332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(998) *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini*

Charles FAVRE

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2008
61e année, 2008-2009, no 998, p. 11 à 43

LE GROUPE DE CREMONA ET SES SOUS-GROUPES DE TYPE FINI

par **Charles FAVRE**

INTRODUCTION

Le groupe de Cremona Cr(2) est le groupe constitué des applications birationnelles du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. L'étude de ce groupe et de ses éléments fut initiée par E. De Jonquières, L. Cremona et M. Noether à la fin du XIXe siècle et leurs travaux ont largement inspiré les géomètres italiens du début du XXe siècle. Peu à peu cependant, le groupe de Cremona a quitté sa position centrale en géométrie algébrique. Comme nous le verrons, de nombreux aspects de la structure de Cr(2) restent encore mystérieux.

C'est un théorème dû à M. Noether que Cr(2) est engendré par $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ et l'involution $[x : y : z] \mapsto [yz : zx : xy]$ dite involution de Cremona. Au début des années 80, M. Gizatullin [**51**] puis V.I. Iskhovskikh [**58**] ont donné une présentation de Cr(2) par générateurs et relations. Bien que fondamental, ce résultat est en pratique délicat à appliquer. On ne sait par exemple pas si Cr(2) est un groupe simple(1), ou même quelles sont les structures de groupe topologique sur Cr(2).

Un moyen pour appréhender la structure de Cr(2) est d'en étudier les sous-groupes. L'étude des sous-groupes finis de Cr(2) a été récemment complétée par I. Dolgachev et V.I. Iskhovskikh [**35**] et nous renvoyons à l'exposé de J.-P. Serre [**71**] à ce séminaire pour un rapport détaillé sur la question. De même, les sous-groupes continus de Cr(2) ont été décrits par L. Enriques [**39**] en 1893(2). Un tel groupe est conjugué à un sous-groupe du groupe des automorphismes d'une surface torique (voir [**9**] pour plus de précisions).

(1) Le groupe des automorphismes polynomiaux du plan de jacobien 1 n'est pas simple, voir [**21**], et S. Cantat et S. Lamy ont annoncé l'analogue pour Cr(2).
(2) Voir [**24**] pour des résultats en dimension quelconque et [**76, 77**] pour une classification précise en dimension 3.

Ici nous nous intéresserons principalement aux sous-groupes G de $\mathrm{Cr}(2)$ infinis et *de type fini*. Nous allons décrire les résultats remarquables obtenus récemment par J. Deserti et S. Cantat sur ces groupes et les conséquences que l'on peut en tirer pour le groupe de Cremona lui-même.

Leurs travaux s'articulent autour de la question suivante : étant donné un groupe G de type fini, peut-on trouver un morphisme de groupe $\rho : G \to \mathrm{Cr}(2)$ qui soit injectif ? Pour traiter ce type de question, on dispose de deux méthodes. La première consiste à utiliser notre connaissance sur la structure des deux groupes G et $\mathrm{Cr}(2)$. Dans ce cas, les théorèmes de Noether, de Gizatullin et d'Iskhovskikh jouent un rôle crucial. La seconde consiste à faire agir le groupe d'arrivée sur un espace géométrique convenable, puis à analyser l'action induite par G sur cet espace. C'est cette méthode que nous allons mettre en œuvre ici, en nous reposant sur le fait établi par S. Cantat que $\mathrm{Cr}(2)$ agit par isométries sur un espace métrique hyperbolique au sens de Gromov. Ceci permet d'utiliser la théorie des actions de groupes sur de tels espaces, pour laquelle on dispose de nombreux outils, voir par exemple **[12, 49]**.

Afin de motiver l'introduction de cet espace, penchons-nous tout d'abord sur le cas de la dimension 1, c'est-à-dire sur le groupe des transformations de Möbius $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$. Ce groupe agit holomorphiquement sur l'espace projectif $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, et par isométries sur l'espace hyperbolique de dimension 3 réelle $\mathbb{H}^3$.

Une application birationnelle $f \in \mathrm{Cr}(2)$ agit de même naturellement sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Cependant, cette action n'est pas holomorphe car f peut avoir des points d'indétermination. De plus, l'itération de f conduit en général à des phénomènes dynamiques extrêmement complexes, voir **[73]** : cette action n'est donc pas maniable pour le problème qui nous concerne.

Il a été progressivement réalisé que de nombreux aspects dynamiques d'une application birationnelle étaient contrôlés par son action sur la cohomologie $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ d'un modèle birationnel adéquat X de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. La construction d'un tel modèle n'étant pas canonique, on est amené à considérer l'espace (de dimension infinie) de toutes les classes de cohomologie de tous les modèles birationnels de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, espace dont la construction précise a été donnée par Y.I. Manin **[66]**. Sa complétion pour la forme bilinéaire induite par le cup produit définit un espace de Hilbert réel que l'on notera $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ et qui est muni d'une forme d'intersection de type Minkowski[(3)] $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha\cdot\beta$. Comme en dimension finie, l'une des deux nappes de l'ensemble $\{\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P}), \alpha\cdot\alpha = +1\}$ possède une métrique $d_{\mathbb{H}}$ qui en fait un espace hyperbolique au sens de Gromov. On notera $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ cet espace métrique.

FAIT. — *Le groupe de Cremona* $\mathrm{Cr}(2)$ *agit par isométries sur l'espace* $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$.

(3) C'est-à-dire possédant un vecteur d'auto-intersection strictement positive, telle que la restriction de la forme sur l'orthogonal de ce vecteur soit définie négative.

Il existe une classification grossière des isométries d'un espace hyperbolique [**49**] : on parle d'isométrie hyperbolique, parabolique ou elliptique. On peut donc introduire la notion d'application birationnelle hyperbolique, parabolique ou elliptique suivant le type de son action induite sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$.

Un résultat dû à J. Diller et moi-même [**31**] donne la caractérisation géométrique suivante de chacun de ces trois types. Une application birationnelle f est elliptique si elle fixe une classe $\alpha \in \mathbb{H}(\mathfrak{P})$. On montre que c'est le cas précisément lorsqu'un itéré de f induit un automorphisme sur une surface rationnelle minimale. Une application f est parabolique si elle n'est pas elliptique et si elle fixe une classe non-nulle $\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ d'auto-intersection nulle. Dans ce cas, on montre que la classe α est déterminée par la fibre d'une fibration rationnelle ou elliptique f-invariante (dans un modèle birationnel adéquat). Enfin f est hyperbolique lorsque le rayon spectral $\lambda(f)$ de son action sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ vérifie $\lambda(f) > 1$. Dans ce cas, l'opérateur induit par f sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ possède deux vecteurs propres simples et d'auto-intersection nulle dont les valeurs propres associées sont $\lambda(f)$ et $\lambda(f)^{-1}$ respectivement. Nous renvoyons au théorème 2.7 ci-dessous pour un énoncé plus complet.

Définition. — *Un sous-groupe G de type fini de* $\mathrm{Cr}(2)$ *est dit élémentaire si G préserve une classe $\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ non nulle telle que $\alpha \cdot \alpha \geq 0$.*

Les résultats principaux de S. Cantat [**17**] peuvent alors s'énoncer sous la forme suivante.

Théorème A. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Cr}(2)$ *de type fini. Si G n'est pas élémentaire, alors il contient deux éléments hyperboliques qui engendrent un groupe libre non-abélien.*

Définition. — *Soit G un sous-groupe de type fini de* $\mathrm{Cr}(2)$ *élémentaire.*

- *G est dit hyperbolique s'il contient un élément hyperbolique.*
- *G est dit parabolique s'il contient un élément parabolique.*
- *G est dit elliptique s'il ne contient que des éléments elliptiques.*

Théorème B. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Cr}(2)$ *de type fini et élémentaire.*

1. *Si G est de type hyperbolique, il existe un sous-groupe G_0 d'indice au plus 2 dans G, et un morphisme surjectif $\rho : G_0 \to \mathbb{Z}$ dont le noyau ne contient que des éléments elliptiques, et tel que $\rho(f) \neq 0$ si et seulement si f est hyperbolique.*
2. *Si G est de type parabolique, il existe une surface rationnelle X et une fibration rationnelle ou elliptique sur X qui est préservée par tous les éléments de G. De plus G ne contient aucun élément hyperbolique.*

3. *Si G est de type elliptique, alors soit il possède un sous-groupe distingué d'indice fini conjugué à un sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ *; soit il existe une surface rationnelle X et une fibration rationnelle sur celle-ci préservée par tous les éléments du groupe.*

S. Lamy **[62]** avait précédemment donné une classification des sous-groupes du groupe $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ des automorphismes polynomiaux du plan, et ce sans hypothèse de type fini. Nous renvoyons au théorème 1.9 pour un énoncé précis.

Nous donnerons une preuve détaillée des théorèmes A et B à la section 3. Notons que ces résultats sont en fait vrais pour toute surface kählérienne : nous nous sommes restreint au plan projectif car les mêmes méthodes s'appliquent dans le cas général et sont plus faciles à mettre en œuvre. En effet, pour les surfaces de dimension de Kodaira non négative, une application biméromorphe est holomorphe sur son modèle minimal. De même, une application birationnelle d'une surface réglée non rationnelle préserve nécessairement le réglage.

Notons enfin que les méthodes que nous utiliserons étant purement algébriques, elles permettent aussi de traiter le cas du groupe de Cremona sur n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Dans ce cadre, il faut remplacer l'action sur la cohomologie par l'action sur le groupe de Néron-Severi.

Avertissement

Afin de garder ce texte court, nous n'évoquerons pas les aspects concernant l'étude dynamique des itérés d'une application birationnelle, pour laquelle il existe une littérature importante, voir **[2, 38, 73]** et les références qui s'y trouvent. De même, nous n'aborderons pas le problème de construction d'automorphismes de type hyperbolique sur les surfaces rationnelles. Nous renvoyons à **[68]** ou aux récents travaux de E. Bedford et K. Kim **[3, 4]** sur ce sujet. Enfin, nous avons délibérément choisi de ne pas parler de la dimension supérieure : aucune des techniques présentées ici ne se généralise de manière évidente dans ce cadre.

Je remercie chaleureusement S. Cantat, J. Deserti, R. Dujardin, J.-F. Quint et A. Zuk pour leur aide dans la préparation de cet exposé.

1. APPLICATIONS

Commençons par quelques applications des théorèmes A et B. Nous verrons qu'il existe une analogie particulièrement frappante entre le groupe de Cremona et les groupes linéaires[(4)], ce qui motive quelques questions que nous avons rassemblées à la fin de cette partie.

1.1. Groupes de Kazhdan et groupe de Cremona

La propriété (T) de Kazhdan pour un groupe topologique G localement compact est la propriété de rigidité suivante : toute action continue par isométries affines de G sur un espace de Hilbert possède un point fixe. Elle permet en un sens d'obtenir un contrôle sur la théorie des représentations de G. Nous renvoyons à la récente monographie [**5**] pour une discussion détaillée concernant cette propriété.

THÉORÈME 1.1 ([**17**]). — *Soit G un groupe discret vérifiant la propriété (T). Tout morphisme $\rho : G \to \mathrm{Cr}(2)$ d'image infinie est conjugué par un élément de* $\mathrm{Cr}(2)$ *à un morphisme à valeurs dans* $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$.

Démonstration. — Le groupe G vérifiant la propriété (T), il est de type fini, et toute fonction de type négatif[(5)] sur G est bornée. Comme la fonction $\phi(\alpha, \beta) = \log\cosh d_{\mathbb{H}}(\alpha, \beta)$ est de type négatif sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ (voir [**5**]), elle est bornée. Puisque $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ satisfait à l'inégalité de la médiane, on peut appliquer le lemme du centre [**56**, p. 37] qui implique l'existence d'un point $\alpha \in \mathbb{H}(\mathfrak{P})$ fixé par tous les éléments de $\rho(G)$. On en déduit que $\rho(G)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Cr}(2)$ élémentaire de type elliptique. Par le théorème B, soit il est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$, soit il préserve une fibration rationnelle. Dans le second cas, l'action de G sur la base de la fibration (isomorphe à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) induit un morphisme du groupe vers $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$. Comme G possède la propriété (T), son image est nécessairement finie. On regarde maintenant l'action induite par G sur une fibre générique. À nouveau l'image dans $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ est finie, donc $\rho(G)$ est fini, ce qui contredit notre hypothèse. □

Historiquement, les réseaux des groupes de Lie vérifiant la propriété (T) ont formé une classe très importante d'exemples. Rappelons qu'un réseau d'un groupe de Lie vérifie la propriété (T) si et seulement si le groupe de Lie la vérifie ; et qu'un groupe de Lie réel connexe et semi-simple ne vérifie pas la propriété (T) si et seulement s'il possède un facteur simple localement isomorphe à $\mathrm{SO}(n, 1)$ ou $\mathrm{SU}(n, 1)$. Le théorème suivant est une conséquence de [**25**] et [**17**].

