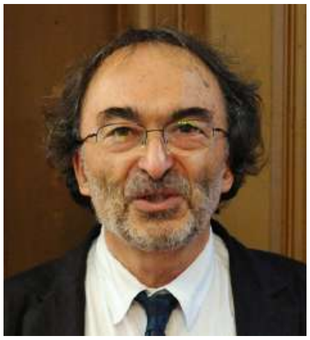
Le monde *p*-adique français est en deuil. Après Michel Raynaud l'an dernier, ce sont Jean-Pierre Wintenberger et Jean-Marc Fontaine qui nous ont quittés en janvier, à une semaine d'intervalle.

Jean-Marc Fontaine et Jean-Pierre Wintenberger

• P. Colmez



Jean-Marc Fontaine, né en 1944, entre à l'École polytechnique en 1962 et au CNRS en 1965 avec, comme il le disait, à peine l'équivalent d'un DEA (actuel M2) en poche. Il commence alors une thèse sous la direction de Pisot; au bout de 2 ans de calculs sur les sous-groupes de ramification des groupes de Galois d'extensions de corps locaux, il est invité, en décembre 1967, à donner un exposé qui allait changer le cours des choses au séminaire Delange-Pisot-Poitou. Comme il aimait à le raconter, à la fin de l'exposé, Poitou, très diplomate, lui dit « C'est très bien ce que vous nous avez raconté; vous devriez le rédiger dans le style de "Corps locaux" ». Il s'est donc jeté sur cet ouvrage [1] dont il ignorait l'existence et y a découvert beaucoup de résultats qu'il avait retrouvés, mais il restait heureusement suffisamment de matière pour un article [2].

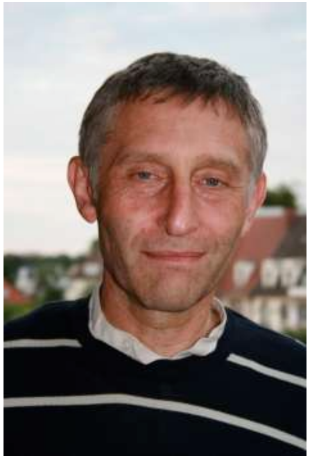
Il y a un monde entre ces calculs initiaux et le programme qu'il a mis en place des années plus tard, mais on y voit quand même, a posteriori, des signes annonciateurs des questions qui allaient l'occuper toute sa vie, et mener à son programme (connu sous le nom de « programme de Fontaine » ou « théorie de Fontaine » ou encore « théorie de Hodge *p*-adique ») de classification des représentations *p*-adiques des groupes de Galois des corps locaux. La théorie de Fontaine est l'outil le plus puissant dont on dispose pour attaquer des questions « globales », i.e. des questions ayant trait aux représentations *p*-adiques des groupes de Galois des corps de nombres : elle intervient dans la plupart des avancées récentes sur la correspondance de Langlands pour les corps de nombres (dans le sens Galois → automorphe, le plus difficile et le plus intéressant pour un théoricien des nombres).

La théorie de Fontaine repose sur la construction d'anneaux aux propriétés un peu magiques (aux noms ésotériques $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ – prononcer bédérahm, bécrisse, béesté – $\mathscr{E}$, $\widehat{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}$) qui ont épouvanté [3] ses contemporains : un géomètre (complexe) a déclaré un jour « quand j'entends le nom de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, je sors mon revolver »; il est frappant de constater qu'il a fallu attendre la génération suivante pour trouver des gens commençant à vraiment utiliser ces fameux anneaux. Les constructions de Fontaine feraient plutôt pencher la balance du côté de ceux qui pensent que l'on crée les maths.

Après sa thèse d'État sous la direction de Serre,

1. *Corps locaux*, de Serre, est l'ouvrage de référence du sujet.
2. Extensions finies galoisiennes des corps valués complets à valuation discrète, Séminaire Delange-Poitou-Pisot 1967-68, `http://www.numdam.org/item/SDPP_1967-1968__9_1/`
3. Pour ne pas provoquer de traumatisme chez les lecteurs de la *Gazette*, le comité de rédaction a préféré ne pas publier l'article compagnon de cet hommage expliquant les tenants et les aboutissants du programme de Fontaine et incluant une construction de ses anneaux.

Fontaine obtient un poste de Maître de conférences (actuel professeur seconde classe) puis de Professeur à l'université de Grenoble où il a un certain nombre d'étudiants dont Guy Laffaille et Jean-Pierre Wintenberger (il en part en 1988 pour rejoindre l'université d'Orsay où il reste jusqu'à la fin de sa carrière, et où il a comme élèves Christophe Breuil, Frédéric Cherbonnier, Laurent Herr, Nathalie Wach, Maja Volkov, Oliver Brinon et Jérôme Plût).



Jean-Pierre Wintenberger, né en 1954, entre à l'École normale de la rue d'Ulm en 1973, à une période dorée pour la théorie des nombres : les promotions 72-73-74 d'Ulm et Sèvres ont vu défiler Henri Carayol, Laurent Clozel, Hélène Esnault, Étienne Fouvry, Guy Henniart, Gérard Laumon, Jean-François Mestre, Colette Moeglin, Bernadette Perrin-Riou, Joseph Oesterlé, Jean-Loup Waldspurger...

La thèse de 3e cycle de Wintenberger porte sur la théorie du corps des normes, dont un embryon se trouve dans un exposé rédigé [4] de Fontaine au séminaire de théorie des nombres de Grenoble en décembre 1971. Cette théorie associe, de manière fonctorielle (mais plus ingénieuse que naturelle), à toute tour raisonnable d'extensions de K, avec $[K : \mathbb{Q}_p] < \infty$, une extension finie de $\mathbf{F}_p((T))$, ce qui fournit un pont entre les groupes de Galois absolus des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$ et ceux des extensions finies de $\mathbf{F}_p((T))$. Elle a donné naissance un peu plus de dix ans plus tard à la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine qui fournit une classification complète de toutes les représentations p-adiques des extensions finies de $\mathbb{Q}_p$.

Après sa thèse de 3e cycle, Wintenberger est nommé, en 1978, attaché de recherche au CNRS à Grenoble [5]. Sa thèse d'État contient un résultat qui est encore mal compris à l'heure actuelle, à savoir l'existence d'un scindage naturel de la filtration de Hodge pour les variétés projectives sur un corps p-adique (on n'a toujours pas de théorie des formes harmoniques p-adiques qui justifierait l'existence de ce scindage).

