaps naturally occur only to someone who thought very p -adically, and Jean-Pierre since his thesis with Jean-Marc Fontaine in 1979, had thought about the then emerging field of p -adic Hodge theory, proving foundational results, and finding new applications of it.

We were happy to part at the end of my visit, when

I returned to Mumbai, having convinced ourselves that we could show that there were no irreducible odd Serre-type Galois representations of certain low weights and levels as predicted by Serre, and most satisfyingly that the only odd irreducible Serre-type representation of level 1 and Serre weight 12 was the one that arose from Ramanujan's Δ -function. We also had a strategy to prove all of Serre's conjecture assuming broad generalizations of the modularity lifting results pioneered by Wiles. At the end of the productive visit we celebrated by going for dinner, along with the number theorists at Strasbourg, to an elegant restaurant La Casserole in one of the small twisting alleys near the Cathédrale.

We wrote our first paper on Serre's conjecture expecting that to prove the full conjecture using our strategy would require very elaborate developments of the modularity lifting machinery by specialists in the area. But within a few months we found a plausible path using a modification of our original strategy which made extensive and novel use of congruences between Galois representations and was consequently less demanding in terms of the modularity lifting theorems we would need. The topography of this path was reminiscent of the winding, intersecting paths surrounding the Cathédrale in Strasbourg which led to different views of its lone Gothic spire, its motif orienting a visitor's meanderings around it.

It still took us almost 5 years (2004-2009) to complete all the details and have the proof of the full conjecture published. We communicated throughout this period mainly via e-mail, interspersed with meeting at conferences and short visits to Salt Lake City, Paris, Montreal, Strasbourg, Monte-Verita...

Our work benefited enormously from the rigor and technical deftness Jean-Pierre brought to sorting through the niceties of proving modularity lifting theorems in delicate cases, like the 2-adic lifting theorems we needed for our strategy. I admired Jean-Pierre's focus on what was central to mathematics, and his wide mathematical culture, part of which seemed to be due to his education as a Normalien, and then being trained in the formidable French school

of arithmetic geometry. I also admired the sense of adventure in his mathematical work which led him to work on Serre's modularity conjecture, a subject that was a little distant from the mathematics which had occupied him prior to our joint work on it.

Jean-Pierre passed away before he reached 65.

Within a week of Jean-Pierre's death, his advisor Jean-Marc Fontaine passed away, without whose foundational work on p -adic Hodge theory our proof of Serre's conjecture would not have been possible.

I will miss Jean-Pierre's unassuming nature and keen intellect.

Jean-Pierre WINTENBERGER - Les années strasbourgeoises

• R. Noot

Après un début de carrière à Grenoble puis à Orsay, Jean-Pierre Wintenberger est nommé professeur à l'université Louis Pasteur de Strasbourg en 1991. L'IRMA (l'Institut de Recherche Mathématique Avancée) compte déjà une équipe d'algébristes et d'arithméticiens avec Abdallah Al Amrani, Jean-François Boutot, Henri Carayol, Jean-Pierre Jouanolou, Florence Lecomte et Maurice Mignotte. Jean-Pierre y retrouve aussi Jean-Yves Mériandol qu'il avait côtoyé en classes préparatoires, pour ensuite être admis à l'École normale supérieure en même temps.

Emmanuel Peyre et Norbert Schappacher rejoignent l'université de Strasbourg la même année que Jean-Pierre et la dynamique créée par l'arrivée des trois nouveaux collègues conduit à la création d'un séminaire régulier de géométrie algébrique et arithmétique. Jean-Pierre poursuit ses travaux sur les théorèmes de comparaison entre cohomologies (log-)cristalline et étale p -adique en étudiant en particulier la compatibilité des applications de comparaison avec les applications de classes de cycles. Il publie également deux articles remarquables sur des propriétés « motiviques » des systèmes de représentations \mathbb{E} -adiques

À côté de son activité mathématique, Jean-Pierre s'engage dans la vie de l'université, en assurant notamment pendant deux ans la direction de l'UFR vers la fin des années 1990 ainsi que la responsabilité de la formation doctorale en mathématiques dans les années 2000. Il a également été le dernier président de la commission de spécialistes de la section 25 à l'université de Strasbourg, avant l'institution des comités de sélection pour les recrutements des enseignants-chercheurs.

Au début des années 2000, Jean-Pierre s'intéresse aux propriétés des images de représentations galoisiennes provenant de la géométrie algébrique et à une conjecture de Kottwitz et Rapoport sur l'existence de cristaux munis de structures supplémentaires. Il commence également à explorer une conjecture de Fontaine et Mazur visant à caractériser les représentations galoisiennes modulaires et il démarre une collaboration avec Chadrashkhar Khare qui aboutira à la démonstration de la conjecture de modularité de Serre. Les premiers résultats sur ce sujet sont présentés lors d'une conférence à Strasbourg en 2005, que Jean-Pierre organise avec Jean-François Boutot et Jacques Tilouine. La démonstration de la conjecture de Serre sera récompensée par le prix Thérèse Gauthier de l'Académie des Sciences en 2008 et le prix Cole de la Société Mathématique Américaine en 2011 (attribué conjointement à Chadrashkhar Khare et Jean-Pierre Wintenberger). Elle est également exposée, par les deux auteurs, au Congrès International des Mathématiciens à Hyderabad en 2010.

À partir des années 2000, Jean-Pierre a encadré de nombreux étudiants : Agnès David, Lionel Dorat, Carola Eckstein, Auguste Hoang Duc et Alain Muller soutiennent leurs thèses entre 2005 et 2015. Il a été membre senior de l'Institut Universitaire de France de 2007 jusqu'à son départ à la retraite en 2017. Le séminaire et de nombreuses autres activités de l'équipe d'arithmétique et géométrie algébrique ont bénéficié de la dotation de l'IUF pendant toutes ces années.

En 2014, une conférence en l'honneur des 60^e anniversaires de Henri Carayol et de Jean-Pierre Win-

tenberger, a réuni à Strasbourg une soixantaine de collègues. Cet événement a souligné l'impact des travaux de Jean-Pierre dans son domaine.

Chez ses collègues, à Strasbourg comme ailleurs, Jean-Pierre laisse le souvenir d'un mathématicien passionné, très discret mais doué d'une vision extraordinaire, qu'il partageait avec beaucoup de gé-

nérosité. Assis dans un fauteuil dans le coin de son bureau avec un article ou un bloc-notes entre les mains, il était toujours disponible pour écouter et conseiller ses collègues, ses doctorants et ses étudiants. Dans les conseils et les commissions, on pouvait se fier à son jugement, qui était toujours objectif et mûrement réfléchi.

Je remercie Henri Carayol, Christine Huyghe, Florence Lecomte et Norbert Schappacher pour leur aide à la préparation de ce texte.

Intensité et légèreté : quelques facettes de Jean-Pierre WINTENBERGER

• A. DAVID

Jean-Pierre avait deux étudiant-e-s en thèse lorsqu'il a accepté d'encadrer la mienne. Sommée par une collègue professeure à l'IRMA de la tutoyer, je me suis interrogée sur l'usage à adopter avec mon tout nouveau directeur. Sollicité-e-s, mes grand-e-s frère et sœur de thèse n'ont pu donner de réponse claire à la question simple : vouvoyait-il-elle Jean-Pierre et réciproquement ? Trois ans de contorsions syntaxiques, sans pronoms personnels ni possessifs, me semblant une difficulté dispensable au regard de celles que me réservait déjà la géométrie arithmétique, et tout à la présomption de ma jeunesse, j'ai proposé frontalement à Jean-Pierre le tutoiement, accepté sans ciller. Ce début révélait pour moi son indifférence pour les convenances superflues.

Abstraction faite d'une forme de timidité, qui pouvait passer pour de la réserve, Jean-Pierre se découvrait en effet d'une grande simplicité et très accessible, n'établissant pas de distance inutile entre lui et autrui. Dès les premières semaines de mon travail sous sa direction, j'ai pu aborder avec lui tous les sujets : mathématiques, culturels, personnels... Le goût de la montagne nous réunissait. Nous nous amusions parfois d'avoir fréquenté le même petit col alpin à quelques jours d'intervalle, ou alors notre discussion mathématique déviait vers l'effondrement inexorable des Drus. Il évoquait volontiers sa famille, toujours avec une tendresse et une fierté pudiques.

Parfois rare, sa parole n'en était que plus précieuse. Une poésie et un humour subtils pointaient

dans sa conversation, parsemée de tournures très personnelles : « Les arguments se retournent comme des chaussettes. » reste un principe incontournable de toute réunion universitaire.

Pour les étudiant-e-s de Strasbourg qui m'ont rapporté leurs souvenirs, Jean-Pierre représentait bien l'archétype du mathématicien par moments immergé dans ses pensées. L'équilibre de son pull, posé sur ses épaules, voire une seule, défiait toutes les lois physiques connues, les tenant en haleine un cours durant. L'ayant croisé et salué à l'extrémité ouest d'un couloir, il-elle-s savaient qu'il fallait parfois attendre qu'il en ait atteint l'extrémité est pour recevoir sa réponse. Son tempérament posé et la bienveillance qu'il appliquait à tou-te-s n'en étaient pas moins largement appréciés.

Par sa personnalité exceptionnelle et le rôle qu'il a joué dans leur vie, Jean-Pierre a marqué l'existence de tou-te-s ses doctorant-e-s que j'ai pu recontacter. Les mathématiques, sous une forme ou une autre, demeurent présentes dans le quotidien professionnel de chacun-e.

Attentif, il veillait à m'offrir toutes les opportunités de compléter ma formation, de rencontrer de nouveaux collègues et s'assurait que je puisse assister aux conférences les plus intéressantes, même celles dont le nombre de participant-e-s excédait déjà déraisonnablement les normes de sécurité du CIRM.

Jean-Pierre cherchait toujours à me donner

confiance dans la pratique des mathématiques. La facilité avec laquelle il déclarait « Tu as raison. » a fréquemment surpris mes hésitations de débutante. Son soutien n'a ensuite cessé de m'accompagner, bien longtemps après la fin de ma thèse.

Disponible en toutes circonstances, il partageait généreusement son impressionnant savoir mathématique. Il fallait parfois quelques heures ou jours de travail pour réaliser en quoi ses indications ou suggestions, très en avance sur notre propre compréhension, pointaient précisément le point clé ou la prochaine difficulté de la suite du raisonnement. Une de ses étudiantes les comparait à un cube de bouillon, incomestible pur, mais révélant toute sa saveur après une dilution appropriée.

Ses conseils d'expérience s'appliquaient aussi à des domaines très concrets. Je les invoque encore régulièrement, comme à chaque préparation d'exposé. Jean-Pierre cernait étonnamment bien les personnalités humaines et, consulté pour un choix, anticipait avec une clairvoyance aiguë les possibles avantages

et écueils de chaque situation.

Sans forcer ni fléchir, Jean-Pierre savait transmettre ses valeurs et son éthique intellectuelles. Son exigence, tout comme sa large ouverture d'esprit, me guident et m'inspirent encore aujourd'hui.

Fait peu commun, il évoquait librement ses difficultés, beaucoup moins souvent ses succès, prétendant qu'il avait obtenu ses résultats les plus marquants presque par hasard, en recherchant autre chose. Modeste et discret, Jean-Pierre l'était certainement. Un soir du début de ma première année de thèse, son travail avec Khare sur la conjecture de Serre est apparu dans mon casier, sans commentaire, comme un cadeau de Noël.

Jusqu'au bout, les mathématiques sont restées pour Jean-Pierre une passion et un moteur. Un savoir unique s'éteint avec lui. Son œuvre admirable unit la profondeur à la beauté. Les voies qu'il a ouvertes promettent de captivantes découvertes. Dans leur exploration nous guidera son souvenir.

Souvenirs sur Jean-Marc FONTAINE

• J.-P. SERRE

Lors de la cérémonie du 5 février, au crématorium du Père-Lachaise, j'avais prononcé quelques mots, pour rappeler de vieux souvenirs.

Les voici.

Commençons par une histoire qu'il aimait bien raconter, celle du début de sa vocation. On est en 1962 ; il a 18 ans et il vient d'entrer à l'École polytechnique (pourquoi là plutôt qu'à l'ÉNS ? je l'ignore). Il ne sait pas encore dans quelle direction se diriger ; sûrement pas dans l'industrie, ni dans un métier lucratif ; très probablement en science ; quelle science ? Heureusement, l'X organisait des exposés d'introduction aux diverses disciplines scientifiques : maths, physique, etc. Les différents spécialistes avaient surtout parlé de leur laboratoire, et des difficultés qu'ils avaient pour le faire fonctionner : crédits, ministère, etc. Pas très enthousiasmant. Exception : le mathématicien. C'était Pisot. De quoi avait-il parlé ? Des nombres de Pisot, tout simplement. Fontaine est conquis. Il sera mathématicien.

Cinq ans plus tard : décembre 1967. Il fait un

exposé au séminaire DPP (Delange-Pisot-Poitou). Notez : encore Pisot ! Je ne crois pas avoir assisté à cet exposé, mais j'avais vu le texte ronéoté, et le sujet (ramification des extensions de corps locaux) m'intéressait. Je contacte Pisot, et je lui dis que j'aimerais faire la connaissance de l'auteur. C'est ainsi que Fontaine est venu, pour la première fois, me voir, avenue de Montespan. Je lui ai expliqué une conjecture que j'avais faite quelques années plus tôt (réalisabilité des représentations d'Artin de certains corps locaux sur d'autres corps locaux - de même caractéristique résiduelle), et je lui ai suggéré de l'attaquer. On m'a raconté cinquante ans plus tard qu'à l'époque il n'avait aucune idée de la théorie des représentations linéaires et des caractères, mais qu'il l'avait apprise en quinze jours ; pas de surprise, il était jeune, et c'est une belle théorie ! En tout cas, il n'a pas mis beaucoup de temps à résoudre ma question, et ça a été le sujet de sa thèse, publiée en 1971. Ensuite, il a été nommé à Grenoble.

Passons quelques années. Le sujet de sa thèse

était trop limité – et, à vrai dire, trop facile – pour qu’il puisse continuer dans cette voie. Mais ça avait été l’occasion de lui faire connaître les représentations galoisiennes, un sujet en plein essor (et qui l’est tout autant maintenant), où abondent les questions intéressantes, de nature arithmétique. Fontaine a attaqué celle du « foncteur mystérieux » – une terminologie de Grothendieck datant du congrès de Nice de 1970 : étant donnée une variété abélienne sur un corps local, comment passer de son module de Dieudonné à sa cohomologie étale. Il résout la question, grâce à des « presque logarithmes ». C’est un beau succès.

Oui, un beau succès. Mais un succès, c’est surtout la promesse d’une suite. Pour la suite, je dois dire que j’y ai assisté essentiellement en spectateur (et non plus en joueur, comme on dirait si les maths étaient du football). Je sais seulement, parce qu’il me l’a raconté bien plus tard, que c’est l’une de mes questions qui l’a amené à ses célèbres « anneaux $B_{\text{quelque chose}}$ ». Je lui avais dit : ce que tu as fait avec le foncteur mystérieux, c’est très bien, mais c’est seulement du H^1 . Ce que l’on veut, ce sont des H^n avec n quelconque, et pour cela, il faut des produits tensoriels. Il l’a fait, et il a continué à le faire, avec des anneaux « B » de plus en plus précis. La théorie qu’il a ainsi créée est maintenant d’usage constant dans toutes les questions « locales » ; d’autres que moi vous en parleront.

Il y a eu une brève période (1978-1980) où nous avons plus ou moins travaillé ensemble. Il s’agissait des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires - l’un de mes sujets favoris. Comment se comportent-elles localement ? Nous combinions ce que l’un savait (ou devinait) du côté modulaire, et ce que l’autre savait (savait vraiment) du côté local. Cela se passait par correspondance : Grenoble – Paris – Grenoble... à coups de lettres de dix ou vingt pages chacune ; il y a même une lettre du 10/7/1979, dite de « Compléments », qui a 27 pages. Nous n’avons rien publié, mais cela m’a été très utile

pour la rédaction de mon texte de 1987 sur les représentations galoisiennes « modulaires », où d’ailleurs je remercie Fontaine.

Parlons d’autres choses, par exemple de vacances. J’aimais bien skier avec Fontaine et sa femme Laurence, notamment à Val d’Isère, où nous nous sommes beaucoup amusés – jusqu’au jour où Laurence, en voulant me suivre, est tombée et s’est fracturé le tibia : trois mois de plâtre . La pauvre ! Je lui ai offert « Poèmes – bulles » de Buzatti, pour me faire pardonner de l’avoir si mal guidée.

Autre souvenir de vacances : Ceillac, où ma femme et moi avions loué un immense chalet, ce qui nous a permis d’inviter Fontaine, Laurence et leurs trois petites filles. Grandes promenades en montagne. Celle qui m’a le plus impressionné, c’est celle que j’appelle « Swan-Guermantes » : au départ de Ceillac, il y avait deux côtés différents, entre lesquels il fallait choisir. Un jour, Fontaine est parti tout seul, et, avec ses grandes jambes, a enchaîné les deux côtés. Et il n’avait pas l’air fatigué. Oh ! Nous étions très admiratifs.

Souvenirs de ses derniers jours : je suis allé le voir, chez lui, quelques semaines avant sa mort. Il n’y avait plus de doute sur l’issue. Mais j’ai été surpris de voir à quel point il était de bonne humeur, cancer ou pas cancer, et aussi comment nous pouvions encore discuter de mathématiques. Comme cadeau, je lui avais apporté un livre : on ne peut pas offrir des chocolats à quelqu’un dont on a enlevé l’estomac. J’avais choisi une bande dessinée de la série « Le chat du rabbin ». Je pensais qu’un ex-catholique comme lui apprécierait cette description amusée d’une religion différente. Effectivement, il m’a dit ensuite qu’il l’avait beaucoup aimée, et je lui en ai envoyé deux autres fascicules ; ils lui ont tenu compagnie pendant ses derniers moments – à côté de son livre avec Fargues qui venait tout juste de paraître et qui a certainement été l’une des dernières joies de sa vie.

Une très belle vie.

Jean-Marc FONTAINE

• L. ILLUSIE

Jean-Marc est arrivé à Orsay en 1988, venant de Grenoble, où il était professeur depuis 1972. Il a été professeur à Orsay jusqu'à sa retraite, en 2009, puis professeur émérite. Je l'avais connu bien avant 1988, mais je ne me rappelle plus exactement quand nous nous sommes rencontrés pour la première fois. Peut-être à la soutenance de sa thèse, dirigée par Serre, en 1972. En tout cas, en juillet de la même année, nous avons participé à l'école d'été d'Anvers sur les formes modulaires, puis deux ans plus tard, à celle de l'AMS, à Arcata. J'ai assisté à son cours Peccot en 1975.

Il portait sur la classification des groupes p -divisibles sur les corps locaux. Jean-Marc s'était tourné vers ce sujet après sa thèse, où il démontrait une conjecture de Serre sur la rationalité des représentations d'Artin. Les questions de Grothendieck sur les groupes p -divisibles et le « foncteur mystérieux » reliant cohomologie de de Rham et cohomologie p -adique des variétés sur les corps locaux l'intriguaient. À l'époque, personne n'avait la moindre idée de la façon dont on pouvait, ne serait-ce que formuler précisément le problème. Jean-Marc s'y attelle, et en quelques années élabore un formidable mécanisme algébrique permettant de lui donner un sens, et qui aboutira finalement à sa résolution complète. Considéré au début avec incrédulité, et même effroi, ce formalisme, fondé sur la construction de certains anneaux dits de périodes, qui portent maintenant son nom, est devenu le pilier de ce qu'on appelle la théorie de Hodge p -adique. Celle-ci joue un rôle central dans la géométrie arithmétique d'aujourd'hui, et a eu, depuis plus de vingt ans, des applications nombreuses et spectaculaires (par exemple aux travaux de Wiles-Taylor sur le dernier théorème de Fermat, et de Khare-Wintenberger sur la conjecture de modularité de Serre).

Jean-Marc m'a accompagné tout au long de ma carrière, à Orsay, mais aussi dans quantité de voyages à travers le monde, en Europe, aux États-Unis, en Inde, en Chine et au Japon. J'ai tant de souvenirs que je ne sais lesquels choisir. Je crois que je devrais dire un mot de son arrivée dans notre équipe d'arithmétique et géométrie algébrique, en 1988. On

a senti, tout à coup, un souffle nouveau. Avec Raynaud, Wintenberger, qui venait d'arriver lui aussi, Bernadette Perrin-Riou, Kato, qui était à Orsay, Mazur, qui était à Bures, et quelques autres, il organise un séminaire à l'IHÉS sur les « périodes p -adiques ». Il régnait alors une grande effervescence autour d'une conjecture qu'il avait faite avec Jannsen dans le cas semi-stable, la conjecture dite C_{st} , qui devait être démontrée en général par Tsuji une dizaine d'années plus tard. La formulation géométrique de cette conjecture, suite aux travaux de Hyodo et Kato, a ouvert de nouveaux champs de recherche, notamment dans ce qu'on appelle la géométrie logarithmique, qui est née d'une conversation que j'ai eue avec lui dans le train qui nous amenait à Oberwolfach en juillet 1988. Le volume qui en est issu, *Périodes p -adiques*, Astérisque 223, est resté jusqu'à aujourd'hui une référence de base sur la théorie de Hodge p -adique.

Je ne parlerai pas des années 90, pourtant riches en nouveaux développements (travaux de Jean-Marc et Bernadette Perrin-Riou sur les conjectures de Bloch-Kato, conjecture de Fontaine-Mazur, semestre p -adique à l'IHP co-organisé avec Berthelot, Kato, Rapoport et moi au printemps 1997, autour, en particulier, des résultats de Tsuji et Faltings sur les théorèmes de comparaison p -adiques).

Je voudrais dire quelques mots de la Chine, qui a beaucoup compté pour Jean-Marc. Juste après le congrès international de Pékin en 2002, où il était conférencier invité, Jean-Marc pense que le moment est venu de lancer une coopération avec la Chine en géométrie arithmétique. Dans le cadre d'un programme de Chair Professorship de géométrie arithmétique de 2003 à 2006 à l'université de Tsinghua, dont il est le premier titulaire, Jean-Marc convainc alors plusieurs de ses collègues d'Orsay d'aller enseigner là-bas, pour donner une solide formation à des étudiants talentueux et avides d'apprendre. Chaque année, certains seront sélectionnés pour venir préparer une thèse en France, à Orsay ou à l'ÉNS. Beaucoup sont retournés en Chine, sur des postes de professeurs permanents, et y forment aujourd'hui l'épine dorsale de la géométrie arithmétique. Jean-

Marc a été l'âme de cette coopération, à laquelle il a consacré toute son énergie, jusqu'à sa maladie, en 2016. Dans un texte publié le 30 janvier dernier par la Chinese Mathematical Society, Yi Ouyang, qui à Pékin nous a procuré une assistance inestimable, et avec qui Jean-Marc a rédigé un ouvrage de base sur la théorie de Hodge p -adique, lui rend un hommage émouvant. En décembre, Miaofen Chen, qui avait été notre étudiante à Tsinghua en 2004, et qui est aujourd'hui professeur à l'ECNU à Shanghai, a réalisé, avec quelques camarades, une vidéo en son honneur.

Jean-Marc était d'une générosité extrême : à qui-conque voulait bien l'écouter, il faisait part, avec enthousiasme, de toutes ses idées. Il adorait communiquer sa vision des mathématiques. Cela a été très profitable à ses élèves, notamment Jean-Pierre Wintberger, Pierre Colmez et Christophe Breuil, qui, en retour, ont énormément contribué au développement et au rayonnement de son œuvre.

Tout comme Michel Raynaud, qui nous a quittés le 10 mars dernier, il n'aimait pas les honneurs et ne parlait jamais de ceux qu'il avait reçus : conférencier invité aux Congrès internationaux de Varsovie, en 1983, et de Pékin, en 2002, prix Petit d'Ormoys, Carrière et Thébaud en 1984, prix Gay-Lussac Humboldt en 2002, membre de l'Académie des Sciences depuis 2002.

Je voudrais terminer sur une note plus personnelle. Jean-Marc avait l'esprit de contradiction. À la cantine d'Orsay, ou autour de la machine à café, nous avons de longues discussions. Je ne pouvais pas avancer une opinion sans qu'il émette immédiatement une objection, souvent justifiée, du reste. Il y a un an et demi environ, après son opération, j'ai constaté un changement dans son attitude. Je

me rappelle, nous étions ensemble à Padoue, en novembre 2017. Nous y donnions des cours tous les deux. Il avait le sens de l'orientation, moi pas. Le soir, il me guidait, sous la pluie, dans les ruelles tortueuses et chichement éclairées de la vieille ville, vers un bon petit bistrot de son choix. Au restaurant, il ne mangeait presque rien, mais nous causions longuement. Et nous étions d'accord sur tout. J'ai eu alors un triste pressentiment.

Jusqu'au bout Jean-Marc a lutté farouchement contre la maladie qui le rongait. En mars 2016, lors d'un séjour à Taipei, j'avais suggéré son nom à notre collègue Chia Fu Yu, qui l'a invité à venir donner un cours. Jean-Marc a aussitôt accepté, mais a dû remettre plusieurs fois sa visite à cause de son opération et de ses séquelles. Finalement, en octobre dernier, il s'y est rendu, alors qu'il était en pleine rechute, et a fait, stoïquement, trois fois deux heures de cours, avant d'être rapatrié d'urgence à Paris.

Dans les derniers échanges que j'ai eus avec lui, nous avons bavardé comme si de rien n'était. De maths, de l'actualité, de musique, de *La nuit transfigurée*, l'un de ses morceaux de prédilection. Parmi les choses qui lui tenaient à cœur, il y avait : la ré-édition, avec liste d'errata-addenda, du volume d'Astérisque 223, *Périodes p -adiques*, la publication de son dernier article, sur les presque C_p -représentations, la publication de son livre avec Yi Ouyang, et la publication de son travail avec Laurent Fargues sur la courbe fondamentale en théorie de Hodge p -adique. Pour les trois premiers projets, les choses avançaient, mais ils n'ont pu, hélas, être achevés à temps. En revanche, son travail avec Laurent Fargues a été publié (Astérisque 406), et, il y a quelques semaines, Jean-Marc a eu la satisfaction de tenir l'ouvrage entre ses mains.

The China Legacy of Jean-Marc FONTAINE

• Y. OUYANG

The success of the 2002 Beijing International Congress of Mathematicians convinced Fontaine that China would soon become an important hub of international mathematical society, in which the French mathematical community could play an important role. In 2003, Tsinghua University began to imple-

ment the Chair Professorship Program, inviting world class scientists to teach first rate courses and train students for high level research there. The Department of Mathematics invited Fontaine to be the Chair Professor of Arithmetic Geometry. Fontaine accepted the invitation with great enthusiasm. Since then,

Fontaine, as the soul of the communication between Sino-French Number Theory and Algebraic Geometry, devoted all his energies to the cause of Chinese Number Theory and Algebraic Geometry.

First of all, Fontaine always took the education of students as the first priority, and put the cultivation of high-quality arithmetic geometry research talents in the first place. During the three years of Tsinghua University Chair Professorship Program, and afterwards the days of cooperation with Morningside Center of Mathematics of Chinese Academy of Sciences, Fontaine, apart from teaching the theory of p -adic Galois representations, also personally established a team of elite professors to teach and work in Beijing. He successfully invited Professors Illusie, Raynaud, Colmez, Clozel, Ullmo, Bost, Colliot-Thélène, Gille, Harari and Fargues etc. to come to teach in China. Professor Raynaud hardly left his family for more than a month during his lifetime, but at the request of Professor Fontaine, he spent nearly a semester at Tsinghua University in Spring 2004, working with Illusie to train students. The professors in the French team devoted themselves to teaching and offered rigorous seminars on arithmetic geometry to train students strictly, which laid a solid foundation for students. Fontaine actively created opportunities for outstanding students to go to study in France through the enrollment of Paris-Sud 11, the ALGANT project in the EU Erasmus Program, and the admission program of École normale supérieure etc. In these ways, first at Tsinghua University, then at the Academy of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences and Peking University, a large number of outstanding students successfully completed their PhD in France, and became the backbone of the arithmetic geometry research in China today. Fontaine's work has fundamentally changed the culture of Tsinghua University's top students. Before his arrival, students at Tsinghua were content to stay at Tsinghua for undergraduate, master and PhD study, the so-called Three-Qing students. After the success of Fontaine's program, going abroad to work with the best teachers and to learn the most cutting-edge mathematics is becoming the mainstream choice of best students.

Fontaine's second endeavor was to strengthen the links between Chinese researchers and students and the international arithmetic geometry community, especially the French arithmetic geometry community. In August 2005, Fontaine and Professor Keqin Feng from Tsinghua organized a Sino-French summer school and then a conference in arithmetic geometry and automorphic forms in Tsinghua and Nankai

University respectively, and invited famous mathematicians to teach and talk in these events. These activities opened the door of cooperation of number theory and arithmetic algebraic geometry between China and France. For the first time, most Chinese researchers and students had the opportunity to know the latest development in number theory and to build close relationship with first-class French mathematicians. Since then, the exchange in arithmetic geometry between China and France has become more and more frequent. In the summer of 2006, Fontaine organized the Asian Year on Motive at IHÉS, and a large number of Chinese students and scholars participated in the program. In 2010, in the trimester to celebrate his own retirement in Paris, he also took various measures to ensure the visiting Chinese students to have sufficient financial support to freely participate the various academic activities there. In fact, he always had a long-term plan for the exchange of Sino-French mathematicians. The short lived Center of Sino-French Mathematics at Tsinghua was part of his grand plan, but it didn't function properly due to various reasons in Tsinghua.

As an internationally renowned mathematician, Fontaine himself actively participated in mathematical activities and cooperative research in China. In the days before late October 2016, when he had to cancel his trip to China due to illness, he participated in many academic activities in China, gave talks and exchanged lively with other participants. In 2004, he taught the theory of p -adic Galois representations. I asked students to record the first draft of the manuscript "Theory of p -adic Galois Representation", and then revised and added some contents. The discovery of Fargues-Fontaine curve in 2009 and the theory of Scholze occupied a large part of his time and energy in the past decade, but he always kept in mind of our manuscript. Last December, in his last email to me, he was still concerning about the book. It is our hope to finish the final draft of the book to console his spirit in heaven.

Fontaine was also a master of solving various non-mathematical problems. Because of his Polytech background and family relations, many difficult real-time problems were easily solved by him. At first, the French government requested French language preparation for foreign students, but with his efforts, Chinese mathematical students going to France for postgraduate study obtained their visas without problems for many years. When I had some visa problem in 2006 in Amsterdam, he actually contacted the French Ministry of Foreign Affairs, the Embassy in

China and the Embassy in the Netherlands to solve my problem. Even in 2015, when a group of students from УСТС, Tsinghua and Nanjing University were denied visas for language concerns due to the handover of French cultural officials in China, he was able to help us to find the proper officials (with the help of Professor Bourguignon) to solve the problem successfully. More than 10 years ago, when the incomes of China and France were greatly unbalanced, he was often able to find generous grants for visiting Chinese mathematicians and students so that they can study and work in France with all their heart and soul.

Fontaine has left us forever, but his imprint on the cause of number theory and algebraic geometry in China will remain indelible. In 2016, in order to celebrate and enhance the successful cooperation between Chinese and French arithmetic geometers, and in particular, to pay tribute to Fontaine, the 2nd Sino-French Arithmetic Geometry Conference (comparing to the first one in 2005 at Nankai) was convened at the Tsinghua Sanya International Mathematics Forum from November 7 to 11, 2016. Fontaine happily agreed to be the honorary co-chairman (with Keqin Feng), energetically helped me for the organization, but to his great disappointment he had to cancel his trip at the last moment. He still presided over Ullmo's remote talk at ИНЭС. Most of the 42 Chinese and

French scholars attending the conference were directly influenced by Fontaine. The talks represented some of the most advanced results in arithmetic geometry, indicating that the seeds Fontaine planted had germinated successfully.

In 2017, Feng and I wrote an article "Cooperation of Sino-French Number Theory and Algebraic Geometry" to celebrate the 90th anniversary of Tsinghua Mathematics. In this paper, we made a preliminary count about the students benefiting from Fontaine's program in 2003-2007: Of the 20 students who went to France for further study, 19 students earned their PhD degrees in France, 7 of them had/have permanent positions in France, and 9 of them were selected by the 1000 Talent Plan of the Chinese government. Most students in Fontaine's program are now working in the best research universities and institutes in China, several in France, USA and Japan.

In December 2018, after learning from Illusie about Fontaine's serious illness, the students, (headed by Chen Miaofen) made a tribute video to him, which touched him greatly. The following ancient Chinese saying might be appropriate to show our respect to Fontaine, the great teacher:

The Cloudy Mountain is towering and vast,
The River is deep and wide,
The virtue of our Master,
Tall like the Mountain and long like the River!

Jean-Marc

• L. FARGUES

Je me rappelle encore être dans ma chambre d'étudiant en thèse à lire le volume « périodes p -adiques ». J'arrivais de province et je me disais que peut-être un jour je rencontrerais Fontaine à Paris, une espèce de rêve vague irréel. Je me rappelle l'avoir alors croisé par hasard dans le RER et j'étais déjà très impressionné, je n'avais pas osé lui parler.

Plus tard à Orsay je l'ai eu comme collègue et j'étais très intimidé par sa stature mathématique mais aussi par sa personnalité imposante : personne ne pouvait lui dire comment penser, en maths ou dans quelque autre domaine que ce soit. Il m'a fait confiance une première fois en me faisant découvrir la Chine en 2005. On y était allé pour donner des

cours, une conférence et il m'a alors confié en thèse une étudiante chinoise Miaofen. J'en étais vraiment très honoré.

Le vrai déclic entre nous deux est arrivé lorsque je suis tombé sur mes filtrations des groupes plats finis. Je me rappelle être allé dans le bureau de Jean-Marc, hésitant, puis celui de Raynaud, en me disant que tout cela devait être connu et trivial pour Jean-Marc et Michel. Je n'ai jamais été aussi fier de moi que lorsque j'ai appris que ce n'était pas le cas. Ça a été le véritable début de notre collaboration. Dans les semaines qui ont suivi il voyait des filtrations de Harder-Narasimhan partout, un véritable déluge. C'était son nouveau jouet et il fallait suivre le rythme

qu'il s'imposait, impressionnant ; il reprenait tout ses travaux et ceux de Colmez sur les Espaces de Banach de dimension finie avec ça (Colmez avait effectivement prouvé l'existence de deux fonctions additives sur sa catégorie, fonctions que l'on nommerait plus tard degré et rang d'un fibré vectoriel). Jean-Marc c'était la révolution permanente à tout instant, aucun répit. De mon côté je m'étais rendu compte que mes filtrations des groupes plats finis donnaient lieu à des filtrations et des polygones pour les groupes p -divisibles. J'essayais d'établir une inégalité entre ces polygones et le polygone de Newton de la fibre spéciale, inégalité que je réussis finalement à prouver en utilisant les filtrations des Espaces de Banach de dimension finie de Colmez.