---

(4) Pour p premier, le groupe $\langle a, b, c | \, c^p = [a, c] = [b, c] = 1, [a, b] = c \rangle$ ne se plonge pas dans $\mathrm{GL}_n(k)$ avec $p \geq n$ et k un corps de caractéristique distincte de p (Birkhoff). Dans $\mathrm{Cr}(2)$, on peut prendre $a = (\zeta x, y)$, $b = (x, xy)$, et $c = (x, \zeta^{-1} y)$ avec ζ une racine p-ième primitive de 1 (Cerveau-Deserti). Donc $\mathrm{Cr}(2)$ ne plonge dans aucun $\mathrm{GL}_n(k)$.

(5) Une fonction de type négatif est un moyen commode d'encoder une action affine sur un espace de Hilbert.

Théorème 1.2. — *Soit G un groupe de Lie réel connexe simple vérifiant la propriété (T), et Γ un réseau de G muni d'un morphisme ρ dans* $\mathrm{Cr}(2)$ *d'image infinie. Alors à conjugaison près, l'image de ρ est incluse dans* $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$. *Si de plus $\rho(G)$ n'est pas relativement compacte dans* $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$, *alors on a* $G = \mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$ *ou* $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$, *et ρ est la restriction à Γ de $u \mapsto u$, $u \mapsto {}^t u^{-1}$, $u \mapsto \bar{u}$ ou $u \mapsto {}^t\bar{u}^{-1}$.*

Notons qu'il existe des réseaux de $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ munis de morphismes d'image dense dans $\mathrm{SU}(3)$. Fixons $d \geq 2$ un entier sans facteur carré, posons $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ et notons $\mathcal{O}$ son anneau des entiers. Soit L l'extension quadratique de K contenant $d^{1/4}$ et τ l'unique automorphisme de Galois de L sur K non trivial. Notons Γ le sous-groupe des matrices de $\mathrm{SL}(3,\mathcal{O})$ préservant la forme $(x,y) \in L^3 \times L^3 \mapsto \sum x_i \tau(y_i) \in L$. Le plongement canonique de K dans $\mathbb{R}^2$ induit alors un plongement de Γ dans $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R}) \times \mathrm{SU}(3)$. D'après le théorème de Borel-Harish-Chandra, l'image de Γ est un réseau dont la projection sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})$ est un réseau, et celle sur $\mathrm{SU}(3)$ est dense.

Démonstration. — Le réseau Γ hérite de la propriété (T) de G, donc par le théorème précédent, on peut supposer que ρ est à valeurs dans $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$. On applique alors les théorèmes de super-rigidité et d'arithméticité de Corlette-Gromov-Schoen en rang 1 et de Margulis en rang supérieur.

Par hypothèse $\rho(G)$ n'est pas relativement compact, donc ρ s'étend en un morphisme algébrique de G vers $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ qui est injectif par simplicité de G. Les seuls sous-groupes de Lie de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ simples, non compacts et vérifiant la propriété (T) sont $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{R})$ et $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$, comme on le voit en complexifiant G. On conclut en utilisant le fait classique que le groupe des automorphismes de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ est engendré par les automorphismes de corps de $\mathbb{C}$, les automorphismes intérieurs et la contragrédiente, voir [**30**]. □

Rappelons que $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ possède la propriété (T) si et seulement si $n \geq 3$.

Théorème 1.3 ([**25**]). — *Soit ρ un morphisme de* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ *dans* $\mathrm{Cr}(2)$ *d'image infinie. Alors $n \leq 3$. De plus, dans le cas $n = 3$, le morphisme ρ est nécessairement injectif et est conjugué au plongement standard* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}) \subset \mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ *ou à la contragrédiente.*

Démonstration. — Au vu du théorème précédent, il faut démontrer que l'image de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ ne peut être relativement compacte. En utilisant les relations entre les générateurs standard de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, on démontre que ρ coïncide avec un morphisme de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ dans $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ sur un sous-groupe d'indice fini Γ dans $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, voir [**74**, Theorem 6]. Cela implique $n = 3$. En utilisant plus en détail les résultats de Steinberg, on montre que l'on peut prendre $\Gamma = \mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$.

On peut aussi donner une démonstration plus directe du fait que tout morphisme de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Cr}(2)$ est (modulo conjugaison) à valeurs dans $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$, en analysant l'image des sous-groupes de Heisenberg de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$, voir **[25]**. □

Notons qu'il existe un corpus de conjectures dues à R. Zimmer qui concernent les morphismes des réseaux des groupes de Lie dans les groupes de difféomorphismes de variétés, voir **[45]** pour une discussion récente de ce type de questions. Les deux résultats précédents entrent naturellement dans le cadre de ces conjectures.

1.2. Propriétés structurelles de Cr(2)

Déduisons maintenant des théorèmes A et B quelques résultats généraux sur $\mathrm{Cr}(2)$.

THÉORÈME 1.4 (**[27, 28]**). — *Tout endomorphisme de* $\mathrm{Cr}(2)$ *injectif est un automorphisme. De plus, le groupe des automorphismes de* $\mathrm{Cr}(2)$ *est engendré par les automorphismes de corps de* $\mathbb{C}$ *et les automorphismes intérieurs.*

Notons que l'approche initiale de **[27]** reposait sur l'étude des sous-groupes de $\mathrm{Cr}(2)$ abéliens non-dénombrables et maximaux pour l'inclusion, et que le cas du groupe $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est traité dans **[26]**. Ici, nous suivons **[25]**.

Démonstration. — Soit φ un morphisme injectif de $\mathrm{Cr}(2)$. Par le théorème précédent, on peut supposer que φ est l'identité ou la contragrédiente sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. En regardant les relations de commutations entre les applications affines du type $(x+ay+b, y+c)$ avec $a,b,c \in \mathbb{C}$, on montre que φ induit un morphisme algébrique de $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ dans lui-même. Il n'est pas difficile de voir que $\varphi(1/x,1/y) = (a/x,b/y)$ pour un couple $a,b \in \mathbb{C}^*$ adéquat. Pour conclure, on utilise une des relations exhibées par M. Gizatullin pour sa description de $\mathrm{Cr}(2)$ par générateurs et relations. L'identité $(h\sigma)^3 = \mathrm{id}$ avec $\sigma[x:y:z] = [1/x:1/y:1/z]$ et $h[x:y:z] = [x:x-y:x-z]$ permet d'exclure la possibilité à φ d'être la contragrédiente sur $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$. □

THÉORÈME 1.5 (Alternative de Tits **[17]**). — *Soit G un groupe de type fini de* $\mathrm{Cr}(2)$. *Alors, soit G possède un sous-groupe libre non abélien, soit il contient un sous-groupe résoluble d'indice fini.*

L'alternative de Tits a été démontrée pour $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ par S. Lamy **[62]**.

Démonstration. — On vérifie que si G_1 et G_2 sont deux groupes vérifiant l'alternative de Tits, et s'il existe une suite exacte de groupes $1 \to G_1 \to G \to G_2 \to 1$, alors G vérifie aussi l'alternative. On applique maintenant les théorèmes A et B. Si G n'est pas élémentaire, il contient un sous-groupe libre. Si il est élémentaire elliptique ou parabolique, l'alternative résulte de la remarque précédente et de l'alternative pour les groupes $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$, $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}(x))$ et pour le groupe des automorphismes d'une courbe elliptique sur $\mathbb{C}(x)$, voir **[75]**. Enfin si G est élémentaire hyperbolique, c'est une extension de $\mathbb{Z}$ par un groupe G_0 ne contenant que des éléments elliptiques. Pour contourner le fait que G_0 n'est pas nécessairement de type fini, on remarque que le groupe dérivé $[G, G]$ est un sous-groupe de G_0 de type fini : il est donc élémentaire elliptique. On conclut en utilisant la suite $1 \to [G, G] \to G \to \mathrm{Ab}(G) \to 1$ où $\mathrm{Ab}(G)$ est l'abélianisé de G. □

Mentionnons enfin quelques résultats en vrac. Les deux premiers sont dus à S. Cantat [**17**], et le dernier à J. Deserti [**29**].

Théorème 1.6 (Propriété de Burnside). — *Tout sous-groupe G de type fini de torsion de* $\mathrm{Cr}(2)$ *est fini.*

Théorème 1.7. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Cr}(2)$ *résoluble de type fini et sans torsion. Alors soit G est abélien, soit il préserve un feuilletage.*

Théorème 1.8. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Cr}(2)$ *nilpotent. Alors soit tous ses éléments sont de torsion, soit le groupe contient un sous-groupe d'indice fini dont le groupe dérivé est abélien.*

1.3. Exemples

Commençons par quelques constructions classiques.

Groupes de Nagata et de Coble. — Partons de deux cubiques lisses de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ s'intersectant en 9 points distincts $p_0, \ldots, p_8$. La surface X obtenue par éclatement de ces 9 points est munie d'une fibration elliptique $\pi : X \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ possédant 9 sections $E_0, \ldots, E_8$ (les diviseurs exceptionnels créés par les 9 éclatements). Munissons chaque fibre régulière F de π de la loi de groupe d'origine $E_0 \cap F$. Pour chaque $1 \le i \le 8$, on peut considérer l'application $\varphi_i : X \to X$ induit par l'addition $x \mapsto x + (F \cap E_i)$ dans la fibre F. Les applications φ_i sont des automorphismes de X, et on montre que, pour un choix générique des cubiques de départ, le groupe engendré par les φ_i est abélien libre de rang 8.

Plus généralement, prenons 9 points p_i dans le plan, et considérons la surface $X(p_i)$ obtenue en éclatant ceux-ci. Un entier $r \ge 1$ étant donné, on dit qu'une configuration de 9 points p_i est de type Halphen d'indice r, si le système linéaire $|-rK_{X(p_i)}|$ est un pinceau de courbes elliptiques. On montre que, pour un choix générique de 9 points de type Halphen d'indice r, le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(X(p_i))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^8$ si $r \ge 3$, et à $\mathbb{Z}/2 \rtimes \mathbb{Z}^8$ si $r = 1, 2$, voir [**34**].

On dit qu'une configuration de 10 points p_i dans le plan est de type Coble si $|-2K_{X(p_i)}|$ possède une section. Dans ce cas, ces points se trouvent sur une courbe rationnelle de degré 6 de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ avec 10 points doubles (un pour chaque p_i). La dimension de l'espace de telles configurations modulo $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{C})$ est égale à 9. Le groupe d'automorphismes $\mathrm{Aut}(X(p_i))$ agit naturellement par isométries sur l'orthogonal de la classe canonique dans $\mathrm{NS}(X(p_i))$. On obtient donc un morphisme $\mathrm{Aut}(X(p_i)) \to \mathrm{O}(9,1)$. Pour une configuration générique, l'image de ce morphisme est un réseau de $\mathrm{O}(9,1)$, voir [**34**].

Groupes de Wright. — Par le théorème de Jung, le groupe $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ est le produit amalgamé du groupe A des applications affines de $\mathbb{C}^2$, et du groupe E des automorphismes préservant la fibration rationnelle $\{x = \mathrm{cte}\}$. Par la théorie de Bass-Serre, il agit donc sur un arbre simplicial. On montre [**47**] qu'un élément de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ peut être de type elliptique et dans ce cas il est conjugué à un élément de A ou de E ; ou être de type hyperbolique et, dans ce cas, il est conjugué à une application dite « de Hénon » c'est-à-dire à une composée d'applications de la forme $(x,y) \mapsto (y, ax + P(x))$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $\deg(P) \geq 2$. S. Lamy [**62**] a donné la classification suivante des sous-groupes de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ et ce, sans hypothèse de type fini.

THÉORÈME 1.9. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$*. À conjugaison par un automorphisme polynomial près, on est dans l'un des quatre cas suivants :*

1. *G possède deux éléments hyperboliques engendrant un groupe libre non-abélien* ;
2. *G est un sous-groupe de A ou de E* ;
3. *G est de type fini élémentaire hyperbolique* ;
4. *tous les éléments de G sont elliptiques et on n'est pas dans le cas* (2).

Un groupe relevant du dernier cas est appelé groupe de Wright : les premiers exemples ont été donnés dans [**80**]. Un tel groupe G n'est jamais de type fini, mais est abélien, et est l'union croissante de groupes H_i cycliques et finis. Une description plus détaillée est donnée dans [**62**, Proposition 3.12]. Pour un exemple concret de groupe de Wright, on procède comme suit. Pour tout $k \geq 1$, notons $g_k(x,y) = (y, c_k y^{2^k+1} + x)$, avec $c_k \in \mathbb{C}^*$ arbitraire ; $\varphi_k = g_1^2 \circ g_2^2 \cdots \circ g_k^2$; $H_0 = \langle(-x,-y)\rangle$ et $H_k = \varphi_k \langle(\zeta_k x, \zeta_k y)\rangle \varphi_k^{-1}$ avec $\zeta_k = \exp(2i\pi/2^{k+1})$. Alors $H = \cup_{k\geq 0} H_k$ est un groupe de Wright.