Après un bref passage à Orsay, où il a suivi Fontaine, Wintenberger est nommé, en 1991, professeur à l'université de Strasbourg qu'il ne quittera plus. C'est là qu'il obtient, en collaboration avec Chandrashekhar Khare (et avec l'aide de Mark Kisin pour l'étape finale), un résultat qui lui vaut une place spéciale au panthéon des mathématiciens : une preuve de la conjecture de modularité de Serre pour les représentations modulo p de dimension 2 du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}$, énoncée dans une lettre à Tate datée du 1er mai 1973 et publiée finalement en 1987 (sous une forme renforcée et précisée impliquant le grand théorème de Fermat, la conjecture de Taniyama-Weil et des tas d'autres résultats mirifiques). La preuve repose sur les travaux de nombreuses personnes (en premier lieu ceux de Wiles ayant débouché sur une preuve du grand théorème de Fermat) et est une récurrence délicate sur l'ensemble des nombres premiers, dont le point de départ est un résultat de Tate énoncé dans une lettre à Serre du 2 juillet 1973 dans laquelle il démontre le résultat pour $p = 2$ (grâce au fait que $2^{5/2} = 5{,}656\ldots < \frac{\pi e^2}{4} = 5{,}80\ldots$). La théorie de Fontaine (en particulier, ce que l'on appelle la théorie de Fontaine-Laffaille) y joue un rôle fondamental.

4. Corps de séries formelles et extensions galoisiennes des corps locaux, Séminaire de théorie de nombres de Grenoble 1971-72, `http://www.numdam.org.ezproxy.math.cnrs.fr/volume/STNG_1971-1972__1/`.

5. C'était l'époque où le CNRS nommait les attachés de recherche fraîchement recrutés auprès de leur directeur de thèse pour qu'il puisse continuer à les guider jusqu'à l'obtention d'une thèse d'État. Depuis les années 1990, le CNRS préfère nommer les chargés de recherche fraîchement recrutés loin de leur patron pour qu'ils puissent développer leur autonomie.

Jean-Pierre WINTENBERGER

• K. CHANDRASHEKHAR

It was with great sadness that I learnt of the passing on of Jean-Pierre Wintenberger on January 23rd, 2019. I had last seen him in the hospital Pitié-Salpêtrière in Paris in July 2018. He seemed mentally alert, but physically worn out. I had hoped to see him again this year, but that was not to be. In his last years he suffered from Parkinson's disease.

I got to know Jean-Pierre well through our work together on Serre's modularity conjecture. We arrived at working on the conjecture by different paths. Jean-Pierre was interested in proving cases of the Mumford-Tate conjecture for abelian varieties defined over number fields, and in particular in the first case of it which was still open : that of a 4-dimensional abelian variety defined over a number field. I came to it more directly, and since my PhD thesis in 1995 had been interested in Serre's conjecture. I studied congruences between modular forms in my thesis, and then got interested in questions of lifting Galois representations. Thus we came from different mathematical backgrounds to Serre's conjecture and I think our collaboration benefited from this diversity of interest and training we brought to it.

Jean-Pierre invited me to visit him for a month in Strasbourg, and I visited him in Fall of 2004. Little did I expect that we would spend the month proving the first cases of Serre's conjecture which made no superfluous hypotheses on the residue characteristic and image of the representation! Combining observations we had each made independently, we had a result on Serre's conjecture almost the day I arrived in Strasbourg and then we spent my month's stay making sure of the details. Jean-Pierre explained to me his beautiful idea of "killing ramification" in the first days of my visit. The idea is used to reduce the general case of Serre's modularity conjecture to the level one case. It struck me as an idea that could perhaps naturally occur only to someone who thought very p-adically, and Jean-Pierre since his thesis with Jean-Marc Fontaine in 1979, had thought about the then emerging field of p-adic Hodge theory, proving foundational results, and finding new applications of it.

We were happy to part at the end of my visit, when I returned to Mumbai, having convinced ourselves that we could show that there were no irreducible odd Serre-type Galois representations of certain low weights and levels as predicted by Serre, and most satisfyingly that the only odd irreducible Serre-type representation of level 1 and Serre weight 12 was the one that arose from Ramanujan's Δ-function. We also had a strategy to prove all of Serre's conjecture assuming broad generalizations of the modularity lifting results pioneered by Wiles. At the end of the productive visit we celebrated by going for dinner, along with the number theorists at Strasbourg, to an elegant restaurant La Casserole in one of the small twisting alleys near the Cathédrale.

We wrote our first paper on Serre's conjecture expecting that to prove the full conjecture using our strategy would require very elaborate developments of the modularity lifting machinery by specialists in the area. But within a few months we found a plausible path using a modification of our original strategy which made extensive and novel use of congruences between Galois representations and was consequently less demanding in terms of the modularity lifting theorems we would need. The topography of this path was reminiscent of the winding, intersecting paths surrounding the Cathédrale in Strasbourg which led to different views of its lone Gothic spire, its motif orienting a visitor's meanderings around it.

It still took us almost 5 years (2004-2009) to complete all the details and have the proof of the full conjecture published. We communicated throughout this period mainly via e-mail, interspersed with meeting at conferences and short visits to Salt Lake City, Paris, Montreal, Strasbourg, Monte-Verita...

Our work benefited enormously from the rigor and technical deftness Jean-Pierre brought to sorting through the niceties of proving modularity lifting theorems in delicate cases, like the 2-adic lifting theorems we needed for our strategy. I admired Jean-Pierre's focus on what was central to mathematics, and his wide mathematical culture, part of which seemed to be due to his education as a Normalien, and then being trained in the formidable French school of arithmetic geometry. I also admired the sense of adventure in his mathematical work which led him to work on Serre's modularity conjecture, a subject that was a little distant from the mathematics which had occupied him prior to our joint work on it.

Jean-Pierre passed away before he reached 65. Within a week of Jean-Pierre's death, his advisor Jean-Marc Fontaine passed away, without whose foundational work on p-adic Hodge theory our proof of Serre's conjecture would not have been possible.

I will miss Jean-Pierre's unassuming nature and keen intellect.

Jean-Pierre Wintenberger - Les années strasbourgeoises

• R. Noot

Après un début de carrière à Grenoble puis à Orsay, Jean-Pierre Wintenberger est nommé professeur à l'université Louis Pasteur de Strasbourg en 1991. L'irma (l'Institut de Recherche Mathématique Avancée) compte déjà une équipe d'algébristes et d'arithméticiens avec Abdallah Al Amrani, Jean-François Boutot, Henri Carayol, Jean-Pierre Jouanolou, Florence Lecomte et Maurice Mignotte. Jean-Pierre y retrouve aussi Jean-Yves Mérindol qu'il avait côtoyé en classes préparatoires, pour ensuite être admis à l'École normale supérieure en même temps.

Emmanuel Peyre et Norbert Schappacher rejoignent l'université de Strasbourg la même année que Jean-Pierre et la dynamique créée par l'arrivée des trois nouveaux collègues conduit à la création d'un séminaire régulier de géométrie algébrique et arithmétique. Jean-Pierre poursuit ses travaux sur les théorèmes de comparaison entre cohomologies (log-)cristalline et étale p-adique en étudiant en particulier la compatibilité des applications de comparaison avec les applications de classes de cycles. Il publie également deux articles remarquables sur des propriétés « motiviques » des systèmes de représentations ℓ-adiques

À côté de son activité mathématique, Jean-Pierre s'engage dans la vie de l'université, en assurant notamment pendant deux ans la direction de l'ufr vers la fin des années 1990 ainsi que la responsabilité de la formation doctorale en mathématiques dans les années 2000. Il a également été le dernier président de la commission de spécialistes de la section 25 à l'université de Strasbourg, avant l'institution des comités de sélection pour les recrutements des enseignants-chercheurs.

