332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(999) *Convexes divisibles*

Jean-François QUINT

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Novembre 2008
61^e année, 2008-2009, n° 999, p. 45 à 73

CONVEXES DIVISIBLES
[d'après Yves Benoist]

par **Jean-François QUINT**

1. INTRODUCTION

Dans cet exposé, nous allons nous intéresser à des groupes discrets d'automorphismes projectifs de certains ouverts convexes de l'espace projectif.

De même que l'étude des groupes discrets d'automorphismes de l'espace euclidien peut s'interpréter en termes de pavages euclidiens périodiques, celle des groupes discrets d'automorphismes de convexes peut se comprendre comme celle de pavages projectifs périodiques. Quand l'ouvert convexe auquel on s'intéresse est un ellipsoïde, ces pavages sont des pavages hyperboliques et les situations que nous allons rencontrer peuvent être en grande partie considérées comme des généralisations de celle-ci.

Nous verrons comment la compréhension de ces groupes d'automorphismes fait appel à des théories variées comme les systèmes dynamiques hyperboliques, la théorie géométrique des groupes, les groupes algébriques, les représentations des groupes discrets, l'analyse non-linéaire...

Je remercie chaleureusement Yves Benoist pour sa relecture attentive de ce texte et ses nombreuses remarques et suggestions, ainsi que Frédéric Paulin pour ses corrections de la première version.

1.1. Convexes

Soit C un cône ouvert convexe dans un espace vectoriel réel de dimension finie V. On dit que C est saillant (ou proprement convexe) s'il ne contient pas de droite affine, ce qui revient à dire qu'il existe un hyperplan H de V tel que $\bar{C} - \{0\}$ soit contenu dans une des composantes connexes de $V - H$.

Soit Ω un ouvert de l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$. On dit que Ω est convexe s'il existe un hyperplan H de V tel que $\Omega \cap \mathbb{P}(H) = \varnothing$ et que Ω soit convexe au sens usuel dans l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Si Ω est convexe, on dit qu'il est saillant s'il existe

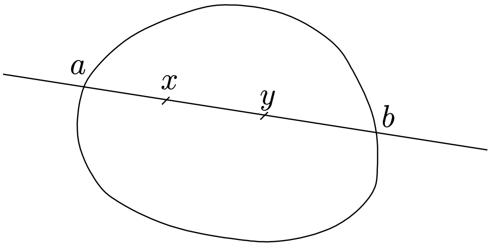

FIGURE 1. Distance de Hilbert

un hyperplan H de V tel que l'adhérence de Ω ne rencontre pas $\mathbb{P}(H)$. L'ouvert Ω est convexe (resp. convexe saillant) si et seulement s'il existe dans V un cône ouvert convexe différent de V (resp. convexe saillant) dont Ω soit la trace projective.

Un cône ouvert convexe peut toujours être vu comme un ouvert convexe de l'espace projectif $\mathbb{P}(V \oplus \mathbb{R})$.

On note $\operatorname{Aut} C$ (resp. $\operatorname{Aut} \Omega$) le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(V)$ (resp. de $\mathrm{PGL}(V)$) constitué des éléments qui stabilisent le cône ouvert convexe C de V (resp. l'ouvert convexe Ω de $\mathbb{P}(V)$).

Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$. On peut définir (voir **[15]**) sur Ω une distance d_Ω invariante par $\operatorname{Aut} \Omega$, appelée distance de Hilbert, de la façon suivante. Si x et y sont deux points distincts de Ω, la droite projective engendrée par x et y intersecte la frontière de Ω en deux points distincts a et b. La distance de Hilbert $d_\Omega(x, y)$ entre x et y est alors la valeur absolue du birapport $[a, b, x, y]$ entre ces quatre points, c'est-à-dire que, pour un choix de paramétrisation projective de cette droite par $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on a

$$d_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{x-b}{x-a} \frac{y-a}{y-b} \right) \right|$$

(voir figure 1). La distance d_Ω est propre, c'est-à-dire que ses boules fermées sont compactes, et elle induit sur Ω la topologie usuelle de Ω. Le groupe $\operatorname{Aut} \Omega$ préserve la distance d_Ω et agit proprement sur Ω (voir lemme 2.11).

On dit qu'un cône ouvert convexe saillant C de V est divisible s'il existe un sous-groupe discret Λ de $\operatorname{Aut} C$ tel que $\Lambda \backslash C$ soit compact. De même, on dit qu'un ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{P}(V)$ est divisible s'il existe un sous-groupe discret Γ de $\operatorname{Aut} \Omega$ tel que $\Gamma \backslash \Omega$ soit compact. D'après le lemme de Selberg (voir **[3, 42]**), on peut toujours supposer que Λ et Γ sont sans torsion.

Exemple 1.1. — Soient $d \geq 3$ la dimension de V, q une forme quadratique de signature $(1, d-1)$ sur V et C_q une des deux composantes connexes de l'ensemble $\{x \in V | q(x) > 0\}$. Alors, C_q est un cône convexe saillant, homogène sous l'action d'un sous-groupe d'indice 2 du groupe des similitudes de q. Comme ce groupe admet des sous-groupes discrets co-compacts, le cône C_q est divisible. De même, la trace projective Ω_q de C_q est un ouvert convexe saillant divisible : on l'appelle l'ellipsoïde de q. L'ouvert Ω_q s'identifie à l'espace hyperbolique réel de dimension $d-1$ et la distance de Hilbert est alors égale à la distance hyperbolique. En particulier, si Γ est un sous-groupe discret (sans torsion) de $\operatorname{Aut}\Omega_q$ qui divise Ω_q, l'espace $\Gamma\backslash\Omega_q$ est une variété hyperbolique.

Exemple 1.2. — Le groupe des matrices diagonales à coefficients > 0 agit simplement transitivement sur le cône ouvert convexe saillant $(\mathbb{R}_+^*)^d \subset \mathbb{R}^d$. Si Γ est un groupe discret de telles matrices qui agit co-compactement sur $(\mathbb{R}_+^*)^d \subset \mathbb{R}^d$, le quotient est difféomorphe au tore $\mathbb{T}^d$.

Exemple 1.3. — Le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cône convexe saillant des matrices symétriques définies positives. Les réseaux de $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$ divisent donc ce cône.

Dans tous ces exemples, les cônes qui apparaissent sont homogènes sous leur groupe d'automorphismes. Nous verrons plus loin qu'il existe de nombreux cônes convexes divisibles non homogènes. Les premiers exemples de tels cônes divisibles non homogènes ont été construits par Kac et Vinberg dans [**29**]. Auparavant, les cônes convexes homogènes avaient été classifiés par Vinberg dans [**46**] et [**47**].