Automorphismes de surfaces affines. — Le théorème 1.9 et plus généralement l'étude des propriétés algébriques de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ par S. Lamy ont été une source importante d'inspiration pour l'étude des sous-groupes de type fini du groupe de Cremona. Notons que d'autres surfaces affines ont un groupe d'automorphismes dont la structure est très proche de celle de $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$. C'est le cas pour les surfaces obtenues comme complémentaire d'une chaîne de courbes rationnelles portant un diviseur ample dans une surface projective [**52, 53**] ; ou des surfaces affines de $\mathbb{C}^3$ d'équations $xz = P(y)$ avec P de degré au moins 2 [**65**]. Le groupe d'automorphismes de toutes ces surfaces affines agit par isométries sur un arbre réel : le théorème 1.9 possède donc probablement un analogue dans toutes ces situations. Nous renvoyons à [**36**] pour une description d'une famille de générateurs de ces groupes.

Le cas des surfaces cubiques est particulièrement intéressant. Soit S une cubique lisse de $\mathbb{C}^3$ dont la complétion $\bar{S}$ dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ est aussi lisse. On suppose de plus que le plan à l'infini P_∞ est un plan tri-tangent, c'est-à-dire que l'intersection $\bar{S} \cap P_\infty$ est l'union de trois droites L_x, L_y, L_z s'intersectant en trois points distincts $p_x = L_y \cap L_z$, $p_y = L_z \cap L_x$ et $p_z = L_x \cap L_y$. Prenons un point $p \in S$, et considérons la droite joignant p à p_x. Elle coupe S en un troisième point que l'on note $\sigma_x(p)$. On obtient ainsi une involution sur S. On construit de même deux autres involutions σ_y et σ_z. Le groupe $G = \langle \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \rangle$ est alors un sous-groupe du groupe des automorphismes de la surface affine S qui est isomorphe au produit libre $\mathbb{Z}/2 \star \mathbb{Z}/2 \star \mathbb{Z}/2$. En regardant l'action de G sur le cycle déterminé par les trois droites à l'infini, on montre de plus la trichotomie suivante pour l'action d'un élément $g \in G$: soit g est conjugué à σ_x et est de type elliptique ; soit il est conjugué à $\sigma_x \sigma_y$, de type parabolique et préserve une fibration rationnelle ; soit il est hyperbolique. En particulier, G est un groupe de type fini de $\mathrm{Cr}(2)$ non élémentaire.

Notons que le groupe G apparaît dans plusieurs contextes de nature très différente : dans l'étude de l'espace des représentations du groupe libre à trois générateurs à valeurs dans $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, voir [**8**] pour une description élémentaire ; dans l'étude des équations de Painlevé VI, voir [**37, 59**] ; et enfin dans la théorie des opérateurs de Schrödinger discrets, voir par exemple [**20**] et les références qui s'y trouvent.

Le lien entre surfaces cubiques et espace de représentations permet d'obtenir des morphismes du groupe modulaire de Teichmüller de la sphère privé de quatre points dans $\mathrm{Cr}(2)$ qui préservent le type[(6)]. De même, le lien avec les équations de Painlevé fournit des morphismes de $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ dans $\mathrm{Cr}(2)$ qui préservent le type.

Prenons le cas de la cubique singulière de Cayley S_{cay}, qui est obtenue comme quotient de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ par l'involution $(x, y) \mapsto (x^{-1}, y^{-1})$. L'action d'une application birationnelle mononomiale $(x, y) \mapsto (x^a y^b, x^c y^d)$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ vérifiant $ad - bc = +1$ descend sur S_{cay}. On obtient ainsi une action birationnelle de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sur S_{cay}, et donc un morphisme de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{Cr}(2)$ qui préserve le type. Une équation de S_{cay} dans $\mathbb{C}^3$ est $x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 4$. On montre que l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ se déforme en une action préservant le type sur les surfaces $\{x^2 + y^2 + z^2 + xyz = a\}$ avec $a \in \mathbb{C}$, voir [**54**].

Nous renvoyons à [**16, 19**] pour plus de détails sur toutes ces constructions.

Groupe symplectique et groupe de Thompson. — Cet exemple est dû à A. Usnich [**78**]. On fixe des coordonnées homogènes $[x : y : z]$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, et on note ω la 2-forme méromorphe donnée par $dx \wedge dy / xy$ dans la carte $[x : y : 1]$. Soit Symp le sous-groupe de $\mathrm{Cr}(2)$ préservant ω, c'est-à-dire le groupe des applications birationnelles f

(6) Le type d'un élément du groupe modulaire de Teichmüller est donné par le type de son action sur l'espace de Teichmüller.

telles que $f^*\omega = c\omega$ pour une constante $c \in \mathbb{C}^*$. Ce groupe contient $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ identifié aux applications monomiales $(x,y) \mapsto (x^a y^b, x^c y^d)$ avec $ad - bc = +1$; le groupe $(x,y) \mapsto (\zeta x, \xi y)$ avec $(\zeta, \xi) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$; ainsi que l'application $\varphi = (y, \frac{1+y}{x})$. Notons $\Delta = [x=0] + [y=0] + [z=0]$ le diviseur de $-\omega$, et Jf le diviseur déterminé par l'annulation du déterminant jacobien de f. Pour tout $f \in \mathrm{Symp}$, on a alors

$$f^*\Delta = \Delta + Jf. \tag{1}$$

Soit $M_\mathbb{R}$ l'espace des valuations monomiales sur $\mathbb{C}[x,y]$, c'est-à-dire des fonctions $\nu_{s,t} : \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{R}$ de la forme $\nu_{s,t}(\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j) = \min\{is + jt, a_{ij} \neq 0\}$ pour un couple $(s,t) \in \mathbb{R}^2$. Muni de la topologie de la convergence simple, cet espace s'identifie à $\mathbb{R}^2$ et contient naturellement le réseau $M_\mathbb{Z} \subset M_\mathbb{R}$ des valuations ne prenant que des valeurs entières.

Toute application birationnelle de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ agit sur l'espace des valuations de $\mathbb{C}[x,y]$. Lorsque $f \in \mathrm{Symp}$, on montre en utilisant (1) que cette action préserve $M_\mathbb{R}$ ainsi que le réseau $M_\mathbb{Z}$, et que cette action est affine par morceaux. Par exemple $\varphi_*(s,t) = (t, -s + \min\{0,t\})$. On obtient donc un morphisme ρ de Symp dans le groupe T des homéomorphismes de $\mathbb{R}^2$ qui sont affines par morceaux et préservent le réseau $\mathbb{Z}^2$. Ce groupe est appelé groupe de Thompson, voir [**13**]. En utilisant une présentation du groupe T astucieuse, A. Usnich montre que la restriction de ρ au sous-groupe de Symp engendré par $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ et φ est surjective sur T. Notons que T ne peut être réalisé comme sous-groupe de $\mathrm{Cr}(2)$ car il ne vérifie pas l'alternative de Tits.

1.4. Quelques questions sur Cr(2)

Les résultats précédents suggèrent quelques questions naturelles. Nombre d'entre elles sont déjà explicites dans [**17**].

Il est tout d'abord probable que le théorème B puisse être précisé.

Question 1. — *Soit G un groupe élémentaire elliptique préservant une fibration rationnelle. Existe-t-il un modèle X dans lequel tous les éléments de G sont des automorphismes ?*

Question 2. — *Soit G un groupe élémentaire hyperbolique. Le groupe G_0 donné par le théorème B est-il de type fini ?*

Nous avons décrit les morphismes des réseaux des groupes de Lie vérifiant la propriété (T) dans $\mathrm{Cr}(2)$. Il reste donc le cas des réseaux de $\mathrm{SO}(n,1)$ et $\mathrm{SU}(n,1)$. Peu d'exemples de morphismes injectifs de tels réseaux sont connus. Les automorphismes des surfaces de Coble génériques sont des réseaux de $\mathrm{SO}(9,1)$ comme on l'a vu à la section précédente.

Question 3. — *Pour quels entiers n existe-t-il un réseau de* $\mathrm{SO}(n,1)$ *ou* $\mathrm{SU}(n,1)$ *s'injectant dans* $\mathrm{Cr}(2)$?

Il existe de nombreux morphismes du groupe libre vers le groupe de Cremona. Pour les groupes proches du groupe libre, il nous faut donc imposer des conditions supplémentaires sur les morphismes pour avoir une chance de les classer.

Prenons le cas du groupe fondamental $\pi_1(S)$ d'une surface réelle hyperbolique S de type fini éventuellement avec des points orbifolds. On a alors une notion naturelle de type d'un élément $\gamma \in \pi_1(S)$ suivant le type (hyperbolique, parabolique ou elliptique) de son action sur le disque de Poincaré.

Question 4. — *Classer les morphismes injectifs* $\rho : \pi_1(S) \to \mathrm{Cr}(2)$ *préservant le type.*

Notons que des exemples de morphismes des groupes fondamentaux de surfaces compactes dans le groupe des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ dont l'image contient au moins un élément hyperbolique ont été construits par S. Cantat et S. Lamy [**18**]. Le cas de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ paraît particulièrement intéressant au vu du théorème 1.3. Enfin on peut poser la même question pour les réseaux de $\mathrm{SO}(n,1)$ et $\mathrm{SU}(n,1)$ en adaptant la notion de type. Notons que le cas des représentations fidèles discrètes et préservant le type de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{PU}(2,1)$ est traité dans [**40**].

Le groupe de Cremona est à bien des égards proche des groupes linéaires. On peut donc se poser la question de savoir si les propriétés de Malcev et Selberg sont encore valables dans $\mathrm{Cr}(2)$.

Question 5. — *Soit G un sous-groupe de type fini de* $\mathrm{Cr}(2)$. *Est-ce que G contient un sous-groupe d'indice fini et sans torsion ? Est-ce que G est résiduellement fini, c'est-à-dire est-ce que, pour tout $g \in G$, il existe un morphisme $\rho : G \to H$ avec H fini et $\rho(g) \neq 1$?*

Nous avons vu que les théorèmes de structure des groupes de type fini permettent de déduire de nombreuses propriétés du groupe de Cremona. On ne comprend cependant pas en détail la structure des sous-groupes abéliens.

Question 6. — *Classer les sous-groupes abéliens de* $\mathrm{Cr}(2)$ *maximaux pour l'inclusion.*

Le cas non dénombrable a été étudié par J. Deserti [**27**] : un tel groupe préserve un feuilletage ou bien tous ses éléments sont de torsion. Le cas dénombrable semble plus délicat : un exemple d'un tel groupe isomorphe à $\mathbb{Z}^8$ est donné à la section 1.3. La classification des sous-groupes abéliens maximaux qui contiennent un élément hyperbolique est aussi ouverte.

Question 7. — *Le centralisateur d'un élément hyperbolique de* Cr(2) *est-il une extension de* $\mathbb{Z}$ *par un groupe fini ?*

La réponse à cette question est positive pour les automorphismes du plan par S. Lamy [**62**], ou sous certaines hypothèses de nature dynamique, voir [**17**, §5].

Notons que, comme l'alternative de Tits est vérifiée pour Cr(2), tout sous-groupe de type fini moyennable du groupe de Cremona est résoluble. De plus tout sous-groupe résoluble de type fini de Cr(2) est élémentaire.

Question 8. — *Tout sous-groupe résoluble de type fini de* Cr(2) *possède un sous-groupe d'indice fini dont le groupe dérivé est nilpotent.*

Inspiré par les résultats récents d'E. Breuillard sur l'alternative de Tits [**11**], on peut enfin poser la question suivante.

Question 9. — *L'alternative de Tits uniforme est-elle valide dans* Cr(2) ? *En d'autres termes, existe-t-il une constante* $C > 0$ *telle que, pour toute famille finie* $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Cr}(2)$ *engendrant un groupe non résoluble, on puisse trouver deux mots en les* f_i *de longueur au plus* C *et engendrant un groupe libre non abélien ?*

2. ACTION D'UNE APPLICATION RATIONNELLE DE SURFACE EN COHOMOLOGIE

Une application rationnelle $f : X \dashrightarrow X$ définie sur une variété projective induit une action linéaire sur la cohomologie de Dolbeault $\mathrm{H}^{p,q}(X)$ même lorsqu'elle admet des points d'indétermination. C'est un fait maintenant bien établi que cette action en cohomologie détermine de nombreux aspects de la dynamique de f. Par un théorème de M. Gromov [**55**], et de T.-C. Dinh et N. Sibony [**32, 33**], elle permet d'obtenir une borne supérieure sur l'entropie topologique. A. Russakovskii et B. Shiffman [**69**] ont aussi montré son importance pour les problèmes de distribution des sous-variétés itérées. C'est à ces auteurs que l'on doit la notion importante de degré dynamique que l'on rappellera ci-dessous.

On ne sait cependant exploiter l'information contenue dans l'action en cohomologie que sous certaines conditions portant sur l'ensemble d'indétermination de f. On est donc tenté de trouver un autre modèle birationnel dans lequel ces conditions sont satisfaites. Ce problème s'avère cependant très ardu[7], et l'idée de travailler simultanément avec tous les modèles birationnels est donc apparue naturellement.

[7] Seul le cas des surfaces a été traité systématiquement, et il n'est pas complètement résolu à ce jour, voir cependant [**31, 43, 44**].