Au début des années 2000, Jean-Pierre s'intéresse aux propriétés des images de représentations galoisiennes provenant de la géométrie algébrique et à une conjecture de Kottwitz et Rapoport sur l'existence de cristaux munis de structures supplémentaires. Il commence également à explorer une conjecture de Fontaine et Mazur visant à caractériser les représentations galoisiennes modulaires et il démarre une collaboration avec Chadrashekhar Khare qui aboutira à la démonstration de la conjecture de modularité de Serre Les premiers résultats sur ce sujet sont présentés lors d'une conférence à Strasbourg en 2005, que Jean-Pierre organise avec Jean-François Boutot et Jacques Tilouine. La démonstration de la conjecture de Serre sera récompensée par le prix Thérèse Gauthier de l'Académie des Sciences en 2008 et le prix Cole de la Société Mathématique Américaine en 2011 (attribué conjointement à Chadrashekhar Khare et Jean-Pierre Wintenberger). Elle est également exposée, par les deux auteurs, au Congrès International des Mathématiciens à Hyderabad en 2010.

À partir des années 2000, Jean-Pierre a encadré de nombreux étudiants : Agnès David, Lionel Dorat, Carola Eckstein, Auguste Hoang Duc et Alain Muller soutiennent leurs thèses entre 2005 et 2015. Il a été membre senior de l'Institut Universitaire de France de 2007 jusqu'à son départ à la retraite en 2017. Le séminaire et de nombreuses autres activités de l'équipe d'arithmétique et géométrie algébrique ont bénéficié de la dotation de l'iuf pendant toutes ces années.

En 2014, une conférence en l'honneur des 60^{e} anniversaires de Henri Carayol et de Jean-Pierre Wintenberger, a réuni à Strasbourg une soixantaine de collègues Cet événement a souligné l'impact des travaux de Jean-Pierre dans son domaine.

Chez ses collègues, à Strasbourg comme ailleurs, Jean-Pierre laisse le souvenir d'un mathématicien passionné, très discret mais doué d'une vision extraordinaire, qu'il partageait avec beaucoup de générosité. Assis dans un fauteuil dans le coin de son bureau avec un article ou un bloc-notes entre les mains, il était toujours disponible pour écouter et conseiller ses collègues, ses doctorants et ses étudiants. Dans les conseils et les commissions, on pouvait se fier à son jugement, qui était toujours objectif et mûrement réfléchi.

Je remercie Henri Carayol, Christine Huyghe, Florence Lecomte et Norbert Schappacher pour leur aide à la préparation de ce texte.

Intensité et légèreté : quelques facettes de Jean-Pierre Wintenberger

• A. David

Jean-Pierre avait deux étudiant·e·s en thèse lorsqu'il a accepté d'encadrer la mienne. Sommée par une collègue professeure à l'irma de la tutoyer, je me suis interrogée sur l'usage à adopter avec mon tout nouveau directeur. Sollicité·e·s, mes grand·e·s frère et sœur de thèse n'ont pu donner de réponse claire à la question simple : vouvoyait-il·elle Jean-Pierre et réciproquement ? Trois ans de contorsions syntaxiques, sans pronoms personnels ni possessifs, me semblant une difficulté dispensable au regard de celles que me réservait déjà la géométrie arithmétique, et tout à la présomption de ma jeunesse, j'ai proposé frontalement à Jean-Pierre le tutoiement, accepté sans ciller. Ce début révélait pour moi son indifférence pour les convenances superflues.

Abstraction faite d'une forme de timidité, qui pouvait passer pour de la réserve, Jean-Pierre se découvrait en effet d'une grande simplicité et très accessible, n'établissant pas de distance inutile entre lui et autrui. Dès les premières semaines de mon travail sous sa direction, j'ai pu aborder avec lui tous les sujets : mathématiques, culturels, personnels... Le goût de la montagne nous réunissait. Nous nous amusions parfois d'avoir fréquenté le même petit col alpin à quelques jours d'intervalle, ou alors notre discussion mathématique déviait vers l'éboulement inexorable des Drus. Il évoquait volontiers sa famille, toujours avec une tendresse et une fierté pudiques.

Parfois rare, sa parole n'en était que plus précieuse. Une poésie et un humour subtils pointaient dans sa conversation, parsemée de tournures très personnelles : « Les arguments se retournent comme des chaussettes. » reste un principe incontournable de toute réunion universitaire.

Pour les étudiant·e·s de Strasbourg qui m'ont rapporté leurs souvenirs, Jean-Pierre représentait bien l'archétype du mathématicien par moments immergé dans ses pensées. L'équilibre de son pull, posé sur ses épaules, voire une seule, défiait toutes les lois physiques connues, les tenant en haleine un cours durant. L'ayant croisé et salué à l'extrémité ouest d'un couloir, il·elle·s savaient qu'il fallait parfois attendre qu'il en ait atteint l'extrémité est pour recevoir sa réponse. Son tempérament posé et la bienveillance qu'il appliquait à tou·te·s n'en étaient pas moins largement appréciés.

Par sa personnalité exceptionnelle et le rôle qu'il a joué dans leur vie, Jean-Pierre a marqué l'existence de tou·te·s ses doctorant·e·s que j'ai pu recontacter. Les mathématiques, sous une forme ou une autre, demeurent présentes dans le quotidien professionnel de chacun·e.

Attentif, il veillait à m'offrir toutes les opportunités de compléter ma formation, de rencontrer de nouveaux collègues et s'assurait que je puisse assister aux conférences les plus intéressantes, même celles dont le nombre de participant·e·s excédait déjà déraisonnablement les normes de sécurité du cirm.

Jean-Pierre cherchait toujours à me donner confiance dans la pratique des mathématiques. La facilité avec laquelle il déclarait « Tu as raison. » a fréquemment surpris mes hésitations de débutante. Son soutien n'a ensuite cessé de m'accompagner, bien longtemps après la fin de ma thèse.

Disponible en toutes circonstances, il partageait généreusement son impressionnant savoir mathématique. Il fallait parfois quelques heures ou jours de travail pour réaliser en quoi ses indications ou suggestions, très en avance sur notre propre compréhension, pointaient précisément le point clé ou la prochaine difficulté de la suite du raisonnement. Une de ses étudiantes les comparait à un cube de bouillon, incomestible pur, mais révélant toute sa saveur après une dilution appropriée.

Ses conseils d'expérience s'appliquaient aussi à des domaines très concrets. Je les invoque encore régulièrement, comme à chaque préparation d'exposé. Jean-Pierre cernait étonnamment bien les personnalités humaines et, consulté pour un choix, anticipait avec une clairvoyance aiguë les possibles avantages et écueils de chaque situation.

Sans forcer ni fléchir, Jean-Pierre savait transmettre ses valeurs et son éthique intellectuelles. Son exigence, tout comme sa large ouverture d'esprit, me guident et m'inspirent encore aujourd'hui.