L'étude systématique des convexes divisibles remonte aux travaux de Benzécri [**13**]. En particulier, Benzécri montre qu'un ouvert convexe saillant divisible Ω de $\mathbb{P}^2$ qui n'est pas un triangle, c'est-à-dire qui n'est pas conjugué par un élément de $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ à la trace projective de $(\mathbb{R}_+^*)^3$, est strictement convexe et a un bord de classe $\mathscr{C}^1$. En outre, si la dérivée seconde de $\partial\Omega$ est définie et non nulle en un point, Ω est un ellipsoïde.

Dans [**45**], Vey montre que, si un cône ouvert convexe saillant C de V est divisé par un groupe Γ, la représentation de Γ dans V est semi-simple. Plus précisément, si $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l$ est la décomposition de V en Γ-sous-modules irréductibles, il existe des cônes ouverts convexes saillants $C_1 \subset V_1, \ldots, C_l \subset V_l$ tels que $C = C_1 + \ldots + C_l$. Ce résultat implique en particulier que, si Ω est un ouvert convexe saillant d'un espace affine qui est divisé par un groupe de transformations affines, le convexe Ω est un cône. L'étude des ouverts convexes affines divisibles se ramène donc bien à celle des cônes convexes divisibles.

1.2. Structures localement homogènes

La théorie des convexes divisibles est fortement liée à celle des espaces localement homogènes. Rappelons que, si G est un groupe de Lie connexe agissant transitivement sur une variété X, un (G,X)-atlas sur une variété M est un ensemble $\mathscr{G}$ de cartes (U,φ), où U est un ouvert de M et φ un difféomorphisme de U sur un ouvert de X, ayant la propriété que, si (U,φ) et (W,ψ) appartiennent à $\mathscr{G}$, il existe un élément g de G tel que, pour tout x dans $U\cap W$, on ait $\psi(x)=g\varphi(x)$. Une (G,X)-structure sur M consiste en la donnée d'un (G,X)-atlas maximal $\mathscr{G}$ sur M avec $\bigcup_{(U,\varphi)\in\mathscr{G}} U = M$. Les éléments de $\mathscr{G}$ sont alors appelés cartes compatibles avec la (G,X)-structure. Par définition, les cartes compatibles recouvrent M. Supposons donc M munie d'une telle (G,X)-structure et notons $\pi:\tilde{M}\to M$ un revêtement universel de M et Γ le groupe des automorphismes de ce revêtement. Il existe alors un difféomorphisme local $D:\tilde{M}\to X$ et un homomorphisme de groupes $h:\Gamma\to G$ ayant les propriétés suivantes : *(i)* pour tout ouvert W de $\tilde{M}$ tel que π induise un difféomorphisme de W sur $\pi(W)$ et pour toute carte compatible (U,φ) avec U connexe et $U\subset\pi(W)$, il existe un élément g de G tel que, pour tout x dans W avec $\pi(x)\in U$, on ait $D(x)=g\varphi(\pi(x))$; *(ii)* pour tous x dans $\tilde{M}$ et γ dans Γ, on a $D(\gamma x)=h(\gamma)D(x)$. Si (D',h') est un autre couple satisfaisant aux mêmes propriétés, il existe g dans G tel que, pour tout x dans X, on ait $D'(x)=gD(x)$ et que, pour tout γ dans Γ, on ait $h'(\gamma)=gh(\gamma)g^{-1}$. Par abus de langage, on dit que D est la développante de la (G,X)-structure et h son morphisme d'holonomie. La donnée de D et de h détermine complètement la (G,X)-structure.

Exemple 1.4. — Le groupe $\mathrm{GA}(V)$ des automorphismes affines de V agit transitivement sur V. Soient $C\subset V$ un cône ouvert convexe saillant et Γ un sous-groupe discret sans torsion de $\operatorname{Aut} C$. La $(\mathrm{GA}(V),V)$-structure naturelle de C induit une $(\mathrm{GA}(V),V)$-structure sur $\Gamma\backslash C$. Son application développante est l'injection naturelle $C\to V$ et son holonomie l'injection naturelle $\Gamma\to\mathrm{GA}(V)$.

Exemple 1.5. — Le groupe $\mathrm{PGL}(V)$ des automorphismes projectifs de V agit transitivement sur $\mathbb{P}(V)$. Soient $\Omega\subset\mathbb{P}(V)$ un ouvert convexe saillant et Λ un sous-groupe discret sans torsion de $\operatorname{Aut}\Omega$. La $(\mathrm{PGL}(V),\mathbb{P}(V))$-structure naturelle de Ω induit une $(\mathrm{PGL}(V),\mathbb{P}(V))$-structure sur $\Lambda\backslash\Omega$. Son application développante est l'injection naturelle $\Omega\to\mathbb{P}(V)$ et son holonomie l'injection naturelle $\Lambda\to\mathrm{PGL}(V)$.

Dans ces exemples, l'application développante est injective. Ce n'est pas toujours le cas comme on peut le voir, par exemple dans [**21**] ou [**44**].

Une $(\mathrm{GA}(V),V)$-structure sera appelée structure affine plate. Une $(\mathrm{PGL}(V),\mathbb{P}(V))$-structure sera appelée structure projective plate. Supposons M munie d'une structure projective (resp. affine) plate. On appelle alors géodésiques de M les courbes tracées sur M dont les composantes connexes de l'intersection avec toute carte compatible sont des segments de droite projective (resp. affine). La structure projective (resp. affine) sera dite convexe si et seulement si toute courbe tracée sur M est homotope, à extrémités fixées, à un segment géodésique. D'après [**21**, 3.1], la structure projective (resp. affine) de M est convexe si et seulement si sa développante est un difféomorphisme sur un ouvert convexe de $\mathbb{P}(V)$ (resp. de V), c'est-à-dire si M s'identifie au quotient de ce convexe par un groupe discret d'automorphismes et que la structure plate est celle considérée dans les exemples ci-dessus. En particulier, si M est compacte et si cet ouvert convexe est saillant, il est divisible et, si la structure est affine, d'après le théorème de Vey, l'image de sa développante est un cône.

1.3. Déformation de convexes divisibles

Soit M une variété compacte. D'après un théorème de Koszul [**32, 33**], une structure affine plate sur M est convexe à revêtement universel saillant si et seulement s'il existe une 1-forme fermée sur M dont la dérivée covariante (au sens de la connexion naturellement associée à la structure affine) est définie positive. En particulier, l'ensemble des structures affines plates convexes à revêtement universel saillant est ouvert dans l'ensemble des structures affines plates de M.