Nous allons tout d'abord expliquer comment parler de l'espace des classes de cohomologie de tous les modèles birationnels du plan projectif et en étudier la structure. En particulier, on y construira l'espace hyperbolique $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ mentionné dans l'introduction sur lequel Cr(2) agit par isométries. Ensuite nous utiliserons cet outil pour décrire en détail l'action d'une application birationnelle sur la cohomologie (théorème 2.7).

2.1. Classes dans la variété de Riemann-Zariski

Un modèle (lisse) de $\mathbb{P}^2$ est une surface projective lisse X munie d'une application birationnelle $\pi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. Deux modèles X, X' sont équivalents si l'application birationnelle induite $X \dashrightarrow X'$ est un isomorphisme. Un modèle X domine un autre X' si cette application est régulière. Dans ce cas, X est obtenue à partir de X' en éclatant un nombre fini de points (éventuellement infiniment proches). L'ensemble $\mathfrak{B}$ des classes d'isomorphismes de modèles forme un ensemble inductif : pour tout couple de modèles X, X' il existe un modèle X'' les dominant tous les deux.

Il n'existe pas de variété projective dominant tous les modèles de $\mathbb{P}^2$. Cependant on peut considérer la limite projective de tous les modèles. Muni de la topologie produit, on obtient un espace topologique(8) $\mathfrak{P}$ appelé variété de Riemann-Zariski. L'ensemble de tous les points de tous les modèles de $\mathbb{P}^2$ est naturellement inclus(9) dans $\mathfrak{P}$. Cet espace permet donc de s'abstenir de travailler avec un modèle en particulier : c'est pour cela qu'il a été introduit par Zariski [**81**] dans l'optique de démontrer des théorèmes de désingularisation. On ne travaillera pas directement sur cet espace, mais il est bon de garder à l'esprit que les espaces que l'on va maintenant introduire sont en quelque sorte les espaces de (co)homologie de $\mathfrak{P}$.

Soit X un modèle de $\mathbb{P}^2$. Considérons l'éclatement de X en un point $p \in X$: $\mu : X' \to X$, et notons E le diviseur exceptionnel, d'auto-intersection -1. Le morphisme naturel $\mu^* : \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(X', \mathbb{Z})$ est alors injectif, et il n'est pas difficile de montrer que $\mathrm{H}^2(X', \mathbb{Z}) = \mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}[E]$. Cette décomposition est de plus orthogonale pour la forme d'intersection induite par le cup produit.

Comme $\mathrm{H}^2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$ est engendré par la classe L d'une droite pour laquelle $L \cdot L = +1$, pour tout modèle de $\mathbb{P}^2$ la forme d'intersection sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ est de type Minkowski, et possède une base orthogonale $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ avec $\alpha_1^2 = +1$ et $\alpha_i^2 = -1$ pour $k \geq i \geq 2$.

Si X' domine X et $\mu : X' \to X$ est le morphisme induit, les applications linéaires naturelles $\mu^* : \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(X', \mathbb{R})$ et $\mu_* : \mathrm{H}^2(X', \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ sont respectivement injective et surjective, et on a $\mu_* \mu^* = \mathrm{id}$ sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$.

(8) Celui-ci peut être muni d'une structure naturelle d'espace annelé.

(9) L'inclusion est stricte : l'ensemble de tous les points infiniment voisins, aussi appelé « bubble space » par Y.I. Manin [**66**, §35], a été utilisé par les géomètres italiens pour développer la théorie de l'intersection dans les surfaces, voir [**22**].

DÉFINITION 2.1. — *Une classe de Weil est un élément α de la limite projective $\varprojlim_{\mathfrak{B}} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ selon les morphismes μ_*. En d'autres termes, c'est la donnée pour tout modèle X d'une classe $\alpha_X \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ telle que $\mu_* \alpha_{X'} = \alpha_X$ dès que X' domine X et $\mu : X' \to X$ est le morphisme induit.*

Une classe de Cartier est un élément α de la limite injective $\varinjlim_{\mathfrak{B}} \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ selon les morphismes μ^*. C'est-à-dire que α est une classe de Weil au sens précédent pour laquelle on peut trouver un modèle X_0 tel que $\alpha_X = \mu^* \alpha_{X_0}$ pour tout modèle X dominant X_0, avec $\mu : X \to X_0$ le morphisme induit.

Si α est une classe de Cartier, et X_0 est un modèle vérifiant la condition ci-dessus, on dira que α est déterminée dans X_0 ou que X_0 détermine α. Si α est une classe de Weil et X est un modèle arbitraire, la classe α_X est appelée incarnation de α dans X. Fixons un modèle X, et une classe $\alpha_0 \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$. On peut alors lui associer la classe de Cartier α déterminée dans X par α_0. Ainsi on obtient un morphisme injectif de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ dans l'espace des classes de Cartier. L'ensemble des classes de Cartier est donc l'union des $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ pour X parcourant l'ensemble des modèles de $\mathbb{P}^2$.

On notera $\mathrm{H}^2(\mathfrak{P})$ l'ensemble de toutes les classes de Cartier. De même, on notera $\mathrm{H}_2(\mathfrak{P})$ l'ensemble de classes de Weil. Ce sont des espaces vectoriels de dimension infinie, et on a $\mathrm{H}^2(\mathfrak{P}) \subset \mathrm{H}_2(\mathfrak{P})$.

Ces espaces ont été introduits pour la première fois par Y.I. Manin [**66**]. Ils sont ensuite apparus dans les travaux de V.V Shokurov [**72**] liés à la géométrie birationnelle des variétés projectives de dimension quelconque. Leur apparition en dynamique holomorphe est récente et est due simultanément à S. Cantat [**17**] et à S. Boucksom, M. Jonsson et moi-même [**10**].

2.2. Intersection

Nous suivons essentiellement [**10**] auquel nous renvoyons pour des preuves détaillées.

Soient α une classe de Weil, et β une classe de Cartier déterminée dans un modèle X. La quantité $\alpha_X \cdot \beta_X$ ne dépend alors pas du choix du modèle, et on la note $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$. On a donc une forme bilinéaire $\mathrm{H}_2(\mathfrak{P}) \times \mathrm{H}^2(\mathfrak{P}) \to \mathbb{R}$ qui est symétrique sur $\mathrm{H}^2(\mathfrak{P})$.

Pour bien comprendre la structure de cette forme, nous allons construire des bases de $\mathrm{H}_2(\mathfrak{P})$ et $\mathrm{H}^2(\mathfrak{P})$ respectivement. Introduisons l'ensemble $\mathcal{V}_X$ constitué des classes d'équivalence de couples (p, X) avec $p \in X$ et X un modèle dominant $\mathbb{P}^2$ pour la relation : $(p, X) \sim (p', X')$ si et seulement si le morphisme naturel $\mu : X \dashrightarrow X'$ est un isomorphisme au voisinage de p et qu'il envoie ce point sur p'. L'ensemble $\mathcal{V}_X$ est en bijection avec l'ensemble des anneaux de valuations discrètes du corps des fonctions de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dont le corps résiduel est une extension non triviale de $\mathbb{C}$ et dont le centre dans $\mathbb{P}^2$ est un point.

À tout élément $\nu = (p, X) \in \mathcal{V}_X$ est associée une classe de Cartier. Si $\mu : X' \to X$ est l'éclatement de X en p, on définit $\mathcal{E}(\nu) = \mathcal{E}(p, X)$ comme la classe de Cartier déterminée dans X' par la classe fondamentale du diviseur exceptionnel de μ. Notons de plus $\mathcal{L}$ la classe de Cartier déterminée par la classe d'une droite dans $\mathbb{P}^2$.

On a $\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} = +1$, $\mathcal{E}(\nu) \cdot \mathcal{E}(\nu) = -1$, et $\mathcal{E}(\nu) \cdot \mathcal{E}(\nu') = \mathcal{E}(\nu) \cdot \mathcal{L} = 0$ pour tout $\nu \neq \nu' \in \mathcal{V}_X$.

Théorème 2.2. — *L'application linéaire $\theta : \mathrm{H}_2(\mathfrak{P}) \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\mathcal{V}_X}$ définie par $\theta(\alpha) = \alpha \cdot \mathcal{L} \oplus \{\nu \mapsto \alpha \cdot \mathcal{E}(\nu)\}$ est un isomorphisme.*

Pour alléger les notations, pour toute collection a, $a_\nu \in \mathbb{R}$, on notera $a\mathcal{L} + \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} a_\nu \mathcal{E}(\nu)$ pour $(a, \{\nu \mapsto a_\nu\}) \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\mathcal{V}_X}$ et on l'identifiera à la classe de Weil correspondante.

Une classe $\alpha = a\mathcal{L} + \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} a_\nu \mathcal{E}(\nu)$ est de Cartier si et seulement si l'ensemble $\{\nu \in \mathcal{V}_X, a_\nu \neq 0\}$ est fini. Dans ce cas, on a $\alpha \cdot \alpha = a^2 - \sum_{\mathcal{V}_X} a_\nu^2$. On est donc amené à la définition suivante.

Définition 2.3. — *Une classe de Weil $\alpha = a\mathcal{L} + \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} a_\nu \mathcal{E}(\nu)$ est dite L^2 si $\sum a_\nu^2 < +\infty$.*

On peut donner une caractérisation intrinsèque des classes L^2. Si α est une classe de Weil, alors α est L^2 si et seulement si $\inf_{\mathfrak{B}}\{\alpha_X \cdot \alpha_X\} > -\infty$.

On note $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ l'espace des classes L^2. Il contient strictement $\mathrm{H}^2(\mathfrak{P})$ et est strictement contenu dans $\mathrm{H}_2(\mathfrak{P})$. On a une forme bilinéaire symétrique naturelle sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ envoyant $\alpha = a\mathcal{L} + \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} a_\nu \mathcal{E}(\nu)$, $\alpha' = a'\mathcal{L} + \sum_{\nu \in \mathcal{V}_X} a'_\nu \mathcal{E}(\nu)$ sur $\alpha \cdot \alpha' := aa' - \sum a_\nu a'_\nu$. C'est une forme non-dégénérée de type Minkowski. Notons par ailleurs que la forme quadratique $\alpha \mapsto 2(\alpha \cdot \mathcal{L}) - \alpha \cdot \alpha$ est définie positive, et que $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ est un espace complet pour la norme associée.

Définition 2.4. — *L'espace $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ est par définition le sous-ensemble des classes $\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ telles que $\alpha \cdot \alpha = +1$ et $\alpha \cdot \mathcal{L} > 0$.*

Rappelons que, pour un espace vectoriel (V, q) de dimension finie munie d'une forme de type Minkowski, l'ensemble $\{\alpha \in V, q(\alpha) = +1\}$ est une hypersurface $\mathbb{H}(V)$ possédant deux composantes connexes, et que la restriction de q à cette hypersurface induit une métrique riemannienne pour laquelle $\mathbb{H}(V)$ devient le modèle hyperboloïde de l'espace hyperbolique de dimension $\dim(V) - 1$.

Dans notre situation, $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ est de dimension infinie, mais la situation est essentiellement la même. Posons $d_{\mathbb{H}}(\alpha, \beta) := (\cosh)^{-1}(\alpha \cdot \beta)$ avec $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

On vérifie que $d_{\mathbb{H}}$ définit une métrique sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ pour laquelle cet espace devient hyperbolique au sens de Gromov.

Dans la suite, on notera $\mathscr{C}^*$ le cône convexe de toutes les classes $\alpha \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ telles que $\alpha \cdot \alpha \geq 0$ et $\alpha \cdot \mathscr{L} > 0$. La réunion $\mathscr{C}^* \cup \{0\}$ est fermée pour la topologie faible duale de l'espace de Hilbert $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$.

2.3. Positivité

Il existe plusieurs notions de positivité pour les classes de $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ d'une variété kählérienne compacte X. Nous renvoyons à [**23**, §6] et à [**64**] pour une discussion détaillée.

Fixons X un modèle de $\mathbb{P}^2$ et α une classe dans $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$. À tout $\mathbb{R}$-diviseur $Z = \sum a_k C_k$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ et C_k des courbes irréductibles de X est associée une classe notée $[Z]$ égale à $\sum a_k c_1(\mathscr{O}_X(C_k)) \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$. La classe $c_1(\mathscr{O}_X(C_k))$ coïncide avec la classe fondamentale de C_k plongée dans X, et appartient au réseau $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$. On dira que α est *effective* si et seulement si elle peut être représentée par un $\mathbb{R}$-diviseur effectif, c'est-à-dire dont tous les coefficients a_k sont positifs. L'ensemble des classes effectives est un cône convexe qui n'est pas fermé en général. Son adhérence est appelée le cône des classes pseudo-effectives et notée $\mathrm{Psef}(X) \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$. C'est un cône strict au sens où $\mathrm{Psef}(X) \cap -\mathrm{Psef}(X) = \{0\}$. On montre qu'une classe est pseudo-effective si et seulement si elle est représentée par un courant positif fermé de bidegré $(1, 1)$.

Par dualité, on définit aussi la notion suivante : α est dite *nef* si et seulement si $\alpha \cdot \beta \geq 0$ pour toute classe β pseudo-effective. L'ensemble des classes nef est un cône convexe fermé strict contenu dans $\mathrm{Psef}(X)$. On le note $\mathrm{Nef}(X)$. On montre que l'intérieur du cône nef est constitué exactement des classes déterminées par les formes de Kähler sur X.

