Revue d'histoire des mathématiques
25 (2019), p. 1–107

L'ALGÈBRE SANS LES « FICTIONS DES RACINES » : KRONECKER ET LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES DANS LES *VORLESUNGEN ÜBER DIE ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN*

Cédric Vergnerie

Résumé. — Durant la seconde moitié du dix-neuvième siècle, Leopold Kronecker a donné un cours sur la théorie des équations algébriques, qui constitue ses leçons d'*algèbre*. Dans ces *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, il demande à l'algèbre d'être rendue « autant que possible indépendant[e] de toutes les fictions sur les racines des équations ». Nous allons montrer comment Kronecker, dans le contexte de la théorie des caractéristiques – une généralisation du théorème de Sturm –, aborde le concept de continuité et comment, dans sa pratique, la notion même de racine est interrogée.

Abstract (Algebra without "all the fictions about the roots of equations": the theory of characteristics in Kronecker's *Vorlesungen über die algebraischen Gleichungen*)

For the better part of the second half of the nineteenth century, Leopold Kronecker gave a course on the theory of algebraic equations, which represents his *Algebra* lectures. In this *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, he asked Algebra to be "as far as possible independent from all the fictions about the roots of equations". We will show how Kronecker, in the context of the theory of characteristics—a generalization of Sturm's theorem—, dealt with the concept of continuity and how, in his practice, the very notion of root is questioned.

Texte reçu le 2 juillet 2018, accepté le 3 novembre 2018, révisé le 26 décembre 2018.

C. Vergnerie, Université Paris Diderot – CNRS, Laboratoire SPHERE, UMR 7219, bâtiment Condorcet, case 7093, 5 rue Thomas Mann, 75205 Paris cedex 13, France.
Courrier électronique : `cedric.vergnerie@gmail.com`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55.

Mots clefs : Kronecker, Sturm, Gauss, Équation, Théorème fondamental de l'algèbre, histoire de l'algèbre, théorie des caractéristiques, continuité, racines.

Key words and phrases. — Kronecker, Sturm, Gauss, Equation, Fondamental theorem of algebra, history of algebra, theory of characteristics, continuity, roots.

1. INTRODUCTION

Dans un cours qu'il donne en 1891 à l'université de Berlin, Leopold Kronecker affirme que les « résultats de l'algèbre doivent être rendus autant que possible indépendants de toutes les fictions sur les racines des équations [Kronecker 1891, p. 10] ». C'est ainsi que, dès l'introduction de ses *Leçons sur la théorie des équations algébriques*[1], dans lesquelles on peut imaginer qu'une place importante sera réservée aux solutions de ces équations, Kronecker met en garde son auditoire sur la notion de « racines ». Cette réserve à propos d'une notion aussi fondamentale dans la théorie des équations va avoir des conséquences sur un certain nombre d'autres concepts, comme celui de continuité : ce dernier est en effet habituellement lié – par exemple chez Gauss ou Bolzano – à l'existence d'une racine réelle pour tout polynôme de degré impair.

Si les grands principes philosophiques de Kronecker sur les mathématiques influencent très certainement sa pratique, nous souhaitons ici examiner aussi comment cette dernière rend nécessaire la modification de certains concepts. Ainsi, l'étude de la controverse entre Kronecker et Camille Jordan sur la théorie des formes a permis à Frédéric Brechenmacher de mettre en évidence l'intrication entre la pratique et la pensée mathématique dans le travail de Kronecker. Il montre que la « nature arithmétique » de la théorie des formes amène Kronecker à privilégier des méthodes telles que le calcul de p.g.c.d dans le traitement de ces formes [Brechenmacher 2007]. La conception qu'il se fait des racines d'une équation intervient d'ailleurs dans cette controverse : l'un des arguments de Kronecker à l'encontre du critère de réduction de Jordan est la nécessité d'extraire toutes les racines d'un polynôme, ce qui en général ne peut être réalisé de façon effective. De même, l'étude de la réception de Gauss dans [Goldstein & Schappacher 2007a] et [Goldstein & Schappacher 2007b] est l'occasion pour Catherine Goldstein et Norbert Schappacher de préciser la conception des mathématiques de Kronecker. Notre propos est donc de montrer *in situ*, c'est-à-dire dans la pratique même de Kronecker, comment ce dernier est amené à mobiliser et à transformer l'idée de racine. Pour cela, nous utiliserons les cours sur la théorie des équations algébriques qu'il a professés entre 1872 et 1891, année de sa mort. Ces leçons, contrairement à celles que Kronecker a données sur l'intégration, les déterminants ou l'arithmétique, n'ont pas été publiées. Nous y avons accès uniquement par

---

[1] *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen.* Sauf mention contraire, les traductions proposées des textes en allemand sont les nôtres.

des manuscrits, issus pour la plupart du fonds Hensel et conservés à la bibliothèque de mathématiques de l'IRMA à Strasbourg. Ces manuscrits, qui sont en fait des mises en forme de notes prises par des étudiants, n'ont été pour le moment que rarement exploités : nous les utiliserons dans cet article comme source principale. Dans ses cours, notoirement difficiles et adressés à de jeunes mathématiciens en devenir, Kronecker présente ses recherches les plus récentes : il s'agit d'un matériel privilégié pour voir comment le mathématicien berlinois *fait* des mathématiques. Pierre Dugac a utilisé les cours que Weierstrass avait donnés à Berlin durant la même période pour en « dégager quelques notions essentielles », « en chercher l'origine » et en « suivre [l'] évolution et [les] transformations » [Dugac 1973, p. 43]. Il y montrait l'usage pertinent que l'on peut faire de ces leçons pour étudier la conception des mathématiques de Weierstrass. Nous nous proposons finalement de procéder ici de la même façon avec les cours de Kronecker.

Jules Molk, dans le traité qu'il consacre à la théorie de la divisibilité de Kronecker, affirme :

> Il faut, en un mot, montrer ce que l'on doit entendre par racine d'une équation algébrique, au point de vue arithmétique auquel nous nous sommes placés.
>
> Mais ces considérations m'écarteraient par trop de l'objet que j'ai principalement en vue. Elles rentrent dans un autre ordre d'idées et il convient de les exposer avec la théorie des *Caractéristiques* [Molk 1884, p. 5].

Dans les leçons de Kronecker, le lieu où ces notions de racine et de continuité semblent se cristalliser est le chapitre qu'il consacre au théorème de Sturm et dans lequel, en effet, il développe la *théorie des caractéristiques.* Cette dernière – fruit d'une volonté de généraliser le théorème de Sturm – n'a été que très rarement exposée, et presque toujours à partir de relectures qu'en ont faites des mathématiciens à la fin du XIX^{e} siècle. Dans son histoire du théorème de Sturm, Hourya Sinaceur remarque que :

> Du côté de la recherche, [*le théorème de Sturm*] ne resta pas (...) lettre morte. Il fut suivi, en effet, par toute une série de mémoires ou d'articles visant à l'améliorer ou le transformer de la plume des plus grands mathématiciens comme Sylvester, Cayley, Hermite ou Kronecker, et aussi de moins grands comme Borchardt ou Darboux. Il engendra ainsi ce que Sylvester a appelé “un cycle d'idées sturmiennes”. Ce cycle s'acheva pourtant, sinon avec les travaux de Sylvester comme celui-ci voulait bien le croire, du moins avec la difficile théorie des caractéristiques de Kronecker [Sinaceur 1988, p. 103].

La théorie des caractéristiques – qui d'après H. Sinaceur clôture le « cycle d'idées sturmiennes »[2] – est le cadre dans lequel Kronecker donne une première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre, théorème dont il dit qu'il est « le plus important de cette première partie, on pourrait presque dire (...) le seul théorème de la théorie des équations algébriques »[3]. Dans un article publié en 1991, Christian Gilain [Gilain 1991] réécrit l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre en remplaçant sa description ternaire usuelle[4], *conjecture – essai de preuve – preuve*, par une distinction entre deux théorèmes : le théorème fondamental de l'algèbre et le théorème de factorisation linéaire[5], c'est-à-dire entre l'existence d'un corps de décomposition d'un polynôme, et donc la *possibilité* de le factoriser dans ce corps par un produit de facteurs simples, et le fait que tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$ admette une racine complexe. Il s'agit là d'une différence fondamentale entre la preuve de l'existence de racines d'un polynôme et la détermination de la nature de celles-ci pour un polynôme à coefficients réels. Il y a deux théorèmes, et donc deux histoires distinctes. À propos de la place de Kronecker dans ces histoires, Gilain affirme :

> Chez KRONECKER, la théorie des équations algébriques apparait unifiée sur la base de son théorème, désigné comme théorème fondamental de l'arithmétique générale et qui est une forme du TFL. L'énoncé classique du TFA est d'ailleurs, lui, écarté par KRONECKER qui, voulant fonder la théorie sur la seule base des nombres rationnels et des constructions finies à partir d'eux, est conduit à restreindre le champ des coefficients des équations et à modifier l'énoncé du problème de l'existence des racines [Gilain 1991, p. 128].

Pourtant, cet « important » théorème est introduit lors de la première partie du cours de Kronecker, dans laquelle les outils pour construire le TFL n'ont pas encore été mis en place. En utilisant les manuscrits de ses cours sur la théorie des équations algébriques, nous allons examiner le cadre dans lequel ce théorème est présenté. Plus particulièrement, à travers l'articulation entre théorème de Sturm, théorie des caractéristiques et théorème fondamental de l'algèbre, nous examinerons la façon dont Kronecker transforme le concept de *racines*, pour finalement s'attacher à leur *séparation*.

---

[2] Hourya Sinaceur reprend ici une expression utilisée par Sylvester dans [Sylvester 1853, p. 486] : « the cycle of Sturmian ideas ».

[3] [Kronecker 1891, p. 268] : (...) *für diesen ersten Teil des wichtigsten, ja, man könnte fast behaupten, einzigen Theorems der Lehre von den algebraischen Gleichungen* (...).

[4] Pour une histoire détaillée de ce théorème, voir [Gilain 1991], [Remmert 1991], [Petrova 1973] ou [Dhombres & Alvarez 2011] et [Dhombres & Alvarez 2013].

[5] TFA et TFL pour reprendre les abréviations de C. Gilain.

2. PRÉSENTATION DES *VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN*

Dans une lettre à son professeur Hjalmar Holmgren, Gösta Mittag-Leffler[6] décrit les enseignements qu'il a suivis à Berlin[7] :

> D'un point de vue scientifique, je suis très satisfait de mon séjour à Berlin. Nulle part je n'ai trouvé autant de choses à apprendre qu'ici. Weierstraß et Kronecker ont tous deux cette particularité, inhabituelle en Allemagne, d'éviter autant que possible les publications imprimées. Il est connu que Weierstraß ne publie presque rien, et Kronecker seulement des résultats sans démonstration.
>
> Les résultats de leurs recherches sont présentés dans leurs leçons. Les mathématiques de notre temps n'ont pas grand-chose qui puisse rivaliser avec la théorie des fonctions de Weierstraß ou l'algèbre de Kronecker. (...)
>
> Autant Weierstraß que Kronecker s'illustrent d'ailleurs par la plus complète clarté et la précision de leurs démonstrations. Ils ont tous deux hérité de Gauss la crainte de tout genre de métaphysique dans la fixation des concepts fondamentaux des mathématiques, et cela donne à leurs démonstrations une simplicité et un naturel que l'on a rarement vus conduits de façon aussi systématique avec un si grand degré de précision [Behnke & Kopfermann 1966, p. 54].

Mittag-Leffler met l'accent sur la nécessité d'avoir accès aux cours de Weierstrass et de Kronecker pour comprendre le contenu de leurs recherches, car leurs articles publiés sont rares ou ne comportent qu'une suite de résultats sans démonstration. Si ces cours se caractérisent, pour Mittag-Leffler, par une grande clarté, Harold Edwards a une opinion différente des travaux publiés par Kronecker :

---

[6] Gösta Mittag-Leffler (1846-1927), qui créa et dirigea les célèbres *Acta Mathematica*, obtient sa thèse, dont le sujet a trait à l'analyse complexe, en 1872 à Upsalla. Ce n'est qu'ensuite, en 1875, après avoir passé quelques temps à Paris, qu'il décide, sur les conseils d'Hermite, de suivre les cours de Weierstraß à Berlin.

[7] Lettre du 16 février 1875 traduite en allemand du suédois dans [Behnke & Kopfermann 1966, p. 54] : Mit meinen Aufenthalt in Berlin bin ich in wissenschaftlicher Hinsicht sehr zufrieden. Nirgends habe ich so vieles zu lernen gefunden wie hier. Weierstraß und Kronecker haben beide die in Deutschland ungewöhnliche Eigenschaft, gedruckte Publikationen, soweit es möglich ist, zu vermeiden. Weierstraß publiziert bekanntlich gar nicht, und Kronecker nur Resultate ohne Beweise.

In ihren Vorlesungen legen sie die Resultate ihrer Forschungen vor. Kaum dürfte wohl die Mathematik unserer Tage etwas aufzuweisen haben, was mit der Funktionentheorie von Weierstraß oder der Algebra von Kronecker wetteifern kann. (...)

Sowohl Weierstraß als auch Kronecker zeichnen sich übrigens durch vollständigste Klarheit und Schärfe beim Beweisen aus. Zugleich haben sie von Gauss die Furcht vor aller Art Metaphysik bei der Fixierung der mathematischen Grundbegriffe geerbt, und dies gibt ihren Deduktionen eine Einfachheit und Natürlichkeit, die man wohl kaum früher so systematisch ausgeführt und mit dem höchsten Grad an Schärfe gesehen hat.

> Surely one of the principal reasons Kronecker is so little studied today (except, it seems to me, by the best mathematicians) is that his works are so very difficult to read. Jordan very aptly called them in 1870 "l'envie et le désespoir des géomètres." This shows that the difficulty we experience today in reading Kronecker's works is not merely the difficulty of reading an old text written in an outdated terminology. Kronecker's difficult style was difficult for his contemporaries, too. I have been working at it for many years, especially his Kummer Festschrift entitled "Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen." I feel my efforts have been rewarded and that I will soon be able to publish papers that will convey something of what Kronecker was doing and that will, I hope, awaken the interest of others in studying Kronecker [Edwards 1988, p. 143].

Les difficultés dont Edwards parle en 1988 restent en partie présentes dans ses *Essays in Constructive Mathematics*[8], et confirment ce qu'il avait déjà écrit dans un article de 1987 lorsqu'il rappelait que Frobenius affirmait qu'à peine trois personnes comprenaient certains travaux de Kronecker[9]. H. Edwards ajoutait alors :

> My impression is that this estimate is generous. I believe there are important passages in Kronecker's work that *no one, ever* has fully understood, other than Kronecker himself [Edwards 1987, p. 29].

Trouvant « le style de présentation de Kronecker dans ses papiers publiés obscur et sans motivation »[10], Edwards a recherché son *Nachlass* [Edwards 1978], espérant trouver dans celui-ci quelques éclaircissements. Malheureusement, comme Pierre Dugac avant lui[11], Edwards n'est pas parvenu à localiser ce *Nachlass.*

Le fin mot de cette énigme se trouve finalement exposé dans un article de 1978 intitulé *On the Kronecker Nachlass,* où Harold Edwards retrace les péripéties de sa quête du *Nachlass* perdu. Nous savons que la tâche de s'occuper du *Nachlass* de Kronecker échut à Kurt Hensel, ancien élève de Kro-

---

8 Les difficultés mentionnées par Edwards concernent notamment la notion de *Modul System,* qui devient très importante dans le travail algébrique de Kronecker à partir de la publication des *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* (Voir [Edwards 2005, p. 5]).

9 Gab es unter seinen Fachgenossen kaum drei, die dem Fluge seiner Gedanken zu folgen vermochten [Frobenius 1893/1968].

10 Ma traduction de [Edwards 1978, p. 425].

11 Pierre Dugac, dans un article consacré aux travaux de Weierstrass et Dedekind, écrit ceci : « Signalons que nous n'avons pas pu trouver trace du *Nachlass* de Kronecker qui serait très utile pour comprendre cette époque (la correspondance de Kronecker avec tous les grands mathématiciens de son temps serait essentielle à cette fin) » [Dugac 1976, p. 11].

necker[12]. Celui-ci, *Privatdozent* à l'université de Berlin après y avoir soutenu sa thèse[13], enseigna à partir de 1901 à l'Université de Marburg.

Dans un premier temps, grâce à Helmut Hasse, un ancien élève de Hensel, et Walter Hayman, petit fils de Hensel et professeur de mathématiques à l'Imperial College de Londres, Edwards met la main sur quelques lettres adressées à Kronecker, et acquiert la certitude qu'Hensel possédait bien le *Nachlass* complet à Marburg au moment de sa mort. Il découvre ensuite que ce dernier était en 1943 en la possession de Hasse qui, malheureusement malade et âgé de 78 ans au moment où Edwards l'a interrogé, ne se souvenait absolument pas de ce qu'il avait pu faire de ces documents. Edwards réussit finalement à établir que Hasse confia en 1944 ses papiers les plus importants, et que ceux-ci furent mis en sécurité au fond d'une mine située à vingt kilomètres de Göttingen qui servait aussi de réserve pour des munitions. L'ensemble explosa en 1945 et presque tous les papiers furent perdus. Il semble donc bien que la presque totalité des *Nachlass* de Kronecker et de Hensel ait été détruite de cette façon.

Si les difficultés pour lire les textes de Kronecker ne peuvent pas être envisagées comme une caractéristique intrinsèque de son travail, il est certain que les notes de cours permettent d'éclairer certains de ses articles. Car l'une des difficultés est bien sûr d'interpréter rétrospectivement Kronecker, en particulier après la domination presque exclusive du structuralisme dans les mathématiques du XX^e^ siècle, et la mise en contexte est nécessaire pour approcher ces textes. Il ne faudrait pas non plus penser que l'œuvre de Kronecker n'a été ni lue ni comprise, et de nombreuses recherches récentes ont montré son influence dans les travaux de ses contemporains. Ainsi par exemple ses recherches autour de la « théorie de Galois » auront une influence notable à la fois en France avec Jules Molk, Jules Tannery ou Émile Picard et en Allemagne avec Felix Klein ou Heinrich Weber[14]. De même, de nombreux liens existent entre ses travaux et ceux d'Hermite sur les fonctions elliptiques[15].

Pour circuler dans les mathématiques de Kronecker et mettre en évidence le chemin qui l'amène à reconsidérer la notion de racine, la carte

---

12 Hensel lui-même l'affirma dans les introductions des éditions des œuvres de Kronecker. De plus, dans une lettre de Fuch publiée par Biermann dans son célèbre *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität*, adressée au ministre von Zedlik et datant de 1892, on trouve la demande de promotion d'Hensel au titre de *Extraordinarius* mentionnant l'attribution de cette tâche à ce dernier.

13 Sur l'histoire, compliquée, de la carrière de Hensel on pourra lire [Petri 2011].

14 À ce propos, on pourra lire [Brechenmacher 2011a] et [Brechenmacher 2011b].

15 À ce sujet, voir [Goldstein 2011a] et [Goldstein 2011b].

que nous nous proposons de suivre est sa série de cours sur la théorie des équations algébriques. L'accès à ces derniers se fait à partir de manuscrits[16] : contrairement à la plupart des autres cours que Kronecker a professés à Berlin, les *Vorlesungen über die Theorie der algebraichen Gleichungen* n'ont pas fait l'objet d'une édition[17]. Avant d'explorer plus en détail ces leçons, commençons par donner une présentation générale des cours de Kronecker, et du contexte de rédaction de ces manuscrits.

2.1. *Kronecker enseignant*

L'université de Berlin a été le lieu de formation de Kronecker, mais aussi celui où il aura passé l'ensemble de sa carrière de chercheur et d'enseignant[18]. Il y professe ainsi ses leçons, pendant 30 ans, sous différents statuts, entre le semestre d'hiver 1862-63 et celui de 1891-92. En 1861, il est élu, sur proposition de Kummer – proposition soutenue par Weierstraß et Borchardt – à l'Académie de Berlin, ce qui lui donne le droit d'enseigner à l'université de Berlin comme *lesendes Akademiemitglied*[19]. Encouragé par Kummer, il utilisera ce droit dès l'année suivante, et continuera jusqu'à sa mort en 1891. En 1864, il devient *Prädikat Professor*, et obtient enfin, en 1883, le statut d'*Ordentlicher Professor*. C'est finalement un lien fort qui unit Kronecker, la *Karl Friedrich-Wilhelm Universität*, les cours qu'il y a donnés et les étudiants qui ont pu y assister.

---

16 Il y a dix manuscrits accessibles de cette « théorie des équations algébriques », qui correspondent à sept sessions différentes : 1872/1873 [Kronecker 1873], 1878/1879 [Kronecker 1879], 1880/1881 [Kronecker 1881b], 1884/1885 ([Kronecker 1885a], [Kronecker 1885b], [Kronecker 1885c]), 1886/1887 ([Kronecker 1887d], [Kronecker 1887c]), 1888/1889 [Kronecker 1889] et 1890/1891 [Kronecker 1891].

17 Hensel, chargé du *Nachlass* de Kronecker, a publié ses cours sur l'arithmétique et les déterminants ([Kronecker 1901] et [Kronecker 1903]). Eugen Netto, ancien élève de Kronecker, a de son côté dirigé la publication de son cours sur les intégrales [Kronecker 1894].

18 L'une des particularités de l'université berlinoise est d'avoir, lors de sa création, accru l'importance de la recherche par rapport à l'enseignement, entre autres en développant un statut d'enseignant qui laisse du temps à la recherche : c'est ce que Gert Schubring appelle « the "dual role" of the teacher-researcher » [Mehrtens et al. 1981, p. 116]. Par ailleurs, entre sa thèse soutenue en 1845 et le début de ses enseignements en 1861, Kronecker aura eu une autre activité qui le retiendra dix ans à Liegnitz : il devra, à la mort de son oncle, s'occuper des affaires familiales. Il se mariera en 1848 avec sa cousine, Fanny Prausnitzer, et lorsqu'il retournera en 1855 à Berlin, il sera suffisamment à l'aise financièrement pour ne pas avoir à chercher un emploi rétribué (on pourra lire [Biermann 1981]).

19 On pourra lire à ce sujet [Biermann 1973, p. 100].

2.1.1. *Une publication souhaitée*

Hensel, dans l'introduction qu'il rédige pour le second tome de l'édition des *Vorlesungen*, explique que Kronecker lui-même souhaitait que ses leçons servent de base à une publication[20] :

> Kronecker lui-même m'a souvent et de façon détaillée parlé du dessein qu'il avait de faire publier ses leçons ; mais il insistait toujours sur le fait qu'il fallait pour cela encore les retravailler entièrement et les organiser. La valeur et l'attrait des leçons académiques reposent ainsi sur de tout autres qualités que celles d'un livre de cours sur le même sujet. Ici on ne doit pas donner tous les moyens pour l'examen approfondi de domaines entiers, mais l'enseignant doit plutôt éveiller l'enthousiasme pour cette discipline, il doit en quelque sorte introduire les auditeurs à l'intérieur de l'atelier des hommes qui ont réellement fait avancer la science. Ici on peut se passer d'une disposition entièrement rigoureuse, d'une représentation complète de tous les domaines, car cela les étudiants les trouveront plus tard dans les traités et les publications ; ici l'enseignant doit aborder des problèmes stimulants et prometteurs, même si les recherches ne peuvent pas encore être conduites jusqu'à leur achèvement, car justement des esprits réceptifs sont stimulés par de telles questions plus profondément que par des recherches pleinement menées. De plus les auditeurs des leçons de Kronecker étaient déjà en grande partie si bien initiés qu'il pouvait supposer connus de nombreux prérequis qui dans une représentation systématique, auraient nécessairement dû être traités en détail [Kronecker 1901, pp. VIII-IX].

Nous observons dans ce passage l'enthousiasme que souhaite susciter Kronecker dans ses leçons, et la place importante qu'il réserve à l'exposition de ses recherches les plus récentes. Nous possédons aussi, grâce aux ma-

---

20 Kronecker selbst hat über den Plan, seine Vorlesungen herauszugeben, oft und eingehend mit mir gesprochen ; aber er betonte dabei stets, dass sie für diesen Zweck noch ganz wesentlich umgearbeitet und systematisiert werden müssten. Liegt doch der Wert und der Reiz akademischer Vorlesungen in ganz anderen Vorzügen, als der eines Lehrbuches über denselben Gegenstand. Hier sollen nicht alle Hülfsmittel zur Durchforstung des ganzen Gebietes gegeben werden, wohl aber soll der Lehrer die Begeisterung für jene Disziplin wecken, er soll die Hörer gewissermaßen in das Innere der Werkstatt der Männer einführen, welche die Wissenschaft wirklich gefördert haben. Hier kann man auf eine völlig strenge Disposition, auf eine erschöpfende Darstellung des ganzen Gebietes verzichten, denn dies findet der Lernende später in den Lehrbüchern und Abhandlungen ; hier darf der Lehrer auf anregende und aussichtsvolle Probleme eingehen, auch wenn die Untersuchung noch nicht zu einem vollen Abschluss geführt werden kann, denn gerade solche Fragen werden empfängliche Geister viel tiefer zu eigenen Problemstellungen anregen, als vollständig durchgeführte Untersuchungen. Außerdem waren die Zuhörer der Kroneckerschen Vorlesungen großenteils bereits so gut vorgebildet, dass er viele Voruntersuchungen als bekannt voraussetzen konnte, auf die bei einer systematischen Darstellung notwendig ausführlich eingegangen werden musste.

nuscrits des cours de Kronecker, un témoignage direct de son regard sur les notes que prenaient ses étudiants[21] :

> Je souhaite ensuite vous demander si l'un ou plusieurs d'entre vous ont l'envie et la possibilité de préparer d'abord un sténogramme, puis une mise au propre de mes leçons. Peut-être plusieurs peuvent-ils se partager le travail. Pour ceux qui souhaiteraient faire cela pour moi, je vous demande de venir me voir jeudi à 12 heures. Je leur indiquerai alors les conditions plus précises [Kronecker 1885a, p. 16].

Nous ne savons malheureusement pas ce qui a pu se dire à ce rendez-vous, mais il semble bien qu'au moins trois des étudiants ont répondu présent[22]. Plusieurs témoignages corroborent le fait que Kronecker ait en effet souhaité publier ses leçons, mais Hensel précise qu'« après sa mort aucun travail préliminaire pour la réalisation de ce projet n'a été trouvé dans son *Nachlass* »[23]. Dans ce paragraphe, Hensel décrit aussi la forme que devrait prendre un cours aux yeux de Kronecker : nous retrouvons cette volonté d'allier enseignement et recherche qui caractérise l'université de Berlin au XIX^e^ siècle. Nous avons aussi là un témoignage qui nous donne une première information sur la qualité des auditeurs de Kronecker : il s'agit bien d'étudiants avancés dans leurs études et prêts à suivre un cours basé sur des prérequis étendus.

2.1.2. *Des cours difficiles*

En effet, il leur fallait une connaissance assez vaste des mathématiques pour pouvoir suivre un cours dans lequel Kronecker exposait les résultats de ses recherches les plus récentes[24] :

> Ses leçons étaient exclusivement vouées aux objets auxquels il portait ses propres intérêts scientifiques, et ainsi les résultats de ses recherches étaient

21 Ich möchte dann noch die Frage an Sie richten, ob nicht jemand oder mehrere Lust und Vermögen dazu hat, ein Stenogramm und danach eine Ausarbeitung meiner Vorlesung anzufertigen, vielleicht sich mehrere sie die Arbeit teilen. Diejenigen, welche die Idee haben sollten, das für mich zu machen, bitte ich, Donnerstag um 12 Uhr zu mir zu kommen. Ich werde Diesen dann die näheren Umstände mitteilen.

22 Il y a trois rédacteurs différents du manuscrit des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* du semestre d'hiver 1884-85 [Kronecker 1885a].

23 Nach seinem Tode fanden sich in seinem Nachlasse gar keine Vorarbeiten für die Ausführung dieses Planes [Kronecker 1901, p. IX].

24 Seine Vorlesungen waren ausschliesslich den Gegenständen gewidmet, denen er sein eigenes wissenschaftlisches Interesse zugewandt hatte, und so waren seine Forschungsresultate dem Kreise seiner vertrauteren Schüler schon früh bekannt, und seine Vorlesungen gehörten, wenn auch nur den fortgeschrittenen und wissenschaftlich interessirten Schülern verständlich, zu dem Werthvollsten und Eigenartigsten, was die Berliner Universität dem Mathematiker bot.

connus très tôt du cercle de ses étudiants les plus proches, et ses leçons faisaient partie, même si elles n'étaient compréhensibles que par les étudiants avancés et scientifiquement intéressés, de ce que l'université de Berlin avait de plus précieux et de plus particulier à offrir au mathématicien [Weber 1893, p. 15].

Ces cours, par leur contenu, attiraient des mathématiciens venant de toute l'Europe. Adolf Kneser[25], dans un discours écrit pour les cent ans de la naissance de Kronecker, donne une description de l'enseignant qu'il fut, et le décrit comme un orateur enthousiaste et pleins d'esprit[26] :

> Les traits d'esprit, c'était une chose à part entière. Kronecker aimait commencer avec une belle introduction préparée, dans laquelle un ensemble de traits aiguisés, pleins d'esprit étaient entrelacés, qui tombaient dans l'oreille de chaque auditeur, et qui insufflaient à chacun l'agréable illusion qu'il comprenait quelque chose à la question [Kneser 1925, p. 213].

Cependant, la difficulté de ses leçons décourageait beaucoup d'étudiants[27] :

> Les rangées d'auditeurs qui remplissaient au début la pièce s'éclaircissaient vite ; Kronecker supportait ce phénomène récurrent avec calme et sérénité, et il disait qu'il voulait faire accrocher un rideau tiré au milieu de la pièce, de façon à ce que, lorsque l'essaim s'était perdu, le cercle des initiés puisse s'assoir ensemble dans une intimité plus chaleureuse. Kronecker avait une joie infinie à communiquer ses pensées à ces initiés dans des conversations mathématiques [Kneser 1925, p. 213].

Mittag-Leffler, alors étudiant à Berlin, écrit d'ailleurs en 1875 une lettre à Hermite donnant une idée du nombre d'étudiants qui constituent ce cercle :

---

[25] Adolf Kneser (1862-1930) a soutenu en 1884 sa thèse dirigée par Kummer et Kronecker à Berlin où il a suivi les cours de Kronecker.

[26] Ja die Aperçus, das war eine eigene Sache. Kronecker liebte es, mit einer schön gefaßten Einleitung zu beginnen, in die eine Menge scharfgeschliffener, geistvoller Aussprüche eingeflochten waren, die jedem Zuhörer ins Ohr fielen und bei allen die angenehme Illusion erweckten, man verstünde etwas von der Sache.

[27] Die Reihen der Zuhörer, die anfangs den Raum füllten, lichteten sich schnell ; Kronecker ertrug diese sich immer wiederholende Erscheinung mit heiterer Gelassenheit und sagte, er wolle einen Vorhang anbringen lassen, der durch die Mitte des Raumes gezogen werden solle, damit, wenn sich der Schwarm verlaufen habe, der Kreis der Eingeweihten in gemütlicher Enge beisammensitzen könne. Den Eingeweihten gegenüber hatte Kronecker eine unendliche Freude an der Mitteilung seiner Gedanken, am mathematischen Gespräch.

> Une chose étonnante, je trouve, c'est que Monsieur Weierstrass et Monsieur Kronecker peuvent trouver tant d'auditeurs – entre 15 et 20 – pour des cours si difficiles et si élevés... [Dugac 1973, p. 153]

C'est un enseignant n'hésitant pas à mettre dans ses cours les résultats de ses recherches les plus récentes qui est donc décrit par Kneser, Weber et Hensel. S'il perd une grande partie de son auditoire, ceux qui réussissent à le suivre et qui deviendront, pour la plupart, des mathématiciens à part entière, peuvent attendre de lui toute l'aide souhaitée[28] :

> Je voudrais encore noter, que je m'entretiens volontiers avec vous après les leçons, que je vous encourage expressément à venir me voir librement pour toute remarque ou tout doute, et ce directement après la leçon, de préférence les lundis et les jeudis, mais cela est possible les autres jours aussi [Kronecker 1885a, p. 15].

2.1.3. *Les atouts de l'oralité*

Dans certains des manuscrits apparaît l'une de ces « belles introductions préparées »[29], qui nous donne quelquefois un aperçu du point de vue de Kronecker sur ce que doit être un cours à l'université[30] :

> Dans un livre scolaire, l'auteur ne peut pas dire tout ce qu'il est autorisé à garder dans une présentation orale. Et s'il n'y avait qu'une différence, c'est que j'ai ici le droit et peut-être le devoir, de ne pas seulement donner les méthodes qui conduisent au but, mais aussi de vous mettre en garde contre celles qui ne peuvent pas réussir. C'est cette activité négative, cette mise en garde contre la déroute, que seule la parole orale peut transmettre. Oui, nous pouvons même

---

28 Ich möchte noch erwähnen, daß ich mich gerne von Ihnen nach den Vorlesungen sprechen lasse, daß ich Sie ausdrücklich ersuche bei jedem Bedenken, bei jeder Unklarheit ganz frei [sich] an mich zu wenden und zwar stets nach der Vorlesung, am liebsten Montags und Donnerstags, aber es geht auch an den anderen Tagen.

29 Tout particulièrement dans celui sur la théorie des équations algébriques de l'hiver 1884-85 [Kronecker 1885a].

30 In den Lehrbüchern kann der Verfasser nicht alles sagen, was dem mündlichen Vortrag ~~vorbehalten~~ gestattet bleibt, und wäre es nur der Unterschied, daß ich hier das Recht und vielleicht die Pflicht habe, nicht nur die Methoden anzugeben, durch die man zum Ziele gelangt, sondern auch Sie vor denjenigen zu warnen, welche keinen Erfolg haben können. Diese negative Thätigkeit, dieses Bewahren vor den Abwegen ist das, was nur das mündliche Wort geben kann. Ja, man kann fast sagen, daß eine vollendete schriftliche Darstellung gerade das Gegenteil von dem bewirkt, was sie bezweckt. Kaum wird es einen Leser geben, welcher aus einem Satz, der genau so viel besagt, wie er besagen soll, nicht zuerst doch etwas Abgeändertes herausließt. Der mündliche Vortag hat den Vorzug denselben Gedanken-Inhalt unter verschiedenen Formen mehrmals geben zu können, welche wie eine Anzahl Kreise ein Stückchen Gemeinsames haben, und diese Art der Begrenzung ist leichter als die durch nur eine Curve.

> dire qu'une présentation écrite achevée est le contraire complet de ce qu'elle a pour but de servir. Il n'y a que peu de lecteurs qui, d'une phrase qui dit exactement ce qu'elle doit dire, ne lisent pas d'abord quelque chose de différent. L'exposé oral a l'avantage de pouvoir donner le même contenu de la pensée plusieurs fois sous différentes formes, qui comme un nombre de cercles ont une petite partie commune, et il est plus facile de délimiter de cette façon que par seulement une courbe [Kronecker 1885a, p. 2].