Soit C un cône ouvert convexe saillant de V et soit Γ un sous-groupe discret (sans torsion) de $\operatorname{Aut} C$ qui divise C. Soit $\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$ l'injection naturelle. D'après un théorème de Thurston, généralisant une idée originale de Weil [**16, 49**], tout morphisme $\rho : \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$ suffisamment proche de ρ_0 est le morphisme d'holonomie d'une structure affine plate sur $M = \Gamma\backslash C$. En particulier, d'après le théorème de Koszul, si ρ est suffisamment proche de ρ_0, cette structure est convexe et son revêtement universel est saillant. Par conséquent, dans l'espace des homomorphismes de Γ dans $\mathrm{GL}(V)$, ceux dont l'image est discrète et divise un cône ouvert convexe saillant de V constituent une partie ouverte.

Étendons ces résultats au cas projectif. Notons $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$ le groupe des automorphismes linéaires de V dont le déterminant a pour valeur absolue 1. Soient Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$ et Λ un sous-groupe discret (sans torsion) de $\operatorname{Aut}\Omega$ qui divise Ω. Notons C l'un des deux cônes ouverts convexes de V dont l'image dans $\mathbb{P}(V)$ est Ω. Alors, le morphisme naturel de Λ dans $\mathrm{PGL}(V)$ se relève de manière unique en un morphisme de Λ dans $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$ qui préserve C. Soit h l'homothétie de rapport 2 dans V : le groupe $h^{\mathbb{Z}}\Lambda$ divise le cône C. En utilisant le cas affine, on en déduit donc à nouveau que, dans l'espace des homomorphismes de Λ dans $\mathrm{PGL}(V)$, ceux dont l'image est discrète et divise un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$ constituent une partie ouverte.

Pour tout $n \geq 2$, les réseaux co-compacts de $\mathrm{SO}(1,n)$ divisent un ellipsoïde dans $\mathbb{P}^n$. Dans [**28**], Johnson et Millson construisent des déformations de certains de ces réseaux qui sont Zariski denses dans $\mathrm{SL}_{n+1}(\mathbb{R})$. Quand ces déformations sont suffisamment proches de la représentation hyperbolique, elles divisent donc un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$. Il découle de la classification de Vinberg [**47**] que ces ouverts convexes saillants ne sont pas homogènes.

Si Λ est un groupe, on appelle centre virtuel de Λ le sous-groupe de Λ constitué des éléments dont le centralisateur est d'indice fini dans Λ. Dans [**10**], Benoist démontre le

THÉORÈME 1.6. — *Soit Λ un groupe de centre virtuel trivial. L'ensemble des homomorphismes fidèles et discrets de Λ dans* $\mathrm{PGL}(V)$ *dont l'image divise un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$ est fermé dans l'ensemble des homomorphismes de Λ dans* $\mathrm{PGL}(V)$.

Cet ensemble est donc alors une réunion de composantes connexes de l'ensemble des homomorphismes de Λ dans $\mathrm{PGL}(V)$. Nous donnerons des éléments de la démonstration de ce théorème dans la section 2.

Quand V est de dimension 3 et Λ sans torsion, l'hypothèse sur Λ implique que, si une représentation fidèle et discrète ρ de Λ dans $\mathrm{PGL}(V)$ divise un ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{P}(V)$, le quotient $\rho(\Lambda)\backslash\Omega$ est une surface fermée de genre ≥ 2. Dans ce cas, le théorème 1.6 avait été démontré par Choi et Goldman dans [**17**]. Les structures projectives plates convexes sur le tore de dimension 2 ont été classifiées par Kuiper dans [**36**] et [**37**] ; celles sur les surfaces de genre ≥ 2 l'ont été par Goldman dans [**22**].

1.4. Hyperbolicité

Un espace métrique (X, d) est dit géodésique si, pour tous x et y dans X, il existe une courbe isométrique $\gamma : [0, d(x, y)] \to X$ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(d(x, y)) = y$. Une telle courbe est appelée géodésique de x à y. Bien que γ ne soit a priori pas unique, on note parfois $[x, y]$ l'ensemble $\gamma([0, d(x, y)])$. L'espace (X, d) est dit propre si ses boules fermées sont compactes. Si Ω est un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$, l'espace métrique (Ω, d_Ω) est géodésique et propre et ses segments projectifs sont des géodésiques.

Rappelons (voir [**20**]) que, si δ est un réel > 0, un espace métrique géodésique (X, d) est dit δ-hyperbolique au sens de Gromov si, pour tous x, y, z dans X, pour tout choix de géodésiques $[x, y]$, $[y, z]$ et $[x, z]$, pour tout u dans $[x, y]$, il existe v dans $[x, z] \cup [y, z]$ avec $d(u, v) \leq \delta$: on dit aussi que les triangles de X sont δ-fins.

Un groupe de type fini est dit hyperbolique si, pour une certaine partie génératrice, son graphe de Cayley, muni de sa distance naturelle, est un espace hyperbolique au sens de Gromov. Cette définition ne dépend pas de la partie génératrice choisie. Plus généralement, si un groupe de type fini Γ agit proprement et co-compactement par isométries sur un espace métrique géodésique et propre X, le groupe Γ est hyperbolique si et seulement X est hyperbolique (voir [**20**]).

Dans le cas des convexes divisibles, cet énoncé a été précisé par Benoist dans [**9**], sous la forme du

THÉORÈME 1.7. — *Soient* Ω *un ouvert convexe saillant de* $\mathbb{P}(V)$ *et* Λ *un sous-groupe discret de* $\operatorname{Aut}\Omega$ *divisant* Ω*. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) *Le groupe* Λ *est hyperbolique.*
(ii) *Le bord de* Ω *est de classe* $\mathscr{C}^1$.
(iii) *Le convexe* Ω *est strictement convexe.*

Un ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{P}(V)$ est dit strictement convexe si son bord ne contient pas de segment de droite projective non réduit à un point. Il existe des ouverts strictement convexes à bord $\mathscr{C}^1$ dont la distance de Hilbert n'est pas hyperbolique (voir [**8**, 1.3]). Dans [**31**], Karlsson et Noskov ont montré qu'un ouvert convexe saillant dont le bord était de classe $\mathscr{C}^2$ à hessien défini positif avait une métrique de Hilbert hyperbolique. Ce critère a été amélioré par Benoist. Pour énoncer son résultat, introduisons une notion de régularité sur les fonctions convexes, inspirée de la notion de fonction quasi-symétrique apparaissant dans [**2**]. Si U est un ouvert convexe d'un espace vectoriel réel de dimension finie E et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^1$, nous dirons que f est quasi-symétrique s'il existe un réel $H \geq 1$ tel que, pour tous x dans U et h dans E tels que $x+h$ et $x-h$ appartiennent à U, on ait

$$f(x+h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)h \leq H(f(x-h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)(-h)).$$