Fait peu commun, il évoquait librement ses difficultés, beaucoup moins souvent ses succès, prétendant qu'il avait obtenu ses résultats les plus marquants presque par hasard, en recherchant autre chose. Modeste et discret, Jean-Pierre l'était certainement. Un soir du début de ma première année de thèse, son travail avec Khare sur la conjecture de Serre est apparu dans mon casier, sans commentaire, comme un cadeau de Noël.

Jusqu'au bout, les mathématiques sont restées pour Jean-Pierre une passion et un moteur. Un savoir unique s'éteint avec lui. Son œuvre admirable unit la profondeur à la beauté. Les voies qu'il a ouvertes promettent de captivantes découvertes. Dans leur exploration nous guidera son souvenir.

Souvenirs sur Jean-Marc Fontaine

• J.-P. Serre

Lors de la cérémonie du 5 février, au crématorium du Père-Lachaise, j'avais prononcé quelques mots, pour rappeler de vieux souvenirs.

Les voici.

Commençons par une histoire qu'il aimait bien raconter, celle du début de sa vocation. On est en 1962 ; il a 18 ans et il vient d'entrer à l'École polytechnique (pourquoi là plutôt qu'à l'ÉNS ? je l'ignore). Il ne sait pas encore dans quelle direction se diriger ; sûrement pas dans l'industrie, ni dans un métier lucratif ; très probablement en science ; quelle science ? Heureusement, l'X organisait des exposés d'introduction aux diverses disciplines scientifiques : maths, physique, etc. Les différents spécialistes avaient surtout parlé de leur laboratoire, et des difficultés qu'ils avaient pour le faire fonctionner : crédits, ministère, etc. Pas très enthousiasmant. Exception : le mathématicien. C'était Pisot. De quoi avait-il parlé ? Des nombres de Pisot, tout simplement. Fontaine est conquis. Il sera mathématicien.

Cinq ans plus tard : décembre 1967. Il fait un exposé au séminaire DPP (Delange-Pisot-Poitou). Notez : encore Pisot ! Je ne crois pas avoir assisté à cet exposé, mais j'avais vu le texte ronéoté, et le sujet (ramification des extensions de corps locaux) m'intéressait. Je contacte Pisot, et je lui dis que j'aimerais faire la connaissance de l'auteur. C'est ainsi que Fontaine est venu, pour la première fois, me voir, avenue de Montespan. Je lui ai expliqué une conjecture que j'avais faite quelques années plus tôt (réalisabilité des représentations d'Artin de certains corps locaux sur d'autres corps locaux - de même caractéristique résiduelle), et je lui ai suggéré de l'attaquer. On m'a raconté cinquante ans plus tard qu'à l'époque il n'avait aucune idée de la théorie des représentations linéaires et des caractères, mais qu'il l'avait apprise en quinze jours ; pas de surprise, il était jeune, et c'est une belle théorie ! En tout cas, il n'a pas mis beaucoup de temps à résoudre ma question, et ça a été le sujet de sa thèse, publiée en 1971. Ensuite, il a été nommé à Grenoble.

Passons quelques années. Le sujet de sa thèse était trop limité – et, à vrai dire, trop facile – pour qu'il puisse continuer dans cette voie. Mais ça avait été l'occasion de lui faire connaître les représentations galoisiennes, un sujet en plein essor (et qui l'est tout autant maintenant), où abondent les questions intéressantes, de nature arithmétique. Fontaine a attaqué celle du « foncteur mystérieux » – une terminologie de Grothendieck datant du congrès de Nice de 1970 : étant donnée une variété abélienne sur un corps local, comment passer de son module de Dieudonné à sa cohomologie étale. Il résout la question, grâce à des « presque logarithmes ». C'est un beau succès.

Oui, un beau succès. Mais un succès, c'est surtout la promesse d'une suite. Pour la suite, je dois dire que j'y ai assisté essentiellement en spectateur (et non plus en joueur, comme on dirait si les maths étaient du football). Je sais seulement, parce qu'il me l'a raconté bien plus tard, que c'est l'une de mes questions qui l'a amené à ses célèbres « anneaux $B_{\text{quelque chose}}$ ». Je lui avais dit : ce que tu as fait avec le foncteur mystérieux, c'est très bien, mais c'est seulement du H^1. Ce que l'on veut, ce sont des H^n avec n quelconque, et pour cela, il faut des produits tensoriels. Il l'a fait, et il a continué à le faire, avec des anneaux « B » de plus en plus précis. La théorie qu'il a ainsi créée est maintenant d'usage constant dans toutes les questions « locales » ; d'autres que moi vous en parleront.

Il y a eu une brève période (1978-1980) où nous avons plus ou moins travaillé ensemble. Il s'agissait des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires - l'un de mes sujets favoris. Comment se comportent-elles localement ? Nous combinions ce que l'un savait (ou devinait) du côté modulaire, et ce que l'autre savait (savait vraiment) du côté local. Cela se passait par correspondance : Grenoble – Paris – Grenoble... à coups de lettres de dix ou vingt pages chacune ; il y a même une lettre du 10/7/1979, dite de « Compléments », qui a 27 pages. Nous n'avons rien publié, mais cela m'a été très utile pour la rédaction de mon texte de 1987 sur les représentations galoisiennes « modulaires », où d'ailleurs je remercie Fontaine.

Parlons d'autres choses, par exemple de vacances. J'aimais bien skier avec Fontaine et sa femme Laurence, notamment à Val d'Isère, où nous nous sommes beaucoup amusés – jusqu'au jour où Laurence, en voulant me suivre, est tombée et s'est fracturé le tibia : trois mois de plâtre . La pauvre ! Je lui ai offert « Poèmes – bulles » de Buzatti, pour me faire pardonner de l'avoir si mal guidée.

Autre souvenir de vacances : Ceillac, où ma femme et moi avions loué un immense chalet, ce qui nous a permis d'inviter Fontaine, Laurence et leurs trois petites filles. Grandes promenades en montagne. Celle qui m'a le plus impressionné, c'est celle que j'appelle « Swan-Guermantes » : au départ de Ceillac, il y avait deux côtés différents, entre lesquels il fallait choisir. Un jour, Fontaine est parti tout seul, et, avec ses grandes jambes, a enchaîné les deux côtés. Et il n'avait pas l'air fatigué. Oh ! Nous étions très admiratifs.

Souvenirs de ses derniers jours : je suis allé le voir, chez lui, quelques semaines avant sa mort. Il n'y avait plus de doute sur l'issue. Mais j'ai été surpris de voir à quel point il était de bonne humeur, cancer ou pas cancer, et aussi comment nous pouvions encore discuter de mathématiques. Comme cadeau, je lui avais apporté un livre : on ne peut pas offrir des chocolats à quelqu'un dont on a enlevé l'estomac. J'avais choisi une bande dessinée de la série « Le chat du rabbin ». Je pensais qu'un ex-catholique comme lui apprécierait cette description amusée d'une religion différente. Effectivement, il m'a dit ensuite qu'il l'avait beaucoup aimée, et je lui en ai envoyé deux autres fascicules ; ils lui ont tenu compagnie pendant ses derniers moments – à côté de son livre avec Fargues qui venait tout juste de paraître et qui a certainement été l'une des dernières joies de sa vie.