Puis, Jean-Marc réussit à améliorer un résultat de Berger et montrer que l'anneau de périodes B_e est principal. De cela et des filtrations de Harder-Narasimhan il en déduisait une preuve courte de sa vieille conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

Tout ça jusqu'au jour merveilleux où à Trieste nous sommes tombés sur la dernière révolution de sa vie : « la courbe ». Cela fut un moment unique comme on en vit rarement. Bien sûr, il est difficile de localiser le point qui nous a amenés un matin au réveil à nous exclamer simultanément qu'il y a

une courbe. La principalité de l'anneau B_e , le fait que l'anneau de périodes B_{dR}^+ puisse jouer le rôle de complété de l'anneau local en l'infini, les filtrations de Harder-Narasimhan... Il m'a fait une nouvelle fois confiance et nous avons travaillé dessus sans relâche. Jean-Marc avait toujours raison et je n'ai jamais vécu de moments si intenses dans ma vie. Je me battais avec mon esprit géomètre et lui avec son esprit arithmétique.

Nous nous sommes rapidement convaincus de l'existence d'un théorème de classification des fibrés sur la courbe. De celui-ci on déduisait de nouvelles preuves géométriques, naturelles et très courtes, des deux théorèmes principaux de la théorie de Hodge p -adique « faiblement admissible implique admissible » et « le théorème de la monodromie p -adique ». Je délirais parfois sur le champ des fibrés vectoriels sur la courbe et les opérateurs de Hecke mais cela devrait attendre plus tard.

On a parcouru le monde ensemble pour exporter la révolution. Finalement est sorti notre texte qu'il a pu tenir entre ses mains dans ses derniers moments, sa dernière révolution.

Du fond de ma chambre d'étudiant à admirer les travaux d'un grand mathématicien jusqu'à notre travail en commun : merci de m'avoir fait confiance Jean-Marc.

Memories of Jean-Marc and his mathematics

• M. KISIN

The semestre p -adique

I first met Jean-Marc during the Spring of 1997 at the *Semestre p -adique*, at the Institut Henri Poincaré in Paris. At the time I was a graduate student of Nick Katz at Princeton, and had been allowed to go to Paris for the semester. I arrived a few weeks before the semester, and decided that, in preparation, I would study Jean-Marc's book on p -divisible groups over local fields. I knew that the classification of p -divisible groups played an important role in Wiles' work on Fermat's Last Theorem and modularity. The subject of the book is the classification of p -divisible and formal groups over the ring of integers of a p -adic field. Formally, the main results are easy to state:

p -divisible groups can be classified using much simpler objects involving only linear algebra. The proofs involve delicate calculations using Witt vectors and bi-vectors which mediate between the two worlds.

After I had read most of the book, I introduced myself to Jean-Marc, and asked him some questions about the calculations in the book. He answered my questions, but explained that actually the subject of his lectures at the semester would not concern the book. As I eventually learned, those were about the classification of p -adic Galois representations: His p -adic period rings B_{dR}, B_{cris}, \dots , the theory of weakly admissible modules, and his theory of (φ, Γ) -modules, which relied on his earlier work with Wintenberger. At the end there were some (at

the time) rather mysterious, but striking results on certain Banach spaces with Galois action, which he called *presque \mathbb{C}_p -representations*. These lead a few years later to a proof by Colmez-Fontaine of Jean-Marc's conjecture *weakly admissible implies admissible*, which completely classifies semi-stable representations; they are related to Scholze's recent theory of diamonds.

Jean-Marc delivered his lectures with great energy. For two hours at a time he would explain results and calculations. Although these were often ingenious, they were presented with a kind of inevitability, as if Jean-Marc had discovered a previously unknown species of animal, and was simply reporting on its properties. During the course of the semester, I would meet Jean-Marc from time to time to ask him about things which had come up in his lectures, or some of the related reading. At one of these meetings, I asked him how he had come to invent his period rings. *Well, I was doing calculations with Witt bivectors...* As I would grow to appreciate later, this was characteristic of Jean-Marc's style, and indeed his whole school of p -adic Hodge theory. Here he had invented these remarkable rings, which had almost magical properties; a theory of p -adic periods much richer than anything one could hope for from its complex analogue. Yet the genesis of this was not some pure thought, high level heuristic about motives, à la Grothendieck. It was a long series of intricate calculations, from which these remarkable conjectures and theorems were finally distilled. These p -adic Hodge theorists seemed to me like an order of monks, who were able to reveal the hidden design of a tapestry by examining it one thread at a time.

Included in Jean-Marc's theory of *presque \mathbb{C}_p -representations*, were two striking and, to me, rather surprising results. To explain them fix an algebraic closure $\overline{\mathbb{Q}_p}$ of \mathbb{Q}_p , and let \mathbb{C}_p be its p -adic completion. A result of Tate asserts that a $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -invariant element of \mathbb{C}_p lies in \mathbb{Q}_p . For elements in $\overline{\mathbb{Q}_p}$ this is Galois theory, but Tate's stronger result requires other methods. One can formulate Tate's result as follows

Theorem. (Tate) *Any $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -equivariant, \mathbb{C}_p -linear map $\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ is given by multiplication by an element of \mathbb{Q}_p .*

Jean-Marc explained that it was enough to ask that the map be only continuous rather than \mathbb{C}_p -linear.

Theorem. (Fontaine) *Any $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -equivariant, continuous map $\mathbb{C}_p \rightarrow \mathbb{C}_p$ is given by multiplication*

by an element of \mathbb{Q}_p .

A second result involves the Tate twist $\mathbb{C}_p(1)$, for which one multiplies the $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ action on \mathbb{C}_p by the cyclotomic character. As $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -representations the spaces \mathbb{C}_p and $\mathbb{C}_p(1)$ are quite different. For example, there are no non-zero, $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ -equivariant, continuous maps between them, and they are responsible for different p -adic periods. Nonetheless, Jean-Marc had proved the following:

Theorem. (Fontaine) *There is a p -adic Banach space X , with an action of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$, together with finite dimensional subspaces $V_1, V_2 \subset X$, such that*

$$X/V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \quad \text{and} \quad X/V_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p(1).$$

In other words, although \mathbb{C}_p and $\mathbb{C}_p(1)$ are quite different from one point of view, they can be made isomorphic if extended by a finite dimensional \mathbb{Q}_p -representations of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$.

By the end of my time at the semestre p -adique, I felt it would be a pleasure to spend one's life doing calculations with period rings, and tending the p -adic periods in Jean-Marc's garden. It would take me several years to make any contribution at all to p -adic Hodge theory, but Jean-Marc's ideas were to have a profound influence on my future mathematics.

The Fontaine-Mazur conjecture

A year after the semestre p -adique, I had finished my thesis and gone to be a postdoc in Sydney and then Münster. The focus of the semestre p -adique - both Jean-Marc's lectures and others - had been entirely local, for example concerned about the representations of Galois groups of local fields. After leaving Princeton, I became more interested in questions about modular forms and global Galois representations, and in particular I learned about the Fontaine-Mazur conjecture.

Conjecture. (Fontaine-Mazur) *Let*

$$\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$$

be a continuous representation which is unramified at all but finitely many primes, and such that $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)}$ is de Rham. Then ρ comes from algebraic geometry. More precisely it is a subquotient of a representation appearing in the cohomology of an algebraic variety of \mathbb{Q} .

This is a rather audacious conjecture. If one insists only that ρ is unramified outside a finite set of

primes S , then for $\mathbb{E} \notin S$, one can consider the image of the Frobenius $\text{Frob}_{\mathbb{E}}$ under ρ . This is well defined as a conjugacy class in $\text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, and its eigenvalues are p -adic numbers lying in some finite extension of \mathbb{Q}_p , about which one cannot expect to say much in general. For example, these eigenvalues have no reason to be algebraic numbers. However, if ρ comes from algebraic geometry, then one knows from the work of Deligne and de Jong that these eigenvalues are necessarily *Weil numbers*. That is, they are algebraic numbers, which are p -units, and for each eigenvalue α there exists an $\iota \in \mathbb{Z}$, such that the archimedean absolute values of α are all equal to $|\mathbb{E}|^{\iota/2}$. However, the conjecture imposes no condition at these primes ! It asks only that at p (where ρ will typically be ramified) ρ is de Rham.

I found the conjecture astonishing. Like, Jean-Marc's results on presque \mathbb{C}_p -representations, it seemed to be an act of mathematical levitation where the assumptions could not possibly be enough to support the conclusion. When Jean-Marc visited me in Sydney, I told him I thought this conjecture was rather outrageous. *We'll find a counterexample...* Indeed I did try to find a counterexample, using the finite slope overconvergent eigenforms which has been studied by Coleman-Mazur. These give rise to global Galois representations, which are Hodge-Tate at p (at integral weight), but one does not expect these representations to come from geometry if the form is not classical. On the other hand a classical form can be approximated arbitrarily closely by non-classical ones. I hoped to show one of these approximating forms, was de Rham, but I ended up showing that this couldn't happen; the de Rham condition kicks in exactly when the form becomes classical !

In fact I needn't have been quite so skeptical of the conjecture because the work of Wiles and Taylor-Wiles on modularity lifting was already quite strong evidence that it is true. This also involves using a con-

dition at p (that $\rho|_{\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ comes from a p -divisible group) to prove that certain representations are modular. A few years later I generalized this to prove some other cases of the conjecture.

There is a special case of this conjecture (really a precise form of a special case), which is perhaps even more tantalizing because it is completely elementary to state, and yet equally out of reach.

Conjecture. (Unramified Fontaine-Mazur) *Let*

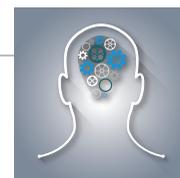
$$\rho : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$$

be a continuous representation which is unramified at all but finitely many primes, and such that inertia at p has finite image under ρ . Then ρ has finite image.

Reflections

When I recall conversations with Jean-Marc what stands out is a clarity of vision and a complete lack of pretension. He was bemused by people who thought themselves important and would sometimes comment with dry humor either on politicians, bankers (anyone connected with finance was a banker), or members of the scientific community - it was always fun to discuss politics and current events with Jean-Marc. Once one saw things clearly, there was nothing left to make a fuss about. *You see...* Sarkozy is a crook, you compute with some Witt bivectors and make a period ring... *that's it.*

Jean-Marc's legacy goes beyond particular theorems. His penetrating vision produced his p -adic period rings, and the suite of conjectures around them, his conjecture with Mazur, and more recently his work with Fargues on the *Curve*. These are objects that were simply not there before, and then... they were.



Une percée conceptuelle sur les empilements de sphères

• H. COHN

Ce texte est la traduction¹ de l'article « A Conceptual Breakthrough in Sphere Packing », publié dans les « Notices of the AMS », vol. 64, n° 2, p.102-115. (2017). Henry Cohn a reçu le prix Levi L. Conant 2018 pour cet article.

Le 14 mars 2016, comme pour célébrer le *Pi Day*, le monde des mathématiques reçut une surprise exceptionnelle quand Maryna Viazovska posta sur arXiv une solution au problème de l'empilement de sphères en dimension 8 [15]. Sa démonstration montre que le réseau de type E_8 est l'empilement de sphères le plus dense en dimension 8, via un argument magnifique et conceptuellement simple. Les empilements de sphères étant une source notoire de démonstrations compliquées de faits intuitivement évidents ainsi que de problèmes ouverts à la difficulté désespérante, il est merveilleux de voir dans ce sujet une preuve relativement simple d'un théorème profond. Aucune preuve d'optimalité n'était connue au-delà de la dimension 3, et l'article de Viazovska ne traite pas des dimensions 4 à 7. Il s'appuie plutôt sur les propriétés remarquables du réseau E_8 . Sa démonstration est une contribution notable à l'histoire de E_8 , et plus généralement à celle des structures exceptionnelles en mathématiques.

On peut mesurer la complexité d'une démonstration par le temps nécessaire à la communauté pour la digérer. De ce point de vue, la démonstration de Viazovska est remarquablement simple. Elle a été comprise par plusieurs personnes dans les quelques jours qui ont suivi sa parution sur arXiv, et a conduit en une semaine à de nouveaux progrès : Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, Danylo Radchenko et moi-même avons travaillé avec Viazovska pour adapter ses méthodes afin de démontrer que le réseau de Leech était un empilement de sphères optimal en dimension 24 [5]. C'est le seul autre cas au-delà de la dimension trois dans lequel le problème de l'empilement de sphères a été résolu.

Le nouvel ingrédient dans la démonstration de

Viazovska est une certaine fonction spéciale, qui entraîne l'optimalité de E_8 via la formule sommatoire de Poisson. L'existence d'une telle fonction avait été conjecturée par Cohn et Elkies en 2003, mais malgré des efforts considérables, savoir de quel type de fonction il pouvait s'agir restait un mystère. Viazovska construit cette fonction explicitement en termes de formes modulaires en utilisant une transformation intégrale inattendue, qui établit un lien nouveau entre les formes modulaires et la géométrie discrète.

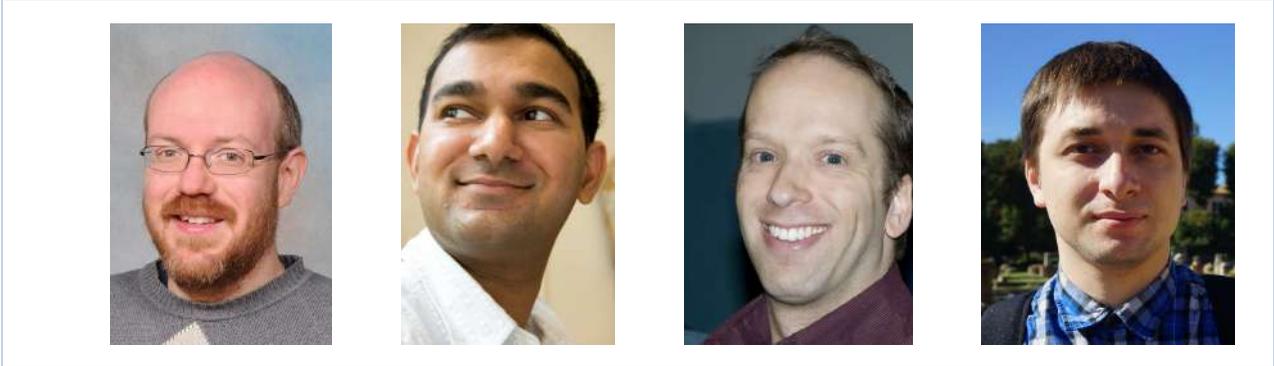
FIGURE 1 – Maryna Viazovska a résolu le problème de l'empilement de sphères en dimension 8



Un exploit aussi remarquable que celui de Viazovska mérite d'être apprécié par un large public mathématique, et c'est en effet possible. Dans cet article, nous examinerons le fonctionnement de sa démonstration, ainsi que le contexte. Nous ne traiterons pas tous les détails, mais nous verrons les idées

1. Le traducteur, Maxime Bourrigan remercie Frédéric Morlot pour sa précieuse relecture.

FIGURE 2 – Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller, and Danylo Radchenko ont collaboré avec Maryna Viazovska pour étendre ses méthodes en dimension 24



principales et leur agencement. Les lecteurs qui souhaitent lire une démonstration complète seront alors bien préparés à l'étude de l'article de Viazovska [15] et de sa suite concernant le réseau de Leech [5]. Voir également le survol et l'interview de de Laat et Vallentin [12] pour une perspective quelque peu différente, ainsi que [1] et [6] pour plus de contexte et de références.

1. Empilement de sphères

Le problème de l'empilement de sphères demande quel est l'empilement de boules superposables dans \mathbb{R}^n le plus dense. Autrement dit, quelle est la plus grande proportion de l'espace \mathbb{R}^n qui peut être remplie par des boules superposables dont les intérieurs restent disjoints ?

Des empilements pathologiques peuvent très bien ne pas avoir de densité bien définie, mais nous contournerons les subtilités comme suit. Un *empilement de sphères* \mathcal{P} est une partie de \mathbb{R}^n non vide composée de boules superposables d'intérieurs disjoints. La *densité supérieure* de \mathcal{P} est

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{vol}(B_r^n(0) \cap \mathcal{P})}{\text{vol}(B_r^n(0))},$$

où $B_r^n(x)$ est la boule fermée de rayon r et de centre x , et la *densité maximale des empilements de sphères* $\Delta_{\mathbb{R}^n}$ de \mathbb{R}^n est la borne supérieure des densités supérieures des empilements de sphères. Autrement dit, on évite les subtilités en choisissant une définition généreuse de la densité des empilements. Cette générosité est en fait bénigne, comme le montre le théorème de Groemer selon lequel il existe un empi-

lement de sphères \mathcal{P} tel que

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{vol}(B_r^n(x) \cap \mathcal{P})}{\text{vol}(B_r^n(x))} = \Delta_{\mathbb{R}^n},$$

au sens de la convergence uniforme des fonctions sur \mathbb{R}^n . Ainsi, la borne supérieure des densités supérieures est en fait atteinte pour un certain empilement, et ce de la façon la plus forte possible. Bien entendu, l'empilement le plus dense n'est pas unique, car on peut modifier de nombreuses façons un empilement sans changer sa densité globale.

Pourquoi s'intéresser au problème de l'empilement de sphères ? Deux raisons évidentes sont qu'il s'agit d'un problème géométrique naturel en tant que tel, et un modèle-jouet pour les milieux granulaires. Une application plus surprenante est que les empilements de sphères sont des codes correcteurs d'erreurs pour un canal de communication continu. Certains canaux de communication réels peuvent être modélisés à l'aide d'espaces vectoriels de grande dimension, et les empilements de sphères en grande dimension ont ainsi une importance pratique.

Au lieu de justifier les empilements de sphères par certains aspects du problème ou par ses applications, nous le justifierons par ses solutions : une question est bonne si elle a de bonnes réponses. Il s'avère que le sujet des empilements de sphères est plus riche et plus beau que ce que le simple énoncé du problème suggère. De ce point de vue, l'intérêt du sujet est dans les structures remarquables qui apparaissent parmi les empilements denses.

Pour commencer, examinons les cas familiers des dimensions 1, 2 et 3. Le problème des empilements de sphères en dimension 1 est celui des empilements d'intervalles sur la droite, qui est évidemment trivial : la densité optimale est 1. Les problèmes en dimension 2 et 3 sont loin d'être triviaux, mais les

empilements optimaux sont exactement ceux que l'on imagine. En particulier la densité des empilements de sphères est $\pi/\sqrt{12} = 0,9068\dots$ dans \mathbb{R}^2 et $\pi/\sqrt{18} = 0,7404\dots$ dans \mathbb{R}^3 . Le problème bidimensionnel a été résolu par Thue. Donner une preuve rigoureuse demande une véritable idée, mais il existe des preuves courtes et élémentaires [8]. Le problème tridimensionnel a été résolu par Hales [9], via une preuve complexe, longue, et assistée par ordinateur, qui fut extraordinairement difficile à vérifier, mais a été depuis complètement certifiée en utilisant la logique formelle [10].

En dimension 2, on peut obtenir un empilement optimal en empilant les unes sur les autres des couches qui sont des empilements optimaux en dimension inférieure, en veillant à imbriquer optimalement les couches. Il n'est pas difficile de décrire comment se fait cette imbrication, ni de calculer la densité d'un empilement ainsi obtenu. La difficulté réside plutôt dans la démonstration du fait qu'aucune autre construction ne fournit une plus grande densité.

FIGURE 3 – Extraits des empilements optimaux en dimension 2 et 3, de densité $\pi/\sqrt{12} = 0,9068\dots$ dans \mathbb{R}^2 et $\pi/\sqrt{18} = 0,7404\dots$ dans \mathbb{R}^3



Malheureusement, notre expérience de la basse dimension est une mauvaise préparation pour comprendre les empilements de sphères en grande dimension. Les trois premiers exemples pourraient indiquer qu'il serait facile de deviner quels sont les

empilements optimaux, mais cette supposition est complètement fautive en grande dimension. Notamment, l'empilement de couches formées d'empilements optimaux de la dimension inférieure ne donne pas un empilement optimal. (On peut déterminer par récurrence sur la dimension les empilements qui seraient optimaux si cette hypothèse était vraie [7], mais cette procédure fournit déjà un empilement sous-optimal dans \mathbb{R}^{10} .)

Le problème de l'empilement de sphères ne semble avoir aucune solution simple et systématique, indépendante de la dimension. Chaque dimension possède ses spécificités et son charme propre. Comprendre l'empilement optimal dans \mathbb{R}^8 nous apprend peu sur \mathbb{R}^7 et \mathbb{R}^9 , et pratiquement rien sur \mathbb{R}^{10} .

À part les cas de \mathbb{R}^8 et \mathbb{R}^{24} , notre ignorance augmente au fur et à mesure que la dimension s'élève. En grande dimension, nous n'avons absolument aucune idée de la façon dont les empilements optimaux se comportent. Nous ne savons même pas répondre aux questions les plus basiques, comme celle de savoir si les empilements optimaux doivent être cristallins ou désordonnés. Ici, « ne pas savoir » ne signifie pas simplement « ne pas savoir démontrer », mais même « ne pas savoir prédire », ce qui est plus fort.

Un simple argument glouton montre que la densité optimale dans \mathbb{R}^n est au moins de 2^{-n} . Pour le comprendre, considérons n'importe quel empilement de sphères dans lequel il est impossible de rajouter ne serait-ce qu'une sphère. Si nous doublons le rayon de chaque sphère, l'union des sphères dilatées doit être l'espace tout entier, faute de quoi tout point n'appartenant pas à cette union est le centre d'une sphère que l'on pourrait rajouter à l'empilement original. Comme doubler le rayon multiplie le volume par 2^n , l'empilement original couvre au moins une proportion 2^{-n} de l'espace \mathbb{R}^n .

Cette minoration peut paraître ridiculement faible, mais elle est en fait très proche de l'état de l'art. Même les bornes les plus récentes, obtenues par Venkatesh [14] en 2013, n'ont pu améliorer 2^{-n} que d'un facteur linéaire en général, et $n \ln n$ dans des cas particuliers. Quant aux majorations, Kabatyanskiï et Levenshtein [11] ont démontré en 1978 une majoration en $2^{(-0,599\dots + o(1))n}$, qui reste essentiellement la meilleure connue en grande dimension. Ainsi, l'on sait que la densité de l'empilement de sphères décroît exponentiellement avec la dimension, mais les meilleures bornes restent exponentiellement loin l'une de l'autre.

La table 1 liste les meilleures densités actuellement connues jusqu'en dimension 36, et la figure 4 les illustre par un graphe logarithmique. Ce graphe

FIGURE 4 – La densité d’empilement est dentelée et irrégulière, et il ne semble pas possible d’interpoler un des points par ses voisins

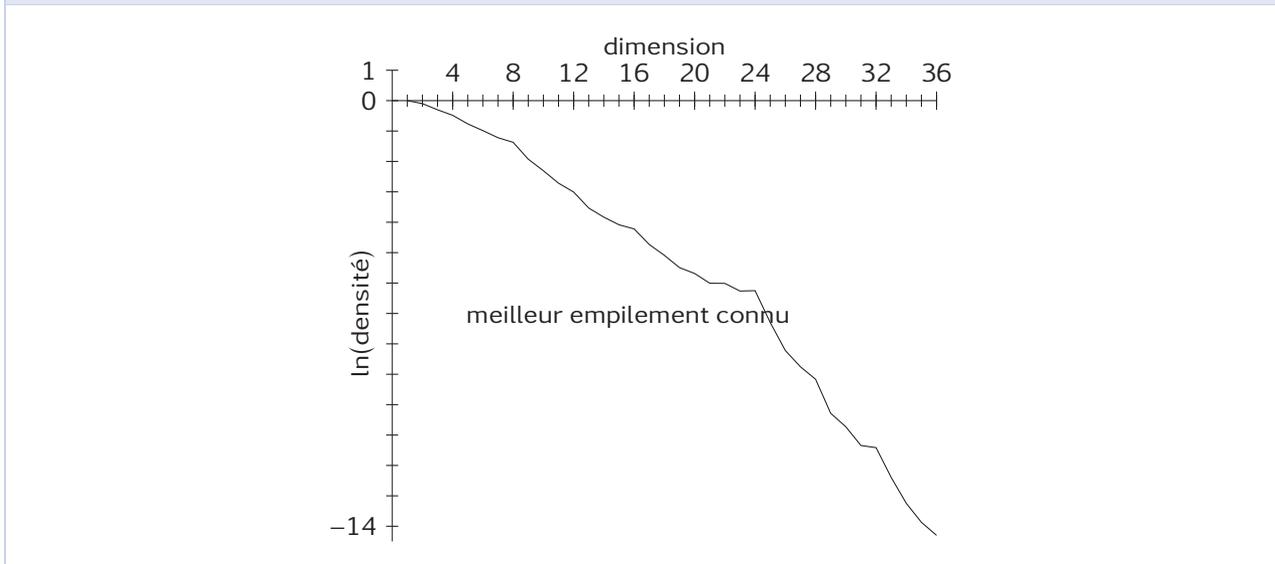


TABLEAU 1 – Les densités record dans \mathbb{R}^n pour $1 \leq n \leq 36$, tirées de la Table I.1 de [6, pp. xix–xx]. Tous les nombres sont arrondis par défaut

n	densité	n	densité	n	densité
1	1,000000000	13	0,0320142921	25	0,00067721200977
2	0,906899682	14	0,0216240960	26	0,00026922005043
3	0,740480489	15	0,0168575706	27	0,00015759439072
4	0,616850275	16	0,0147081643	28	0,00010463810492
5	0,465257613	17	0,0088113191	29	0,00003414464690
6	0,372947545	18	0,0061678981	30	0,00002191535344
7	0,295297873	19	0,0041208062	31	0,00001183776518
8	0,253669507	20	0,0033945814	32	0,00001104074930
9	0,145774875	21	0,0024658847	33	0,00000414068828
10	0,099615782	22	0,0024510340	34	0,00000176697388
11	0,066238027	23	0,0019053281	35	0,00000094619041
12	0,049454176	24	0,0019295743	36	0,00000061614660

possède des propriétés notables.

1. La courbe est dentelée et irrégulière, et il ne semble pas possible de deviner la valeur en un point à l’aide des valeurs voisines.
2. La densité décroît exponentiellement mais, à cause de l’irrégularité, il est difficile d’extrapoler et d’estimer le taux de décroissance quand la dimension tend vers l’infini.
3. Il semble y avoir des phénomènes de parité. La densité en dimension paire semble relativement plus grande qu’en dimension impaire, et ce phénomène s’accroît pour les dimensions

multiples de 4 et est le plus sensible pour les dimensions multiples de 8.

4. Certaines dimensions, au premier rang desquelles la dimension 24, ont des empilements si bons qu’ils semblent tirer la courbe vers le haut. Cela n’est pas si surprenant en principe, car on peut s’attendre à obtenir au moins des bons empilements à partir de sections ou d’empilements par couches d’empilements exceptionnels, mais l’ampleur du phénomène peut surprendre.

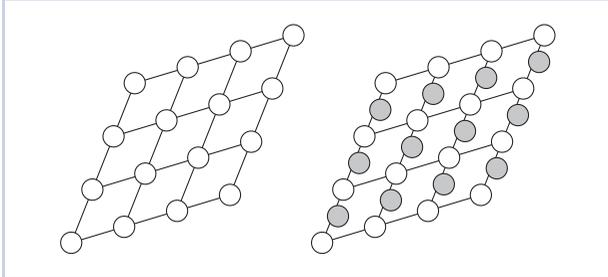
2. Réseaux et empilements périodiques

Comment décrire des empilements de sphères ? Des empilements aléatoires ou pathologiques peuvent être infiniment complexes, mais les empilements les plus importants peuvent souvent être décrits de manière finie par périodicité.

Rappelons qu'un réseau de \mathbb{R}^n en est un sous-groupe discret de rang n . En d'autres termes, il s'agit de l'ensemble des combinaisons \mathbb{Z} -linéaires d'une base de \mathbb{R}^n . De manière équivalente, il s'agit de l'image de \mathbb{Z}^n par un automorphisme linéaire.

Un empilement de sphères \mathcal{P} est *périodique* s'il existe un réseau Λ tel que \mathcal{P} soit invariant par translation par tout élément de Λ . Dans ce cas, le groupe des translations laissant \mathcal{P} invariant doit être un réseau, puisqu'il s'agit clairement d'un groupe discret, et \mathcal{P} est formé d'un nombre fini d'orbites sous ce groupe. Un empilement associé à un réseau est un empilement périodique dont les sphères forment une unique orbite sous le groupe des translations laissant l'empilement invariant (quitte à translater tout l'empilement par un même vecteur, cela revient à dire que les centres des sphères forment un réseau). La figure 5 illustre ces deux notions.

FIGURE 5 – Dans l'empilement associé à un réseau (gauche), les sphères forment une orbite sous l'action des translations, tandis que dans un empilement périodique (droite), elles peuvent en former plusieurs. Les petits parallélogrammes sont des mailles fondamentales



On ne sait pas si les empilements périodiques atteignent toujours la densité maximale, à l'exception des cinq cas pour lesquels le problème de l'empilement de sphères a été résolu. Il est cependant certain qu'ils s'approchent arbitrairement de cette densité maximale : étant donné un empilement optimal, on peut l'approcher en prenant les sphères contenues dans une grande boîte et en les répétant périodiquement dans l'espace ; la perte de densité est négligeable si la boîte est suffisamment grande. Cepen-

nant, il ne semble pas *a priori* y avoir de raisons pour lesquelles les empilements périodiques soient amenés à atteindre l'optimum, et ce n'est peut-être pas le cas en grande dimension.

En revanche, les réseaux ne s'approchent probablement pas arbitrairement de la densité maximale des empilements quelconques en grande dimension. Par exemple, le meilleur empilement périodique connu dans \mathbb{R}^{10} est plus de 8% plus dense que le meilleur empilement connu associé à un réseau. Sous cet éclairage, l'optimalité des réseaux dans \mathbb{R}^8 et \mathbb{R}^{24} ne semble pas courue d'avance, mais est plutôt une indication que l'empilement de sphères dans ces dimensions est particulièrement simple.

Pour calculer la densité de l'empilement associé à un réseau, il est commode de voir le réseau comme un pavage de l'espace par des parallélotopes (l'équivalent n -dimensionnel d'un parallélogramme). Étant donnée une base (v_1, \dots, v_n) d'un réseau Λ , le parallélotope

$$\{x_1 v_1 + \dots + x_n v_n : (x_1, \dots, x_n) \in [0, 1]^n\}$$

est appelé la *maille fondamentale* du réseau Λ associée à cette base. Les translatés de cette maille fondamentale par les éléments de Λ pavent l'espace \mathbb{R}^n , comme dans la figure 5. De ce point de vue, l'empilement associé à un réseau correspond simplement au fait de placer des sphères aux sommets de ce pavage. Il y a globalement une sphère pour chaque copie de la maille fondamentale. Ainsi, si l'empilement utilise des sphères de rayon r et a une maille fondamentale C , sa densité est le rapport

$$\frac{\text{vol}(B_r^n)}{\text{vol}(C)}.$$

Les deux termes de ce quotient peuvent être facilement calculés en fonction de r et C . Le volume d'une maille fondamentale est simplement la valeur absolue du déterminant de la base correspondante du réseau, que nous noterons comme le volume du tore quotient, c'est-à-dire $\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$, pour ne pas avoir à spécifier de base. Calculer le volume d'une boule de rayon r dans \mathbb{R}^n est un exercice de calcul intégral à plusieurs variables, dont la réponse est

$$\text{vol}(B_r^n) = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} r^n,$$

où $(n/2)!$ signifie évidemment $\Gamma(n/2 + 1)$ quand n est impair. On peut ainsi calculer le volume de l'empilement associé à un réseau facilement. Cette facilité

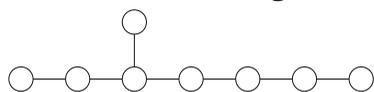
s'étend au cas des empilements périodiques : si l'empilement est formé de N translats du réseau Λ dans \mathbb{R}^n et utilise des sphères de rayon r , sa densité est

$$\frac{N \operatorname{vol}(B_r^n)}{\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}$$

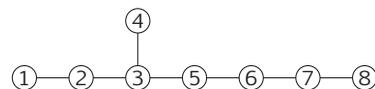
Bien sûr, la densité de l'empilement dépend du rayon des sphères. Étant donné un réseau, il est classique d'utiliser le plus grand rayon pour lequel les sphères ne se chevauchent pas. La *longueur minimale* d'un réseau Λ est la longueur du vecteur non nul le plus court de Λ , c'est-à-dire la distance minimale entre deux points distincts de Λ . Si cette longueur minimale vaut r , alors $r/2$ est le plus grand rayon pour lequel la procédure que l'on vient de décrire fournit un empilement, puisque c'est le rayon pour lequel les sphères voisines deviennent tangentes.

3. Les réseaux de type E_8 et de Leech

Il existe des empilements de sphères notables en bien d'autres dimensions, mais le réseau de type E_8 de \mathbb{R}^8 et le réseau de Leech en dimension 24 sont peut-être les plus remarquables, et possèdent des connexions avec des structures exceptionnelles apparaissant un peu partout en mathématiques. Dans cette section, nous construirons E_8 et démontrerons certaines de ses propriétés de base. Ce réseau fut découvert par Korkine et Zolotareff en 1873, sous l'avatar d'une forme quadratique qu'ils ont baptisée W_8 . Nous donnerons une construction proche de celle de Korkine et Zolotareff, quoique plus moderne. Le réseau de Leech Λ_{24} , découvert par Leech en 1967, est semblable dans l'esprit, mais plus complexe. Au lieu de le construire, nous en résumerons les propriétés. Pour spécifier E_8 , il suffit de décrire une base v_1, \dots, v_8 de \mathbb{R}^8 . En outre, seules les positions relatives des vecteurs de base importent, donc il suffit de décrire leurs produits scalaires. Toute cette information sera encodée dans le diagramme de Dynkin



de E_8 . Dans ce diagramme, les 8 sommets correspondent aux vecteurs de base, dont la norme au carré vaut 2. Les produits scalaires entre vecteurs distincts valent -1 si les sommets correspondants sont adjacents, et 0 sinon. Ainsi, si l'on numérote les sommets



la matrice de Gram (des produits scalaires) de cette base vaut

$$(\langle v_i | v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq 8} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Avant d'aller plus loin, il nous faut nous convaincre qu'il est possible de trouver huit vecteurs définissant cette matrice de Gram. Pour cela, il nous suffit de savoir que cette matrice est symétrique définie positive, et c'est bien le cas. L'aspect défini positif n'est pas évident, mais il peut être vérifié de plusieurs façons. Nous choisirons la façon pédestre, en remarquant que le polynôme caractéristique de la matrice est

$$t^8 - 16t^7 + 105t^6 - 364t^5 + 714t^4 - 784t^3 + 440t^2 - 96t + 1,$$

et que ce polynôme ne saurait avoir de racine $t < 0$, puisque tous les termes de la somme sont alors strictement positifs.

On peut alors définir le réseau de type E_8 comme l'ensemble des combinaisons \mathbb{Z} -linéaires de v_1, \dots, v_8 . Nous utiliserons cette définition pour obtenir plusieurs propriétés fondamentales de E_8 . Ces propriétés nous permettront de déterminer la densité de l'empilement associé, et elles seront également essentielles pour la démonstration de Viazovska.