Un ouvert convexe saillant Ω de $\mathbb{P}(V)$ sera dit quasi-symétriquement convexe s'il existe un recouvrement de son bord par des ouverts où, pour un système de coordonnées projectives convenables, le bord de Ω est le graphe d'une fonction quasi-symétriquement convexe. Dans [**8**], Benoist démontre le

THÉORÈME 1.8. — *Soient* Ω *un ouvert convexe saillant de* $\mathbb{P}(V)$ *et* d_Ω *sa distance de Hilbert. Alors l'espace métrique* (Ω, d_Ω) *est hyperbolique si et seulement si* Ω *est quasi-symétriquement convexe.*

Nous donnerons des éléments de la démonstration des théorèmes 1.7 et 1.8 à la section 3.

2. DÉFORMATION DE CONVEXES DIVISIBLES

2.1. Adhérence de Zariski des groupes qui divisent un convexe

L'étude des déformations de représentations divisant un cône convexe passe entre autres par une description précise de l'adhérence de Zariski dans $\mathrm{PGL}(V)$ d'un sous-groupe discret divisant un tel cône.

Si C est un cône ouvert convexe saillant de V, on dit que C est un cône produit s'il existe une décomposition non triviale en somme directe $V = V_1 \oplus V_2$ de V et des cônes convexes ouverts saillants C_1 de V_1 et C_2 de V_2 tels que $C = C_1 + C_2$. Dans le cas contraire, on dit que C est irréductible. Dans le cas général, il existe, à permutation près, une unique décomposition $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l$ et d'uniques cônes convexes ouverts saillants irréductibles $C_1 \subset V_1, \ldots, C_l \subset V_l$ tels que $C = C_1 + \ldots + C_l$. En particulier, $\operatorname{Aut} C$ permute les espaces $V_1, \ldots, V_l$ et la composante Zariski connexe de $\operatorname{Aut} C$ stabilise chacun de ces espaces. Dans [**7**], Benoist décrit l'adhérence de Zariski des groupes Zariski connexes qui divisent un cône :

Théorème 2.1 ([**7**, Théorème 1.1 et Proposition 4.4]). — *Soient C un cône convexe ouvert saillant de V, $C = C_1 + \ldots + C_l$ sa décomposition en cônes irréductibles, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_l$ la décomposition de V associée et Γ un sous-groupe discret et Zariski connexe de $\operatorname{Aut} C$ qui divise C. Alors l'adhérence de Zariski de Γ est un produit $G_1 \times \ldots \times G_l$ où, pour tout $1 \leq i \leq l$,*

(i) *le groupe G_i est un sous-groupe réductif de $\mathrm{GL}(V_i)$ contenant les homothéties ;*
(ii) *le groupe $S_i = \mathrm{SL}(V_i) \cap G_i$ est simple ;*
(iii) *si C_i est homogène, G_i est commensurable à $\operatorname{Aut} C_i$;*
(iv) *si C_i n'est pas homogène, il est cependant divisible et $G_i = \mathrm{GL}(V_i)$.*

En outre, le commutant H de Γ dans $\mathrm{GL}(V)$ est exactement le groupe des éléments dont la restriction à chacun des V_i, $1 \leq i \leq l$, est scalaire et le centre $H \cap \Gamma$ de Γ est un réseau de H.

Esquissons les grandes lignes de la démonstration de ce théorème : elle consiste essentiellement à montrer que, pour tout $1 \leq i \leq l$, si C_i n'est pas homogène, la projection de Γ dans $\mathrm{GL}(V_i)$ est Zariski dense. Notons que cette projection préserve le cône C_i, mais n'est pas nécessairement discrète. Pour l'étudier, nous utiliserons une nouvelle notion.

Si C est un cône ouvert convexe saillant de V, on dit qu'un sous-groupe Γ de $\operatorname{Aut} C$ balaie C s'il existe un compact K de C tel que $C = \Gamma K$. Il existe des cônes balayables non divisibles : il ressort en effet de la classification de Vinberg [**47**] que, si C est homogène, C est divisible si et seulement si $\operatorname{Aut} C$ est unimodulaire. La démonstration du théorème 2.1 repose sur la

Proposition 2.2 ([**7**, Proposition 3.2]). — *Soient C un cône convexe ouvert saillant de V et Γ un sous-groupe discret et Zariski connexe de $\operatorname{Aut} C$ qui balaie C et qui agit irréductiblement sur V. Alors, si C n'est pas homogène, Γ est Zariski dense dans $\mathrm{GL}(V)$.*

Détaillons un point essentiel de la démonstration.

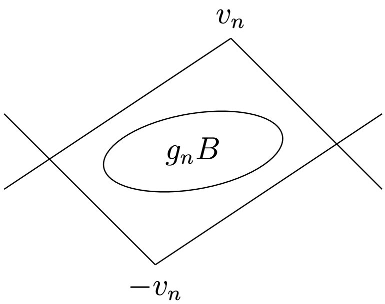

FIGURE 2. Démonstration du lemme 2.3

LEMME 2.3 ([**7**, Lemme 2.2]). — *Soient C un cône convexe ouvert saillant de V et Γ un sous-groupe discret et Zariski connexe de* $\operatorname{Aut} C$ *qui balaie C. Soient $\bar{C}$ l'adhérence de C dans V et $\bar{\Gamma}$ l'adhérence de Γ dans l'espace des endomorphismes de V. Alors, pour tout v dans $\bar{C}$, il existe g dans $\bar{\Gamma}$ et w dans C avec $gw = v$.*

Démonstration. — Soient (v_n) une suite d'éléments de C tendant vers v et (g_n) une suite d'éléments de Γ telle qu'il existe un compact K de C avec, pour tout n, $w_n = g_n^{-1}v_n \in K$. Nous allons montrer que (g_n) est bornée dans l'espace des endomorphismes de V, ce qui implique le résultat. Soit en effet B une boule de centre 0 pour une certaine norme sur V, de rayon suffisamment petit pour que $B + K \subset C$. Alors, pour tout n, on a $v_n + g_nB = g_n(w_n + B) \subset C$, donc $g_nB \subset -v_n + C$ et, par symétrie, $g_nB \subset v_n - C$. Le résultat en découle puisque, comme C est saillant et la suite (v_n) bornée, l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(v_n - C) \cap (-v_n + C)$ est borné. □

La stratégie de la démonstration de la proposition 2.2 consiste à montrer que la partie semi-simple de l'adhérence de Zariski G de Γ possède une orbite ouverte dans V, puis à conclure en utilisant des résultats de classification des représentations irréductibles de groupes semi-simples admettant une orbite ouverte dus à Kimura et Sato [**41**]. Commençons par reprendre des résultats de Vey sur la structure de G.