La fonction du cours revêt ainsi pour Kronecker une grande importance, en particulier par la possibilité qui lui est laissée d'avancer d'un point à l'autre par de multiples chemins, dont certains, et il insiste sur ce point, n'ont pas d'issue. Il y a une difficulté intrinsèque à comprendre un texte mathématique écrit, que seule une explication orale permet de surmonter. Si une grande partie de cette oralité a certainement été perdue lors de la prise de notes[31], les manuscrits resteront une aide précieuse pour comprendre, et mieux interpréter, certains textes que Kronecker a publiés.

2.2. *Les manuscrits des cours de Kronecker*

Les manuscrits des cours de Kronecker sont donc des notes de cours prises par certains de ses auditeurs qui ont par la suite été mises en forme[32], souvent à la demande de Kronecker lui-même [Kronecker 1901, p. VI]. Nous avons vu que beaucoup de documents appartenant à Hensel avaient été détruits en même temps que le *Nachlass* de Kronecker. Sa bibliothèque, qui contenait environ 1500 volumes, a quant à elle été vendue rapidement après sa mort, en 1941, par sa famille. La *Reichuniversität* de Strasbourg – généreusement dotée car relais de la propagande en territoire récemment conquis – a acquis tous ces volumes. Il semble que les notes de cours personnelles de Kronecker que possédait Hensel aient fini comme le reste de ses documents : au fond de la mine.

La liste des manuscrits dont nous avons connaissance fait apparaître les quatre « grands » cours que donnera Kronecker au cours de sa carrière : la théorie des équations algébriques, la théorie des nombres (ou Arithmé-

---

31 Dans l'introduction du manuscrit [Kronecker 1885a], le rédacteur semble avoir pris en note l'ensemble du discours de Kronecker. La plupart des passages que nous utilisons pour essayer de donner quelques éléments de contexte sur le déroulé de ces leçons ont été probablement barrés en vue de l'édition de ce cours. Si cette dernière avait vu le jour, tous ces éléments en auraient certainement été expurgés. Ce rédacteur, qui ne semble faire aucun tri dans sa prise de note, laissera d'ailleurs sa place à deux autres étudiants pour la suite du cours.

32 Il y vingt-six manuscrits à la bibliothèque de Strasbourg, auxquels nous pouvons ajouter quelques notes de cours de Runge et Kneser, ainsi que deux manuscrits de cours supplémentaires présents à la bibliothèque de Göttingen.

tique), la théorie des déterminants et la théorie des intégrales simples et multiples[33].

Eugen Netto et Kurt Hensel ont édité, sous le titre de *Vorlesungen über Mathematik*, les trois derniers cours. Ils sont tous deux des anciens élèves de Kronecker, et Hensel a été chargé, comme nous l'avons vu, de faire paraître ses œuvres complètes. Netto a publié le premier volume des *Vorlesungen* : *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale* en 1893. Hensel publiera les *Vorlesungen über Zahlentheorie* en 1901 et les *Vorlesungen über Determinantentheorie* en 1903. C'est donc au seul à ne pas avoir été édité que nous nous intéresserons ici, c'est-à-dire à celui sur la théorie des équations algébriques.

2.2.1. *Comment était organisé le cycle des cours de Kronecker ?*

Pour Weierstrass, durant la période pendant laquelle lui-même, Kummer et Kronecker enseignaient à l'université[34] :

> [il a été possible] d'organiser les cours de mathématiques d'après un plan, auquel se joindra plus tard aussi volontairement et avec succès l'appui de forces plus jeunes, de sorte que les étudiants aient la possibilité dans un cursus de deux ans d'écouter une suite considérable d'exposés sur les plus importantes disciplines des mathématiques dans un ordre convenable, y compris un certain nombre qui n'était pas ou peu pratiqué dans les autres universités [Biermann 1973, p. 102].

L'ensemble des cours sera donc organisé sur deux ans[35], et Weierstrass, comme d'ailleurs Kronecker organiseront leur propre cycle à l'intérieur de ce cursus. Le journal interne de la *Königliche Technische Hochschule zu Berlin* publie en 1910 la nécrologie de l'un de ses *Privatdozent*, Eugen Meyer, qui a suivi à Berlin les cours de Kronecker[36] :

---

33 On peut aussi ajouter à cela son cours *Sur le concept de nombre en mathématiques* qu'il a donné en 1891, et que Jacqueline Boniface et Norbert Schappacher ont retranscrit et commenté dans la *Revue d'histoire des mathématiques* [Boniface & Schappacher 2001]. Il n'assura qu'une fois cet enseignement, l'année de sa mort.

34 Durch das Zusammmenwirken von Kummer, Weierstraß und Kronecker wurde es möglich, nach einem umfassenden [...] Plan, dem sich später auch herangezogene jüngere Kräfte willig und erfolgreich anschlossen, den mathematischen Unterricht in der Weise zu organisieren, daß den Studierenden Gelegenheit gegeben ist, in einem zweijährigen Cursus eine beträchtliche Reihe von Vorträgen über die wichtigsten mathematischen Disziplinen in angemessener Aufeinanderfolge zu hören, darunter nicht wenige, die an anderen Universitäten gar nicht oder doch nicht regelmäßig gelesen werden.

35 Parfois une troisième année sera nécessaire pour terminer un cycle.

36 p. 152 de ce journal : Er studierte zuerst in Gießen, wo Pasch, dann in Berlin, wo Kronecker einen entscheidenden Einfluß auf seine geistige Entwickelung ausübte.

> Il a étudié d'abord à Gießen, ensuite à Berlin, où Pasch puis Kronecker ont exercé une influence déterminante sur son développement intellectuel. Kronecker l'a rapidement remarqué et a chargé le jeune étudiant au troisième semestre de la rédaction de ses leçons sur les déterminants, au semestre suivant de celle de sa grande leçon sur les équations algébriques, rédactions qui ont fourni un matériel précieux lors de la publication des *Vorlesungen* de Kronecker.

Deux semestres consécutifs sont donc consacrés aux déterminants, puis à la théorie des équations algébriques. Nous remarquons que nous avons là une fois de plus un témoignage que les manuscrits que nous étudions ont bien été rédigés, au moins dans certains cas, à la demande de Kronecker. Hensel précise cette organisation dans l'introduction du second tome qu'il a consacré à l'édition des leçons de Kronecker[37] :

> Les leçons sur la théorie des déterminants dont je rends ici public le premier volume, forment la deuxième partie du cycle des conférences académiques sur l'arithmétique générale, que Léopold Kronecker a tenues entre 1883 et 1891 à l'université de Berlin. La trame était répartie dans ces trois leçons sur la théorie des nombres, la théorie des déterminants et l'algèbre de sorte que chacune d'entre elles fasse un tout et puisse être comprise sans la connaissance des deux autres [Kronecker 1903, p. V].

Il y a ainsi une volonté de rendre indépendant chacun des cours qu'un même enseignant donne : cela autorisera à ne professer un cours qu'une année sur deux, tout en permettant à l'ensemble des étudiants de les suivre. Si l'on regarde la liste des manuscrits, nous obtenons une image à peu près complète de ce en quoi devait consister l'enseignement de Kronecker, tout au moins les dix dernières années de sa vie : il enseignait en alternance tous les deux ans *Théorie des nombres/Théorie des déterminants* et *Théorie des équations algébriques/Théorie des intégrales.* À cela pouvait s'ajouter parfois un cours de moindre importance.

Kronecker wurde bald auf ihn aufmerksam und beauftragte den jungen Studenten im dritten Semester mit der Ausarbeitung seiner Vorlesungen über Determinanten, im folgenden Semester mit der seiner großen Vorlesung über algebraische Gleichungen, Ausarbeitungen, die bei der Herausgabe der Kroneckerschen Vorlesungen das wertvollste Material geliefert haben.

37 Die Vorlesungen über Determinantentheorie, deren ersten Band ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, bildeten den zweiten Teil in dem Cyklus akademischer Vorträge über allgemeine Arithmetik, welche Leopold Kronecker in den Jahren 1883 1891 an der Berliner Universität zu halten pflegte. Der Stoff war in diesen drei Vorlesungen über Zahlentheorie, Determinantentheorie und Algebra so verteilt, dass jede von ihnen ein Ganzes für sich bildete und ohne Kenntnis der beiden anderen vollständig verstanden werden konnte.

2.2.2. *Qui a rédigé ces cours ?*

Les manuscrits ne sont pas systématiquement signés, mais parfois un nom apparaît. Nous pouvons ainsi citer comme rédacteurs Georg Hettner, Carl David Tolmé Runge, Paul Stäckel, Karl Weltzien, Karl Friedrich August Gutzmer ou Eugen Meyer. Il s'agit toujours d'élèves de Kronecker qui soutiendront leur thèse deux à trois ans plus tard, et qui auront une carrière universitaire. Ce sont donc de jeunes mathématiciens en devenir, compétents, et maîtrisant certainement le contenu mathématique de ces cours. Nous les avons appelés « rédacteurs », mais nous ne pouvons en fait qu'affirmer que ces manuscrits sont tirés de leurs notes : l'identité du calligraphe est incertaine. En effet, il n'était pas rare que l'on fasse appel à des copistes professionnels pour mettre en forme un manuscrit. Pour Runge, nous pouvons comparer l'écriture du cours qui lui est attribué (*Vorlesungen* du semestre d'hiver 1881-82) avec des notes de sa main et il est tout à fait possible qu'il ait lui-même copié le manuscrit. Pour quelques-uns d'entre eux, il y a plusieurs rédacteurs. Par exemple, dans [Kronecker 1885a] il y a au moins trois rédacteurs, et les changements ont lieu à chaque nouveau cours. Nous imaginons sans peine les étudiants de Kronecker s'organiser pour mettre au propre à tour de rôle les notes prises à chaque séance.

2.2.3. *Une source crédible*

Quel statut pouvons-nous donner à ces manuscrits ? Nous ne possédons pas les notes de cours de Kronecker, nous n'avons presque aucune de ses lettres et très peu d'écrits dans lesquels il a exprimé son point de vue sur ceux-ci. Cependant, nous avons toutes les raisons de penser que ces manuscrits, s'ils ne sont pas de la main de Kronecker, correspondent à sa pensée. Déjà, les rédacteurs connus sont, comme nous l'avons vu, de futurs mathématiciens, tous aptes à retranscrire le déroulement des cours. Ensuite, la plupart de ceux-ci viennent du fonds Hensel : il n'y a donc presque aucun doute sur leur authenticité, et nous savons qu'ils ont servi, ou étaient destinés, à une édition des *Vorlesungen*. Enfin Kronecker a souhaité la rédaction de certains d'entre eux, en avait connaissance, et les prenait en compte dans la rédaction de ses articles[38] :

---

38 Ich will im Folgenden an meinen im Monatsbericht, vom Februar 1873 veröffentlichten Aufsatz einige weitere Entwickelungen knüpfen und werde dabei die dort angewendeten Bezeichnungen benutzen, ohne dieselben von Neuem zu erklären. Hierzu schicke ich die Bemerkung voraus, dass ich den ganzen Inhalt der ersten drei Abschnitte sowie das Wesentlichste des auf die Gleichungen vierten Grades bezüglichen letzten Theils schon in meinen Universitäts-Vorlesungen im Januar und Februar 1875 ausgeführt und bei der hier vorliegenden Darstellung desselben mich genau

> Je voudrais dans ce qui suit associer quelques autres développements à mon essai publié dans le *Monatsbericht* de février 1873 et j'utiliserai les mêmes notations que dans ce mémoire sans les expliquer de nouveau. Sur ce point j'indique au préalable que j'ai déjà développé le contenu entier des trois premiers chapitres ainsi que l'essentiel de la dernière partie portant sur les équations du quatrième degré dans mes leçons à l'université en janvier et février 1875, et lors de la présentation se trouvant ici, je me suis bien tenu à la rédaction d'un de mes auditeurs de l'époque, le docteur *Hettner* [Kronecker 1878b, p. 39].

Nous avons vu plus haut d'autres témoignages des interactions entre Kronecker et ces manuscrits : ils sont rédigés à la demande de Kronecker, qui choisit ses étudiants les plus brillants pour effectuer cette tâche. Nous estimons donc que ces manuscrits doivent être représentatifs, sinon du contenu réel, tout au moins du contenu que Kronecker souhaitait faire apparaître dans ses cours. C'est pourquoi, sauf cas particulier, nous choisissons d'attribuer à Kronecker le contenu de ces manuscrits.

2.3. *Les* Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen

Nous possédons dix manuscrits de la « théorie des équations algébriques », qui correspondent à sept sessions différentes entre 1872 et 1891. Il s'agit donc de cours manuscrits rédigés à partir de notes de cours d'élèves de Kronecker. La plupart des rédactions sont en *Kurrentschrift*[39], et font entre deux cents et sept cents pages chacune.

Nous n'avons pas connaissance de l'existence de manuscrits de son cours sur la théorie des équations algébriques datant d'avant 1872. Cependant, dans un article de 1881 intitulé *Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabel*, Kronecker affirme avoir déjà présenté une grande partie des résultats de cet article dans ses cours des semestres d'hiver 1865-66 et 1870-71 [Kronecker 1881a, p. 301]. Or ces notions se retrouvent dans l'ensemble des manuscrits à notre disposition : Kronecker semble bien avoir commencé à travailler sur ces leçons dès ses premières années d'enseignement. La structure des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* évolue au fil des années, en fonction des expériences d'enseignement accumulées et des thèmes de recherche de Kronecker. Il est difficile de trouver des documents qui nous donneraient des indices sur la façon dont se déroulaient exactement les cours de Kronecker à l'univer-

---

an die Ausarbeitung eines meiner damaligen Zuhörer, des Hrn. Dr. *Hettner*, gehalten habe.

39 Le *Kurrentschrift* correspond à la forme manuscrite (et cursive) des diverses formes de gothique utilisées en Allemagne. Elle disparaît progressivement au XX^{e} siècle.

sité de Berlin. Cependant, dans l'un des manuscrits des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*, les « apartés » de Kronecker sur l'organisation interne de ses leçons ont été retranscrits, nous apportant ainsi un précieux témoignage sur leur déroulé : les cours de Kronecker sur la théorie des équations algébriques sont habituellement de six heures hebdomadaires, réparties sur trois jours de la semaine. D'après E. Netto, la durée des cours pouvait être de deux heures, quatre heures ou six heures [Kronecker 1894, p. V] : il s'agit donc là du plus grand format classique de cours proposé par l'université de Berlin, et donc de l'un des « grands cours » que pouvait y suivre un étudiant.

2.3.1. *Permanence de la structure et évolution du contenu*

Lorsque nous observons les grands chapitres des différents manuscrits, nous trouvons finalement peu de changements au cours des années. À une exception près[40], le premier chapitre, plus ou moins développé, consiste en une introduction retraçant l'histoire de l'algèbre. Ensuite, Kronecker fait une introduction, qu'il appelle parfois *introduction concrète* (*sachliche Einleitung* [Kronecker 1885a, p. 38]) dans laquelle il donne quelques définitions, mais exprime aussi son point de vue sur certaines notions. Si le contenu de cette courte partie évolue au fil des ans, elle sera toujours présente.

Une fois ces deux introductions terminées, Kronecker commence systématiquement par présenter les équations du second et du troisième degré. Cette exposition, dont l'ampleur varie de quatre à cent pages, en donne évidemment la résolution, mais est aussi utilisée par Kronecker pour mettre en évidence une méthode, pour introduire un nouveau concept, etc.

Le chapitre suivant est consacré au passage aux équations de degré n. Le travail de Kronecker portera essentiellement sur la manipulation des racines des équations, et en particulier sur les polynômes symétriques des racines des équations. Les outils construits dans cette partie seront fondamentaux pour la suite de son cours, et lui permettront par exemple, comme l'a déjà fait Gauss en 1816, de produire une démonstration du théorème fondamental de l'algèbre. La première grande partie de son cours se termine alors par un chapitre sur le théorème de Sturm qui contient, lorsqu'elle est présente, la *théorie des caractéristiques.* La seconde partie, dont le volume et le contenu évoluent à chaque nouveau semestre,

40 Le manuscrit de 1884-85 donné par le Dr. Thiel [Kronecker 1885b].

contient dès l'hiver 1878-79 des éléments de la théorie des *Gattungen*[41], théorie qui prendra toute sa place après la publication des *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* en 1882 [Kronecker 1882a]. Il apparaît donc immédiatement que la structure, dans son ensemble, évolue très peu :

(1) Introduction historique et définitions préalables
(2) Équations quadratiques et cubiques
(3) Équation de degré n et fonctions symétriques
(4) Le théorème de Sturm (avec ou sans la théorie des caractéristiques)
(5) Théorie des *Gattungen* (ou théorie de l'élimination avant 1882, mais toujours avec les équations abéliennes et les principes de Galois)

Si la structure semble immuable, ce n'est pas le cas du contenu. Comme nous l'avons vu, Kronecker expose les sujets sur lesquels il travaille dans les cours qu'il professe à Berlin. Ainsi, par exemple, le contenu de son article de 1878 sur la théorie des caractéristiques [Kronecker 1878a] n'est pas présent dans le manuscrit de 1872-73, apparaît dans celui de 1878-79, disparaît à partir de 1884 pour réapparaître en 1890-91 : selon les préoccupations mathématiques de Kronecker, certains contenus peuvent être plus ou moins développés.

De même, la publication de son article de 1882 *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* marque un tournant dans la présentation qu'il donne de sa théorie des équations algébriques : il introduit la théorie des *Gattungen*, et réinterprète tout son travail sur Galois et Abel dans les termes de ses nouveaux concepts.

2.3.2. *Une introduction historique*

La presque totalité des cours de Kronecker commence par une introduction, plus ou moins longue, dans laquelle il donne une approche historique de la question qu'il souhaite traiter. Cette approche n'est pas systématique chez les autres enseignants de la *Friedrich-Wilhelms-Universität*[42], ni d'ailleurs dans les cours publiés dans le reste de l'Europe à la même époque[43]. Ainsi, la présence d'un véritable *cours d'histoire des mathématiques*

---

[41] Théorie qui s'apparente à une théorie des extensions de corps. Un « domaine de genre $\mathfrak{G}'$ » (*Bereich der Gattung* $\mathfrak{G}'$ [Kronecker 1882a, p. 252]) est en fait une extension d'un corps de base $\mathbb{Q}(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$, que Kronecker nomme « un domaine de base » (*Stammbereich* [Kronecker 1882a, p. 252]). Pour plus de détails, on pourra lire [Penchèvre 2007].

[42] Ce n'est pas le cas, par exemple, pour les cours de Weierstrass [Weierstrass 1881], [Weierstrass 1882a], [Weierstrass 1882b] et [Weierstrass 1883].

[43] Voir par exemple : [Francoeur 1838], [Serret 1849], [Salmon 1885], [Weber 1895] ou [Netto 1900].

au début de ses leçons est particulièrement remarquable, d'autant plus que pour Kronecker « il n'y a pas d'autre discipline qui contienne comme l'algèbre un enseignement aussi riche dans son histoire »[44].

Il n'y a pas d'évolution à proprement parler pour la partie historique de l'introduction, mais selon les années et les manuscrits, elle est plus ou moins développée et plus ou moins indépendante de la partie consacrée à l'introduction des notations et des concepts. Cette introduction, qui peut dépasser dans certains manuscrits les quarante pages, s'étale quelquefois sur plusieurs séances.

Ce que Kronecker souhaite y faire, c'est présenter « à grands traits l'histoire de l'algèbre, dans laquelle toute l'histoire des mathématiques non mécaniques et géométriques est résumée »[45].

Cette introduction commence par un passage en revue des travaux sur la théorie des équations algébriques depuis Euclide. Il met en avant deux périodes dans cette histoire : avant et après les années 1770. Cette date correspond à la publication de deux traités, l'un de Vandermonde et l'autre de Lagrange ([Vandermonde 1771] et [Lagrange 1771]). Avant cette date, il présente une histoire de l'algèbre qui est une histoire de la résolution algébrique des équations, chaque étape permettant la résolution générale de l'équation de degré supérieur, jusqu'à celle de degré quatre par Ferrari. Kronecker distingue deux problèmes majeurs qui, d'après lui, « ont occupé de préférence pendant deux mille ans les algébristes » [Kronecker 1881b, p. 5]. Le premier, théorique, concerne la résolubilité par radicaux, résolue négativement d'après lui en 1826 par Abel. Un second, pratique, touche au nombre de racines réelles d'une équation entre deux bornes, problème auquel Sturm a répondu en 1829. Cette introduction historique est un exposé chronologique, qui commence en traitant les mathématiques d'Euclide et se termine par celles qui lui sont contemporaines. Kronecker montre une connaissance approfondie de l'histoire des mathématiques, et s'intéresse plus particulièrement aux recherches qui ont eu lieu aux XVIII^{e} et XIX^{e} siècle.

---

44 [Kronecker 1885a, p. 3] : Es enthält nun keine andere Disziplin, wie die Algebra, Lehrreiches in ihrer Geschichte.

45 [Kronecker 1885a, p. 10] : Wenn ich Ihnen morgen in großen Zügen die Geschichte der Algebra vorführen will, in welche die ganze Geschichte der nicht mechanischen und geometrischen Mathematik zusammengefasst ist, werde ich mit der Zeit anfangen, wo in Europa die Zahlzeichen eingeführt wurden und auch die ganze Welt eine neue Aera begann.

3. QUELLE ALGÈBRE ?

On sait qu'entre le début et la fin du XIXe siècle, de profonds changements s'opèrent dans ce qui représentera l'*algèbre* pour les mathématiciens. Non seulement les méthodes, mais aussi les objets même de l'algèbre changent, au point qu'il est extrêmement délicat d'utiliser ce terme pour désigner un contenu spécifique sans tenter de le contextualiser. Au début du XIXe siècle, l'algèbre correspond pour la plupart des mathématiciens à l'étude des équations polynomiales. Cependant, les formes que prennent ces études évoluent tellement au cours du siècle que l'algèbre de 1900 a finalement peu à voir, de par ses méthodes et ses objets, avec celle de 1800. Kronecker, qui produit ses mathématiques pendant la seconde moitié du XIXe siècle, participe activement à cette évolution. Nous allons essayer de rendre compte de sa vision de l'algèbre à partir de ce qu'il en dit dans ses leçons sur la théorie des équations algébriques. Cela nous permettra dans un second temps de montrer comment sa pratique mathématique – dans le cas particulier du chapitre sur le théorème de Sturm que nous étudions ici plus particulièrement – participe à cette vision.

3.1. *L'algèbre comme formation à l'abstraction*

L'algèbre a pour Kronecker une place privilégiée dans son enseignement, car elle permet d'amener l'étudiant à un plus grand degré d'abstraction. En effet, d'après Kronecker, « nous avons affaire à l'abstraction non seulement dans les mathématiques, mais aussi dans toutes les sciences », et après le passage « des nombres aux calculs », un degré d'abstraction supplémentaire est obtenu par le passage « des calculs à l'algèbre »[46]. À propos de la grande difficulté de ses cours, Kronecker affirme[47] :

> Je devrai pour cela exposer votre endurance à un matériel qui semble très abstrait, voire sec, et peu habituel ; mais je sais, et pas seulement par ma propre expérience, que, une fois que l'on s'est habitué, on apprend à reconnaître les beautés partiellement cachées des équations algébriques, telles que

46 [Kronecker 1885a, pp. 1-2] : dann kommt die weitere Abstraktion von der Bestimmtheit der Zahlen zu den Unbestimmten. Diese beiden Schritte sind die zum Rechnen und vom Rechnen zur Algebra.

47 Ich werde dabei an Ihre Ausdauer bei ganz abstracten, fast trocken erscheinenden Materien Ansprüche, und zwar nicht gewöhnliche stellen müssen ; aber ich weiß und nicht bloß aus eigener Erfahrung, daß, wenn man sich hier hinein gewöhnt hat, man die etwas verborgenen Schönheiten der algebraischen Gleichungen erkennen lernt, ebenso wie die der jüngeren mathematischen Theorien, und dabei erwirbt man sich zugleich den großen Vorteil einer vortrefflichen Schulung in mathematischer Abstraction.

> celles des nouvelles théories mathématiques, et en même temps on acquiert le grand avantage d'un excellent apprentissage en abstraction mathématique [Kronecker 1885a, p. 1].

Pour Kronecker, l'algèbre fournit donc « un excellent exercice et une excellente formation en abstraction mathématique »[48], abstraction qui n'est pas le propre des mathématiques, mais qui au contraire est commune à toutes les sciences[49]. Si l'algèbre est particulièrement adaptée à cette tâche, c'est qu'il est a priori plus facile d'y être « pointu et complet »[50]. Mais si l'abstraction présente dans l'algèbre est commune à toutes les sciences, il ne faudrait pas comprendre que Kronecker estime que l'algèbre est une sorte de « logique mathématique »[51] :

> L'algèbre a été nommée la logique des mathématiques mais je ne souhaite pas y souscrire car toute la mathématique est logique et le comprendre et le faire comprendre est somme toute la tâche principale de la science, et notamment celle du professeur des Universités, à savoir celle que je crois devoir réserver à l'enseignant plutôt qu'au manuel [Kronecker 1885a, p. 2].

Il est d'ailleurs possible que Kronecker fasse ici allusion à l'ouvrage que Frege vient juste de publier : *Die Grundlagen der Arithmetik* [Frege 1884] paru en 1884 et dont le sous-titre est *Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.*

3.2. *De la* résolution *à la* théorie *des équations*

Kronecker affirme que[52],

> Dans le calcul on a les règles, dans l'algèbre les lois ; c'est presque comme un pas de l'art à la science [Kronecker 1885a, p. 2].

---

48 [Kronecker 1885a, pp. 2-3] : eine vortreffliche Uebung und Schulung in mathematischer Abstraction.

49 [Kronecker 1885a, p. 1] : « Nous avons affaire à l'abstraction non seulement dans les mathématiques mais aussi dans toutes les sciences. » « Wir haben es in der Mathematik nicht allein, sondern in allen Wissenschaften überhaupt mit der Abstraction zu thun. »

50 [Kronecker 1885a, p. 3] : scharf und vollständig.

51 Die Algebra ist einmal die Logik der Mathematik genannt worden, doch will ich das nicht unterschreiben, denn die ganze Mathematik ist Logik und das Einsicht geben und finden ist wie die Hauptaufgabe der Wissenschaft überhaupt, so insbesondere die des Universitätslehrers und zwar die, welche ich dem Universitäts-Professor den Lehrbüchern gegenüber vorbehalten zu müssen glaube.

52 Beim Rechnen hat man die Regeln, in der Algebra die Gesetze ; es ist das beinahe wie der Schritt von der Kunst zur Wissenschaft.

C'est le passage de la mise en place de techniques de résolution à une vraie théorie des équations que semble vouloir caractériser Kronecker par ces quelques mots. Les leçons de Kronecker ne s'intitulent pas *Vorlesungen über Algebra*, comme d'autres traités du XIX^e siècle[53], mais bien *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen*. Si les équations algébriques sont bien les objets centraux de ses cours, est-ce pour autant que Kronecker voit dans leur étude la totalité de l'algèbre ?

Il répond en partie, dans l'introduction de son cours du semestre d'hiver 1884-85, à cette question[54] :

> Mes leçons doivent, en partant du plus simple, s'étendre aux parties de l'algèbre qui concernent les équations algébriques, soit qu'elles y aient leur fondement, soit qu'elles y trouvent leur but ; pourtant une grande partie de l'algèbre en reste exclue, même si de temps en temps une courte excursion dans tel domaine plus lointain est entreprise. La restriction se trouvant dans le titre est imposée par la grande extension de l'algèbre dont les résultats et les méthodes si divers ne trouvent plus maintenant de place dans une leçon. Une telle leçon pourrait plutôt, même si elle ne contenait que l'essentiel, tant qu'elle n'est pas complétée par des principes entièrement généraux, manquer de cohérence. Déjà dans la partie que je veux aborder, le systématisme n'est pas sans difficulté ; c'est pourquoi je n'annonce qu'un développement aussi systématique que possible. Ce n'est pas une construction comme dans la géométrie d'Euclide ou la théorie des nombres de Gauss, ce n'est qu'une certaine suite de choses ordon-

---

53 Par exemple l'*Algèbre supérieure* de Francoeur [Francoeur 1838], les *Leçons d'algèbre* de Louis Etienne Lefébure de Fourcy [Lefébure de Fourcy 1850], le *Traité d'algèbre supérieure* de Serret [Serret 1849] pour la première moitié du XIX^e siècle, et les *Lessons introductory to the modern higher algebra* de Salmon [Salmon 1885], le *Lehrbuch der Algebra* de Weber [Weber 1895] ou les *Vorlesungen über Algebra* de Netto [Netto 1900] pour la seconde moitié.

54 Meine Vorlesung soll vom Einfachsten ausgehend sich über die Teile der Algebra erstrecken, welche sich auf die algebraischen Gleichungen beziehen, sei es, dass sie hier ihren Entstehungsgrund haben, sei es, dass sie hier ihren Zielpunkt finden ; dabei werden immer große Teile der Algebra ausgeschlossen bleiben, wenn auch hin und wieder ein kurzer Streifzug in ein solches, ferner liegendes Gebiet unternommen werden wird. Die im dem Titel liegende Beschränkung ist durch die große Ausdehnung der Algebra geboten, deren so verschiedenartige Resultate und Methoden jetzt nicht mehr in einer Vorlesung Platz finden. Vielmehr möchte eine solche Vorlesung, wenn sie auch nur das Wichtigste nimmt, so lange sie nicht durch ganz allgemeine Prinzipien ergänzt wird, des Zusammenhanges ermangeln. Schon in den Teilen, welche ich auseinandersetzen will, hat das Systematische nicht geringe Schwierigkeiten ; ich habe deshalb nur eine möglichst systematische Entwicklung angekündigt. Es ist nicht ein Aufbau, wie der der Geometrie bei Euclid oder der Zahlentheorie bei Gauß, es ist nur eine überlegte durch sachliche, methodische und pädagogische Gesichtspunkte bedingte Reihenfolge, in welcher ich Ihnen die Entwicklungen geben werde.

> nées selon un certain point de vue concret, méthodique et pédagogique, dans laquelle je vous donnerai des développements [Kronecker 1885a, p. 1].

L'algèbre de Kronecker ne se limite pas à l'étude des équations algébriques. Cependant, dans le cadre de ses leçons, il décide de se restreindre à ces dernières, que ce soit pour chercher à les résoudre ou pour les prendre comme objet d'étude. Ces restrictions ont deux raisons. Premièrement, l'immensité des domaines qui y trouveraient leur place est telle que le cadre d'un cours semestriel est bien trop étroit pour tous les contenir. Et ensuite, pour réussir à en donner une exposition systématique, il manque une théorie générale qui en serait le liant. Kronecker, décrivant ce qu'il cherche à faire dans ses cours, ajoute[55] :

> Jusqu'à il y a environ cent ans, la résolution des équations algébriques, qui fut aussi bien le motif et le but de l'invention en algèbre, constituait le centre de l'intérêt algébrique. Toutes les recherches algébriques se rattachaient à la résolution des équations algébriques, et toutes étaient élaborées en vue de leur résolution. Avec les larges développements de l'algèbre de ces derniers temps, les points de vue de la recherche sont devenus essentiellement autres. Le titre « Théorie des équations algébriques » n'est habituel que depuis environ une génération, et de même l'est son contenu [Kronecker 1891, p. 1].

La dernière génération, celle qui a su travailler à partir du « livre de tous les livres »[56], a multiplié les « points de vue » sur l'algèbre. Ce changement est caractérisé, selon Kronecker, par le passage du terme de *résolution* à celui de *théorie*. Cette distinction ne permet pas d'englober tout l'algèbre[57] :

> Dans l'ensemble, ce contenu est si immense que ces leçons ne peuvent seulement que promettre d'en donner un extrait. Convient-il d'en distinguer dès le départ par une définition ce qui lui appartient ? C'est tout à fait impossible, de

---

55 Noch vor hundert Jahren bildete die Auflösung der algebraischen Gleichungen, die ja auch Anlass und Ziel der Erfindung der Algebra war, den Mittelpunkt alles algebraischen Interesses. An die Auflösung der Gleichungen knüpften alle algebraischen Untersuchungen an, und alle arbeiteten auf sie hin. In der breiten Entwicklung der Algebra während der neusten Zeit sind die Gesichtspunkte der Forschung wesentlich andere geworden. Wie der Titel : « Theorie der algebraischen Gleichungen » seit einem Menschenalter etwa erst sich eingebürgert hat, so auch der Inhalt.

56 C'est ainsi que Kronecker qualifiait les *Disquisitiones Arithmeticae* [Boniface & Schappacher 2001, p. 219] : « Buch aller Bücher ».

57 Im ganzen ist dieser Inhalt ein so gewaltiger, daß diese Vorlesungen daraus nur einen Ausschnitt zu geben versprechen können. Soll von vornherein durch eine Definition abgegrenzt werden, was in ihn hineingehört? Das ist ebenso unmöglich, wie die Durchführung einer strengen Systematik in seinem Verlaufe. Eine große Reihe von Beispielen bewahrheitet *Dirichlets* Ausspruch, daß es eine einzig wahre Methode in der Analysis nicht giebt.

> même que la parcourir de façon systématique. Une grande série d'exemples confirme les mots de *Dirichlet* disant qu'il n'y a pas une seule véritable méthode en analyse [Kronecker 1891, pp. 1-2].

Il est donc vain de tenter d'en donner une définition. Par contre, en rappelant comment Dirichlet a multiplié les méthodes dans son travail, sans poser de cloisons fictives entre les divers domaines des mathématiques, Kronecker donne l'une des clefs pour comprendre la façon dont il aborde lui-même l'« algèbre ».

3.3. *Une algèbre décloisonnée*

S'interdire des interactions entre les domaines des mathématiques ne fait pas que freiner le travail du chercheur, mais les domaines eux-mêmes se retrouvent en « danger »[58] :

> La partie de l'algèbre à laquelle nous avons affaire ici s'est éloignée du danger d'isolement depuis 1770 ; depuis ce temps elle est en lien étroit avec les autres disciplines mathématiques ; à partir de ce moment-là il s'exerce une interaction plus active entre analyse, géométrie et théorie des nombres d'un côté, et théorie des équations algébriques de l'autre [Kronecker 1887c, p. 2].