Le réseau E_8 est un *réseau entier*, ce qui signifie que tous les produits scalaires entre vecteurs du réseau sont entiers. Cela résulte immédiatement de la même propriété, restreinte aux vecteurs de base v_1, \dots, v_8 . Mieux, E_8 est un *réseau pair*, ce qui signifie que la norme au carré de tout vecteur du réseau est un entier pair. Précisément, étant donné $m_1, \dots, m_8 \in \mathbb{Z}$, le vecteur $m_1 v_1 + \dots + m_8 v_8$ a pour norme au carré

$$|m_1 v_1 + \dots + m_8 v_8|^2 = 2m_1^2 + \dots + 2m_8^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 8} 2m_i m_j \langle v_i | v_j \rangle,$$

qui est manifestement paire. Ainsi, les distances entre points distincts de E_8 sont toutes de la forme

$\sqrt{2}k$, où $k \in \{1, 2, \dots\}$, et toutes ces distances sont en fait représentées.

En particulier, la distance entre deux points voisins de E_8 est de $\sqrt{2}$, donc on peut former un empilement avec des sphères de rayon $\sqrt{2}/2$, qui aura pour densité

$$\frac{\text{vol}\left(B_{\sqrt{2}/2}^8\right)}{\text{vol}(\mathbb{R}^8/E_8)} = \frac{\pi^4}{384 \text{vol}(\mathbb{R}^8/E_8)}.$$

Pour calculer la densité de l'empilement associé à E_8 , il ne nous reste donc qu'à calculer $\text{vol}(\mathbb{R}^8/E_8)$.

Rappelons que ce calcul peut s'effectuer à l'aide du déterminant de la matrice des vecteurs de base

$$\text{vol}(\mathbb{R}^8/E_8) = \left| \det \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \dots & v_8 \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} \right|.$$

Or, on peut écrire la matrice de Gram $(\langle v_i | v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ comme le produit

$$\begin{pmatrix} \leftarrow & v_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & v_2 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & v_1 & \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ v_1 & v_2 & \dots & v_8 \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix}$$

de la matrice précédente et de sa transposée, ce qui entraîne que

$$\det(\langle v_i | v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n} = \text{vol}(\mathbb{R}^8/E_8)^2.$$

Calculer le déterminant de la matrice (1) montre ainsi que $\text{vol}(\mathbb{R}^8/E_8) = 1$. En d'autres termes, le réseau E_8 est *unimodulaire*.

En combinant nos différents calculs, nous avons montré la proposition suivante.

Proposition 1. *L'empilement de sphères de \mathbb{R}^8 associé au réseau de type E_8 a pour densité $\pi^4/384 = 0,2536\dots$*

Nos calculs nous ont conduits à la densité d'empilement qui s'avèrera optimale, mais la construction ne rend pas évident que E_8 est un réseau particulièrement intéressant. Le réseau de type E_8 est en fait magnifiquement symétrique, bien plus que ce que l'on pourrait naïvement imaginer en contemplant son diagramme de Dynkin bancal. Son groupe de symétrie est le groupe de Weyl de type E_8 , qui est engendré par les réflexions par rapport aux hyperplans orthogonaux à v_1, \dots, v_8 . Nous n'utiliserons pas ce groupe, mais il est important de garder à l'esprit que le réseau lui-même est bien plus symétrique que

sa définition. Il s'agit là d'un trait courant quand on définit des objets extrêmement symétriques.

Notre calcul pour la densité de E_8 était fondé sur le fait qu'il s'agissait d'un réseau unimodulaire pair. En fait, E_8 est l'unique réseau unimodulaire pair dans \mathbb{R}^8 , à isométrie près. Les réseaux unimodulaires pairs existent uniquement en dimension multiple de 8, et ils jouent un rôle étonnamment important dans la théorie des empilements de sphères.

FIGURE 6 – Stephen D. Miller explique les réseaux duaux et les théorèmes de transfert dans son cours de géométrie des nombres



La dernière propriété dont nous aurons besoin pour la démonstration de Viazovska est que ce réseau est auto-dual, un concept que nous allons définir rapidement. Étant donné un réseau Λ et une de ses bases (v_1, \dots, v_n) , notons (v_1^*, \dots, v_n^*) la base duale par rapport au produit scalaire usuel. Autrement dit,

$$\langle v_i | v_j^* \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le *réseau dual* Λ^* de Λ est alors le réseau de base (v_1^*, \dots, v_n^*) . Il n'est pas difficile de vérifier que Λ^* ne dépend pas du choix de la base de Λ ; une caractérisation intrinsèque est que

$$\Lambda^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \forall x \in \Lambda, \langle x | y \rangle \in \mathbb{Z}\}. \quad (2)$$

L'auto-dualité $E_8^* = E_8$ est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1. *Tout réseau entier unimodulaire Λ vérifie $\Lambda^* = \Lambda$.*

Démonstration. Soit (v_1, \dots, v_n) une base de Λ , et (v_1^*, \dots, v_n^*) sa base duale. Par construction, la matrice de la famille (v_1^*, \dots, v_n^*) est l'inverse de la transposée de celle de (v_1, \dots, v_n) , donc $\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda^*) = 1/\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$. Si Λ est un réseau entier, on a $\Lambda \subset \Lambda^*$, donc l'indice de Λ dans Λ^* est donné par

$$[\Lambda^* : \Lambda] = \text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) / \text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda^*) = \text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)^2.$$

Si Λ est en outre unimodulaire, on a donc $[\Lambda^* : \Lambda] = 1$, donc $\Lambda^* = \Lambda$.

Comme on l'a mentionné plus haut, le réseau de Leech est semblable à E_8 , mais plus élaboré. Il s'agit d'un réseau unimodulaire pair de \mathbb{R}^{24} , mais qui ne contient cette fois aucun vecteur de longueur $\sqrt{2}$, et il s'agit de l'unique réseau possédant ces propriétés, à isométrie près. Les vecteurs non nuls de Λ_{24} ont pour longueur les nombres de la forme $\sqrt{2k}$, pour $k \in \{2, 3, \dots\}$, et l'on a bien sûr $\Lambda_{24}^* = \Lambda_{24}$, puisque le réseau de Leech est entier et unimodulaire. Une propriété remarquable du réseau de Leech est sa chiralité : toutes ses symétries préservent l'orientation, donc le réseau de Leech possède une version lévogyre et une version dextrogyre, qui sont images miroir l'une de l'autre. (En revanche, le groupe de symétrie de E_8 étant engendré par des réflexions, E_8 n'est assurément pas chiral).

La densité d'empilement du réseau de Leech est

$$\frac{\text{vol}(B^{24})}{\text{vol}(\mathbb{R}^{24}/\Lambda_{24})} = \frac{\pi^{12}}{12!} = 0,001929\dots,$$

qui peut paraître microscopique, mais il faut garder en tête que la densité optimale décroît exponentiellement avec la dimension. En fait, la densité du réseau de Leech est remarquablement haute, comme on peut le voir dans le tableau 1 et la figure 4. À titre de comparaison, la meilleure densité actuellement connue pour un empilement dans \mathbb{R}^{23} est 0,001905..., qui est inférieure à celle du réseau de Leech. C'est le seul cas pour lequel la densité augmente en passant d'une dimension à la suivante dans le tableau 1.

4. Bornes de programmation linéaire

La technique sous-jacente utilisée dans la démonstration de Viazovska est celle des *bornes de programmation linéaire* pour la densité maximale dans \mathbb{R}^n . Ces majorations ont été développées par Cohn et Elkies [2], à partir de décennies de travaux antérieurs, initiés par Delsarte et étendus par de nombreux mathématiciens. Dans cette approche du problème, on utilise des fonctions auxiliaires possédant certaines propriétés pour obtenir des bornes sur la densité. La percée de Viazovska consiste en une nouvelle technique pour construire ces fonctions auxiliaires, mais nous allons commencer par examiner la théorie générale et présenter le fonctionnement de ces bornes avant de nous tourner vers sa

démonstration. Nous verrons que les bornes générales ne font pas référence à des dimensions spéciales comme les dimensions 8 et 24, ce qui rend plus remarquable encore le fait qu'elles puissent être utilisées pour résoudre le problème de l'empilement dans ces dimensions.

FIGURE 7 – Noam Elkies a développé les bornes de programmation linéaire en collaboration avec Henry Cohn



Les bornes de programmation linéaire sont fondées sur l'analyse harmonique. Cela peut paraître surprenant, puisque l'empilement de sphères est un problème de géométrie discrète, qui semble à première vue avoir peu en commun avec les problèmes continus étudiés par l'analyse harmonique. Cependant, il existe une connexion profonde entre ces deux domaines, parce que la transformée de Fourier est essentielle dans la compréhension de l'action du groupe additif \mathbb{R}^n sur lui-même par translations, à tel point que l'on ne peut pas vraiment comprendre les réseaux sans analyse harmonique.

On définit la *transformée de Fourier* \hat{f} d'une fonction intégrable $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x, y \rangle} dx.$$

La *formule d'inversion de Fourier* nous apprend que si \hat{f} est également intégrable, on peut reconstruire de même f à partir de \hat{f} :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy \quad (3)$$

presque partout. En d'autres termes, la transformée de Fourier donne les coefficients intervenant dans la décomposition de f en exponentielles complexes.

Pour éviter toute technicité analytique, on va se focaliser sur les *fonctions de Schwartz*. Rappelons

que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Schwartz si f est infiniment différentiable, que

$$f(x) = O\left((1 + |x|)^{-k}\right)$$

pour tout $k \in \{1, 2, \dots\}$, et que la même domination est valable pour les dérivées partielles (à tout ordre) de f . Les fonctions de Schwartz se comportent particulièrement bien, ce qui permet de justifier toutes les manipulations que nous avons envie de faire, et l'ensemble des fonctions de Schwartz est invariant par la transformée de Fourier. On pourrait utiliser des hypothèses plus faibles, mais puisque la méthode de Viazovska produit des fonctions de Schwartz, on peut très bien se contenter de ce cas.

L'intérêt de la transformée de Fourier dans le problème d'empilement est qu'elle diagonalise l'opération de translation de vecteur quelconque. Plus précisément, (3) entraîne que

$$f(x + t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle t, y \rangle} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy,$$

ce qui signifie que traduire de t l'argument de f revient à multiplier sa transformée de Fourier $\hat{f}(y)$ par $e^{2\pi i \langle t, y \rangle}$. Qu'elle diagonalise simultanément tous les opérateurs de translation fait de la transformée de Fourier un outil idéal pour étudier les structures périodiques.

L'outil clef à la base des bornes de programmation linéaire est la *formule sommatoire de Poisson*, qui exprime une dualité entre le fait de sommer une fonction sur un réseau et le fait de sommer sa transformée de Fourier sur le réseau dual, défini en (2). La formule sommatoire de Poisson dit que, si f est une fonction de Schwartz, alors

$$\sum_{x \in \Lambda} f(x) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y). \quad (4)$$

En d'autres termes, sommer \hat{f} sur Λ^* est presque la même chose que sommer f sur Λ , la seule différence étant un facteur valant $\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$. Ainsi exprimée, la formule sommatoire de Poisson paraît mystérieuse, mais elle devient beaucoup plus claire quand on l'écrit sous la forme

$$\sum_{x \in \Lambda} f(x + t) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y) e^{2\pi i \langle y, t \rangle}. \quad (5)$$

Cette équation se réduit à (4) quand $t = 0$, et elle a une preuve simple. En tant que fonction de t , le terme de gauche de (5) est Λ -périodique, alors que le terme de droite est sa série de Fourier. En particulier, le terme de droite met exactement en jeu les

exponentielles complexes $t \mapsto e^{2\pi i \langle y, t \rangle}$ qui sont Λ -périodiques, c'est-à-dire celles pour lesquelles $y \in \Lambda^*$ (comme on le vérifie aisément à partir de (2)). L'orthogonalité nous permet alors de calculer le coefficient devant une telle exponentielle, et on obtient après calcul $\hat{f}(y)/\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$.

On peut maintenant énoncer et démontrer les bornes de programmation linéaire, qui montrent comment convertir un certain type de fonctions auxiliaires en bornes pour le problème d'empilement de sphères. Plus particulièrement, on va utiliser des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telles que f est ultimement négative (c'est-à-dire qu'il existe un rayon tel que $f(x) \leq 0$ dès que $|x| \geq r$) alors que \hat{f} est partout positive.

Théorème 1 (Cohn, Elkies [2]). *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Schwartz et r un nombre réel strictement positif tel que $f(0) = \hat{f}(0) > 0$, $\hat{f}(y) \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$ et $f(x) \leq 0$ dès que $|x| \geq r$. Alors la densité maximale des empilements de sphères dans \mathbb{R}^n est au plus $\text{vol}(B_{r/2}^n)$.*

Le nom de « programmation linéaire » renvoie à l'optimisation d'une forme linéaire, soumise à des contraintes linéaires. Le problème d'optimisation consistant à choisir f pour minimiser r peut être reformulé en un programme linéaire en une infinité de variables, mais ce n'est pas un point de vue que nous adopterons ici.

Démonstration. La démonstration consiste à appliquer les inégalités opposées $f(x) \leq 0$ et $\hat{f}(y) \geq 0$ des deux côtés de la formule sommatoire de Poisson. On va commencer par démontrer le résultat pour l'empilement associé à un réseau, ce qui est le cas le plus simple.

Soit Λ un réseau de \mathbb{R}^n , et supposons sans perte de généralité que la longueur minimale de Λ est r (en utilisant le fait que la densité d'un empilement est invariante par dilatation). En d'autres termes, l'empilement utilise des boules de rayon $r/2$, et sa densité est

$$\frac{\text{vol}(B_{r/2}^n)}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}.$$

Ainsi, il suffit de démontrer que $\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq 1$ pour démontrer la majoration de la densité d'empilement par $\text{vol}(B_{r/2}^n)$. D'après la formule sommatoire de Poisson,

$$\sum_{x \in \Lambda} f(x) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y). \quad (6)$$

Maintenant, l'inégalité $f(x) \leq 0$ dès que $|x| \geq r$ nous permet de majorer le terme de gauche de (6)

par $f(0)$, et l'inégalité $\hat{f}(y) \geq 0$ permet de minorer le terme de droite par $\hat{f}(0)/\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)$. Il s'ensuit que

$$f(0) \geq \frac{\hat{f}(0)}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)},$$

ce qui fournit $\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq 1$ car $f(0) = \hat{f}(0) > 0$.

Le cas général est presque aussi simple, mais les manipulations algébriques sont un peu plus fines. Comme les empilements de sphères périodiques approchent arbitrairement la densité d'empilement optimale, on peut considérer un empilement périodique utilisant des boules de rayon $r/2$, centrées en les translatés d'un réseau $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ par des vecteurs t_1, \dots, t_N . La densité de cet empilement est

$$\frac{N \text{vol}(B_{r/2}^n)}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)},$$

et il s'agit de montrer $\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq N$.

On utilise la formule sommatoire de Poisson translatée (5) qui entraîne après une petite manipulation

$$\sum_{j,k=1}^N \sum_{x \in \Lambda} f(t_j - t_k + x) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y) \left| \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \langle y | t_j \rangle} \right|^2.$$

On applique à nouveau les inégalités sur f et \hat{f} aux membres de gauche et droite de cette égalité, respectivement. On obtient à gauche une majoration en ignorant tous les termes exceptés ceux tels que $j = k$ et $x = 0$; à droite, on obtient une minoration en ne conservant que le terme correspondant à $y = 0$. Ainsi,

$$Nf(0) \geq \frac{N^2}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \hat{f}(0),$$

ce qui entraîne que $\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda) \geq N$ et donc que la densité est au plus $\text{vol}(B_{r/2}^n)$, comme souhaité.

Cette technique de preuve peut paraître ridiculement inefficace : en partant de la formule sommatoire de Poisson, qui exprime une dualité profonde, on jette négligemment tous les termes non triviaux, en laissant simplement les contributions de l'origine. En pratique, on y est contraint par notre ignorance des autres termes, qui dépendent tous du réseau. Une justification plus profonde et que les termes ignorés sont en général petits, parfois nuls, donc les ignorer n'est pas aussi mauvais qu'on pourrait le penser.

Pour appliquer le théorème 1, il faut choisir une fonction auxiliaire f . Le théorème montre alors comment obtenir une borne sur la densité à partir de f ,

mais il ne dit rien sur la façon de choisir f afin de minimiser r , et donc la densité maximale. L'optimisation de la fonction auxiliaire reste malheureusement un problème ouvert, et la meilleure fonction f n'est connue que si n vaut 1, 8 ou 24.

En guise de première étape vers la résolution de ce problème, remarquons qu'on peut symétriser f par rotations, de telle sorte que $f(x)$ ne dépende que de $|x|$, car toutes les contraintes sur f sont linéaires et invariantes par rotations. Même si les fonctions d'une seule variable peuvent paraître plus maniables, le problème d'optimisation s'avère d'une subtilité redoutable.

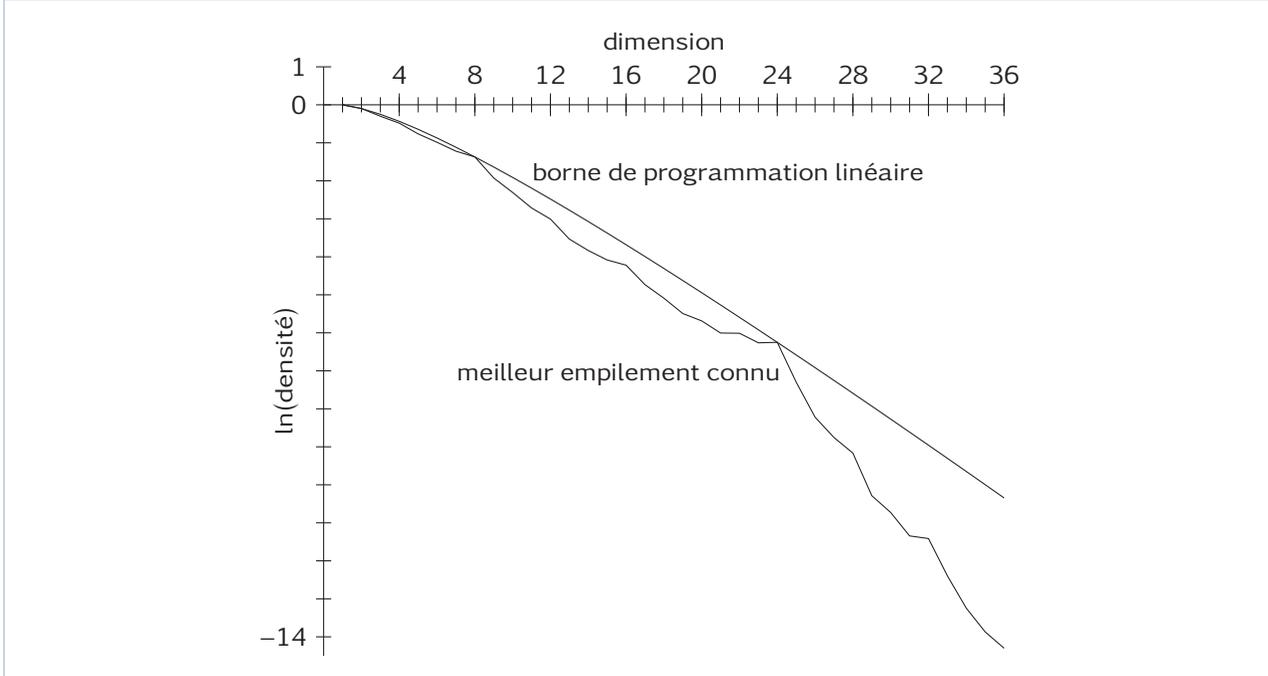
En l'absence d'une optimisation complète du choix de f , que faire? Plusieurs constructions explicites sont connues, mais font en général appel à des calculs numériques. Il est ainsi commode d'utiliser des fonctions auxiliaires de la forme $f(x) = p(|x|^2)e^{-\pi|x|^2}$, où p est un polynôme. Ces fonctions sont assez souples pour approcher toute fonction de Schwartz invariante par rotations et assez simples pour être manipulables. Une optimisation numérique donne alors des approximations de haute précision des bornes de programmation linéaire, comme le montrent la figure 8 et le tableau 2.

5. La recherche des fonctions magiques

La propriété la plus frappante de la figure 8 est que les bornes inférieure et supérieure pour \mathbb{R}^n semblent confondues pour $n = 8$ et 24. En d'autres termes, il semble exister des *fonctions auxiliaires magiques* qui résolvent le problème de l'empilement en ces dimensions, en atteignant la borne $r = \sqrt{2}$ en dimension 8 et $r = 2$ en dimension 24 dans le théorème 1. (Ces valeurs de r sont les longueurs minimales de E_8 et Λ_{24} , respectivement). C'est exactement cette existence qui vient d'être démontrée, et la preuve consiste simplement en la construction d'une telle fonction auxiliaire. Les bornes de programmation linéaire ne semblent optimales en aucune autre dimension supérieure à 2, ce qui rend ces cas particulièrement notables.

L'existence de fonctions magiques a été conjecturée par Cohn et Elkies [2] sur la base d'indices numériques et d'analogies avec d'autres problèmes venant de la théorie des codes. D'autres éléments pointant dans la même direction ont été obtenus par Cohn et Kumar [3] quand ils prouvèrent que le réseau de Leech est le réseau le plus dense dans \mathbb{R}^{24} , alors que

FIGURE 8 – Le logarithme de la densité d’empilement en fonction de la dimension. La courbe du haut est la borne de programmation linéaire, optimisée numériquement, et la courbe du bas est le meilleur empilement actuellement connu. La vérité est entre ces deux courbes.



Cohn et Miller [4] menaient une étude encore plus approfondie des fonctions magiques. Ces calculs ne laissaient plus aucun doute sur l’existence des fonctions magiques : il était possible de les calculer avec une précision de 50 décimales, de tracer leur graphe, d’obtenir de bonnes approximations de leurs zéros et des coefficients de leur développement en série entière, etc. Il s’agissait de fonctions parfaitement concrètes, accessibles à l’expérience et à l’exploration, ce qui permit de dégager un certain nombre de motifs intrigants. La seule chose qui manquait était une preuve d’existence.

Cependant, montrer cette existence n’était pas une tâche facile. On n’avait pas de trace d’une formule explicite, ou aucune caractérisation semblant mener à une démonstration. Les fonctions magiques semblaient venir de nulle part.

La difficulté fondamentale est d’expliquer l’origine de la magie. On peut optimiser les fonctions auxiliaires en toute dimension, mais cela ne donnera pas en général une majoration précise de la densité maximale. Pourquoi les dimensions 8 et 24 devraient-elles être différentes ? Les résultats numériques montrent que la borne est quasiment optimale en ces dimensions, mais pourquoi ne pourrait-elle pas l’être à cent décimales près, suivies par du bruit

aléatoire ? Il ne s’agit pas d’un scénario crédible pour quiconque croit en la beauté des mathématiques, mais la foi ne démontre rien, et toute démonstration doit s’appuyer sur des propriétés spéciales de ces dimensions.

Par comparaison, la réponse est moins plaisante en dimension 16. Par analogie avec $r = \sqrt{2}$ quand $n = 8$ et $r = 2$ quand $n = 24$, on pourrait imaginer que $r = \sqrt{3}$ quand $n = 16$, mais cette borne ne peut pas être atteinte. L’optimisation numérique semble converger vers $r^2 = 3,0252593116828820\dots$, qui est certes proche de 3 mais sans lui être égal. L’identification exacte de ce nombre reste ouverte.

Malgré l’absence de preuve d’existence, la démonstration du théorème 1 décrit implicitement les propriétés que doit avoir une fonction magique.

Lemme 2. *Supposons que f satisfasse aux hypothèses des bornes de programmation linéaire dans \mathbb{R}^n , avec notamment $f(x) \leq 0$ dès que $|x| \geq r$, et supposons que Λ soit un réseau de \mathbb{R}^n de longueur minimale r . Alors la densité de Λ vaut la borne $\text{vol}(B_{r/2}^n)$ du théorème 1 si et seulement si f est nulle sur $\Lambda \setminus \{0\}$ et \hat{f} est nulle sur $\Lambda^* \setminus \{0\}$.*

Démonstration. Rappelons que la preuve du théorème 1 revenait à négliger tous les termes non triviaux de la formule sommatoire de Poisson, afin d’ob-

TABLEAU 2 – La borne de programmation linéaire pour l’empilement de sphères dans \mathbb{R}^n , pour $1 \leq n \leq 36$. Tous les nombres sont arrondis par excès.

n	majoration	n	majoration	n	majoration
1	1,000000000	13	0,0624817002	25	0,001384190723
2	0,906899683	14	0,0463644893	26	0,000991023890
3	0,779746762	15	0,0342482621	27	0,000708229796
4	0,647704966	16	0,0251941308	28	0,000505254217
5	0,524980022	17	0,0184640904	29	0,000359858186
6	0,417673416	18	0,0134853405	30	0,000255902875
7	0,327455611	19	0,0098179552	31	0,000181708382
8	0,253669508	20	0,0071270537	32	0,000128843289
9	0,194555339	21	0,0051596604	33	0,000091235604
10	0,147953479	22	0,0037259420	34	0,000064522197
11	0,111690766	23	0,0026842799	35	0,000045574385
12	0,083775831	24	0,0019295744	36	0,000032153056

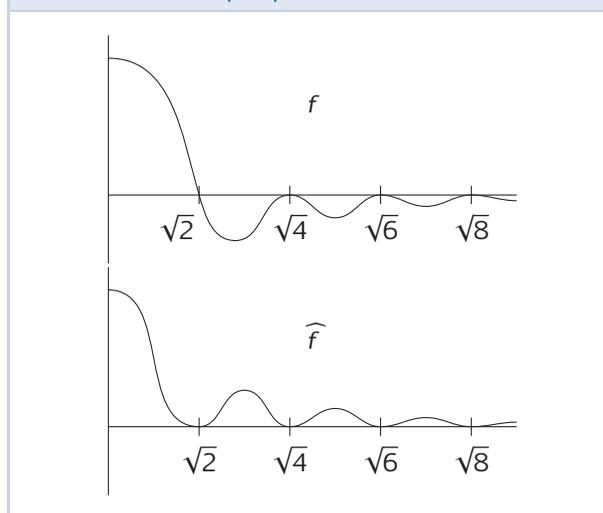
tenir l’inégalité

$$f(0) \geq \sum_{x \in \Lambda} f(x) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} \hat{f}(y) \geq \frac{\hat{f}(0)}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)}.$$

Pour que cette inégalité soit une égalité, il faut que tous les termes négligés soient nuls. En d’autres termes, f montre que Λ est un empilement de sphères optimal si et seulement si f est nulle sur $\Lambda \setminus \{0\}$ et \hat{f} est nulle sur $\Lambda^* \setminus \{0\}$.

Comme on l’a dit dans la section précédente, on peut supposer sans perte de généralité que f (et donc \hat{f}) est une fonction invariante par rotations. On sait alors exactement où se trouvent les zéros de f et \hat{f} , comme $E_8 = E_8^*$ a des vecteurs de norme $\sqrt{2k}$, pour tout $k \in \{1, 2, \dots\}$ et que $\Lambda_{24} = \Lambda_{24}^*$ a des vecteurs de norme $\sqrt{2k}$, pour tout $k \in \{2, 3, \dots\}$. Ces zéros doivent être doubles, pour éviter les changements de signe, à l’exception du premier zéro de f qui doit être simple. La figure 9 illustre ces propriétés.

FIGURE 9 – Un graphe esquissant les zéros de la fonction magique f et sa transformée de Fourier \hat{f} en dimension 8. La figure n’est pas à l’échelle, car les véritables fonctions décroissent trop rapidement.



Ainsi, notre problème est facilement énoncé : comment construire une fonction de Schwartz invariante par rotations f telle que f et \hat{f} aient les zéros souhaités, et seulement eux ? Notons que la formule sommatoire de Poisson sur E_8 ou Λ_{24} implique alors que $f(0) = \hat{f}(0)$, et qu’en remplaçant au besoin f par son opposée, on obtient les inégalités voulues.

Il est malheureusement difficile d’exploiter cette caractérisation. Le problème est qu’il est difficile de contrôler simultanément une fonction et sa transformée de Fourier : il est facile de produire les zéros souhaités pour l’une d’elle isolément, mais pas pour

les deux. Cette incapacité à contrôler f sans perdre le contrôle de \hat{f} est au cœur du principe d'incertitude de Heisenberg, et c'est un obstacle absolument fondamental.

Une façon naturelle d'attaquer le problème est de mener des expériences numériques. Cohn et Miller ont utilisé des fonctions de la forme $f(x) = p(|x|^2)e^{-\pi|x|^2}$ pour approcher les fonctions magiques, où p est un polynôme choisi pour forcer f et \hat{f} à avoir beaucoup des zéros désirés. Une telle approximation ne peut jamais être parfaite, car elle ne possède qu'un nombre fini de zéros, mais elle peut s'approcher indéfiniment de la vérité. Cette étude a permis de découvrir plusieurs propriétés notables des fonctions magiques, ce qui a montré qu'elles possédaient des structures inattendues. Par exemple, si l'on normalise les fonctions magiques f_8 et f_{24} en dimension 8 et 24 de telle sorte que $f_8(0) = f_{24}(0) = 1$, Cohn et Miller ont conjecturé que leur deuxième coefficient de Taylor est rationnel :

$$\begin{aligned} f_8(x) &= 1 - \frac{27}{10}|x|^2 + O(|x|^4) \\ \hat{f}_8(x) &= 1 - \frac{3}{2}|x|^2 + O(|x|^4) \\ f_{24}(x) &= 1 - \frac{14347}{5460}|x|^2 + O(|x|^4) \\ \hat{f}_{24}(x) &= 1 - \frac{205}{156}|x|^2 + O(|x|^4) \end{aligned}$$

S'il en avait été de même des coefficients d'ordre supérieur, cela aurait ouvert la porte à une détermination exacte de ces fonctions mais, de manière frustrante, il semble que les coefficients d'ordre supérieur soient beaucoup plus subtils et probablement irrationnels. Les fonctions magiques ont gardé leur mystère, et ce comportement de leur développement de Taylor est resté inexplicé jusqu'à la découverte de leur formule exacte.

Étant donnée la difficulté de contrôler f et \hat{f} simultanément, une approche naturelle est de les décomposer en fonctions propres de la transformée de Fourier. Par inversion de Fourier, toute fonction f invariante par rotations vérifie $\hat{\hat{f}} = f$. Ainsi, si l'on pose $f_+ = (f + \hat{f})/2$ et $f_- = (f - \hat{f})/2$, on a $f = f_+ + f_-$ et $\hat{f}_\pm = \pm f_\pm$. Comme f et \hat{f} s'annulent aux mêmes points, elles partagent ces zéros avec f_+ et f_- . Notre but est de construire des fonctions propres de la transformée de Fourier, invariantes par rotations, à zéros prescrits. L'avantage de cette approche est qu'elle effectue une séparation en deux problèmes distincts, à savoir la construction des fonctions propres associées aux valeurs propres $+1$ et -1 , mais ces pro-

blèmes restent difficiles.

6. Formes modulaires

Dès la parution de l'article de Cohn et Elkies en 2003, des arithméticiens ont espéré construire les fonctions magiques à l'aide de formes modulaires. L'idée est simple : les formes modulaires sont des fonctions profondes et mystérieuses liées aux réseaux, comme les fonctions magiques : pourquoi n'y aurait-il pas de rapport entre elles ? Malheureusement, il s'agit de types de fonctions très différents, et aucune connexion entre les deux types n'apparaît clairement. C'était l'état de la question jusqu'à ce que Viazovska découvre une transformée intégrale remarquable, qui lui permet de construire les fonctions magiques à partir de formes modulaires. Nous y reviendrons bientôt, mais rappelons d'abord brièvement comment fonctionnent les formes modulaires.

Commençons par quelques exemples. Tout réseau Λ a une fonction thêta Θ_Λ , définie par

$$\Theta_\Lambda(z) = \sum_{x \in \Lambda} e^{\pi i |x|^2 z}. \quad (7)$$

Cette série converge quand $\text{Im} z > 0$, et elle définit une fonction analytique sur le demi-plan $\mathfrak{h} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z > 0\}$. Pour motiver sa définition, on peut penser à la fonction thêta comme à une série génératrice dans laquelle le coefficient devant $e^{\pi i t z}$ compte le nombre de vecteurs $x \in \Lambda$ tels que $|x|^2 = t$. Cependant, cette vision n'explique pas pourquoi l'on exprime Θ_Λ en fonction de $e^{\pi i z}$. À première vue, cela peut paraître un hommage un peu gratuit aux séries de Fourier, mais cela conduit en fait à une formule de transformation élégante, obtenue en appliquant la formule sommatoire de Poisson à une gaussienne :

Proposition 2. *Si Λ est un réseau dans \mathbb{R}^n , alors*

$$\Theta_\Lambda(z) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \left(\frac{i}{z}\right)^{n/2} \Theta_{\Lambda^*}(-1/z)$$

pour tout $z \in \mathfrak{h}$.

Preuve. L'une des propriétés les plus importantes des gaussiennes est qu'elles forment un ensemble stable par la transformée de Fourier : la transformée de Fourier d'une gaussienne large est une gaussienne étroite, et réciproquement. Plus précisément, pour $t > 0$, la transformée de Fourier de la gaussienne $x \mapsto e^{-t\pi|x|^2}$ sur \mathbb{R}^n est $x \mapsto t^{-n/2} e^{-\pi|x|^2/t}$. En fait, la même chose reste vraie quand t est un nombre complexe tel que $\Re t > 0$, par prolongement analytique.

La formule sommatoire de Poisson nous donne alors

$$\sum_{x \in \Lambda} e^{-t\pi|x|^2} = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \sum_{y \in \Lambda^*} t^{-n/2} e^{-\pi|y|^2/t}.$$

En posant $z = it$, il vient

$$\Theta_{\Lambda}(z) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{R}^n/\Lambda)} \left(\frac{i}{z}\right)^{n/2} \Theta_{\Lambda^*}(-1/z)$$

dès que $\text{Im} z > 0$, comme souhaité. \square

Dans le cas $\Lambda = E_8$, on a $\Lambda^* = E_8$, donc

$$\Theta_{E_8}(-1/z) = z^4 \Theta_{E_8}(z).$$

En outre, E_8 est un réseau pair, donc la décomposition en série de Fourier (7) entraîne

$$\Theta_{E_8}(z+1) = \Theta_{E_8}(z).$$

Ces deux symétries sont les propriétés les plus importantes de Θ_{E_8} . Pour exactement les mêmes raisons, la fonction thêta du réseau de Leech Λ_{24} vérifie

$$\Theta_{\Lambda_{24}}(-1/z) = z^{12} \Theta_{\Lambda_{24}}(z) \quad \text{et} \quad \Theta_{\Lambda_{24}}(z+1) = \Theta_{\Lambda_{24}}(z).$$

Les applications $z \mapsto z+1$ et $z \mapsto -1/z$ engendrent un groupe discret de transformations du demi-plan supérieur appelé le *groupe modulaire*. Il s'agit en fait essentiellement de l'action du groupe $SL_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan supérieur par homographies, mais ce fait ne nous servira qu'à justifier la notation $SL_2(\mathbb{Z})$ pour le groupe modulaire.

Une *forme modulaire* de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$ est une fonction holomorphe $\varphi: \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\varphi(z+1) = \varphi(z)$ et $\varphi(-1/z) = z^k \varphi(z)$ pour tout $z \in \mathfrak{h}$, et telle que $\varphi(z)$ reste bornée quand $\text{Im} z \rightarrow \infty$. (Cette dernière condition est appelée *holomorphie à l'infini*, parce qu'elle signifie que la singularité à l'infini est effaçable). Il n'est pas difficile de montrer que le poids d'une forme modulaire non nulle est un entier naturel pair, et que les seules formes modulaires de poids nul sont les fonctions constantes.