LEMME 2.4 ([**45**]). — *Soient C un cône convexe ouvert saillant de V et Γ un sous-groupe discret et Zariski connexe de* $\operatorname{Aut} C$ *qui balaie C et qui agit irréductiblement sur V. Alors, si G est l'adhérence de Zariski de Γ dans* $\mathrm{GL}(V)$ *et si $S = G \cap \mathrm{SL}(V)$, le groupe S est semi-simple et on a $G = \mathbb{R}^*S$.*

Démonstration. — Comme Γ agit irréductiblement sur V, son commutant dans l'algèbre des endomorphismes de V est une algèbre à division et G est réductif, donc, pour montrer que S est semi-simple, il suffit de montrer que cette algèbre à division est constituée uniquement des scalaires, c'est-à-dire que Γ ne préserve pas de structure complexe sur V. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une telle structure complexe J et donnons-nous un compact $K \subset C$ avec $\Gamma K = C$. Pour t suffisamment petit dans $\mathbb{R}$, on a $\exp(itJ)K \subset C$, donc

$$\exp(itJ)C = \exp(itJ)\Gamma K = \Gamma \exp(itJ)K \subset \Gamma C = C,$$

c'est-à-dire que $\exp(itJ)$ stabilise C. Comme ceci est vrai pour tout t dans un voisinage de 0, c'est vrai pour tout t dans $\mathbb{R}$ et donc, en particulier, $-C = \exp(i\pi J)C = C$, ce qui est contradictoire. Il en résulte que S est semi-simple.

À présent, pour montrer qu'on a $G = \mathbb{R}^* S$, il suffit de montrer qu'on a $\Gamma \not\subset \mathrm{SL}^{\pm}(V)$. Pour cela, rappelons que le cône dual de C est l'ensemble C^* des formes linéaires φ dans V^* telles que, pour tout x dans C, on ait $\varphi(x) > 0$. C'est un cône ouvert convexe saillant de V^* et on a $C^{**} = C$. Fixons une mesure de Lebesgue sur V^* et introduisons la fonction caractéristique ξ_C de C donnée par, pour tout x dans C,

$$\xi_C(x) = \int_{C^*} \exp(-\varphi(x))\mathrm{d}\varphi.$$

La convergence de l'intégrale découle immédiatement du caractère saillant de C^*. Pour tout g dans $\mathrm{Aut}\, C$, on a $\xi_C \circ g = |\det g|^{-1} \xi_C$. En particulier, la fonction ξ_C est homogène de degré $-\dim V$. Supposons qu'on a $\Gamma \subset \mathrm{SL}^{\pm}(V)$. Alors, ξ_C est Γ-invariante. Comme Γ balaie C, ξ_C est bornée sur C : ceci contredit le fait que ξ_C est homogène de degré $-\dim V$ et, donc, on a $\Gamma \not\subset \mathrm{SL}^{\pm}(V)$, ce qu'il fallait démontrer. □

La démonstration de la proposition 2.2 repose alors sur le

LEMME 2.5 ([**7**, Lemme 2.4]). — *Soient C un cône convexe ouvert saillant de V et Γ un sous-groupe discret et Zariski connexe de* $\mathrm{Aut}\, C$ *qui balaie C et qui agit irréductiblement sur V. Notons G l'adhérence de Zariski de Γ dans* $\mathrm{GL}(V)$ *et $S = G \cap \mathrm{SL}(V)$. Alors, si P est un polynôme homogène S-invariant non constant sur V, P est nul sur le bord ∂C de C.*

Démonstration. — Soit $d \geq 1$ le degré de P. Donnons-nous v dans ∂C. D'après le lemme 2.3, il existe g dans $\bar{\Gamma}$ et w dans C avec $gw = v$. Soit (g_n) une suite d'éléments de Γ tendant vers g. Écrivons, comme dans le lemme 2.4, $g_n = \lambda_n h_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}^*$ et $h_n \in S$. Alors on a

$$P(g_n w) = \lambda_n^d P(h_n w) = \lambda_n^d P(w).$$

Comme $P(g_n w) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(v)$, si $P(v) \neq 0$ la suite (λ_n) ne tend pas vers 0 et, donc, g est inversible. Alors, on a $gC = C$ et donc $v \in C$, ce qui est contradictoire. Il vient bien $P(v) = 0$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple 2.6. — Soit q une forme quadratique de signature $(1, n)$ sur V. L'algèbre des polynômes $\mathrm{SO}(q)$-invariants sur V est exactement $\mathbb{R}[q]$. Ces polynômes sont donc nuls sur le cône isotrope de q.

Esquissons rapidement la fin de la démonstration de la proposition 2.2.

Si S possède un polynôme homogène invariant non constant P, on montre que le cône C est homogène sous l'action de la composante neutre G° de G. En effet, d'après le lemme 2.5, si $Z = \{x \in V | P(x) = 0\}$, on a $\partial C \subset Z$ et, si Z' est l'ensemble des points réguliers de Z, pour des raisons de dimension, l'ensemble $Z' \cap \partial C$ est une réunion de composantes connexes de Z'. En particulier, cette intersection est stable par G°. Comme, par des raisonnements classiques de géométrie algébrique réelle (voir [**4**]), l'ensemble $Z - Z'$ est de codimension ≥ 2, $Z' \cap \partial C$ est dense dans ∂C et ∂C est invariant par la composante neutre de G°. Par conséquent G° préserve C et, comme Γ balaie C, G° agit co-compactement sur C. D'après le théorème d'Abels [**1**] de structure des actions propres de G°, on a $C = G/K \times_K F$ où K est un sous-groupe compact maximal de G° et F un fermé K-invariant de C et donc, comme G/K et C sont homéomorphes à des espaces euclidiens et que F est compact, F est réduit à un point.

Si S ne possède pas de polynôme invariant non constant, on montre que, d'après un théorème de Rosenlicht [**34**], ceci implique que S possède une orbite ouverte dans V et on en déduit, en utilisant la classification de ces situations par Kimura et Sato [**41**] et des résultats préalables de Benoist [**6**], que, dans ce cas, un sous-groupe Zariski dense de $\mathbb{R}^*S$ ne peut balayer un cône convexe saillant de V que si $S = \mathrm{SL}(V)$.