La date donnée par Kronecker comme début de ces interactions correspond à la date approximative de la publication de [Lagrange 1771] et [Vandermonde 1771]. Au début du XIX^e^ siècle, l'analyse n'est pas seulement une branche des mathématiques particulièrement féconde, c'est aussi celle qui est en train de remplacer la géométrie comme référence. Et c'est son degré de généralité et d'abstraction qui lui vaut cette place. C'est ainsi qu'en 1796 dans son *Exposition du système du monde*, Laplace écrit : « L'analyse algébrique nous fait bientôt oublier l'objet principal, pour nous occuper de combinaisons abstraites ; et ce n'est qu'à la fin, qu'elle nous y ramène. Mais en s'isolant ainsi des objets, après en avoir pris ce qui est indispensable pour arriver au résultat que l'on cherche ; en s'abandonnant ensuite aux opérations de l'analyse, et réservant toutes ses forces pour vaincre les difficultés qui se présentent ; on est conduit par la généralité de cette méthode, et par l'inestimable avantage de transformer le raisonnement en procédés mécaniques, à des résultats souvent inaccessibles à la synthèse » [Laplace 1835, p. 340]. L'analyse et l'algèbre,

---

58 Der Teil der Algebra, mit dem wir hier zu thun haben, ist seit 1770 der Gefahr der Isolierung völlig entrückt ; seit jener Zeit steht sie in innigem Konnex mit den übrigen mathematischen Wissenschaften ; von jener Zeit macht sich die lebendigste Wechselwirkung zwischen Analysis, Geometrie, Zahlentheorie einerseits und der Theorie der algebraischen Gleichungen anderseits geltend.

selon les circonstances et les auteurs, peuvent se confondre, et on voit là que Laplace encourage, pour progresser en géométrie, l'utilisation des méthodes de l'analyse.

Mais si ces interactions sont vieilles d'un siècle, Kronecker bouscule encore un peu plus les frontières, dont le dépassement n'est pas seulement une source de progrès, mais un « bouleversement » dans la façon de faire des mathématiques, qui « a son fondement dans le rapport de ces leçons avec ceux des leçons précédentes sur la "théorie des nombres" et "la théorie des déterminants"[59] ».

Kronecker a été considéré à plusieurs reprises comme un *algébriste* ou un *arithméticien*[60], sans d'ailleurs que le contenu de ces termes soit explicité. Ce serait une erreur de limiter son travail à un domaine des mathématiques, et d'ailleurs Frobenius ne s'y trompe pas[61] :

> Tous les mathématiciens louent les créations de Kummer en théorie des nombres [...]. Tous connaissent le travail fondationnel de Weierstrass dans la théorie des fonctions [...]. Mais il est bien plus difficile de caractériser rapidement et de façon pertinente la place de Kronecker dans la science, à cause des découvertes d'une grande portée qui lui assureront une gloire durable et qui ne restent pas dans le cadre d'une seule discipline mathématique [Frobenius 1893/1968, p. 8].

L'algèbre de Kronecker est tellement étendue, qu'en dresser les limites est voué à l'échec. Finalement, le terme même d'algèbre perd son sens, et c'est pourquoi Kronecker utilise essentiellement la notion de « théorie des équations algébriques », partie des mathématiques plus facilement identifiable, et qu'il cherche à fondre dans une « arithmétique générale ». Car, comme l'affirme déjà Kronecker en 1861 dans son discours d'entrée à l'Académie des Sciences de Berlin[62],

---

59 [Kronecker 1891, p. 2] : Ihren Grund hat diese Umwälzung in dem Zusammenhange dieser Vorlesungen mit den ihnen vorangehenden über die « Zahlentheorie » und « die Theorie der Determinanten ».

60 Eric Temple Bell le décrit comme « l'un des plus importants algébristes et arithméticiens du XIX^{e} siècle » (*one of the leading algebraists and arithmeticians of the nineteenth century* [Bell 1940, p. 170]) et Felix Klein affirmait qu'il « s'occupait surtout d'arithmétique et d'algèbre » (*er sich vorwiegend mit Arithmetik und Algebra* [Klein 1926, p. 281]).

61 Jeder Mathematiker rühmt Kummer's bahnbrechende Schöpfungen in der Zahlentheorie [...]. Jeder kennt die grundlegenden Arbeiten von Weierstrass in der Theorie der Functionen [...]. Ungleich schwerer ist es, Kronecker's Stellung in der Wissenschaft kurz und zutreffend zu kennzeichnen, weil die weittragenden Entdekkungen, die ihm dauernden Ruhm sichern, nicht in dem Rahmen einer einzelnen mathematischen Disciplin Platz finden.

62 La traduction, tirée de [Boniface 2002, p. 141] est de Jean Dieudonné : *Die Algebra ist insofern nicht eigentlich eine Disciplin für sich, sondern Grundlage und Werkzeug der*

> L'algèbre n'est pas vraiment une discipline en soi, mais un fondement et un outil pour l'ensemble des mathématiques, et son développement rapide dans les dernières années a été en fait suscité et dirigé par les besoins d'autres disciplines mathématiques [Kronecker 1861, p. 387].

Dans l'introduction de son cours de 1890-91, il affirme aussi que l'ensemble de ses leçons « devraient être mises ensemble et elles doivent construire une « arithmétique générale » dans laquelle l'arithmétique des nombres entiers, comme elle est systématisée par *Euclide*, sera étendue aux fonctions de variables indéterminées »[63]. Essayons de donner maintenant un aperçu de ce que signifie pour Kronecker cette arithmétique générale.

3.4. *L'arithmétisation chez Kronecker*

3.4.1. *L'arithmétisation de l'analyse*

À propos de Lagrange, on trouve dans les *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* de Kronecker l'affirmation suivante[64] :

> Il a partout reconnu et mis en avant le côté algébrique ; si bien qu'il a voulu algébriser l'analyse [Kronecker 1885a, p. 26].

Kronecker n'a pas cet « esprit algébrique » [Sinaceur 1991, p. 71], et la direction qu'il suit, persuadé des bienfaits d'une algèbre décloisonnée, sera plutôt celle de l'*arithmétisation* de l'analyse. Le terme « arithmétisation » a été employé à la fin du XIX^e siècle pour décrire diverses tentatives de fondation des mathématiques, et en particulier de l'analyse, sur des bases qui n'étaient plus géométriques. N. Schappacher et J. Boniface rappellent d'ailleurs dans [Boniface & Schappacher 2001] que, selon Jules Molk, le verbe « arithmétiser » (*arithmetisieren*) aurait été employé pour la première fois par Kronecker en 1887 dans son article *Sur le concept de nombre*[65]. Cette définition négative a permis à des programmes très divers de coexister au

---

gesammten Mathematik, und ihre neuere grossartige Entwickelung ist in der That durch das Bedürfnis anderer mathematischer Disciplinen erweckt und gefördert worden.

63 [Kronecker 1891, p. 2] : Mit diesen zusammen sollten und sollen sie bilden eine « allgemeine Arithmetik », in welcher die Arithmetik der ganzen Zahlen, wie sie systematisiert ist von *Euklid*, ausgedehnt wird auf Funktionen unbestimmter Variabeler.

64 Er hat überall die algebraische Seite herauserkannt und hervorgehoben ; das geht so weit, dass er die Analysis algebraisieren wollte.

65 Jules Molk (1857-1914) a suivi les cours de Kronecker à Berlin et a passé sa thèse en 1884 sous sa direction.

sein de ce *mouvement*, auquel Kronecker, à côté de Weierstrass et Dedekind, a participé[66].

Cette arithmétisation est dans un premier temps, au cours du XIX^e^ siècle, celle de l'analyse. On en date en général les prémisses dans le *Rein analytischer Beweis* [Bolzano 1817] de Bolzano et le cours de Cauchy de la même époque [Cauchy 1821], mais son apogée a lieu dans la seconde moitié de ce siècle, avec les cours de Weierstrass et de Kronecker, ainsi que les constructions des réels par Dedekind et Cantor. Kronecker affirme d'ailleurs, dans une lettre datée du 7 août 1883 adressée à Rudolf Lipschitz (1832-1903) que ce travail est celui auquel il aura consacré sa vie[67] :

> À cette occasion j'ai trouvé les fondations longtemps cherchées de toute ma théorie des formes entières qui achève en quelque sorte « l'arithmétisation de l'algèbre », à laquelle j'ai consacré ma vie de mathématicien [Lipschitz 1986, pp. 181-182].

Dans cette affirmation à la tonalité définitive qui fait suite à la publication des *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*, Kronecker semble dire que son travail d'« arithmétisation » de l'algèbre est terminé. Son travail va pourtant se poursuivre, et il s'expliquera quelques années plus tard sur le sens qu'il donne au mot « arithmétique », dans son article intitulé *Sur le concept de nombre*, où il affirme[68] :

> Le mot "arithmétique" ne doit cependant pas être compris dans son sens usuel limité, mais on doit comprendre sous ce terme toutes les disciplines mathématiques à l'exception de la géométrie et de la mécanique, donc nommément, l'algèbre et l'analyse. Et je crois aussi que l'on parviendra un jour à "arithmétiser" le contenu entier de ces disciplines mathématiques, c'est-à-dire à le fonder purement et simplement sur le concept de nombre pris dans son sens le plus étroit et donc à dépouiller à nouveau ce concept des modifications et

---

66 Au sujet de l'arithmétique, B. Petri et N. Schappacher font la remarque suivante : « the term "arithmetization" was in use around 1900 as a generic description of various programmes which provided non-geometrical foundations of analysis, or other mathematical disciplines » [Petri & Schappacher 2007, p. 343].

67 Bei dieser Gelegenheit habe ich das lange gesuchte Fundament meiner ganzen Formentheorie gefunden, welches gewissermassen „die Arithmetisierung der Algebra" – nach der ich ja das Streben meines mathematischen Lebens gerichtet habe – vollendet.

68 Traduction de J. Bonniface et N. Schappacher de : « Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingen wird, den gesammten Inhalt aller dieser mathematischen Disciplinen zu „arithmetisiren" d. h. einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs wieder abzustreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind » [Kronecker 1887b, p. 253].

élargissements le plus souvent provoqués par les applications à la géométrie et à la mécanique [Boniface 1999, p. 54].

Kronecker est lui aussi dans un processus d'« arithmétisation », certainement différent de celui de Weierstraß ou Bolzano, et dont l'une des caractéristiques est de poser comme fondation aux mathématiques le nombre entier[69].

3.4.2. *L'*arithmétique générale

Kronecker propose lors du semestre d'hiver 1889-90 un cours qu'il intitule *Allgemeine Arithmetik. I. Teil (Zahlentheorie)*[70] :

> L'impossibilité de marquer une délimitation entre la théorie des nombres et l'algèbre, ainsi que l'extraction de certaines méthodes de la première dans l'algèbre conduit à une réorganisation substantielle de la théorie des nombres, de sorte qu'il ne semble pas approprié de mettre le nom « théorie des nombres » au sommet de toute cette discipline, mais une nouvelle façon de la désigner est le titre « arithmétique générale », comme cette leçon le porte pour la première fois, bien que la théorie des nombres soit enseignée de cette façon depuis près de 15 ans [Kronecker 1890, p. 2-3].

Kronecker affirme en 1889 qu'il utilise le terme d'« arithmétique générale » dans le titre de l'une de ses leçons pour la première fois, et la lecture de l'introduction de son cours du semestre d'hiver 1887-88 sur la théorie des nombres nous confirme que ce dernier n'est pas décrit comme constituant une partie de cette « arithmétique générale » [Kronecker 1888]. La constitution d'un ensemble de cours réunis sous le titre d'« arithmétique générale » tel que Hensel le publie semble donc assez tardive. L'unité de ses trois grands cours, Kronecker la justifie ainsi en 1889[71] :

---

69 On peut lire à ce sujet le chapitre *On Arithmetization* de Birgit Petri et Norbert Schappacher dans [Petri & Schappacher 2007, p. 343].

70 Die Unabgrenzbarkeit der Zahlentheorie gegen die Algebra und die Entnahme gewisser Methoden der letzteren in die Algebra führten dazu, die Zahlentheorie wesentlich umzugestalten, sodass es auch nicht angemessen erscheint, den Namen „Zahlentheorie" an die Spitze dieser ganzen Disciplin zu setzen, sondern eine neue Bezeichnungsweise ist der Titel „Allgemeine Arithmetik", wie ihn diese Vorlesung zum ersten Male trägt, obgleich Zahlentheorie schon seit nahezu 15 Jahren so gelehrt wird.

71 Ein Fortschritt dieser Theorie könnte dann nach 2 Seiten geschehen : entweder eine Betrachtung der linearen Funktionen mehrerer Veränderlichen oder eine Behandlung von Funktionen einer Veränderlichen von höheren als dem ersten Grade. Die erstere führt uns zur Determinantentheorie, die letztern zur Theorie der algebraischen Gleichungen, die ja nichts Anderes ist als die Theorie der Funktionen einer Verändlichen, welche den Wert 0 haben sollen. Den letzen Teil des Stoffes, der in

> Un développement de cette théorie pourrait alors se produire dans 2 directions : soit en prenant en compte les fonctions linéaires de plusieurs variables soit par un traitement des fonctions d'une variable de degré supérieur à un. Le premier nous conduit à la théorie des déterminants, le second à la théorie des équations algébriques, qui n'est autre que la théorie des fonctions d'une variable, qui devrait avoir la valeur 0. La dernière partie de la substance à traiter en arithmétique générale serait alors constituée des fonctions de plusieurs variables dont le degré dépasse la première [Kronecker 1890, p. 3-4].

Ainsi, la « théorie des équations algébriques » semble être pour Kronecker, au même titre que la théorie des nombres et la théorie des déterminants, une partie de cette « théorie », c'est-à-dire ici ce qu'il nomme l'*arithmétique générale*[72]. Il ajoute, dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques [73] :

> Ce renouvellement a ses fondements dans le rapport de ces leçons avec ceux des leçons précédentes sur la « théorie des nombres » et « la théorie des déterminants ». Celles-ci devraient être mises ensemble et elles doivent construire une « arithmétique générale » dans laquelle l'arithmétique des nombres entiers, comme elle est systématisée par *Euclide*, sera étendue aux fonctions de variables indéterminées [Kronecker 1891, p. 2].

Le regroupement de l'ensemble de ces leçons à l'intérieur d'une *arithmétique générale* est encore à l'état de projet quelques mois avant la mort de Kronecker. Nous n'avons d'ailleurs pas trouvé trace du terme même d'« arithmétique générale » dans son œuvre avant la publication en 1887

---

der allgemeinen Arithmetik zu behandeln ist, würden dann die Funktionen mehrerer Veränderlichen beilden, deren Grad den ersten übersteigt.

72 Kant utilise le terme d'*arithmétique générale* pour désigner l'algèbre : « L'arithmétique générale (*algebra*) est une science si étendue que l'on ne peut nommer aucune science de la raison qui lui soit en cela semblable [...] de plus, les autres parties de la pure *mathesis* attendent leur croissance surtout de l'extension de cette doctrine générale des grandeurs. » ([Kant 1991, p. 327] : lettre de Kant à J. Schultz du 25 novembre 1788). Cependant, si le terme est identique, il ne faudrait pas y voir une filiation : l'algèbre que connaît Kant est celle du milieu du XVIII^e siècle, et comme le montre Frank Pierobon dans [Pierobon 2003], « l'algèbre représente, en quelque sorte, la limite de la conception kantienne des mathématiques ; à partir du moment où réellement et historiquement, l'écriture (algébrique) s'émancipe et devient autonome par rapport à l'image (géométrique) qu'elle est censée symboliser, de nouvelles mathématiques apparaissent que Kant n'a pas eu le temps et-ou l'occasion d'évaluer à leur juste mesure. »

73 Ihren Grund hat diese Umwälzung in dem Zusammenhange dieser Vorlesungen mit den ihnen vorangehenden über die « Zahlentheorie » und « die Theorie der Determinanten ». Mit diesen zusammen sollten und sollen sie bilden eine « allgemeine Arithmetik », in welcher die Arithmetik der ganzen Zahlen, wie sie systematisiert ist von *Euklid*, ausgedehnt wird auf Funktionen unbestimmter Variabeler.

de son article *Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik*, dans lequel il la définit comme étant « la théorie arithmétique des grandeurs entières d'un domaine de rationalité naturel quelconque »[74]. Cette « arithmétique générale » peut apparaître comme le résultat des efforts d'« arithmétisation » de Kronecker, mais sa mise en place est finalement très tardive dans son œuvre : « les résultats de l' "Arithmétique générale" ou de "la théorie arithmétique des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers" » [Boniface 1999, P. 69] sont à examiner à la lumière des travaux qui découleront des *Grundzüge*.

3.5. *Conclusion*

Dans [Brechenmacher & Ehrhardt 2010], Caroline Ehrhardt et Frédéric Brechenmacher montrent à partir de plusieurs études de cas que ce qui est considéré comme algébrique au XIX^{e} siècle dépend amplement du réseau de pratiques mathématiques dans lequel on circule : il est donc nécessaire d'« analyser comment les acteurs eux-mêmes décrivent leur propres activités » [Brechenmacher & Ehrhardt 2010, p. 611]. Dans ses cours sur la théorie des équations, c'est une algèbre centrée autour des notions d'équations et de racines que Kronecker annonce. Mais il n'en dessine pas les contours – contours qui sont « si immenses que ces leçons ne peuvent seulement que promettre d'en donner un extrait » – et il fait appel à tous les outils des « mathématiques pures ». Si ce cours s'inscrit bien dans un mouvement d'arithmétisation, il le fait dans un format qui lui est propre, sans revendication explicite du mouvement d'arithmétisation de l'analyse. Kronecker présente donc une algèbre dont il est impossible de « distinguer dès le départ par une définition ce qui lui appartient ». Ce problème de délimitation est de deux ordres. Tout d'abord, il fait le constat d'un contenu « si immense » que ses « résultats » et ses « méthodes si divers ne trouvent plus maintenant de place dans une leçon »[75]. Ensuite, c'est une algèbre dont la délimitation avec les autres *disciplines* n'est ni pertinente ni souhaitable[76]. Bien plus, il affirme que c'est l'interaction avec la géométrie, l'analyse et l'arithmétique qui a produit les progrès de l'algèbre tout au long du XIX^{e} siècle. Finalement, si Kronecker utilise le terme d'algèbre, c'est aussi pour se placer dans une tradition, et c'est

---

74 [Kronecker 1887a, p. 212] : die arithmetische Theorie ganzer Grössen eines beliebigen natürlichen Rationalitätsbereichs.

75 [Kronecker 1885a, p. 1] : Die im dem Titel liegende Beschränkung ist durch die große Ausdehnung der Algebra geboten, deren so verschiedenartige Resultate und Methoden jetzt nicht mehr in einer Vorlesung Platz finden.

76 Il s'agit du terme employé par Kronecker : *Disciplin.*

ainsi qu'il entame chacun de ses cours par une *histoire de l'algèbre* – *son* histoire de l'algèbre – dans laquelle il raconte comment celle-ci a « échappé aux dangers de l'isolement ». Utilisant sa connaissance encyclopédique des mathématiques de son époque, il produit une algèbre qui s'invite dans toutes les mathématiques, et qui invite toutes les mathématiques à participer à son évolution. Nous comprenons que Kronecker, loin de vouloir en clarifier les limites ou l'établir en tant que discipline, souhaite la décloisonner.

4. LA REPRISE PAR KRONECKER DU THÉORÈME DE STURM

Des deux problèmes qui, selon Kronecker, jalonnent l'histoire des recherches algébriques – la détermination du nombre de racines réelles d'un polynôme et la résolubilité de ces derniers par radicaux – le premier qu'il aborde dans son cours est celui résolu par Sturm. Cette partie est centrale pour notre propos[77], car il s'agit de celle dans laquelle il discute de la nécessité de repenser la notion de *racine*.

Les difficultés rencontrées au XVIIIe siècle pour donner une résolution algébrique générale (c'est-à-dire trouver les racines par une formule explicite) des équations polynomiales poussent la communauté mathématique du début du XIXe siècle à développer des recherches sur les méthodes numériques[78]. Le théorème que Sturm expose ([Sturm 1829a] et [Sturm 1829a]) en 1829 à l'Académie des Sciences de Paris et dont il ne publie une démonstration qu'en 1835 est directement issu de ces travaux [Sturm 1835].

Un travail important a été fait par Hourya Sinaceur sur l'histoire de ce théorème[79], dans lequel elle propose une analyse globale des travaux d'algèbre de Sturm, de leur enracinement dans ceux de Fourier et de Lagrange. Ce que H. Sinaceur montre dans *Corps et modèles*, c'est le mouvement d'*algébrisation* qui a lieu autour de ce théorème, essentiellement par Hermite et Sylvester. Cependant, le chemin qu'elle choisit d'emprun-

77 Le chapitre qui lui est consacré est, dans la plupart des manuscrits, clairement identifié, quelquefois par un titre ([Kronecker 1881b, p. 85], [Kronecker 1885a, p. 236], [Kronecker 1887c, p. 131], [Kronecker 1889, p. 120] et [Kronecker 1891, p. 170]), et cela fait figure d'exception, ou quelquefois par un changement de rédacteur [Kronecker 1885a]. Ensuite, sous une forme ou sous une autre, de façon plus ou moins développée, ce chapitre est présent sans exception dans tous les manuscrits à notre disposition.

78 Voir par exemple le travail de Lagrange de 1870-71 : *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.*

79 Voir [Sinaceur 1988], [Sinaceur 1992], [Sinaceur 1991] et [Sinaceur 2009].

ter conduit à la construction des corps réels par Emil Artin (1898-1962) et Otto Schreier (1901-1923) ainsi qu'à l'utilisation que fera Tarski du théorème de Sturm dans ses travaux de logique. L'angle sous lequel nous l'aborderons ici est différent. Ce sont les lectures de Kronecker de ce théorème qui nous intéressent : sa lecture mathématique, mais aussi sa lecture historique.

Le théorème de Sturm est, quelle que soit l'année, toujours présent dans les *Vorlesungen* et Kronecker en propose trois présentations différentes :

(1) La première est, selon lui, basée sur des considérations « géométriques ».

(2) La seconde utilise la décomposition en fractions continues. Couplée avec le problème d'interpolation de Cauchy[80], elle compose la plus grande partie de son chapitre.

(3) La dernière est basée sur les travaux de Hermite et de Jacobi sur les formes quadratiques.

Nous allons nous intéresser plus précisément à la première qui, le plus souvent[81], constitue l'introduction de Kronecker au théorème de Sturm. Si les deux suivantes représentent l'essentiel du travail de Kronecker pour prolonger l'« algébrisation » du théorème de Sturm, c'est dans la première que les notions de racines et de continuité sont discutées. Pour que l'originalité de la réécriture de Kronecker nous apparaisse clairement, il est indispensable d'avoir à l'esprit les grandes étapes de la construction de ce théorème par Sturm.

4.1. *La démonstration de Sturm de 1835*

En 1835, six ans après après avoir énoncé son théorème, et quelques années après la publication de plusieurs démonstrations d'autres mathématiciens (par exemple [Crelle 1835]), Sturm donne sa propre preuve dans un *Mémoire sur la résolution des équations numériques* [Sturm 1835]. Dans celle-ci, Sturm examine l'équation suivante :

$$V = Nx^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \cdots + Tx + U = 0,$$

---

80 Cette *méthode d'interpolation* constitue la *note V* du cours d'*analyse algébrique* de Cauchy [Cauchy 1821, p. 525] et prolonge sous certaines conditions la formule d'interpolation de Lagrange aux fractions rationnelles.

81 C'est le cas dans tous les manuscrits sauf celui de 1890-91.

où V est un polynôme dont les coefficients sont réels. Si $V_1 = V'$, la division euclidienne avec les restes modifiés permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} V &= q_1 V_1 - V_2 \\ V_1 &= q_2 V_2 - V_3 \\ \cdots &= \cdots \\ V_{r-2} &= q_{r-1} V_{r-1} - V_r. \end{aligned}$$

La suite des degrés des fonctions V_i étant strictement décroissante, le polynôme V_r est un nombre réel[82]. Il énonce ensuite son théorème : le nombre de racines réelles de V comprises entre A et B est la différence :

$$\begin{aligned} &\textit{Nombre de changements de signe dans la suite } (V(A), V_1(A), \ldots, V_r(A)) \\ -\ &\textit{Nombre de changements de signe dans la suite } (V(B), V_1(B), \ldots, V_r(B)) \end{aligned}$$

Le principe de la démonstration consiste à examiner comment varie le nombre de changements de signe dans la suite $(V(x), V_1(x), \ldots, V_r(x))$ lorsque x varie. Un changement apparaît dans la suite des signes uniquement si V ou l'un des V_i change de signe, et donc s'annule. Utilisant alors la formule de Taylor, Sturm montre que pour une racine c de V, on peut trouver un réel $u > 0$ suffisamment petit pour qu'il y ait une perte de signe dans la suite lors du passage de $c - u$ à $c + u$. Sur quoi repose cette démonstration ? En grande partie sur le théorème de Bolzano et sur une méthode consistant à effectuer de « petits accroissements ». Tous deux sont appliqués à une suite de fonctions auxiliaires que Sturm construit à partir de l'algorithme d'Euclide, mais dont il n'extrait pas explicitement les propriétés fondamentales qui permettent à sa méthode de fonctionner, même s'il est, comme le seront aussi ses principaux lecteurs, parfaitement conscient de ces conditions.

4.2. *Une vision* géométrique

Lorsqu'il aborde le théorème de Sturm, Kronecker commence systématiquement par se placer d'un point de vue qu'il qualifie de « géo-

82 Pour éviter le cas de racines multiples, Sturm choisit dans un premier temps de supposer $V_r \neq 0$.

métrique »[83]. Dans le manuscrit de 1880-81, Kronecker affirme qu'il renoue[84] :

> avec l'intuition géométrique[85], laquelle nous apprend que si une courbe $y = F(x)$ passe tantôt en dessous, tantôt au dessus de l'axe des abscisses, elle doit le couper, dans le cas où la courbe se déroule continuement [Kronecker 1881b, p. 104].

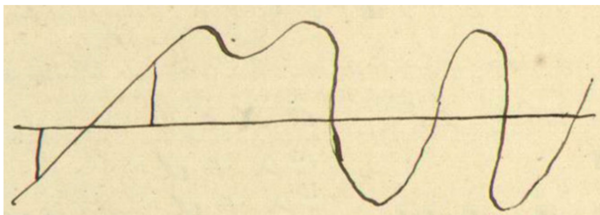

FIGURE 1. [Kronecker 1881b, p. 104]

Kronecker souhaite donc répondre à la question : combien y a-t-il de racines réelles entre deux bornes données ? Dans le manuscrit de 1886-87, il commence par rappeler que le théorème de Sturm n'est pas indispensable pour y répondre, mais qu'il s'agit sans doute de la réponse la plus « élégante »[86]. Nous pouvons en effet, dit-il, répondre à la question grâce à ce qu'il appelle des « interpolations géométriques »[87] : on remplace la résolution de l'équation $f(x) = 0$ par la recherche des points d'intersection entre la « courbe parabolique $y = f(x)$ » et l'axe des abscisses[88]. Il développe cette conception sur les cas simples des équations quadratiques et

83 La démonstration que nous allons présenter conserve, au cours des années, une grande stabilité. Nous allons regarder plus précisément les versions des années 1880-81, 1884-85, 1887-88 et 1890-91.

84 Wir knüpfen an die geometrische Anschauung an, welche uns lehrt, daß wenn die Curve $y = F(x)$, bald oberhalb, bald unterhalb der Abszissenaxe verläuft, sie dieselbe schneiden muß, falls die Curve stetig verläuft.

85 Le terme utilisé par Kronecker est celui de *Anschauung*, c'est-à-dire l'*intuition* dans la terminologie kantienne. On peut aussi penser au concept d'*intuition* (*Anschauung*) chez le pédagogue allemand du début du XIX^{e} siècle Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827).

86 « Eleganz » [Kronecker 1887c, p. 131].

87 [Kronecker 1887c, p. 132] : Man kann aber die oben genannten Fragen, ohne von dem Sturmschen Satz Gebrauch zu machen, auf anderem weniger eleganten, aber theoretisch einfacheren Wege beantworten, wenn man sich der geometrischen Interpolation bedient.

88 [Kronecker 1887c, p. 132] : die parabolische Curve $y = f(x)$.

des équations cubiques. Il utilise le fait que la dérivée s'annule entre deux racines réelles, et il construit ainsi le discriminant : le signe de ce dernier donnera le nombre de racines réelles (Figures 2 et 3).

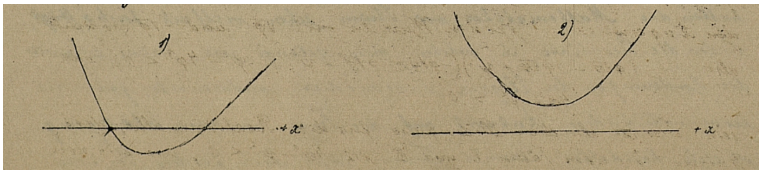

FIGURE 2. [Kronecker 1887d, p. 132]

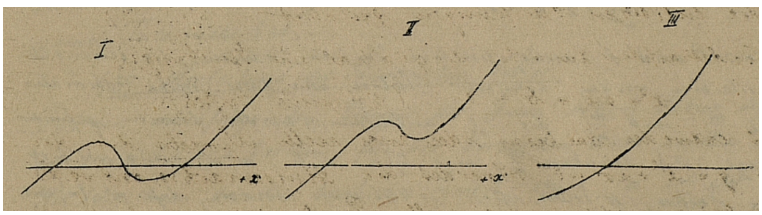

FIGURE 3. [Kronecker 1887d, p. 133]

Il appuie ici sa démonstration sur les différentes représentations possibles de la fonction, et il ne souhaite d'ailleurs pas prolonger ce processus au-delà du troisième degré.

Il ne s'agit pas là d'une méthode « géométrique » – Kronecker reprend en grande partie des méthodes algébriques que l'on trouve chez Lagrange – mais plutôt d'une présentation géométrique, au sens où elle fait appel à la représentation des courbes dans un repère du plan. Plus encore, c'est la « présentation géométrique » des racines qui est au cœur de la preuve qu'il propose du théorème, car il souhaite « construire la proposition de *Sturm* sur cette intuition géométrique des racines de $F(x) = 0$ »[89].

89 [Kronecker 1881b, p. 104] : Wir wollen nun, um auf diese geometrische Anschauung der Wurzele von $F(x) = 0$ den *Sturm*'schen Satz aufzubauen, ein Zeichen definiren, welches wir durch $[A]$ bezeichnen wollen und welches $-1, 0$ oder $+1$ vorstellen soll, je nachdem die als reell vorausgesetzte Größe A negativ, gleich null, oder positiv ist.

Le concept de racine est bien sûr ici fondamental, mais Kronecker aborde pourtant sa première démonstration du théorème de Sturm dans l'état d'esprit suivant[90] :

> Nous voulons supposer dans la suite que la notion de racine d'une équation est déjà définie. Nous reviendrons encore sur les justifications rigoureuses et les fondements de ces notions plus tard indépendamment des développements qui suivent maintenant [Kronecker 1881b, p. 104].

Il cherche à trouver le nombre de racines réelles (*reellen Wurzeln* [Kronecker 1887c, p. 131]) de l'équation, et si le sens et la nature de ce qu'il entend par *racine* d'une équation sont reportés à la suite du cours, il ne peut pas totalement éviter de s'y confronter. C'est ainsi qu'il souhaite « construire la proposition de *Sturm* sur cette intuition géométrique des racines de $F(x) = 0$ », c'est-à-dire sur l'intersection de la représentation graphique de la courbe avec l'axe des abscisses. Nous allons faire de même, et renvoyer cette question à la dernière partie de notre article.

4.3. *Continuité et théorème de Bolzano*

4.3.1. *Le théorème de Bolzano*

Avant de pouvoir en compter leur nombre, Kronecker se pose le problème de l'existence d'une racine entre deux bornes où la fonction prend des valeurs de signes contraires. Et à propos du théorème démontré par Bolzano dans le bien nommé *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzetes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, voilà ce qu'il dit[91] :

> Le fait que les erreurs logiques des déductions de Bolzano n'apparaissent pas d'emblée vient de sa forme elle-même, celle d'un dialogue, telle qu'elle apparaît chez Bolzano. Il pose toujours des questions auxquelles on ne peut répondre que par « oui » ou « non », mais il n'a pas cherché au préalable à savoir si ses questions sont posées de sorte que l'on puisse y répondre. Si c'est le cas, alors

---

90 Wir wollen in Folgenden annehmen, der Begriff der Wurzeln einer Gleichung sei bereits definirt. Auf die strenge Begründung und Fundamentirung dieses Begriffes werden wir später noch unabhängig von den jetzt folgenden Entwicklungen zurückkommen.

91 Dass die logischen Fehler der Bolzano'schen Deduction nicht so ohne Weiteres hervortreten, hat in der dialogischen Form derselben, wie sie bei Bolzano erscheint, seinen Grund. Er stellt immer Fragen, die nur mit „ja“ oder „nein“ beantwortet werden können, aber er untersucht nicht vorher, ob seine Fragen überhaupt so gestellt sind, dass sie der Beantwortung fähig sind. Sind sie dies, so ist der Beweis richtig, aber unnötig; im entgegengesetzten Fall ist die ganze Deduction falsch.

> sa démonstration est juste, mais pas nécessaire. Sinon la déduction entière est fausse [Kronecker 1887c, p. 156].

Il faut bien remarquer que le théorème de Bolzano est faux si l'on se restreint au corps des rationnels. Prenons la fonction continue $f(x) = x^2 - 2$: on a alors $f(0) = -2 < 0$ et $f(2) = 2 > 0$. Or $x^2 - 2 = 0$ n'a pas de solution rationnelle sur l'intervalle $]0;2[$. La démonstration de Bolzano doit donc utiliser la « complétude » du corps des réels.

Il y a ici une double affirmation : la géométrie n'a pas à intervenir dans l'arithmétique – donc l'arithmétique générale, qui contient l'analyse, ne peut reposer sur des concepts géométriques – et il souligne la nécessaire effectivité des réponses que l'on doit donner en mathématiques. Lorsqu'il cherche à savoir si une fonction s'annule, il ne veut pas se contenter d'un oui ou d'un non : il doit pouvoir *l'exhiber*. Kronecker poursuit en donnant l'exemple de :

$$F(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n^2 z\pi}{n^2} - \frac{1}{16\sqrt{2}} \cdot \pi^2$$

À partir de cette expression, Kronecker montre ce qui ne convient pas, d'après lui, dans le théorème des valeurs intermédiaires tel qu'il est énoncé et démontré par Bolzano : il connaît certaines valeurs de cette fonction qui lui permettent d'affirmer que la fonction est positive pour $z = 0$ et négative pour $z = \frac{1}{4}$. La méthode que Bolzano emploie à partir de là est une méthode par dichotomie. Mais, fait remarquer Kronecker, nous n'avons aucun moyen de déterminer $F(\frac{1}{8})$ et donc de connaître son signe. La méthode générale présente dans la démonstration de Bolzano n'est donc pas effective dans le cas particulier exhibé par Kronecker. La question posée – c'est-à-dire $F(\frac{1}{8})$ est-il négatif – n'obtient pas ici comme réponse un « oui » ou un « non ».