On a vu que Θ_{E_8} et $\Theta_{\Lambda_{24}}$ vérifient les formules de transformation des formes modulaires de poids 4 et 12, respectivement, et il est facile de voir qu'elles sont holomorphes à l'infini. Ainsi, ces fonctions thêta sont des formes modulaires.

Il y a beaucoup d'autres formes modulaires connues. Par exemple, la *série d'Eisenstein* E_k définie par

$$E_k(z) = \frac{1}{2\zeta(k)} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

est une forme modulaire de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$ dès que k est un entier pair strictement supérieur à 2 (alors qu'elle s'annule si k est impair). On démontre les conditions $E_k(z+1) = E_k(z)$ et $E_k(-1/z) = z^k E_k(z)$ en réarrangeant simplement les termes dans la somme. Dans la définition, ζ désigne la fonction zêta de Riemann et $2\zeta(k)$ est un facteur de normalisation. L'avantage de cette normalisation est qu'elle conduit au développement de Fourier

$$E_k(z) = 1 + \frac{2}{\zeta(1-k)} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) e^{2\pi imz}, \quad (8)$$

où $\sigma_{k-1}(m)$ est la somme des puissances $(k-1)$ -ièmes des diviseurs de m , et que $\zeta(1-k)$ s'avère être un nombre rationnel.

Le conflit de notations entre la série d'Eisenstein E_k et le réseau de type E_8 est malheureux, mais les deux notations sont trop établies pour en changer. Heureusement, nous n'aurons jamais besoin du cas $k=8$ et le contexte permettra toujours de distinguer entre séries d'Eisenstein et réseaux.

Les formes modulaires sont des objets extrêmement contraints, ce qui rend les coïncidences fréquentes. Par exemple, Θ_{E_8} est la même chose que E_4 , parce qu'il existe une unique forme modulaire de poids 4 pour $SL_2(\mathbb{Z})$ dont le terme constant est 1. De manière équivalente, pour $m=1, 2, \dots$, il y a exactement $240\sigma_3(m)$ vecteurs $x \in E_8$ tels que $|x|^2 = 2m$. La fonction thêta $\Theta_{\Lambda_{24}}$ n'est quant à elle pas une série d'Eisenstein, mais elle se décompose sous la forme

$$\Theta_{\Lambda_{24}} = \frac{7}{12} E_4^3 + \frac{5}{12} E_6^2.$$

Plus généralement, en notant \mathcal{M}_k l'espace des formes modulaires de poids k pour $SL_2(\mathbb{Z})$, la somme directe $\bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{M}_k$ est un anneau gradué, car le produit de formes modulaires de poids k et \mathbb{E} est une forme modulaire de poids $k+\mathbb{E}$. Cet anneau est isomorphe à un anneau de polynômes à deux générateurs, à savoir E_4 et E_6 . Autrement dit, l'ensemble

$$\{E_4^i E_6^j : i, j \geq 0 \text{ et } 4i + 6j = k\}$$

est une base des formes modulaires de poids k . En particulier, il n'y a pas de forme modulaire de poids 2 pour $SL_2(\mathbb{Z})$, car les poids de E_4 et E_6 sont trop grands pour engendrer une telle forme.

On ne peut donc pas obtenir une forme modulaire de poids 2 en utilisant la définition de E_k en termes de double somme pour $k=2$. Le problème est que la modularité provient crucialement de la possibilité de réarranger les termes dans la somme,

alors que cette somme n'est que semi-convergente dans le cas $k = 2$, et pas absolument convergente. En revanche, on peut définir E_2 en utilisant (8). Cela définit seulement une forme quasi-modulaire, et non pas une vraie forme modulaire, parce que l'on peut montrer que $E_2(-1/z) = z^2 E_2(z) - 6iz/\pi$, au lieu de $z^2 E_2(z)$. Cette série d'Eisenstein imparfaite jouera un rôle dans la construction des fonctions magiques.

Par défaut, toutes les formes modulaires sont supposées holomorphes, mais on peut évidemment considérer des quotients, qui ne le seront plus. Une *forme modulaire méromorphe* est le quotient de deux formes modulaires, et elle est dite *faiblement holomorphe* quand elle est holomorphe sur \mathfrak{h} (mais pas forcément à l'infini). Contrairement au cas holomorphe, l'espace des formes modulaires faiblement holomorphes de tout degré pair (positif ou négatif) est de dimension infinie. L'autorisation d'un pôle à l'infini apporte énormément de flexibilité.

À première vue, les formes modulaires ont peu à voir avec les fonctions magiques. Notamment, le lien entre les formes modulaires et la transformée de Fourier radiale en n dimensions n'est pas évident. Un indice de leur pertinence provient de la transformée de Laplace. Comme nous l'avons observé dans le cas des fonctions thêta, les gaussiennes forment une famille de fonctions particulièrement utile, pour laquelle le calcul de la transformée de Fourier est simple. Il est naturel de définir une fonction f comme une combinaison linéaire continue de gaussiennes via

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-t\pi|x|^2} g(t) dt,$$

où la fonction de pondération $g(t)$ donne le coefficient de la gaussienne $e^{-t\pi|x|^2}$. Cette formule est simplement la *transformée de Laplace* de g , évaluée en $\pi|x|^2$.

En supposant que g se comporte suffisamment bien, on peut calculer \widehat{f} en échangeant la transformée de Fourier et l'intégrale sur t , ce qui donne

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \int_0^\infty t^{-n/2} e^{-\pi|y|^2/t} g(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t\pi|y|^2} t^{n/2-2} g(1/t) dt. \end{aligned}$$

En d'autres termes, prendre la transformée de Fourier de f revient à remplacer g par $t \mapsto t^{n/2-2} g(1/t)$.

Ainsi, si $g(1/t) = \varepsilon t^{2-n/2} g(t)$, avec $\varepsilon = \pm 1$, on a $\widehat{f} = \varepsilon f$. On peut donc construire des fonctions propres de la transformée de Fourier en prenant des transformées de Laplace de solutions d'une certaine équation fonctionnelle. Ce qui est remarquable avec cette

équation fonctionnelle est sa ressemblance avec les formules de transformation des formes modulaires sur l'axe imaginaire. Si l'on pose $g(t) = \varphi(it)$, alors l'équation de modularité $\varphi(-1/z) = z^k \varphi(z)$ avec $z = it$ correspond à $g(1/t) = i^k t^k g(t)$. Si φ est une forme modulaire méromorphe de poids $k = 2 - n/2$ qui s'annule en $i\infty$ et n'a pas de pôle sur l'axe imaginaire, alors f est une fonction propre radiale de la transformée de Fourier sur \mathbb{R}^n , associée à la valeur propre i^k .

Il ne s'agit évidemment pas de la seule construction possible de fonctions propres de la transformée de Fourier, mais c'est une manière naturelle de les construire à partir de formes modulaires. La construction que l'on vient de donner n'est clairement pas assez flexible pour construire les fonctions magiques, parce qu'elle ne donne qu'une seule valeur propre. En dimension $n = 8$ et poids $k = 2 - n/2 = -2$, on a $i^k = -1$, donc on peut construire dans cette dimension une fonction propre associée à la valeur propre -1 , mais pas une associée à $+1$. Ce n'est en fait pas un obstacle sérieux : il y a de nombreuses variantes des formes modulaires (pour d'autres groupes, ou avec caractère), et il n'est pas difficile de fabriquer ainsi des fonctions propres pour les deux valeurs propres. Il y a cependant un problème plus grave. Il n'y a pas de manière évidente de contrôler les zéros d'une fonction propre ainsi construite à l'aide de la transformée de Laplace. Puisque notre objectif est précisément de prescrire ces zéros, cette approche semble inutile. Ce qui nous retient est que nous n'avons pas complètement tiré parti de la modularité : on utilise pour le moment simplement l'équation $\varphi(-1/z) = z^k \varphi(z)$, mais pas $\varphi(z+1) = \varphi(z)$.

7. La démonstration de Viazovska

Le problème fondamental avec l'approche utilisant la transformée de Laplace dans la section précédente est l'apparente impossibilité de prescrire les zéros souhaités. Viazovska contourne cette difficulté par une construction audacieuse : elle insère les zéros désirés par force brute, en incluant un facteur explicite $\sin^2(\pi|x|^2/2)$, qui s'annule au deuxième ordre en $|x| = \sqrt{2k}$ pour $k = 1, 2, \dots$ et au quatrième ordre en $x = 0$. Dans sa construction en dimension 8, les deux fonctions propres sont de la forme

$$\sin^2(\pi|x|^2/2) \int_0^\infty g(t) e^{-\pi|x|^2 t} dt \quad (9)$$

pour une certaine fonction g .

Un problème immédiatement apparent est que $\sin^2(\pi|x|^2/2)$ s'annule trop. Précisément, il s'annule au quatrième ordre quand $x = 0$ et au deuxième ordre quand $|x| = \sqrt{2}$, alors que l'on souhaite ne pas avoir de zéro en $x = 0$ et une annulation simplement au premier ordre quand $|x| = \sqrt{2}$. Pour éviter cette difficulté, l'intégrale dans (9) doit avoir des pôles en 0 et $\sqrt{2}$, en tant que fonction de $|x|$, ce qui compensera les zéros surnuméraires. L'intégrale convergera uniquement quand $|x| > \sqrt{2}$, mais la fonction définie par (9) s'étend à $|x| \leq \sqrt{2}$ par prolongement analytique.

Quels choix de g donneront des fonctions propres de la transformée de Fourier sur \mathbb{R}^8 ? Ce n'est pas clair, car le facteur $\sin^2(\pi|x|^2/2)$ perturbe les calculs directs de transformée de Laplace effectués à la fin de la section précédente. Pour les remplacer, Viazovska écrit la fonction sinus en termes d'exponentielles complexes, et utilise des arguments élégants d'intégration sur des contours pour montrer que (9) donne une fonction propre dès que g vérifie certaines formules de transformation. Identifier les conditions précises sur g n'est pas du tout évident, et constitue le cœur de son article.

Pour obtenir une fonction propre associée à la valeur propre $+1$, Viazovska montre qu'il suffit de prendre $g(t) = t^2\varphi(i/t)$, où φ est une forme quasi-modulaire faiblement holomorphe de poids 0 et de profondeur 2 pour $SL_2(\mathbb{Z})$. Ici, une *forme quasi-modulaire de profondeur 2* est un polynôme du second degré en E_2 dont les coefficients sont des formes modulaires, où E_2 est la série d'Eisenstein de poids 2. Rappelons que E_2 n'est pas une forme modulaire à cause de la formule de transformation étrange $E_2(-1/z) = z^2E_2(z) - 6iz/\pi$, mais cette équation fonctionnelle convient parfaitement ici.

Pour la valeur propre -1 , Viazovska montre qu'il suffit de prendre $g(t) = \psi(it)$, où ψ est une forme modulaire faiblement holomorphe de poids -2 pour un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{Z})$ appelé $\Gamma(2)$, telle que ψ vérifie l'équation fonctionnelle supplémentaire

$$\psi(z) = \psi(z+1) + z^2\psi(-1/z).$$

Nous n'avons pas parlé de formes modulaires pour d'autres groupes comme $\Gamma(2)$, mais elles sont semblables à celles pour $SL_2(\mathbb{Z})$. En particulier, l'anneau des formes modulaires pour $\Gamma(2)$ est engendré par deux formes de poids 2, à savoir $\Theta_{\mathbb{Z}}^4$ (la puissance quatrième de la fonction thêta du réseau entier unidimensionnel) et sa translatée $z \mapsto \Theta_{\mathbb{Z}}^4(z+1)$.

Ces conditions portant sur φ et ψ sont exactement aussi étonnantes qu'elles en ont l'air. Il est tout

sauf évident qu'elles donnent naissance à des fonctions propres, mais la démonstration de Viazovska par intégration sur des contours montre que c'est effectivement le cas. Même une fois que l'on sait que cette méthode construit des fonctions propres, il n'est pas évident de choisir φ et ψ pour obtenir des fonctions magiques, et il n'est même pas clair que ce soit possible.

Heureusement, on peut écrire des conditions nécessaires, et les fonctions les plus simples les vérifiant fonctionnent à merveille. En particulier, on peut prendre

$$\varphi = \frac{4\pi(E_2E_4 - E_6)^2}{5(E_6^2 - E_4^3)}$$

et

$$\psi = -\frac{32\Theta_{\mathbb{Z}}^4|_{\Gamma}(5\Theta_{\mathbb{Z}}^8 - 5\Theta_{\mathbb{Z}}^4|_{\Gamma}\Theta_{\mathbb{Z}}^4 + 2\Theta_{\mathbb{Z}}^8|_{\Gamma})}{15\pi\Theta_{\mathbb{Z}}^8(\Theta_{\mathbb{Z}}^4 - \Theta_{\mathbb{Z}}^4|_{\Gamma})^2},$$

où l'on a noté $f|_{\Gamma}$ la translatée $z \mapsto f(z+1)$ d'une fonction f .

Ainsi, pour obtenir des fonctions magiques pour E_8 , on pose

$$f(x) = \sin^2(\pi|x|^2/2) \int_0^{\infty} (t^2\varphi(i/t) + \psi(it))e^{-\pi|x|^2t} dt \tag{10}$$

pour les fonctions φ et ψ identifiées par Viazovska. Parce que les termes en φ et ψ fournissent des fonctions propres de la transformée de Fourier, on obtient

$$\widehat{f}(y) = \sin^2(\pi|y|^2/2) \int_0^{\infty} (t^2\varphi(i/t) - \psi(it))e^{-\pi|y|^2t} dt.$$

L'intégrale dans la formule donnant $f(x)$ converge seulement quand $|x| > \sqrt{2}$, mais celle pour $\widehat{f}(y)$ s'avère converger dès que $|y| > 0$, parce que la croissance problématique de l'intégrande se simplifie dans la différence $t^2\varphi(i/t) - \psi(it)$.

Ces formules définissent des fonctions de Schwartz qui ont les zéros souhaités, et on peut vérifier que $f(0) = \widehat{f}(0) = 1$, mais il n'est pas clair qu'elles vérifient les inégalités $f(x) \leq 0$ pour $|x| \geq \sqrt{2}$ et $\widehat{f}(y) \geq 0$ pour tout y , parce qu'il pourrait y avoir d'autres changements de signe. En fait, ces inégalités sont vraies pour une raison fondamentale :

$$t^2\varphi(i/t) + \psi(it) < 0 \quad \text{et} \quad t^2\varphi(i/t) - \psi(it) > 0 \tag{11}$$

pour tout $t \in (0, \infty)$. En d'autres termes, ces inégalités sont déjà vraies au niveau des formes quasi-modulaires, et on n'a donc pas besoin de se préoccuper de la transformée de Laplace, sauf pour remarquer qu'elle préserve la positivité. Notons que la restriction de l'inégalité $f(x) \leq 0$ à $|x| \geq \sqrt{2}$ s'insère

parfaitement dans ce cadre, car l'intégrale (10) diverge pour $|x| < \sqrt{2}$, et l'on n'obtient donc pas $f(x) \leq 0$ dans ce cas. Il reste simplement à montrer les inégalités (11). Malheureusement, on ne connaît pas pour le moment de preuve simple de ces inégalités, mais on peut les vérifier en réduisant le problème à un calcul fini.

Ainsi, la formule de Viazovska (10) définit la fonction magique tant attendue pour E_8 et résout le problème d'empilement de sphères en dimension 8. Quid en dimension 24? La même approche basique fonctionne, mais choisir les formes quasi-modulaires demande plus d'effort. Heureusement, les conjectures de Cohn et Miller peuvent être utilisées pour cerner les bonnes fonctions. Une fois la fonction magique identifiée, il y a des difficultés techniques supplémentaires pour vérifier l'inégalité sur \hat{f} , mais elles peuvent être surmontées, ce qui donne une solution au problème d'empilement de sphères en dimension 24.

8. Perspectives

Personne ne s'attend à ce que la démonstration de Viazovska s'étende à une autre dimension strictement supérieure à 2. Pourquoi seulement 8 et 24? D'un certain point de vue, on ne sait vraiment pas. Personne n'a trouvé une démonstration, ni même un argument heuristique convaincant, excluant pareil phénomène en dimension supérieure. On ne peut même pas exclure la possibilité que les bornes de programmation linéaire résolvent le problème d'empilement de sphères en toute dimension suffisamment grande, si absurde qu'un tel scénario puisse paraître.

Malgré notre absence de compréhension, le rôle spécial des dimensions 8 et 24 s'insère harmonieusement dans notre expérience d'autres branches des mathématiques. Celles-ci sont pleines de phénomènes exceptionnels ou sporadiques qui ne se

produisent que dans un nombre fini de cas, et les réseaux de type E_8 et de Leech en sont des prototypes. Ces objets n'apparaissent pas isolément, mais plutôt en des constellations de structures remarquables. Par exemple, les réseaux de type E_8 et de Leech sont reliés à des codes correcteurs d'erreurs binaires, à des configurations combinatoires, des configurations sphériques, des groupes finis simples, etc. Chacune de ces connexions apporte son lot de contraintes, en particulier eu égard à la classification des groupes finis simples, et il ne semble pas y avoir de place pour des constellations semblables en dimension supérieure.

Ainsi, résoudre le problème d'empilement de sphères dans d'autres dimensions nécessitera probablement l'introduction de nouvelles techniques. Un cas particulièrement attirant est celui du réseau de type D_4 , qui est certainement l'empilement optimal dans \mathbb{R}^4 . Ce réseau partage certaines des propriétés merveilleuses de E_8 et du réseau de Leech, mais pas suffisamment pour que la borne de programmation linéaire en dimension 4 soit optimale. Un objectif raisonnable serait donc de généraliser cette borne, et il est en fait possible qu'une telle généralisation soit en train d'émerger.

À partir du travail de Schrijver, Bachoc, Vallentin et d'autres, de Laat et Vallentin ont généralisé les bornes de programmation linéaire en une hiérarchie de bornes de programmation semi-définie [13]. Les bornes de programmation linéaire constituent le premier niveau de cette hiérarchie, ce qui signifie de ce point de vue que les réseaux de type E_8 et de Leech ont les preuves les plus simples. Quid de D_4 ? Peut-être ce cas pourra-t-il être résolu à l'un des premiers niveaux de cette hiérarchie. Il reste beaucoup de travail à faire dans cette direction, les perspectives dans chaque dimension sont peu claires, mais il n'est pas complètement déraisonnable d'espérer que la dimension 4 rejoigne un jour les dimensions 8 et 24 parmi les cas résolus du problème d'empilement de sphères.

Références

- [1] H. COHN. « Packing, coding, and ground states ». In : *Mathematics and materials*. Vol. 23. IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, p. 45-102.
- [2] H. COHN et N. ELKIES. « New upper bounds on sphere packings. I ». *Ann. of Math. (2)* **157**, n° 2 (2003), p. 689-714. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2003.157.689. URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2003.157.689>.
- [3] H. COHN et A. KUMAR. « Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices ». *Ann. of Math. (2)* **170**, n° 3 (2009), p. 1003-1050. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2009.170.1003. URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2009.170.1003>.

- [4] H. COHN et S. D. MILLER. « Some properties of optimal functions for sphere packing in dimensions 8 and 24 ». *arXiv preprint arXiv :1603.04759* (2016).
- [5] H. COHN et al. « The sphere packing problem in dimension 24 ». *Ann. of Math. (2)* **185**, n° 3 (2017), p. 1017-1033. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2017.185.3.8. URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.8>.
- [6] J. H. CONWAY et N. J. A. SLOANE. *Sphere packings, lattices and groups*. Third. **290**. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. With additional contributions by E. Bannai, R. E. Borcherds, J. Leech, S. P. Norton, A. M. Odlyzko, R. A. Parker, L. Queen and B. B. Venkov. Springer-Verlag, New York, 1999, p. lxxiv+703. ISBN : 0-387-98585-9. DOI : 10.1007/978-1-4757-6568-7. URL : <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6568-7>.
- [7] J. H. CONWAY et N. J. A. SLOANE. « What are all the best sphere packings in low dimensions? » *Discrete Comput. Geom.* **13**, n° 3-4 (1995), p. 383-403. ISSN : 0179-5376. DOI : 10.1007/BF02574051. URL : <https://doi.org/10.1007/BF02574051>.
- [8] T. C. HALES. « Cannonballs and honeycombs ». *Notices-American Mathematical Society* **47**, n° 4 (2000), p. 440-449.
- [9] T. C. HALES. « A proof of the Kepler conjecture ». *Ann. of Math. (2)* **162**, n° 3 (2005), p. 1065-1185. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2005.162.1065. URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2005.162.1065>.
- [10] T. HALES et al. « A formal proof of the Kepler conjecture ». *Forum Math. Pi* **5** (2017), e2, 29. ISSN : 2050-5086. DOI : 10.1017/fmp.2017.1. URL : <https://doi.org/10.1017/fmp.2017.1>.
- [11] G. KABATYNSKII et V. LEVENSHTAIN. « Bounds for packings on a sphere and in space ». *Problems of Information Transmission* **14** (1978), p. 1-17.
- [12] D. de LAAT et F. VALLENTIN. « A breakthrough in sphere packing : the search for magic functions ». *Nieuw Arch. Wiskd. (5)* **17**, n° 3 (2016). Includes an interview with Henry Cohn, Abhinav Kumar, Stephen D. Miller and Maryna Viazovska, p. 184-192. ISSN : 0028-9825.
- [13] D. de LAAT et F. VALLENTIN. « A semidefinite programming hierarchy for packing problems in discrete geometry ». *Math. Program.* **151**, n° 2, Ser. B (2015), p. 529-553. ISSN : 0025-5610. DOI : 10.1007/s10107-014-0843-4. URL : <https://doi.org/10.1007/s10107-014-0843-4>.
- [14] A. VENKATESH. « A note on sphere packings in high dimension ». *Int. Math. Res. Not. IMRN*, n° 7 (2013), p. 1628-1642. ISSN : 1073-7928. DOI : 10.1093/imrn/rns096. URL : <https://doi.org/10.1093/imrn/rns096>.
- [15] M. S. VIAZOVSKA. « The sphere packing problem in dimension 8 ». *Ann. of Math. (2)* **185**, n° 3 (2017), p. 991-1015. ISSN : 0003-486X. DOI : 10.4007/annals.2017.185.3.7. URL : <https://doi.org/10.4007/annals.2017.185.3.7>.



Henry COHN

Henry Cohn est chercheur à Microsoft Research New England et professeur associé au MIT. Ses travaux de recherche portent sur les mathématiques discrètes au sens large, et il aime particulièrement appliquer des mathématiques abstraites à des problèmes concrets.

Je suis reconnaissant à James Bernhard, Donald Cohn, Matthew de Courcy-Ireland, Stephen D. Miller, Frank Morgan, David Rohrllich, Achill Schürmann, Frank Vallentin et Maryna Viazovska pour leur relecture et leurs suggestions.

Crédit Photos

La figure 1 est utilisée avec l'autorisation de Daniil Yevtushynsky.
 Les photographies de la figure 2 sont utilisées avec l'autorisation de Mary Caisley, Mark Ostow, C. J. Mozzochi et Julia Semikina, de gauche à droite.
 Les figures 3 et 7 sont utilisées avec l'autorisation de Henry Cohn.
 Les figures 3 et 7 sont utilisées avec l'autorisation de Henry Cohn.

La figure 6 est utilisée avec l'autorisation de Matthew Kownacki.

MMP et variétés de Fano, le travail de CAUCHER BIRKAR

• J. BLANC

1. Introduction

En août 2018, Caucher Birkar a obtenu la médaille Fields pour sa preuve bornant l'ensemble des variétés de Fano et ses contributions au programme des modèles minimaux. Cette phrase, traduction de la « short citation » officielle disponible sur le site de l'Union Mathématique Internationale « For the proof of the boundedness of Fano varieties and for contributions to the minimal model program. » est difficile à comprendre pour un non-spécialiste. Le texte qui suit est une tentative de vulgarisation des résultats récompensés.

Le travail de Caucher Birkar concerne la géométrie algébrique, une branche des mathématiques étudiant la géométrie (courbes, surfaces...) avec l'aide d'outils algébriques (anneaux de polynômes, groupes, algèbres...). Sa contribution s'inscrit dans le « programme des modèles minimaux », abrégé MMP pour « Minimal Model Program » en anglais, qui étudie les variétés algébriques en se ramenant à certains types de variétés plus simples, blocs élémentaires de la géométrie birationnelle.

Pour comprendre les résultats fondamentaux obtenus par Caucher Birkar, une brève et élémentaire introduction à la géométrie algébrique complexe et projective est nécessaire. Ce sera le sujet du chapitre 2. Les termes fondamentaux utilisés dans les chapitres suivants, comme *variétés algébriques*, *singularités* ou *applications birationnelles* seront définis.

Le chapitre 3 présentera le *programme des modèles minimaux* (MMP). En essayant de ne pas être trop technique, une description du cas de la dimension 1 et 2 sera donnée, de même que les idées générales du programme en dimension plus grande. Quelques-uns des résultats de l'article fondamental [3] écrit par Caucher Birkar, Paolo Cascini, Chris-

topher Hacon et James McKernan seront expliqués.

Enfin, le chapitre 4 abordera les variétés de Fano et le résultat de Caucher Birkar [1, 2], qui borne cet ensemble de variétés, prouvant la conjecture de Borisov-Alexeev-Borisov (Alexander Borisov & Lev Borisov 1992, Valery Alexeev 1994). Certaines des applications y seront évoquées.

Il existe déjà plusieurs textes présentant les résultats énoncés plus haut. Le séminaire Bourbaki de Stéphane Druel (2007) présente l'article [3]. Le lecteur intéressé pourra également voir la vidéo de la *Laudatio* de Christopher Hacon à l'ICM, présentant les travaux de Caucher Birkar, ou lire le texte officiel, écrit par Allyn Jackson.

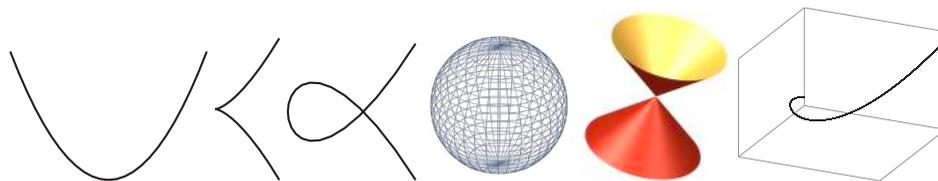
2. Brève introduction aux variétés projectives complexes

2.1 – Variétés algébriques affines et projectives

La géométrie algébrique étudie les variétés algébriques. Chacune correspond au lieu des zéros d'équations polynomiales, comme

- (i) $x^3 - y = 1$;
- (ii) $x^3 = y^2$;
- (iii) $y^2 = x^2(x + 1)$;
- (iv) $x^2 + y^2 = z^2 - 1$;
- (v) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$;
- (vi) $y = x^2, xz = y^2, z = x^3$.

L'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ou triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ satisfaisant aux équations de chacun des exemples est illustré ci-dessous.



Les exemples ci-dessus sont des *variétés affines réelles*. Ce sont des sous-variétés de \mathbb{R}^n , l'espace affine réel de dimension n (noté également $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^n$).

Le plus souvent, on ne travaille pas avec le corps \mathbb{R} des nombres réels mais plutôt avec celui des nombres complexes \mathbb{C} . Cela permet d'éviter d'avoir trop peu de solutions (comme $x^2 + y^2 = -1$) et de manquer d'information sur la variété. Si on le désire, on peut ensuite tout de même étudier les solutions réelles et voir celles-ci comme sous-ensemble des solutions complexes. Les *variétés affines complexes* sont alors données par les zéros de polynômes à coefficients complexes dans \mathbb{C}^n , l'espace affine complexe de dimension n (noté également $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$).

De manière analogue, il est commode d'étudier les variétés *projectives*, lieux des zéros de polynômes homogènes dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, pour un entier $n \geq 1$. L'espace $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ est l'ensemble des droites de \mathbb{C}^{n+1} passant par l'origine. On note souvent une droite $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ comme un point

$$[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$$

de l'espace projectif où $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ est un élément non nul de la droite $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. La droite passant par (x_0, \dots, x_n) étant la même que celle passant par (y_0, \dots, y_n) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $(y_0, \dots, y_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$, on peut identifier $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ à l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, où deux éléments sont équivalents s'ils sont colinéaires.

On peut maintenant définir les *sous-variétés algébriques de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$* . Celles-ci sont les sous-ensembles de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ de la forme

$$\begin{aligned} \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \mid f_1(x_0, \dots, x_n) \\ = 0, \dots, f_r(x_0, \dots, x_n) = 0\} \end{aligned}$$

où f_1, \dots, f_r sont des polynômes homogènes. Par définition, f_i est homogène de degré d si $f_i(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f_i(x_0, \dots, x_n)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et tout $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Même si la valeur d'un polynôme en un point $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ dépend du choix du point $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, le fait que le polynôme soit nul ou non n'en dépend pas, si le polynôme est homogène. On peut donc dire d'un polynôme homogène qu'il est nul en un point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$. On observe qu'un polynôme homogène de degré d est une somme finie de monômes de la forme $\lambda x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ tels que $\sum_{i=0}^n a_i = d$.

2.2 – Recouvrement d'une variété projective par des ouverts affines

L'espace $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ est muni d'une topologie naturelle en géométrie algébrique : la *topologie de Zariski*. Pour cette topologie, les ensembles fermés de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ sont les sous-variétés algébriques. On vérifie aisément que l'intersection d'un nombre fini de fermés est fermée (on ajoute simplement plus d'équations). C'est en fait toujours vrai même si on intersecte une infinité d'ensembles fermés : le lieu des zéros d'une infinité d'équations polynomiales est également le lieu des zéros d'un nombre fini d'équations polynomiales. Ce résultat suit du fait que l'anneau $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ est « noethérien ».

La topologie de Zariski est bien différente des topologies habituelles : elle n'est pas « séparée » puisque deux ouverts non vides de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ s'intersectent toujours. Elle est tout de même très utile en géométrie algébrique. Les ouverts non vides étant très « gros » (denses), on peut se restreindre à un ouvert et ne pas perdre trop d'information.

Dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$, on trouve $n+1$ ouverts U_0, \dots, U_n que l'on définit de la manière suivante :

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \mid x_i \neq 0\}.$$

L'ensemble U_i est ouvert, car complément du lieu des zéros du polynôme homogène x_i . De plus, on remarque que ces ouverts recouvrent $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n = U_0 \cup U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n.$$

Ceci est dû au fait que tout point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ est, par définition, de la forme $[x_0 : \dots : x_n]$ avec $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Il existe donc au moins un indice $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $x_i \neq 0$.

On montre maintenant qu'il existe une bijection de \mathbb{C}^n vers l'ouvert U_i pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Si $p = [x_0 : \dots : x_n] \in U_i$, alors $x_i \in \mathbb{C}^*$. En choisissant $\lambda = \frac{1}{x_i} \in \mathbb{C}^*$, on trouve

$$\begin{aligned} p = [x_0 : \dots : x_n] &= [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n] \\ &= \left[\frac{x_0}{x_i} : \dots : \frac{x_{i-1}}{x_i} : 1 : \frac{x_{i+1}}{x_i} : \dots : \frac{x_n}{x_i} \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, les applications

$$\mathbb{C}^n \rightarrow U_i$$

$$(y_0, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \mapsto [y_0 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \dots : y_n]$$

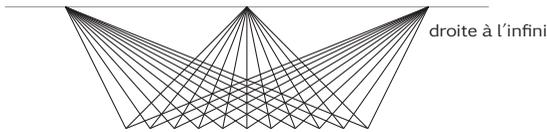
$$U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$$

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. On peut donc identifier chacun des ouverts U_i avec \mathbb{C}^n . Ainsi, chaque point de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ a un voisinage qui est en bijection avec \mathbb{C}^n . On étudie alors souvent les variétés projectives de manière locale et on obtient des variétés affines.

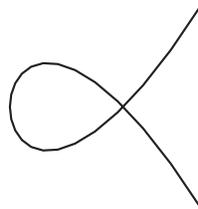
Pour $n = 1$, on voit que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, la *droite projective*, est l'union de $U_0 = \{[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1 \mid x_0 \neq 0\}$ et du point $q = [0 : 1] \in \mathbb{P}^1$. Comme U_0 est paramétrée par \mathbb{C} , on peut voir $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ comme l'union de \mathbb{C} et d'un point « à l'infini ».

Pour $n = 2$, le *plan projectif* $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est l'union de $U_0 = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid x_0 \neq 0\}$, en bijection avec \mathbb{C}^2 et de $L = \{[0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2\}$, bijectif à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ via $[0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_1 : x_2]$. On trouve alors que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ est l'union de \mathbb{C}^2 et de la « droite projective à l'infini ». Tout point de cette droite correspond à une direction prise par une droite de \mathbb{C}^2 ; deux droites parallèles donnant le même point à l'infini.



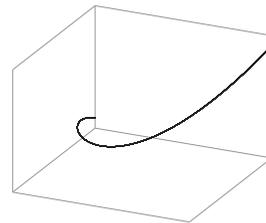
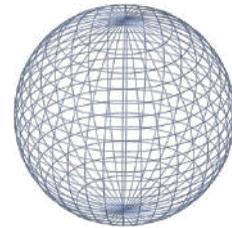
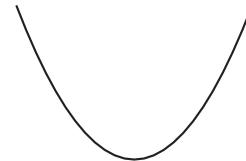
En travaillant avec des variétés algébriques complexes et projectives, de nombreux outils s'offrent à nous. Par exemple, deux courbes du plan projectif $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ s'intersectent toujours au moins en un point. De plus, le théorème de Bézout permet de compter le nombre de points de l'intersection, comptés avec multiplicités : il s'agit du produit des degrés des (polynômes définissant les) deux courbes.

Dans \mathbb{R}^2 il y a 4 types d'équations irréductibles de degré 2 (un polynôme est irréductible s'il n'est pas produit de deux polynômes non constants) : soit il n'y a pas de solution, comme $x^2 + y^2 + 1 = 0$, soit on obtient une conique, une parabole ou une ellipse. Dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, les 4 types sont tous équivalents, à changement de coordonnées près.



2.3 – Singularités

Un point p d'une variété algébrique X peut être *lisse* ou *singulier*. Si les dérivées partielles des équations définissant X s'annulent « trop » au point p (plus précisément si le rang de la matrice correspondant aux dérivées partielles est plus petit que la codimension de la variété), on dit que le point est singulier et sinon on dit qu'il est lisse. La plupart des points d'une variété sont lisses : l'ensemble de tels points forme un ouvert de Zariski (car le lieu singulier est donné par l'annulation de mineures de matrices de dérivées partielles et donc par des équations polynomiales). En particulier, les courbes n'ont qu'un nombre fini de point singuliers. On dit qu'une variété est lisse si tous ses points sont lisses. Il existe toute une littérature étudiant les types de singularités des variétés algébriques et celles-ci jouent un rôle important dans le MMP. Parmi les six variétés données à la section 2.1, les trois suivantes sont lisses



et les trois autres sont singulières (ici avec un seul point singulier, le point « spécial » sur le dessin)

2.4 – Applications birationnelles

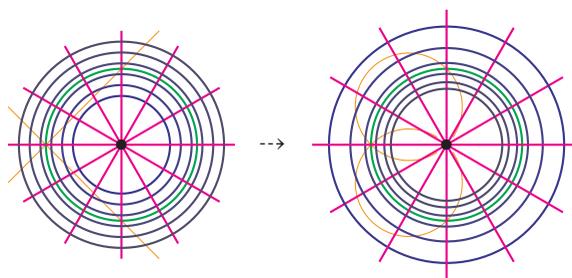
En géométrie algébrique, comme souvent en mathématiques, il est important d'étudier les applications entre les objets que l'on étudie. Les applications entre deux variétés algébriques qui sont données (localement) par des polynômes ou des quotients de polynômes sont appelées *morphismes*. Comme dans les autres sujets, un morphisme admettant un morphisme comme inverse est appelé *isomorphisme*. Par exemple, les bijections $U_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ définies à la section 2.2 sont des isomorphismes et on dit alors que U_i est *isomorphe* à \mathbb{C}^n .