Une très belle vie.

Jean-Marc Fontaine

• L. Illusie

Jean-Marc est arrivé à Orsay en 1988, venant de Grenoble, où il était professeur depuis 1972. Il a été professeur à Orsay jusqu'à sa retraite, en 2009, puis professeur émérite. Je l'avais connu bien avant 1988, mais je ne me rappelle plus exactement quand nous nous sommes rencontrés pour la première fois. Peut-être à la soutenance de sa thèse, dirigée par Serre, en 1972. En tout cas, en juillet de la même année, nous avons participé à l'école d'été d'Anvers sur les formes modulaires, puis deux ans plus tard, à celle de l'ams, à Arcata. J'ai assisté à son cours Peccot en 1975.

Il portait sur la classification des groupes p-divisibles sur les corps locaux. Jean-Marc s'était tourné vers ce sujet après sa thèse, où il démontrait une conjecture de Serre sur la rationalité des représentations d'Artin. Les questions de Grothendieck sur les groupes p-divisibles et le « foncteur mystérieux » reliant cohomologie de de Rham et cohomologie p-adique des variétés sur les corps locaux l'intriguaient. À l'époque, personne n'avait la moindre idée de la façon dont on pouvait, ne serait-ce que formuler précisément le problème. Jean-Marc s'y attelle, et en quelques années élabore un formidable mécanisme algébrique permettant de lui donner un sens, et qui aboutira finalement à sa résolution complète. Considéré au début avec incrédulité, et même effroi, ce formalisme, fondé sur la construction de certains anneaux dits de périodes, qui portent maintenant son nom, est devenu le pilier de ce qu'on appelle la théorie de Hodge p-adique. Celle-ci joue un rôle central dans la géométrie arithmétique d'aujourd'hui, et a eu, depuis plus de vingt ans, des applications nombreuses et spectaculaires (par exemple aux travaux de Wiles-Taylor sur le dernier théorème de Fermat, et de Khare-Wintenberger sur la conjecture de modularité de Serre).

Jean-Marc m'a accompagné tout au long de ma carrière, à Orsay, mais aussi dans quantité de voyages à travers le monde, en Europe, aux États-Unis, en Inde, en Chine et au Japon. J'ai tant de souvenirs que je ne sais lesquels choisir. Je crois que je devrais dire un mot de son arrivée dans notre équipe d'arithmétique et géométrie algébrique, en 1988. On a senti, tout à coup, un souffle nouveau. Avec Raynaud, Wintenberger, qui venait d'arriver lui aussi, Bernadette Perrin-Riou, Kato, qui était à Orsay, Mazur, qui était à Bures, et quelques autres, il organise un séminaire à l'ihés sur les « périodes p-adiques ». Il régnait alors une grande effervescence autour d'une conjecture qu'il avait faite avec Jannsen dans le cas semi-stable, la conjecture dite C_{st}, qui devait être démontrée en général par Tsuji une dizaine d'années plus tard. La formulation géométrique de cette conjecture, suite aux travaux de Hyodo et Kato, a ouvert de nouveaux champs de recherche, notamment dans ce qu'on appelle la géométrie logarithmique, qui est née d'une conversation que j'ai eue avec lui dans le train qui nous amenait à Oberwolfach en juillet 1988. Le volume qui en est issu, *Périodes p-adiques*, Astérisque 223, est resté jusqu'à aujourd'hui une référence de base sur la théorie de Hodge p-adique.

Je ne parlerai pas des années 90, pourtant riches en nouveaux développements (travaux de Jean-Marc et Bernadette Perrin-Riou sur les conjectures de Bloch-Kato, conjecture de Fontaine-Mazur, semestre p-adique à l'ihp co-organisé avec Berthelot, Kato, Rapoport et moi au printemps 1997, autour, en particulier, des résultats de Tsuji et Faltings sur les théorèmes de comparaison p-adiques).

Je voudrais dire quelques mots de la Chine, qui a beaucoup compté pour Jean-Marc. Juste après le congrès international de Pékin en 2002, où il était conférencier invité, Jean-Marc pense que le moment est venu de lancer une coopération avec la Chine en géométrie arithmétique. Dans le cadre d'un programme de Chair Professorship de géométrie arithmétique de 2003 à 2006 à l'université de Tsinghua, dont il est le premier titulaire, Jean-Marc convainc alors plusieurs de ses collègues d'Orsay d'aller enseigner là-bas, pour donner une solide formation à des étudiants talentueux et avides d'apprendre. Chaque année, certains seront sélectionnés pour venir préparer une thèse en France, à Orsay ou à l'éns. Beaucoup sont retournés en Chine, sur des postes de professeurs permanents, et y forment aujourd'hui l'épine dorsale de la géométrie arithmétique. Jean-

Marc a été l'âme de cette coopération, à laquelle il a consacré toute son énergie, jusqu'à sa maladie, en 2016. Dans un texte publié le 30 janvier dernier par la Chinese Mathematical Society, Yi Ouyang, qui à Pékin nous a procuré une assistance inestimable, et avec qui Jean-Marc a rédigé un ouvrage de base sur la théorie de Hodge *p*-adique, lui rend un hommage émouvant. En décembre, Miaofen Chen, qui avait été notre étudiante à Tsinghua en 2004, et qui est aujourd'hui professeur à l'ECNU à Shanghai, a réalisé, avec quelques camarades, une vidéo en son honneur.

Jean-Marc était d'une générosité extrême : à quiconque voulait bien l'écouter, il faisait part, avec enthousiasme, de toutes ses idées. Il adorait communiquer sa vision des mathématiques. Cela a été très profitable à ses élèves, notamment Jean-Pierre Wintenberger, Pierre Colmez et Christophe Breuil, qui, en retour, ont énormément contribué au développement et au rayonnement de son œuvre.

Tout comme Michel Raynaud, qui nous a quittés le 10 mars dernier, il n'aimait pas les honneurs et ne parlait jamais de ceux qu'il avait reçus : conférencier invité aux Congrès internationaux de Varsovie, en 1983, et de Pékin, en 2002, prix Petit d'Ormoy, Carrière et Thébaut en 1984, prix Gay-Lussac Humboldt en 2002, membre de l'Académie des Sciences depuis 2002.

Je voudrais terminer sur une note plus personnelle. Jean-Marc avait l'esprit de contradiction. À la cantine d'Orsay, ou autour de la machine à café, nous avions de longues discussions. Je ne pouvais pas avancer une opinion sans qu'il émette immédiatement une objection, souvent justifiée, du reste. Il y a un an et demi environ, après son opération, j'ai constaté un changement dans son attitude. Je me rappelle, nous étions ensemble à Padoue, en novembre 2017. Nous y donnions des cours tous les deux. Il avait le sens de l'orientation, moi pas. Le soir, il me guidait, sous la pluie, dans les ruelles tortueuses et chichement éclairées de la vieille ville, vers un bon petit bistrot de son choix. Au restaurant, il ne mangeait presque rien, mais nous causions longuement. Et nous étions d'accord sur tout. J'ai eu alors un triste pressentiment.