On trouve déjà en juin 1870 un témoignage de cette opposition aux conclusions de Bolzano dans une lettre que Schwarz a écrite à Cantor[92] :

> Prof. Kronecker explique dans la lettre qu'il m'a adressée le (3./6. 70) que les conclusions de Bolzano sont évidemment de faux arguments ; il dit que mon beau-père[93], Borchardt et Heine se trouvent de son côté. Je suis content que toi, Thome et moi, soyons dans le camp de Weierstrass [Meschkowski 1967, p. 68].

92 Herr Prof. Kronecker erklärte in seinem an mich gerichteten Briefe (3./6. 70) die Bolzanoschen Schlüsse als offenbare Trugschlüsse ; er sagte, mein Schwiegervater, Borchardt und Heine befinden sich auf seiner Seite. Es ist mir lieb, daß Du, Thome und ich auf Weierstraß' Seite stehen.

93 Il s'agit de Kummer.

Cette partition, forcément simpliste, souligne toutefois que l'héritage de Bolzano est plus à chercher dans le travail de Weierstrass que dans celui de Kronecker[94]. Mais si Kronecker rejette l'*existence* de valeurs intermédiaires quelconques pour les fonctions continues, qu'en est-il de la continuité, dont la *Rein analystischer Beweis* donne un des premiers – si ce n'est le premier – exemples d'arithmétisation ?

4.3.2. *Continuité*

Dans son cours de l'hiver 1884-85, Kronecker affirme au début de son chapitre sur le théorème de Sturm[95] :

> Pour ce théorème Sturm a donné une démonstration très simple, qui, comme tout ce traitement, repose essentiellement sur des considérations de continuité. Je vais vous en donner une autre tout à fait différente qui renonce à ces considérations de continuité, et ce en la construisant palier par palier, pourrait-on dire, sur des fondements triviaux [Kronecker 1885a, p. 237].

La continuité, centrale dans la démonstration de Sturm, Kronecker souhaite s'en passer. Mais que recouvre exactement cette notion pour Kronecker ? Pour répondre à cette question, examinons la façon dont ce concept est présenté dans ses cours. Dans ses leçons du semestre d'hiver 1880-81, il propose deux façons d'envisager la continuité. La première, il la qualifie de « géométrique ». Gauss lui-même, dit-il « n'avait que l'intuition géométrique et le concept de la continuité géométrique »[96]. Cette continuité, il n'en donne aucune définition, affirmant que « le sens de cette continuité géométrique est intuitivement clair »[97].

La continuité *analytique* ([Kronecker 1881b, p. 104] : *analytisch*) est quant à elle définie par Kronecker dans son cours de la façon suivante[98] :

---

94 Nous pouvons, à ce propos, reprendre une lettre de Schwarz citée par P. Dugac dans [Dugac 1976, p. 77] : « sans les conclusions, qui ont été développées par Weierstrass à partir des principes de Bolzano, on n'aurait pas pu réussir dans de nombreuses recherches », qui montre que dès 1870 Weierstrass connaissait le travail de Bolzano et que ce dernier était l'une des sources de son travail de refondation de l'analyse.

95 Für diesen Satz hat Sturm auch eine sehr einfache Deduktion gegeben, die, wie alle diese Behandlungen, wesentlich an Kontinuitätsbetrachtungen anknüpft. Ich gebe Ihnen eine ganz andere, die von dieser Kontinuitätsbetrachtung absieht, und zwar habe ich allmählich diese auf, man kann sagen, trivialen Grund gebaut.

96 [Kronecker 1881b, p. 104] : Er besaß nur die geometrische Anschauung und den Begriff der geometrischen Stetigkeit.

97 [Kronecker 1881b, p. 104] : Der Begriff dieser geometrischen Stetigkeit ist aus der Anschauung klar.

98 analytisch werden wir die Funktion $F(x)$ als an der Stelle x stetig bezeichnen, wenn $F(x_1) - F(x_2)$, wo $x_1 < x < x_2$ sei, kleiner gemacht werden kann als jede beliebig kleine Größe, dadurch daß man x_1 und x_2 beliebig nahe an x heranrückt und

> nous désignerons analytiquement la fonction $F(x)$ comme continue en x, si $F(x_1) - F(x_2)$, où $x_1 < x < x_2$, peut être faite plus petite que n'importe quelle grandeur, lorsque l'on rapproche x_1 et x_2 aussi près de x que l'on veut et lorsque cette différence reste ensuite aussi plus petite que cette grandeur choisie aussi petite que l'on veut. Ce concept de continuité est si simple, mais aussi tellement moderne, qu'on ne le trouve pas encore chez Gauss [Kronecker 1881b, p. 104].

La continuité analytique correspond donc pour Kronecker à la définition que Bolzano en donne dans le *Rein analytischer Beweis* [Bolzano 1817] ou Cauchy dans son *Cours d'analyse* [Cauchy 1821]. Une lecture rapide de ces passages peut laisser quelque peu perplexe : nous avons vu le point de vue de Kronecker sur le théorème de Bolzano, et nous savons donc qu'il en rejette les conclusions.

Cette définition analytique est pourtant qualifiée de « simple » et « moderne », et Kronecker n'émet donc aucune critique à son encontre : il ne s'agit pas d'un rejet, comme il le fait du théorème de Bolzano. Pourtant, à partir du manuscrit de 1884-85, Kronecker propose une démonstration sans « considération de continuité » (*Kontinuitätsbetrachtungen*). Si le problème n'est pas dans la définition du concept de fonction continue (*stetig*), comment et pourquoi souhaite-t-il s'en passer ?

Dans ses leçons sur l'intégration [Kronecker 1894], Kronecker décrit la notion de continuité de la façon suivante[99] :

> Cette notion n'est pas initialement extraite de l'arithmétique mais des applications de l'analyse à la géométrie et à la physique. Mais sa signification géométrique et physique est très obscure. Une courbe n'est, ni comme on la trace, ni comme on l'imagine en principe continue ; on ne peut toujours envisager – physiquement et mentalement – qu'un seul point déterminé à la fois. Et dans la nature d'un côté chaque action à distance semble inconcevable, mais d'un autre côté aucun changement de lieu dans l'espace, c'est-à-dire aucun mouvement, ne se laisse en général imaginer sans l'hypothèse d'une quelconque discontinuité dans le remplissage de l'espace [Kronecker 1901, p. 11].

---

wenn diese Differenz dann auch kleiner als diese beliebig kleine Größe bleibt. So einfach dieser Begriff der Stetigkeit ist, so ist er doch so modern, daß er bei *Gauss* noch nicht vorkommt.

99 Dieser Begriff ist kein ursprünglich arithmetischer, sondern er ist aus den Anwendungen der Analysis auf die Geometrie und Physik entnommen. Seine geometrische und physikalische Bedeutung ist aber sehr dunkel. Eine Curve ist weder, wie man sie zeichnet, noch wie man sie denkt, eigentlich continuirlich ; man kann immer nur einzelne bestimmte Punkte körperlich wie geistig ins Auge fassen. Und in der Natur scheint einerseits freilich jede Fernwirkung unfassbar, andererseits aber lässt sich ohne Annahme irgend welcher Unstetigkeit in der Raumerfüllung überhaupt keine Ortsveränderung im Raume, d. h. Bewegung, denken.

Pour Kronecker, même Gauss se trompe, ou tout au moins travaille avec une version inadéquate de la continuité[100] :

> Dans l'analyse il s'agit toujours de la continuité des fonctions. Mais la conception géométrique de la continuité y a joué depuis longtemps un rôle. Ainsi chez Gauss la continuité d'une fonction y de x est introduite dans le sens suivant
>
> "Si x va de x_0 à x_1, et que l'on prend pour y en ces deux valeurs de la variable les valeurs de y_0 et y_1, alors il y a chaque fois entre x_0 et x_1 un x', pour lequel la fonction obtient n'importe quelle valeur y' choisie entre y_0 et y_1."
>
> On pense à une courbe qui connecte les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) et qui représente dans son cours ininterrompu le tracé des valeurs de la fonction [Kronecker 1901, pp. 11-12].

Cette définition, qui est finalement le théorème des valeurs intermédiaires, Kronecker la rejette. Bolzano ne souhaitait pas non plus que cette propriété soit utilisée comme définition de la continuité, mais il voulait au contraire la *démontrer*[101]. Pour Kronecker, le problème est ailleurs : le théorème des valeurs intermédiaires n'a aucun sens étant donné que seul le dénombrable est accessible. Nous nous trouvons donc face à des contradictions apparentes qu'il faut résoudre : Kronecker n'accepte pas les conclusions de Bolzano sur l'existence des racines, mais voit dans la définition de la continuité de ce dernier un réel progrès. Il refuse toute définition géométrique de la continuité, allant jusqu'à pointer – ce qui est rare – la façon dont Gauss s'est fourvoyé en l'utilisant. Il construit pourtant, tout au moins dans un premier temps, son travail sur une idée « géométrique » de la notion de racine.

4.3.3. *Une démonstration sans considération de continuité ?*

L'intuition géométrique dont Kronecker parle ne semble donc pas toucher directement à la continuité, mais plutôt aux *racines*, et il conclut que en effet, « nous n'avons pas vraiment besoin dans notre démonstration de

---

100 In der Analysis handelt es sich immer nur um die Stetigkeit von Functionen. Dabei spielte aber lange Zeit hindurch die geometrische Auffassung der Stetigkeit eine Rolle. So kommt bei Gauss der Begriff Stetigkeit einer Function y von x nur in folgendem Sinne vor :

„Geht x von x_0 bis x_1, und nimmt y für diese beiden Werthe der Variablen die Werthe y_0 und y_1 an, dann giebt es zwischen x_0, x_1 jedesmal ein x', für welches die Function den zwischen y_0 und y_1 beliebig gewählten Werth y' erhält". Es ist dabei an eine Curve gedacht, welche die beiden Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) mit einander verbindet und in ihrem ununterbrochenen Laufe den Verlauf der Functionswerthe darstellt.

101 C'est ce qu'il fera en 1817 dans le *Rein analytischer Beweis* [Bolzano 1817].

considération de continuité »[102]. Nous allons examiner la façon dont Kronecker se dispense dans sa démonstration du concept de continuité[103]. Kronecker commence par prendre l'équation

$$x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n = 0$$

où il fait bien remarquer que les c_i sont des nombres réels (*reelle Zahlen* [Kronecker 1887c, p. 131]), puis il définit la notation suivante :

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} \frac{a}{|a|} \text{ si } a \neq 0 \\ 0 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

En posant $f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n$, en considérant $f_1(x)$ une fonction entière (un polynôme dans le vocabulaire de Kronecker) de degré $n-1$, telle que f et f_1 n'aient pas de racine commune, ainsi que la suite f_h engendrée par division euclidienne, modifiée par Sturm, Kronecker obtient alors :

$$\begin{aligned}(1)\quad &\sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f'(\xi) f_1(\xi)\right) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)).\end{aligned}$$

Pour Kronecker, cette formule est la « généralisation du théorème initial de Sturm »[104], et donc certainement la formule la plus importante de la partie sur le théorème de Sturm. On peut prendre pour $f_1(x)$ toute fonction de degré $n-1$ qui n'a pas de racine commune avec f. Si toutes les racines de cette dernière sont simples, on peut prendre $f_1 = f'$. Dans ce cas, on a

$$\operatorname{sgn}\left(f'(\xi) f_1(\xi)\right) = \operatorname{sgn}\left(f'(\xi)^2\right) = +1$$

et donc le nombre de racines réelles de l'équation $f(x) = 0$ comprises entre x_1 et x_2 (c'est-à-dire le nombre de ξ compris entre x_1 et x_2) est

$$-\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)).$$

Considérons les suites

$$f(x_1); f_1(x_1); \cdots; f_\nu(x_1)$$

---

102 [Kronecker 1885a, p. 244] : Wir haben in unserer Deduktion Kontinuitätsbetrachtungen eigentlich nicht gebraucht.

103 Pour la démonstration complète, on pourra se reporter à l'annexe A.

104 [Kronecker 1887c, p. 139] : die Verallgemeinerung des ursprünglichen Sturm'schen Satzes.

et

$$f(x_2); f_1(x_2); \cdots; f_\nu(x_2).$$

On note m_1 et m_2 le nombre de changements de signes dans ces suites (m comme *mutare*) et s_1 et s_2 le nombre de permanences de signes (s comme *servare*). Alors on a :

$$\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) = s_1 - m_1$$
$$\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)) = s_2 - m_2.$$

Comme de plus on a

$$s_1 + m_1 = s_2 + m_2$$

et ainsi

$$s_1 - s_2 = -(m_1 - m_2)$$

alors

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) &+ \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)) \\ &= -\frac{1}{2}(s_1 - m_1) + \frac{1}{2}(s_2 - m_2) \\ &= \frac{1}{2}(m_1 - m_2) + \frac{1}{2}(m_1 - m_2) \\ &= m_1 - m_2. \end{aligned}$$

Et sous cette forme, il s'agit bien du théorème de Sturm. C'est donc un cas particulier de la formule qu'il vient de démontrer. L'égalité (1) est ainsi une généralisation du théorème de Sturm, généralisation dont d'ailleurs Kronecker ne s'attribue pas le mérite : c'est dans le travail de Sylvester que l'on trouve cette extension[105]. Ce qui est marquant dans cette version, c'est la présentation du théorème sous la forme d'une *formule*. On retrouve cette idée dans une lettre que Kronecker a écrite en 1884 à Cantor[106] :

105 Kronecker précise dans son cours du semestre d'hiver qu'il fait référence à l'article de Sylvester qui se trouve dans « les *Philosophical Transactions* de 1853 » [Kronecker 1891, p. 208]. Il s'agit donc du mémoire intitulé *On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure* [Sylvester 1853].

106 La lettre est reproduite dans [Edwards 1995, p. 45] et provient de [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196]. Einen wahren wissenschaftlichen Werth erkenne ich – auf dem Felde der Mathematik – nur in concreten mathematischen Wahrheiten, oder schärfer ausgedrückt, 'nur in mathematischen Formeln.' Diese allein sind, wie die Geschichte der Mathematik zeigt, das Unvergängliche. Die verschiedenen Theorien für die Grundlagen der Mathematik (so die von Lagrange) sind von der Zeit weggeweht, aber die Lagrangesche Resolvente ist geblieben !

> Je reconnais la vraie valeur scientifique – dans le champ des mathématiques – seulement dans les vérités mathématiques concrètes, ou, pour l'exprimer plus nettement, seulement dans les formules mathématiques. Elles seules, comme l'histoire des mathématiques le montre, sont impérissables. Les diverses théories sur les fondations des mathématiques (comme celle de Lagrange) sont depuis longtemps tombées dans l'oubli, alors que la résolvante de Lagrange reste ! [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196]

La continuité a-t-elle été utilisée dans la démonstration précédente ? Kronecker suppose qu'une sorte de séparation des racines a été effectuée : l'existence de petits intervalles les contenant et dont les bornes rationnelles ont des signes opposés est admise. À partir de là, il développe son calcul sans aucune considération pour la continuité de la fonction, « même le passage de quotients de différences aux quotients différentiels qui s'y produit n'entre pas en ligne de compte car il est question seulement des signes et non des valeurs de la fonction »[107].

Le fait de ne manipuler qu'un ensemble discret qui contient trois éléments (nul, positif et négatif) semble l'exempter de toute considération de continuité. Il en est de même de la notion de *différentiel*. Pour bien saisir où se trouve le point en discussion, nous allons regarder la seconde démonstration qu'il fournit, et qui correspond, comme il le rappelle lui-même[108], à celle de Sturm de 1835.

Dans le manuscrit de 1886-87, Kronecker poursuit son travail en faisant ce qu'il appelle une *vérification du théorème de Sturm au moyen de considérations de continuité*[109]. En fait, sous une forme à peu près stable, cette démonstration se trouve dans la plupart des manuscrits : il s'agit cette fois d'une réécriture, et non d'une relecture, de celle que Sturm produit en 1835, et qui utilise – sans que cela soit nécessaire d'après Kronecker – des considérations de continuité.

Voici comment il procède :

La dérivée de $\frac{f}{f_1}$ est

$$d\left(\frac{f}{f_1}\right) = \frac{f'f_1 - ff_1'}{f_1^2}$$

---

107 [Kronecker 1887c, p. 140] : Selbst der Übergang von Differenzenquotienten zum Differenzialquotienten, der dabei vorkam, ist nicht als solcher zu betrachten, weil es sich nur um Vorzeichen, nicht um Werte der Function selbst handeln.

108 [Kronecker 1881b, p. 108] : Wir lassen jetzt den Beweis folgen, welchen Sturm zu seinem Satze angewendet hat. / Nous allons maintenant suivre la preuve que *Sturm* a utilisée pour son théorème.

109 [Kronecker 1887c, p. 140] : Verification des Sturm'schen Satzes mit Hilfe von Continuitätsberachtungen.

donc pour toute racine ξ de f on a

$$d\left(\frac{f}{f_1}\right)(\xi) = \frac{f'(\xi)f_1(\xi)}{f_1^2(\xi)}$$

et ainsi (2), c'est-à-dire ce que Kronecker appelle le théorème de Sturm, devient

$$\sum_{f(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(d\left(\frac{f}{f_1}\right)(\xi)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)),$$

car $\operatorname{sgn}(f_1^2(\xi)) = 1$. En posant

$$\sigma(x) = \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x)f_h(x))$$

on a

$$-\sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(d\left(\frac{f}{f_1}\right)(\xi)\right) = \frac{1}{2}\sigma(x_1) - \frac{1}{2}\sigma(x_2).$$

Lorsque x varie, la fonction σ ne peut se modifier que lorsque $f_{h-1}(x)f_h(x)$ change de signe, et donc s'annule[110]. Cela n'arrive que lorsque $f_{h-1}(x) = 0$ ou $f_h(x) = 0$. Par ailleurs, ces deux fonctions ne peuvent s'annuler ensemble, car cela entraînerait l'existence d'une racine commune entre f et f_1.

Soit maintenant $\delta > 0$ et examinons pour $h = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ (le cas $h = 0$ sera traité plus loin) :

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h - \delta)f_h(\xi_h - \delta)) + \operatorname{sgn}(f_h(\xi_h - \delta)f_{h-1}(\xi_h - \delta))$$

et

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h + \delta)f_h(\xi_h + \delta)) + \operatorname{sgn}(f_h(\xi_h + \delta)f_{h-1}(\xi_h + \delta)).$$

Comme

$$f_{h-1} - g_h f_h + f_{h+1} = 0$$

et que $f_h(\xi_h) = 0$ on peut trouver δ suffisamment petit pour que

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h - \delta)) = -\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h - \delta))$$

et

$$\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h + \delta)) = -\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h + \delta))$$

110 Kronecker utilise donc ici, comme Sturm, la méthode des variations.

et donc

$$\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h - \delta))\operatorname{sgn}(f_h(\xi_h - \delta)) = -\operatorname{sgn}(f_h(\xi_h - \delta)\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h - \delta))$$
$$\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h + \delta))\operatorname{sgn}(f_h(\xi_h + \delta)) = -\operatorname{sgn}(f_h(\xi_h + \delta)\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h + \delta)).$$

On peut passer, pour la suite f_{h-1}, f_h, f_{h+1}

- soit de $-++$ à $--+$,
- soit de $--+$ à $-++$,
- soit de $++-$ à $+--$,
- soit de $+--$ à $++-$.

Il n'y a donc aucune modification du nombre de changements de signes. Si ce dernier peut changer, ce sera ainsi uniquement pour $x = \xi$. On a pris f de sorte à ce qu'elle n'ait pas de racine double, donc

$$\operatorname{sgn}(f(\xi - \delta)f_1(\xi - \delta)) - \operatorname{sgn}(f(\xi + \delta)f_1(\xi + \delta)) = \pm 2$$

Or

$$f(\xi \pm \delta) = \pm f'(\xi)\delta + \cdots$$

et pour δ suffisamment petit, on a

$$\operatorname{sgn}(f(\xi \pm \delta)) = \operatorname{sgn}(\pm f'(\xi)) = \pm\operatorname{sgn}(f'(\xi)).$$

Si f passe du négatif au positif, alors f' est positive en ξ, et on passe ainsi de $-+$ à $++$. Si en revanche f passe du positif au négatif, alors f' est négative en ξ, et on passe ainsi de $+-$ à $--$. Il y a donc lors du passage par chaque racine ξ la perte d'un changement de signes. Entre x_1 et x_2, il y a donc finalement autant de racines à l'équation $f(x) = 0$, qu'il y a de pertes de changements de signes, c'est-à-dire $m_2 - m_1$.

Kronecker fait remarquer que cette forme généralisée, c'est-à-dire avec f_1 qui n'est plus forcément égale à f' est encore à attribuer à Sylvester[111].

Quelle est la différence avec la démonstration précédente ? Essentiellement dans l'utilisation de ces δ, caractéristique de la continuité *analytique.* Il s'agit d'une application de ce que H. Sinaceur nomme la « méthode des variations et des permanences de signes », c'est-à-dire l'examen des changements de signes que produit la variation des valeurs de l'inconnue lors du *passage* par les racines de l'équation donnée. C'est ce *passage* par la racine que Kronecker souhaite éviter. En effet, pour Kronecker ce passage n'a aucun sens *arithmétique,* même s'il accepte de lui en donner un *géométrique.* En s'appuyant ainsi sur une démonstration connue, qu'il met en pa-

111 Die obigen allgemeineren Betrachtungen rühren von Sylvester her [Kronecker 1887c, p. 142]. Cette idée est bien présente dans les écrits de Sylvester dès [Sylvester 1839], mais, comme le remarque Hourya Sinaceur [Sinaceur 1991, p. 99], Sturm l'émet expressément dans son article de 1835.

rallèle avec celle qu'il propose, il peut plus facilement convaincre ses étudiants de l'inutilité d'introduire ici la continuité.

4.4. *Interprétation géométrique*

Nous allons maintenant examiner en détail une interprétation graphique qu'il donne de sa *formule-théorème.*

Encore une fois, à propos du théorème de Sturm, Kronecker choisit délibérément un point de vue géométrique, et c'est ainsi qu'il interprète cette somme. On représente donc dans le plan muni d'un repère les deux courbes associées à l'équation :

$$F(x,y) = (y - f(x))(y - f_1(x)) = 0.$$

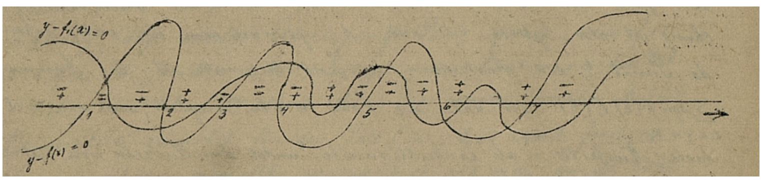

FIGURE 4. [Kronecker 1887c, p. 144]

Et Kronecker définit, « par analogie avec le cercle », *l'intérieur* (*Innere*) de cette courbe comme étant la partie du plan telle que

$$(y - f(x))(y - f_1(x)) < 0$$

et l'*extérieur* (*Äussere*) l'autre partie[112]. Il poursuit en définissant des points d'entrée et de sortie : lorsque l'on se déplace dans le sens croissant sur l'axe des abscisses, on considère les points d'intersection avec la courbe d'équation $y - f(x) = 0$. « Entrer » signifie entrer dans la surface définie par $(y - f(x)) \cdot (y - f_1(x)) < 0$ et « Sortir » signifie sortir de cette même surface. Ainsi dans le schéma précédent, les points $1, 2, 3, 5, 6$ sont des points de sortie (*Austrittspunkte*) tandis que $4, 7$ sont des points d'entrée (*Eintrittspunkte*).

Soit ξ une racine de $f(x) = 0$: si $f'(\xi)f_1(\xi) > 0$, F est croissante lorsque l'on passe par le point $(\xi, 0)$ en parcourant l'axe des abscisses dans

[112] Cette comparaison avec le cercle peut faire penser au travail de Gauss, qui propose une définition similaire dans la première et quatrième démonstration du théorème fondamental de l'algèbre [Gauss 1799/1866] et [Gauss 1849/1866].

le sens croissant, alors $F(x,0) = f(x) \cdot f_1(x)$ passe des négatifs aux positifs, et $(\xi, 0)$ est donc un point de *sortie*.

De même, si $f'(\xi) f_1(\xi) < 0$, F est décroissante lorsque l'on passe par le point $(\xi, 0)$ en parcourant l'axe des abscisses dans le sens croissant, alors $F(x,0) = f(x) \cdot f_1(x)$ passe des positifs aux négatifs, et $(\xi, 0)$ est donc un point d'*entrée*. On a

- $\operatorname{sgn}(f'(\xi) f_1(\xi)) = +1$ si $(\xi, 0)$ est un point de *sortie*,
- $\operatorname{sgn}(f'(\xi) f_1(\xi)) = -1$ si $(\xi, 0)$ est un point d'*entrée*,

et finalement, lorsque l'on parcourt l'axe des abscisses de x_1 à x_2 et que l'on regarde les points de $y - f(x) = 0$ que l'on intersecte, alors $\sum_\xi \operatorname{sgn}(f'(\xi) f_1(\xi))$ est la différence du nombre de points de sortie avec celui des points d'entrée. Si l'on note $\mathfrak{a}$ le nombre de points de sortie et $\mathfrak{e}$ le nombre de points d'entrée, on a en reprenant les notations précédentes :

$$\mathfrak{a} - \mathfrak{e} = m_1 - m_2.$$

Dans le cas du travail de Sturm, où $f_1 = f'$, on a pour tout ξ :

$$\operatorname{sgn}(f'(\xi) f_1(\xi)) = \operatorname{sgn}(f'(x)^2) = +1.$$

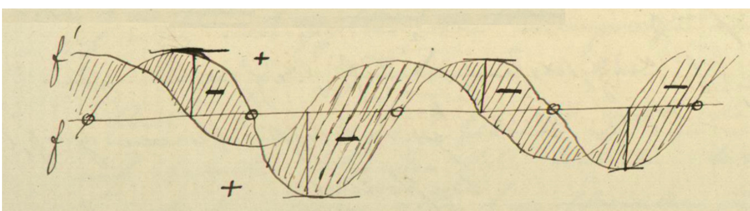

FIGURE 5. [Kronecker 1881b, p. 110]

Il n'y a donc que des sorties et $\sum_\xi \operatorname{sgn}(f'(\xi) f_1(\xi))$ correspond ainsi au nombre de racines réelles de $f(x) = 0$.

Kronecker propose ici une interprétation « géométrique » d'une formule qu'il a donnée dans un cadre algébrique. Les notions d'intérieur et d'extérieur y sont définies, et l'on pense tout de suite au théorème de Jordan qui affirme que

> toute courbe continue C divise le plan en deux régions, l'une extérieure, l'autre intérieure, cette dernière ne pouvant se réduire à zéro, car elle contient un cercle de rayon fini [Jordan 1893, p. 99].

ou, en des termes plus contemporains, que le complémentaire d'une courbe de Jordan a exactement deux composantes connexes[113], dont exactement l'une est bornée. Nous connaissons bien, depuis le travail de F. Brechenmacher[114], la controverse qui a eu lieu entre Jordan et Kronecker à propos des formes bilinéaires, et il ne faudrait pas confondre ce théorème de Jordan avec celui dont il est question dans cette controverse, à savoir celui sur la réduction des endomorphismes. Il s'agit ici d'un théorème de topologie, et ce qui est remarquable, c'est que ce théorème se déduira finalement assez naturellement de la théorie des caractéristiques de Kronecker[115], dont l'idée première, comme nous allons le voir maintenant, est issue d'une interprétation graphique du théorème de Sturm.

5. LA THÉORIE DES CARACTÉRISTIQUES

Kronecker décrit sa théorie des caractéristiques dans trois articles ([Kronecker 1869a], [Kronecker 1869b] et [Kronecker 1878a]) publiés en 1869 et 1878. Cependant, la présentation qu'il en donne étant bien trop succincte pour permettre à elle seule une compréhension réelle de la théorie, nous allons utiliser le contenu des *Vorlesungen* pour en donner une présentation. Contrairement à ses articles, les cas $n = 1$ et $n = 2$ sont traités de façon détaillée dans ses cours. Lorsqu'il commence son chapitre sur la théorie des caractéristiques, Kronecker rappelle le théorème de Sturm sous la forme qu'il qualifie de « plus générale » [Kronecker 1891, p. 208] :

$$\sum_{x'<\xi<x''} \operatorname{sgn} f'(\xi) f_1(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{v} (\operatorname{sgn} f_{h-1}(x'') \cdot f_h(x'') - \operatorname{sgn} f_{h-1}(x') \cdot f_h(x')).$$

Nous avons déjà vu que cette généralisation, Kronecker l'attribue à Sylvester. Mais il insiste ici sur le fait que Sylvester n'a pas réussi à donner d'interprétation correcte de cette formule[116] :

113 Rappelons ici qu'une courbe de Jordan est l'image continue, dans le plan affine, du cercle trigonométrique.

114 Voir par exemple [Brechenmacher 2007].

115 La démonstration est basée sur l'indice de Kronecker, comme le fait remarquer Hadamard en 1910 : « La démonstration, d'après M. Ames, du théorème de M. Jordan sur les courbes fermées sans point double (n 306, 307) repose sur la considération de l'ordre d'un point ou, si l'on veut, sur la considération d'une variation d'argument. La généralisation, dans le cas où le nombre des dimensions dépasse deux, est fournie par l'indice de Kronecker » [Tannery & Hadamard 1910, p. 437].

116 Diese Verallgemeinerung der Sturmschen Formel rührt von *Sylvester* her, welcher darüber und über die in Vorhergehenden besprochenen kombinatorischen Aus-

> Cette généralisation de la formule de Sturm vient de *Sylvester*, qui a fait paraître plusieurs essais sur les expressions combinatoires précédentes, expressions qu'il a formées sous l'hypothèse de la décomposition d'une fonction en facteurs linéaires dans les *Philosophical Transactions* de 1853. Mais alors que pour le cas particulier où $f_1(x) = f'(x)$, la signification de la somme de signes est évidente, *Sylvester* s'est efforcé en vain d'interpréter de façon claire et exhaustive cette relation entre les signes, pour laquelle il a introduit le terme d'« intercalations » [Kronecker 1891, p. 208].

Comme Kronecker le précise dans son article de 1869, l'interprétation dont il parle est bien géométrique. C'est en partant d'une interprétation géométrique du théorème de Sturm qu'il introduit la théorie des caractéristiques. Il reprend l'interprétation géométrique précédente et conclut[117] :

> Ces remarques peuvent être généralisées en prenant à la place de l'axe des x une troisième courbe en plus des deux autres ; il est pourtant nécessaire, pour poursuivre arithmétiquement ces recherches, d'introduire une nouvelle notion : la notion de caractéristique d'un système de fonctions [Kronecker 1891, p. 211].

C'est à partir de considérations géométriques qu'il introduit son chapitre : l'axe des abscisses pourra être remplacé par une courbe du plan. C'est l'annonce de ce qui constitue la théorie des caractéristiques dans le cas de trois fonctions à deux inconnues, et c'est à partir de ce cas que la généralisation au cas n se fait. Mais si l'intuition géométrique est un vecteur heuristique important, il faut fonder *arithmétiquement* cette nouvelle théorie. Kronecker commence par présenter la caractéristique de deux fonctions d'une variable, qui est particulièrement développée pour trois raisons. Tout d'abord, il met en évidence le lien entre caractéristique et théorème de Sturm, ce dernier se déduisant assez naturellement du premier. Ensuite, ce cas permet à Kronecker de développer certains résultats issus de son article intitulé *Über die Charakteristik von Funktionen-Systemen* [Kronecker 1878a], et donc d'intégrer dans son cours ses recherches

---

drücke, die er unter Voraussetzung der Zerlegung einer Funktion als Produkt von Linearfaktoren bildete, einige Aufsätze in den *Philosophical Transactions* z. Teil 1853 erscheinen ließ. Während aber für den Speziellen Fall, wo $f_1(x) = f'(x)$ gesetzt wird, die Bedeutung der Zeichensumme auf der Hand liegt, bemühte sich *Sylvester* vergeblich, diese allgemeineren Zeichenverbindungen, für welche er den Namen « intercallations » einführte, in Klarer und erschöpfender Weise zu interpretieren.

117 Diese Betrachtungen können verallgemeinert werden, indem man anstatt der x-Axe eine beliebige dritte Kurve zu den beiden anderen hinzunimmt ; jedoch ist es, um diese Untersuchungen arithmetisch durchführen zu können, nötig, einen neuen Begriff einzuführen : den Begriff der Charakteristik eines Funktionsystems.

les plus récentes. Enfin, la caractéristique de deux fonctions réapparaîtra lorsque nous étudierons, plus loin, un paragraphe que Kronecker ajoute en conclusion de sa partie sur la théorie des équations algébriques en 1891. Ce dernier concernera la *notion de caractéristique*, notion qu'il tentera d'expurger de tout usage des racines d'une équation.

5.1. *La caractéristique de deux fonctions d'une variable*

Prenons deux fonctions polynômiales d'une variable φ et ψ que l'on supposera toutes les deux de degré n. Notons $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les racines de φ et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ celles de ψ et

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} \varphi(z) & \psi(z) \\ \varphi'(z) & \psi'(z) \end{vmatrix}.$$

L'entier ou demi-entier :

$$-\frac{1}{2}\sum_{\xi} \operatorname{sgn} \Delta(\xi) = -\frac{1}{2}\sum_{\eta} \operatorname{sgn} \Delta(\eta)$$

est appelé *caractéristique* du système de fonctions φ et ψ. On le note $\chi(\varphi, \psi)$.

Kronecker, dans ses *Vorlesungen*, pose deux conditions sur φ et ψ : les deux fonctions doivent avoir le même degré, et ce degré doit être pair. Il ne revient pas sur celles-ci, mais prolonge pourtant la définition aux autres cas. Dans son article de 1878 sur le théorème de Sturm [Kronecker 1878b, p. 59], Kronecker justifie cette extension : si φ et ψ n'ont pas le même degré, avec $\deg(\psi) < \deg(\varphi)$, on pose

$$\chi(\varphi, \psi) = \chi(\varphi, \varphi + \psi).$$

Dans le cas où les fonctions φ et ψ sont de degré impair, on peut toujours ajouter des facteurs $x-u$ et $x-v$ en choisissant u et v suffisamment grands. En utilisant cette définition, Kronecker démontre les trois propriétés suivantes :

(1) $\chi(\varphi, \psi) = -\chi(\psi, \varphi)$.
(2) Pour tout $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a

$$\chi(\alpha\varphi + \beta\psi, \gamma\varphi + \delta\psi) = [\alpha\delta - \beta\gamma]\chi(\varphi, \psi).$$

(3) $\chi(\varphi, \psi) = \chi(\varphi, a\varphi + \psi) = \chi(\varphi + a\psi, \psi)$.