Il y a souvent très peu de morphismes partant d'une variété projective. En particulier, tout morphisme d'une variété projective vers une variété affine est constant. De même, l'ensemble des isomorphismes entre variétés algébriques projectives est souvent très petit (paramétré par une variété algébrique et donc de dimension finie). Il est alors naturel d'étudier des « applications » plus générales : les *applications rationnelles*. Une application rationnelle d'une variété algébrique X vers une autre Y est un morphisme d'un ouvert (non vide) U de X vers Y , ainsi une application rationnelle $U \rightarrow Y$ n'est en réalité pas définie sur tout X . On identifie deux telles applications $U \rightarrow Y$ et $V \rightarrow Y$ si elles coïncident sur $U \cap V$; en utilisant le fait que les ouverts s'intersectent, ceci forme une classe d'équivalence. On note alors l'application rationnelle $X \dashrightarrow Y$, pour indiquer que certains points ne sont pas définis et on oublie l'ouvert sur lequel l'application est définie, qui est implicite. On peut ensuite composer deux applications rationnelles si l'image de la première intersecte un ouvert sur lequel la deuxième est définie; une application *birationnelle* est alors une application rationnelle qui admet un inverse du même type.

Le plus vieil exemple d'application birationnelle est probablement l'inversion, utilisée par Apollonius de Perge au III^e siècle avant J.-C. Cette application est définie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ vers lui-même via

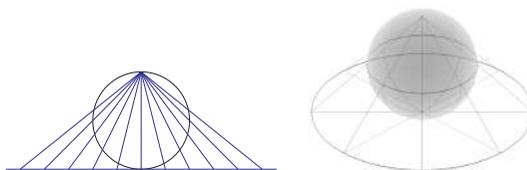
$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Elle envoie les droites passant par l'origine sur elles-mêmes et les autres droites sur des cercles. L'ensemble de ses points fixes est le cercle de rayon 1 centré à l'origine (en vert sur la figure ci-dessous). C'est une application birationnelle car elle est rationnelle et admet un inverse rationnel : elle-même.



On peut bien sûr considérer la même application comme application birationnelle $\mathbb{C}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}^2$. La même formule donne une application birationnelle, qui est sa propre inverse. En étendant l'application à une application birationnelle $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, via un des plongements de \mathbb{C}^2 dans $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ défini à la section 2.2 (via une bijection vers l'un des ouverts U_i), on trouve exactement trois points non définis : un correspondant à l'origine de \mathbb{C}^2 et les deux autres sont deux points complexes conjugués à l'infini. Explicitement, en utilisant le plongement $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, $(x, y) \mapsto [x : y : 1]$, l'application devient $[x : y : z] \mapsto [xz : yz : x^2 + y^2]$ et les trois points sont $[0 : 0 : 1]$, correspondant à l'origine de \mathbb{C}^2 et $[1 : \pm\sqrt{-1} : 0]$, deux points à l'infini.

Un autre exemple très classique est donné par la projection stéréographique. On part de la sphère S de dimension n et on projette à partir d'un point p de S sur un hyperplan pour obtenir une application birationnelle de S vers l'espace projectif (ou affine) de dimension n . Cette application birationnelle est définie en tout point de la sphère hormis le point p .



Cet exemple a été notamment utilisé pour réaliser des cartes géographiques.

D'autres exemples classiques de transformations birationnelles sont donnés par les *transformations de Möbius*, de la forme

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\dashrightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \end{aligned}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $ad - bc \neq 0$. En voyant ces applications sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, on obtient le groupe $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) = \text{PGL}(2, \mathbb{C})$ des automorphismes de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

3. Le programme des modèles minimaux (MMP)

Le *programme des modèles minimaux* (abrégé MMP) part d'une variété algébrique X et cherche à simplifier celle-ci pour obtenir une variété X' et une application birationnelle $X \dashrightarrow X'$ où X' est plus « simple » que X .

Grâce à la résolution des singularités obtenue par Heisuke Hironaka en 1964, on peut supposer que la variété X est projective et *lisse* (c'est-à-dire n'ayant pas de point singulier, comme expliqué à la section 2.3). Le programme des modèles minimaux introduit cependant quelques singularités dès la dimension 3 : la variété X' obtenue, même si elle est plus simple que X , est souvent singulière.

3.1 – Le cas des courbes (dimension 1)

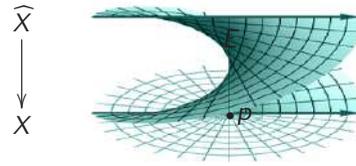
En dimension 1, le programme est essentiellement trivial. Le résultat fondamental, très ancien, est le suivant : toute application birationnelle entre courbes projectives lisses est un isomorphisme. Ainsi, étudier les courbes à application birationnelle près correspond à étudier les courbes projectives lisses à isomorphisme près. La courbe la plus simple est la droite projective : \mathbb{P}_C^1 . Les autres courbes peuvent être classifiées à l'aide d'autres outils, comme le genre, que l'on ne définira pas ici, ou d'autres objets naturels associés aux courbes. Il ne s'agit cependant pas de géométrie birationnelle.

3.2 – Éclatement et contraction en dimension 2

Au XIX^e siècle, l'école de géométrie algébrique classique (Guido Castelnuovo, Federico Enriques, Gino Fano, Max Noether,...) étudie les variétés algébriques projectives et notamment les surfaces. Une classification des surfaces projectives, à équivalence birationnelle près, est achevée par Federico Enriques (1914-1949).

L'opération fondamentale est l'éclatement d'un point. En prenant une surface projective lisse X et un point $p \in X$, on peut construire une surface projective \widehat{X} , appelée *éclatement de X au point p* . C'est une surface projective lisse \widehat{X} qui contient une courbe $E \subset \widehat{X}$ et qui admet un morphisme surjectif $\widehat{X} \rightarrow X$, défini en tout point, qui contracte E sur le point p , et induit un isomorphisme $\widehat{X} \setminus E \xrightarrow{\sim} X \setminus \{p\}$. La courbe E est appelée *courbe exceptionnelle*. Le dessin suivant illustre un éclatement ; l'application $\widehat{X} \rightarrow X$ est

la projection sur le plan horizontal et la droite E est la droite verticale contractée sur le point p .



La surface \widehat{X} est plus « compliquée » que la surface X : il y a plus de courbes sur \widehat{X} que sur X . Bien sûr l'ensemble des courbes sur X ou sur \widehat{X} est infini et tous deux ont la même cardinalité, mais à l'aide de cohomologie ou d'équivalences numériques entre courbes on peut énoncer cela de manière précise.

En général, on veut étudier les variétés algébriques les plus simples possibles. Partant d'une surface projective lisse Y , on veut remplacer Y par Y' si Y est l'éclatement de Y' en un point $p' \in Y'$. Pour cela, le *critère de Castelnuovo* permet, étant donnée une courbe E sur Y , de savoir si cette dernière est la courbe exceptionnelle d'un éclatement $Y \rightarrow Y'$. Dans ce cas la surface Y' est à nouveau projective et lisse et on peut alors répéter le procédé. C'est algorithmique et après un nombre fini de tels pas, on obtient une surface Z *relativement minimale*, c'est-à-dire n'ayant plus aucune courbe que l'on peut contracter. La surface Z satisfait alors à une et une seule des trois conditions suivantes :

1. $Z = \mathbb{P}_C^2$;
2. il existe un morphisme $Z \rightarrow C$ vers une courbe C , dont toutes les fibres, préimages des points de C , sont isomorphes à \mathbb{P}_C^1 (c'est même un « fibré localement trivial ») ;
3. la surface Z n'a plus aucune courbe « d'intersection négative avec le diviseur canonique ».

Les surfaces satisfaisant au point 3 sont appelées « modèles minimaux » et sont plus compliquées que les autres mais peuvent être étudiées avec d'autres méthodes. Elles sont très « rigides » : il n'existe que peu d'applications birationnelles entre deux telles surfaces.

On obtient ainsi une classification assez précise des surfaces projectives à équivalence birationnelle près.

3.3 – Cône des courbes, diviseur canonique et variétés de Fano

Afin de généraliser l'approche en dimension plus grande, on considère l'ensemble des courbes contenues dans une variété projective X de dimension quelconque, lisse ou ayant des singularités qui ne

sont pas trop compliquées (ce qui veut dire qu'on arrive tout de même à travailler avec de telles singularités et notamment à définir l'intersection ci-dessous). Étant donnée une courbe $C \subset X$ et une hypersurface $H \subset X$ (sous-variété algébrique de X de dimension $\dim(X) - 1$) ne contenant pas C , on associe un entier $C \cdot H$, qui correspond au nombre de points dans l'intersection de H et de C , comptés avec multiplicités. On identifie deux courbes C, C' si $C \cdot H = C' \cdot H$ pour toute hypersurface H ne contenant ni C ni C' et on obtient alors un ensemble de classes d'équivalence des courbes qui peut être vu de manière géométrique comme un cône, le *cône des courbes* de X . Ce cône est un sous-ensemble de \mathbb{R}^m pour un certain entier m (ce dernier entier est le *nombre de Picard* de X , mesurant la complexité de la variété X). On peut alors utiliser la géométrie classique, notamment les barycentres, pour étudier la variété X .

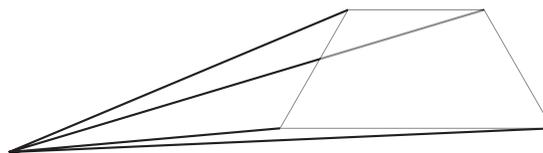
Par exemple, si X est l'éclatement de r points de \mathbb{P}_C^2 , alors son rang de Picard est $r + 1$. Ainsi, son cône des courbes se plonge naturellement dans \mathbb{R}^{r+1} et on obtient un cône sur un polyèdre si $r \leq 8$ et si les points sont « en position générale ».

On associe à toute variété X (comme-ci dessus lisse ou avec des singularités pas trop compliquées) un *diviseur canonique* K_X . Ceci correspond à une application du cône des courbes vers \mathbb{R} , restriction d'une application linéaire de \mathbb{R}^m vers \mathbb{R} . L'application sépare donc ce cône en deux parties selon leurs images : la partie positive et la partie négative. Si la totalité du cône est négative, alors X est appelée *variété de Fano*. Ces variétés très naturelles en géométrie algébrique jouent le rôle de blocs élémentaires dans la description de variétés algébriques à l'aide du MMP (cf. la section suivante).

3.4 – Le programme des modèles minimaux en dimension plus grande

En dimension plus grande, le critère de Castelnuovo peut être remplacé par des conditions sur les classes d'équivalence de courbes d'une variété projective. La partie du cône des courbes qui est négative vis-à-vis du diviseur canonique est étudiée. Le fait que la partie du cône engendrée par des « rayons extrémaux » négatifs est localement polyédrale est dû à Shigefumi Mori si la variété projective est lisse [5, Theorem 1.2]; ce résultat a ensuite été généralisé aux variétés ayant des singularités « pas trop compliquées » (Kawamata-Kollár 1984) (voir [4, Theorem 3.7]). Un exemple de cône avec quatre rayons extrémaux est dessiné ci-dessous. Les courbes que

l'on désire contracter peuvent être vues à l'aide des rayons extrémaux du cône (droites reliant les sommets de polyèdres au sommet du cône).



Au début des années 1980, Shigefumi Mori étudie le cône des courbes pour les variétés projectives lisses de dimension 3 et démontre que l'on peut toujours contracter les rayons extrémaux [5, Theorem 3.1]. Il décrit également précisément les types de contractions [5, Theorems 3.3 & 3.5, Corollary 3.4].

Depuis, le programme des modèles minimaux généralise cette approche en toute dimension. On part d'une variété projective lisse Y et on peut contracter un rayon extrémal du cône associé. Cela signifie qu'il existe un morphisme $Y \rightarrow Y'$, tel que l'image d'une courbe de Y est un point (on dit que la courbe est contractée) si et seulement si la classe d'équivalence de la courbe est contenue dans le rayon [4, Theorem 3.7(3)].

On obtient trois types de contractions $Y \rightarrow Y'$, suivant la nature de l'union $E \subseteq Y$ des courbes contractées par $Y \rightarrow Y'$.

1. Si E est une hypersurface de Y (de dimension égale à $\dim(Y) - 1$), le morphisme $Y \rightarrow Y'$ est birationnel. La variété Y' n'est plus nécessairement lisse, mais a des singularités qui ne sont « pas trop compliquées » (ici appelées terminales et \mathbb{Q} -factorielles). On peut réitérer le procédé à partir de Y' , qui est plus simple que Y , car contient moins de courbes : la dimension du cône des courbes (nombre de Picard) a baissé de 1.
2. Si $E = Y$, on dit que $Y \rightarrow Y'$ est une *fibration de Mori* : un morphisme $Y \rightarrow Y'$, où Y' est de dimension plus petite que Y et tel que la préimage d'un point général $y \in Y'$ soit une sous-variété de Y qui est assez simple : une *variété de Fano*.
3. Si la dimension de E est plus petite que $\dim(Y) - 1$, la variété Y' a des singularités « compliquées » avec lesquelles on n'arrive plus à travailler. On arrive toutefois à faire un *flip*, une application birationnelle $Y \dashrightarrow Y^+$ déterminée par $Y \rightarrow Y'$, qui améliore la situation.

En dimension 2, le cas 1 correspond à l'éclatement d'un point décrit à la section 3.2, le cas 2 correspond aux morphismes vers une courbe avec fibres

$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ou au morphisme trivial de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ vers un point et le « mauvais » cas 3 n'apparaît pas.

Un MMP consiste en un certain nombre de pas comme ci-dessus. À chaque étape 1, on remplace Y par Y' , à chaque étape 3, on remplace Y par Y^+ . On s'arrête dès qu'on obtient le cas 2 (fibration de Mori) ou dès qu'il n'y a plus de rayon extrémal (la variété obtenue est appelée *modèle minimal*).

Le MMP sert à obtenir à partir d'une variété lisse une variété qui lui est birationnelle et qui est plus « simple ». Les modèles minimaux n'ont plus de courbes négatives (courbes préimage d'un nombre négatif via l'application linéaire induite par le diviseur canonique, cf 3.3) et sont très rigides, comme dans le cas des surfaces : il n'y a que très peu d'applications birationnelles entre deux modèles minimaux. Les fibrations de Mori $Y \rightarrow Y'$ sont soit des variétés de Fano (cas où Y' est un point), soit des fibrations au-dessus d'une variété de dimension plus petite avec fibres relativement simples (variétés de Fano). On espère alors comprendre Y en comprenant ses fibres et son image Y' . On peut également appliquer un MMP à la variété Y' et procéder par récurrence sur la dimension, décrivant finalement Y en terme de fibrations de Mori et de variétés de Fano ou de modèles minimaux.

Le programme des modèles minimaux (MMP) a été étudié et utilisé maintes fois depuis les années 80. Les deux problèmes fondamentaux pour terminer le MMP concernent le point 3 ci-dessus. Le premier problème est de montrer l'existence de flips, ce qui correspond à montrer qu'un certain anneau « canonique » est finiment engendré. Le deuxième est la « terminaison des flips » : on aimerait éviter d'avoir un programme qui donne une infinité de flips successifs.

L'existence des flips a tout d'abord été prouvée en dimension 3 (Mori, 1988) puis en dimension 4 (Shokurov, 2003). L'article [3], écrit par Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon et James McKernan démontre le fait que les anneaux « canoniques » sont finiment engendrés. Ce résultat prouve en particulier que les flips existent toujours, en toute dimension [3, Corollary 1.4.1]. Même s'il ne prouve pas la terminaison des flips en général, leur résultat implique l'existence d'un MMP pour deux types de variétés naturelles, les variétés *de type général* et les variétés *uniréglées*. Ces dernières sont les variétés telles que par tout point il existe une courbe paramétrée par $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Il suit de [3, Corollary 1.3.3] que toute variété uniréglée est birationnelle à une fibration de Mori, via une suite de pas du MMP.

4. Variétés de Fano et la conjecture BAB

Comme on l'a vu à la section précédente, les variétés de Fano jouent un rôle très important dans le programme des modèles minimaux. Ce sont les fibres générales des fibrations de Mori obtenues à la fin du MMP lorsque l'on part d'une variété uniréglée.

La conjecture de Borisov-Alexeev-Borisov (Alexander Borisov & Lev Borisov 1992, Valery Alexeev 1994) connue sous le nom de conjecture BAB implique que pour tout entier n , l'ensemble des variétés de Fano de dimension n avec des singularités terminales est *borné*. Cela veut dire qu'on peut paramétrer les classes d'isomorphismes de telles variétés avec des variétés algébriques de dimension finie. Plus simplement, pour tout entier $n \geq 1$ il existe des entiers m, d dépendant uniquement de n tels que toute variété de Fano de dimension n est isomorphe à une sous-variété de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^m$ de degré $\leq d$. Le degré et le nombre de variables nécessaires pour définir la variété sont donc bornés. On peut classifier les variétés en fonctions de certains invariants numériques et il s'agit alors de borner ces invariants ; l'ensemble des invariants possibles donne un nombre fini de familles.

En dimension 2, les variétés de Fano correspondent aux *surfaces de del Pezzo*, étudiées depuis plus d'un siècle. Celles-ci sont isomorphes à $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ou à l'éclatement d'au plus 8 points de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ « en position générale ». Le nombre de points étant borné, l'ensemble des paramètres nécessaires est borné. On obtient alors 10 familles.

En dimension 3, il y a 105 familles de variétés de Fano lisses (Vasily Iskovskikh 1977-1978, Shigefumi Mori & Shigeru Mukai 1983) et nettement plus de familles de variétés de Fano singulières terminales (plusieurs milliers); Yujiro Kawamata a démontré en 1992 qu'il n'y a qu'un nombre fini de familles.

Le fait que pour tout n l'ensemble des variétés de Fano lisses de dimension n est borné a également été prouvé dans les années 1990 (Alan Nadel 1991, Frédéric Campana 1992, János Kollár & Yoichi Miyaoka & Shigefumi Mori, 1992).

Finalement, c'est tout récemment que Caucher Birkar a prouvé la conjecture BAB en toute généralité [1, 2].

Son résultat a de multiples conséquences. En particulier, il permet d'étudier la structure des groupes $\text{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ des groupes des applications birationnelles $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ pour $n \geq 3$. Ces groupes, appelés groupes de Cremona, ont la propriété de Jordan (Yuri Prokhorov & Constantin Shramov, 2016) et ne sont pas simples (Jérémy Blanc, Stéphane Lamy & Susanna Zimmermann, 2019). La preuve de ces résultats en dimension $n \geq 3$ utilise la conjecture BAB et donc le résultat de Caucher Birkar. En dimension 2, les mêmes résultats ont également été prouvés (respectivement par Jean-Pierre Serre en 2009-2010 et Serge Cantat & Stéphane Lamy en 2013) mais avec d'autres techniques.

Références

- [1] C. BIRKAR. « Anti-pluricanonical systems on Fano varieties ». *Annals of Mathematics* (à paraître) (2016).
- [2] C. BIRKAR. « Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties ». *Preprint arXiv:1609.05543* (2016).
- [3] C. BIRKAR et al. « Existence of minimal models for varieties of log general type. » *J. Am. Math. Soc.* **23**, n° 2 (2010), p. 405-468.
- [4] J. KOLLÁR et S. MORI. *Birational geometry of algebraic varieties*. **134**. Cambridge Tracts in Mathematics. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] S. MORI. « Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective ». *Ann. of Math. (2)* **116**, n° 1 (1982), p. 133-176. ISSN : 0003-486X.



Jérémy BLANC

Université de Bâle, Suisse
jeremy.blanc@unibas.ch

Jérémy Blanc est professeur au département de mathématiques et informatique de l'université de Bâle. Ses travaux portent sur la géométrie algébrique et les groupes de transformations birationnelles.

Je remercie Blanche Buet, Pierre de la Harpe, Sophie Kridi Blanc et Stéphane Lamy pour leurs lectures attentives de cet article et leurs critiques constructives.



Un interview de Jérôme PESENTI chef de division en recherche en intelligence artificielle chez Facebook

Propos recueillis par D. GAYET

D'après Wikipedia tu as remplacé Yann Lecun chez Facebook au poste de, je cite « chef de division en recherche en intelligence artificielle ». Peux-tu nous dire en quoi ça consiste ?

Je n'ai pas remplacé Yann. Son rôle c'est d'être directeur scientifique du laboratoire d'intelligence artificiel de l'entreprise. Moi je suis manager de l'équipe. Je m'occupe aussi des problèmes d'implémentations, des problèmes de recherche plus appliquée.

Ton équipe, c'est combien de personnes ?

C'est 500 personnes dont 150 chercheurs à plein temps.

Facebook est souvent décrié pour son manque d'intérêt pour les questions de données personnelles, comme l'a démontré par exemple le scandale de Cambridge Analytica. Est-ce que c'est un problème pour toi, moralement et professionnellement parlant ?

C'est un problème, bien sûr, moi je veux travailler pour une entreprise qui ait un impact positif sur le monde. Mais entre ce qui est présenté dans les médias et la réalité, il y a quand même une grande différence, et Facebook a pas mal évolué sur ce thème des données personnelles. L'une des raisons pour lesquelles je suis chez eux, c'est que je peux faire ce que je veux, au sens où chacun peut avoir sa propre opinion, l'exprimer de façon complètement ouverte et faire le mieux qu'on pense.

Peux-tu nous décrire ton parcours universitaire et professionnel ?

Je suis rentré en 1991 à l'École normale supérieure de Paris en mathématiques, j'ai passé l'agrégation

et fait une thèse en géométrie arithmétique à Orsay. En même temps que ma thèse j'ai suivi un cursus universitaire de philosophie puis de sciences cognitives. Celles-ci m'ont vraiment passionné. Après mon DEA de sciences cognitives, pour mon service militaire je suis parti faire ma coopération. J'ai alors soutenu ma thèse mais j'ai décidé d'abandonner les mathématiques à ce moment-là et de me lancer dans l'aventure de l'intelligence artificielle. J'ai fait un peu de recherche pendant un an et demi à Carnegie Mellon, puis j'y ai lancé une entreprise, Vivisimo, dans le domaine de l'IA, qui a employé jusqu'à 150 personnes. J'ai ensuite vendu la société à IBM, chez qui j'ai été embauché pour lancer la commercialisation de Watson¹. Puis je suis devenu co-CEO d'une startup à Londres dans le domaine de l'IA associée aux découvertes de médicaments, et maintenant je suis chez Facebook.

En quoi les mathématiques t'ont-elles été utiles dans ton parcours professionnel ?

Je ne suis plus mathématicien ni même chercheur. De mon point de vue, les mathématiques permettent deux choses : d'une part, une facilité à comprendre et manipuler le formalisme, de plus en plus présent en IA. D'autre part, elles fournissent une sorte de rigueur de raisonnement qui aujourd'hui est assez important en IA, c'est assez difficile de comprendre la performance des systèmes, leur méthodologie, qui repose sur les sciences des données et les statistiques.

Comment vois-tu les liens entre informatique et mathématiques pour ce qui te concerne, pour la formation des chercheurs en IA, et pour l'IA en général ?

1. Watson est le programme phare d'IA d'IBM, célèbre pour avoir battu en 2011 les champions du jeu *Jeopardy!*

Comme je l'ai dit avant, les mathématiques fournissent une capacité à comprendre le formalisme. Mais plus directement, les probabilités et les statistiques sont vraiment au centre de l'IA, tout comme l'algèbre linéaire. Ce ne sont pas des mathématiques très complexes, mais ces systèmes vivent en très grandes dimensions, et sont en fait très difficiles à comprendre du point de vue mathématique.

Que recherche-t-on à Facebook ?

La raison pour laquelle l'IA est importante pour Facebook est la suivante : nous avons une plateforme avec une production énorme de contenus, qu'il faut modérer. Il faut que les gens ne se harcèlent pas, qu'ils ne publient pas d'images violentes, bref qu'ils respectent les règles de Facebook. Même si l'on a 20000 modérateurs, ça ne suffit pas et il faut des outils automatiques pour comprendre les contenus, les vidéos, les textes. Ça nécessite une IA assez raffinée. Par ailleurs nous essayons d'accroître la qualité de ce qui est proposé aux utilisateurs, donc il faut comprendre la qualité d'un contenu, son impact sur les gens, s'il les rend plus informés, plus heureux, etc. En résumé, l'IA nous aide à limiter le contenu négatif et à promouvoir les contenus positifs.

Et pour ce qui concerne la recherche proprement dite ?

Ça signifie qu'il faut comprendre un minimum le langage, ainsi que la vision. Et comprendre le langage, c'est comprendre ce que c'est que l'intelligence, en fait. Aujourd'hui on utilise des systèmes qui sont très statistiques, mais qui permettent de traduire de manière assez efficace. Ils comprennent donc un peu l'intention du langage. Mais ça ne suffit pas, par exemple pour différencier une blague d'un harcèlement. Côté images, il faut pouvoir détecter par exemple la violence dans une vidéo. Le faire de façon automatique ça n'est pas du tout évident.

Qu'est-ce qui distingue la recherche en IA chez Google, IBM et Facebook ?

Je dirais que Google et Facebook ont des recherches très proches, mais les applications sont différentes. Par exemple Google s'occupe de conduite automatique. IBM est plutôt tournée vers les applications pour les entreprises. Je dirais que Google essaie d'organiser l'information du monde, Facebook de connecter les humains.

Est-ce qu'il y a des liens entre Facebook et les instituts de recherche ?

Dans notre équipe de recherche, 70% des articles publiés par nos chercheurs ont un coauteur qui n'est pas de Facebook, ce qui se comprend puisque tous nos chercheurs ont fait une thèse à l'université. Par ailleurs toute notre recherche est publiée, et souvent de façon libre, donc il y a très peu de contraintes pour collaborer avec des chercheurs extérieurs.

Est-ce qu'il ya des liens avec d'autres domaines de recherche, comme la sociologie, la psychologie ou la linguistique ?

De plus en plus. Bien sûr, il existe des liens avec la linguistique, souvent conflictuels d'ailleurs. J'aime bien raconter cette anecdote : Frederick Jelinek, un chercheur d'IBM qui a initié tout le champ de la linguistique statistique pour résoudre les problèmes de reconnaissance vocale et traduction automatique, gérait une équipe de linguistes et d'ingénieurs. Un jour un linguiste part, Jelinek le remplace par un ingénieur parce qu'il ne trouve pas de linguiste, et se rend compte que le système s'est amélioré. Il convainc alors un autre linguiste de partir, et le système s'améliore encore, et ainsi de suite. Cela dit les linguistes disent que ces systèmes ne comprennent pas le langage, et finalement depuis deux ou trois ans c'est ce que je pense aussi. On a des systèmes vraiment très performants grâce à une force brute, statistique. Mais ces systèmes n'ont pas de sens commun. Ils donnent l'illusion de comprendre ce qui se passe, mais en fait ce sont des formes qu'ils reconnaissent, et pas du sens.

Concernant la sociologie, aujourd'hui les systèmes d'IA sont de plus en plus utilisés pour recommander des rencontres amoureuses, du contenu, ou aider au recrutement. Quand on fait ça il y a un problème de biais, d'équité (*fairness*). Est-ce qu'on peut accepter que ces systèmes reproduisent les biais existant dans la réalité ? Souvent on répond par la négative. Mais les gens font des choix qui leur ressemblent, alors jusqu'à quel point l'IA doit-elle s'abstenir d'agir ainsi ? Ce sont des problèmes très complexes d'éthique ou de sociologie, plus que des problèmes d'IA.

Quel est le profil des chercheurs embauchés chez Facebook ?

On embauche beaucoup de jeunes docteurs en science de l'apprentissage avec des applications autour de la vision, du langage, ou de l'audio. On recrute aussi des chercheurs qui peuvent avoir jusqu'à 15 ans d'expérience dans le domaine. Et puis on embauche aussi des physiciens, parce qu'on se

rend compte que pour comprendre un réseau de neurones, il faut presque en faire un modèle physique, savoir comment l'information se propage, etc. Et l'on a commencé aussi à recruter également des gens qui ont une formation en sciences cognitives, et en mathématiques.

Est-ce que vous êtes sensibles à Facebook de l'image qu'a le grand public de l'IA ?

Un de nos buts, c'est de communiquer sur l'IA, et de montrer qu'elle a un impact positif sur le monde. Les gens ont pensé que l'IA allait prendre nos emplois, par exemple. Mais ces systèmes ne peuvent effectuer que des tâches malgré tout très restreintes, donc cette menace n'est pas réelle. Les vrais problèmes de l'IA, c'est ce que je disais avant, ce sont les biais qu'ils peuvent renforcer. Si l'IA recommande pour les postes d'informaticiens uniquement des hommes, on perpétue un biais. Nous aimerions que ces problèmes éthiques soient discutés ouvertement. Est-ce que l'IA doit être utilisée pour l'armement, par exemple ? C'est une technologie très puissante, et comme à chaque fois elle va produire des changements importants dans la société. C'est important d'en discuter avec la société de façon ouverte.

Peux-tu nous faire un court historique des réseaux de neurones (RNs), qui sont actuellement les piliers de l'IA ?

Le modèle a été découvert dans les années 50. Ensuite des chercheurs ont décrit les limites théoriques des RNs. Les gens en avaient conclu que les RNs étaient très limités. Dans les années 80-90, des gens comme Yann Lecun ont commencé à montrer que les RN pouvaient résoudre des problèmes réels, mais bizarrement l'intérêt et les investissements ont diminué, c'est ce qu'on appelle l'hiver de l'IA. Dans les conférences on invitait un ou deux connexionnistes pour être gentil. À partir de 2009 les RNs se sont mis à battre, selon les tests (*benchmark*) classiques de l'IA, tous les autres types de systèmes. Depuis les progrès sont constants, ce qui n'était pas le cas avant.

J'ai souvent entendu souvent dire qu'on ne comprenait pas pourquoi les RNs fonctionnaient aussi bien, peux-tu nous expliquer cette double affirmation ?

Oui c'est un peu vrai. Ça marche très bien : dans la plupart des tâches classiques, les systèmes reposant sur les IAs sont les meilleurs. De façon un peu plus technique, les RNs ont énormément de paramètres, et semblent généraliser la tâche sans trop

surinterpréter (*overfit*), c'est-à-dire sans coller trop aux données déjà fournies. Plus les réseaux de neurones sont gros, plus ils sont efficaces. C'est un peu magique.

Chez Facebook, y a-t-il des chercheurs qui essaient de comprendre pourquoi ce phénomène ?

Oui, on fait de la recherche fondamentale en IA.

Peux-tu nous parler des problèmes fondamentaux de l'IA non résolus, outre ceux dont tu as déjà un peu parlé ?

Les systèmes actuels apprennent de façon scolaire, supervisée. Mais les enfants, pour une même tâche simple, n'apprennent pas de façon supervisée. Un enfant en bas âge apprend en interagissant et en observant le monde. On ne lui donne pas un milliard d'exemples en précisant lesquels sont bons et lesquels ne le sont pas. Le nombre de supervisions est donc très limité par rapport à la capacité qu'il acquiert. Un enfant peut même apprendre quelque chose en une seule fois (*one-shot learning*). Comme on l'a dit les systèmes n'ont pas non plus de sens commun, ils ne comprennent pas par exemple la causalité, contrairement à un humain qui détecte rapidement une cause à partir d'un effet. Cela étant dit, les enfants bénéficient d'un cerveau qui est le résultat de millions d'années d'apprentissage. Il faudrait de façon générale que les systèmes, qui actuellement fonctionnent de manière très statistique, apprennent plus par concept, et possèdent un modèle du monde qui fasse sens.

Comment penses-tu que ça sera résolu ?

Ça viendra à mon avis d'une combinaison. D'abord, même si l'on atteint un peu les limites de ce phénomène, on va continuer à accroître la taille des RNs, puisqu'ils fonctionnent mieux ainsi. Ensuite, et là c'est un débat entre les communautés, il faudrait associer les méthodes statistiques actuelles avec une approche plus symbolique. Les approches symboliques des années 80 n'ont pas porté beaucoup de fruit, elles étaient trop naïves. La question intéressante, c'est comment ancrer ce symbolisme dans une représentation statistique du monde. Un symbole ou un concept représente une combinaison d'expériences. Aujourd'hui on utilise des vecteurs en très grande dimension pour représenter la complexité des concepts. Ce qui nous manque, c'est une compréhension théorique, mathématique, de la dynamique des systèmes apprenants, de la façon dont ceux-ci généralisent ou mémorisent l'information. Il y a une focalisation de la communauté sur les

tests, avec des articles qui améliorent d'un ou deux pourcents une performance donnée, alors qu'il est plus intéressant de comprendre pourquoi le système est performant. Par exemple il y a des expériences qui retirent certaines informations au RN, et l'on se rend compte que le réseau reste beaucoup plus performant qu'on ne l'aurait pensé.

Il semble que les RNs fonctionnent par corrélations. Dans un article récent du Monde le journaliste donnait l'exemple d'un loup que les RNs distinguaient d'un chien uniquement par le fond de l'image, toujours naturel dans le premier cas. On imagine bien les problèmes quand il s'agit de détecter une maladie ou de décider si une voiture s'engage ou pas sur une route. Que penses-tu de ce problème?

C'est un gros problème. Les systèmes apprennent de données historiques et de manière statistique. On ne peut pas faire face correctement à une situation nouvelle à moins d'avoir une compréhension conceptuelle du problème. Concernant le loup, c'est vrai que le système se base beaucoup sur le fond, même de façon locale. Mais on peut faire des RNs qui font des choses plus fines, par exemple qui comprennent les silhouettes. Le problème c'est que l'on crée des tests où le RN va utiliser le décor plutôt qu'une compréhension plus fine. Les tests ne favorisent pas les systèmes qui ont une approche conceptuelle. Le problème de l'intelligence, c'est de généraliser des situations qu'on n'a rencontrées qu'une seule fois, de transférer ce qu'on connaît d'un domaine dans un domaine. On essaie de créer des tests plus interactifs et moins statiques. À Facebook, nous construisons des environnements qui interagissent avec les gens, plutôt que de réaliser une tâche fixe avec un test qui est toujours le même. Par exemple, on est en train de réaliser un guide dans les rues de NYC avec une IA.

L'IA pourra-t-elle un jour aider les mathématiciens dans leur recherche? L'IA pourrait-elle parcourir l'espace abstrait des mathématiques comme AlphaGo explore l'espace des parties de go?

On en est vraiment très, très loin. L'espace des parties de Go possède une certaine régularité, et on peut évaluer la valeur d'une position dans une partie. Dans une preuve mathématique, savoir si on est sur le chemin d'une bonne preuve ou pas, ça semble très difficile. Mais mon équipe vient tout de même de dé-

marrer un projet ambitieux sur ce sujet en utilisant des techniques similaires.