Définition 2.5. — *Une classe $\alpha \in \mathrm{H}_2(\mathfrak{P})$ est pseudo-effective* (resp. *nef*) *si et seulement si pour tout modèle X de $\mathbb{P}^2$ son incarnation α_X est pseudo-effective* (resp. *nef*)*.*

Si α est une classe de Cartier déterminée dans X, il est facile de voir que α est psef (resp. nef) si et seulement si son incarnation dans X l'est. Notons enfin que toute classe nef est L^2 car la famille $\{\alpha_X \cdot \alpha_X\}$ est bornée inférieurement par 0.

2.4. Classification des éléments de $\mathrm{Cr}(2)$

On va maintenant s'intéresser à l'action d'une application birationnelle $f \in \mathrm{Cr}(2)$ sur la cohomologie. Deux ingrédients vont jouer un rôle important : la notion de degré dynamique, et l'action de f sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$. Nous allons voir comment ceux-ci interagissent.

Commençons par le degré dynamique. Son origine est sans doute à chercher parmi les travaux de la fin des années 80 reliant entropie dynamique et croissance des volumes, qui ont culminé avec ceux de Gromov, Newhouse et Yomdin. Cette notion a ensuite progressivement émergé après la publication du papier d'Arnol'd [**1**], voir par exemple [**7, 57, 79**], et a été finalement formalisée par Russakovskii et Shiffman [**69**].

En coordonnées homogènes $[x : y : z]$, une application birationnelle f de $\mathbb{P}^2$ est définie par trois polynômes homogènes sans facteur commun. Leur degré commun est appelé degré de f et on le note $\deg(f)$. Si L est une droite générique de $\mathbb{P}^2$, sa préimage $f^{-1}L$ est une courbe de degré $\deg(f)$. On vérifie facilement que $\deg(f \circ g) \leq \deg(f) \times \deg(g)$ pour tout couple $f, g \in \mathrm{Cr}(2)$. La suite $\deg(f^n)$ est donc sous-multiplicative, et on peut poser :

$$\lambda(f) := \lim_{n \to \infty} \deg(f^n)^{1/n} .$$

On appelle $\lambda(f)$ le degré dynamique de f, voir [**69**]. En utilisant la sous-multiplicativité, il est facile de voir que $\lambda(g^{-1} \circ f \circ g) = \lambda(f)$ pour tout $g \in \mathrm{Cr}(2)$.

La construction de l'action de f sur l'espace $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ nécessite plusieurs étapes. Prenons tout d'abord $f : X \to X'$ un morphisme (pas nécessairement birationnel) entre deux surfaces. On a alors deux applications linéaires f^*, f_* entre $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ et $\mathrm{H}^2(X', \mathbb{R})$ préservant les réseaux $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$ et $\mathrm{H}^2(X', \mathbb{Z})$ et qui vérifient $f^*\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot f_*\beta$ et $f_* f^* \alpha = e(f) \times \alpha$ avec $e(f)$ le degré topologique de f. Ces constructions sont fonctorielles : pour deux morphismes f et g, on a $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ et $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Supposons que l'application $f : X \dashrightarrow X'$ soit seulement rationnelle, et prenons Γ une désingularisée du graphe de f. On a deux morphismes, l'un birationnel $\pi_1 : \Gamma \to X$ et l'autre $\pi_2 : \Gamma \to X'$ de degré topologique $e(f)$, tels que $f = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. On définit les applications linéaires $f_\# = \pi_{2*} \circ \pi_1^* : \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(X', \mathbb{R})$ et $f^\# = \pi_{1*} \circ \pi_2^* : \mathrm{H}^2(X', \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$.

Il est important de noter que ces constructions ne sont plus fonctorielles. Ainsi si f est une involution birationnelle de degré au moins 2 dans $\mathbb{P}^2$, les morphismes $f_\#$ et $f^\#$ s'identifient à la multiplication par $\deg(f)$ et on a $1 = \deg(f \circ f^{-1}) < \deg(f) \times \deg(f^{-1})$. On garde cependant toujours la propriété $f^\# \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot f_\# \beta$ pour toutes classes α, β.

Fixons désormais $f \in \mathrm{Cr}(2)$, et soit α une classe de Weil. Pour tout modèle X, prenons un autre modèle X' tel que l'application $\phi : X' \to X$ induite par le relèvement de f soit holomorphe. On définit $f_*\alpha$ comme l'unique classe de Weil dont l'incarnation dans X est déterminée par $\phi_*(\alpha_{X'})$. Si α est une classe de Cartier déterminée dans X, on définit $f^*\alpha$ comme l'unique classe de Cartier déterminée dans X' par $f^*\alpha_X$.

On vérifie (voir [**10**]) que ces définitions sont cohérentes, que f_* préserve les classes de Cartier, et que f^* s'étend continûment aux classes de Weil (pour la topologie de la limite projective). On montre de plus que f^* et f_* induisent des opérateurs continus sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ et vérifient :

$$f^*\alpha \cdot f^*\beta = \alpha \cdot \beta \text{ et } f^*\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot f_*\beta$$

pour toutes classes $\alpha, \beta \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$, voir [**10**].

Notons maintenant que, pour tout modèle X, on a :

$$\deg(f) = f^* \mathscr{L} \cdot \mathscr{L} = f^\# \mathscr{L}_X \cdot \mathscr{L}_X.$$

Lorsque le morphisme naturel $\mu : X \to \mathbb{P}^2$ est régulier, alors $\mathscr{L}_X = \mu^* L$ avec L la classe d'une droite dans le plan. En utilisant le fait que $f^\#$ préserve le cône convexe strict $\mathrm{Nef}(X)$ et que pour toutes classes nef α, β on a $2(\alpha \cdot \beta)\, \alpha \geq (\alpha \cdot \alpha)\, \beta$, on montre la

Proposition 2.6. — *Soit X un modèle de $\mathbb{P}^2$. Fixons une norme $\|\cdot\|$ arbitraire sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathrm{Cr}(2)$, on ait $C^{-1} \deg(f) \leq \|f^\#\| \leq C \deg(f)$.*

Cette proposition a été étendue en toute dimension et dans le cadre kählérien par Dinh et Sibony [**32**].

Nous pouvons maintenant décrire l'action d'une application birationnelle sur la cohomologie H^2. Ce résultat est essentiellement dû à J. Diller et moi-même [**31**] avec des contributions essentielles de M.H. Gizatullin [**50**] pour le cas parabolique (voir aussi [**6**]).

Théorème 2.7. — *Soit $f \in \mathrm{Cr}(2)$. Alors le degré dynamique $\lambda(f)$ est un entier algébrique ≥ 1 dont les conjugués sur $\mathbb{Q}$ distincts de lui-même sont de norme ≤ 1. On est de plus dans un et un seul des trois cas suivants.*

1. *Soit $\lambda(f) > 1$: il existe alors deux classes nef α_+ et $\alpha_- \in \mathscr{C}^*$ telles que $f^*\alpha_+ = \lambda(f)\alpha_+$, et $f^*\alpha_- = \lambda(f)^{-1}\alpha_-$. L'isométrie induite par f sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ est de type hyperbolique, et $\deg(f^n) = c \cdot \lambda(f)^n + O(1)$ pour une constante $c > 0$.*
2. *Soit il existe une classe $\alpha \in \mathscr{C}^*$ telle que $f^*\alpha_0 = \alpha_0$ mais f^* ne possède aucun point fixe dans $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$. L'isométrie induite par f sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ est donc de type parabolique. Dans ce cas, on a deux possibilités.*
   (a) *Soit $\deg(f^n) = c \cdot n + O(1)$ pour une constante $c > 0$ et il existe un modèle X muni d'une fibration rationnelle $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ préservée par f.*
   (b) *Soit $\deg(f^n) = c \cdot n^2 + O(n)$ pour une constante $c > 0$ et il existe un modèle X muni d'une fibration elliptique $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ préservée par f.*
3. *Soit l'application f^* fixe une classe dans $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$. L'isométrie induite par f sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$ est donc de type elliptique. Dans ce cas, on peut trouver un modèle X sur lequel f induise un automorphisme, et un itéré de f est conjugué à un automorphisme d'une surface rationnelle minimale.*

Démonstration. — La preuve s'effectue en plusieurs étapes.

Première étape. On introduit la notion suivante due à Fornæss et Sibony : un modèle X est dit adapté[(10)] à f si $(f^n)^\# = (f^\#)^n$ sur $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ pour tout $n \geq 0$. C'est un fait simple mais important que X est un modèle adapté si et seulement s'il n'existe aucune courbe C contractée par f et envoyée par un itéré f^n sur un point d'indétermination de f pour un entier $n \geq 1$.

Par la proposition 2.6, si X est un modèle adapté, alors $\lambda(f)$ est le rayon spectral de l'application linéaire $f^\# : \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$. Cependant, la construction d'un modèle adapté est en général très compliquée. Il existe même des applications rationnelles (non inversibles) qui n'admettent aucun modèle adapté, voir [**41**]. On a le résultat important suivant.

Théorème 2.8 ([**31**]). — *Soit $f : X \dashrightarrow X$ une application biméromorphe d'une surface complexe compacte lisse. Alors il existe un morphisme biméromorphe $\mu : X' \to X$ tel que la surface X' soit un modèle adapté pour l'application relevée $\mu^{-1} \circ f \circ \mu : X' \dashrightarrow X'$.*

Démonstration. — On écrit l'application biméromorphe f comme composée d'éclatements de points $X = X_0 \overset{\mu_1}{\dashrightarrow} X_1 \overset{\mu_2}{\dashrightarrow} \cdots \overset{\mu_n}{\dashrightarrow} X_n$ suivie par des contractions de courbes $X_n \overset{\mu_{n+1}}{\to} X_{n+1} \overset{\mu_{n+2}}{\to} \cdots \overset{\mu_{2n}}{\to} X_{2n} = X$. Pour simplifier les notations, pour un entier j arbitraire, on note $X_j = X_{j \bmod 2n}$ et $\mu_j = \mu_{j \bmod 2n}$. On définit N comme le nombre d'indices i entre $n+1$ et $2n$ pour lequel la courbe contractée par μ_i est envoyée par la composée $\mu_{j-1} \circ \cdots \circ \mu_{i+1} \circ \mu_i$ sur le point d'indétermination de μ_j (avec donc $j \bmod 2n$ entre 1 et n). Si X n'est pas un modèle adapté, alors $N \geq 1$ et on prend deux indices $i < j$ comme ci-dessus avec $|i - j|$ minimal. On éclate alors les $j - i + 1$ points $p_i := \mu_i(C_i)$, $p_{i+1} := \mu_{i+1}(p_i)$, jusqu'à $p_j = \mu_j(p_{j-1})$. Ce faisant, on obtient un nouveau modèle birationnel de X et une nouvelle factorisation de l'application induite par f pour lequel le nombre N a chuté d'au moins une unité. En itérant ce procédé, on arrive finalement à un modèle adapté pour f. $\square$

Deuxième étape. Supposons tout d'abord $\lambda(f) > 1$. On va étudier en détail les propriétés spectrales de $f^\#$ dans un modèle adapté. Si $\mu : X' \to X$ est l'éclatement de X en un point p, on a $\mu_* \mu^* \alpha = \alpha + (\alpha, E) E$ pour toute classe $\alpha \in \mathrm{H}^2(X', \mathbb{R})$ avec $E = \mu^{-1}(p)$. En itérant cette équation on arrive à la formule suivante.

Proposition 2.9 ([**31**]). — *Soit X un modèle adapté pour $f \in \mathrm{Cr}(2)$. Il existe une famille finie de diviseurs effectifs Z_k telle que pour toutes classes $\alpha, \beta \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ on ait :*

$$f^\# \alpha \cdot f^\# \beta = \alpha \cdot \beta + \sum_k (\alpha, Z_k)\,(\beta, Z_k)\ . \tag{2}$$

(10) On dit aussi que f est algébriquement stable dans X, voir [**46**].

De plus la réunion des supports des Z_k coïncide avec l'ensemble critique de f^{-1}.

Fixons un modèle adapté X pour f de sorte que le rayon spectral de $f^{\#} : \mathrm{H}^2(X,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ soit égal à $\lambda(f)$. Comme $f^{\#}$ préserve le réseau $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$, $\lambda(f)$ est un entier algébrique. Le cône des classes nef est un cône convexe fermé strict et préservé par $f^{\#}$: le théorème de Perron-Frobenius fournit donc une classe nef α_X vérifiant $f^{\#}\alpha_X = \lambda(f)\alpha_X$. De (2) et du fait que la forme d'intersection est de type Minkowski, on montre que $\lambda(f)$ est une valeur propre simple de $f^{\#}$ et que toutes les autres valeurs propres sont de norme ≤ 1. Les conjugués de $\lambda(f)$ sont toutes des valeurs propres de $f^{\#}$ ce qui démontre la première assertion du théorème.