Ce travail montre que, par une substitution linéaire, seul le signe de la caractéristique peut changer, mais sa valeur absolue reste la même.

5.1.1. *Interprétation graphique*

Kronecker propose une interprétation graphique de la caractéristique de deux fonctions. Il revient sur le travail qu'il a déjà effectué et où il avait montré que la somme

$$\sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn} f_1(\xi) f'(\xi)$$

représente la différence entre le nombre de points de sortie et le nombre de points d'entrée, tels que ceux-ci ont été définis précédemment entre les bornes x_1 et x_2. On a alors[118] :

> la caractéristique a la signification géométrique suivante : La caractéristique $\chi(\varphi, \psi)$ vaut la moitié de l'excédent des sorties sur les entrées lorsque nous nous déplaçons sur la courbe $y = \varphi(z)$, c'est-à-dire en prenant en compte les ξ et vaut de même la moitié de l'excédent des entrées sur les sorties lorsque l'on parcourt la courbe $y = \psi(z)$, c'est-à-dire en prenant en compte les η [Kronecker 1881b, p. 157].

Exemple : Dans le manuscrit de 1880-81, à partir de la figure 6, on obtient :

$$\chi(\varphi, \psi) = \frac{1}{2}(2-4) = -1.$$

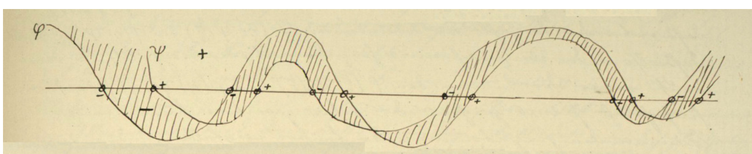

FIGURE 6. [Kronecker 1881b, p. 157]

5.1.2. *Lien avec le théorème de Sturm*

Maintenant que la définition de la caractéristique de deux fonctions d'une variable est posée, il est facile d'interpréter le théorème de Sturm en termes de *caractéristiques*. Soient $\varphi(z) = f(z)$ et $\psi(z) = (x-z)f_1(z)$. On a alors

$$\chi(f(z), (x-z)f_1(z)) = \frac{1}{2}\sum_{\xi}[(x-\xi)f_1(\xi) \cdot f'(\xi)].$$

118 Die Charakteristik folgende geometrische Bedeutung [hat] : Es ist die Charakteristik $\chi(\varphi, \psi)$ der halbe Ueberschuß der Austritte über die Eintritte, wenn wir uns auf der Curve $y = \varphi(z)$ bewegen, d.h. die ξ zählen und gleich dem halben Ueberschuß der Eintritte über die Austritte, wenn wir uns auf der Curve $y = \psi(z)$ bewegen, d.h. die η zählen.

On obtient

$$\begin{aligned}
&\chi(f(z),(x_2 - z) f_1(z)) - \chi(f(z), (x_1 - z) f_1(z)) \\
&\qquad = \frac{1}{2} \sum_{\xi} [(x_2 - \xi) f_1(\xi) \cdot f'(\xi)] - \frac{1}{2} \sum_{\xi} [(x_1 - \xi) f_1(\xi) \cdot f'(\xi)] \\
&\qquad = \sum_{x_1 < \xi < x_2} [f_1(\xi) \cdot f'(\xi)],
\end{aligned}$$

car :

– si $\xi \in [x_1; x_2]$ alors $(x_2 - \xi)$ et $(x_1 - \xi)$ sont de signes opposés et on a

$$\frac{1}{2}[(x_2 - \xi) f_1(\xi) \cdot f'(\xi)] - \frac{1}{2}[(x_1 - \xi) f_1(\xi) \cdot f'(\xi)] = [f_1(\xi) \cdot f'(\xi)],$$

– si $\xi \notin [x_1; x_2]$ alors $(x_2 - \xi)$ et $(x_1 - \xi)$ sont de même signe et on a

$$\frac{1}{2}[(x_2 - \xi) f_1(\xi) \cdot f'(\xi)] - \frac{1}{2}[(x_1 - \xi) f_1(\xi) \cdot f'(\xi)] = 0.$$

On peut exprimer à l'aide de la caractéristique de deux fonctions et avec les bonnes conditions sur f_1, le nombre de racines de l'équation $f(x) = 0$ situées entre x_1 et x_2 : nous avons bien là le théorème de Sturm, qui n'est donc rien d'autre qu'une application de la théorie des caractéristiques dans un cas très particulier.

Une des propriétés fondamentales de la caractéristique d'un système de deux fonctions est la façon dont cette dernière se modifie lors d'une variation continue des coefficients des deux fonctions. Kronecker traite de cette modification pour un système de n fonctions dans son article de 1878. Dans celui-ci, il montre d'ailleurs que[119] :

> la modification de la caractéristique lors du passage d'un système de fonctions à un autre et donc lorsque seulement la caractéristique d'un seul système de fonctions est connue, permet de déterminer la caractéristique de tous les systèmes de fonctions correspondant aux différents points. En rendant la modification dépendante d'une seule variable x, on ramène cette détermination à l'évaluation de la caractéristique d'un système de deux fonctions d'une variable qui peut s'effectuer dans le cas des fonctions algébriques au moyen du procédé de Sturm [Kronecker 1878a, p. 77].

119 Hiernach lässt sich die Veränderung der Charakteristik beim Uebergang von einem Functionen-System zum andern und also, wenn nur die Charakteristik eines einzigen Functionen-Systems bekannt ist, die Charakteristik aller den verschiedenen Punkten entsprechenden Functionen-Systeme bestimmen. Diese Bestimmung findet sich dabei, indem der Uebergang von einer einzigen Variabein x abhängig gemacht wird, auf die Ermittelung der Charakteristik eines Systems von zwei Functionen einer Variabeln zurückgeführt, welche im Falle algebraischer Functionen mittels des *Sturm*'schen Verfahrens erfolgen kann.

Il ne s'agit donc pas d'un cas particulier : on peut toujours se ramener au cas de la caractéristique d'un système de deux fonctions d'une variable. Le contexte de la rédaction de cet article est donné par Kronecker lui-même en introduction[120] :

> À la suite des recherches que j'ai évoquées dans mon exposé d'il y a huit jours, je suis arrivé à la découverte d'une nouvelle propriété fondamentale de la caractéristique d'un système de fonctions de plusieurs variables que j'ai introduite dans ma communication du 4 mars 1869 et que j'ai alors exprimée par une intégrale multiple. La nouvelle propriété que je veux expliquer ici est obtenue par la variation du système de fonctions et peut être utilisée convenablement pour la détermination numérique de la caractéristique [Kronecker 1878a, p. 73].

On peut décrire – selon un angle topologique qui nous est contemporain – ce que montre Kronecker dans cet article. À partir de renseignements sur les racines d'une famille d'équations, il exhibe les composantes connexes d'un espace associé (dont la dimension dépend en partie du degré de l'équation) : une étude *topologique* d'un espace est ainsi associée à une étude algébrique d'une famille d'équations. Cette étude fait apparaître une théorie qui fait intervenir, dans le cadre de travaux algébriques, des éléments que nous qualifierions aujourd'hui de topologiques[121]. Nous allons maintenant passer à ce qui constitue le cœur de son chapitre sur la théorie des caractéristiques dans ses manuscrits : la théorie des caractéristiques de trois fonctions de deux variables.

5.2. *Le* Fortgangsprincip

Lorsque l'on commence à lire la partie du cours de Kronecker sur la caractéristique de trois fonctions de deux variables, la première notion qui apparaît est celle de *Fortgangsprincip.* Nous pouvons traduire le terme de « *Fortgangsprincip* » ou « *Fortgangsprinzip* » par *principe de parcours,* même si la traduction littérale serait plutôt *principe de continuation.* Il ne faudra pas

---

120 Im Verfolg der Untersuchungen, welche ich in meinem vor acht Tagen gehaltenen Vortrage erwähnt habe, bin ich zur Auffindung einer neuen Fundamental-Eigenschaft jener Charakteristik der Systeme von Functionen mehrer Variabeln gelangt, welche ich in meiner Mittheilung vom 4. März 1869 eingeführt und dort durch ein vielfaches Integral ausgedrückt habe. Die neue Eigenschaft, welche ich hier auseinandersetzen will, wird durch Variirung der Functionen-Systeme erlangt und kann füglich zur numerischen Bestimmung der Charakteristik benutzt werden.

121 Et en effet, la théorie des caractéristiques peut être envisagée comme l'un des premiers pas vers la construction de la topologie algébrique telle qu'elle se développera dans la première moitié du vingtième siècle.

oublier cependant l'aspect local de « continuation », au sens où ce que l'on définit devra répondre à la question : comment poursuivre mon chemin lorsque je suis en un certain point d'une courbe ? Bien sûr, cela correspondra la plupart du temps à un sens de parcours global sur la courbe, mais pour certains cas limites ce sera cet aspect local sur lequel il faudra se focaliser. Car nous verrons qu'il ne s'agit finalement de rien d'autre que de cela : dans quel sens doit-on parcourir une courbe ?

5.2.1. *Dans quel cadre ? En quoi consiste-il ?*

Essayons déjà d'avoir une première idée de ce principe. Son cadre général d'application est le suivant : à partir de $n+1$ fonctions $F_0, F_1, \ldots, F_n$ de n variables à valeurs réelles suffisamment régulières on peut former $\frac{n(n+1)}{2}$ sous-variétés de dimension 1[122]. En effet l'ensemble des points de $(z_1, \ldots, z_n)$ tels que $F_0 = F_1 = \cdots = F_{h-1} = F_{h+1} = \cdots = F_{k-1} = F_{k+1} = \cdots = F_n = 0$ est une sous-variété de dimension 1 que Kronecker qualifie de suite continue de points (*stetige Folge*) ou de lignes (*Linie*). C'est sur ces lignes qu'il définit son *Fortgangsprincip*, son *sens de parcours.*

Ainsi, dans le cas $n = 2$, on a la figure 7 où l'on cherche à déterminer un sens de parcours sur $F_0 = 0$, $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$.

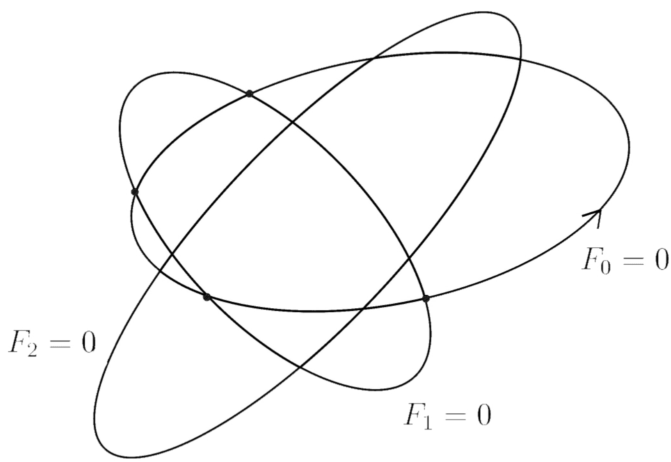

FIGURE 7.

122 Dans le seul cours où Kronecker traite le cas général n, il nomme les fonctions $F_{00}, \ldots, F_{n0}$ et il suppose implicitement qu'elles admettent des dérivées partielles (Voir [Kronecker 1879, p. 466]).

5.2.2. *Un concept « fondamental », mais peu présent*

Le terme de *Fortgangsprinzip* apparaît dans les écrits de Kronecker pour la première fois dans son article de mars 1869 *Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln*, où il introduit la théorie des caractéristiques. À son propos Kronecker affirme[123] :

> Le « principe de parcours » expliqué ici est le véritable fondement de mes recherches sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables [Kronecker 1869a, p. 178].

On ne trouve pourtant ce « principe fondamental » que quatre fois dans son œuvre publiée : trois fois dans [Kronecker 1869a] et une fois dans [Kronecker 1878a], et donc uniquement dans deux des quatre articles où il présente la théorie des caractéristiques. Par ailleurs, tout au moins sous le terme de *Fortgangsprincip*, ce principe n'a quasiment pas été repris par ses contemporains. À part dans un article de Paul Stäckel [Stäckel 1893] et dans [Landsberg 1911] nous n'avons trouvé aucun document le mentionnant. Il apparaît aussi quelquefois, mais sans être nommé, dans la présentation de la théorie des caractéristiques (par exemple dans le cours d'algèbre de Netto [Netto 1900]).

5.2.3. *Les raisons de l'introduction de ce principe*

Examinons ce qui amène Kronecker à introduire ce principe. Comme Gauss avant lui, lorsque Kronecker doit parcourir une courbe dans le plan, il détermine son sens de parcours comme étant celui qui laisse l'« intérieur » à gauche. Mais, comme il le remarque dans ses cours à l'université de Berlin, le passage à des dimensions supérieures devient problématique. En 1881, il écrit ainsi[124] :

> En règle générale on parcourt ainsi une courbe de sorte que l'intérieur reste à gauche, mais cette considération se limite aux figures planes. Nous voulons ainsi établir un critère purement analytique [Kronecker 1881b, p. 164].

et dans son dernier cours de 1891, il ajoute[125] :

---

123 Das hier auseinandergesetzte „Fortgangsprincip" bildet die eigentliche Grundlage meiner Untersuchungen über Systeme von Functionen mehrer Variabeln.

124 In der Regel durchläuft man nun eine Curve so, daß das Innere links bleibt, doch ist diese Betrachtung auf ebene Gebilde beschränkt. Wir wollen daher ein rein analytisches Criterium aufstellen

125 Diese Festlegung der Richtung – wir wollen es das Fortgangsprinzip nennen – ist für den Fall der Ebene gleichbedeutend mit der Vorschrift, die Kurve so zu durchlaufen, daß das Innere zur Linken liegt. (...) Jedoch ist diese letztere Festsetzung schon für eine Bewegung in Raume nicht mehr anwendbar, da hier ein « rechts » oder

> Cette détermination de la direction – nous l'appellerons le principe de parcours – est dans le cas du plan équivalent à la règle fixant le sens de parcours de la courbe de sorte que l'intérieur reste à gauche. (...) Cependant cette dernière détermination n'est déjà plus applicable pour un déplacement dans l'espace, car ici une « droite » ou une « gauche » ne pourraient pas être différenciées, et pour entrer dans l'étude de variétés de plus grande dimension, fixer *arithmétiquement* un principe de parcours est bien une condition nécessaire préalable [Kronecker 1891, p. 232].

L'argument que développe Kronecker dans son cours porte donc sur la difficulté à étendre la notion de sens de parcours lorsque l'on est en dimension supérieure à deux. Pourtant, dans le cours de 1881 et dans celui de 1891, Kronecker ne traitera que des courbes du plan[126]. En fait, un seul des manuscrits des cours sur la théorie des équations algébriques présents à la bibliothèque de Strasbourg traite du cas n : il s'agit de celui de 1878/79, qui suit donc immédiatement la parution de son article *Über die Charakteristik von Funktionen-Systemen.* Il faut donc chercher aussi ailleurs que dans ses cours les raisons de l'introduction du *Fortgangsprincip.*

5.2.4. *Explication du principe dans le cas* $n = 2$

Comme nous l'avons dit, Kronecker ne traite essentiellement dans son cours que le cas des courbes du plan, c'est-à-dire le cas $n = 2$.

On a alors trois fonctions numériques F_0, F_1 et F_2 que Kronecker suppose différentiables par rapport aux deux variables x et y. On notera, comme Kronecker

$$F_{01} = \frac{\partial F_0}{\partial x} \qquad F_{02} = \frac{\partial F_0}{\partial y},$$

$$F_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial x} \qquad F_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial y},$$

$$F_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad F_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial y}.$$

« links » nicht unterschieden werden kann, und für den Eintritt in die Untersuchungen höherer Mannigfaltigkeiten wird es erst recht eine unerlässliche Bedingung, ein Fortgansprinzip *arithmetisch* zu fixieren.

126 Cependant il semble ici nécessaire de rappeler l'aspect spéculatif de ces remarques : nous ne sommes en possession que d'un manuscrit décrivant, peut-être de façon incomplète, la théorie dans le cas général. La prise de notes de Kneser de 1880-1881 pourrait laisser penser que la théorie des caractéristiques n'est pas abordée [Kneser 1881], alors que celle de Runge de la même année (mais qui contient peut-être aussi celle de 79) se termine par quelques notes sur la théorie pour $n + 1$ équations.

Soit de plus trois variables F_{00}, F_{10} et F_{20}. Alors on a le déterminant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_{00} & F_{10} & F_{20} \\ F_{01} & F_{11} & F_{21} \\ F_{02} & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix}$$

et les sous-déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{21} \\ F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = F_{11} \cdot F_{22} - F_{21} \cdot F_{12}$$

$$\Delta_2 = -\begin{vmatrix} F_{01} & F_{21} \\ F_{02} & F_{22} \end{vmatrix} = F_{21} \cdot F_{02} - F_{01} \cdot F_{22}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} F_{01} & F_{11} \\ F_{02} & F_{12} \end{vmatrix} = F_{01} \cdot F_{12} - F_{11} \cdot F_{02}.$$

$F_0 = 0$, $F_1 = 0$ et $F_2 = 0$ sont les trois courbes – les 3 *lignes* dans le vocabulaire de Kronecker – sur lesquelles nous souhaitons nous déplacer. Le principe est le suivant : on parcourt une courbe en regardant les points d'intersection avec l'une des deux autres. On obtient alors 6 parcours différents : $[01], [10], [02], [20], [12], [21]$.

(1) $[01]$ correspond à un parcours de $F_2 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_0,
(2) $[10]$ correspond à un parcours de $F_2 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_1,
(3) $[02]$ correspond à un parcours de $F_1 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_0,
(4) $[20]$ correspond à un parcours de $F_1 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_2,
(5) $[12]$ correspond à un parcours de $F_0 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_1,
(6) $[21]$ correspond à un parcours de $F_0 = 0$ en regardant les points d'intersection avec F_2.

Regardons par exemple plus précisément $[12]$ et $[21]$:

[12] : On parcourt $F_0 = 0$ en regardant les points d'intersection avec $F_1 = 0$. Soit $M(x', y')$ un point de $F_0 = 0$ à partir duquel on veut se déplacer et $\Phi(x, y)$ une nouvelle fonction répondant aux mêmes conditions que les F_i et telle que la courbe $\Phi = 0$ passe par M.

Ce que souhaite Kronecker, c'est que

$$\frac{\partial \begin{vmatrix} F_{00} & \Phi & F_{20} \\ F_{01} & \Phi_1 & F_{21} \\ F_{02} & \Phi_2 & F_{22} \end{vmatrix}}{\partial F_{20}} \cdot d\Phi > 0,$$

où Φ_1 désigne $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $\Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$, c'est-à-dire que

$$\begin{vmatrix} F_{01} & \Phi_1 \\ F_{02} & \Phi_2 \end{vmatrix} \cdot d\Phi > 0,$$

donc que[127]

$$(F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1) \cdot d\Phi > 0.$$

Notation

Pour comprendre ce qui suit, il faut se rappeler ce que représentent dx et dy pour Kronecker dans le cadre de cette étude. On est en train de se déplacer sur une courbe. Si l'on pose ds l'élément d'arc au point M, dx et dy sont les projections orthogonales de ds. Ainsi, on peut voir $\vec{t}(dx, dy)$ comme un vecteur tangent à la courbe $f = 0$. Comme $\vec{n}(f_1(x', y'), f_2(x', y'))$ est normale à cette même courbe en M, ces deux vecteurs sont orthogonaux et leur produit scalaire est donc nul :

$$f_1 dx + f_2 dy = 0$$

Cela ne semble pas nécessiter d'explications supplémentaires pour un lecteur de la fin du XIXe siècle : dans les quatre manuscrits où Kronecker présente sa théorie des caractéristiques il pose sans aucune justification l'égalité précédente ([Kronecker 1873, p. 173], [Kronecker 1879, p. 513], [Kronecker 1882b, p. 164] et [Kronecker 1891, p. 232]). Même dans le cours de 1878-79, où la plupart des arguments sont explicités, cette égalité n'est qu'affirmée : il la tient donc pour acquise. Et en effet, cette conception est l'un des outils de la géométrie différentielle du XIXe siècle, et fait partie des connaissances sur le calcul différentiel enseigné dans la seconde moitié du XIXe siècle. On pourra lire par exemple le cours de Sturm à l'école polytechnique [Sturm 1901, p. 19] ou le cours de calcul infinitésimal pour ingénieurs de Rouché-Lévy [Rouché & Lévy 1900, p. 64].

Une autre façon d'interpréter cette égalité est la suivante : nous nous déplaçons sur une courbe où f est constamment nulle. Si l'on suppose

127 Kronecker écrit plutôt

$$\operatorname{sgn} d\Phi = \operatorname{sgn} F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1.$$

l'existence d'un paramétrage $(x(t), y(t))$ de cette courbe, alors $F(t) = f(x(t), y(t)) = 0$, donc $dF = x'(t)f_1(x(t), y(t))dt + y'(t)f_2(x(t), y(t))dt = 0$. En posant $x'(t)dt = dx$ et $y'(t)dt = dy$ on obtient l'égalité voulue. Dans les deux cas, Kronecker utilise des résultats de la géométrie différentielle lorsqu'il cherche à « arithmétiser » son principe de parcours.

Kronecker montre ensuite que cette condition est indépendante du choix de la fonction Φ en montrant que pour toute fonction Φ, il y a équivalence entre $F_{01} \cdot dy > 0$ et $(F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1) \cdot d\Phi > 0$. Examinons ce qui se passe dans les deux illustrations suivantes :

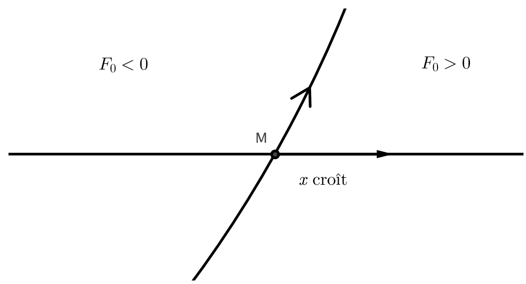

FIGURE 8.

Dans la figure 8, lorsque x croît, on passe de $F_0 < 0$ à $F_0 > 0$, donc F_0 croît et $F_{01} > 0$. Or $F_{01} \cdot dy > 0$, donc $dy > 0$. On doit donc, à partir de M, « monter ».

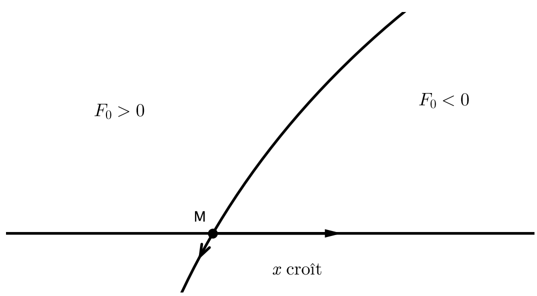

FIGURE 9.

Dans la figure 9, lorsque x croît, on passe de $F_0 > 0$ à $F_0 < 0$, donc F_0 décroît et $F_{01} < 0$. Or $F_{01} \cdot dy > 0$, donc $dy < 0$. On doit donc, à partir de M, « descendre ».

Kronecker poursuit en examinant l'inversion du sens de parcours et le cas des points doubles.

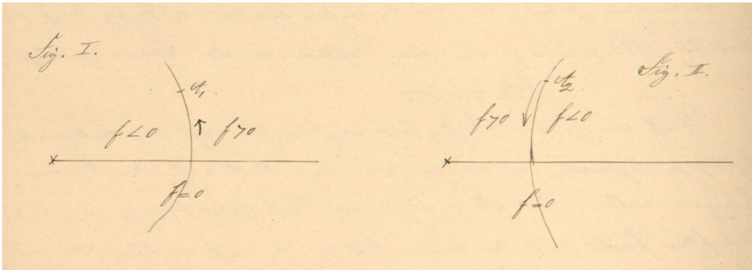

FIGURE 10. [Kronecker 1891, p. 231]

5.2.5. *Conclusion*

Le travail que nous venons de voir est valable pour une très grande variété de courbes, et pas seulement les courbes algébriques, bien que Kronecker considère uniquement ces dernières. Finalement, ce qui est utile ici, c'est plutôt leur aspect *lisse*[128], et donc leurs propriétés *analytiques* plutôt que *algébriques*.

Les références explicites à ce principe de parcours de Kronecker que nous avons pu trouver sont rares. On le trouve tout d'abord dans un article de Georg Landsberg publié en 1911 : *Beiträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie* [Landsberg 1911]. Landsberg a travaillé avec Kurt Hensel pour la rédaction en 1902 de la *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen : und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale* dans lequel il est question de la caractéristique [Hensel & Landsberg 1902, p. 609], au sens de Kronecker, d'un système de deux fonctions, et cette collaboration a certainement dû lui permettre d'avoir accès aux notes de cours de Kronecker. Dans ce mémoire, Landsberg cite Paul Stäckel : ce dernier a effectivement utilisé ce principe dans son article de 1893 *Ueber Systeme von Functionen reeller Variabeln* [Stäckel 1893]. Rappelons que Stäckel a suivi les cours de Kronecker à Berlin et a pris les notes à l'origine d'au moins l'un des manuscrits présents à Strasbourg [Kronecker 1886] : il a donc eu un accès direct et privilégié aux cours de Kronecker. Enfin, Johannes Knoblauch (1855-1915), dans ses *Grundlagen der differentialgeometrie* [Knoblauch 1913], utilise le terme de *Fortgangsprincip*. La notion est assez proche mais cependant différente : elles ne se rejoignent qu'accidentellement.

128 Au sens anglais du terme (*smooth*) : fonction extrêmement régulière qui a des différentielles de tout ordre, c'est-à-dire de classe C^{∞}.

Pourtant, au début du XX^{e} siècle, le lieu où vit le *Fortgangsprincip*, c'est-à-dire la théorie des caractéristiques, est d'après Hadamard « une notion qui est maintenant classique » [Tannery & Hadamard 1910, p. 437], et il en donne même un certain nombre d'applications. Ce à quoi Hadamard fait allusion, c'est en fait à la seconde partie du premier article de Kronecker, où il développe ce qui est aujourd'hui appelé *l'intégrale de Kronecker*. C'est sous cette version que cette extension de l'indice de Cauchy trouve une postérité à la fin du XIX^{e} siècle et au début du XX^{e}, et cela ne correspond pas à ce que Kronecker expose dans ses cours. Ainsi, ce principe semble avoir été étudié uniquement par des mathématiciens ayant eu accès au cours de Kronecker sur la théorie des équations algébriques. Ce principe, qui permet de s'orienter sur les sous-variétés de dimension 1, n'a été que très peu commenté et repris. Nous pouvons donc raisonnablement nous poser la question : pourquoi avoir introduit ce principe ?

Dans le premier tome de son célèbre traité d'algèbre, Weber expose la théorie des caractéristiques uniquement dans le cas d'un système de trois fonctions [Weber 1898, p. 341]. Dans cet exposé, pourtant très complet, le *Fortgangsprincip* n'est pas décrit en tant que tel, et l'inégalité $(F_{01}\Phi_2 - F_{02}\Phi_1)\cdot d\Phi > 0$ est regardée comme une conséquence du fait de laisser à « gauche » le domaine $F_0 < 0$. Mais lorsqu'il examine un système de trois courbes et regarde comme Kronecker les intersections de l'une d'entre elles avec une autre, il donne sans justification une règle pour effectuer ce parcours.

Une comparaison minutieuse du manuel de Weber et du cours de Kronecker nous permet de supposer que Weber a eu dans les mains le cours de Kronecker sur les caractéristiques. Si dans ce livre, qualifié encore aujourd'hui de « mine de résultats »[129], et que Leo Corry décrit comme le « standard German textbook on algebra » [Grattan-Guinness 2005, pp. 690-699], Weber a décidé de ne pas développer ce *Fortgangsprincip*, c'est certainement en grande partie parce que son exposition n'est pas nécessaire à la compréhension de la théorie des caractéristiques dans le cas $n = 2$. Ce principe a donc eu une très faible postérité, tout au moins sous cette forme. Weber, qui donne l'une des présentations de la théorie des caractéristiques la plus proche de celle de Kronecker dans ses cours, évite de l'exposer.

On voit bien la nécessité pour Kronecker de donner cette définition dans l'article de 1869 où il manipule des variétés de dimension n, mais pourquoi a-t-il introduit le *Fortgansprincip* dans ses cours ? On ne peut noter

---

129 Expression utilisée par Jean-Pierre Serre : voir [Schappacher & Volkert 1997, p. 6].

aucune différence fondamentale entre l'exposition qu'il en fait en 1881 et celle qu'il présente en 1891 : à part dans les termes employés, il n'y a donc pas ici, comme on peut le voir dans d'autres parties du cours, une réécriture qui prendrait en compte les nouveaux outils qu'il a construits dans les *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen* [Kronecker 1882a], ce qui aurait justifié au moins sa présence en 1891.

Une première explication pourrait être la suivante. Le court paragraphe de l'article de Kronecker qui présente ce principe ne suffit pas à en faire saisir le fonctionnement : il permet à la rigueur de convaincre le lecteur de l'existence d'un tel principe. Il est donc tout à fait envisageable de voir le développement dans son cours du *Fortgangsprincip* dans le cas $n = 2$ comme un complément nécessaire pour la compréhension de la théorie générale des caractéristiques qu'il publie en parallèle. Ainsi, l'accès à cette théorie n'est pas simplement facilité par la lecture du cours, mais l'étude des *Vorlesungen* la rend *possible*.

Ensuite, ce principe est qualifié d'« analytique » en 1880 et d'« arithmétique » en 1890, et ces qualificatifs s'opposent tous deux à celui de « géométrique », qui désigne la méthode (à la Gauss) consistant à choisir un sens de parcours en utilisant les termes « gauche » et « droite » : en effet, on se rappelle que le mot « arithmétique » comprend pour Kronecker toutes les disciplines mathématiques sauf la géométrie et la mécanique. La volonté de faire une description analytique du *Fortgangsprincip* dans le cas des courbes du plan est une illustration de ce mouvement d'*arithmétisation* du travail de Kronecker.

5.3. *La caractéristique de trois fonctions à deux variables*

À partir du théorème de Sturm généralisé, Kronecker propose une interprétation géométrique qui l'amène à considérer un système de trois courbes dont l'une est l'axe des abscisses : il souhaite généraliser ses résultats pour le cas où cette dernière est quelconque, ou tout au moins a le même statut que les deux autres.

5.3.1. *Une proposition problématique*

Kronecker commence par donner la proposition suivante :

Proposition

Si $U(x, y)$ et $V(x, y)$ sont deux fonctions numériques suffisamment régulières (le plus raisonnable serait de les prendre algébriques) et fermées (au sens que lui donne Kronecker). Alors :

$$\sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}(dV) = 0 = \sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}\ (U_1V_2 - U_2V_1).$$

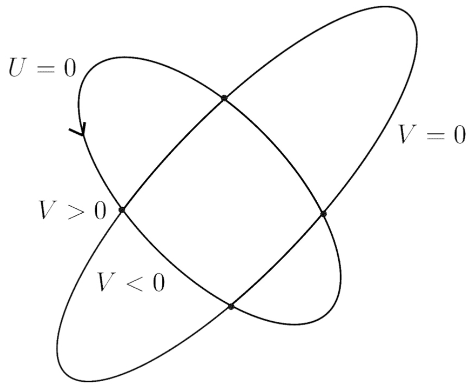

FIGURE 11.

En termes contemporains, on pourrait qualifier l'argument de Kronecker de « topologique ». Il s'agit de dire que, les courbes étant fermées, si l'on parcourt entièrement la courbe $U = 0$, on sera « entré » autant de fois dans la courbe $V = 0$ qu'on en sera « sorti ». Je rappelle qu'« intérieur » et « extérieur » de $V = 0$ sont définis respectivement par $V < 0$ et $V > 0$. Lorsque l'on entre dans $V = 0$, on passe de $V > 0$ à $V < 0$, donc $dV < 0$. Au contraire si l'on sort de $V = 0$, on passe de $V < 0$ à $V > 0$, donc $dV > 0$. Finalement

$$\sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}(dV) = 0.$$

Or, d'après le *Fortgangsprincip*, dV est soit toujours du même signe que $U_1V_2 - U_2V_1$, soit toujours du même signe que $-(U_1V_2 - U_2V_1)$. On a donc toujours

$$\sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}\,(U_1V_2 - U_2V_1) = 0.$$

Kronecker a utilisé ici – et d'ailleurs on retrouve cet argument à de nombreuses reprises dans son œuvre, de façon plus ou moins explicite – une argumentation dont Gauss s'est servi dans la première et la quatrième démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre[130] :

130 Ma traduction de « Iam ex geometria sublimiori constat, quamvis curvam algebraicam (sive singulas cuiusvis curvae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redeuntem aut utrimque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curvae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere ».

Alors d'après les mathématiques supérieures, il est établi que n'importe quelle courbe algébrique (ou bien chacune des branches de n'importe quelle courbe algébrique si elle se trouve être composée de plusieurs) ou bien revient sur elle-même, ou bien s'étend de part et d'autre vers l'infini, et donc si une branche d'une courbe algébrique entre dans un espace fini, cette même branche doit nécessairement sortir quelque part de cet espace [Gauss 1799/1866, p. 27].

Ce à quoi il ajoute la note suivante[131] :

Certes, il semble avoir été suffisamment bien démontré qu'une courbe algébrique ne peut ni s'interrompre brutalement quelque part (comme par exemple dans la courbe transcendante dont l'équation est $y = \frac{1}{\log x}$) ni, pour ainsi dire, se perdre après des spirales en un point (comme la spirale logarithmique) ; autant que je sache, personne n'a émis de doute à ce sujet. Cependant, si quelqu'un le demande, je me chargerai à l'occasion de donner une démonstration dont on ne pourra douter. Mais dans le cas présent, il est manifeste que si une branche, par exemple 2, ne pouvait sortir nulle part du cercle (fig. 3), on pourrait entrer en 0 et en 2, ensuite faire le tour de toute cette branche (qui devrait se perdre dans l'espace du cercle) et enfin on pourrait de nouveau sortir du cercle entre 2 et 4 de telle sorte que nulle part sur tout le chemin on n'aurait intersecté la ligne première. L'absurdité de cela est évidente du fait qu'au point où l'on est entré dans le cercle, on a eu la première surface au dessus de soi, mais à la sortie au dessous ; c'est pourquoi nécessairement on a dû quelque part rencontrer la première surface, à savoir en un point de la première ligne. Par ailleurs, d'après ce raisonnement reposant sur les principes de la géométrie de position, lesquels ne sont pas moins valides que ceux de la géométrie des grandeurs, il s'ensuit seulement que si on entre dans le cercle par une branche de la première ligne, on peut sortir du cercle à un

131 Ma traduction de « Satis bene certe demonstratum esse videtur, curvam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (uti e. g. evenit in curva transscendente, cuius aequatio $y = \frac{1}{\log x}$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (ut spiralis logarithmica), quantumque scio, nemo dubium contra hanc rem movit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam. In casu praesenti vero manifestum est, si aliquis ramus e.g. 2, ex circulo nllibi exiret (fig. 3), te in circulum inter 0 et 2 intrare, postea circa totum hunc ramum (qui in circuli spatio se perdere deberet) circummeare, et tandem inter 2 et 4 rursus ex circulo egredi posse, ita ut nullibi in tota via in lineam primam incideris. Hoc vero absurdum esse, inde patet, quod in puncto, ubi in circulum ingressus es, superficiem primam supra te habuisti, in egressu, infra ; quare necessario alicubi in superficiem primam ipsam incidere debulsti, sive in punctum lineae primae. Ceterum ex hoc ratiocinio principiis geometriae situs innixo, quae haud minus valida sunt, quam principia geometriae magnitudinis, sequitur tantummodo, si in aliquo ramo lineae primae in circulum intres, te alio loco ex circulo rursus egredi posse, semper in linea prima manendo, neque vero, viam tuam esse lineam continuam in eo sensu, quo in geometria sublimiori accipitur. Sed hic sufficit, viam esse lineam continuam in sensu communi, i. e. nullibi interruptam sed ubique cohaerentem ».