Va-t-on être tous transformés en trombones un jour?²

D'un côté c'est une bonne question, de l'autre non. C'est une mauvaise question parce que tous les systèmes d'IA aujourd'hui se comportent dans des limites bien définies, et il n'y a aucune raison de penser que ça va changer. Le problème intéressant et même crucial, c'est par contre celui de la fonction d'objectif (*objectif function*). Trouver un bon objectif à un système d'IA est assez difficile, parce que ce sont souvent des objectifs à long terme. Ce qui est difficile c'est de savoir si l'on se trouve bien sur le chemin de la tâche finale. On trouve toujours des *proxys* pour cette tâche, c'est-à-dire des paramètres censés indiquer si l'on est proche ou non de l'objectif. Mais souvent on crée des systèmes qui essaient d'optimiser les *proxys*, mais pas la tâche finale. Concernant Facebook, si l'objectif est que les gens soient heureux mais que le proxy choisi est le temps passé sur Facebook, il se peut que le système pousse les gens à perdre leur temps. Un autre exemple est le fameux *bot* de Microsoft, qui avait été créé pour maximiser les interactions sur Twitter. Ce que le *bot* a trouvé très rapidement, c'est que s'il insultait les gens ou s'il faisait des commentaires choquants, les gens réagissaient beaucoup, ce qui encourageait le bot dans cette stratégie.

Quelles sont selon toi les bornes morales pour les décisions autonomes des IA, l'exemple extrême étant les robots tueurs?

Dans l'armement, c'est quand même très délicat que des armes prennent des décisions offensives, en particulier tuer. La plupart des chercheurs sont inconfortables avec cette idée. Cela dit on pourrait par exemple créer des armements intelligents qui les rendraient moins létaux. Et si l'on utilise une IA qui permette de ne jamais tuer des civils, est-ce que c'est une mauvaise chose? Dans tous les cas l'IA a un système de valeurs quand il prend des décisions, et il faut que ça se fasse dans une certaine transparence, notamment parce qu'ils ont tendance à reproduire les biais des données.

Est-ce que tu regrettes le monde des mathématiques?

2. En 2003, le philosophe Nick Bostrom a illustré les risques posés par l'IA en décrivant un système à qui on aurait demandé de produire autant que possible des trombones. Le système pourrait alors se débarrasser des humains qui pourraient chercher à l'arrêter dans sa quête de maximiser la production de trombones.

Très bonne question! Oui parfois je ressens une certaine nostalgie. Est-ce que je regrette mes choix, non, parce qu'aujourd'hui je peux avoir énormément d'impact positif sur le monde. Mais ce qu'il y a d'amusant c'est que pas mal de gens que j'ai connus en mathématiques ont obtenu des prix, y compris la médaille Fields. Bien sûr je n'aurais pas eu la médaille Fields, je n'étais pas aussi brillant qu'eux, mais je me

retrouve à lire des articles sur leur domaine, d'essayer de comprendre ce qu'ils font. C'est vrai que cette recherche de connaissances pures me manque. Découvrir quelque chose de nouveau, de vraiment nouveau, que personne d'autre n'avait trouvé avant, c'est quand même vraiment exaltant, et je ne peux plus le faire maintenant.



Depuis 20 ans, **Jérôme Pesenti** travaille dans le domaine de l'intelligence artificielle, le traitement du langage naturel, les moteurs de recherche, les données massives et l'apprentissage automatique. Il dirige actuellement les équipes de recherche et développement en intelligence artificielle de Facebook.

ETH zürich

Professor of Mathematics

→ The Department of Mathematics (www.math.ethz.ch) at ETH Zurich invites applications for the above-mentioned position.

→ Successful candidates should demonstrate an outstanding research record and a proven ability to direct research work of high quality. Willingness to participate in collaborative work both within and outside the school is expected. The new professor will be responsible, together with other members of the department, for teaching undergraduate (German or English) and graduate level courses (English) for students of mathematics, natural sciences, and engineering.

→ **Please apply online: www.facultyaffairs.ethz.ch**

→ Applications should include a curriculum vitae, a list of publications, a statement of future research and teaching interests, and a description of the three most important achievements. The letter of application should be addressed **to the President of ETH Zurich, Prof. Dr. Joël Mesot. The closing date for applications is 15 November 2019.** ETH Zurich is an equal opportunity and family friendly employer, strives to increase the number of women professors, and is responsive to the needs of dual career couples.



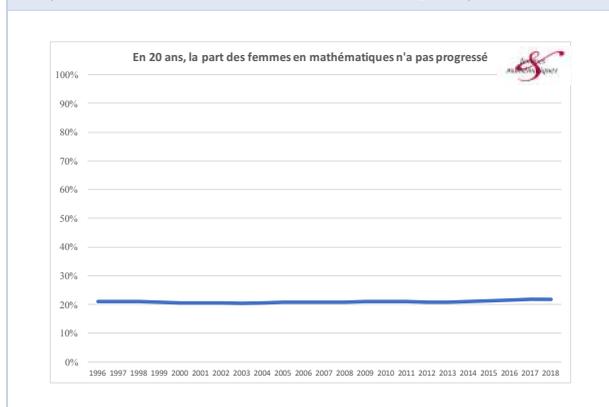
Parité, la pente est forte et la route sinueuse Bilan de la journée du 10 juillet 2019 à l'Institut Henri-Poincaré

- I. CHATTERJI
- J. LE ROUSSEAU
- B. RÉMY

Neuf heures, ce matin du 10 juillet 2019 à l'IHP, l'amphi Hermite est bien rempli, et la proportion des hommes dans la salle est plus importante que lors de la dernière édition, trois ans plus tôt. Chouette, les lignes bougent!

Dix heures, l'humeur est plus maussade. Laurence Broze, professeure à l'université de Lille et vice-présidente de l'association *Femmes & Mathématiques*, vient de nous présenter les statistiques les plus récentes et le constat est froid : rien ne bouge. Sur les vingt dernières années la part des femmes en mathématiques (sections 25 et 26 confondues) reste à 21%. Auriez-vous besoin d'illustrer ce qu'est une vraie fonction constante dans votre prochain cours, nous ne saurions trop vous conseiller d'utiliser le graphique de L. Broze qui est reproduit dans la figure 1.

FIGURE 1 – Part des femmes en mathématiques en France de 1996 à 2018
(source : *Femmes & Mathématiques*)



Pire, la part des femmes en 25 a baissé. Alors, nécessairement, elle a augmenté en 26. Faut-il féliciter cette dernière? Mollement, car les femmes ne représentent que 27,5% de cette section, ce qui la place à la 12^e place des sections les moins féminini-

sées. Certes, loin derrière la 25 qui truste la première place depuis des années avec seulement 14,1% de femmes. Et plus on y regarde de près et plus les chiffres sont dramatiques : la part des femmes en 25 est en diminution à la fois pour les postes de maîtres de conférences et de professeurs. En 2018, on en est à 19% en MCF et 6% en PR. Quant au CNRS, avec 19% des femmes parmi les mathématiciens la situation n'y est guère plus réjouissante. Le « plafond de verre » est bien là. Avec de tels chiffres, difficile de l'imaginer en verre d'ailleurs; il est bien opaque ce plafond.

Alors que faire? Le nombre de postes en baisse en mathématiques apparaît comme un frein à une évolution positive de la parité. Un constat qui permettra à certains de se dire que rien ne peut être fait dans une période si peu favorable à l'emploi universitaire. Sauf que... là aussi les statistiques parlent : lors des périodes où les postes étaient plus nombreux aux concours, les recrutements réalisés en 25 ont fait baisser la part des femmes. On ne peut que conclure qu'un changement sur le fond est nécessaire, sur notre appréhension des stéréotypes de genre. L. Broze nous rappelle comment les mécanismes associés ont des conséquences avérées qui sont globalement positives pour les hommes et globalement négatives pour les femmes.

En lien avec ce constat, Rozenn Texier-Picard, maître de conférences à l'Éns Bretagne, nous présente une étude concernant « la sous-représentation des filles en sciences dans les écoles normales supérieures ». L'étude s'intéresse en particulier, pour l'Éns Rennes, aux différences qui existent entre le taux de filles parmi les candidats au concours et ce même taux parmi les admissibles et les classés. Les effectifs des admis, bien trop faibles pour être statistiquement significatifs, sont moins considérés. De 2014 à 2017, pour 17% de candidates, on ne compte

que 9% de filles admissibles, avec un même chiffre pour les classées. Ces chiffres suscitent des interrogations. Ici aussi les notions de « menace des stéréotypes » émergent et sont à combattre. Les solutions se trouvent très certainement en amont, en particulier par une sensibilisation des enseignants du secondaire ainsi que des inspectrices et inspecteurs à ces questions. On s'interroge aussi sur les compétences évaluées par le concours. Correspondent-elles aux compétences utiles pour l'enseignement et la recherche? Le groupe de travail inter-ÉNS a demandé la création d'un « observatoire de la diversité dans les ÉNS », demande qui n'a pas encore abouti...

Pour aller plus loin sur la notion de « plafond de verre », Igor Kortchemski, chercheur à l'École polytechnique, nous présente un modèle mathématique d'Avin *et al.* [1] permettant d'expliquer en partie le phénomène de plafond de verre. L'idée sous-jacente est de représenter une population par un graphe où chaque individu est un sommet et son degré, le nombre d'arêtes qui lui sont associées, exprime sa « réussite sociale ». Pour de grands graphes obtenus à partir de situations réelles, on trouve empiriquement une loi de la forme

$$P_k(G) \sim k^{-\beta}, \quad \text{pour } k \text{ grand}, \quad (1)$$

où $P_k(G)$ désigne la proportion de sommets de degré k dans un graphe G . Si maintenant on construit une suite graphe $(T_n)_n$ suivant les règles suivantes.

- T_0 est constitué d'un unique sommet,
- étant donné T_n , on construit T_{n+1} en ajoutant un nouveau sommet et en le reliant à un sommet existant, choisi au hasard, proportionnellement à son degré,

on trouve alors [2]

$$\mathbb{E}[P_k(T_n)] \sim \frac{4}{k(k+1)(k+2)}, \quad \text{pour } n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

soit une loi comme dans (1) avec $\beta = 3$.

L'idée est ensuite de construire des arbres avec deux types de sommets, 0 ou 1. Le type 1 correspond à une population majoritaire et le type 0 à une minorité. On fixe $0 \leq r \leq 1/2$ et $0 \leq \rho \leq 1$ et on utilise les étapes suivantes :

- T_0 est constitué de deux sommets reliés, un de type 0 l'autre de type 1.
- Étant donné T_n , on construit T_{n+1} comme suit :
 - (a) on ajoute un nouveau sommet, de type 0 avec probabilité r et de type 1 avec probabilité $1 - r$ [minorité];
 - (b) on choisit un sommet déjà existant proportionnellement à son degré [attachement préférentiel].

1. S'il est de même type que le nouveau sommet, on les relie.
2. Sinon, avec probabilité ρ on les relie, et avec probabilité $1 - \rho$ on recommence l'étape (b) [homophilie].

Un des résultats obtenus est le suivant.

Théorème 1 ([1]). On note $P_k^i(T_n)$ la proportion de sommets de degré k de type $i \in \{0, 1\}$. Alors il existe $(P_k^0)_k$ et $(P_k^1)_k$ tels que pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{E}[P_k^i(T_n)] \sim P_k^i, \quad i = 0, 1, \quad \text{pour } n \rightarrow \infty,$$

et

$$P_k^i \sim C_i k^{-\beta_i}, \quad i = 0, 1, \quad \text{pour } k \rightarrow \infty,$$

où $\beta_0 > 3 > \beta_1$ si $0 < r < 1/2$ et $0 < \rho < 1$.

Dans ce cas on peut *a priori* trouver une suite $(k_n)_n$ telle que

$$\frac{N_{\geq k_n}^0(T_n)}{N_{\geq k_n}^1(T_n)} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad N_{\geq k_n}^1(T_n) \rightarrow +\infty, \quad \text{pour } k_n \rightarrow \infty,$$

où $N_{\geq k_n}^i(T_n)$ est le nombre de sommets de type i de degré au moins k_n dans T_n . C'est cet effet que les auteurs de [1] appellent un « plafond de verre ». Même sans vouloir aller trop hâtivement vers des conclusions fondées sur ce modèle, l'étude d'Avin *et al.* montre qu'en présence d'une minorité celle-ci est défavorisée : $\beta_0 > \beta_1$. L'étude suggère que deux ingrédients interviennent fortement pour la création d'un tel phénomène :

- l'attachement préférentiel : n'a-t-on pas tendance à plus souvent recruter quelqu'un issu d'une école bien établie déjà riche d'un réseau bien fourni?
- et l'homophilie : n'a-t-on pas tendance à parfois vouloir recruter une personne qui nous ressemble, pourquoi pas au niveau du genre?

Il est aussi intéressant de constater que, suivant ce modèle, la présence d'une minorité favorise la population majoritaire : on trouve $\beta_1 < 3$ alors que dans (2) pour une seule population on trouve $\beta = 3$.

Autre sujet abordé au cours de cette journée et connexe à celui de la parité : le harcèlement sexuel au travail. Notre invitée est Marilyn Baldeck, déléguée générale de l'AVFT (Association européenne contre les Violences faites aux Femmes au Travail). Elle nous rappelle comment la loi a (beaucoup) évolué depuis le premier texte de 1992. Depuis 2012, par harcèlement sexuel le législateur entend ceci :

Le harcèlement sexuel est le fait d'imposer à une personne, de façon répétée, des propos ou comportements à connotation sexuelle ou sexiste, qui « Le harcèlement sexuel est le fait d'imposer à une personne, de façon répétée, des propos ou comportements à connotation sexuelle ou sexiste, qui

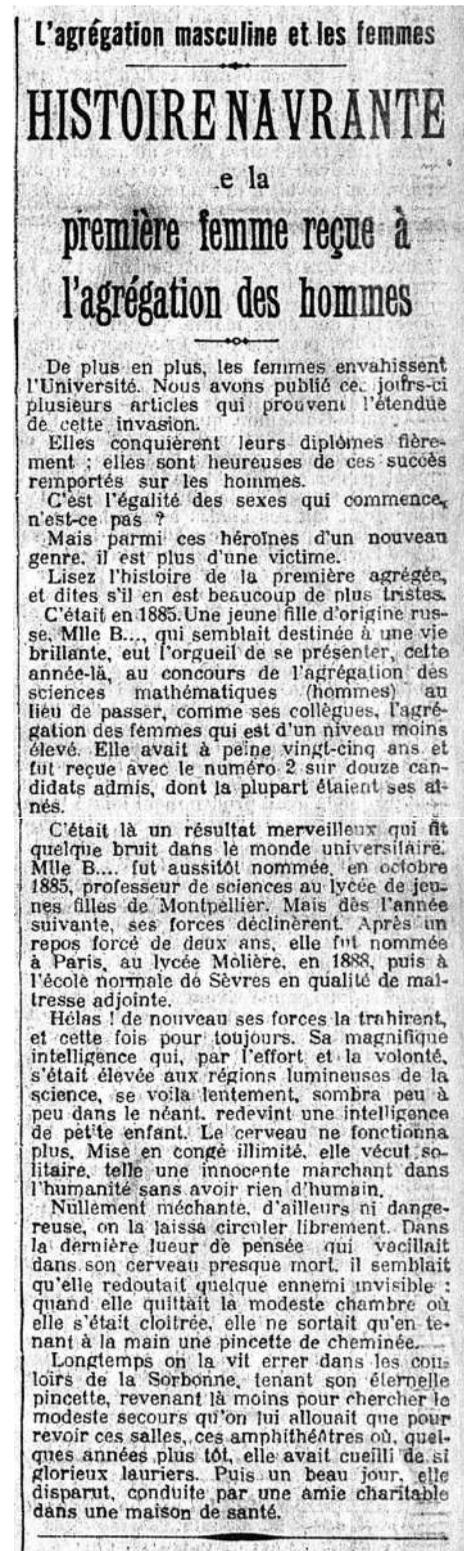
- soit portent atteinte à sa dignité en raison de leur caractère dégradant ou humiliant;
- soit créent à son encontre une situation intimidante, hostile ou offensante. »

Depuis 2018, la notion d'actions concertées a même été ajoutée. M. Baldeck nous rappelle bien la distinction qui existe entre des cas d'agression sexuelle, d'agissement sexiste, et de harcèlement sexuel. Nous vous renvoyons à ses transparents (sur le site de la journée donné plus bas) où des exemples éclairent bien les distinctions entre tous ces délits. Dans le cas du harcèlement sexuel, M. Baldeck souligne que l'employeur a une obligation de prévention et une obligation d'enquête immédiate.

Le harcèlement sexuel existe-t-il dans notre communauté mathématique? Il serait hypocrite de prétendre que non. Rozenn Texier-Picard nous présente une étude qui a été menée à Rennes au sein de l'école doctorale qui concerne les mathématiques ainsi qu'au niveau du centre Henri-Lebesgue. Même si les auteurs de cette étude s'accordent à dire qu'elle est insuffisante pour permettre des conclusions statistiques, elle révèle bien que le harcèlement sexuel est présent dans la sphère des universitaires, celle des mathématiciens en particulier; tout comme le harcèlement moral d'ailleurs. La faible représentation des femmes est certainement un excellent terreau aux situations de harcèlement sexuel, ce dernier naissant souvent d'un calcul entre pouvoir exerçable et risque de se faire prendre.

La place des femmes en mathématiques est aussi une question dont les historiens des sciences se sont emparés. Hélène Gispert, professeure émérite à l'université Paris-Sud, nous parle de la visibilité ou plutôt l'invisibilité des femmes à travers les journaux et les publications. Aux XVIII^e et XIX^e siècles, existent des journaux édités à l'intention des femmes. Le *Lady's diary* britannique apparaît en 1704; il est consacré aux mathématiques sous la forme de questions/réponses. L'objectif est d'être plaisant, avec des questions pas trop dures. On encourage les questions posées en vers. En fait, peu des auteurs sont des autrices et les femmes sont une niche éditoriale. Le journal existera jusqu'en 1840, date de la fusion avec son homologue, le *Gentleman's Diary*. D'autres publications de ce genre existeront.

FIGURE 2 – Article paru dans *Le Matin*, le 30 janvier 1911



Au XIX^e siècle, où les journaux mathématiques

orientés vers l'exposition de recherches apparaissent durablement, la place des femmes est extrêmement modeste. Les femmes telles que Sonya Kovalevskaja sont des exceptions. Sophie Germain peine à publier et parfois son nom n'apparaît guère sur la publication. Le nombre des femmes dont les travaux sont publiés est dérisoire et les sources peu nombreuses. Le terme « invisibilité » prend tout son sens. Les femmes sont exclues des mathématiques académiques et dans les sociétés savantes, ce sont des hommes que l'on trouve aux postes de pouvoir, en France ou ailleurs. H. Gispert évoque aussi le cas de Loubia Bortnicker, prix Peccot, qui ne finira jamais sa thèse et sera atteinte de troubles mentaux la menant à l'enfermement, et dont la presse se servira pour illustrer, selon elle, l'inadéquation entre femmes et mathématiques (figure 2).

La journée s'est achevée sur une table ronde sur la délicate question de « mobilité et parité » en lien avec la tribune parue dans le numéro 160 de la *Gazette* (pp. 6–64). Stéphane Seuret avait accepté d'en être le modérateur et étaient rassemblés : Pascal Auscher (directeur de l'INSMI), Colette Guillopé (professeure émérite à l'université Paris 12), Anne Gégout-Petit (professeure à l'université de Lorraine) et Constantin Vernicos (maître de conférences à l'université de Montpellier). La présentation du cas de l'institut Élie-Cartan de Lorraine, détaillée et dépassionnée, a été très intéressante ; un lien vers sa présentation est donné plus bas. L'évocation de cas particuliers a ponctué cette table ronde et la discussion qui l'a accompagnée de moments émotionnellement forts. Une étude plus large de telles situations pourrait certainement donner des pistes de réflexion sur ces questions.

Pour consulter les présentations :

<http://postes.smai.emath.fr/apres/parite/journee2019/programme2019.php>

Celle d' Anne Gégout-Petit est disponible ici :

<http://postes.smai.emath.fr/apres/parite/journee2019/exposes/AGegoutPetit>

Les videos de la journée sont ici :

https://www.youtube.com/channel/UC_u5ms6gJzM3I4z0rtGeerw/featured

Références

- [1] C. AVIN et al. « Homophily and the glass ceiling effect in social networks ». In : *Proceedings of the 2015 conference on innovations in theoretical computer science*. ACM. 2015, p. 41-50.
- [2] B. e. BOLLOBÁS et al. « The degree sequence of a scale-free random graph process ». *Random Structures & Algorithms* **18**, n° 3 (2001), p. 279-290.

Indira CHATTERJI

Université Côte d'Azur

Jérôme LE ROUSSEAU

Université Paris 13

Bertrand RÉMY

École polytechnique



... l'arbre continu brownien

- N. CURIEN
- I. KORTCHEMSKI

Nous présentons *l'arbre continu brownien*. Il s'agit d'un arbre continu fractal aléatoire, introduit par David Aldous au début des années 1990, qui est depuis devenu un objet important en probabilités et qui apparaît dans des contextes variés. Chemin faisant, ce sera l'occasion de présenter de jolis résultats mathématiques accessibles dès les premières années postbac.

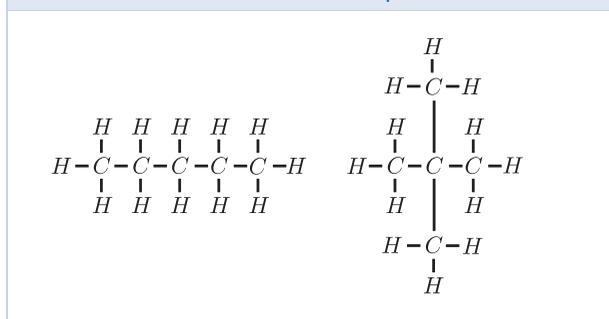
1. Introduction

À quoi une structure arborescente typique ressemble-t-elle?

1.1 – Souvenirs du lycée...

Prenons un exemple concret issu de la chimie. Considérons n atomes de carbone et $2n + 2$ atomes d'hydrogène. Il est alors possible d'assembler ces atomes pour former une molécule sans cycle (un alcane) en créant 4 liaisons par atome de carbone et 1 liaison par atome d'hydrogène. Bien que toutes les molécules obtenues aient la même formule chimique C_nH_{2n+2} , leurs structures géométriques peuvent être bien différentes comme suggéré par la figure 1 (on dit que ce sont des isomères).

FIGURE 1 – Deux isomères du pentane



Combien vaut Alc_n , le nombre d'isomères d'un alcane à n atomes de carbone? Il n'existe malheureusement pas de formule simple donnant l'expression de Alc_n en fonction de n mais on peut calculer les premières valeurs 1, 1, 1, 2, 3, 5, 9, 18... pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...$

La question qui va nous intéresser ici est de comprendre la structure géométrique d'un alcane à n atomes de carbone *typique*. Plus précisément, nous pouvons considérer un isomère choisi uniformément au hasard parmi les Alc_n possibilités, et se demander quelle est sa géométrie (par exemple : quel est son diamètre vu comme graphe)? Bien que les structures géométriques de ces isomères peuvent être très différentes (on peut imaginer un isomère très longiligne, ou au contraire un isomère ressemblant à une sorte d'étoile), nous verrons qu'en pratique ces comportements atypiques auront très peu de chance d'arriver.

1.2 – Structures discrètes aléatoires

La question précédente s'inscrit dans un cadre plus général. Pour tout $n \geq 1$, imaginons un ensemble fini \mathbb{X}_n représentant un ensemble de structures discrètes de taille n ; si X_n est un élément de \mathbb{X}_n choisi uniformément au hasard, que peut-on dire de X_n lorsque $n \rightarrow \infty$?

Pour répondre à cette question, il est utile d'avoir une manière simple de calculer $\text{Card}(\mathbb{X}_n)$ ainsi qu'une méthode de simulation de X_n .

Nous allons esquisser dans la Section 2 des réponses à ces questions pour deux types de structures arborescentes : les arbres étiquetés et les arbres plans. Nous verrons que les algorithmes de simulation de ces arbres aléatoires sont aussi des outils bien pratiques pour leur étude mathématique. Ces deux modèles sont en réalité très liés car asymptotiquement lorsque leur taille grandit, il n'est presque plus possible de distinguer un arbre plan aléatoire d'un arbre étiqueté aléatoire (ni même d'un

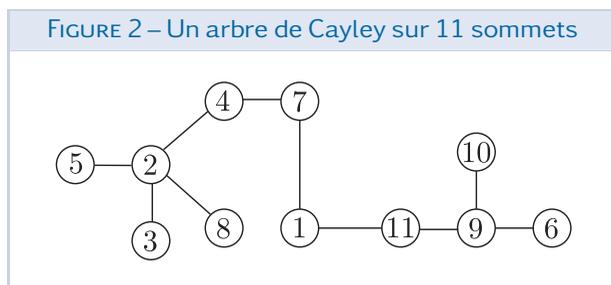
alcane aléatoire) : ils convergent vers la même limite, qui est l'arbre continu brownien (c'est l'objet de la Section 3).

2. Cayley & Catalan

Dans cette partie, nous nous intéressons aux propriétés des arbres étiquetés (dits de Cayley) et des arbres plans (dits de Catalan).

2.1 – Les arbres de Cayley

Un arbre de Cayley à n sommets est, par définition, un arbre au sens de la théorie des graphes, c'est-à-dire un graphe sans cycle, et dont les sommets sont étiquetés de 1 à n . Voir la figure 2.

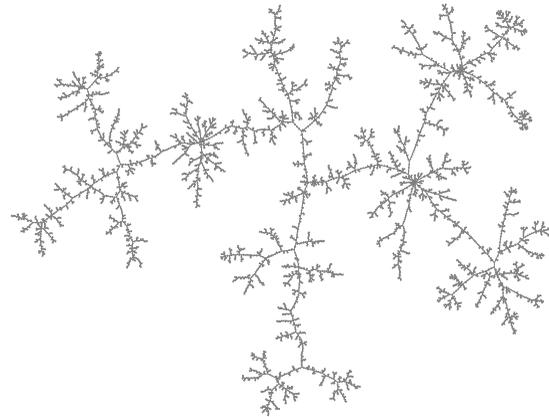


Combinatoire. Si on note Cay_n le nombre d'arbres de Cayley à n sommets, alors la suite (Cay_n) commence par les valeurs suivantes : 1, 1, 3, 16, 75, etc. La *formule de Cayley* (en fait due à Sylvester) fournit une expression simple de Cay_n en fonction de n :

$$Cay_n = n^{n-2}, \quad n \geq 1.$$

Il existe plusieurs preuves élégantes de ce joli résultat (voir par exemple sur Wikipedia).

Simulation. En suivant le plan de route esquissé dans la Section 1.2, intéressons-nous maintenant à la géométrie d'un arbre de Cayley \mathcal{T}_n tiré uniformément au hasard parmi les Cay_n arbres de Cayley à n sommets. Voici une simulation d'un arbre de Cayley aléatoire à 10000 sommets représenté dans le plan obtenu avec le logiciel Mathematica en utilisant la fonction Graphplot :



Comment une telle simulation a-t-elle été réalisée ? Avons-nous fait la liste des 10000⁹⁹⁹⁸ arbres de Cayley à 10000 sommets avant d'en choisir un uniformément parmi eux ? Non, bien sûr. Il est possible de tirer un arbre de Cayley uniformément au hasard sans avoir à les énumérer grâce à l'algorithme d'Aldous & Broder découvert autour de 1990. Voici comment il fonctionne : on considère une marche aléatoire sur le graphe complet à n sommets $\{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire ni plus ni moins qu'une suite X_0, X_1, \dots de nombres indépendants et uniformes sur $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. On construit alors itérativement un sous-arbre croissant :

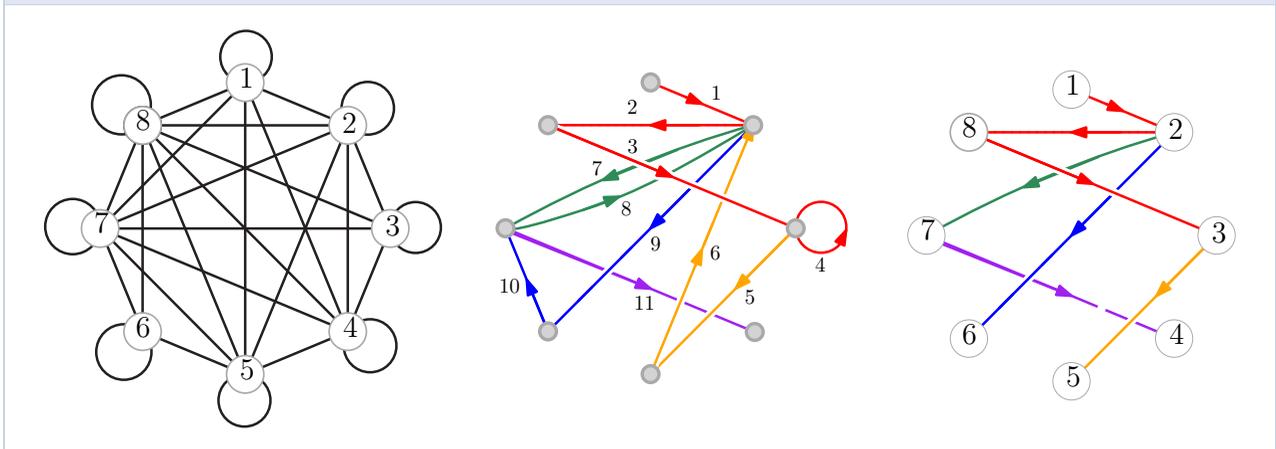
- à $n = 0$ le graphe est formé du seul sommet X_0 ;
- pour $n > 0$ si l'on visite un nouveau sommet à l'étape n alors on ajoute l'arête $X_n \leftrightarrow X_{n-1}$ au sous-arbre.

Il est facile de voir qu'à chaque instant le graphe formé par l'ajout de ces arêtes reste un arbre et que le processus se stabilise quand la marche aléatoire a visité tous les sommets du graphe. Le *théorème d'Aldous-Broder*¹ dit que l'arbre aléatoire ainsi créé est en fait un arbre uniformément distribué sur Cay_n . Dans notre cas, le temps nécessaire pour visiter tous les sommets du graphe est le temps qu'il faut pour « collecter » les n nombres $1, 2, \dots, n$ en tirant des variables uniformes X_0, X_1, \dots : c'est le problème du collecteur de coupons.

Application. Maintenant que nous avons un procédé algorithmique efficace pour générer un arbre de Cayley uniforme à n sommets, intéressons-nous à une quantité géométrique simple : la longueur H_n de la première branche (en rouge sur la figure 3). Il est possible de démontrer que cette longueur peut

1. Plus généralement, cet algorithme permet de construire un arbre couvrant uniforme d'un graphe (fini connexe) donné.

FIGURE 3 – Création de l’arbre de Cayley à partir de la suite 1,2,8,3,3,5,2,7,2,6,7,4... sur le graphe complet à 8 sommets. La marche change de couleur dès qu’elle retombe sur un sommet déjà visité



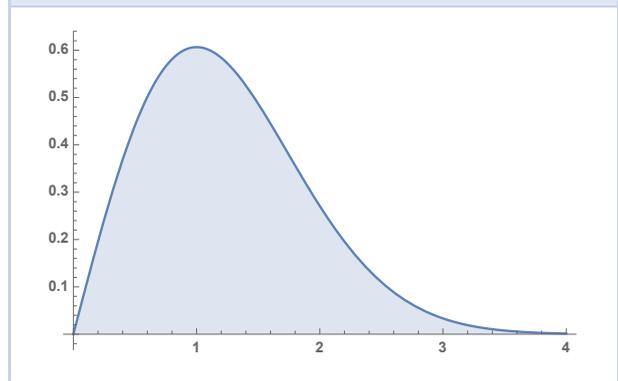
être interprétée comme la longueur entre la racine et un sommet choisi uniformément au hasard dans l’arbre de Cayley.

Cette branche grandit tant que le processus (X_n) découvre de nouveaux sommets et elle s’arrête dès que (X_n) tombe sur une valeur déjà vue. Ce problème est souvent posé lorsque $n = 365$: dans une classe d’école, cochez successivement les dates d’anniversaires d’élèves pris au hasard et arrêtez-vous dès qu’une date est cochée deux fois. Le paradoxe des anniversaires stipule qu’il suffit d’environ $40 \approx 2 \times \sqrt{365}$ tirages avant de tomber deux fois sur un même anniversaire avec une probabilité d’environ 90% (c’est bien moins que la borne déterministe de $365 + 1$). Faisons le calcul explicite dans notre cas. Dire que la première branche a au moins k sommets revient à dire que le deuxième sommet est différent du premier, ce qui arrive avec probabilité $1 - 1/n$, que le troisième est différent des deux premiers, probabilité $1 - 2/n$, et ainsi de suite. Par indépendance, on en déduit que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(H_n \geq k) = \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) \approx e^{-\frac{k^2}{2n}}.$$

Ainsi, tant que $k \ll \sqrt{n}$ la probabilité ci-dessus est d’ordre 1 et devient négligeable quand $k \gg \sqrt{n}$. Quand $k/\sqrt{n} \rightarrow x$, cette probabilité converge vers $\exp(-x^2/2)$. En termes probabilistes, on dit que lorsque $n \rightarrow \infty$, la variable aléatoire H_n/\sqrt{n} converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité, de densité $x \mapsto x \exp(-x^2/2)$. La loi de cette dernière variable aléatoire est appelée *loi de Rayleigh*.

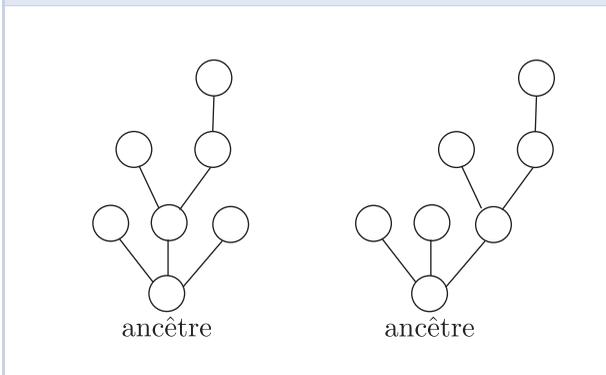
FIGURE 4 – Densité de la loi de Rayleigh, découverte par Lord Rayleigh lors de ses études sur la transmission du son dans les matériaux hétérogènes



2.2 – Les arbres de Catalan

Dans cette section nous allons nous intéresser aux arbres plans. Il s’agit d’arbres qui peuvent être utilisés pour modéliser la généalogie d’une famille (asexuée) partant d’un ancêtre et dont les enfants de chaque sommet sont ordonnés de gauche à droite (voir la figure 5 pour un exemple).