On cherche maintenant à construire une classe nef $\alpha_+ \in \mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ vérifiant $f^*\alpha_+ = \lambda(f)\alpha_+$. Le théorème 2.8 permet de choisir une famille de modèles adaptés $\{X_i\}_{i\in I}$ telle que tout modèle de $\mathbb{P}^2$ soit dominé par au moins un modèle X_i de cette famille. Pour alléger les notations, on note $f_i : X_i \dashrightarrow X_i$ l'application induite par f, et $f_i^{\#} : \mathrm{H}^2(X_i,\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(X_i,\mathbb{R})$ l'opérateur associé. Pour tout i, on considère l'unique classe α_i vérifiant $f_i^{\#}\alpha_i = \lambda(f)\alpha_i$ normalisée de telle sorte que $\alpha_i \cdot \mathscr{L}_{X_i} = +1$. C'est une classe nef, et on vérifie que $\mu_*\alpha_j = \alpha_i$ dès que $\mu : X_j \to X_i$ est régulière. Il existe donc une classe de Weil α_+ dont l'incarnation dans chaque X_i est égale à α_i. Cette classe est nef (donc L^2) et elle vérifie $f^*\alpha_+ = \lambda(f)\alpha_+$.

En répétant la même construction avec f^{-1}, on trouve une classe de Weil nef α_- telle que $(f^{-1})^*\alpha_- = \lambda(f)\alpha_-$, et donc $f^*\alpha_- = \lambda(f)^{-1}\alpha_-$. Les deux classes α_+, α_- sont nécessairement distinctes et d'auto-intersection nulle, et la restriction de la forme d'intersection à l'orthogonal $\mathscr{H}$ au plan engendré par α_+ et α_- est définie négative. Comme f^* est une isométrie pour la forme d'intersection, sa restriction à $\mathscr{H}$ est un opérateur unitaire. Le spectre de f^* sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ est donc inclus dans la réunion du couple $\lambda(f)^{\pm 1}$ et du cercle unité. En écrivant $\deg(f^n) = f^{n*}\mathscr{L} \cdot \mathscr{L}$ et en utilisant les propriétés spectrales de f^* sur L^2 on montre sans problème que $\deg(f^n) = c\lambda(f)^n + O(1)$ avec $c = 1/(\alpha_+ \cdot \alpha_-)$.

Troisième étape. On suppose maintenant que $\lambda(f) = 1$. On choisit un modèle adapté X à f, et on construit comme précédemment une classe $\alpha \in \mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ nef et $f^{\#}$-invariante. Soit H le sous-espace de $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ engendré par les classes de courbes irréductibles et contractées par f^{-1}. De (2), on tire $\alpha \in H^{\perp}$.

Premier cas : H contient α. Dans ce cas, on montre que f préserve une fibration rationnelle et que l'on est dans le cas (2a) du théorème en produisant une courbe C rationnelle lisse d'auto-intersection nulle dont la classe est proportionnelle à α. Cette courbe est obtenue comme suit. On factorise f en une suite d'éclatements de points $\mu_1 : X' \to X$ composée avec une suite de contractions $\mu_2 : X' \to X$. On choisit X' minimale, et on pose $C = \mu_2(E)$ où E est une courbe rationnelle lisse d'auto-intersection -1 contractée par μ_1. Nous renvoyons à [**31**] pour les détails.

Second cas : H ne contient pas α. Les arguments qui suivent sont tirés de [**50**]. Le critère de Grauert permet de contracter toutes les courbes critiques pour f^{-1}, et on obtient un nouveau modèle sur lequel f devient un automorphisme. On peut en fait prendre ce modèle lisse car en dimension 2 tout automorphisme se relève sur la désingularisée minimale, voir [**63**]. Notons que, dans ce cas, $f^{\#}$ préserve la forme d'intersection sur le réseau $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$.

Si la suite des degrés de f est bornée, alors $f^{\#}$ est d'ordre fini. Si $f^{k\#} = \mathrm{id}$ pour un entier k, alors l'application f^k descend comme automorphisme sur un modèle minimal de X. On est donc dans le cas (3) du théorème.

Sinon la suite des degrés tend vers l'infini, et pour toute classe de Kähler ω fixée, $\|f^{n\#}\omega\| \to +\infty$. On en déduit que tout point d'accumulation α de la suite $f^{n\#}\omega/\|f^{n\#}\omega\|$ est nef, vérifie $f^{\#}\alpha = \alpha$, et $\alpha\cdot\alpha = \alpha\cdot K_X = 0$. La classe α est de plus entière, et on peut donc trouver un fibré en droites L tel que $\alpha = c_1(L)$. Le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch appliqué à L donne $h^0(L) = 1 + h^1(L)$. Si L possède au moins deux sections, alors il est associé à une fibration elliptique et l'équation $f^*\alpha = \alpha$ montre que celle-ci est préservée par f. Sinon $h^0(nL) = 1$ pour tout $n \geq 0$ et l'on procède ainsi. Notons C le diviseur des zéros d'une section de L. On montre que $\mathscr{O}_C(L)$ n'est pas de torsion dans le groupe de Picard de la courbe (singulière et non réduite) C, en utilisant la suite exacte de restriction $0 \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X(C) \to \mathscr{O}_C(C) \to 0$. On regarde ensuite le morphisme $\rho : \mathrm{NS}(X) \to \mathrm{Pic}(C)$. La forme d'intersection est définie négative sur $\ker(\rho)$, donc quitte à remplacer f par un itéré, $f^{\#}|\ker(\rho)$ est l'identité. On montre alors que l'action de f sur $\mathrm{Pic}^0(C)$ est l'identité. Supposons pour simplifier que C soit irréductible, et prenons une classe $\alpha \in \mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$ telle que $\alpha\cdot C = 0$. Alors $f^{\#}\alpha - \alpha \in \ker(\rho)$ et pour toute classe $\beta \in \ker(\rho)$, on a $(f^{\#}\alpha-\alpha)\cdot\beta = 0$. Ceci implique $f^{\#} = \mathrm{id}$ sur $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{R})$, et contredit notre hypothèse $\deg(f^n) \to +\infty$. Lorsque C est réductible, la preuve est analogue bien que plus délicate, voir [**50**, Proposition 6]. □

3. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES A ET B

Commençons par quelques remarques élémentaires. Rappelons que la forme quadratique $q(\alpha) := -\alpha\cdot\alpha + 2(\alpha\cdot\mathscr{L})^2$ sur $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ est définie positive et munit $\mathrm{L}^2(\mathfrak{P})$ d'une structure d'espace de Hilbert réel. On notera $\|\alpha\|^2 := q(\alpha)$. On introduit aussi l'espace $\Delta(\mathfrak{P}) = \{\alpha \in \mathrm{L}^2,\ \alpha\cdot\alpha \geq 0 \text{ et } \alpha\cdot\mathscr{L} = +1\}$, de telle sorte que $\mathscr{C}^*$ est un cône de base $\Delta(\mathfrak{P})$. Pour tout $\epsilon > 0$, et toute classe $\alpha \in \Delta(\mathfrak{P})$ d'auto-intersection nulle, on pose $U(\alpha,\epsilon) := \{\beta \in \Delta(\mathfrak{P}), (\alpha\cdot\beta) < \epsilon\}$. C'est un voisinage ouvert de α dans

$\Delta(\mathfrak{P})$ de diamètre 2ϵ. Notons que, lorsque $f \in \mathrm{Cr}(2)$ est hyperbolique, l'opérateur f^* possède exactement deux vecteurs propres $\alpha_+ \neq \alpha_-$ d'auto-intersection nulle dans $\Delta(\mathfrak{P})$ associés aux valeurs propres $\lambda(f)$ et $\lambda(f)^{-1}$. En particulier une telle application ne préserve jamais de fibration. Dans la suite, on notera $\mathrm{Fix}(f) = \{\alpha_+, \alpha_-\}$. Enfin, par commodité, pour tout $f \in \mathrm{Cr}(2)$ on notera $\bar{f}$ l'action projective sur $\Delta(\mathfrak{P})$ induite par f^*.

On fixe désormais un sous-groupe G de $\mathrm{Cr}(2)$ de type fini.

Premier cas : il existe $f, g \in G$ hyperboliques tels que $\mathrm{Fix}(f) \cap \mathrm{Fix}(g) = \varnothing$. Dans ce cas, on montre que, pour un entier N assez grand, f^N et g^N engendrent un groupe libre non-abélien. C'est une simple application du lemme dit du ping-pong ou critère de Klein.

Deuxième cas : G contient un élément parabolique mais pas d'élément hyperbolique. Prenons $f \in G$ un élément parabolique. Il préserve une fibration (rationnelle ou elliptique) définie sur un certain modèle X. La classe de Cartier α_+ déterminée dans X par une fibre de cette fibration est nef et vérifie $f^*\alpha_+ = \alpha_+$. On va montrer que, pour tout $g \in G$ on a $g^*\alpha_+ = \alpha_+$, ce qui prouvera que l'on est dans le cas (2) du théorème B.

On peut normaliser α_+ de telle sorte que $\alpha_+ \in \Delta(\mathfrak{P})$, et on procède par contradiction. Prenons donc $\phi \in G$ tel que $\phi(\alpha_+) \neq \alpha_+$. Alors $g = \phi^{-1} f \phi$ est parabolique et fixe l'unique classe de Cartier $\beta_+ \in \Delta(\mathfrak{P})$ proportionnelle à $\phi(\alpha_+)$. On prend $\epsilon > 0$ de telle sorte que $U(\alpha_+, \epsilon) \cap U(\beta_+, \epsilon) = \varnothing$. Comme g est parabolique, pour N assez grand, $\bar{g}^N(U(\alpha_+, \epsilon))$ est inclus dans un voisinage arbitrairement petit de β_+. Quitte à prendre M assez grand, on aura de même que $\bar{f}^M \bar{g}^N(U(\alpha_+, \epsilon)) \subset U(\alpha_+, \epsilon/2) \subsetneq U(\alpha_+, \epsilon)$. Ceci n'est possible que si l'application $f^M g^N$ est hyperbolique, d'où la contradiction.

Troisième cas : G contient un élément hyperbolique mais on n'est pas dans le premier cas. On va montrer que l'on est dans la situation (1) du théorème B.

Fixons $f \in G$ hyperbolique. On regarde les orbites des éléments α_+ et α_- de $\mathrm{Fix}(f)$ sous l'action projective de G, c'est-à-dire les deux ensembles $S_\pm = \cup_{g \in G} \bar{g} \alpha_\pm \subset \Delta(\mathfrak{P})$. Si S_+ et S_- sont infinis, alors en conjuguant f par des éléments adéquats on trouve deux éléments hyperboliques f_1, f_2 tels que $\mathrm{Fix}(f_1) \cap \mathrm{Fix}(f_2) = \varnothing$, ce que nous avons exclu. On peut donc supposer que S_+ est fini. Comme $\bar{f}$ laisse fixe S_+, cet ensemble est soit réduit à α_+, soit égal à $\mathrm{Fix}(f)$. Dans le premier cas, le groupe G fixe projectivement α_+ et, dans le second, le sous-groupe G_0 des éléments de G fixant les deux classes α_+ et α_- est d'indice au plus deux.

En conclusion, quitte à remplacer G par un sous-groupe d'indice 2, on peut supposer que tous les éléments du groupe fixent projectivement la classe α_+. Considérons le morphisme $\rho : G \to \mathbb{R}_+^*$ tel que $f^*\alpha_+ = \rho(f)\alpha_+$ pour tout $f \in G$. Pour conclure la preuve, il faut démontrer que l'image $\rho(G)$ est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}_+^*$.

Pour cela, on va montrer que $\rho(G) \cap [1,2]$ est un ensemble fini. Prenons $f_1, \ldots, f_n$ un système de générateurs de G, et notons K le corps de nombres engendré par les entiers algébriques $\lambda(f_1), \ldots, \lambda(f_n)$. On note d le degré de K sur $\mathbb{Q}$. Prenons $\lambda \in \rho(G) \cap [1,2]$, et $a_1, \ldots, a_d$ des entiers tels que $\lambda^d = \sum_{i=0}^{d-1} a_{d-i}\lambda^i$. Comme tous les conjugués de λ distincts de λ sont de norme ≤ 1, on a $|a_i| \leq 2\binom{d}{i}$. L'ensemble $\rho(G) \cap [1,2]$ est inclus dans l'ensemble des zéros d'au moins un polynôme $X^d - \sum_{i=0}^{d-1} a_{d-i}X^i$ avec $|a_i| \leq 2\binom{d}{i}$. C'est donc un ensemble fini.

Quatrième cas : G ne contient que des éléments elliptiques. C'est le cas le plus délicat. La démonstration repose sur le résultat clé suivant dont nous donnons une preuve ci-dessous. La classe $K_X \in \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ est celle déterminée par le fibré canonique de X.

Proposition 3.1. — *Il existe une classe de Cartier α nef et G-invariante et vérifiant $\alpha_X \cdot K_X \leq 0$ pour tout modèle X.*

On fixe X un modèle dans lequel α est déterminée, et on considère l'ensemble $\mathscr{C}$ des courbes rationnelles de X contractées par au moins un élément de G. Notons $V \subset \mathrm{H}^2(X, \mathbb{R})$ le sous-espace linéaire engendré par les classes de courbe $C \in \mathscr{C}$. Montrons tout d'abord que $\alpha \in V^\perp$.