2.2. L'espace des représentations qui divisent un convexe

Dans ce paragraphe, nous allons donner des éléments de la démonstration du théorème 1.6. Commençons par revenir sur l'hypothèse algébrique faite sur le groupe Λ dans le théorème 1.6. Grâce au théorème 2.1, on peut préciser les situations où un sous-groupe discret de $\mathrm{PGL}(V)$ divisant un ouvert convexe saillant a un centre virtuel trivial :

Proposition 2.7 ([**10**, Corollaire 2.13]). — *Soient Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$ et Λ un sous-groupe discret de* $\mathrm{Aut}\,\Omega$ *divisant Ω. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le centre virtuel de Λ est trivial.*
(ii) *Le groupe Λ ne préserve pas de réunion finie de sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$.*
(iii) *Le groupe Λ ne contient pas de sous-groupe distingué nilpotent infini.*

L'hypothèse du théorème 1.6 se trouve alors justifiée par le résultat suivant de Goldman et Millson :

Lemme 2.8 (Goldman & Millson [**23**, Théorème 1.1]). — *Soit Λ un groupe de type fini n'admettant pas de sous-groupe distingué nilpotent infini et soit G un groupe de Lie. Alors l'ensemble des morphismes fidèles et d'image discrète de Λ dans G est fermé dans l'ensemble des morphismes de Λ dans G.*

La démonstration repose sur le célèbre

Lemme 2.9 (Zassenhaus [**40**, Théorème 8.16]). — *Soit G un groupe de Lie. Il existe un voisinage ouvert U de l'élément neutre de G tel que tout sous-groupe discret de G engendré par des éléments de U soit nilpotent.*

Démonstration. — Cela résulte de ce que l'application $G \times G \to G, (g,h) \mapsto ghg^{-1}h^{-1}$ a une différentielle nulle en (e,e). □

Démonstration du lemme 2.8. — Soit (ρ_n) une suite de morphismes fidèles et d'image discrète de Λ dans G qui converge vers un morphisme ρ. Montrons que ρ est lui-même fidèle et d'image discrète. Pour cela, notons H la composante neutre de l'adhérence de $\rho(\Lambda)$ et $\Delta = \rho^{-1}(H)$. Il s'agit de montrer que Δ est trivial. Comme Δ est distingué, nous allons commencer par montrer qu'il est nilpotent. Remarquons que, si Δ' est un sous-groupe de type fini de Δ, il existe un entier n tel que $\rho_n(\Delta')$ soit contenu dans la composante neutre de G. En particulier, si Δ' est nilpotent, son degré de nilpotence est borné par une constante ne dépendant que de G. Pour montrer que Δ est nilpotent, il suffit donc de montrer que tous ses sous-groupes de type fini le sont. Donnons-nous un voisinage ouvert U de e comme dans le lemme 2.9. Comme H est connexe, les sous-groupes denses de H sont engendrés par leur intersection avec U et, donc, Δ est engendré par $\rho^{-1}(U) \cap \Delta$. Soient alors $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ des éléments de $\rho^{-1}(U) \cap \Delta$. Il existe un entier n tel que, pour tout $1 \leq i \leq r$, on ait $\rho_n(\gamma_i) \in U$. Alors, comme ρ_n est d'image discrète, le sous-groupe de G engendré par les $\rho_n(\gamma_i)$, $1 \leq i \leq r$, est nilpotent et, comme ρ_n est fidèle, le sous-groupe de Δ engendré par les γ_i, $1 \leq i \leq r$, est lui aussi nilpotent. Par conséquent, Δ est nilpotent et, donc, fini. En particulier, H est trivial. Soit p l'ordre de Δ. Il existe un voisinage V de e dans G ne contenant pas d'éléments de p-torsion différents de e. Pour n suffisamment grand, $\rho_n(\Delta)$ est inclus dans V, donc $\rho_n(\Delta) = e$ et $\Delta = e$. □

Donnons à présent quelques précisions sur la démonstration du théorème 1.6.

Pour cela, commençons par introduire une notion de théorie des groupes due à Serre [**43**]. Si Γ est un groupe de type fini sans torsion agissant proprement en préservant l'orientation sur un espace topologique X homéomorphe à un espace euclidien de dimension d, la cohomologie du quotient $\Gamma \backslash X$ est nulle en degré $> d$ et l'espace $\mathrm{H}^d(X)$ est non-trivial si et seulement si $\Gamma \backslash X$ est compact. Or, pour tout entier r, l'espace $\mathrm{H}^r(X)$ s'identifie naturellement au groupe de cohomologie $\mathrm{H}^r(\Gamma, \mathbb{R})$. Par conséquent, si Γ possède une action propre préservant l'orientation et co-compacte sur un espace X homéomorphe à un espace euclidien, la dimension de X ne dépend que de Γ et est exactement le plus grand entier d tel que $\mathrm{H}^d(\Gamma, \mathbb{R}) \neq 0$. On appelle cet entier la dimension cohomologique de Γ et on le note $\operatorname{cd}\Gamma$. Si Γ agit proprement et co-compactement en préservant l'orientation sur un espace X homéomorphe à un espace euclidien, on a donc $\dim X \geq \operatorname{cd}\Gamma$ avec égalité si et seulement si l'action est co-compacte. Si Δ est un sous-groupe d'indice fini de Γ, on a $\operatorname{cd}\Delta = \operatorname{cd}\Gamma$. Par conséquent, si Γ est un groupe ayant des sous-groupes d'indice fini sans torsion, on appelle dimension cohomologique virtuelle de Γ et on note $\operatorname{vcd}\Gamma$ la dimension cohomologique de ces sous-groupes : elle ne dépend que de Γ. Ceci s'applique en particulier aux groupes linéaires de type fini, d'après le lemme de Selberg [**3, 42**].

Donnons un exemple d'application de cette notion dans notre contexte :

Lemme 2.10. — *Soient C un cône ouvert convexe saillant de V et Γ un sous-groupe discret de* $\operatorname{Aut} C$. *Alors Γ divise C si et seulement si Γ divise C^*.*

Grâce à la notion de dimension cohomologique, ce résultat repose essentiellement sur le lemme suivant dont nous avons jusqu'à présent différé la démonstration :

Lemme 2.11. — *Soit Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$. Le groupe* $\operatorname{Aut}\Omega$ *agit proprement sur Ω.*

Démonstration. — Pour démontrer ce résultat, nous allons construire une application continue et $\operatorname{Aut}\Omega$-équivariante de Ω vers l'ensemble des ellipsoïdes pointés de $\mathbb{P}(V)$. Comme l'action de $\operatorname{Aut}\Omega$ sur cet ensemble s'identifie à son action sur un quotient de $\mathrm{PGL}(V)$ par un sous-groupe compact, cette action est propre et le résultat en découle.