FIGURE 5 – Deux arbres plans différents (mais ayant la même structure de graphe)



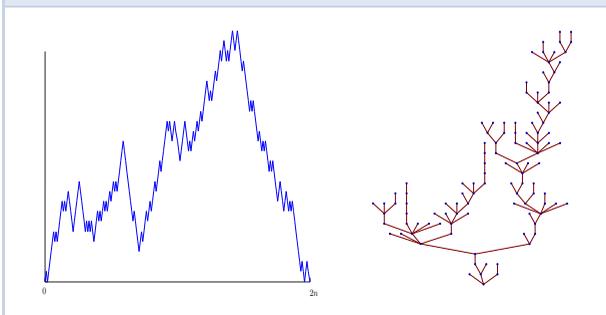
Combinatoire. Si on note Cat_n le nombre d'arbres plans à $n + 1$ sommets, alors la suite (Cat_n) commence par les valeurs suivantes : 1, 1, 2, 5, 14, 42. Plus généralement,

$$Cat_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (1)$$

est le n -ième nombre de Catalan. Ces nombres énumèrent de multiples modèles combinatoires.

Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser un codage des arbres plan par une fonction, appelée son *contour*. Informellement, on suit la « hauteur » d'une particule qui fait le « contour » de l'arbre de gauche à droite (voir la figure 6 pour un exemple qui sera plus éclairant qu'une définition formelle).

FIGURE 6 – Un arbre plan et son contour



On peut vérifier que ce codage est une bijection entre les arbres plans à $n + 1$ sommets et des fonctions continues qui augmentent linéairement de ± 1 (qu'on appellera excursions discrètes) qui sont positives sur $[0, 2n]$ et nulles en 0 et $2n$. Remarquons que chaque arête de l'arbre correspond en fait à deux pas de la marche : un pas ascendant et un pas descen-

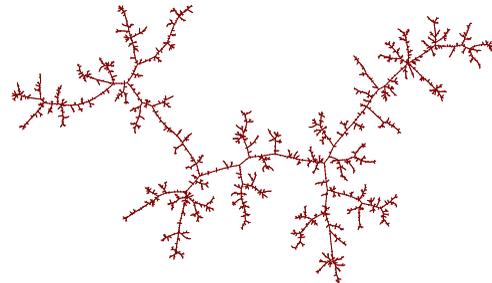
nant qui se font « face » sous le graphe de la marche, voir figure 6.

Le fait que le nombre d'excursions discrètes est donné par un nombre de Catalan est classique, et on peut montrer plus généralement (voir par exemple [5, Sec. 6.3]) que

$$\frac{f}{2n+f} \binom{2n+f}{n} \quad (2)$$

est le nombre de forêts à f arbres plans ayant n arêtes.

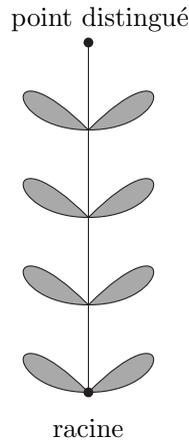
Simulation. Voici une simulation d'un arbre plan aléatoire à 10000 sommets :



Comme pour les arbres de Cayley, nous n'avons pas fait la liste de tous les arbres plans à $n = 10000$ sommets avant d'en choisir un uniformément au hasard. Grâce à notre codage par la fonction de contour, il nous suffit de simuler une excursion discrète de longueur $2n$. Or d'après (1) la probabilité pour qu'une marche de $2n$ pas à incréments ± 1 tirée uniformément au hasard parmi les 2^{2n} possibilités soit une excursion est d'ordre $Cat_n \cdot 2^{-2n} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi n^{3/2}}}$. En moyenne, il faut donc faire environ $2\sqrt{\pi n^{3/2}}$ tirages² afin d'obtenir une excursion discrète de longueur $2n$.

Application. La formule explicite (2) permet d'obtenir une information géométrique, à savoir la loi de la hauteur \mathcal{H}_n d'un sommet choisi uniformément au hasard dans un arbre plan uniforme à n arêtes. En effet, un arbre à n arêtes avec un sommet distingué à hauteur $h \geq 0$ est obtenu à partir d'une forêt de $2h + 1$ arbres recollés sur une branche de longueur h (voir figure ci-dessous).

2. Il existe un algorithme encore plus rapide, linéaire en le nombre de sommets, dû à Devroye.



La quantité $\mathbb{P}(\mathcal{H}_n = h)$ vaut donc

$$\frac{\text{Card}(\{\text{forêt } (2h + 1) \text{ arbres à } n - h \text{ arêtes}\})}{(n + 1) \cdot \text{Cat}_n} = \frac{2h + 1}{2n + 1} \frac{\binom{2n+1}{n-h}}{\binom{2n}{n}}$$

L'utilisation de la formule de Stirling montre alors que pour $x \geq 0$ fixé, $\mathbb{P}(\mathcal{H}_n > x\sqrt{n}) \rightarrow \exp(-x^2)$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Nous reconnaissons la loi de Rayleigh (à un facteur de dilatation $1/\sqrt{2}$ près) apparue dans la Section 2.1. Nous verrons dans la Section 3 que ce n'est pas une coïncidence.

2.3 – Bienaymé-Galton-Watson

Les arbres aléatoires plans ou de Cayley sont en réalité des cas particuliers d'un modèle plus général, à savoir celui des arbres de Bienaymé-Galton-Watson (BGW). Il s'agit d'un modèle simple décrivant la généalogie d'une population se reproduisant de manière asexuée qui fut initialement introduit pour étudier la survie des noms de famille nobles anglais. Voir [2] pour une présentation accessible dès les premières années postbac.

Informellement, si μ est une probabilité sur \mathbb{N} (appelée la loi de reproduction), on construit un arbre plan aléatoire issu d'un ancêtre (la racine) et où la probabilité qu'un individu ait k enfants est $\mu(k)$. Dès que la moyenne $\sum_{k \geq 0} k\mu(k)$ du nombre d'enfants est plus petite ou égale à 1 (et que l'on exclut le cas trivial $\mu(1) = 1$), la lignée s'éteint et l'arbre aléatoire est fini. Quand la moyenne est égale à 1 on dit que la loi de reproduction est *critique*, c'est le cas qui va nous intéresser dans la suite. Il est alors possible de vérifier (voir [2]) que :

- si $\mu(k) = \frac{1}{2^{k+1}}$ pour $k \geq 0$, alors un arbre de BGW de loi de reproduction μ , conditionné à avoir n

sommets, a la même loi qu'un arbre de Catalan uniforme à n sommets ;

- si $\mu(k) = \frac{e^{-1}}{k!}$ pour $k \geq 0$, alors un arbre de BGW de loi de reproduction μ , conditionné à avoir n sommets, muni d'un étiquetage uniforme des sommets et dont on oublie la structure planaire, a la même loi qu'un arbre de Cayley uniforme à n sommets.

3. Arbres et espaces métriques aléatoires

Dans les deux sections précédentes, nous avons obtenu un théorème limite pour la hauteur d'un point « typique » dans un « arbre aléatoire » (dans deux cadres : Cayley et Catalan). Mais comment faire pour contrôler « globalement » la géométrie, c'est-à-dire les distances entre tous les points en même temps ? Le plus dur est de trouver le bon cadre. C'est au début des années 2000 que Evans, Pitman & Winter, suivis par Duquesne & Le Gall, ont compris que ce cadre existait déjà en géométrie métrique et l'ont importé en probabilité.

3.1 – Topologie de Gromov-Hausdorff

L'idée, apparue à la fin des années 1970, due à Edwards et redécouverte par Gromov dans un autre contexte, est de considérer en quelque sorte l'espace de tous les espaces métriques, ou, plus précisément,

$$\mathbb{K} = \left\{ \begin{array}{l} \text{classes d'isométrie d'espaces} \\ \text{métriques compacts non vides} \end{array} \right\},$$

puisque du point de vue géométrique il est impossible de distinguer deux espaces métriques isométriques (en particulier, dans la suite, quand nous parlerons d'un espace métrique, il faudra comprendre implicitement que nous considérons sa classe d'isométrie).

On pourrait penser que cet ensemble est monstrueux et que sa définition même peut poser problème. En réalité, grâce à la condition de compacité imposée sur ses points (i.e. sur les classes d'isométrie d'espaces métriques), cet ensemble est assez « petit », par exemple n'importe quel espace métrique compact peut être vu comme un fermé de $\mathbb{E}^\infty(\mathbb{R})$.

Nous allons maintenant munir \mathbb{K} d'une distance, connue sous le nom de distance de Gromov-Hausdorff et notée d_{GH} . Soit X et Y deux points de \mathbb{K} , c'est-à-dire deux (classes d'isométrie d') espaces métriques compacts. L'idée est simple : deux espaces métriques compacts X et Y sont identifiés, c'est-à-dire à distance 0 s'il existe une isométrie $X \rightarrow Y$ et une isométrie $Y \rightarrow X$. Plus généralement, la distance de Gromov-Hausdorff entre X et Y est plus petite que $\varepsilon > 0$ s'il existe deux ε -isométries une de X vers Y et une de Y vers X où $\phi : (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$ est une ε -isométrie si pour

$$\forall x, x' \in A : |d_B(\phi(x), \phi(x')) - d_A(x, x')| \leq \varepsilon.$$

Cette définition forme bien une distance à laquelle le nom de Hausdorff est attaché à cause de la définition alternative de d_{GH}

$$d_{GH}(X, Y) = 2 \inf\{d_{Haus, E}(X', Y')\}$$

où $d_{Haus, E}(X', Y')$ est la distance de Hausdorff entre $X' \subset E$ et $Y' \subset E$ deux compacts d'un même espace ambiant E qui sont respectivement isométriques à X et Y .

Théorème 1. *L'espace (\mathbb{K}, d) est un espace métrique polonais (i.e. séparable et complet).*

Nous renvoyons le lecteur et la lectrice à [1, Chapitre 7] pour des détails concernant cet espace.

3.2 – Espaces métriques aléatoires

Une fois ce cadre posé, un espace (métrique compact) aléatoire n'est rien qu'une variable aléatoire à valeurs dans (\mathbb{K}, d_{GH}) , tout comme un nombre aléatoire est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} . Par ailleurs, la convergence d'espaces métriques (compacts) aléatoires est la convergence en loi sur (\mathbb{K}, d_{GH}) : rappelons qu'une suite de variables aléatoires (X_n) à valeurs dans \mathbb{K} converge en loi vers une variable aléatoire X si

$$\mathbb{E}[F(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[F(X)],$$

pour toute $F : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée (par exemple, le cosinus du diamètre de l'espace métrique).

Ce formalisme est bien pratique et permet de donner une définition de l'arbre continu brownien, comme la « limite d'échelle » d'arbres discrets aléatoires renormalisés. En effet, en utilisant le cadre de la Section 2.3, considérons une loi de reproduction μ critique et notons \mathcal{T}_n un arbre de BGW de loi de reproduction μ conditionné à avoir n arêtes. Cet arbre

discret aléatoire, une fois muni de sa distance de graphe peut être vu comme un espace métrique fini (donc compact!), que nous noterons (\mathcal{T}_n, d_{gr}) .

D'après les calculs des deux sections précédentes, nous savons que l'ordre de grandeur des distances dans cet espace métrique aléatoire est d'ordre \sqrt{n} dans le cas d'une loi de reproduction géométrique ou de Poisson. Il est donc légitime de renormaliser la distance par ce facteur et de considérer

$$(\mathcal{T}_n, \frac{1}{\sqrt{n}} d_{gr}).$$

Cet ordre de grandeur apparaît plus généralement dès que la variance de μ est finie (la raison, liée au théorème central limite, sera expliquée un peu plus bas).

Théorème-Définition 1 (Aldous, Le Gall). *Soit μ une loi de reproduction critique de variance σ^2 finie et non nulle. Alors nous avons la convergence en loi suivante au sens de Gromov-Hausdorff*

$$(\mathcal{T}_n, \frac{1}{\sqrt{n}} d_{gr}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(\mathcal{T}, \frac{2}{\sigma} d\right),$$

où (\mathcal{T}, d) est un arbre continu compact aléatoire, appelé arbre continu brownien, et dont la loi ne dépend pas de μ .

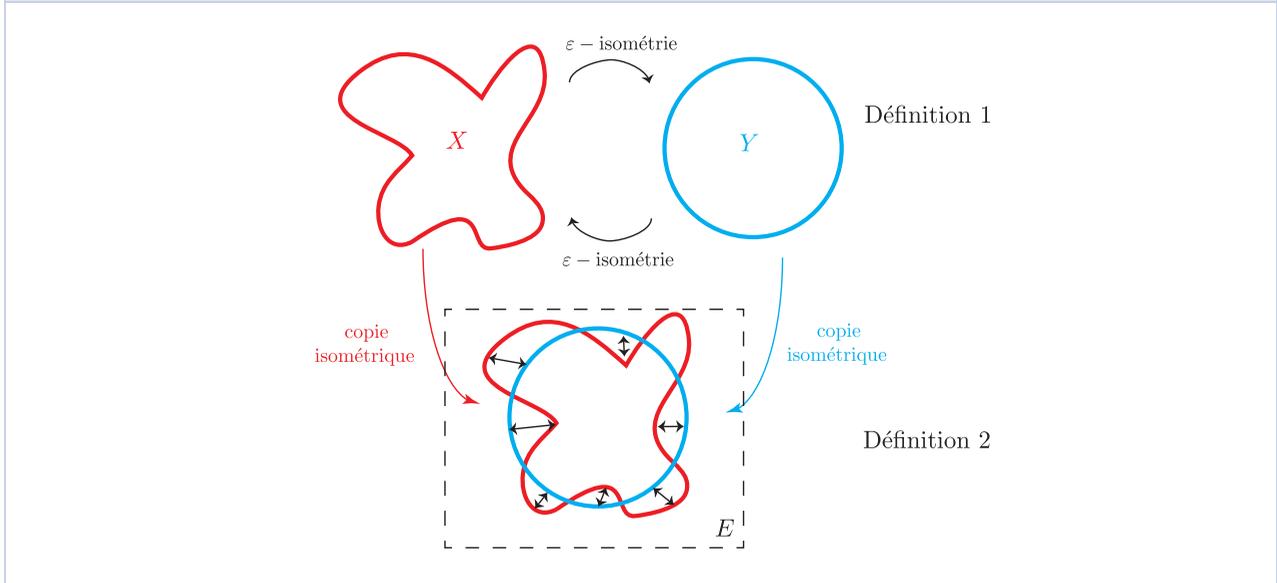
L'arbre continu brownien \mathcal{T} , appelé fréquemment CRT (pour « continuum random tree ») dans la littérature, est donc un espace métrique aléatoire (par exemple, son diamètre est aléatoire) mais il possède des propriétés « presque sûres » i.e. vraies avec probabilité 1 :

- \mathcal{T} est p.s. un arbre continu, c'est-à-dire un espace métrique compact, géodésique (c'est-à-dire dans lequel deux points quelconques sont reliés par une unique géodésique) et sans cycle;
- pour tout $x \in \mathcal{T}$, l'espace $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ a au plus 3 composantes connexes;
- la dimension fractale de \mathcal{T} est égale à 2.

3.3 – Et le brownien dans tout ça ?

Apparition du mouvement brownien. À première vue, il n'y a pas grand chose de « brownien » dans la définition de \mathcal{T} . Pour comprendre d'où vient ce nom, nous allons nous intéresser à la fonction de contour $C(\mathcal{T}_n) = (C_s(\mathcal{T}_n))_{0 \leq s \leq 2n}$ (voir figure 6 pour un rappel de la fonction de contour). La quantité $2n$ provient du fait que comme chaque arête est visitée deux fois par la fonction de contour, il faut un temps $2n$ pour

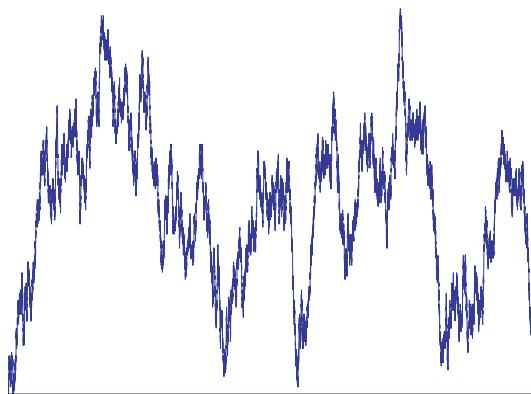
FIGURE 7 – Illustration des deux définitions de la distance de Gromov-Hausdorff



faire le contour de l'arbre. Il se trouve que convenablement renormalisée en espace, cette fonction de contour converge. Plus précisément, la convergence

$$\left(\frac{C_s(\mathcal{T}_n)}{\sqrt{n}} : 0 \leq s \leq 1 \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} \left(\frac{2}{\sigma} e_t : 0 \leq t \leq 1 \right)$$

a lieu en loi dans l'espace $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, où e est une fonction continue aléatoire, appelée *excursion brownienne*, et qui peut informellement être vue comme un mouvement brownien qui part de 0 au temps 0, reste positif sur l'intervalle de temps (0, 1) et revient en 0 au temps 1 (voir ci-dessous pour une simulation).



La raison pour laquelle le mouvement brownien apparaît est que, bien qu'en général la fonction de contour ne soit pas une marche aléatoire³, elle peut cependant bien être approchée par une marche aléatoire, de sorte que la convergence précédente est une application (dans un cadre conditionné) du théorème de Donsker, selon lequel des marches aléatoires convenablement renormalisées convergent vers l'excursion brownienne (il s'agit de l'extension fonctionnelle du théorème central limite). En particulier, le facteur de renormalisation \sqrt{n} est le même que dans le théorème central limite grâce à l'hypothèse de variance finie.

Construction de l'arbre continu brownien. Il est alors naturel de s'attendre à ce que l'excursion brownienne code, en un certain sens, l'arbre continu brownien. Cette intuition a été formalisée par Duquesne & Le Gall, qui ont mimé la construction d'un arbre à partir de sa fonction de contour. Plus précisément, à toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = f(1) = 0$, on associe une pseudo-distance sur $[0, 1]$, notée d_f , et définie par

$$d_f(s, t) = f(s) + f(t) - 2 \min_{u \in [s \wedge t, s \vee t]} f(u).$$

Il est aisé de vérifier que d_f est une pseudo-distance et que les points $s, t \in [0, 1]$ à distance nulle sont ceux qui se font « face » sous le graphe de f . On peut alors

3. Sauf dans le cas des arbres de Catalan, i.e. quand la loi de reproduction est géométrique.

considérer la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ obtenue en posant $s \sim t$ si $d_f(s, t) = 0$. Sur l'espace quotient $[0, 1]/\sim$ la (projection de) la pseudo-distance d_f est maintenant une distance. Il est possible de vérifier que $([0, 1]/\sim, d_f)$ est un espace métrique compact, noté \mathcal{T}_f , qui est un arbre continu. Lorsque la construction précédente est effectuée en partant de l'excursion brownienne, l'arbre aléatoire \mathcal{T}_e est l'arbre continu brownien (\mathcal{T}, d) qui apparaît dans le Théorème-Définition 1 (pour être tout à fait précis, Aldous a démontré en 1991 la convergence des fonctions de contour mentionnée plus haut, Le Gall a reformulé la convergence en termes d'espaces métriques compacts aléatoires, voir en particulier [3]).

Application. La construction de l'arbre continu brownien à partir de l'excursion brownienne permet (outre d'expliquer son nom) de prouver de nombreuses propriétés de \mathcal{T} . En particulier, Rényi et Szekeres ont démontré dans les années 70 que la hauteur maximale Ht_n d'un arbre de Cayley uniforme à n arêtes converge en loi $Ht_n/\sqrt{n} \rightarrow \Theta$ quand $n \rightarrow \infty$ où la loi Θ a pour densité

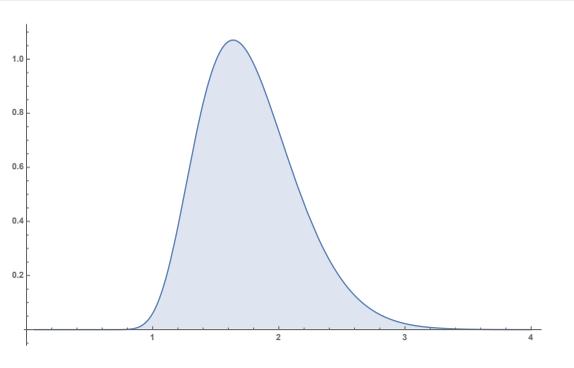
$$4x \sum_{k \geq 1} k^2 (2k^2 x^2 - 3) e^{-k^2 x^2} dx \mathbf{1}_{x>0}.$$

Il était également connu grâce à Chung que le maximum de l'excursion brownienne suivait cette loi. À l'époque, il n'était pas clair de savoir si c'était une coïncidence.

Comme la hauteur d'un arbre est le supremum de sa fonction de contour et que le supremum est une fonctionnelle continue sur $(\mathcal{C}([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$, le Théorème-Définition 1 montre que ce n'est pas une coïncidence : intuitivement, l'excursion brownienne toute entière gouverne la géométrie globale de grands aléatoires de Cayley.

La construction précédente permet également de démontrer les propriétés de l'arbre continu brownien évoquées à la fin de la Section 3.2.

FIGURE 8 – Densité de la loi theta, apparaissant comme la loi de la hauteur du CRT ou comme la loi du supremum de l'excursion brownienne



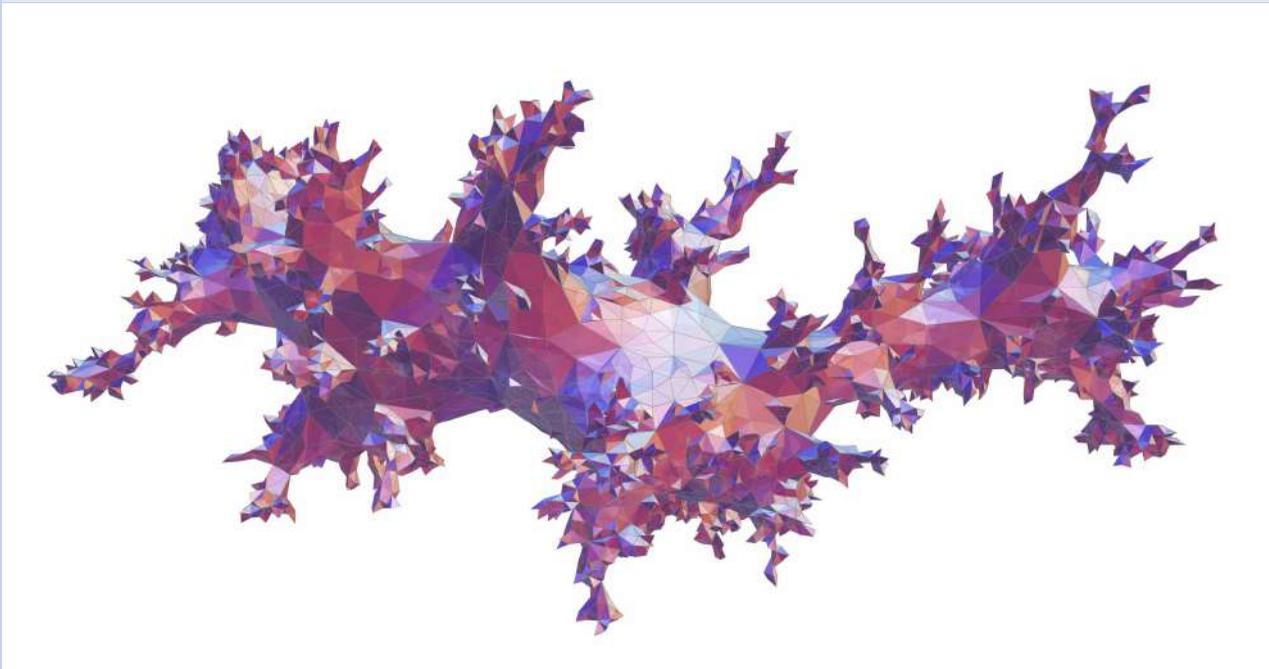
3.4 – À quoi cela sert-il ?

Depuis son introduction par Aldous au début des années 90, l'arbre continu brownien est apparu comme une limite universelle de nombreuses structures géométriques arborescentes aléatoires. Nous avons vu le cas des arbres de Bienaymé-Galton-Watson (englobant le cas des arbres de Cayley, et des arbres plans uniformes). Nous pouvons revenir également sur notre exemple introductif des alcanes grâce à un théorème récent de Haas & Miermont : un alcane uniforme à n arêtes, vu comme un espace métrique converge après remise à l'échelle par $1/\sqrt{n}$ vers le CRT (à un facteur multiplicatif près).

Le CRT apparaît également comme limite d'échelle de structures qui ne sont pas strictement arborescentes dans le discret mais le deviennent à la limite comme les amas de percolation critique en grande dimension (ou dans le graphe complet). En physique, il est connu sous le nom de « branched polymer ».

Le CRT joue un rôle crucial dans la théorie des cartes aléatoires et de la gravité quantique en dimension 2 car c'est la brique de base pour la construction de la *sphère brownienne*, voir [4] et la figure 9 pour une simulation. Mais le plus important, c'est que 20 ans après sa découverte, le CRT garde encore de nombreux mystères.

FIGURE 9 – Une triangulation aléatoire à 3000 sommets. Sa limite d'échelle, la sphère brownienne est construite à partir de l'arbre continu brownien



Références

- [1] D. BURAGO, Y. BURAGO et S. IVANOV. *A course in metric geometry*. 33. Graduate Studies in Mathematics. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001, p. xiv+415. ISBN : 0-8218-2129-6.
- [2] I. KORTCHEMSKI. « Arbres et marches aléatoires ». In : *Arbres et marches aléatoires*. Ed. Éc. polytech., Palaiseau, 2016, p. 1-54.
- [3] J.-F. LE GALL. « Random trees and applications ». *Probability Surveys* (2005).
- [4] J.-F. LE GALL et G. MIERMONT. « Scaling limits of random trees and planar maps ». *Lecture notes for the Clay Mathematical Institute Summer School in Buzios* (July 11 - August 7, 2010).
- [5] J. PITMAN. *Combinatorial stochastic processes*. 1875. Lecture Notes in Mathematics. Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July 7–24, 2002, With a foreword by Jean Picard. Berlin : Springer-Verlag, 2006, p. x+256. ISBN : 978-3-540-30990-1; 3-540-30990-X.



Nicolas CURIEN

Université Paris-Saclay et Institut Universitaire de France
nicolas.curien@gmail.com

Nicolas Curien est professeur au Laboratoire de mathématiques d'Orsay et membre junior de l'IUF. Il travaille sur les propriétés géométriques des grands graphes aléatoires et de leurs limites continues.



Igor KORTCHEMSKI

CNRS & École polytechnique
igor.kortchemski@math.cnrs.fr

Igor Kortchemski est chargé de recherche CNRS au CMAP (Centre de Mathématiques Appliquées à l'École polytechnique). Il s'intéresse au comportement asymptotique de grandes structures discrètes aléatoires.



Les 30 ans de MATH.en.Jeans : une célébration en haut lieu

• L. DI MENZA

Les 22, 23 et 24 mars derniers, l'association MATH.en.Jeans mettait les petits plats dans les grands pour l'édition francilienne de son congrès annuel, en élisant résidence dans les locaux flamboyants neufs de CentraleSupélec au sein du campus Paris-Saclay, sur les hauteurs du plateau du Moulon. Cette école résulte de la fusion en 2015 de deux Écoles d'ingénieurs : l'École centrale Paris et l'École supérieure d'électricité, respectivement fondées en 1829 et en 1894.

Cette association œuvre depuis maintenant 30 ans à proposer une approche différente des mathématiques à des collégiens et lycéens au sein

d'établissements jumelés à des Laboratoires de recherche. Pour cela, elle propose à des élèves volontaires de réfléchir au cours d'un semestre de l'année scolaire à une problématique donnée – il est permis de parler de mini-sujet de recherche –, en collaboration avec des enseignants de leur établissement et des chercheurs ou enseignants-chercheurs à l'initiative de ce sujet. Les participants travaillent alors à la manière de véritables chercheurs, l'idée n'étant pas de répondre à des questions connues d'avance dans un devoir surveillé mais de trouver eux-mêmes les questions à aborder, les paliers successifs et les moyens d'avancer pour tenter de répondre aux problèmes posés.

Vue extérieure du bâtiment de CentraleSupélec



Avec le soutien de la Fédération de mathématiques de CentraleSupélec, la Fondation mathématique Jacques Hadamard, l'Université Paris-Saclay et les Investissements d'Avenir, cette manifestation a pu accueillir plusieurs centaines de participants, dont 350 élèves accompagnés d'enseignants et d'enseignants-chercheurs, dans des conditions idéales. Le congrès a ainsi permis à tous ces chercheurs en herbe de présenter la synthèse de leurs travaux sur des stands de type forum ou lors de sessions parallèles dans des amphithéâtres. Le professionnalisme a été de mise puisque leurs interventions n'avaient rien à envier à celles de leurs aînés du milieu universitaire, et ce, malgré l'appréhension de s'exprimer devant un très large public. Parmi les sujets abordés, citons en vrac l'algorithme de Kaprekar, les dominos anthragoniens, les nombres qui durent, les pyramides habitées, les points de Lagrange pour les voyages spatiaux, les prisons folles, les colonisations de planètes, les équilibres de camemberts, etc. Derrière ces thèmes, un grand nombre de questions mathématiques étaient abordées, parmi lesquelles des choix de stratégies gagnantes pour des jeux, des calculs de quantités, des problèmes de minimisation. Et comme pour illustrer le fait que la recherche peut véritablement coller à l'actualité, un sujet a même porté sur les algorithmes de recommandation pour les questions d'orientation, avec des tests sur une base de données dans le cadre de la réforme des lycées. Il est également remarquable de constater que dans bon nombre de présentations, le logiciel python a été utilisé en temps réel. La connexion entre une démarche mathématique et des algorithmes de calcul nécessitant le recours à l'outil informatique a donc été particulièrement mise en valeur.

En plus de ces présentations d'élèves, des chercheurs confirmés ont donné des conférences plénières portant sur leur activité de recherche.

Le premier jour, Véronique Letort-Le Chevalier (Fédération de Mathématiques de CentraleSupélec) a présenté des travaux orientés vers la modélisation de la propagation des épidémies. Sur la base d'exemples concrets et de jeux de devinettes posées au public, elle a mis en évidence la difficulté de la modélisation, reposant sur les observations d'épidémies survenues dans l'histoire humaine. L'auditoire a pu ainsi constater que ce type d'étude nécessite de s'intéresser à un phénomène concret et de dialoguer avec des épidémiologistes, ce qui illustre bien là que le mathématicien n'est pas cloisonné dans le rôle de celui qui résout des problèmes abstraits mais doit réfléchir à l'écriture de modèles pertinents pour la description du réel, en collaboration avec des chercheurs d'autres communautés.

Le samedi, Edwige Godlewski (Laboratoire Jacques-Louis Lions) a donné une conférence sur les questions de simulation numérique en matière de dynamique des fluides. Elle a évoqué la similitude entre les noms de variables, opérateurs, équations et les lettres, mots, phrases dans le langage en évoquant la progression permettant d'assembler des concepts élémentaires pour assembler des structures de plus en plus riches. Elle a même réussi la gageure de donner à la fin de son exposé des schémas numériques aux volumes finis pour des systèmes de lois de conservation et des résultats de simulations, en insistant sur les limites de validité d'un modèle qui conditionnent la pertinence des résultats obtenus en fonction des ordres de grandeurs auxquels on s'intéresse.

Stands animés par les élèves au cours des sessions en forum



Amphithéâtre des conférences plénières et présentation d'un groupe d'élèves



Le dimanche, Pierre Pansu (Laboratoire de mathématiques d'Orsay) a donné un exposé surprenant à plus d'un titre. Le titre tout d'abord, justement, pas très scientifique : « Mon pire souvenir de congrès de MATH.en.Jeans », s'inspire d'anecdotes survenues en 2002 au congrès d'Orsay et en 2009 à celui de Bordeaux. Il a évoqué en particulier le calcul du nombre de zones formées à l'intérieur d'un disque lorsqu'on trace les segments joignant n points répartis sur le bord du disque.

Pour chercher la solution de ce type de problème, on convient de commencer par un petit nombre de points, puis on tente d'intuiter une formule générale sur la base de ce que l'on a déjà obtenu, à l'instar des jeux de logique où l'on cherche à compléter une suite de nombres à l'aide d'opérations simples. Après sollicitation du public muni de papier et de crayons, il ob-

tient pour des valeurs successives de n les nombres 1, 2, 4, 8, 16... et 31! Ceci constitue l'exemple étonnant d'une réponse qui ne correspond pas à l'intuition que l'on s'en fait sur un petit nombre de points! Le calcul tout aussi étrange du nombre de morceaux formés en donnant n coups de couteaux dans un disque a occasionné une distribution de crêpes au sein de l'auditoire, qui n'en demandait pas tant pour assouvir sa faim de connaissances.

En marge de ces exposés, un débat organisé le samedi en fin de journée a permis aux participants de dialoguer avec des enseignants-chercheurs sur le quotidien de cette profession souvent méconnue et sur les enjeux de la recherche mathématique. Les intervenants ont témoigné à tour de rôle tant de leur cursus que de leur expérience de chercheur.

Les conférenciers plénières du congrès : Véronique Letort-Le Chevalier, Edwige Godlewski et Pierre Pansu



Car il ne saurait être question d'oublier que ce sont des femmes et des hommes qui contribuent à l'avancement de la recherche : au-delà des performances de calcul des ordinateurs, au-delà du théorème et de sa démonstration figurant dans les livres ou des revues spécialisées, la science se nourrit avant tout des expériences humaines vécues par des individus passionnés. À ce titre, lors de l'inauguration prévue le même jour, un hommage émouvant a été rendu à l'un des fondateurs de MATH.en.Jeans, Pierre Duchet, disparu en octobre dernier et qui n'a eu de cesse de s'investir pour l'animation de cette association. Alors que dans pareilles circonstances, une minute de silence est traditionnellement de rigueur, la consigne a été donnée de faire du bruit. Peut-être comme une preuve auditive de la force que donnent des stylos et des idées, peut-être également pour faire entendre la cause des mathématiques à un moment où il est permis de craindre que la récente réforme des lycées ne nuise à l'apprentissage par tous de cette discipline essentielle. Malgré tout, anniversaire oblige, le congrès s'est achevé sur une note festive avec un gâteau partagé par tous, sitôt soufflées les 30 bougies de MATH.en.Jeans.

À l'issue de ces trois jours, tous les participants étaient ravis de cette expérience où les mathématiques étaient vivantes, accessibles, applicables au concret et *passionnantes* – le mot n'est pas trop fort –, à mille lieues de l'image de la discipline poussée

reuse qu'elle renvoie hélas encore trop souvent.

Gâteau d'anniversaire des 30 ans de MATH.en.Jeans



Gageons que certains de ces élèves se retrouveront invités à leur tour à donner des conférences plénières de MATH.en.Jeans et évoqueront peut-être, non sans émotion, le souvenir de ce congrès 2019. Celui du déclic, de la découverte du plaisir à faire des mathématiques, d'en parler et de les vivre. Rendez-vous dans 30 ans pour le vérifier ?

Sites web :

<https://www.mathenjeans.fr>

<https://www.centralesupelec.fr>

ETH zürich

Assistant Professor of Mathematical Physics

→ The Department of Mathematics at ETH Zurich (www.math.ethz.ch) invites applications for the above-mentioned position (non tenure track).

→ Candidates should hold a PhD or equivalent in mathematics or physics, and should have demonstrated the ability to carry out independent research work. At the assistant professor level, commitment to teaching students of mathematics, physics, and other natural sciences and engineering, and the ability to lead a research group are expected. The new professor will be part of the National Centre of Competence in Research NCCR SwissMAP (www.nccr-swissmap.ch).