> autre endroit, toujours en restant sur la première ligne. Mais il ne s'ensuit pas que le chemin suivi soit une ligne continue au sens qui lui est donné dans la géométrie supérieure. Mais il suffit ici que le chemin soit une ligne continue au sens commun, c'est-à-dire nulle part interrompue mais cohérente partout [Gauss 1799/1866, p. 27].

Ainsi toute courbe algébrique, et donc aussi chaque branche d'une telle courbe qui entre à l'intérieur d'une courbe *fermée* doit en ressortir : en effet, « ou bien [elle] revient sur elle-même, ou bien [elle] s'étend de part et d'autre vers l'infini ». Il s'agit là du point problèmatique des deux démonstrations de Gauss. C'est en fait une propriété des courbes algébriques qui n'est pas du tout évidente et il faudra attendre 1920 pour que cette difficulté soit mise en évidence par Alexander Ostrowski dans [Ostrowski 1920], Gauss se contentant de souligner le caractère trivial de cette proposition, et Kronecker s'en servant de façon implicite. Nous pouvons retenir ici la définition de la continuité géométrique que fournit Gauss, « une ligne continue au sens commun, c'est-à-dire nulle part interrompue mais cohérente partout », qui est aussi celle de Kronecker. Nous verrons que le problème de la possibilité de l'intersection de deux lignes continues est lié aux difficultés que présente la notion de racine.

5.3.2. *Caractéristique de trois fonctions de deux variables*

À partir du *Fortgangsprincip* et de la proposition précédente, Kronecker déroule un certain nombre de calculs qui serviront de fondements à sa définition de la caractéristique[132]. On est dans la situation suivante : soient f, φ et ψ trois fonctions algébriques de deux variables x et y formant des courbes fermées. Nous allons parcourir l'une de ces trois fonctions en examinant les points d'intersection avec une seconde. En posant

$$\Delta = \begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix},$$

où $f_1 = \frac{df}{dx}$ et $f_2 = \frac{df}{dy}$. Kronecker définit la caractéristique de trois fonctions de deux variables par :

$$\chi(f, \varphi, \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta.$$

132 Pour le détail de ces calculs, on pourra se reporter à l'annexe B.

Si maintenant on pose :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = -\begin{vmatrix} f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \psi_2 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

Kronecker montre la caractéristique du système (f, φ, ψ) peut prendre les douze formes suivantes [Kronecker 1891, p. 236] :

$$\begin{aligned}
\chi(f, \varphi, \psi) &= -\frac{1}{2} \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} \Delta = -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=\psi=0} \operatorname{sgn} \Delta \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\psi=f=0} \operatorname{sgn} \Delta = \sum_{\substack{\psi<0 \\ f=\varphi=0}} \operatorname{sgn}\,(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) \\
&= \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \operatorname{sgn}\,(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = \sum_{\substack{\varphi<0 \\ \psi=f=0}} \operatorname{sgn}\,(\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=\psi=0} \operatorname{sgn} d(f \cdot \varphi) = -\frac{1}{2} \sum_{\psi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi \cdot \psi) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} d(\psi \cdot f) = -\frac{1}{2} \sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn} d(f \cdot \varphi) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi \cdot \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{\psi=\varphi=0} \operatorname{sgn} d(\psi \cdot f).
\end{aligned}$$

On arrive ainsi à une définition de la caractéristique que l'on pourrait presque qualifier d'arithmétique qui découle d'un long enchaînement d'égalités. L'interprétation géométrique ne sera donnée qu'a posteriori.

Kronecker donne trois interprétations graphiques, ou plutôt *géométriques,* de ce qui précède

Interprétation graphique 1

Considérons maintenant la partie du plan définie par $\varphi\psi < 0$, c'est-à-dire celle que Weber nomme « l'enclos » (*Binnenraum*) [Weber 1898, p. 341] et parcourons f en regardant les points d'intersection avec φ : un tel point sera qualifié *d'entrée* si on passe de l'extérieur à l'intérieur de l'enclos, c'est-à-dire si en ce point $d(\varphi \cdot \psi) < 0$. De même, on le qualifiera de *sortie* si on passe de l'intérieur à l'extérieur de l'enclos, c'est-à-dire si en ce point $d(\varphi \cdot \psi) > 0$. Si on note $\mathcal{E}$ le nombre d'entrées et $\mathcal{A}$ le nombre de sorties, on a

$$\chi(f, \varphi, \psi) = -\frac{1}{2} \sum_{\varphi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi \cdot \psi)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\varphi=f=0} \text{sgn } -d(\varphi \cdot \psi)$$
$$= \frac{1}{2}(\mathcal{E} - \mathcal{A}).$$

C'est-à-dire que la caractéristique du système f, φ, ψ est la demi-somme de la différence entre le nombre d'entrées et de sorties de l'enclos. Les formules données par Kronecker montrent par ailleurs que ce nombre est indépendant du choix des deux fonctions pour former l'enclos.

Interprétation graphique 2

Kronecker regarde la caractéristique du système $f\Delta_1, \varphi, \psi$. On sait, d'après le tableau précédent, que

$$\chi(f, \varphi, \psi) = \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1$$

donc on a :

$$\begin{aligned}
\chi(\Delta_1 f, \varphi, \psi) &= \sum_{\substack{\Delta_1 f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1 \\
&= \sum_{\substack{\Delta_1<0 \text{ et } f>0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1 + \sum_{\substack{\Delta_1>0 \text{ et } f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } \Delta_1 \\
&= \sum_{\substack{f>0 \\ \varphi=\psi=0}} (-1) + \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} (+1)
\end{aligned}$$

On peut donc dire que « la caractéristique de ce système donne l'excès des points d'intersection de φ et ψ à l'intérieur de $f = 0$ sur ceux à l'extérieur de $f = 0$ » [Kronecker 1881b, p. 166].

Interprétation graphique 3

De

$$\begin{aligned}
\chi(f, \varphi, \psi) &= \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) \\
&= \sum_{\substack{f<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\Delta_1) \\
&= \sum_{\substack{f<0, \Delta_1>0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\Delta_1) + \sum_{\substack{f<0, \Delta_1<0 \\ \varphi=\psi=0}} \text{sgn } (\Delta_1) \\
&= \sum_{\substack{f<0, \Delta_1>0 \\ \varphi=\psi=0}} (+1) + \sum_{\substack{f<0, \Delta_1<0 \\ \varphi=\psi=0}} (-1),
\end{aligned}$$

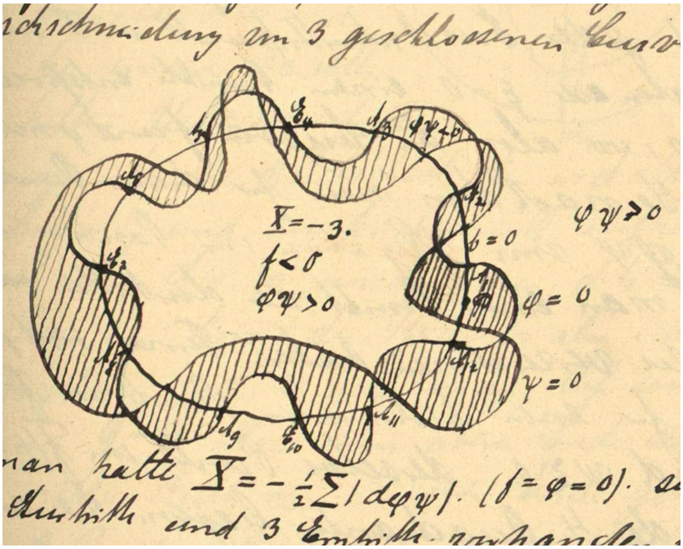

FIGURE 12. Caractéristique de 3 courbes [Kronecker 1879, p. 526]

on déduit que la caractéristique est le nombre de points d'intersection de $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ à l'intérieur de $f = 0$ pour lesquels Δ_1 est positif moins celui pour lesquels Δ_1 est négatif. Autrement dit, la caractéristique est le nombre de solutions à l'intérieur du domaine $f = 0$ du système d'équations $\varphi = 0, \psi = 0$ pour lesquelles le déterminant fonctionnel est positif moins celui pour lesquelles le déterminant fonctionnel est négatif.

Souhaitant étendre le domaine d'application de sa théorie, Kronecker s'attaque ensuite, sans difficulté, aux courbes qui ne sont pas fermées. Le principe est de se restreindre à un disque de diamètre fini et que l'on peut déterminer *arithmétiquement* à l'intérieur duquel se trouvent tous les points d'intersection de ces courbes. La détermination du rayon de ce cercle est d'ailleurs une étape importante des démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre de Gauss, ainsi que de ses reprises par Kronecker.

5.3.3. *Conclusion*

On mesure donc l'importance que revêt pour Kronecker l'interprétation graphique de sa théorie. On voit apparaitre deux types d'interprétations : celles qui s'expriment uniquement en termes d'intersections de points, et celle dans laquelle intervient le signe du discriminant. Cette dernière sera à la base de l'une des premières applications de la théorie des caractéristiques, à savoir la détermination du nombre de solutions, de « racines », d'un système de n équations à n inconnues à l'intérieur d'un compact. Nous avons jusqu'à maintenant, sur les conseils mêmes de Kronecker, repoussé les discussions autour du concept de *racine*, qui pourtant est toujours présent dans le travail que nous venons de décrire. Il est donc temps d'essayer de décrire la façon dont Kronecker aborde cette notion dans ses leçons.

6. LES RACINES D'UNE ÉQUATION

Si pour Kronecker l'*Algèbre* ne se limite pas à la résolution des équations, l'objet central des *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Gleichungen* reste l'équation, et la notion de racine est donc bien sûr primordiale, que l'on parle de leur recherche, de leur existence ou de leur nature, ces trois qualités étant intimement liées. Des discussions sur ce concept apparaissent plus particulièrement dans ses leçons à la fois dans les chapitres introductifs et dans la partie qu'il consacre au théorème de Sturm et à la théorie des caractéristiques. Nous allons examiner comment dans ces passages Kronecker reconsidère la place de la « racine » dans l'algèbre.

6.1. *Le mythe de la résolution par radicaux*

Dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques, Kronecker affirme que [133] :

---

[133] Es lag nahe, die Operation bei der *potestas pura* vorerst umkehren und rückwärts wieder x aus dem Wert

$$x^n = y$$

(x, n, y ganze positive Zahlen) bestimmen zu wollen. Das Mittelalter schuf dafür das Zeichen : $x = \sqrt[n]{y}$, und weil sich diese Gleichungen angenähert auflösen lassen, so nahm man später das Zeichen für die durch dasselbe angedeutete Operation. Nun ist dieses Zeichen zwar ganz ausschließlich den <u>reinen</u> Gleichungen angepaßt. Als aber mit seiner Hilfe die Wurzeln aller Gleichungen des zweiten und später gar des dritten und vierten Grades dargestellt waren, da war von der Mitte des sechzehnten Jahrhunderts an die mathematische Welt widerstandslos beherrschst von dem Aberglauben, daß jede *potestas affecta* beliebigen Grades umkehrbar sei durch Wurzelausziehung. *Vieta, Descartes, Fermat, Newton, Euler* waren fest überzeugt, daß jede Gleichung sich auflösen lassen müsse. Aber alle Beweise von der Existenz der Wurzeln jeder algebraischen Gleichung würden [Correction dans la marge : « waren »], wie *Gauss* aufdeckte, fehlerhaft. Das hatte seinen Grund darin, daß auch die größten Mathematiker sich über den Begriff der Wurzeln nicht genug Rechenschaft gegeben hatten. *Gauss* legt Gewicht darauf, daß er in den *Disquisitiones* die Kreisteilungsgleichungen aufzeigt als ein Paar von Gleichungen, welches durch Wurzelziehung wirklich auflösbar ist. Er knüpft daran die Bemerkung, daß die Bemühungen um die allgemeine Auflösung vielleicht gescheitert seien an der Unmöglichkeit der Sache.

Il semblait logique de vouloir d'abord inverser les opérations dans les *potestas pura* et de retrouver ensuite x à partir de la valeur

$$x^n = y$$

$(x, n, y$ sont des nombres entiers positifs$)$.

Le Moyen-Âge créa pour cela le symbole : $x = \sqrt[n]{y}$, et comme ces équations se laissent résoudre de façon approchée, nous avons pris plus tard ce symbole pour l'opération en question elle-même. Ce symbole est maintenant certes adapté exclusivement aux équations pures. Mais comme avec son aide les racines du second, et même plus tard celles du troisième et du quatrième degrés ont été représentées, il domine au milieu du XVI^e^ siècle dans le monde mathématique, sans opposition, la croyance que toutes les *potestas affecta* de n'importe quel degré sont résolubles par extraction de racine. *Viète, Descartes, Fermat, Newton* et *Euler* étaient fermement convaincus que toute équation peut être résolue.

Mais toutes les preuves de l'existence des racines d'une équation algébrique, comme *Gauss* l'a montré, étaient défectueuses. Cela est dû aussi au fait que les grands mathématiciens ne se sont pas suffisamment penchés sur le concept de racine. *Gauss* met l'accent sur le fait qu'il montre dans les *Disquisitiones* les équations cyclotomiques comme un ensemble d'équations qui sont réellement résolubles par extraction de racine. Il fait à ce propos remarquer que les efforts sur la résolution générale risquent d'échouer de par l'impossibilité de la chose [Kronecker 1891, p. 8].

Le *symbole* racine fait seulement référence à la *possibilité* de donner, par une méthode qu'il reste à définir, une résolution approchée (*angenähert auflösen*). Il n'est cependant pas question de parler de valeur approchée : elle ferait ainsi référence à une valeur exacte qui pour Kronecker n'a en général pas d'existence avérée. La suite de la citation fait allusion à la première partie de la thèse de Gauss de 1799 où celui-ci revient sur les diverses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre [Gauss 1799/1866] et montre leurs faiblesses. Mais surtout, c'est de son travail sur les polynômes cyclotomiques dont Kronecker parle : Gauss a montré que dans ce cas particulier une résolution par radicaux est possible[134], mais il a plusieurs fois remarqué que la possibilité d'une résolution *générale* par radicaux des équations algébriques de degré quelconque était douteuse. Ce travail de Gauss sur les polynômes cyclotomiques, Kronecker le poursuit et aboutit d'ailleurs au théorème sur les extensions abéliennes auquel son nom est associé. Le nom d'Abel n'apparaît pas ici alors qu'il aurait toute sa place. Kronecker poursuit en précisant sa pensée[135] :

134 Le n^{e} polynôme cyclotomique est : $\Phi_n(X) = \prod_{0 \leq k < n,\ k \wedge n = 1} \left(X - \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)\right)$, et donc ses racines sont les racines n^{es} de l'unité.

135 Die Unklarheiten des Wurzelbegriffes entsprangen verschiedenen Quellen. Einerseits traten aus der Praxis heraus die Gleichungen auf als « Rätsel », die bestimmt

> Les ambiguïtés de la notion de racine proviennent de différentes sources. D'un côté, d'un point de vue pratique, les équations apparaissent comme une « énigme » qui permet de déterminer une solution. En effet un nombre rationnel x s'élève à une *potestas affecta* :
>
> $$c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n = y,$$
>
> de sorte que puissent être retrouvés à partir du y fourni les rationnels x. D'un autre côté les équations pures se laissent résoudre par approximations. Pour l'équation $x^2 - 2 = 0$ on peut trouver des nombres ξ_1 et ξ_2 de sorte que
>
> $$0 < \xi_1^2 - 2 < \tau, 0 > \xi_2^2 - 2 > -\tau',$$
>
> où τ, τ' sont des rationnels positifs aussi petits que l'on veut. On dit alors que la « valeur réelle » de $|\sqrt{2}|$ se trouve entre ξ_1 et ξ_2 et on peut avec de tels nombres ξ_1 et ξ_2 approcher d'aussi près que l'on veut $\sqrt{2}$. On oublie ainsi complètement que $\sqrt{2}$ s'explique uniquement par l'équation : $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ et que l'on peut s'approcher avec une suite de nombres d'un nombre existant (donc rationnel), mais pas d'un être qui est seulement « défini » par une exigence [Kronecker 1891, p. 9].

Une équation, dit Kronecker, peut être vue comme un problème à résoudre : il est alors naturel de chercher à en donner une solution. Et si l'on conçoit la résolution d'une équation comme synonyme de *trouver x*, alors une confusion peut survenir : $\sqrt{2}$ n'est pas un « un nombre existant ». Ce qui « existe », c'est l'équation $x^2 - 2 = 0$, ce n'est pas $\sqrt{2}$. Un irrationnel n'aura donc pas de valeur approchée, même rationnelle, étant donné qu'il n'existe pas en tant que nombre. l'objet principal, pour Kronecker, est l'équation elle-même, dont d'ailleurs les coefficients sont plutôt des nombres entiers.

---

eine Auflösung zuließen. Denn war eine rationale Grundzahl x erhoben zu einer *potestas affecta* :

$$c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n = y,$$

so mußte rückwärts aus dem vorgelegten y das rationale x wieder zu erraten sein. Anderseits ließen die reinen Gleichungen sich angenähert lösen. Für die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ ließen sich Zahlen ξ_1 und ξ_2 finden, so daß

$$0 < \xi_1^2 - 2 < \tau, 0 > \xi_2^2 - 2 > -\tau',$$

wo τ, τ' beliebig kleine positive rationale Zahlen sind. Man sagte dann, der « wahre Wert » von $|\sqrt{2}|$ läge zwischen ξ_1 und ξ_2 und man könne sich mit solchen Zahlen ξ_1 und ξ_2 der $\sqrt{2}$ beliebig nähern. Man vergaß dabei ganz, daß $\sqrt{2}$ allein erklärt ist durch die Gleichung : $(\sqrt{2})^2 - 2 = 0$ und daß man sich mit einer Reihe von Zahlen wohl einer vorhandenen (also rationalen) Zahl nähern könne, nicht aber einem Wesen, das allein durch eine Forderung « definiert » ist.

6.2. *Arithmétique et géométrie*

Kronecker analyse ensuite l'origine de cette *épouvantable confusion* (*entsetzliche Confusion*)[136] :

> Cette conception était alimentée par la géométrie analytique. On voit ou on sait en effet que la courbe
>
> $$y = x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$
>
> passe pour des grandeurs négatives x sous l'axe des x, pour des grandeurs positives au dessus. Ne doit-elle pas au moins une fois, comme elle est en effet continue, couper l'axe des x ? Chaque équation cubique ne possède-t-elle pas au moins une racine réelle ?
>
> C'est cette « déduction » qui est encore et toujours une *petitio principii* grossière, bien que *Gauss* aussi ait pris comme principe la proposition disant que toute équation de degré impair a une racine réelle. En réalité y se laisse calculer uniquement pour des x rationnels, mais n'est jamais réalisée entre les points ainsi obtenus une continuité, une « courbe ». C'est pourquoi sont aussi trompeuses les déductions de Bolzano, un ecclésiastique catholique de Prague, qui veut démontrer pour une fonction continue quelconque, que si elle a des signes différents dans son domaine de continuité, elle doit passer une fois par zéro [Kronecker 1891, p. 10].

C'est donc la conception géométrique d'une courbe qui nous leurre, ainsi que son pendant analytique, c'est-à-dire en fait le théorème des valeurs intermédiaires : le théorème de Bolzano est une fois de plus une partie du problème et non de la solution. Kronecker pose ainsi la question suivante qui, selon lui, n'a pas encore été résolue : « mais une chose reste non élucidée : la nature de la racine réelle »[137]. La racine a-t-elle

---

136 Eine beständige Nahrung fand diese Vorstellung in der analytischen Geometrie. Wußte oder sah man doch, daß die Kurve

$$y = x^3 + c_1 x^2 + c_2 x + c_3$$

für großes negatives x unterhalb der x Achse, für großes positives oberhalb verläuft. Muß sie also nicht wenigstens einmal, da sie doch stetig ist, die x Achse schneiden ? Besitzt nicht also jede kubische Gleichung mindestens eine reelle Wurzel ?
Es ist diese « Folgerung » immer wieder dieselbe grobe *petitio principii*, obgleich auch *Gauss* den Satz zur Grundlage nimmt, daß jede Gleichung ungeraden Grades eine reelle Wurzel hat. In Wahrheit läßt sich allein für rationales x das zugehörige y berechnen, niemals aber zwischen den so gewonnenen Punkten, seien ihrer auch noch so viele, eine Stetigkeit, eine « Kurve » erzielen. Deshalb sind auch trügerisch die Deduktionen Bolzanos, eines katholischen Geistlichen aus Prag, der nun gar von einer beliebigen stetigen Funktion beweisen will, daß, wenn sie im Bereiche der Stetigkeit verschiedenes Zeichen hat, sie einmal durch Null hindurchgehen muß.

137 [Kronecker 1891, p. 249] : Aber eines blieb unaufgeklärt : die Natur der reellen Wurzeln.

un statut géométrique ou arithmétique ? ces statuts sont-ils équivalents ? Kronecker affirme à propos de la notion de racine que Gauss lui-même « s'en tient à illustrer géométriquement sa signification et avait la ferme conviction d'avoir donné ainsi une définition suffisante. »[138]. Et il cite alors une remarque que fait Netto dans la traduction en allemand des preuves de Gauss qui venait à peine d'être publiée : la première et quatrième preuves que Gauss donne du théorème fondamental de l'algèbre, consistent à « transférer sans plus d'examen la continuité géométrique sur des grandeurs arithmétiques, et donc, pour l'esquisser rapidement, faire correspondre à chaque distance entre deux points un nombre arithmétique »[139].
Ce qui intéresse ici plus particulièrement Kronecker, c'est le rapport entre le point de vue géométrique et arithmétique du nombre. Il rappelle d'ailleurs, dans une note en bas de page, ce que serait dans ce contexte un « nombre arithmétique »[140] :

> On doit comprendre par « nombres arithmétiques » des grandeurs sur lesquelles on peut appliquer les opérations arithmétiques de l'addition, la multiplication, la division, etc. et pour lesquelles la proposition suivante reste valable : si un produit est nul, alors l'un des facteurs doit toujours être nul [Kronecker 1891, p. 250].

On voit au passage l'importance de la notion d'intégrité dans l'arithmétique pour Kronecker. Ce qu'il dénonce, et ce sera finalement ce qui le différencie de Gauss, c'est l'identification entre la notion géométrique de distance et la notion arithmétique de nombre[141] :

---

138 [Kronecker 1891, p. 249] : emphGauss begnügte sich, ihre Bedeutung geometrisch zu veranschaulichen und war der festen Überzeugung, damit eine ausreichend Definition derselben gegeben zu haben.

139 [Netto 1876, p. 80] : die geometrische Stetigkeit ohne weiteres auf die arithmetischen Größen übertragen, und also, um es kurz anzudeuten, einer jeden Streckenlänge eine arithmetische Zahl entsprechen lassen.

140 Unter « arithmetischen Zahlen » sind Größen zu verstehen, auf welche die arithmetischen Operationen der Addition, Multiplikation, Division usw. anwendbar sind und für welche der Satz gültig bleibt : Ist ein Produkt gleich Null, so muß jedenfalls einer der Faktoren gleich Null sein.

141 Das werden alle diejenigen Mathematiker mit um so weniger Bedenklichkeit thun, welche auch die irrationalen und imaginären Größen durch geometrische Quantitäten als « definiert » erachten. Daß Gauss auch dieser letzteren Ansicht war, geht aufs deutlichste aus einem Ausspruch hervor, welchen er in einer Vorlesung der Göttingen Societät gethan hat. (abgedruckt in den Göttinger gelehrten Anzeigen 1831, 64. März, Werke V). Er sagt dort am Schlusse dieses seines Versuchs, den imaginären Größen eine feste Unterlage zu geben : « Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr

> Tous ces mathématiciens utiliseront cela avec d'autant peu de scrupules qu'ils considéreront aussi les grandeurs irrationnelles et imaginaires comme définies par des quantités géométriques. Que Gauss ait aussi été de ce dernier avis ressort le plus clairement d'une remarque qu'il a faite dans une leçon à la société de Göttingen. (Imprimée dans le Göttinger gelehrte Anzeigen de mars 1831, étude 64[142].) Il cherche, à la fin de ses essais, à donner aux grandeurs imaginaires un fondement solide : « Ici la possibilité de donner une signification intuitive à $\sqrt{-1}$ est donc complètement justifiée, et il n'en faut pas plus pour autoriser ces grandeurs dans le domaine des objets de l'arithmétique » [Kronecker 1891, p. 250].

Et finalement, la confusion s'accroît concernant le statut de ces nombres lorsque l'on est trompé par leur représentation géométrique (le plan pour les nombres complexes et la droite pour les nombres réels). C'est l'occasion pour Kronecker de rappeler son point de vue sur les interactions possibles entre géométrie et arithmétique[143] :

> Les mathématiciens qui font leur ce point de vue qui nous paraît douteux ne tiennent aucun compte du fait que certes les rapports arithmétiques sont transférables et applicables aux concepts géométriques intuitifs et que certes la géométrie a contribué et contribuera toujours aux progrès des sciences arithmétiques, mais que jamais un pur concept « arithmétique » ne pourra et ne devra être <u>défini</u> par une illustration géométrique.
>
> Ainsi nombreux sont ceux qui pensent avoir par exemple suffisamment fixé la notion de racine carrée de 2 comme un nombre véritablement arithmétique lorsqu'ils disent qu'elle correspond à la longueur de la diagonale d'un carré

bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen ».

142 Il s'agit en fait des *Göttingische gelehrte Anzeigen* du 23 avril 1831.

143 Die Mathematiker, welche eine solche, uns sehr bedenklich scheinende Ansicht zu der ihrigen machen, lassen dabei völlig außer Acht, daß zwar die arithmetischen Beziehungen auf die anschaulichen geometrischen Begriffe übertragbar und anwendbar sind, und daß die Geometrie freilich stets ganz wesentlich zum Fortschritt der arithmetischen Wissenschaften beigetragen hat und beitragen wird, daß aber niemals der rein „arithmetische" Begriff durch geometrische Veranschaulichung <u>definiert</u> werden kann und definiert werden darf.
So glauben viele z.B. den Begriff der Quadratwurzel aus 2 als eine wirkliche arithmetische Zahl hinlänglich fixiert zu haben, wenn sie sagen, sie entspräche der Länge der Diagonale eines Quadrats, dessen Seite als der Einheit gleich angenommenen würde. Sie vergessen dabei, daß sie auch hier schon vorausgesetzt haben, daß einem jeden Punkte der graden Linie bei willkürlich gewählter Maßeinheit eine arithmetische Zahl entspricht. Und um die Richtigkeit dieser letzteren Voraussetzung aufzuzeigen, ist für sie doch unbedingt wieder jene geometrische Begriffsbestimmung des Irrationalen unentbehrlich. Aber wie kann denn überhaupt ein geometrische Strecke einen arithmetischen Begriff „definieren"? Richtet sich denn der Verstand nach den Sinnen, oder ist es nicht vielmehr der Verstand, welcher durch die Sinnenwelt ordnende Fäden legt, um sie so zu beherrschen?

> dont le côté est égal à l'unité. Ils oublient à cette occasion qu'ici aussi ils ont déjà supposé qu'à tout point de la ligne graduée avec une unité arbitrairement choisie correspond à un nombre arithmétique. Et pour montrer la justesse de cette dernière supposition, cette définition géométrique des irrationnels leur est à nouveau absolument nécessaire. Mais alors comment au juste un segment de droite géométrique peut « définir » un concept arithmétique ? Car la raison se conforme-t-elle aux sens, ou n'est-ce pas plutôt la raison qui tend à travers le monde sensible des fils qui permettent de le mettre en ordre ? [Kronecker 1891, p. 250]

Pour Kronecker, arithmétique et géométrie ne sont pas incluses l'une dans l'autre, et si la géométrie est une « source d'inspiration », il n'est pas question de définir un concept arithmétique à partir de celle-ci. Bolzano est une fois de plus pris comme exemple à ne pas suivre[144] :

> Bolzano, un prêtre catholique de Prague, s'est beaucoup occupé de telles questions plus transcendantales et philosophiques dans les mathématiques ; c'était un mathématicien plein de talent, mais concernant la question précédente il était dans l'erreur. Cela est dû au fait qu'il n'a pas pu s'affranchir de l'erreur qui consiste à mélanger la géométrie et l'arithmétique. « Mais ce pont entre l'arithmétique et la géométrie ne réussira pas » [Kronecker 1887c, p. 156].

Bolzano définit pourtant, on l'a vu, une continuité arithmétisée, et la *Rein analystischer Beweis* a pour origine en grande partie sa volonté d'extraire toute considération géométrique de la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires. Il construit d'ailleurs une classification des mathématiques dans laquelle la géométrie est une science appliquée[145], contrairement à l'algèbre ou l'analyse qui sont des sciences pures : les premières doivent trouver leur fondement dans les secondes. Le problème vient ici très précisément du fait que Bolzano ait considéré les grandeurs géométriques comme des *nombres.* Maintenant que nous avons vu l'origine des ambiguïtés et des problèmes que pose la notion de *racine,* nous allons voir comment Kronecker se propose de les dépasser.

---

144 Bolzano, ein Katholischer Geistlicher in Prag, hat sich viel mit solchen mehr transcendentalen und philosophischen Fragen in der Mathematik beschäftigt ; er war ein talentvoller Mathematiker, aber in bezug auf die vorliegende Frage ist er im Irrtum. Das liegt besonders daran, dass er von dem Fehler, Arithmetik und Geometrie zu vermengen, sich nicht losmachen konnte. „Diese Brücke aber zwischen Arithmetik und Geometrie zu schlagen, wird nicht gelingen".

145 Dans les *Considérations pour un exposé mieux fondé des mathématiques* [Bolzano 1810].

6.3. *La séparation des racines*

Une partie essentielle de l'unique article (*Über den Zahlbegriff* [Boniface 1999]) où Kronecker a publié son point de vue sur les mathématiques traite de la séparation des racines. Et dans son cours du semestre d'hiver de 1886-87 sur la théorie des équations algébriques – c'est-à-dire durant l'année qui précède la publication de cet article – il affirme que si le but essentiel du théorème de Sturm est la « détermination du nombre des racines réelles des équations algébriques »[146], la plupart des ouvrages se trompent en considèrant ce problème comme définitivement résolu. Ce qu'il reste à accomplir, c'est la séparation des racines, c'est-à-dire que[147] :

> La tâche serait résolue si nous étions en mesure de préciser le plus grand intervalle de la structure qui, où que nous placions son point de départ, ne contiendra jamais plus d'une racine réelle de l'équation [Kronecker 1887c, p. 155].

En fait, le but de Kronecker est de trouver un intervalle dans lequel cette fonction ne change pas plus d'une fois de signe. Et pour cela, que ce soit dans son cours ou dans son article, il commence par déterminer un intervalle dont les bornes sont rationnelles et en dehors duquel la fonction ne changera plus de signe. Cette première étape est aussi celle qu'il met en place, à la suite de Gauss, dans le cadre de ses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre : il construit un cercle à l'intérieur duquel se trouvent toutes les *intersections* entre les deux courbes algébriques qu'il considère. Il « compactifie » le problème en se restreignant à un fermé borné du plan ou de la droite.

Pour construire cet intervalle, Kronecker tire profit des propriétés des polynômes symétriques en les appliquant aux racines du polynôme : il utilise donc les racines de l'équation. À la fin de son travail, Kronecker résume ce qu'il vient de faire[148] :

146 [Kronecker 1887c, p. 155] : die numerische Bezeichnung der reellen Wurzeln der algebraischen Gleichungen.

147 Die Aufgabe wäre gelöst, wenn wir im Stande wären, das grösste Intervall von der Beschaffenheit anzugeben, dass in ihm, wohin wir auch seinen Anfangspunkt legen nie mehr als eine reelle Wurzel der Gleichung liegt.

148 Fassen wir das Ergebnis der vorstehenden Entwicklungen noch einmal zusammen, so hat sich folgendes gezeigt. Wir können aus dem Gebiete der reellen Grösse z ein solches endliches Intervall $-g \cdots + g$ aussondern, dass ausserhalb desselben $F(z)$ von null verschieden ist; wir können dies Intervall wieder in Teilintervalle von der Grösse $\frac{1}{2G}$, wo G ein bestimmt definierte Zahl ist teilen, so dass in jedem dieser Teilintervalle die Function $F(z)$ entweder ihr Zeichen beibehält oder nur einmal wechselt und dass die Function dann beliebig klein wird ; und wesentlich bei Allem war, dass wir

> Si nous regroupons les résultats des développements précédents, alors nous avons montré ce qui suit. Nous pouvons séparer un tel intervalle fini $-g \cdots + g$ du domaine des grandeurs réelles, tel que en dehors de celui-ci $F(z)$ n'est pas nulle ; nous pouvons à nouveau découper cet intervalle en intervalles de taille $\frac{1}{2G}$, où G est un nombre défini, de sorte que dans chacun de ces intervalles la fonction $F(z)$, soit garde le même signe, soit change seulement une fois de signe et donc la fonction devient aussi petite que l'on veut ; et le plus important de tout est que nous avons déterminé nos intervalles par des nombres rationnels. Habituellement on exprime cette propriété des équations en disant que dans un intervalle où la fonction $F(z)$ a des signes différents à ses bornes, il y a une « racine » de l'équation, que l'on ne peut certes pas donner sous forme de nombres rationnels, mais qui existe bien [Kronecker 1887c, p. 165].