Prenons donc une courbe $C \in \mathscr{C}$, $g \in G$ une application qui contracte C, Γ une désingularisation du graphe de g de telle sorte que les deux projections $\pi_i : \Gamma \to X$, $i = 1, 2$, soient des morphismes birationnels et vérifient $g = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$. Si $\hat{C}$ est la transformée stricte de C par π_1, alors par hypothèse $\pi_2(\hat{C})$ est réduit à un point. Nous avons donc $[C] \cdot \alpha_X = \hat{C} \cdot \pi_1^*\alpha_X = \hat{C} \cdot \alpha_\Gamma = \hat{C} \cdot \pi_2^*\alpha_X = 0$, ce qui conclut la preuve.

a) Supposons que α n'appartienne pas à V. Dans ce cas, le critère de Grauert s'applique et l'on peut contracter toutes les courbes de $\mathscr{C}$. On obtient un modèle $\bar{X}$ sur lequel tout élément de G induit un automorphisme. On peut supposer ce modèle lisse. On regarde alors le morphisme naturel $\rho : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^2(\bar{X}, \mathbb{Z}))$. Comme tout élément de G est elliptique, tout élément de $\rho(G)$ est de torsion, donc $\rho(G)$ est fini. Le noyau de ρ est un sous-groupe d'indice fini qui descend comme sous-groupe du groupe des automorphismes d'un modèle minimal de $\bar{X}$. Si ce modèle n'est pas $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, alors un sous-groupe d'indice 2 de G préserve une fibration rationnelle, ce qui conclut la preuve dans ce cas.

b) Supposons maintenant que α appartienne à V. Alors $\mathbb{R} \cdot \alpha$ est le noyau de la restriction de la forme d'intersection à V donc appartient à $\mathrm{H}^2(X, \mathbb{Z})$. On peut donc trouver un fibré en droites L tel que $c_1(L) = \alpha$. Par Hirzebruch-Riemann-Roch, on a $h^0(nL) - h^1(nL) = 1 - nL \cdot K_X$ pour tout $n \geq 0$. Si $h^0(nL) \geq 2$ pour un entier n, alors L induit une fibration G-invariante. Celle-ci est rationnelle ou elliptique car $L \cdot K_X \leq 0$. Lorsqu'elle est elliptique, on peut considérer son modèle minimal sur lequel G induit un automorphisme. Les arguments de a) s'appliquent alors.

Il nous reste donc à traiter le cas où $h^0(nL) = 1$ pour tout entier $n \geq 0$, ce qui implique $L \cdot L = L \cdot K_X = 0$. Notons C le diviseur des zéros d'une section de L. On va construire un modèle X' tel que le morphisme naturel $X' \to X$ soit régulier et soit un isomorphisme au-dessus de $X \setminus C$, et pour lequel $G \subset \mathrm{Aut}(X')$. On pourra alors conclure comme précédemment.

La construction de X' repose sur l'analyse de l'action de G sur l'espace Γ_C des points infiniment proches au-dessus de C. Cette technique a été utilisée par M. Gizatullin et V.I. Danilov [**52, 53**] dans leur étude du groupe d'automorphismes de certaines surfaces affines. Elle a été systématisée par M. Jonsson et moi-même pour étudier la dynamique à l'infini des applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$, voir [**43, 44**].

La construction de l'espace Γ_C suit celle de [**42**]. Soit $\mathfrak{B}_C$ l'ensemble des modèles (modulo isomorphisme) lisses, obtenus par éclatement de points au-dessus de C uniquement, et dont la préimage de C est à croisements normaux. Pour tout $\mu : Y \to X$ dans $\mathfrak{B}_C$, on note Γ_μ le graphe dual du diviseur $\mu^*(C)$ que l'on munit de la métrique suivante. Si E, E' sont des composantes irréductibles de $\mu^*(C)$ s'intersectant, on pose $d_\mu(E, E') = (\mathrm{ord}_E(\mu^*C)\mathrm{ord}_{E'}(\mu^*C))^{-1}$. On montre que ces métriques sont compatibles entre elles et induisent une métrique naturelle sur la limite inductive (l'union) $(\Gamma_C, d_C) := \varinjlim_{\mathfrak{B}_C} (\Gamma_C, d_C)$. On n'utilisera pas ce fait, mais on peut montrer que Γ_C s'identifie à l'espace des normes multiplicatives $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}(X)$ centrées sur C et normalisées par $|C| = e^{-1}$ qui deviennent monomiales dans un système adéquat de coordonnées, voir [**42**, Chapitre 6].

Du fait que G préserve la classe $c_1(L)$ au sens de $\mathrm{H}^2(\mathfrak{P})$, G induit une action *isométrique* sur (Γ_C, d_C). Tout élément $g \in G$ est elliptique, donc se relève comme automorphisme d'un modèle $Y \in \mathfrak{B}_C$: en particulier, l'action de g sur Γ_C possède toujours au moins une orbite périodique. Comme $L \cdot L = L \cdot K_X = 0$, le genre de C est 0 ou 1 et deux cas se présentent : soit Γ_C se rétracte sur un cercle, soit c'est un arbre.

Dans le premier cas, G préserve ce cercle, et chacun de ses éléments agit par rotation d'angle rationnel sur celui-ci. Mais G est de type fini, donc les orbites des points du cercle sous l'action de G sont finies. Géométriquement, cela signifie que l'on peut trouver un modèle lisse $\mu : X' \to X$ dominant X et une famille finie de courbes irréductibles $C_1, \ldots, C_n$ de μ^*C permutées par l'action de tout élément de G. Après contraction de toutes les composantes irréductibles de μ^*C distinctes des C_i, on trouve un modèle (singulier puis lisse) sur lequel G agit par automorphismes.

Lorsque Γ_C est un arbre, on peut facilement adapter la preuve de [**70**, Corollaire 2, §6.5] pour montrer que G fixe globalement un point de Γ_C. Comme dans le cas précédent, on traduit géométriquement ce fait : on peut trouver un modèle lisse $\mu : X' \to X$ dominant X et une courbe irréductible C_0 de μ^*C fixée par l'action de tout élément de G. Après contraction de toutes les composantes irréductibles de μ^*C distinctes des C_0, on trouve un modèle sur lequel G agit par automorphismes.

Preuve de la proposition 3.1. — On montre tout d'abord que l'on peut trouver une classe G-invariante $\alpha \in \mathscr{C}^*$. Les arguments sont standard dans le contexte des actions de groupe par isométries sur les espaces hyperboliques. Comme précédemment, il est plus commode de travailler sur $\Delta(\mathfrak{P})$ que sur $\mathbb{H}(\mathfrak{P})$. On a deux métriques en concurrence : la métrique « euclidienne » $d_{\mathrm{L}^2}(\alpha,\beta) = \sqrt{-(\alpha-\beta)^2 + 2(\alpha-\beta)\cdot\mathscr{L}}$ définie sur $\Delta(\mathfrak{P})$; et la métrique hyperbolique $d_{\mathbb{H}}(\alpha,\beta)$ qui vérifie $\cosh d_{\mathbb{H}}(\alpha,\beta) = \alpha\cdot\beta/(\alpha^2)(\beta^2)$ et est définie sur $\Delta(\mathfrak{P}) \cap \{\alpha^2 > 0\}$. Pour $g \in \mathrm{Cr}(2)$, on note $\bar{g} : \Delta(\mathfrak{P}) \to \Delta(\mathfrak{P})$ l'action naturelle.

Si l'orbite de $\mathscr{L}$ est un ensemble borné pour la métrique $d_{\mathbb{H}}$, le lemme du centre [**56**, p. 37] s'applique. Il existe une unique classe $\alpha \in \Delta(\mathfrak{P})$ telle que $\sup_{g\in G} d_{\mathbb{H}}(\alpha, \bar{g}\mathscr{L})$ soit minimale. Cette classe étant unique, elle est G-invariante. De plus, elle appartient à l'enveloppe convexe des classes $\bar{g}\mathscr{L}$ qui sont nef et vérifient $(\bar{g}\mathscr{L})_X \cdot K_X \leq 0$ pour tout modèle : c'est donc aussi une classe nef intersectant négativement le fibré canonique de tout modèle.

Sinon on énumère les éléments de G de telle sorte que $d_{\mathbb{H}}(\bar{g_n}\mathscr{L}, \mathscr{L})$ forme une suite croissante tendant vers l'infini. Du fait que tous les éléments de G sont elliptiques, on peut appliquer [**49**, Lemme 35], et donc trouver une constante $C > 0$ telle que, pour tout $m \geq n$, on ait

$$d_{\mathbb{H}}(\bar{g_m}\mathscr{L}, \bar{g_n}\mathscr{L}) \leq d_{\mathbb{H}}(\bar{g_m}\mathscr{L}, \mathscr{L}) + C \ . \tag{3}$$

Bien que la preuve de [**49**] soit rédigée dans le cadre localement compact, on peut l'adapter à notre situation. Cette preuve se ramène en effet à l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, si l'on a $d_{\mathbb{H}}(\bar{g}^2\mathscr{L}, \mathscr{L}) > d_{\mathbb{H}}(\bar{g}\mathscr{L}, \mathscr{L}) + C$, alors g est nécessairement hyperbolique. Or, pour une constante C adéquate, l'hypothèse implique $d_{\mathbb{H}}(\bar{g}^n\mathscr{L}, \bar{g}^m\mathscr{L}) \geq C'|n-m| + C''$ pour tout couple d'entiers n, m, voir [**49**, Théorème 5.16]. En particulier, on a $\log\deg(g^n) \geq C'n + C''$ ce qui implique bien que g est hyperbolique[11].

[11] En particulier, on a le résultat suivant. Si $\deg(f^2) > 2^{18}\deg(f)$, alors f est de type hyperbolique. Pour $f \in \mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, on peut remplacer 2^{18} par 1. Dans ce cas, le résultat est dû à J.-P. Furter [**48**].

À partir de (3), un calcul élémentaire montre que, pour toute classe $\alpha \in \Delta(\mathfrak{P})$ avec $\alpha \cdot \alpha > 0$, on a :

$$\operatorname{diam}_{d_{\mathrm{L}^2}} \{\beta \in \Delta(\mathfrak{P}),\, d_{\mathbb{H}}(\beta, \alpha) \leq d_{\mathbb{H}}(\mathcal{L}, \beta) + C \text{ et } d_{\mathbb{H}}(\beta, \mathcal{L}) \geq d_{\mathbb{H}}(\alpha, \mathcal{L})\} \leq \frac{2e^C}{\alpha \cdot \mathcal{L}}.$$

On en déduit que $\bar{g_n}\mathcal{L}$ forme une suite de Cauchy pour d_{L^2} et converge donc vers une classe non-nulle $\alpha \in \Delta(\mathfrak{P})$. On vérifie facilement que cette classe est G-invariante, qu'elle est nef et intersecte négativement le fibré canonique de tout modèle.

On va maintenant montrer que l'on peut « tronquer » de manière astucieuse la classe α pour la rendre Cartier tout en la gardant G-invariante. À cet endroit, on utilise de manière cruciale l'hypothèse de type fini sur G. On fixe donc un système de générateurs $f_1, \ldots, f_n$ de G et, pour chacun d'entre eux, on choisit un modèle X_i tel que f_i définisse un automorphisme de X_i. On choisit un modèle X qui les domine tous, et on note $\pi_i : X \to X_i$ les morphismes birationnels induits.

On utilise la représentation des classes donnée par le théorème 2.2. Pour chaque i, on écrit $\alpha_X = \alpha_{X_i} + \sum_{\mathcal{V}_{X_i}} a_{i,\nu} \mathcal{E}_\nu$ (ici on identifie α_X, α_{X_i} avec les classes de Cartier correspondantes). On note $\epsilon > 0$ le minimum des $|a_{i,\nu}|$ parmi ceux qui sont non-nuls. On écrit alors $\alpha = \alpha_X + \sum_{\mathcal{V}_X} a_\nu \mathcal{E}(\nu)$, et on pose $\hat{\alpha} := \alpha_X + \sum_{a_\nu \geq \epsilon} a_\nu \mathcal{E}(\nu)$. Comme α est nef, elle est en particulier L^2, donc l'ensemble $\{\nu,\, a_\nu \geq \epsilon\}$ est fini : la classe $\hat{\alpha}$ est donc de type Cartier. C'est l'incarnation de α dans un modèle (éventuellement singulier), donc $\hat{\alpha}$ est nef et intersecte négativement le fibré canonique de tout modèle.