Soit Ω^* le convexe dual de Ω, c'est-à-dire l'ensemble des droites de V^* engendrées par des formes linéaires φ dans V^* telles que, pour tout $v \neq 0$ dans V, si $\mathbb{R}v$ appartient à $\bar{\Omega}$, on ait $\varphi(v) \neq 0$. L'ensemble Ω^* est un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V^*)$ et on a $\operatorname{Aut}\Omega = \operatorname{Aut}\Omega^*$. Pour tout x dans Ω, l'ouvert Ω^* est convexe et borné dans l'ouvert affine $\mathbb{P}(V^*) - \mathbb{P}(x^\perp)$. On note $\xi_x \in \Omega^*$ le centre de gravité de Ω^* dans $\mathbb{P}(V^*) - \mathbb{P}(x^\perp)$. L'application $x \mapsto \xi_x$ est continue et $\operatorname{Aut}\Omega$-équivariante de Ω dans Ω^* (c'est même un homéomorphisme de Ω dans Ω^*, voir [**45**, § 1]).

Pour tout x dans Ω, considérons à présent Ω comme un ouvert convexe et borné de l'espace affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(\xi_x^\perp)$. Alors, d'après [**27, 38**], il existe un unique ellipsoïde $E_x \subset \Omega$ de centre x et de volume maximal dans $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(\xi_x^\perp)$. L'application $x \mapsto (x, E_x)$ est bien une application continue et $\operatorname{Aut}\Omega$-équivariante de Ω dans l'ensemble des ellipsoïdes pointés de $\mathbb{P}(V)$. □

Démonstration du lemme 2.10. — Si Γ divise C, comme, d'après le lemme 2.11, Γ agit proprement sur C, on a $\operatorname{vcd}\Gamma = \dim C = \dim V = \dim C^*$ et, donc, comme Γ agit proprement sur C^*, Γ divise C^*. La réciproque est immédiate, par dualité. $\square$

Par ailleurs, rappelons qu'un élément g de $\mathrm{GL}(V)$ est dit proximal s'il possède une unique valeur propre complexe de module maximal et que l'espace propre associé est de dimension 1. Cette valeur propre est alors réelle. Nous dirons que g est positivement proximal si cette valeur propre est positive. On dit qu'un sous-groupe Γ de $\mathrm{GL}(V)$ est proximal s'il contient des éléments proximaux. Si Γ est proximal, on dit qu'il est positivement proximal si tous ses éléments proximaux sont positivement proximaux. On a la

PROPOSITION 2.12 ([**6**, Proposition 1.1]). — *Soit* Γ *un sous-groupe de* $\mathrm{GL}(V)$ *agissant irréductiblement sur* V*. Alors* Γ *préserve un cône convexe ouvert saillant de* V *si et seulement si* Γ *est positivement proximal.*

Donnons-nous alors un groupe Λ de centre virtuel trivial et une suite (ρ_n) de morphismes fidèles et d'image discrète de Λ dans $\mathrm{PGL}(V)$ dont les images divisent des ouverts convexes saillants de $\mathbb{P}(V)$. Supposons que la suite (ρ_n) converge vers un morphisme ρ de Λ dans $\mathrm{PGL}(V)$. Comme les ρ_n se relèvent de manière unique en des morphismes de Λ dans $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$ qui préservent des cônes ouverts convexes saillants, on peut dorénavant supposer que les ρ_n et ρ sont à valeurs dans $\mathrm{SL}^{\pm}(V)$. En particulier, pour tout n, d'après la proposition 2.12, le groupe $\rho_n(\Lambda)$ est positivement proximal. En revanche, la représentation ρ n'est pas a priori proximale. Décrivons cependant une propriété qu'elle hérite du caractère positivement proximal des ρ_n. Nous dirons qu'un élément g de $\mathrm{GL}(V)$ est semi-proximal s'il admet une valeur propre réelle dont le module est égal à son rayon spectral et qu'il est positivement semi-proximal si cette valeur propre peut être choisie positive.

L'argument du théorème de Perron-Frobenius permet de démontrer le

LEMME 2.13 ([**10**, Lemme 3.2]). — *Soit* C *un cône ouvert convexe saillant de* V*. Les éléments de* $\operatorname{Aut} C$ *sont positivement semi-proximaux.*

Remarque 2.14. — Ces éléments peuvent parfois ne pas être proximaux : c'est le cas par exemple lorsque C est le cône du futur d'une forme quadratique q de signature $(1, \dim V - 1)$. En effet, si $\dim V \geq 3$, le groupe $\mathrm{SO}(q)$ contient des éléments unipotents.

Par conséquent, d'après le lemme 2.13, pour tout n, les éléments de $\rho_n(\Lambda)$ sont tous positivement semi-proximaux, donc ceux de $\rho(\Lambda)$ aussi.

Notons (ρ', V') la somme des sous-quotients irréductibles de (ρ, V). Le noyau de ρ' est fini. Cela vient de ce que, d'après le lemme 2.8, la représentation ρ est fidèle et discrète, et, d'après la proposition 2.7, les sous-groupes distingués nilpotents de Λ

sont finis. Par conséquent, on a $\operatorname{vcd} \rho'(\Lambda) = \operatorname{vcd} \Lambda = \dim V - 1 = \dim V' - 1$. Le point essentiel de la démonstration du théorème 1.6 consistera à montrer que $\rho'(\Lambda)$ préserve un cône ouvert convexe saillant de V'. En effet, comme $\operatorname{vcd} \rho'(\Lambda) = \dim V' - 1$, $\rho'(\Lambda)$ divise la trace projective de ce cône et, donc, comme les sous-groupes distingués nilpotents de $\rho'(\Lambda)$ sont finis, d'après la proposition 2.7, la représentation (ρ', V') est irréductible, si bien que $\rho = \rho'$ et $\rho(\Lambda)$ divise un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$.