Jusqu'au bout Jean-Marc a lutté farouchement contre la maladie qui le rongeait. En mars 2016, lors d'un séjour à Taipei, j'avais suggéré son nom à notre collègue Chia Fu Yu, qui l'a invité à venir donner un cours. Jean-Marc a aussitôt accepté, mais a dû remettre plusieurs fois sa visite à cause de son opération et de ses séquelles. Finalement, en octobre dernier, il s'y est rendu, alors qu'il était en pleine rechute, et a fait, stoïquement, trois fois deux heures de cours, avant d'être rapatrié d'urgence à Paris.

Dans les derniers échanges que j'ai eus avec lui, nous avons bavardé comme si de rien n'était. De maths, de l'actualité, de musique, de *La nuit transfigurée*, l'un de ses morceaux de prédilection. Parmi les choses qui lui tenaient à cœur, il y avait : la ré-édition, avec liste d'errata-addenda, du volume d'Astérisque 223, *Périodes p-adiques*, la publication de son dernier article, sur les presque $\mathbf{C}_p$-représentations, la publication de son livre avec Yi Ouyang, et la publication de son travail avec Laurent Fargues sur la courbe fondamentale en théorie de Hodge *p*-adique. Pour les trois premiers projets, les choses avancent, mais ils n'ont pu, hélas, être achevés à temps. En revanche, son travail avec Laurent Fargues a été publié (Astérisque 406), et, il y a quelques semaines, Jean-Marc a eu la satisfaction de tenir l'ouvrage entre ses mains.

The China Legacy of Jean-Marc Fontaine

• Y. Ouyang

The success of the 2002 Beijing International Congress of Mathematicians convinced Fontaine that China would soon become an important hub of international mathematical society, in which the French mathematical community could play an important role. In 2003, Tsinghua University began to implement the Chair Professorship Program, inviting world class scientists to teach first rate courses and train students for high level research there. The Department of Mathematics invited Fontaine to be the Chair Professor of Arithmetic Geometry. Fontaine accepted the invitation with great enthusiasm. Since then, Fontaine, as the soul of the communication between Sino-French Number Theory and Algebraic Geometry, devoted all his energies to the cause of Chinese Number Theory and Algebraic Geometry.

First of all, Fontaine always took the education of students as the first priority, and put the cultivation of high-quality arithmetic geometry research talents in the first place. During the three years of Tsinghua University Chair Professorship Program, and afterwards the days of cooperation with Morningside Center of Mathematics of Chinese Academy of Sciences, Fontaine, apart from teaching the theory of p-adic Galois representations, also personally established a team of elite professors to teach and work in Beijing. He successfully invited Professors Illusie, Raynaud, Colmez, Clozel, Ullmo, Bost, Colliot-Thélène, Gille, Harari and Fargues etc. to come to teach in China. Professor Raynaud hardly left his family for more than a month during his lifetime, but at the request of Professor Fontaine, he spent nearly a semester at Tsinghua University in Spring 2004, working with Illusie to train students. The professors in the French team devoted themselves to teaching and offered rigorous seminars on arithmetic geometry to train students strictly, which laid a solid foundation for students. Fontaine actively created opportunities for outstanding students to go to study in France through the enrollment of Paris-Sud 11, the ALGANT project in the EU Erasmus Program, and the admission program of École normale supérieure etc. In these ways, first at Tsinghua University, then at the Academy of Mathematics of the Chinese Academy of Sciences and Peking University, a large number of outstanding students successfully completed their PhD in France, and became the backbone of the arithmetic geometry research in China today. Fontaine's work has fundamentally changed the culture of Tsinghua University's top students. Before his arrival, students at Tsinghua were content to stay at Tsinghua for undergraduate, master and PhD study, the so-called Three-Qing students. After the success of Fontaine's program, going abroad to work with the best teachers and to learn the most cutting-edge mathematics is becoming the mainstream choice of best students.

Fontaine's second endeavor was to strengthen the links between Chinese researchers and students and the international arithmetic geometry community, especially the French arithmetic geometry community. In August 2005, Fontaine and Professor Keqin Feng from Tsinghua organized a Sino-French summer school and then a conference in arithmetic geometry and automorphic forms in Tsinghua and Nankai University respectively, and invited famous mathematicians to teach and talk in these events. These activities opened the door of cooperation of number theory and arithmetic algebraic geometry between China and France. For the first time, most Chinese researchers and students had the opportunity to know the latest development in number theory and to build close relationship with first-class French mathematicians. Since then, the exchange in arithmetic geometry between China and France has become more and more frequent. In the summer of 2006, Fontaine organized the Asian Year on Motive at IHÉS, and a large number of Chinese students and scholars participated in the program. In 2010, in the trimester to celebrate his own retirement in Paris, he also took various measures to ensure the visiting Chinese students to have sufficient financial support to freely participate the various academic activities there. In fact, he always had a long-term plan for the exchange of Sino-French mathematicians. The short lived Center of Sino-French Mathematics at Tsinghua was part of his grand plan, but it didn't function properly due to various reasons in Tsinghua.

As an internationally renowned mathematician, Fontaine himself actively participated in mathematical activities and cooperative research in China. In the days before late October 2016, when he had to cancel his trip to China due to illness, he participated in many academic activities in China, gave talks and exchanged lively with other participants. In 2004, he taught the theory of p-adic Galois representations. I asked students to record the first draft of the manuscript "Theory of p-adic Galois Representation", and then revised and added some contents. The discovery of Fargues-Fontaine curve in 2009 and the theory of Scholze occupied a large part of his time and energy in the past decade, but he always kept in mind of our manuscript. Last December, in his last email to me, he was still concerning about the book. It is our hope to finish the final draft of the book to console his spirit in heaven.

Fontaine was also a master of solving various non-mathematical problems. Because of his Polytech background and family relations, many difficult real-time problems were easily solved by him. At first, the French government requested French language preparation for foreign students, but with his efforts, Chinese mathematical students going to France for postgraduate study obtained their visas without problems for many years. When I had some visa problem in 2006 in Amsterdam, he actually contacted the French Ministry of Foreign Affairs, the Embassy in

China and the Embassy in the Netherlands to solve my problem. Even in 2015, when a group of students from USTC, Tsinghua and Nanjing University were denied visas for language concerns due to the handover of French cultural officials in China, he was able to help us to find the proper officials (with the help of Professor Bourguignon) to solve the problem successfully. More than 10 years ago, when the incomes of China and France were greatly unbalanced, he was often able to find generous grants for visiting Chinese mathematicians and students so that they can study and work in France with all their heart and soul.

Fontaine has left us forever, but his imprint on the cause of number theory and algebraic geometry in China will remain indelible. In 2016, in order to celebrate and enhance the successful cooperation between Chinese and French arithmetic geometers, and in particular, to pay tribute to Fontaine, the 2nd Sino-French Arithmetic Geometry Conference (comparing to the first one in 2005 at Nankai) was convened at the Tsinghua Sanya International Mathematics Forum from November 7 to 11, 2016. Fontaine happily agreed to be the honorary co-chairman (with Keqin Feng), energetically helped me for the organization, but to his great disappointment he had to cancel his trip at the last moment. He still presided over Ullmo's remote talk at IHÉS. Most of the 42 Chinese and French scholars attending the conference were directly influenced by Fontaine. The talks represented some of the most advanced results in arithmetic geometry, indicating that the seeds Fontaine planted had germinated successfully.