Kronecker a ainsi pu séparer les *racines*, et même donner une méthode effective pour les séparer, sans utiliser le concept de nombre réel. On voit bien ici que pour lui, la notion de racine d'une équation est indépendante de celle de nombre réel, et que le travail de recherche des solutions exactes, qui n'a pas de sens ou qui est impossible, est donc remplacé par la séparation des racines, sous la forme d'une suite d'intervalles à bornes rationnelles. Ainsi ces « solutions », ces « racines » sont en fait la donnée d'une méthode permettant de trouver un intervalle rationnel que l'on peut rendre aussi petit que l'on veut aux bornes duquel la fonction a des signes opposés. Cette première réponse de Kronecker est une réponse pratique à la recherche des solutions d'une équation. Cependant, l'utilisation des racines dans le corps de la démonstration reste problématique et on peut se demander comment la notion de racine peut s'insérer dans son *arithmétique générale*. En 1884, Kronecker écrit à Cantor[149] :

> J'ai donc choisi de baser toutes les mathématiques pures sur la théorie des nombres entiers et je *pense* que cela peut être fait sans exception. Toutefois, il s'agit seulement de ma *croyance*. Mais partout où cela a fonctionné, j'y ai vu un vrai progrès, même si – ou parce que – c'est une régression aux principes les

---

unsere Intervalle durch rationale Zahlen bestimmt haben. Gewöhnlich drückt man diese Eigenschaft der Gleichungen so aus, dass man sagt, in einem Intervall, an dessen Anfang und Ende die Function $F(z)$ verschiedenen Zeichen hat, liege eine „Wurzel" der Gleichung, die man zwar nicht als rationale Zahl angeben könne, die aber doch existiere.

149 Ich bin deshalb darauf ausgegangen, Alles in der *reinen* Mathematik auf die Lehre von den ganzen Zahlen zurückzuführen, und ich *glaube*, dass dies durchweg gelingen wird. Indessen ist dies eben nur mein *Glaube*. Aber wo es gelungen ist, sehe ich darin einen wahren Fortschritt, obwohl – oder weil – es ein Rückschritt zum Einfachsten ist, noch mehr aber deshalb, weil es denn beweist, dass die neuen Begriffsbildungen wenigstens nicht *nothwendig* sind.

> plus simples, d'autant plus que cela prouve que les nouveaux concepts qui sont introduits sont pour le moins *superflus* [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196].

On sait que le concept de nombre (*Zahlbegriff*) tient une place importante dans les mathématiques de Kronecker, et dans l'article qu'il lui consacre, ce qu'il cherche principalement à éviter, c'est l'introduction de nouveaux concepts, soit qu'ils lui semblent « superflus », soit qu'il estime qu'ils sont étrangers à l'arithmétique. Car s'il prône une algèbre décloisonnée, il va chercher, tout au moins à partir des *Grundzüge,* à en proscrire, lorsqu'il le peut, certains concepts qu'il considère étrangers à l'arithmétique. Il pourra par exemple se restreindre à l'utilisation des nombres entiers avec l'introduction de l'indéterminée X, et en raisonnant *modulo* des polynômes à coefficients entiers :

> Mais avec l'introduction principielle de l'« indéterminée » (indeterminatae), qui remonte à Gauss, la théorie particulière des nombres entiers s'est élargie à la théorie arithmétique générale des fonctions entières d'indéterminées à coefficients entiers. Cette théorie générale permet de se passer de tous les concepts étrangers à l'arithmétique véritable : les nombres négatifs, fractionnaires, réels et algébriques imaginaires [Boniface 1999, p. 59].

Il peut ainsi se passer des entiers négatifs en travaillant *modulo* $(x + 1)$. Pour les nombres rationnels, le système qu'il met en place est plus complexe, et utilise plusieurs indéterminées et plusieurs modules. Ces *Systèmes modulaires* (*Modulsystem*) sont introduits dans les *Grundzüge* et constituent l'un des outils essentiels de ce texte. Les irrationnels ne sont quant à eux pas considérés comme des nombres, au sens où ils ne font pas partie de l'arithmétique, mais de la géométrie. Cependant, on peut avoir accès aux irrationnels algébriques *modulo* un polynôme irréductible à coefficients entiers, et c'est de cette façon qu'il développera son *théorème fondamental de l'arithmétique*[150].

Kronecker affirme ainsi que[151] :

> Les résultats de l'algèbre doivent être rendus autant que possibles indépendants de toutes les fictions sur les racines des équations. Cela n'a pas encore été réussi dans l'important champ de la théorie de l'élimination. Certes ses résul-

150 Voir son article intitulé *Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik* [Kronecker 1887a].

151 Die Resultate der Algebra sind nach Möglichkeit von allen Fiktionen über die Wurzeln der Gleichungen unabhängig zu machen. Noch nicht gelungen ist dies bisher auf dem wichtigen Felde der Eliminationstheorie. Zwar ihre Resultate als solche sind ganz unabhängig vom Begriff der Wurzeln, aber eine Herleitung derselben ohne Zuhilfenahme der Wurzeln ist noch nicht möglich geworden.

> tats en tant que tels sont complètement indépendants de la notion de racine, mais une dérivation de ceux-ci sans l'aide des racines n'a pas été encore possible [Kronecker 1891, p. 10].

Plus encore, c'est le concept même de *racine* qu'il s'agit d'exclure de la théorie de l'élimination. On obtient d'importants résultats dans la théorie des équations en passant par la forme factorisée d'une équation, et donc en utilisant ses racines. On a vu que, dans les parties mêmes où Kronecker cherche à justifier le fait que l'on n'ait plus besoin de faire appel aux racines, les racines sont au cœur de sa démonstration. Les propriétés que l'on obtient, comme par exemple celles relatives au discriminant, ne font pas toujours apparaître ces racines : il faut maintenant, dit Kronecker, s'évertuer à ne pas les utiliser lors de la démonstration de ces propriétés. Ce programme, nous allons examiner comment Kronecker le réalise dans sa théorie des caractéristiques.

6.4. *Retour sur la notion de caractéristique*

Comme « jamais un pur concept « arithmétique » ne pourra et ne devra être défini par une illustration géométrique », Kronecker, dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques [Kronecker 1891], termine son exposé sur la théorie des caractéristiques par un chapitre intitulé *Clarification de la notion de caractéristique, des racines réelles et de la décomposition d'une fonction entière en fonctions réelles.*[152]. En effet, au vu de l'importance que revêt pour lui cette notion de caractéristique, il souhaite la rendre « indépendante de l'hypothèse de racines réelles des fonctions entières »[153] qui pour lui appartiennent aux grandeurs *géométriques.*

6.4.1. Rationalisation *du problème*

Pour cela, Kronecker examine de nouveau le cas de la caractéristique de deux fonctions à une inconnue $\chi(V(x), W(x))$. Nous avons vu que :

$$\begin{aligned}\chi(V(x), W(x)) &= -\frac{1}{2}\sum_{V(x)=0} \operatorname{sgn} \begin{vmatrix} V(x) & W(x) \\ V'(x) & W'(x) \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{V(x)=0} \operatorname{sgn} \lim_{h=0} \begin{vmatrix} V(x) & W(x) \\ \frac{V(x+h)-V(x)}{h} & \frac{W(x+h)-W(x)}{h} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

---

152 [Kronecker 1891, p. 247] : Klärung des Begriffs der Charakteristik, der reellen Wurzeln und der Zerlegung einer ganzen Funktion in reelle Funktionen

153 [Kronecker 1891, p. 253] : Wir wollen zunächst den Begriff der Charakteristik unabhängig machen von der Voraussetzung reeller Wurzeln ganzer Funktionen.

En simplifiant le déterminant, nous obtenons :

$$\chi(V(x), W(x)) = -\frac{1}{2} \sum_{V(x)=0} \operatorname{sgn} \lim_{h=0} \frac{1}{h} \begin{vmatrix} V(x) & W(x) \\ V(x+h) & W(x+h) \end{vmatrix}$$

et en sommant non seulement sur les x pour lesquels $V(x) = 0$, mais aussi sur ceux pour lesquels $W(x) = 0$, on obtient :

$$\chi(V(x), W(x)) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{V(x)=0 \\ W(x)=0}} \operatorname{sgn} \lim_{h=0} \frac{1}{h} \left(W(x) \cdot V(x+h) - V(x) \cdot W(x+h)\right).$$

Le problème, pour le moment, c'est que nous nous servons des racines de $V(x)$ et $W(x)$. Mais Kronecker souhaite « supprimer l'utilisation de la notion de racine réelle dans cette dernière expression de la caractéristique »[154]. Il faut bien remarquer que c'est la notion de racine *réelle* qui pose problème, et que la difficulté reste celle de la nature de ces nombres réels.

Pour cela, Kronecker somme non plus sur les « racines », mais sur « toutes ces valeurs rationnelles de x » pour lesquelles on a $V(x) \cdot V(x+h) < 0$ ou $W(x) \cdot W(x+h) < 0$[155]. En fait, il part d'une valeur rationnelle x_0 inférieure à la plus petite des racines, puis il l'augmente de h en h, où h est une grandeur rationnelle. Tout l'art de Kronecker sera dans la détermination de cette grandeur.

On cherche ensuite à supprimer dans l'expression précédente le passage à la limite : il nous suffit de prendre h suffisamment petit pour que dans tout intervalle de longueur h il n'y ait au plus qu'une seule valeur pour laquelle $V(x) \cdot V(x+h) < 0$ et une seule valeur pour laquelle $W(x) \cdot W(x+h) < 0$. Cela n'a rien de difficile et Kronecker a déjà procédé ainsi lorsqu'il cherchait à *séparer* les racines. Mais ne serions-nous pas en train d'effectuer une somme infinie, qui certes peut peut-être converger, mais n'est certainement pas calculable de façon effective ?

Non, car Kronecker a déjà montré que nous pouvons nous restreindre à un intervalle borné lorsque nous examinons les racines d'un polynôme, ou plutôt, comme Kronecker le présente, lorsque nous regardons les changements de signe d'un polynôme. Il est intéressant de noter ici que Kronecker, pour décrire la méthode utilisant les racines du polynôme, parle de « langage habituel » ([Kronecker 1891, p. 255] : *gewöhnliche Sprache*). Le

---

154 [Kronecker 1891, p. 254] : Wir können nun die Benutzung des Begriffs der reellen Wurzeln aus diesen letzten Ausdrücken für die Charakteristik ausmerzen.

155 [Kronecker 1891, p. 254] : über alle diejenigen rationalen Werte von x.

langage qu'il utilise est donc *inhabituel*, et c'est donc dans celui-ci qu'il faut trouver l'originalité de son travail.

Cet intervalle borné est donc découpé en intervalles de longueur h ne contenant qu'une seule valeur pour laquelle $W(x) \cdot V(x+h) < 0$ ou une seule valeur pour laquelle $V(x) \cdot W(x+h) < 0$: il n'y a donc qu'un nombre fini de ces valeurs, et Kronecker utilisera cette propriété pour justifier que la somme qu'il calcule est finie. Pour une telle valeur de x, on voit facilement que l'on a :

$$\frac{-\mathrm{sgn} V(x) \cdot W(x+h) + \mathrm{sgn}\, W(x) \cdot V(x+h)}{2} = \mathrm{sgn}\,(-V(x) \cdot W(x+h) + W(x) \cdot V(x+h)) .$$

Si maintenant on note $x_0, x_1, \ldots, x_l$ les rationnels $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots, x_0 + lh$, on obtient :

$$\chi(V(x), W(x)) = -\frac{1}{8} \sum_{k=0}^{l-1} \begin{vmatrix} \mathrm{sgn}\ V(x_k) & \mathrm{sgn}\ V(x_{k+1}) \\ \mathrm{sgn}\ W(x_k) & \mathrm{sgn}\ W(x_{k+1}) \end{vmatrix} .$$

Kronecker a donc discrétisé le problème en le réduisant à une recherche parmi un nombre fini d'intervalles rationnels, dont la longueur sera aussi petite que l'on veut. Ce long travail lui permet de conclure qu'il a construit « une expression de la caractéristique qui se laisse déterminer de façon strictement arithmétique, sans l'utilisation de racines réelles »[156].

Et s'il est si important pour lui, dans le cas particulier de la théorie des caractéristiques, de montrer qu'il est possible de fournir une méthode ne dépendant pas de la notion de racine, c'est aussi parce que dans ses leçons, les premières démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre sont issues de cette théorie. En effet, il réserve dans son cours une place toute particulière à ce théorème. Plus encore, il affirme que[157] :

> La proposition, que *Gauss* nomme le théorème fondamental de l'algèbre, qui forme aussi véritablement le fondement de l'algèbre, doit apparaître dans ces leçons plutôt au début qu'à la fin [Kronecker 1891, pp. 1-2].

Cependant, le nombre de travaux préliminaires pour arriver à ce théorème est tel qu'il n'apparaîtra en fait jamais avant le milieu de son cours. Kronecker se réfère très souvent aux travaux de Gauss. Cette influence est déterminante dans la façon dont il aborde dans son cours le théorème fon-

---

156 [Kronecker 1891, p. 259] : (...) einen Ausdruck für die Charakteristik erlangt haben, welcher sich streng arithmetisch (...).

157 Der Satz, den *Gauss* den Fundamentalsatz der Algebra nennt, der gemeinhin auch wirklich das Fundament der Algebra bildet, soll in diesen Vorlesungen erst gegen den Schluß hin erscheinen.

damental de l'algèbre. Cependant, la nature des racines d'une équation revêt chez Kronecker un statut très particulier qui l'amène à modifier les démonstrations de Gauss.

6.4.2. *Le théorème fondamental de l'algèbre*

Gauss a fourni, entre 1799 et 1849 quatre preuves du théorème fondamental de l'algèbre, essentiellement différentes. Traditionnellement, on considère que la première et la quatrième sont de nature topologique, tandis que la seconde est très fortement algébrique (Gauss dirait analytique), et la troisième utilise l'intégration des fonctions de deux variables et l'analyse complexe. On en tire ainsi, en première approche, une classification en trois grands types de preuves[158]. Le premier type (première et quatrième preuves de Gauss) regroupe toutes les preuves qui étudient les propriétés des polynômes complexes, et en particulier leur continuité sur un compact (c'est-à-dire en fait le principe du maximum) ou celles, plus récentes, qui utilisent les notions de topologie algébrique comme l'homotopie et le groupe fondamental. Elles se rattachent historiquement à la preuve de d'Alembert. Le second type (seconde preuve de Gauss) rassemble les preuves qui recherchent une utilisation minimale des notions étrangères à l'algèbre. On sait qu'une preuve qui ne prendrait pas en compte, ne serait-ce que de manière très lointaine, la construction des réels aurait peu de chance d'aboutir. Les démonstrations de ce groupe utilisent ainsi en général l'existence d'un corps de décomposition pour tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$. On en trouve les prémices dans les démonstrations d'Euler (1749) et de Lagrange (1772) ; et les démonstrations plus récentes qui utilisent la théorie de Galois sont parfois incluses dans ce groupe. Le dernier type enfin (troisième preuve de Gauss) est celui qui regroupe les preuves qui utilisent des résultats de l'analyse complexe, que ce soit le théorème de Liouville ou celui de Rouché.

Nous avons vu que Gilain distinguait deux théorèmes, le théorème fondamental de l'algèbre et le théorème de factorisation linéaire, et donc deux histoires. Celles-ci se croisent plusieurs fois, en particulier lors des quatre démonstrations que donne Gauss du théorème fondamental de l'algèbre. Les démonstrations de Gauss ne sont pas forcément les premières à être « justes »[159], mais ce sont certainement les premières

158 S.S. Petrova [Petrova 1973] divise les preuves du Théorème fondamental de l'algèbre en deux types : les preuves "analytiques" et les preuves "algébriques". Les premières se subdivisent ensuite en deux groupes : celles qui utilisent les propriétés topologiques des courbes algébriques et celles qui utilisent l'analyse complexe.

159 Voir à ce sujet [Gilain 1991], [Houzel 1989] et [Bachmacova 1960].

à mettre en évidence l'existence de deux théorèmes : il ne démontrera pas, comme ses prédécesseurs, le TFA en supposant admis le TFL, mais regardera toujours séparément l'existence d'une racine et sa nature. Cependant, même s'il ne voit pas le TFL comme un théorème admis ou une évidence qui n'a pas à être démontrée, ce n'est qu'un moyen pour accéder au TFA[160]. Kronecker affirme dans son cours de l'hiver 1890-91, à propos du théorème fondamental de l'algèbre, que[161] :

> Le cœur de la première et la quatrième preuves de ce théorème de *Gauss* (1799 resp. 1849) n'est au fond rien de plus que la détermination de la caractéristique [Kronecker 1891, p. 243].

Il donne ainsi comme application de sa théorie deux démonstrations différentes du théorème fondamental qui reprennent la première, la troisième et la quatrième démonstrations de Gauss. Au fur et à mesure de ses publications, son exposition du théorème fondamental de l'algèbre évolue. La reprise des démonstrations de 1799 et 1849 s'appuie sur des phénomènes d'invariance de la caractéristique, et s'intègre ainsi de plus en plus dans son chapitre consacré à cette théorie. Celle de la démonstration bien plus « algébrique » de 1816 – celle-ci n'apparaît que dans la dernière section de son cours – va dans un premier temps suivre presque exactement le mémoire de Gauss, pour devenir dans les derniers cours un théorème différent qui portera le nom de *théorème fondamental de l'arithmétique*.

L'évolution des termes de l'énoncé du théorème que Kronecker propose nous apporte en fait des renseignements précieux sur les changements qui sont à l'œuvre dans son cours. Dans le cours de 1872-73, Kronecker discute, en se reportant à Gauss, l'utilisation de coefficients complexes. Cependant, la formulation de l'énoncé est parfaitement classique[162] :

> Toute équation de degré n a précisément n racines [Kronecker 1873, p. 185].

Dans le manuscrit de 1878-79, le théorème est démontré, mais n'est pas énoncé. Cependant, il n'y a aucune différence quant à ce que Kronecker

---

160 Il ne faudrait pas croire que le TFA ait été accepté comme vrai par les mathématiciens du XVIII^{e} siècle : Leibniz, en cherchant la solution de l'équation x^4+a^4 se trouve confronté à des facteurs du type $x \pm a\sqrt{\sqrt{-1}}$ qu'il n'arrive pas à combiner pour en faire des facteurs réels et conclut que le TFA est faux.

161 Der Kern des ersten und vierten Beweises dieses Satzes von *Gauss* (1799 bzw. 1849) ist im Grunde genommen nichts anderes als die Bestimmung der Charakteristik.

162 Jede Glch n^{ten} Grades hat gerade n complexe Wurzeln.

souhaite prouver. Les changements apparaissent à partir du cours de 1884-85, c'est-à-dire, rappelons-le, après la publication des *Grundzüge*. Voilà comment Kronecker y énonce ce qu'il souhaite démontrer[163] :

> Gauss a seulement mis en évidence que l'on doit juste montrer qu'il y a des grandeurs telles que si on utilise sur elles les opérations requises par l'expression $ax^n + bx^{n-1} + \cdots$, elles rendent cette expression aussi petite que l'on veut, ou exprimé autrement, si une équation est donnée, alors on doit montrer qu'il y a des grandeurs de la forme $\xi + \eta i$, où ξ et η sont des nombres rationnels pour lesquels l'expression devient en valeur absolue aussi petite que l'on veut [Kronecker 1885a, p. 382].

La discussion sur les coefficients a complètement changé : ceux-ci ne sont ni réels ni complexes, mais rationnels. La notion de racine a elle-même disparu et il s'agit plutôt, comme nous l'avons vu, de trouver des intervalles dans lesquels la fonction change exactement une fois de signe.

À partir de 1887 et de son *théorème fondamental de l'arithmétique*, on trouvera aussi un énoncé complètement différent du théorème. En effet, il construira alors un *Primmodulsystem*

$$(f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y' - c', y'' - c'', \ldots)$$

avec lequel on a la congruence[164] :

$$\mathcal{F}(x) \equiv \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) \ (modd.\, f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y' - c', y'' - c'', \ldots).$$

Il n'est pas question ici de s'étendre sur le terme de *Primmodulsystem* ou de décrire exactement à quel type de congruence on a affaire[165], mais nous voyons que le théorème fondamental change alors de nature pour devenir un *théorème de factorisation linéaire*, c'est-à-dire, en langage moderne, un théorème portant sur la possibilité de factoriser tout polynôme dans son corps de décomposition.

---

163 Gauss erst hat hervorgehoben, dass man gerade beweisen müsse, dass es Grössen von der Art gebe, dass wenn man auf sie die durch den Ausdruck $ax^n + bx^{n-1} + \cdots$ geforderte Operation anwende, sie diesen Ausdruck beliebig klein machen, oder anders ausgedrückt, wenn eine Gleichung gegeben ist $x^n + ax^{n-1} + \cdots = 0$, so soll man zeigen, dass es Grössen von der Form $\xi + \eta i$ giebt, wo ξ und η rationale Zahlen sind, welche für x eingesetzt, den Ausdruck dem absoluten Betrage nach beliebig klein machen.

164 Voir par exemple [Kronecker 1887d, p. 319].

165 Les *Vorlesungen* de Kronecker nous permettraient d'approfondir sa théorie des *Modulsystem* et finalement le contenu des *Grundzüge*, mais cela demanderait de tels développements que nous le renvoyons à un travail ultérieur.

Néanmoins, dans le manuscrit de 1890-91, Kronecker ne traite pas uniquement du théorème de factorisation linéaire, mais il consacre aussi une partie de son cours sur la théorie des caractéristiques au théorème fondamental de l'algèbre. Dans celui-ci, il donne un énoncé du théorème dans lequel le terme de racine n'est pas employé[166] :

> Soit $\Theta(x+yi)$ une fonction entière de degré n de la variable complexe $(x+yi)$ avec des coefficients complexes et soit après le rassemblement de tous les termes réels et complexes :
>
> $$\Theta(x+iy) = \varphi(x,y) + i\cdot\psi(x,y);$$
>
> alors les courbes définies par $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ ont toujours n points d'intersection [Kronecker 1891, p. 241].

Dans cet énoncé, l'objet de départ est bien un polynôme de degré n[167]. Cependant, Kronecker ne le donne ni en termes de racines, ni en termes d'intervalles. C'est l'aspect géométrique qui est mis en avant : on regarde le nombre d'intersections de certaines courbes, et donc une propriété plus topologique que métrique. Ce qui explique l'évolution de l'énoncé du théorème fondamental de l'algèbre dans les cours de Kronecker, c'est en fait le « statut de la racine réelle ». Kronecker, qui comme on l'a vu, cite ici Netto, distingue en fait plusieurs contenus dans le théorème fondamental de l'algèbre. Le premier, « purement analytique », est basé sur une notion « géométrique » de racine. Ce contenu, avec de plus en plus de précautions (intervalles plutôt que racines, coefficients rationnels,...), est exposé dans la partie de son cours dédiée à la théorie des caractéristiques et il correspond en fait aux première, troisième et quatrième preuves de Gauss. Mais si on l'énonce ainsi, on utilise une correspondance géométrique entre nombre et longueur. Kronecker pose la question suivante à laquelle il refuse de répondre : « Mais alors comment au juste un segment de droite géométrique peut "définir" un concept arithmétique [Krone-

---

166 Es sei $\Theta(x+yi)$ eine ganze Funktion n-ten Grades der komplexen Variablen $(x+yi)$ mit komplexen Koeffizienten und nach Sammlung aller reellen und komplexen Glieder :

$$\Theta(x+iy) = \varphi(x,y) + i\cdot\psi(x,y);$$

dann haben die durch $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ definierten Kurven stets n Schnittpunkte.

167 On rappelle que dans le vocabulaire de Kronecker une fonction entière (*eine ganze Funktion*) est un polynôme. Ici Kronecker ne précise pas la nature des coefficients, mais dans le cadre de son cours du semestre d'hiver 1890-91, ces coefficients peuvent être considérés comme des nombres rationnels.

cker 1891, p. 251] » ? Plus encore, d'un point de vue arithmétique le théorème devient faux[168] :

> Si nous voulons « appréhender et fonder de façon strictement arithmétique le soi-disant théorème fondamental de l'algèbre » sans aucun soutien géométrique, alors nous pouvons prétendre que le véritable théorème fondamental, à savoir que chaque fonction entière rationnelle de degré n est décomposable en un produit de n facteurs linéaires réels ou imaginaires, n'est pas du tout correct [Kronecker 1891, p. 251].

Kronecker propose alors un nouvel énoncé dans son dernier cours sur la théorie des équations algébriques[169] :

> Ce que nous pouvons démontrer et ce que nous démontrerons, et ce qu'en substance Gauß a aussi seulement démontré, c'est que à partir de chaque fonction rationnelle entière de degré n on peut en fabriquer une autre par une variation du système de coefficient de la première aussi petite que l'on veut, cette dernière pouvant être découpée en un produit de m facteurs linéaires et $\frac{n-m}{2}$ facteurs quadratiques et ce de sorte que les coefficients de tous les facteurs soient des nombres <u>rationnels</u> [Kronecker 1891, pp. 251-252].

Plutôt que des racines dont l'existence, pour Kronecker, n'est pas assurée, plutôt que des intervalles comme il l'a fait précédemment, Kronecker utilise des petites variations des coefficients[170]. Il remarque en effet qu'« il n'est en général pas possible de factoriser une fonction entière donnée $f(x)$ de degré n en un produit de facteurs linéaires dont on pourrait donner des coefficients une interprétation arithmétique vraiment précise et exhaustive »[171]. Ce que Kronecker montre à l'aide de la théorie des carac-

---

168 Wenn wir den sogen Fundamentalsatz der Algebra „streng arithmetisch fassen und begründen" wollen ohne jegliche geometrische Stütze, so können wir behaupten, daß der eigentliche Fundamentalsatz, daß nämlich jede ganze, rationale Funktion n-ten Grades in ein Product von n linearen, reellen oder imaginären Faktoren zerlegbar sei, überhaupt nicht richtig ist.

169 Was wir beweisen können und beweisen werden und was, im Grunde genommen, auch Gauß nur bewiesen hat, ist, daß sich aus jeder ganzen rationalen Funktion n-ten Grades eine andere durch eine Variirung des Koeffizientensystems der ersteren um beliebig kleine Größen herstellen läßt, welche in ein Produkt von m linear-und $\frac{n-m}{2}$ quadratischen Faktoren zerlegt werden kann und zwar so, daß die Koeffizienten dieser sämtlichen Faktoren <u>rationale</u> Zahlen sind.

170 On peut rapprocher cet énoncé du travail de Kronecker de 1878 sur la théorie des caractéristiques : là aussi, il fait varier les coefficients d'un polynôme, pour ensuite examiner la façon dont la caractéristique du système correspondant évolue.

171 [Kronecker 1891, pp. 267-268] : Es ist im allgemeinen nicht möglich, eine vorgelegte ganze Funktion $f(x)$ vom n-ten Grade selbst in ein Produkt von linearen Faktoren zu zerlegen, deren Koeffizienten einen wirklich genauen und erschöpfenden arithmetischen Deutung fähig wären.

téristiques, c'est que pour toute fonction entière f on peut déterminer une fonction entière f_r dont les coefficients sont « aussi petits que l'on veut » et telle que la différence $f - f_r$ puisse être factorisée en produit de facteurs linéaires ou quadratiques à coefficients *rationnels*. L'approximation d'une racine est remplacée par une forme d'approximation rationnelle de la factorisation : le théorème de factorisation linéaire prend le pas sur le théorème fondamental de l'algèbre. Sous cette forme, Kronecker affirme que « le contenu du théorème fondamental dans sa version et justification purement arithmétique est présenté de manière exhaustive. »[172]. Mais cette présentation *arithmétique* n'est pas dénuée de difficulté[173] :

> On s'aperçoit pourtant qu'une fonction encore si voisine, pour ce qui concerne les propriétés algébriques, sera en général différente *toto genere* de celle présentée initialement, et que donc une telle décomposition ne promet vraiment aucun avantage pour des recherches de théorie algébrique [Kronecker 1891, p. 252].

Ainsi cet énoncé n'est pas pour Kronecker le seul énoncé pertinent [174] :

> Mais cela n'est qu'un aspect, celui de la version arithmétique du théorème fondamental. Pour les recherches algébriques, nous allons prouver la possibilité d'une deuxième décomposition fondamentalement différente de celle donnée, qui n'est pas valable au sens de l'égalité mais seulement en tant que

172 [Kronecker 1891, p. 268] : (...) so ist der Inhalt des Fundamentaltheorems in seiner rein arithmetischen Fassung und Begründung erschöpfend zur Darstellung gebracht.

173 Man erkennt jedoch, daß eine wenn auch noch so sehr benachbarte Funktion, was ihre algebraischen Eigenschaften betrifft, von der ursprünglich vorgelegten im allgemeinen *toto genere* verschieden sein wird, und daß also eine solche Zerlegung für theoretisch-algebraische Untersuchungen keinerlei Nutzen verspricht.

174 Aber dies ist auch nur die eine Seite, die arithmetische Fassung des Fundamentaltheorems. Für algebraische Untersuchungen werden wir die Möglichkeit einer zweiten von der angeführten grundverschiedenen Zerlegung nachweisen, welche nicht im Sinne der Gleichheit, sondern nur als Kongruenz für ein Primmodulsystem besteht. Wir werden nämlich die Richtigkeit der folgenden Kongruenz aufzeigen :

$$F(x) = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - \cdots \pm c_n \equiv (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$
$$(modd.\ f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y - c),$$

wenn

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) = x^n - f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} - \cdots \pm f_n;$$

$x_1 \cdots x_n$ unbestimmte Variable, y eine gewisse von der algebraischen Beschaffenheit der Funktion $F(x)$ abhängende, nicht symmetrische Funktion von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und c eine rationale Zahl ist, die zu y in derselben Beziehung steht, wie die Größen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bezw. zu $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Nur wenn man so den arithmetischen und den algebraischen Teil des Fundamental-Theorems in aller Strenge sondert, ist es möglich, seinen Inhalt wirklich scharf zu fassen.

congruence pour un *Primmodulsystem.* Nous allons en effet montrer la validité de la congruence suivante :

$$F(x) = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - \cdots \pm c_n \equiv (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$
$$(modd.\ f_1 - c_1, f_2 - c_2, \ldots, f_n - c_n, y - c),$$

lorsque

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = x^n - f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} - \cdots \pm f_n;$$

$x_1 \cdots x_n$ sont des variables indéterminées, y une certaine variable dépendant de la qualité algébrique de la fonction $F(x)$, qui n'est pas une fonction symétrique de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et c est un nombre rationnel qui est pour y dans le même rapport que $f_1, f_2, \ldots, f_n$ pour resp. $c_1, c_2, \ldots, c_n$. C'est seulement lorsque l'on sépare ainsi en toute rigueur la partie arithmétique et algébrique du théorème fondamental, qu'il est possible d'appréhender véritablement précisément son contenu [Kronecker 1891, p. 252].

Dans son dernier cours sur la théorie des fonctions algébriques, Kronecker propose donc finalement deux énoncés. Le premier, qu'il qualifie d'« arithmétique » et qui est lié à la théorie des caractéristiques, est obtenu dans un premier temps en remplaçant le concept de racine par celui d'intervalle rationnel : il affirme ainsi la *possibilité* de séparer les racines. Kronecker en propose ensuite, tout au moins dans son dernier cours, une méthode permettant de donner une *approximation* rationnelle de la décomposition d'une fonction entière. Le second, qui est lui qualifié d'« algébrique », est en fait le théorème de factorisation linéaire qu'il présente dans son article de 1887.

7. CONCLUSION

Dans une lettre datée du 18 août 1884, Kronecker écrit à Cantor[175] :

Comme vous avez suivi mes cours il y a plus de 20 ans et que vous êtes depuis lors en contact avec moi de façon presque ininterrompue, vous avez entendu mes vues assez souvent pour comprendre mieux que je ne saurais l'exprimer ici que – ayant approfondi très tôt mes études de philosophie sous les conseils de Kummer – je reconnais, comme il le faisait, l'incertitude de telles spécula-

175 Da Sie vor mehr als 20 Jahren selber noch meine Vorlesungen gehört und auch seitdem, in fast ununterbrochenen Beziehungen zu mir stehend, oft genug meine Ansichten vernommen haben, so wissen Sie besser, als ich es Ihnen jetzt auseinanderzusetzen vermöchte, dass ich – sehr früh unter Kummers Anleitung in philosophische Studien vertieft – nachher gleich ihm, die Unsicherheit aller jener Spekulationen erkannt und mich in den sicheren Hafen der wirklichen Mathematik geflüchtet habe. Was natürlicher, als dass ich in dieser Mathematik selbst nun mich bemüht habe, ihre

> tions, et je me réfugie dans le paradis des vraies mathématiques. Quoi de plus naturel alors que je me sois efforcé dans mon travail mathématique d'exprimer ses phénomènes (*Erscheinungen*) et ses vérités (*Wahrheiten*) dans une forme aussi indépendante que possible de concepts philosophiques. [...] Je pense publier l'essentiel de mes vues très bientôt, et par la même occasion formuler mes objections aux déductions de Stoltz, que vous connaissez déjà par mes communications orales. Pourra-t-on alors discuter de toutes ces choses *publice sine ira et studio*? [Meschkowski & Nilson 1991, p. 196]

Kronecker exprime ici sa volonté de ne pas faire intervenir la philosophie dans les mathématiques, ce qui correspond d'ailleurs à la position qu'il tiendra dans l'article annoncé[176]. Mais surtout, il ressort de ce passage que si l'on souhaite obtenir des témoignages de ses « vues » sur les mathématiques, nous devons les chercher dans ses communications et ses cours, et non dans ses articles publiés. La disparition de son *Nachlass* rend donc d'autant plus précieuses les retranscriptions de ses cours : non seulement le lien fort que Kronecker entretient entre enseignement et recherche fait de ces leçons une entrée naturelle à ses mathématiques, mais ces notes représentent aussi un accès privilégié à la pensée de Kronecker *sur* les mathématiques.

Les *Leçons sur la théorie des équations algébriques* représentent sans aucun doute le « cours d'algèbre » de Kronecker, et le concept de racine y est central. Lorsqu'il aborde le théorème de Sturm, puis la théorie des caractéristiques, il ne rejette pas l'« intuition géométrique » (*geometrische Anschauung*) à partir de laquelle il présente dans un premier temps les racines d'un polynôme. Cependant, il met en avant les problèmes que représentent, par rapport à son cadre philosophique, la « continuité géométrique » et le théorème de Bolzano. Il extrait en fait de cette intuition géométrique et de l'ensemble de ses interprétations graphiques le noyau arithmétique du concept de racine. Dans celui-ci, la continuité n'a pas sa place et il affirme par exemple que « le théorème de *Sturm* ne détermine par là rien d'autre que le nombre des intervalles (...) dans lesquels a lieu

---

Erscheinungen oder ihre Wahrheiten möglichst frei von jeden philosophischen Begriffsbildungen zu erkennen. [...] Ich werde das Wesentlichste meiner Ansichten ja nächstens einmal im Druck bekannt zu geben haben und dabei noch meine Einwendungen gegen jene Stolz'sche Deduction – die Sie ja aus meinen mündlichen Mittheilungen kennen – formuliren. Dann mögen diese Dinge p*ublice sine ira et studio* erörtert werden ?