Pour conclure, il nous faut démontrer que $\hat{\alpha}$ est G-invariante. Prenons une application f_i parmi les générateurs. Comme f_i induit un automorphisme sur X_i, pour tout $\nu \in \mathcal{V}_{X_i}$ il existe $\nu' \in \mathcal{V}_{X_i}$ tel que $f_i^* \mathcal{E}(\nu) = \mathcal{E}(\nu')$. Notons $V_i = \{\nu \in \mathcal{V}_{X_i},\, \alpha \cdot \mathcal{E}(\nu) < \epsilon\}$ de telle sorte que $\hat{\alpha} = \alpha - \sum_{V_i} (\alpha \cdot \mathcal{E}(\nu))\, \mathcal{E}(\nu)$. Alors f_i^* induit une bijection sur V_i et l'on a : $f_i^* \hat{\alpha} = f_i^* \alpha - \sum_{V_i} (\alpha \cdot \mathcal{E}(\nu))\, f_i^* \mathcal{E}(\nu) = \alpha - \sum_{V_i} (\alpha \cdot \mathcal{E}(\nu))\, \mathcal{E}(\nu) = \hat{\alpha}$, ce qui termine la preuve. □

4. VERS UNE DYNAMIQUE DES SOUS-GROUPES DE Cr(2) ?

Poursuivant la similitude entre Cr(2) et son analogue de dimension un $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$, on peut espérer développer une étude dynamique des sous-groupes non élémentaires de Cr(2) parallèle à la théorie des groupes kleiniens. Dans cette direction, nous avons le résultat suivant de S. Lamy.

THÉORÈME 4.1. — *Soit G un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$ *de type fini dont tous les éléments sont de type hyperbolique. Alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{C}^2$ non borné tel que l'intersection de la G-orbite de n'importe quel point de $\mathbb{C}^2$ avec U soit finie.*

En d'autres termes, un tel groupe possède toujours un ouvert de discontinuité non trivial. Il serait intéressant d'exhiber d'autres classes de sous-groupes de Cr(2) ayant un ouvert de discontinuité non trivial, ainsi que d'étudier la géométrie des espaces quotients que l'on peut obtenir ainsi.

RÉFÉRENCES

[1] V. I. ARNOL′D – Dynamics of complexity of intersections, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **21** (1990), p. 1–10.

[2] E. BEDFORD & J. DILLER – Energy and invariant measures for birational surface maps, *Duke Math. J.* **128** (2005), p. 331–368.

[3] E. BEDFORD & K. KIM – Dynamics of rational surface automorphisms : linear fractional recurrences, *J. Geom. Anal.* **19** (2009), p. 553–583.

[4] ———, Continuous families of rational surface automorphisms with positive entropy, prépublication arXiv:0804.2078.

[5] B. BEKKA, P. DE LA HARPE & A. VALETTE – *Kazhdan's property (T)*, Mathematical Monographs, vol. 11, Cambridge Univ. Press, 2008.

[6] M. P. BELLON – Algebraic entropy of birational maps with invariant curves, *Lett. Math. Phys.* **50** (1999), p. 79–90.

[7] M. P. BELLON & C. VIALLET – Algebraic entropy, *Comm. Math. Phys.* **204** (1999), p. 425–437.

[8] R. L. BENEDETTO & W. M. GOLDMAN – The topology of the relative character varieties of a quadruply-punctured sphere, *Experiment. Math.* **8** (1999), p. 85–103.

[9] J. BLANC – Sous-groupes algébriques du groupe de Cremona, *Transform. Groups* **14** (2009), p. 249–285.

[10] S. Boucksom, C. Favre & M. Jonsson – Degree growth of meromorphic surface maps, *Duke Math. J.* **141** (2008), p. 519–538.

[11] E. Breuillard – A strong Tits alternative, prépublication arXiv:0804.1395.

[12] M. R. Bridson & A. Haefliger – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grund. Math. Wiss., vol. 319, Springer, 1999.

[13] J. W. Cannon, W. J. Floyd & W. R. Parry – Introductory notes on Richard Thompson's groups, *Enseign. Math.* **42** (1996), p. 215–256.

[14] S. Cantat – Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$, *Acta Math.* **187** (2001), p. 1–57.

[15] ———, Version kählérienne d'une conjecture de Robert J. Zimmer, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 759–768.

[16] ———, Bers and Hénon, Painlevé and Schrödinger, *Duke Math. J.* **149** (2009), p. 411–460.

[17] ———, Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces, prépublication.

[18] S. Cantat & S. Lamy – Groupes d'automorphismes polynomiaux du plan, *Geom. Dedicata* **123** (2006), p. 201–221.

[19] S. Cantat & F. Loray – Holomorphic dynamics, Painlevé VI equation and character varieties, prépublication arXiv:0711.1579.

[20] D. Damanik – Substitution Hamiltonians with bounded trace map orbits, *J. Math. Anal. Appl.* **249** (2000), p. 393–411.

[21] V. I. Danilov – Non-simplicity of the group of unimodular automorphisms of an affine plane, *Mat. Zametki* **15** (1974), p. 289–293.

[22] P. Deligne – Intersections sur les surfaces régulières, in *Groupes de monodromie en géométrie algébrique (SGA 7)*, Lecture Notes in Math., vol. 340, Springer, 1973, p. 1–38.

[23] J.-P. Demailly – L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory, in *Transcendental methods in algebraic geometry (Cetraro, 1994)*, Lecture Notes in Math., vol. 1646, Springer, 1996, p. 1–97.

[24] M. Demazure – Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1970), p. 507–588.

[25] J. Déserti – Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer, *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), art. ID 71701.

[26] ———, Sur le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine, *J. Algebra* **297** (2006), p. 584–599.

[27] ———, Sur les automorphismes du groupe de Cremona, *Compos. Math.* **142** (2006), p. 1459–1478.

[28] ———, Le groupe de Cremona est hopfien, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **344** (2007), p. 153–156.

[29] ———, Sur les sous-groupes nilpotents du groupe de Cremona, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **38** (2007), p. 377–388.

[30] J. A. Dieudonné – *La géométrie des groupes classiques*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 5, Springer, 1971.

[31] J. Diller & C. Favre – Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, *Amer. J. Math.* **123** (2001), p. 1135–1169.

[32] T.-C. Dinh & N. Sibony – Regularization of currents and entropy, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **37** (2004), p. 959–971.

[33] ———, Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle, *Ann. of Math.* **161** (2005), p. 1637–1644.

[34] I. Dolgachev – Infinite Coxeter groups and automorphisms of algebraic surfaces, in *The Lefschetz centennial conference, Part I (Mexico City, 1984)*, Contemp. Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1986, p. 91–106.

[35] I. Dolgachev & V. A. Iskovskikh – Finite subgroups of the plane Cremona group., in *Algebra, arithmetic and geometry, Manin's Festschrift*, Progress in Math., Birkhäuser, 2008.

[36] A. Dubouloz & S. Lamy – Variations on log Sarkisov program for surfaces, prépublication arXiv:0802.2441.

[37] B. Dubrovin & M. Mazzocco – Monodromy of certain Painlevé-VI transcendents and reflection groups, *Invent. Math.* **141** (2000), p. 55–147.

[38] R. Dujardin – Laminar currents and birational dynamics, *Duke Math. J.* **131** (2006), p. 219–247.

[39] F. Enriques – Sui gruppi continui di transformazioni cremoniani nel piano, *Rend. Accad. Lincei* (1er sem., 1893).

[40] E. Falbel & J. R. Parker – The moduli space of the modular group in complex hyperbolic geometry, *Invent. Math.* **152** (2003), p. 57–88.

[41] C. Favre – Les applications monomiales en deux dimensions, *Michigan Math. J.* **51** (2003), p. 467–475.

[42] C. Favre & M. Jonsson – *The valuative tree*, Lecture Notes in Math., vol. 1853, Springer, 2004.

[43] ———, Eigenvaluations, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **40** (2007), p. 309–349.

[44] ———, Dynamical compactifications of $\mathbb{C}^2$, prépublication arXiv:0711.2770.

[45] D. Fisher – Groups acting on manifolds : around the Zimmer program, prépublication arXiv:0809.4849.

[46] J. E. Fornaess & N. Sibony – Complex dynamics in higher dimension. II, in *Modern methods in complex analysis (Princeton, NJ, 1992)*, Ann. of Math. Stud., vol. 137, Princeton Univ. Press, 1995, p. 135–182.

[47] S. Friedland & J. Milnor – Dynamical properties of plane polynomial automorphisms, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **9** (1989), p. 67–99.

[48] J.-P. Furter – On the degree of iterates of automorphisms of the affine plane, *Manuscripta Math.* **98** (1999), p. 183–193.

[49] E. Ghys & P. De la Harpe (éds.) – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, 1990.

[50] M. K. Gizatullin – Rational G-surfaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **44** (1980), p. 110–144.

[51] ———, Defining relations for the Cremona group of the plane, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **46** (1982), p. 909–970.

[52] M. K. Gizatullin & V. I. Danilov – Automorphisms of affine surfaces. I, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **39** (1975), p. 523–565.

[53] ———, Automorphisms of affine surfaces. II, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **41** (1977), p. 54–103.

[54] W. M. Goldman – The modular group action on real SL(2)-characters of a one-holed torus, *Geom. Topol.* **7** (2003), p. 443–486.

[55] M. Gromov – On the entropy of holomorphic maps, *Enseign. Math.* **49** (2003), p. 217–235.

[56] P. de la Harpe & A. Valette – La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts, *Astérisque* **175** (1989).

[57] J. Hietarinta & C. Viallet – Singularity confinement and degree growth, in *SIDE III—symmetries and integrability of difference equations (Sabaudia, 1998)*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 25, Amer. Math. Soc., 2000, p. 209–216.

[58] V. A. Iskovskikh – Proof of a theorem on relations in the two-dimensional Cremona group, *Uspekhi Mat. Nauk* **40** (1985), p. 255–256.

[59] K. Iwasaki & T. Uehara – An ergodic study of Painlevé VI, *Math. Ann.* **338** (2007), p. 295–345.

[60] S. Lamy – Problèmes de densité d'orbites pour des groupes d'automorphismes de $\mathbf{C}^2$, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), p. 807–810.

[61] ———, Dynamique des groupes paraboliques d'automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)* **32** (2001), p. 185–212.

[62] ———, L'alternative de Tits pour $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, *J. Algebra* **239** (2001), p. 413–437.

[63] H. B. Laufer – *Normal two-dimensional singularities*, Annals of Math. Studies, vol. 71, Princeton Univ. Press, 1971.

[64] R. LAZARSFELD – *Positivity in algebraic geometry. I & II*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 48 & 49, Springer, 2004.

[65] L. MAKAR-LIMANOV – On groups of automorphisms of a class of surfaces, *Israel J. Math.* **69** (1990), p. 250–256.

[66] Y. I. MANIN – *Cubic forms*, 2e éd., North-Holland Mathematical Library, vol. 4, North-Holland Publishing Co., 1986.

[67] G. A. MARGULIS – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 17, Springer, 1991.

[68] C. T. MCMULLEN – Dynamics on blowups of the projective plane, *Publ. Math. I.H.É.S.* **105** (2007), p. 49–89.

[69] A. RUSSAKOVSKII & B. SHIFFMAN – Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.* **46** (1997), p. 897–932.

[70] J-P. SERRE – Arbres, amalgames, SL_2, *Astérisque* **46** (1977).

[71] ______, Le groupe de Cremona et ses groupes finis, Séminaire Bourbaki 2008/09, exposé n° 1000, ce volume.

[72] V. V. SHOKUROV – Prelimiting flips, *Tr. Mat. Inst. Steklova* **240** (2003), p. 82–219.

[73] N. SIBONY – Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$, in *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, Panor. Synthèses, vol. 8, Soc. Math. France, 1999, p. 97–185.

[74] R. STEINBERG – Some consequences of the elementary relations in SL_n, in *Finite groups—coming of age (Montreal, Que., 1982)*, Contemp. Math., vol. 45, Amer. Math. Soc., 1985, p. 335–350.

[75] J. TITS – Free subgroups in linear groups, *J. Algebra* **20** (1972), p. 250–270.

[76] H. UMEMURA – On the maximal connected algebraic subgroups of the Cremona group. I, *Nagoya Math. J.* **88** (1982), p. 213–246.

[77] ______, On the maximal connected algebraic subgroups of the Cremona group. II, in *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, Adv. Stud. Pure Math., vol. 6, North-Holland, 1985, p. 349–436.

[78] A. USNICH – Symplectic automorphisms of CP^2 and the Thompson group T, prépublication arXiv:math/0611604.

[79] A. P. VESELOV – Growth and integrability in the dynamics of mappings, *Comm. Math. Phys.* **145** (1992), p. 181–193.

[80] D. WRIGHT – Abelian subgroups of $\mathrm{Aut}_k(k[X, Y])$ and applications to actions on the affine plane, *Illinois J. Math.* **23** (1979), p. 579–634.

[81] O. ZARISKI – The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **50** (1944), p. 683–691.

[Note ajoutée en avril 2010. Dans un travail récent, J. Blanc a muni Cr(2) d'une structure de groupe topologique connexe et montré qu'il était topologiquement simple.]

Charles FAVRE

CNRS et Université Paris VII
UFR de Mathématiques
Équipe Géométrie et Dynamique
UMR 7586 du CNRS
Case 7012
2 place Jussieu
F-75230 Paris cedex 05
E-mail : `favre@math.jussieu.fr`