Assistant professorships have been established to promote the careers of younger scientists. The initial appointment is for four years with the possibility of renewal for a three-year period.

→ **Please apply online: www.facultyaffairs.ethz.ch**

→ Applications should include a curriculum vitae, a list of publications, a statement of future research and teaching interests, and a description of the three most important achievements. The letter of application should be addressed to **the President of ETH Zurich, Prof. Dr. Joël Mesot. The closing date for applications is 31 December 2019.** ETH Zurich is an equal opportunity and family friendly employer, strives to increase the number of women professors, and is responsive to the needs of dual career couples.



LES MATHÉMATIQUES « MODERNES »

par Jean LERAY (1)

On en parle, de la « maternelle » (2) aux « terminales du secondaire ». Or, les mathématiques les plus anciennes et les plus récentes se complètent, comme les organes de tout corps vivant, et la science ignore ce que sont ces mathématiques « modernes ». Ouvrons donc les livres de nos enfants pour l'apprendre.

* *

Commençons modestement par la « première » A.B (non scientifique) ; choisissons (chez Nathan, 1970) la Mathématique de Revuz, ancien élève de l'E.N.S., professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui s'occupe très activement de recyclage et fut un membre influent de la commission Lichnérowicz de réforme des programmes : nous sommes à bonne école pour apprendre ce qu'est, au sens de la mathématique « moderne », cette notion **d'ensemble fini**, qui est désormais la base de l'enseignement de « première » ; voici ce dont il s'agit (t. 1, p. 38-39) :

Un ensemble fini (non vide) E est par définition l'image bijective d'un segment $[1, a]$ de \mathbb{N} (ensemble des entiers naturels).

Deux ensembles finis ont, par définition, même cardinal si et seulement « si ils » (sic !) peuvent être mis en bijection.

On prouve la transitivité de la relation $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$. Puis :

Définition. — Le nombre a est le cardinal du segment (3) $[1, a]$ de \mathbb{N} .

Les professeurs qui enseignent cette nouveauté la débitent hâtivement ; les élèves qu'ils sélectionneront l'auront apprise par cœur ; les autres, c'est-à-dire les élèves intelligents, demandent des explications. C'est pourquoi j'ai dû lire ces deux pages. J'ai constaté qu'elles ne contenaient que des phrases vraies ; elles m'ont pourtant inquiété : ces propos ne s'appuient sur aucune propriété ni des entiers, ni des ensembles finis ; ils s'appliquent donc aussi bien aux segments de la droite \mathbb{R} et aux ensembles infinis ; ils « prouvent » alors ceci : on ne peut mettre en bijection deux segments de droite que s'ils ont même longueur. Ces propos équivalent donc, essentiellement, à l'absurdité suivante : toute carte de France a les dimensions mêmes de la France (1.000×1.000 km) car elle contient

Les mathématiques modernes

• J. LERAY

Mise au net d'une improvisation orale, le 25 février 1971, à l'Institut Henri-Poincaré, au cours de laquelle je n'ai pas su retrouver, dans l'un des deux manuels que je cite, l'erreur qu'il contient effectivement.

(article publié dans la Gazette, G4, octobre 1971, pages 5-11)

On en parle, de la « maternelle »¹ aux « terminales du secondaire ». Or, les mathématiques les plus anciennes et les plus récentes se complètent, comme les organes de tout corps vivant, et la science ignore ce que sont ces mathématiques « modernes ». Ouvrons donc les livres de nos enfants pour l'apprendre.

Commençons modestement par la « première » A.B (non scientifique); choisissons (chez Nathan, 1970) la Mathématique de Revuz, ancien élève de l'E.N.S., professeur à la Faculté des Sciences de Paris, qui s'occupe très activement de recyclage et fut un membre influent de la commission Lichnérowicz de réforme des programmes : nous sommes à bonne école pour apprendre ce qu'est, au sens de la mathématique « moderne », cette notion d'ensemble fini, qui est désormais la base de l'enseignement de « première »; voici ce dont il s'agit (t. 1, p. 38-39) :

Un ensemble fini (non vide) E est par définition l'image bijective d'un segment $[1, a]$ de \mathbb{N} (ensemble des entiers naturels).

Deux ensembles finis ont, par définition, même cardinal si et seulement « si ils » (sic!) peuvent être mis en bijection. On prouve la transitivité de la relation $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$. Puis :

Définition. Le nombre a est le cardinal du segment² $[1, a]$ de \mathbb{N} .

Les professeurs qui enseignent cette nouveauté la débitent hâtivement; les élèves qu'ils sélectionneront l'auront apprise par cœur; les autres, c'est-à-dire les élèves intelligents, demandent des explications. C'est pourquoi j'ai dû lire ces deux pages. J'ai constaté qu'elles ne contenaient que des phrases

vraies; elles m'ont pourtant inquiété : ces propos ne s'appuient sur aucune propriété ni des entiers, ni des ensembles finis; ils s'appliquent donc aussi bien aux segments de la droite \mathbb{R} et aux ensembles infinis; ils « prouvent » alors ceci : on ne peut mettre en bijection deux segments de droite que s'ils ont même longueur. Ces propos équivalent donc, essentiellement, à l'absurdité suivante : toute carte de France a les dimensions mêmes de la France (1.000 x 1.000 km) car elle contient autant de points que la France! Telles sont ces « mathématiques modernes ».

Si les deux pages analysées ne contiennent que des phrases exactes, une lecture très attentive y fait cependant découvrir un mot erroné, qui les rend absurdes : le mot définition, devant la proposition, « a est le cardinal du segment $[1, a]$ »; en jargon moderne, cette proposition devrait être énoncée : « l'application $a \rightarrow \text{Card}[1, a]$ est bijective » et devrait être déduite de l'axiome suivant : un ensemble fini ne peut être mis en bijection avec l'une de ses parties. Dès lors ce propos s'appliquerait à \mathbb{N} sans pouvoir l'être à \mathbb{R} .

De telles considérations sont hors programme : A. Lichnérowicz a des idées saines et claires; il veut qu'on postule ce qui semble évident à l'élève; il veut que physiciens, chimistes et biologistes emploient les termes mathématiques; il ne leur demande certes pas de dire : « Le cardinal de l'ensemble des pieds du cathétomètre est trois », « du quadrupède est quatre ». A. Revuz est un mathématicien très qualifié, plein de dévouement et de bonne volonté; il a été victime de l'esprit des « mathématiques modernes » quand il a contresigné ce galimatias de bribes de raisonnements, étudiant les ensembles finis à partir

1. Le français « moderne », qu'il me faut bien employer, transforme de nombreux adjectifs en substantifs; j'en demande pardon aux lecteurs aimant notre langue.

2. Ce texte ne parle jamais de « segment » de \mathbb{N} , mais toujours de « segment fermé » de \mathbb{N} . Si la notion de « segment fermé » de \mathbb{N} a un sens, celle de « segment » de \mathbb{N} doit en avoir un plus général. Or, ce n'est pas le cas. Qui sait le français ne peut comprendre!

des axiomes des entiers et de raisonnements étudiant les entiers à partir des axiomes des ensembles finis, galimatias qui ne recourt ni à l'un, ni à l'autre de ces systèmes d'axiomes!

Ainsi, « les mathématiques modernes » sont une accumulation de définitions de notions, dont les propriétés caractéristiques (c'est-à-dire les axiomes) ne sont pas énoncées, dont aucune propriété remarquable n'est établie; on ne peut donc ni raisonner logiquement avec elles, ni s'y intéresser. Les apprendre est un exercice de mémoire nocif à l'intelligence.

Les auteurs de programmes n'ont rien voulu de tel en France; ils ont demandé aux enseignants d'employer avec bon sens, dès que l'occasion s'en présente, les termes corrects du langage scientifique contemporain, avant même que leur sens scientifique puisse être rigoureusement défini aux élèves par un système d'axiomes; certains enseignants l'ont bien compris.

D'une ignorance totale de la langue mathématique contemporaine, certains autres enseignants des premier et second degrés sont passés à l'excès opposé; une phraséologie employant de façon défec- tueuse et vaine la terminologie mathématique³.

Confirmons ce diagnostic en passant en « terminale » : lisons⁴ la p. 1 du t. 1 des « Mathématiques élémentaires » de Cognac et Thiberge, inspecteurs généraux⁵ (Masson, 1963). Il y s'agit de la notion d'ensemble, fini ou non. Va-t-on se servir de ce terme seulement pour exprimer des vérités de bon sens? Que non! C'est un terme scientifique; il « faut » donc

s'exercer à l'employer avec le maximum de généralité! Le premier exemple d'ensemble qu'on donne est celui⁶ d'un « ensemble d'ensembles ». Or, c'est dangereux : la notion⁷ d'ensemble de tous les ensembles est absurde et c'est pour échapper à de telles absurdités qu'il faut définir la notion d'ensemble par une axiomatique difficile! Revenons à notre texte : le second exemple que nous lisons est

« L'ensemble des propriétés d'un objet ».

Quel mathématicien a employé cette notion? Quel est l'ensemble des propriétés d'un point?

Un objet a beaucoup de propriétés P . Soyons modeste : formons des classes C contenant chacune toutes les propriétés P de O qui sont équivalentes entre elles; considérons seulement l'ensemble $\{C\}$ de ces classes C . La classe C est caractérisée par l'ensemble E des objets qui ont les propriétés équivalentes P constituant C ; E est un ensemble arbitraire, contenant O , $\{C\}$ est donc en bijection avec l'ensemble $\{E\}$ des ensembles E contenant O ; si nous notons $e = E \setminus O$, $\{C\}$ est donc aussi en bijection avec l'ensemble $\{e\}$ des ensembles e ne contenant pas O . « L'ensemble des propriétés d'un objet » est donc une notion équivalente à la notion absurde de « l'ensemble de tous les ensembles ».

Tournons cette page 1; quelle déception! Désormais on s'abstiendra de considérer d'autres ensembles que les sous-ensembles d'un ensemble choisi une fois pour toutes. Le lecteur, enivré des folles perspectives de la page 1, ne se laisse pas enfermer sans protestation dans ce cadre si étroit que

3. C'est faire des « mathématiques modernes » qu'exercer les enfants à exprimer ainsi que les porcs n'ont pas d'ailes : « L'ensemble des porcs ailés est vide ». Puis-je demander à l'auteur de cette « fiche » si le cardinal de l'ensemble des chevaux ailés est 0 ou 1? Pégase compte-t-il?

On retrouve des porcs ailés dans « L'initiation programmée aux ensembles » de J. Clarke et M.-A. Touyarot (Nathan, 1969); elle s'adresse « aux maîtres, aux élèves des classes du cycle d'observation, aux parents, à tous ceux qui désirent prendre contact avec cet enseignement moderne des mathématiques dites ensemblistes » (p. 3); elle propose les « tests » suivants :

- « Représenter, à l'aide des signes étudiés, l'ensemble des cochons qui ont des ailes » (p. 32).
 - Écrivez la phrase suivante en utilisant des symboles mathématiques « Pasteur appartient à l'ensemble des hommes qui ont découvert le vaccin contre la rage. » (p. 17).
 - De ces deux ensembles, lequel est un ensemble vide : un ensemble d'animaux à quatre pattes; l'ensemble des femmes qui ont été « Président de la République française? » (P. 27).
- Les réponses « correctes » à ces « tests » absurdes sont (p. 58-59-60) :
- « Cochons qui ont des ailes » : Φ ou $[\]$.
 - « Pasteur » \in [Pasteur].
 - « Ensemble des femmes "Président de la République française". »

Ainsi, dans cette « théorie » des ensembles-là, tout homme ayant découvert le vaccin antirabique se nomme, par définition, « Pasteur » et aucun ensemble d'animaux à quatre pattes n'est vide, pas même l'ensemble des mouches à quatre pattes!

Signalons que cette « initiation » dit « qu'un ensemble est fini s'il est possible de dresser la liste de ses éléments » et donne, comme premier exemple d'ensemble infini, « la suite des décimales obtenues en divisant 1 par 3 » (p. 21). Dire que toutes ces décimales sont égales à 3 n'est-ce pas « dresser leur liste »?

4. Pour éviter tout malentendu, nous choisissons maintenant un texte antérieur à la Commission Lichnérowicz.

5. Ouvrage rédigé par un professeur agrégé, à l'esprit ouvert et aux rapports agréables : la critique ci-après ne l'a pas offensé, mais intéressé; je lui en sais gré. J'ai pour MM. Cognac et Thiberge beaucoup d'estime.

6. L'expression employée est « ensemble de collections », ce qui est synonyme.

7. Soit Ω l'ensemble de tous les ensembles; l'ensemble de ses parties pourrait être mis en bijection avec l'une de ses parties, contrairement à un théorème de Cantor.

la page 2 lui impose d'autorité! Quand il s'en plaint à moi, je dois lui dire que c'est afin d'éviter les dangers que présente le fallacieux verbiage de la page 1 ; il me déclare alors que je ne comprends pas les « mathématiques modernes » ; j'en conviens, mais cet aveu me fait perdre la face.

Les « mathématiques modernes » se flattent d'enseigner « la théorie des ensembles ». Or, de même que nous disposons de plusieurs géométries, nous disposons, grâce à Paul Cohen, de plusieurs théories des ensembles ; si l'une était contradictoire, toutes le seraient. Elles diffèrent les unes des autres par des choix d'axiomes différents, mais tous licites.

« Le postulat d'Euclide » n'est pas « une propriété qu'on ne sait malheureusement pas démontrer » ; c'est la définition même de cette géométrie euclidienne, dont l'emploi est souvent commode ; cependant, même pour étudier certaines structures de géométrie euclidienne, il est souvent commode de les assimiler à des structures de géométrie sphérique, de géométrie de Lobatchevsky, etc.

La diversité des théories des ensembles est analogue à celle des géométries. Certes, Bourbaki adopte les théories des ensembles que définit l'axiome de choix ; elles impliquent des propriétés essentielles des espaces de Banach. Mais un très célèbre analyste, préférant que tout ensemble de points de \mathbb{R}^n soit mesurable, en adopte d'autres, où l'axiome de choix ne s'applique qu'aux ensembles dénombrables. Il a le droit d'adopter ce point de vue, qui fut celui de Lebesgue. À nous de ne pas commettre d'erreur en employant leurs divers résultats.

Paul Cohen est venu jadis exposer au Collège de France ces découvertes, alors qu'elles étaient récentes ; j'ai tenté d'annoncer cette conférence, que je savais devoir être profonde et lumineuse, aux promoteurs des « mathématiques modernes » ; le téléphone fut précipitamment raccroché ; ils n'ont rien à apprendre!

L'enseignement supérieur devra donc continuer à dire à bon nombre d'étudiants : « Oubliez d'abord ce que vous avez entendu au lycée. »

Car moderniser l'enseignement des mathématiques est nécessaire ; mais enseigner les « mathématiques modernes » est une illusion.

Il faut affronter ceux qui la propagent ;

Gens qui de leur savoir paraissent toujours ivres,

Riches, pour tout mérite, en babil importun,

Inhabiles à tout, vides de sens commun.

Et pleins d'un ridicule et d'une impertinence

À décrier partout l'esprit et la science.

(11 mars 1672 ; acte IV, scène 3.)

En effet, de Faux Savants ont toujours intrigué ; onze mois avant de mourir, Molière avait le courage de les dépeindre ; ayons celui de les reconnaître.

Nos collègues du premier et du second degré, à très peu d'exceptions près, aiment leur métier, désirent le bien connaître et le bien faire ; mais une réclame de mauvaise aloi en faveur de recyclages les ont persuadés qu'ils doivent tout oublier pour tout rapprendre, que l'objet et le but de leur enseignement est changé : ils s'interrogent avec inquiétude sur « sa finalité ». Il arrive qu'une phraséologie abusive ne leur laisse plus le temps d'enseigner ces fondements mêmes, que l'emploi de termes plus adéquats devrait mieux faire comprendre. Il arrive qu'un usage systématique de quantificateurs leur fasse dénaturer la simplicité des notions fondamentales.

Ils sympathisent avec leurs élèves ; mais ils sont en danger de sélectionner les trissotins. Ils s'en rendent compte moins vite que collègues non mathématiciens, élèves et parents, qui s'irritent⁸.

Les ministres décrètent les programmes sans surveiller leur exécution. Il faut qu'un personnel enseignant, plus ou moins bien formé et facilement séduit par les nouveautés, enseigne des sujets qu'il ignore ; incapable d'interpréter programmes et instructions officielles, il fait aux manuels, « fiches » et recyclages. Or les manuels, plus hâtivement rédigés⁹ que jamais, contiennent plus d'erreurs que jamais, désormais certains d'entre eux interdisent l'accès même des mathématiques aux élèves intelligents. Hors du domaine intellectuel, l'architecte est pourtant responsable de l'exécution de ses programmes.

Les associations de parents d'élèves¹⁰ sont passives : elles tolèrent – quoi qu'il en coûte – que les manuels soient énormes et sans cesse réédités, parce que médiocres et erronés. Pourtant, sauf en matière

8. Voir un article récent dans « le Figaro » (9 février 1971) d'A. Kastler s'attaquant vivement au caractère actuel de l'enseignement mathématique.

9. Le premier manuel cité « conduit à penser » que toute fonction est dérivable (p. 137), que la continuité est l'absence de saut (p. 105), que l'image continue d'un ouvert est ouverte (p. 106, figure).

10. Quant à la « Défense de la jeunesse scolaire », malgré son zèle, son désintéressement et plusieurs mises en garde très précoces, elle commence seulement à s'étonner (Lettre d'information 32, mars 1971).

intellectuelle, toute nourriture défectueuse est remplacée ou remboursée sans discussion.

Déceler les erreurs des manuels est difficile : des compétences variées et des lectures attentives n'y suffisent pas ; souvent seules les révèlent les hésitations des élèves intelligents et des enseignants sachant critiquer une construction mathématique.

Actuellement les manuels ne tiennent aucun compte des critiques très pertinentes qui sont faites d'eux, lors de la préparation¹¹ à l'agrégation et au C.A.P.E.S.

Les I.R.E.M., quand ils ne sont pas nocives, ont un rôle insuffisamment utile : sinon la situation serait saine.

Tout l'enseignement d'un pays centralisé peut être victime des « mathématiques modernes » ; un exemple très proche le prouve.

Les États-Unis ont les premiers douté de notre enseignement traditionnel, si imprégné de souvenirs méditerranéens ; chaque école y est maître de son enseignement, mais parents et enseignants discutent souvent ensemble les réactions des élèves ; 25% des High schools ont actuellement modernisé l'enseignement des mathématiques : la situation n'est pas malsaine.

L'enseignement soviétique est modérément modernisé ; il enseigne efficacement des mathématiques utilisables ; A. Kolmogorov, qui est l'un des plus

profonds et féconds mathématiciens soviétiques, vient souvent s'entretenir avec les élèves pour promouvoir et contrôler cette réforme.

La pédagogie est dangereuse quand elle n'a pas pour moteur et pour but les réactions mêmes des jeunes gens et quand elle prétend jouer un rôle prépondérant dans la formation des maîtres.

Dans un pays centralisé, comme le nôtre continue à l'être, voici ce qui paraît de plus en plus nécessaire : toute difficulté gênant des élèves intelligents, l'un quelconque des enseignants ou des candidats à l'enseignement, devrait être signalée à des mathématiciens très qualifiés, seuls capables d'en analyser la nature profonde ; leur réponse devrait être éventuellement communiquée à l'auteur d'un manuel ou de « fiches » ; s'il n'en tenait pas compte, son attitude devrait être signalée à tous les enseignants ; s'il refusait de rectifier d'urgence une erreur scientifique patente, les associations de parents d'élèves devraient être alertées. Des modifications de programme ou d'instructions officielles pourraient résulter de ce travail.

Il devrait être l'activité essentielle des I.R.E.M. ; ceux-ci ne seront en état de s'y livrer correctement que quand les personnes les constituant seront fréquemment renouvelées et choisies avec compétence. Ils pourront alors contribuer au succès, actuellement très incertain, de la réforme décrétée.

Références

- [1] J. LERAY. « L'initiation aux mathématiques ». *L'enseignement mathématique* 12, n° 3 (1966), p. 235-241.
- [2] R. ТНОМ. « Les mathématiques « modernes » : une erreur pédagogique et philosophique ? » *L'Âge de la Science* 3, n° 3-4 (1970), p. 225.

11. Les promoteurs des « mathématiques modernes » intriguent actuellement pour enlever la charge de cette préparation à ceux qui l'ont toujours assumée avec intelligence et succès.



LIVRES



MARIO LIVIO



Dieu est-il mathématicien ?

Mario Livio

Odile Jacob, 2016. 288 p. ISBN : 978-2738134745

Mario Livio est astrophysicien et directeur de recherche au Space Telescope Science Institute aux États-Unis. Il s'intéresse aussi à la communication des idées mathématiques et scientifiques. Ainsi a-t-il publié quelques ouvrages grand public, et son livre « Dieu est-il mathématicien ? » est la traduction par Nicolas Witkowski de son « Is God a Mathematician ? » publié en 2009. L'objectif de ce livre est, selon Mario Livio, « de clarifier certaines questions touchant à l'essence des mathématiques, et, en particulier, la nature de la relation entre les mathématiques et le monde que nous observons » (p. 10). Cet ouvrage porte en effet sur la nature des mathématiques – principalement la question de leur découverte ou de leur invention – et sur leur efficacité pour décrire les phénomènes naturels. Il s'inscrit dès lors dans le questionnement soulevé en 1960 par Eugene Wigner à propos de la « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature ».

Il ne faut pas s'arrêter au titre accrocheur du livre, qui vise à capter un large public. Si ce titre peut en séduire certains ou, au contraire, en rebuter d'autres, il ne reflète pas complètement le contenu de l'ouvrage. Ce livre offre essentiellement un panorama chronologique des mathématiques et de leur application dans les sciences empiriques. Les grands noms des mathématiques sont à l'honneur : Archimède, Galilée, Descartes, Newton, Gauss, ou encore Gödel. Comme l'auteur le précise lui-même, « ce livre n'est pas une histoire des mathématiques, mais il suit l'évolution chronologique de quelques idées sur le rôle des mathématiques dans notre appréhension de l'Univers » (p. 10). On avance ainsi dans le temps chapitre après chapitre, et l'on apprend comment différentes notions mathématiques ont été développées au cours de l'histoire et utilisées pour comprendre les phénomènes naturels. Au chapitre 3, l'auteur raconte par exemple comment Archimède s'est intéressé au calcul des aires et des volumes, anticipant ainsi de plusieurs siècles le développement du calcul différentiel et intégral – un calcul qui sera décisif pour le développement des sciences physiques. Au chapitre suivant, il expose comment la géométrie devient algébrique avec Descartes – ce qui permettra de construire les systèmes de coordonnées – ou encore comment Newton en vient à écrire ses *Principia Mathematica* et à formuler en termes mathématiques les lois fondamentales de la physique.

L'ouvrage entretient bien entendu un lien avec la notion de Dieu. L'auteur rapporte à plusieurs reprises comment des savants mathématiciens, tels que Pythagore, Platon, Galilée, ou encore Descartes, ne dissocient pas les mathématiques de la théologie. Par exemple, en s'appuyant sur un célèbre extrait de l'Essayeur de Galilée, Mario Livio estime que celui-ci avait la réponse à la question de l'efficacité des mathématiques, avant même que cette question ne soit formulée : « Pour lui [Galilée], les mathématiques sont tout simplement le langage de la nature. Pour comprendre l'Univers, écrit-il, il faut parler ce langage. Dieu est bien un mathématicien » (p. 81). Mais la notion de Dieu est aussi présente dans le livre sous une forme plus laïque, à travers le platonisme en mathématiques, c'est-à-dire la position philosophique selon laquelle les objets mathématiques existent indépendamment de nous. L'auteur nous apprend ainsi comment certains mathématiciens passés et contemporains adoptent cette position. C'est le cas de G. H. Hardy, un mathématicien du xx^e siècle qui soutient la thèse en ces termes : « Pour moi, et, je suppose, pour la plupart des mathématiciens, il y a une autre réalité, que j'appellerai "réalité mathématique". [...] Je crois que la réalité mathématique nous est extérieure, que

notre rôle est de la découvrir ou de l'observer » (p. 214). Mario Livio essaie ainsi tout au long de son ouvrage d'articuler deux questions : d'un côté, celle du statut des objets et des vérités mathématiques, et de l'autre, celle de l'applicabilité et de l'efficacité des mathématiques dans les sciences empiriques. Pour le dire autrement, la première question est « qu'est-ce que les mathématiques ? » et la seconde, « pourquoi s'appliquent-elles si efficacement à la nature ? ».

Le cœur du livre ne traite pas de front ces deux questions. La majeure partie de l'ouvrage est composée des chapitres 2 à 8 qui retracent, de Pythagore à nos jours, l'histoire de notions mathématiques. Mais à cela s'ajoutent un premier et un dernier chapitre à vocation plus philosophique. Le premier, intitulé « Un Mystère », expose ce double problème de la nature des mathématiques et de leur efficacité dans les sciences. Le dernier énonce la position de l'auteur sur ce problème, dont je souligne ici certains aspects importants. Tout d'abord, l'auteur ne veut pas trancher entre des mathématiques découvertes ou bien inventées. Pour lui, « les mathématiques sont à la fois découvertes et inventées : nous inventons des concepts mathématiques, puis nous découvrons des relations entre eux » (p. 229). L'auteur défend la créativité humaine en ce qui concerne la construction de concepts mathématiques. La naissance des géométries non euclidiennes montre que les mathématiques « sont faites de la main de l'homme » (p. 215). Mais d'un autre côté, l'objectivité des mathématiques nous permet selon lui de parler de découvertes mathématiques en ce qui concerne les relations entre ces concepts. On peut aussi souligner la distinction que Mario Livio met en avant entre une efficacité active des mathématiques dans les sciences empiriques et une efficacité passive (p. 14, puis p. 231 sq.). La première n'est pas si déraisonnable : lorsque les mathématiques sont développées en vue d'être utilisées, il n'est pas surprenant qu'elles finissent pas y arriver. Mais il y a aussi une efficacité passive des mathématiques, celle où des concepts mathématiques trouvent des applications dans les sciences bien longtemps après leur naissance, et parfois dans des domaines complètement inattendus. Ainsi apprend-on au chapitre 8 que la théorie mathématique des nœuds, qui est devenue une branche de la topologie, s'est vue appliquée plus tard à la biologie pour l'étude de l'ADN. Cette seconde efficacité est plus difficile à expliquer. Mais, en reprenant les propos de Richard Hamming, l'auteur souligne – même s'il considère cela comme une partie seulement de l'explication – que nous nous intéressons surtout à ce qui fonctionne ou a fonctionné, en mettant de côté ce qui ne fonctionne pas. Pourtant, il faut bien garder à l'esprit qu'« il y a beaucoup de choses que les mathématiques ne peuvent expliquer » (p. 232). L'auteur souligne aussi que la « validité éternelle » des mathématiques est un argument en faveur de leur efficacité passive. Une fois découvertes, les relations entre concepts mathématiques seront à jamais valables et à disposition des scientifiques : « c'est cette longévité qui permet au mathématicien de choisir l'outil adéquat à sa recherche parmi tous les formalismes existants » (p. 235). Je ne peux passer en revue tous les éléments de cette discussion, mais l'ensemble de ce chapitre 9 sera très utile à ceux qui s'intéressent à ces questions. Un lecteur un peu pressé pourra tout à fait commencer par lire, en priorité, ces deux chapitres 1 et 9, avant de se plonger dans l'approche plus historique des mathématiques qui constitue le reste du livre.

Les sept autres chapitres (du chapitre 2 au chapitre 8) offrent, comme nous l'avons dit, une chronologie des grandes idées mathématiques qui ont contribué à la compréhension des phénomènes naturels. L'auteur avertit lui-même ses lecteurs : il ne s'agit pas d'une « histoire des mathématiques », du moins en un sens académique du terme. Mais ces chapitres regorgent d'éléments biographiques et d'anecdotes, plus ou moins insolites, sur de nombreux mathématiciens du passé. On peut lire par exemple que les pythagoriciens, qui croyaient à l'immortalité de l'âme et étaient végétariens, ne mangeaient pas de haricots. Et les explications avancées à cet interdit iraient de « la ressemblance des haricots avec les testicules jusqu'à l'assimilation du haricot à l'âme, les vents qui accompagnent leur consommation étant vus comme la fuite d'une âme... » (p. 36). Plus sérieusement, on y apprend que Newton a travaillé à la formulation de la force de gravitation et à l'explication du mouvement de la lune, au calme, dans la campagne anglaise, en 1666, car une épidémie de peste avait entraîné la fermeture des collèges (p. 107). On y apprend encore que Grassmann, membre d'une famille de douze enfants et lui-même père de onze enfants, est surtout un linguiste spécialiste du sanscrit et du gothique, mais aussi que Gödel, malgré les recommandations d'Einstein qui l'accompagnait à son examen de naturalisation à Trenton

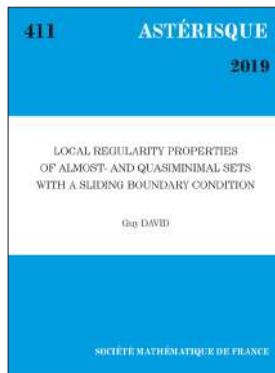
aux États-Unis en 1946, n'a pu s'empêcher de signaler à l'examineur les contradictions internes dans la Constitution américaine (p. 188 sq.). Si la lecture de ces chapitres est très plaisante pour un curieux de l'histoire des mathématiques, il faudra cependant accepter les quelques superlatifs qui jalonnent le récit : c'est en en parlant comme de figures héroïques que l'auteur nous raconte certains épisodes de la vie des mathématiciens – ainsi de ces « magiciens » que seraient Archimède et Galilée.

Soulignons pour finir le caractère pédagogique du livre. De nombreuses notions techniques sont présentées avec succès de manière très accessible. Le paradoxe de Russell, par exemple, est introduit à l'aide du paradoxe du barbier, permettant ainsi à un public non initié de se faire aisément une idée du problème. Enfin, le livre contient de nombreuses illustrations, et le lecteur dispose à la fin de l'ouvrage d'un index, d'une bibliographie et de notes pour accompagner sa lecture.

Vincent ARDOUREL

Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques (IHPT)

Astérisque - dernières parutions



Vol. 411

Local Regularity Properties of almost-and Quasiminimal Sets with a Sliding Boundary Condition

Guy DAVID

ISBN 978-2-85629-906-7

2019 - 380 pages - Softcover. 17 x 24

Public: 65 € - Members: 46 €

We study the boundary regularity of almost minimal and quasiminimal sets that satisfy sliding boundary conditions. The competitors of a set E are defined as $F = \varphi_t(E)$, where φ_t is a one parameter family of continuous mappings defined on E , and that preserve a given collection of boundary pieces. We generalize known interior regularity results, and in particular we show that the quasiminimal sets are locally Ahlfors-regular, rectifiable, and some times uniformly rectifiable, that our classes are stable under limits, and that for almost minimal sets the density of Hausdorff measure in balls centered on the boundary is almost nondecreasing.



Vol. 412

Renormalization in Quantum Field Theory (after R. Borchers)

Estanislao HERSCOVICH

ISBN 978-2-85629-910-4

2019 - 188 pages - Softcover. 17 x 24

Public: 45 € - Members: 32 €

The aim of this manuscript is to provide a complete and precise formulation of the renormalization picture for perturbative Quantum Field Theory (pQFT) on general curved spacetimes introduced by Borchers in [R. E. BORCHERDS, "Renormalization and quantum field theory," Algebra Number Theory 5 (2011) 627–658]. More precisely, we give a full proof of the free and transitive action of the group of renormalizations on the set of Feynman measures associated with a local precut propagator, and that such a set is nonempty if the propagator is further assumed to be manageable and of cut type. Even though we follow the general principles laid by Borchers in *loc. cit.*, we have in many cases proceeded differently to prove his claims, and we have also needed to add some hypotheses to be able to prove the corresponding statements.

Disponible sur le site de la SMF : <http://smf.emath.fr>

*frais de port non compris

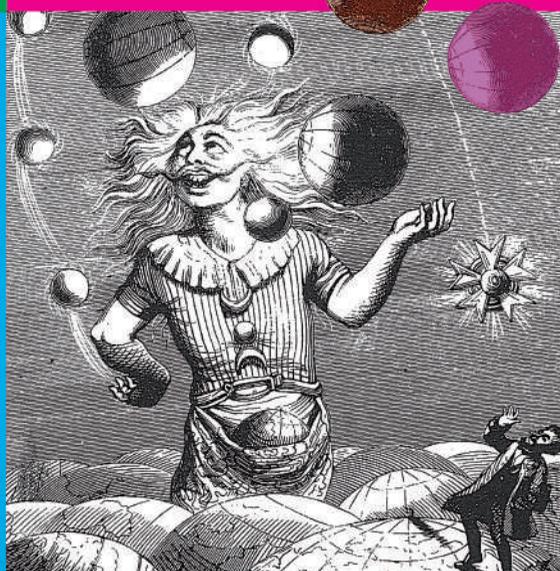


Société Mathématique de France

PRIX D'ALEMBERT

PRIX JACQUELINE FERRAND

Pour encourager la diffusion
des mathématiques vers un large public
deux prix de 2000 euros chacun
décernés tous les deux ans



- **Le prix d'Alembert** récompensera une action destinée à mieux faire connaître et comprendre les mathématiques et leurs développements récents auprès d'un large public

- **Le prix Jacqueline Ferrand** récompensera une opération pédagogique innovante dans le domaine des mathématiques

dossiers à déposer avant le :

31 mars 2020

par les candidats ou par des tiers



SMF - IHP - 11 rue Pierre et Marie Curie 75231 Paris cedex 05
smf.emath.fr/la-smf/prix-dalembert

Société
Mathématique
de France



Société mathématique de France
Bibliothèque nationale de France

un texte, un mathématicien

2020

mercredi 15 janvier 18h30

Julie Delon

Université Paris-Descartes

*Des tas de sable aux pixels,
deux siècles et demi
de transport optimal depuis Monge*

mercredi 26 février 18h30

Olivier Benoist

ENS Paris

*David Hilbert et son
17^{ème} problème :
la tête aux carrés*

mercredi 18 mars 18h30

Marie Thérét

Université Paris-Nanterre

*Hammersley,
feux de forêt,
porosité et réseaux*



{BnF

Bibliothèque François Mitterrand – Grand auditorium
Quai F. Mauriac 75013 Paris – métro : quai de la Gare ou Bibliothèque
Entrée libre – <http://smf.emath.fr/BNF/2020>



LE CALENDRIER pour remuer ses méninges!

Une approche ludique et créative des maths



- Au fil des mois, découvrez **les algorithmes** de notre quotidien.

- Chaque jour, **un défi** à relever en famille ou entre amis

262
QUESTIONS
POUR TESTER
SES
CONNAISSANCES

Livret des réponses offert



« Anne dit que son âge est de 50 ans, 50 mois, 50 semaines et 50 jours. Quel âge aura-t-elle à son prochain anniversaire ? »

PUG FONDATION
BLAISE PASCAL

En librairie et sur pug.fr

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (gazette@smf.emath.fr), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier \TeX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe \LaTeX `gztarticle` fournie par les distributions \TeX courantes (\TeX Live et Mac \TeX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK \TeX), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution \TeX à jour.

Classe \LaTeX : Denis BITOUZÉ (denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr)

Conception graphique : Nathalie LOZANNE (n.lozanne@free.fr)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