176 Il s'agit très certainement de l'article *Über den Zahlbegriff* publié trois ans plus tard en 1887 [Kronecker 1887b].

un changement de signe[177] ». C'est en entrant dans les mathématiques de Kronecker, en examinant les détails de ses démonstrations et l'intitulé exact de ses énoncés que l'on peut comprendre comment certains points de vue de Kronecker sur les mathématiques sont intriqués à l'intérieur même de ses mathématiques. En effet, les difficultés épistémiques du concept de continuité l'amènent à modifier la démonstration du théorème de Sturm à partir de la possibilité de produire des intervalles dans lesquels a lieu un unique changement de signe. Cette possibilité lui sert alors de base sur laquelle il reconstruit le concept de racine pour l'introduire ensuite dans sa théorie des caractéristiques. On voit ainsi se dessiner des allers-retours entre philosophie et pratique des mathématiques. Ce mouvement réflexif et nécessaire, Kronecker le décrit ainsi[178] :

> Il y a partout dans le cours de la science des moments où elle réfléchit sur elle-même, et revient à un point de vue abandonné depuis longtemps, mais plus riche en contenu et en expérience. Chaque science produit dans son développement un grand ensemble de nouvelles ressources qu'elle systématise, schématise et érige inconsciemment à des fins de recherche. L'algèbre doit aussi rester consciente qu'elle a produit par la mise en œuvre d'un schématisme uniforme des fictions conceptuelles et desquelles elle retourne à l'exploration des choses données par la nature elle-même. Même si elle est enrichie par le mélange de l'analyse et de la géométrie, elle ne doit pas se soumettre aux concepts et aux idées de ces disciplines étrangères. Mais si elle se détache de nouveau de l'analyse et de la géométrie, elle devient en soi « arithmétique » [Kronecker 1891, p. 2].

Si la notion géométrique de racine permet à Kronecker de construire sa théorie des caractéristiques, cette dernière ne devient réellement arithmétique qu'une fois débarrassée des « fictions » attachées au concept de ra-

177 [Kronecker 1881b, p. 120] : Der *Sturm*'sche Satz bestimmt daher eigentlich nichts anderes als die Anzahl der oben charakterisirten Intervalle $x_1 - x_2 = \frac{\Theta}{\mathcal{M}}$, zwischen welchen ein Zeichenwechsel stattfindet.

178 Es ist überall der Gang der Wissenschaft, daß sie von Zeit zu Zeit, sich besinnend auf sichselbst, zurückkehrt zu einem lange zuvor verlassenen Standpunkt, aber reicher an Inhalt und an Erfahrung. In ihrer Entwicklung erzeugt jede Wissenschaft eine große Menge neuer Hilfsmittel, die sie systematisiert, schematisiert und unbewußt vom Mittel zum Zwecke der Untersuchung erhebt. Auch die Algebra muß sich dessen bewußt bleiben, daß sie zur Durchführung eines uniformierenden Schematismus begriffliche Fiktionen geschaffen hat und von denen zurückkehrt zur Ergründung der von der Natur selbst gegebenen Gebilde. Wenn sie auch durch die Vermischung mit der Analysis und Geometrie auf das Reichste befruchtet ist, so darf sie sich doch darum nicht den Begriffen und Vorstellungen dieser an und für sich ihr fremden Disciplinen unterwerfen. Löst sie aber sich wieder los von Analysis und Geometrie, so wird sie von selbst „arithmetisch".

cine. Lorsque l'on prend en compte à la fois la succession de ses cours et la chronologie interne à chaque manuscrit, on se rend compte que Kronecker a mis en place un mouvement en trois temps. Il souhaite tout d'abord séparer les notions de racines et de continuité, pour ensuite montrer que l'on peut éviter d'utiliser la continuité dans ses démonstrations. La continuité étant écartée, il transforme la façon d'aborder le concept de racine en proposant non plus de les *chercher*, mais de les *séparer*.

C'est dans ce cadre – celui de la séparation des racines – que s'articulent pour Kronecker le théorème de Sturm, la théorie des caractéristiques et le théorème fondamental de l'algèbre : il transforme le concept même de racine et le remplace, dans ses derniers cours, par la recherche d'une factorisation d'un polynôme. Dans les leçons de Kronecker, la distinction que fait Gilain entre les deux histoires du théorème fondamental de l'algèbre – celle qui mène à la démonstration de l'existence d'une racine et celle qui aboutit au théorème de factorisation linéaire – s'opère de façon très claire. Si pour Gauss la construction du TFL est une étape vers le TFA, pour Kronecker il devient le « véritable » théorème. Sur la base de la théorie des caractéristiques, il donne dans la première partie de son dernier cours un énoncé original de ce théorème : il propose une méthode permettant d'approximer toute fonction entière par une autre, aussi « proche » que l'on veut, et qui se factorise en produit de facteurs linéaires et quadratiques à coefficients rationnels. En parallèle de ce résultat, qu'il qualifie d'« arithmétique », Kronecker annonce le théorème central de la seconde partie de son cours et qu'il considère comme représentant le contenu « algébrique » du théorème fondamental de l'algèbre. Ce théorème, qui affirme la possibilité de décomposer un polynôme selon un système de congruences, il le nomme pourtant « théorème fondamental de l'arithmétique », et sa construction est issue des résultats qu'il obtient dans les *Grundzüge*. Ainsi, une étude approfondie de la seconde partie des *Leçons sur la théorie des équations algébriques* permettrait d'apporter des clarifications supplémentaires sur les rapports complexes entre *Algèbre*, *Arithmétique* et *Arithmétique générale* dans l'œuvre de Kronecker.

APPENDICE A
DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STURM PAR KRONECKER

Soit l'équation :

$$x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n = 0.$$

On rappelle la notation :

$$\operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} \frac{a}{|a|} \text{ si } a \neq 0, \\ 0 \text{ si } a = 0. \end{cases}$$

Soit maintenant une fonction réelle $F(x)$, de la variable réelle x, dérivable sur l'intervalle $[x_1; x_2]$ et dont la dérivée a les mêmes propriétés sur ce même intervalle. Kronecker remarque alors que cette fonction a sur cet intervalle le « caractère d'une fonction entière »[179], c'est-à-dire que ce qui suit pourra donc s'appliquer essentiellement (mais pas uniquement) aux polynômes. Supposons que :

$$\operatorname{sgn}(F(x_1)) = -\operatorname{sgn}(F(x_2)).$$

On obtient facilement que :

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2)).$$

On suppose de plus qu'entre x_1 et x_2 la fonction F s'annule pour une unique valeur ζ, et posons :

$$x_1 < \zeta_1 < \zeta < \zeta_2 < x_2.$$

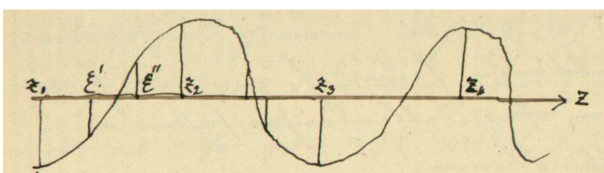

FIGURE 13. [Kronecker 1881b, p. 105]

On a bien sûr :

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{F(\zeta_2) - F(\zeta_1)}{\zeta_2 - \zeta_1}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2))$$

179 [Kronecker 1887c, p. 136] : Charakter einer ganzen Function.

et pour ζ_1 et ζ_2 suffisamment proches de ζ :

$$\operatorname{sgn}\big(F'(\zeta)\big) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2)).$$

Si maintenant on suppose que pour

$$x_1 < z_2 < z_3 < \cdots < x_2$$

on a dans chaque intervalle $[x_1, z_2]$, $[z_2, z_3], \ldots$ une unique racine de F que l'on désignera par $\zeta', \zeta'', \ldots$, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{sgn}\big(F'(\zeta')\big) &= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(z_2)) \\
\operatorname{sgn}\big(F'(\zeta'')\big) &= -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(z_2)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(z_3)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{F(\zeta)=0, x_1<\zeta<x_2} \operatorname{sgn}\big(F'(\zeta)\big) = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(F(x_2)). \tag{1}$$

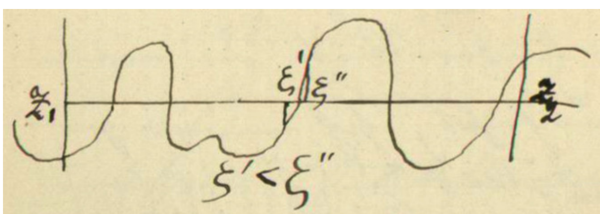

FIGURE 14. [Kronecker 1881b, p. 105(2)]

Kronecker précise que l'on a supposé ici que F et F' ne s'annulent pas ensemble sur l'intervalle $[x_1, x_2]$, et il en précise l'interprétation graphique (la courbe n'est à aucun moment tangente à l'axe des abscisses). On pose maintenant

$$f(x) = x^n - c_1 x^{n-1} + \cdots \pm c_n$$

et $f_1(x)$ une fonction entière (un polynôme dans le vocabulaire de Kronecker) de degré $n-1$ telle que f et f_1 n'aient pas de racine commune.

Kronecker applique la division euclidienne, modifiée par Sturm :

$$\begin{aligned} f - g_1 f_1 + f_2 &= 0 \\ f_1 - g_2 f_2 + f_3 &= 0 \\ \cdots &= 0 \\ f_{\nu-1} - g_\nu f_\nu &= 0 \end{aligned}$$

où f_ν est une constante.

On pose

$$F_h(x) = f_{h-1}(x) f_h(x),$$

donc

$$F_h'(x) = f_{h-1}(x) f_h'(x) + f_{h-1}'(x) f_h(x).$$

Si on note ξ_h les racines de $f_h(x) = 0$ et ξ_{h-1} les racines de $f_{h-1}(x) = 0$, alors

$$F_h'(\xi_h) = f_{h-1}(\xi_h) f_h'(\xi_h)$$

et

$$F_h'(\xi_{h-1}) = f_{h-1}'(\xi_{h-1}) f_h(\xi_{h-1}).$$

On peut appliquer (1) à F_h et on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{F_h(\zeta)=0, x_1<\zeta<x_2} \operatorname{sgn}\left(F_h'(\zeta)\right) \\ &\quad = \sum_{f_{h-1}(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(F_h'(\xi)\right) + \sum_{f_h(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(F_h'(\xi)\right) \\ &\quad = \sum_{f_{h-1}(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f_{h-1}'(\xi) f_h(\xi)\right) \\ &\qquad + \sum_{f_h(\xi)=0, x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f_{h-1}(\xi) f_h'(\xi)\right) \\ &\quad = -\frac{1}{2}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} &\sum_{h=1}^{\nu} \left(\sum_{\substack{f_{h-1}(\xi)=0 \\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f_{h-1}'(\xi) f_h(\xi)\right) + \sum_{\substack{f_h(\xi)=0 \\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f_{h-1}(\xi) f_h'(\xi)\right) \right) \\ &\quad = -\frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1) f_h(x_1)) + \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{\nu} \operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2) f_h(x_2)), \end{aligned}$$

or

$$f_{h-1}(x) - g_h(x) f_h(x) + f_{h+1}(x) = 0,$$

donc

$$f_{h-1}(\xi_h) + f_{h+1}(\xi_h) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\operatorname{sgn}(f_{h-1}(\xi_h)) = -\operatorname{sgn}(f_{h+1}(\xi_h))$$

et par conséquent :

$$\sum_{h=1}^{\nu}\left(\sum_{\substack{f_{h-1}(\xi)=0\\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f'_{h-1}(\xi)f_h(\xi)\right) - \sum_{\substack{f_h(\xi)=0\\ x_1<\xi<x_2}} \operatorname{sgn}\left(f_{h+1}(\xi)f'_h(\xi)\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)),$$

on peut simplifier le membre de gauche et on obtient :

$$\sum_{f(\xi)=0,x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f'(\xi)f_1(\xi)\right) - \sum_{f_\nu(\xi_\nu)=0,x_1<\xi_\nu<x_2} \operatorname{sgn}\left(f_{\nu+1}(\xi_\nu)f'_\nu(\xi_\nu)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)).$$

Or $f_{\nu+1} = 0$ et $f'_\nu = 0$ donc on a la formule :

$$(2)\quad \sum_{x_1<\xi<x_2} \operatorname{sgn}\left(f'(\xi)f_1(\xi)\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_1)f_h(x_1)) + \frac{1}{2}\sum_{h=1}^{\nu}\operatorname{sgn}(f_{h-1}(x_2)f_h(x_2)).$$

Cette formule correspond à ce que Kronecker considère comme le théorème de Sturm, ou tout au moins son extension par Sylvester.

APPENDICE B

CARACTÉRISTIQUE DE TROIS FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

Soient f, φ et ψ trois fonctions algébriques de deux variables x et y formant des courbes fermées.

On rappelle les notations suivantes :

$$\Delta = \begin{vmatrix} f & \varphi & \psi \\ f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$

où $f_1 = \frac{df}{dx}$ et $f_2 = \frac{df}{dy}$.

Dans le déterminant précédent, si l'on considère f, φ et ψ comme des variables et que l'on développe ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\Delta = f \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix} - \varphi \begin{vmatrix} f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \psi_2 \end{vmatrix} + \psi \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}$$

et donc

$$\frac{\partial \Delta}{\partial f} = \Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = \Delta_2 = -\begin{vmatrix} f_1 & \psi_1 \\ f_2 & \psi_2 \end{vmatrix}$$
$$\frac{\partial \Delta}{\partial \psi} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 \\ f_2 & \varphi_2 \end{vmatrix}.$$

On applique la propriété

$$(1) \qquad \sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}(dV) = 0 = \sum_{U=V=0} \operatorname{sgn}\ (U_1 V_2 - U_2 V_1)$$

pour $U = f$ et $V = \varphi \cdot \psi$, ce qui est possible car si $\varphi = 0$ et $\psi = 0$ sont des courbes fermées, il en est de même pour $\varphi \cdot \psi$. On obtient :

$$\sum_{f=\varphi\cdot\psi=0} \operatorname{sgn}\ (f_1(\varphi_2\psi + \varphi\psi_2) - f_2(\varphi_1\psi + \varphi\psi_1)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{f=\varphi\cdot\psi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) + \varphi(f_1\psi_2 - f_2\psi_1)) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{f=\varphi\cdot\psi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi\Delta_3 - \varphi\Delta_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi\Delta_3) - \sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn}\ (\varphi\Delta_2) = 0,$$

donc

$$\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (\psi\Delta_3) = \sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn}\ (\varphi\Delta_2)\,.$$

Par ailleurs, on a

$$\sum_{f=\varphi\psi=0} \operatorname{sgn}\ (d(\varphi \cdot \psi)) = 0.$$

On peut séparer en deux cette somme : la partie où $\varphi = 0$ et la partie où $\psi = 0$. Mais il faut se souvenir que le *Fortgangsprincip* doit être appliqué, et donc que les sens de circulation sur $f = 0$ dans $\sum_{f=\varphi=0}$ et $\sum_{f=\psi=0}$ sont inverses l'un de l'autre. Ainsi :

$$\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (d(\varphi\psi)) - \sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn}\ (d(\varphi\psi)) = 0$$

et donc

$$\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\ (d(\varphi\psi)) = \sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn}\ (d(\varphi\psi))$$

Ensuite, dans le cas d'une somme du type $\sum_{f=\varphi}$, le *Fortgangsprincip* nous dit que sgn $(d\varphi) = \text{sgn }(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) = \text{sgn }\Delta_3$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(\psi\cdot\Delta_3) &= \sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(\psi\cdot d\varphi)\\ &= \sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(\psi\cdot d\varphi + \varphi\cdot d\psi)\\ &= \sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(d(\psi\cdot\varphi))\end{aligned}$$

et finalement

$$\sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(d(\psi\cdot\varphi)) = \sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(\psi\cdot\Delta_3)\,.$$

Comme $\Delta = f\Delta_1 + \varphi\Delta_2 + \psi\Delta_3$, on a aussi

$$\sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(\psi\cdot\Delta_3) = \sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }(\Delta)$$

et

$$\sum_{f=\psi=0} \text{sgn }(\varphi\cdot\Delta_2) = \sum_{f=\psi=0} \text{sgn }(\Delta)\,.$$

On obtient aussi des formules symétriques aux précédentes en appliquant la propriété (1) pour $U = \psi$ et $V = f\varphi$.

Si on applique la propriété (1) pour $U = f$ et $V = \varphi$, il vient :

$$\begin{aligned}&\sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }\Delta_3 = 0\\ &\sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi<0}} \text{sgn }\Delta_3 + \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi>0}} \text{sgn }\Delta_3 = 0.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }\Delta = \sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }\Delta_3\psi = \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi>0}} \text{sgn }\Delta_3 - \sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi<0}} \text{sgn }\Delta_3.$$

Et ainsi :

$$\sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }\Delta = \sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }\psi\Delta_3 = 2\sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi>0}} \text{sgn }\Delta_3 = -2\sum_{\substack{f=\varphi=0\\ \psi<0}} \text{sgn }\Delta_3.$$

En posant

$$\chi(f,\varphi,\psi) = -\frac{1}{2}\sum_{f=\varphi=0} \text{sgn }\Delta,$$

alors $\chi(f, \varphi, \psi)$ est un nombre entier et en rassemblant toutes les égalités précédentes on obtient :

$$\begin{aligned}
\chi(f,\varphi,\psi) &= -\frac{1}{2}\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn}\Delta = -\frac{1}{2}\sum_{\varphi=\psi=0} \operatorname{sgn}\Delta \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\psi=f=0} \operatorname{sgn}\Delta = \sum_{\substack{\psi<0\\ f=\varphi=0}} \operatorname{sgn}\,(f_1\varphi_2 - f_2\varphi_1) \\
&= \sum_{\substack{f<0\\ \varphi=\psi=0}} \operatorname{sgn}\,(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = \sum_{\substack{\varphi<0\\ \psi=f=0}} \operatorname{sgn}\,(\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\varphi=\psi=0} \operatorname{sgn} d(f\cdot\varphi) = -\frac{1}{2}\sum_{\psi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi\cdot\psi) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{f=\varphi=0} \operatorname{sgn} d(\psi\cdot f) = -\frac{1}{2}\sum_{f=\psi=0} \operatorname{sgn} d(f\cdot\varphi) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{\varphi=f=0} \operatorname{sgn} d(\varphi\cdot\psi) = -\frac{1}{2}\sum_{\psi=\varphi=0} \operatorname{sgn} d(\psi\cdot f).
\end{aligned}$$

RÉFÉRENCES

BACHMACOVA (Isabella)
[1960] Le théorème fondamental de l'algèbre et la construction des corps algébriques, *Archives internationales d'histoire des sciences*, 13 (1960), p. 211–222.

BEHNKE (Heinrich) & KOPFERMANN (Klaus), dir.
[1966] *Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, 1815-1965*, Köln/Opladen : Westdeutscher Verlag, 1966.

BELL (Eric Temple)
[1940] *The Development of Mathematics*, New York, London : McGraw-Hill, 1940.

BIERMANN (Kurt-Reinhard)
[1973] *Die Mathematik und ihre Dozenten an der Berliner Universität, 1810-1920 : Stationen auf dem Wege eines mathematischen Zentrums von Weltgeltung*, Berlin : Akademie, 1973.

[1981] Kronecker, Leopold, dans Gillispie (Charles), dir., *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, New York : Scribner, 1981, p. 505–509.

Bolzano (Bernard)

[1810] *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik : erste Lieferung*, vol. 1, Prague : Caspar Widtmann, 1810.

[1817] *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, das zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prague : Gottlieb Haase, 1817.

Boniface (Jacqueline) & Schappacher (Norbert)

[2001] *Sur le concept de nombre en mathématique* : Cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891), *Revue d'histoire des mathématiques*, 7 (2001), p. 207–275.

Boniface (Jacqueline)

[1999] Kronecker et le concept de nombre : traduction et présentation, *La Gazette des mathématiciens*, 1999, p. 49–70.

[2002] *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Paris : Ellipses, 2002.

Brechenmacher (Frédéric)

[2007] La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker, *Revue d'histoire des mathématiques*, 13 (2007), p. 187–257.

[2011a] Self-portraits with Évariste Galois (and the shadow of Camille Jordan), *Revue d'histoire des mathématiques*, 17 (2011), p. 273–371.

[2011b] Galois Got his Gun, 2011 URL `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00630975`; prépublication.

Brechenmacher (Frédéric) & Ehrhardt (Caroline)

[2010] On the identities of algebra in the 19th century, *Oberwolfach Reports*, 7-1 (2010), p. 604–612.

Cauchy (Augustin Louis)

[1821] *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique :* 1ère partie *: Analyse algébrique*, Paris : Imprimerie royale, 1821.

Crelle (August Leopold)

[1835] Die Sätze von Fourier und Sturm zur Theorie der algebraischen Gleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13 (1835), p. 119–144.

Dhombres (Jean) & Alvarez (Carlos)

[2011] *Une histoire de l'imaginaire mathématique : vers le théorème fondamental de l'algèbre et sa démonstration par Laplace en 1795*, Paris : Hermann, 2011.

[2013] *Une histoire de l'invention mathématique : les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre dans le cadre de l'analyse réelle et de l'analyse complexe de Gauss à Liouville*, Paris : Hermann, 2013.

Dugac (Pierre)

[1973] Éléments d'analyse de Karl Weierstrass, *Archive for History of Exact Sciences*, 10 (1973), p. 41–174.

[1976] Problèmes de l'histoire de l'analyse mathématique au xixe siècle : Cas de Karl Weierstrass et de Richard Dedekind, *Historia Mathematica*, 3-1 (1976), p. 5–19.

EDWARDS (Harold Mortimer)
[1978] On the Kronecker Nachlass, *Historia Mathematica*, 5-4 (1978), p. 419–426.

[1987] An Appreciation of Kronecker, *The Mathematical Intelligencer*, 9-1 (1987), p. 28–35.

[1988] Kronecker's place in history, dans Aspray (William) & Kitcher (Philip), dir., *History and philosophy of modern mathematics*, Minneapolis : University of Minnesota Press, 1988, p. 139–144.

[1995] Kronecker on the Foundations of Mathematics, dans Hintikka (Jaakko), dir., *From Dedekind to Gödel : Essays on the Development of the Foundations of Mathematics*, Dordrecht : Kluwer, 1995, p. 45–52.

[2005] *Essays In Constructive Mathematics*, New York : Springer, 2005.

FRANCOEUR (Louis-Benjamin)
[1838] *Algèbre supérieure*, Bruxelles : Meline, Cans, 1838.

FREGE (Gottlob)
[1884] *Die Grundlagen der Arithmetik : eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau : Wilhelm Koebner, 1884.

FROBENIUS (Ferdinand Georg)
[1893/1968] Gedächtnisrede auf Leopold Kronecker, dans *Gesammelte Abhandlungen*, vol. III, Berlin : Springer, 1893/1968, p. 707–724.

GAUSS (Carl Friedrich)
[1799/1866] Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse (thèse, Helmstedt), dans *Werke*, vol. III, Göttingen : Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1799/1866, p. 1–30.

[1849/1866] Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen, dans *Werke*, vol. III, Göttingen : Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1849/1866, p. 71–85.

GILAIN (Christian)
[1991] Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral, *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (1991), p. 91–136.

GOLDSTEIN (Catherine)
[2011a] Charles Hermite's stroll through the Galois fields, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17-2 (2011), p. 211–270.

[2011b] Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite, dans Flament (Dominique) & Nabonnand (Philippe), dir., *Justifier en mathématiques*, Paris : MSH, 2011, p. 129–165.

Goldstein (Catherine) & Schappacher (Norbert)

[2007a] A Book in Search of a Discipline (1801–1860), dans Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), dir., *The Shaping of Arithmetic after Carl-Friedrich Gauss's* Disquisitiones arithmeticae, Berlin : Springer, 2007, p. 2–65.

[2007b] Several Disciplines and a Book (1860–1901), dans Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), dir., *The Shaping of Arithmetic after Carl-Friedrich Gauss's* Disquisitiones arithmeticae, Berlin : Springer, 2007, p. 66–103.

Grattan-Guinness (Ivor), dir.

[2005] *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Amsterdam : Elsevier Science, 2005.

Hensel (Kurt) & Landsberg (Georg)

[1902] *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale*, Leipzig : Teubner, 1902.

Houzel (Christian)

[1989] D'Alembert et le théorème fondamental de l'algbre, dans Émery (Monique) & Monzani (Pierre), dir., *Jean D'Alembert, savant et philosophe : portrait à plusieurs voix*, Paris : Édition des archives contemporaines, 1989, p. 351–360.

Jordan (Camille)

[1893] *Cours d'analyse de l'École polytechnique,* vol. 1, Paris : Gauthier-Villars et fils, 1893.

Kant (Immanuel)

[1991] *Correspondance*, Paris : Gallimard, 1991.

Klein (Felix)

[1926] *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, vol. 24, Berlin : Springer, 1926.

Kneser (Adolf)

[1925] Leopold Kronecker, *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 33 (1925), p. 210–228.

[1881] *Algebraische Gleichungen*, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 1881 ; Manuscrit, Cod. Ms. A. Kneser B2.

Knoblauch (Johannes)

[1913] *Grundlagen der Differentialgeometrie*, Leipzig : Teubner, 1913.

Kronecker (Leopold)

[1861] Antrittsrede bei der Aufnahme in die Akademie der Wissenschaften am 4. Juli 1861, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1861, p. 637–642 ; *Werke*, vol. V, 387–393.

[1869a] Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Erste Abhandlung, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1869, p. 159–193 ; *Werke*, vol. I, 177–212.

[1869b] Über Systeme von Functionen mehrer Variabeln. Zweite Abhandlung, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1869, p. 688–698 ; *Werke*, vol. I, 215–226.

[1873] *Cours du semestre d'hiver 1872–1873, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1873 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/51549`.

[1878a] Über die Charakteristik von Funktionen-Systemen, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1878, p. 95–121 ; *Werke*, vol. II, 71–82.

[1878b] Über Sturm'sche Functionen, *Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1878, p. 95–121 ; *Werke*, vol. II, 39–70.

[1879] *Cours du semestre d'hiver 1878–1879, Theorie der algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1879 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/52337`.

[1881a] Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 91 (1881), p. 301–334 ; *Werke*, vol. II, 193–236.

[1881b] *Cours du semestre d'hiver 1880–1881, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1881 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/54535`.

[1882a] Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 92 (1882), p. 1–122 ; *Werke*, vol. II, 237–388.

[1882b] *Cours du semestre d'hiver 1881–1882, Höhere Zahlentheorie*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1882 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/63440`.

[1885a] *Cours du semestre d'hiver 1884–1885, Theorie der Algebraischen Gleichungen, Teil I*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1885 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/54352`.

[1885b] *Cours du semestre d'hiver 1884–1885, Theorie der Algebraischen Gleichungen, don du Dr Thiel*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1885 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/60188`.

[1885c] *Cours du semestre d'été 1885, Theorie der Algebraischen Gleichungen, Teil II*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1885 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53779`.

[1886] *Cours du semestre d'hiver 1885–1886, Über die Affecte der Gleichungen, welche in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1886 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/61293`.

[1887a] Ein Fundamentalsatz der allgemeinen Arithmetik, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 100 (1887), p. 490–510 ; *Werke*, vol. IIIa, 209–240.

[1887b] Über den Zahlbegriff, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 101 (1887), p. 337–355 ; *Werke*, vol. IIIa, 249–274.

[1887c] *Cours du semestre d'hiver 1886–1887, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, 1887 ; Manuscrit, Signatur : 8 Cod. Ms. philos. 40 xf : 2.

[1887d] *Cours du semestre d'hiver 1886–1887, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1887 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53647`.

[1888] *Cours du semestre d'hiver 1887–1888, Zahlentheorie*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1888 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/37880`.

[1889] *Cours du semestre d'hiver 1888–1889, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1889 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53321`.

[1890] *Cours du semestre d'hiver 1889–1890, Allgemeine Arithmetik. I. Teil. (Zahlentheorie)*, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1890 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/38360`.

[1891] *Cours du semestre d'hiver 1890–1891, Theorie der Algebraischen Gleichungen*, Manuscrit inédit, Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1891 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/53004`.

[1894] *Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale*, Leipzig : Teubner, 1894.

[1901] *Vorlesungen über Mathematik*, vol. 1, Leipzig : Teubner, 1901.

[1903] *Vorlesungen über Mathematik*, vol. 2, Leipzig : Teubner, 1903.

LAGRANGE (Joseph Louis)

[1771] Réflexions sur la résolution algébrique des équations, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres*, 1 (1771), p. 134–215.

LANDSBERG (Georg)

[1911] Beiträge zur Topologie geschlossener Kurven mit Knotenpunkten und zur Kroneckerschen Charakteristikentheorie, *Mathematische Annalen*, 70(4) (1911), p. 563–579.

LAPLACE (Pierre-Simon)

[1835] *Exposition du système du monde*, Paris : Bachelier, 1835.

LEFÉBURE DE FOURCY (Louis-Étienne)

[1850] *Leçons d'algèbre*, Paris : Bachelier, 1850.

LIPSCHITZ (Rudolf)

[1986] *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen*, éd. Scharlau (Winfried), Braunschweig/Wiesbaden : DMV et Vieweg, 1986.

MEHRTENS (Herbert), BOS (Henk JM) & SCHNEIDER (Ivo), dir.

[1981] *Social History of Nineteenth-Century Mathematics*, Boston : Birkhäuser, 1981.

MESCHKOWSKI (Herbert)

[1967] *Probleme des Unendlichen : Werk und Leben Georg Cantors*, Berlin, Heidelberg : Springer, 1967.

MESCHKOWSKI (Herbert) & NILSON (Winfried), dir.

[1991] *Georg Cantor : Briefe*, Berlin, Heidelberg : Springer, 1991.

MOLK (Jules)

[1884] Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination, *Acta mathematica*, 6 (1884), p. 1–166.

NETTO (Eugen)

[1876] *Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren oder zweiten Grades*, Leipzig : Wilhelm Engelmann, 1876.

[1900] *Vorlesungen über Algebra*, Leipzig : Teubner, 1900.

OSTROWSKI (Alexander M.)

[1920] Über den ersten und vierten Gauss'schen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, *Nachrichten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*, 8 (1920), p. 50–58.

PENCHÈVRE (Erwan)

[2007] La théorie arithmétique des grandeurs algébriques de Kronecker, dans *Actes de la Journée en l'honneur de Christian Houzel, IHP (Paris), 23 novembre 2007*, 2007 ; À paraître.

PETRI (Birgit)

[2011] *Perioden, Elementarteiler, Transzendenz : Kurt Hensels Weg zu den p-adischen Zahlen*, Thèse, TU Darmstadt, Darmstadt, 2011.

PETRI (Birgit) & SCHAPPACHER (Norbert)

[2007] On arithmetization, dans Goldstein (Catherine), Norbert (Schappacher) & Schwermer (Joachim), dir., *The Shaping of Arithmetic after Carl Friedrich Gauss's* Disquisitiones Arithmeticae, Berlin : Springer, 2007, p. 343–374.

PETROVA (Svetlana S.)

[1973] From the history of the analytic proofs of the fundamental theorem of algebra, *History and methodology of the natural sciences*, XIV (1973), p. 167–172.

Pierobon (Frank)
[2003] *Kant et les mathématiques*, Paris : Vrin, 2003.

Remmert (Reinhold)
[1991] The Fundamental Theorem of Algebra, dans Ebbinghaus (Heinz-Dieter) *et al.*, dir., *Numbers*, New York : Springer, 1991, p. 97–122.

Rouché (Eugène) & Lévy (Lucien)
[1900] *Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs*, vol. 1, Paris : Gauthier-Villars, 1900.

Salmon (George)
[1885] *Lessons introductory to the modern higher algebra*, Dublin : Hodges, Figgis, and Co., 1885.

Schappacher (Norbert) & Volkert (Klaus)
[1997] Heinrich Weber : un mathématicien à Strasbourg, 1895–1913, *L'Ouvert*, 1997, p. 1–18.

Serret (Joseph Alfred)
[1849] *Cours d'algèbre supérieure*, Paris : Mallet-Bachelier, 1849.

Sinaceur (Hourya)
[1988] Deux moments dans l'histoire du théorème d'algèbre de Ch. F. Sturm, *Revue d'histoire des sciences*, 41-2 (1988), p. 99–132.

[1991] *Corps et Modèles : essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Mathésis, Paris : Vrin, 1991.

[1992] Cauchy, Sturm et les racines des équations, *Revue d'histoire des sciences*, 45-1 (1992), p. 51–68.

[2009] L'Œuvre algébrique de Charles François Sturm, dans Pont (Jean-Claude), dir., *Collected Works of Charles François Sturm*, Bâle : Birkhauser, 2009, p. 13–24.

Stäckel (Paul)
[1893] Ueber Systeme von Functionen reeller Variabeln, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 112 (1893), p. 141–146.

Sturm (Charles)
[1829] Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques, *Bulletin de Férussac*, 11 (1829), p. 419–422.

[1835] Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires présenté par divers savants étrangers à l'Académie royale des sciences*, 6 (1835), p. 273–318.

[1901] *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, vol. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1901.

SYLVESTER (James Joseph)

[1839] On rational derivation from equations of coexistence, that is to say, a new and extended theory elimination, *The London and Edinburgh Philosophical Magazine and Journal of Science*, 15 (1839), p. 428–435.

[1853] On a theory of the syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application to the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraical common measure, *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 1853, p. 407–548.

TANNERY (Jules) & HADAMARD (Jacques)

[1910] *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* vol. 2, Paris : Hermann, 1910.

VANDERMONDE (Alexandre-Théophile)

[1771] Mémoire sur la résolution des équations, *Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les Mémoires de mathématique et de physique*, 1771, p. 365–416.

WEBER (Heinrich)

[1893] Leopold Kronecker, *Mathematische Annalen*, 43-1 (1893), p. 1–25.

[1895] *Lehrbuch der Algebra,* vol. 1, Braunschweig : Vieweg, 1895.

[1898] *Traité d'algèbre supérieure*, Paris : Gauthier-Villars, 1898.

WEIERSTRASS (Karl)

[1881] *Cours du semestre d'hiver 1880–1881, Theorie der elliptischen Functionen,* Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1881 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/61734`.

[1882a] *Cours du semestre d'hiver 1881–1882, Theorie der Abelschen Functionen. Theil 1,* Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1882 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/62265`.

[1882b] *Cours du semestre d'hiver 1881–1882, Theorie der Abelschen Functionen. Theil 2,* Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1882 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/62796`.

[1883] *Cours du semestre d'hiver 1882–1883, Theorie der analytischen Functionen,* Université de Strasbourg, Bibliothèque de mathématiques de l'IRMA, 1883 ; Manuscrit, `http://docnum.u-strasbg.fr/cdm/ref/collection/coll7/id/39821`.