In 2017, Feng and I wrote an article "Cooperation of Sino-French Number Theory and Algebraic Geometry" to celebrate the 90th anniversary of Tsinghua Mathematics. In this paper, we made a preliminary count about the students benefiting from Fontaine's program in 2003-2007: Of the 20 students who went to France for further study, 19 students earned their PhD degrees in France, 7 of them had/have permanent positions in France, and 9 of them were selected by the 1000 Talent Plan of the Chinese government. Most students in Fontaine's program are now working in the best research universities and institutes in China, several in France, USA and Japan.

In December 2018, after learning from Illusie about Fontaine's serious illness, the students, (headed by Chen Miaofen) made a tribute video to him, which touched him greatly. The following ancient Chinese saying might be appropriate to show our respect to Fontaine, the great teacher:

The Cloudy Mountain is towering and vast,
The River is deep and wide,
The virtue of our Master,
Tall like the Mountain and long like the River!

Jean-Marc

• L. Fargues

Je me rappelle encore être dans ma chambre d'étudiant en thèse à lire le volume « périodes p-adiques ». J'arrivais de province et je me disais que peut-être un jour je rencontrerais Fontaine à Paris, une espèce de rêve vague irréel. Je me rappelle l'avoir alors croisé par hasard dans le RER et j'étais déjà très impressionné, je n'avais pas osé lui parler.

Plus tard à Orsay je l'ai eu comme collègue et j'étais très intimidé par sa stature mathématique mais aussi par sa personnalité imposante : personne ne pouvait lui dire comment penser, en maths ou dans quelque autre domaine que ce soit. Il m'a fait confiance une première fois en me faisant découvrir la Chine en 2005. On y était allé pour donner des cours, une conférence et il m'a alors confié en thèse une étudiante chinoise Miaofen. J'en étais vraiment très honoré.

Le vrai déclic entre nous deux est arrivé lorsque je suis tombé sur mes filtrations des groupes plats finis. Je me rappelle être allé dans le bureau de Jean-Marc, hésitant, puis celui de Raynaud, en me disant que tout cela devait être connu et trivial pour Jean-Marc et Michel. Je n'ai jamais été aussi fier de moi que lorsque j'ai appris que ce n'était pas le cas. Ça a été le véritable début de notre collaboration. Dans les semaines qui ont suivi il voyait des filtrations de Harder-Narasimhan partout, un véritable déluge. C'était son nouveau jouet et il fallait suivre le rythme qu'il s'imposait, impressionnant ; il reprenait tout ses travaux et ceux de Colmez sur les Espaces de Banach de dimension finie avec ça (Colmez avait effectivement prouvé l'existence de deux fonctions additives sur sa catégorie, fonctions que l'on renommerait plus tard degré et rang d'un fibré vectoriel). Jean-Marc c'était la révolution permanente à tout instant, aucun répit. De mon côté je m'étais rendu compte que mes filtrations des groupes plats finis donnaient lieu à des filtrations et des polygones pour les groupes p-divisibles. J'essayais d'établir une inégalité entre ces polygones et le polygone de Newton de la fibre spéciale, inégalité que je réussis finalement à prouver en utilisant les filtrations des Espaces de Banach de dimension finie de Colmez.

Puis, Jean-Marc réussit à améliorer un résultat de Berger et montrer que l'anneau de périodes $\mathbf{B}_e$ est principal. De cela et des filtrations de Harder-Narasimhan il en déduisait une preuve courte de sa vieille conjecture « faiblement admissible implique admissible ».

Tout ça jusqu'au jour merveilleux où à Trieste nous sommes tombés sur la dernière révolution de sa vie : « la courbe ». Cela fut un moment unique comme on en vit rarement. Bien sûr, il est difficile de localiser le point qui nous a amenés un matin au réveil à nous exclamer simultanément qu'il y a une courbe. La principalité de l'anneau $\mathbf{B}_e$, le fait que l'anneau de périodes $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ puisse jouer le rôle de complété de l'anneau local en l'infini, les filtrations de Harder-Narasimhan... Il m'a fait une nouvelle fois confiance et nous avons travaillé dessus sans relâche. Jean-Marc avait toujours raison et je n'ai jamais vécu de moments si intenses dans ma vie. Je me battais avec mon esprit géomètre et lui avec son esprit arithméticien.

Nous nous sommes rapidement convaincus de l'existence d'un théorème de classification des fibrés sur la courbe. De celui-ci on déduisait de nouvelles preuves géométriques, naturelles et très courtes, des deux théorèmes principaux de la théorie de Hodge p-adique « faiblement admissible implique admissible » et « le théorème de la monodromie p-adique ». Je délirais parfois sur le champ des fibrés vectoriels sur la courbe et les opérateurs de Hecke mais cela devrait attendre plus tard.

On a parcouru le monde ensemble pour exporter la révolution. Finalement est sorti notre texte qu'il a pu tenir entre ses mains dans ses derniers moments, sa dernière révolution.

Du fond de ma chambre d'étudiant à admirer les travaux d'un grand mathématicien jusqu'à notre travail en commun : merci de m'avoir fait confiance Jean-Marc.

Memories of Jean-Marc and his mathematics

• M. Kisin

The semestre p-adique

I first met Jean-Marc during the Spring of 1997 at the *Semestre p-adique*, at the Institut Henri Poincaré in Paris. At the time I was a graduate student of Nick Katz at Princeton, and had been allowed to go to Paris for the semester. I arrived a few weeks before the semester, and decided that, in preparation, I would study Jean-Marc's book on p-divisible groups over local fields. I knew that the classification of p-divisible groups played an important role in Wiles' work on Fermat's Last Theorem and modularity. The subject of the book is the classification of p-divisible and formal groups over the ring of integers of a p-adic field. Formally, the main results are easy to state: p-divisible groups can be classified using much simpler objects involving only linear algebra. The proofs involve delicate calculations using Witt vectors and bi-vectors which mediate between the two worlds.

After I had read most of the book, I introduced myself to Jean-Marc, and asked him some questions about the calculations in the book. He answered my questions, but explained that actually the subject of his lectures at the semester would not concern the book. As I eventually learned, those were about the classification of p-adic Galois representations: His p-adic period rings $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}, \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}, \dots$, the theory of weakly admissible modules, and his theory of (φ, Γ)-modules, which relied on his earlier work with Wintenberger. At the end there were some (at the time) rather mysterious, but striking results on certain Banach spaces with Galois action, which he called *presque* $\mathbb{C}_p$*-representations*. These lead a few years later to a proof by Colmez-Fontaine of Jean-Marc's conjecture *weakly admissible implies admissible*, which completely classifies semi-stable representations; they are related to Scholze's recent theory of diamonds.

Jean-Marc delivered his lectures with great energy. For two hours at a time he would explain results and calculations. Although these were often ingenious, they were presented with a kind of inevitability, as if Jean-Marc had discovered a previously unknown species of animal, and was simply reporting on its properties. During the course of the semester, I would meet Jean-Marc from time to time to ask him about things which had come up in his lectures, or some of the related reading. At one of these meetings, I asked him how he had come to invent his period rings. *Well, I was doing calculations with Witt bivectors...* As I would grow to appreciate later, this was characteristic of Jean-Marc's style, and indeed his whole school of p-adic Hodge theory. Here he had invented these remarkable rings, which had almost magical properties; a theory of p-adic periods much richer than anything one could hope for from its complex analogue. Yet the genesis of this was not some pure thought, high level heuristic about motives, à la Grothendieck. It was a long series of intricate calculations, from which these remarkable conjectures and theorems were finally distilled. These p-adic Hodge theorists seemed to me like an order of monks, who were able to reveal the hidden design of a tapestry by examining it one thread at a time.

Included in Jean-Marc's theory of presque $\mathbb{C}_p$-representations, were two striking and, to me, rather surprising results. To explain them fix an algebraic closure $\overline{\mathbb{Q}}_p$ of $\mathbb{Q}_p$, and let $\mathbb{C}_p$ be its p-adic completion. A result of Tate asserts that a $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-invariant element of $\mathbb{C}_p$ lies in $\mathbb{Q}_p$. For elements in $\overline{\mathbb{Q}}_p$ this is Galois theory, but Tate's stronger result requires other methods. One can formulate Tate's result as follows

Theorem. (Tate) *Any* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$*-equivariant,* $\mathbb{C}_p$*-linear map* $\mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ *is given by multiplication by an element of* $\mathbb{Q}_p$.

Jean-Marc explained that it was enough to ask that the map be only continuous rather than $\mathbb{C}_p$-linear.

Theorem. (Fontaine) *Any* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$*-equivariant, continuous map* $\mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ *is given by multiplication by an element of* $\mathbb{Q}_p$.

A second result involves the Tate twist $\mathbb{C}_p(1)$, for which one multiplies the $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ action on $\mathbb{C}_p$ by the cyclotomic character. As $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-representations the spaces $\mathbb{C}_p$ and $\mathbb{C}_p(1)$ are quite different. For example, there are no non-zero, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$-equivariant, continuous maps between them, and they are responsible for different p-adic periods. Nonetheless, Jean-Marc had proved the following:

Theorem. (Fontaine) *There is a* p*-adic Banach space* X*, with an action of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$*, together with finite dimensional subspaces* $V_1, V_2 \subset X$*, such that*

$$X/V_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p \quad \text{and} \quad X/V_2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}_p(1).$$

In other words, although $\mathbb{C}_p$ and $\mathbb{C}_p(1)$ are quite different from one point of view, they can be made isomorphic if extended by a finite dimensional $\mathbb{Q}_p$-representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$.

By the end of my time at the semestre p-adique, I felt it would be a pleasure to spend one's life doing calculations with period rings, and tending the p-adic periods in Jean-Marc's garden. It would take me several years to make any contribution at all to p-adic Hodge theory, but Jean-Marc's ideas were to have a profound influence on my future mathematics.

The Fontaine-Mazur conjecture

A year after the semestre p-adique, I had finished my thesis and gone to be a postdoc in Sydney and then Münster. The focus of the semestre p-adique - both Jean-Marc's lectures and others - had been entirely local, for example concerned about the representations of Galois groups of local fields. After leaving Princeton, I became more interested in questions about modular forms and global Galois representations, and in particular I learned about the Fontaine-Mazur conjecture.

Conjecture. (Fontaine-Mazur) *Let*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$$

be a continuous representation which is unramified at all but finitely many primes, and such that $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ *is de Rham. Then* ρ *comes from algebraic geometry. More precisely it is a subquotient of a representation appearing in the cohomology of an algebraic variety of* $\mathbb{Q}$.

This is a rather audacious conjecture. If one insists only that ρ is unramified outside a finite set of primes S, then for $\ell \notin S$, one can consider the image of the Frobenius Frob_ℓ under ρ. This is well defined as a conjugacy class is $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$, and its eigenvalues are p-adic numbers lying in some finite extension of $\mathbb{Q}_p$, about which one cannot expect to say much in general. For example, these eigenvalues have no reason to be algebraic numbers. However, if ρ comes from algebraic geometry, then one knows from the work of Deligne and de Jong that these eigenvalues are necessarily *Weil numbers*. That is, they are algebraic numbers, which are p-units, and for each eigenvalue α there exists an $\iota \in \mathbb{Z}$, such that the archimedean absolute values of α are all equal to $|\ell|^{\iota/2}$. However, the conjecture imposes no condition at these primes ! It asks only that at p (where ρ will typically be ramified) ρ is de Rham.

I found the conjecture astonishing. Like, Jean-Marc's results on presque $\mathbb{C}_p$-representations, it seemed to be an act of mathematical levitation where the assumptions could not possibly be enough to support the conclusion. When Jean-Marc visited me in Sydney, I told him I thought this conjecture was rather outrageous. *Well find a counterexample...* Indeed I did try to find a counterexample, using the finite slope overconvergent eigenforms which has been studied by Coleman-Mazur. These give rise to global Galois representations, which are Hodge-Tate at p (at integral weight), but one does not expect these representations to come from geometry if the form is not classical. On the other hand a classical form can be approximated arbitrarily closely by non-classical ones. I hoped to show one of these approximating forms, was de Rham, but I ended up showing that this couldn't happen; the de Rham condition kicks in exactly when the form becomes classical !

In fact I needn't have been quite so skeptical of the conjecture because the work of Wiles and Taylor-Wiles on modularity lifting was already quite strong evidence that it is true. This also involves using a condition at p (that $\rho|_{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)}$ comes from a p-divisible group) to prove that certain representations are modular. A few years later I generalized this to prove some other cases of the conjecture.

There is a special case of this conjecture (really a precise form of a special case), which is perhaps even more tantalizing because it is completely elementary to state, and yet equally out of reach.

Conjecture. (Unramified Fontaine-Mazur) *Let*

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$$

be a continuous representation which is unramified at all but finitely many primes, and such that inertia at p has finite image under ρ. Then ρ has finite image.

Reflections

When I recall conversations with Jean-Marc what stands out is a clarity of vision and a complete lack of pretension. He was bemused by people who thought themselves important and would sometimes comment with dry humor either on politicians, bankers (anyone connected with finance was a banker), or members of the scientific community - it was always fun to discuss politics and current events with Jean-Marc. Once one saw things clearly, there was nothing left to make a fuss about. *You see...* Sarkozy is a crook, you compute with some Witt bivectors and make a period ring... *that's it*.

Jean-Marc's legacy goes beyond particular theorems. His penetrating vision produced his p-adic period rings, and the suite of conjectures around them, his conjecture with Mazur, and more recently his work with Fargues on the *Curve*. These are objects that were simply not there before, and then... they were.