En d'autres termes, le théorème 1.6 découle de la

Proposition 2.15 ([**10**, Proposition 3.4]). — *Soit Γ un sous-groupe discret de type fini de $\mathrm{GL}(V)$ agissant de façon semi-simple sur V. On suppose que tous les éléments de Γ sont positivement semi-proximaux. Alors, on a $\operatorname{vcd}(\Gamma) \leq \dim V$ avec égalité si et seulement si Γ divise un cône ouvert convexe saillant de V.*

Nous allons à présent donner les grandes lignes de la démonstration de la proposition 2.15, qui utilise le langage général de la théorie des groupes algébriques réductifs. Pour cela, nous allons introduire le groupe algébrique qui est l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathrm{GL}(V)$. Quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini (qui agit encore de façon irréductible sur V, puisque Γ est totalement irréductible), on peut supposer que ce groupe est Zariski connexe ; comme Γ est irréductible, son adhérence de Zariski est réductive.

Soit donc $\mathbf{G}$ un groupe algébrique réel réductif. Soient $\mathbf{A}$ un tore $\mathbb{R}$-déployé maximal de $\mathbf{G}$, $\mathbf{Z}$ le centralisateur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{G}$ et $\mathbf{M}$ le plus grand sous-groupe $\mathbb{R}$-anisotrope de $\mathbf{Z}$ de sorte que $\mathbf{Z} = \mathbf{MA}$. On note G (resp. A, resp. Z, resp. M) le groupe des points réels de $\mathbf{G}$ (resp. $\mathbf{A}$, resp. $\mathbf{Z}$, resp. $\mathbf{M}$). Le groupe M est compact, le groupe A est constitué de matrices simultanément diagonalisables sur $\mathbb{R}$ et on a $Z = MA$. Notons A^* l'ensemble des éléments de A dont le centralisateur dans $\mathbf{G}$ est exactement $\mathbf{Z}$: c'est le complémentaire dans A d'une réunion finie de sous-groupes de codimension 1. Un élément g de G est dit loxodromique s'il est conjugué à un élément de MA^*. Soit Γ un sous-groupe Zariski dense de G. D'après [**39**], Γ contient des éléments loxodromiques. On dit qu'une représentation rationnelle (ρ, V) de $\mathbf{G}$ est Γ-semi-proximale (resp. positivement Γ-semi-proximale) si tout élément loxodromique de Γ a une image semi-proximale (resp. positivement semi-proximale) par ρ. D'après [**10**, 5.1], une représentation irréductible Γ-semi-proximale est G-semi-proximale.

Exemple 2.16. — D'après [**28**], on peut construire, par déformation d'une représentation du groupe fondamental d'une surface, un sous-groupe discret et Zariski dense Γ de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ divisant un cône convexe de $\mathbb{R}^3$. D'après le lemme 2.13, la représentation naturelle de $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^3$ est positivement Γ-semi-proximale, mais elle n'est pas positivement $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$-semi-proximale.

La proposition 2.15 est alors une conséquence directe de la proposition suivante, qui est la formulation originale de [**10**, Proposition 3.4] :

PROPOSITION 2.17 ([**10**, Proposition 3.4]). — *Soient* Γ *un sous-groupe discret de type fini et Zariski dense de* G *et* (ρ, V) *une représentation rationnelle de* $\mathbf{G}$ *de noyau fini. On suppose que* (ρ, V) *est positivement* Γ*-semi-proximale. Alors, on a* $\operatorname{vcd}\Gamma \leq \dim V$ *avec égalité si et seulement si* Γ *divise un cône ouvert convexe saillant de* V.

Donnons une idée des méthodes employées dans la démonstration de la proposition 2.17. Fixons un sous-groupe compact maximal K de G. L'espace G/K est difféomorphe à un espace euclidien, de sorte que, si Γ est un sous-groupe discret de type fini de G, on a $\operatorname{vcd}\Gamma \leq \dim G/K$. Un examen précis de la liste des algèbres de Lie simples et de leurs représentations de petite dimension [**26**] permet de démontrer le

LEMME 2.18 ([**10**, Corollaire 5.10]). — *Supposons* $\mathbf{G}$ *semi-simple, connexe et simplement connexe. Soit* (ρ, V) *une représentation rationnelle de* $\mathbf{G}$ *de noyau fini et positivement* G*-semi-proximale. On a* $\dim G/K \leq \dim V$ *et, si* $\dim G/K = \dim V$*, la représentation* ρ *est positivement* G*-proximale et* G *agit proprement et transitivement sur un ouvert convexe saillant* G*-invariant de* $\mathbb{P}(V)$.

Le second point-clef de la démonstration de la proposition 2.17 s'obtient par une étude des caractères de $\mathbf{A}$ qui sont le plus haut poids restreint d'une représentation semi-proximale de $\mathbf{G}$:

LEMME 2.19 ([**10**, Lemme 5.8]). — *Supposons* $\mathbf{G}$ *semi-simple, connexe et simplement connexe. Soit* (ρ, V) *une représentation rationnelle de* $\mathbf{G}$ *irréductible et semi-proximale. Alors, si* ρ *n'est pas proximale, il existe une représentation rationnelle irréductible proximale* (ρ', V') *de* G *avec* $\dim V' < \dim V$ *et telle que, pour tout sous-groupe Zariski dense* Γ *de* G, (ρ', V') *soit positivement* Γ*-semi-proximale si et seulement si* (ρ, V) *l'est.*

Une des difficultés réside dans le fait que la représentation ρ' peut éventuellement être la représentation triviale ; un exemple de cette situation est donné dans [**10**, 5.6].

Pour conclure nous allons utiliser ces lemmes pour la

Démonstration de la proposition 2.17. — Établissons ce résultat quand ρ est irréductible et que le groupe dérivé de $\mathbf{G}$ est simple. Alors, d'après le lemme de Schur, l'image par ρ de la partie centrale de $\mathbf{A}$ est scalaire et, donc, comme ρ est de noyau fini, cette partie centrale est de dimension ≤ 1. Quitte à remplacer $\mathbf{G}$ par un revêtement fini, on peut supposer qu'on a $\mathbf{G} = \mathbf{S} \times \mathbf{T}$ où $\mathbf{S}$ est semi-simple, connexe et simplement connexe et où $\mathbf{T}$ est un tore dont la composante $\mathbb{R}$-déployée est de dimension ≤ 1. On note S le groupe des points réels de $\mathbf{S}$.

Supposons que la représentation ρ est positivement G-semi-proximale. D'après le lemme 2.18, appliqué au groupe $\mathbf{S}$, on a

$$\operatorname{vcd}\Gamma \leq \dim G/K \leq \dim(S/(K \cap S)) + 1 \leq \dim V.$$

En cas d'égalité, d'une part, comme $\operatorname{vcd}\Gamma = \dim G/K$, l'espace $\Gamma\backslash G/K$ est compact et Γ est donc un réseau co-compact de G et, d'autre part, comme $\dim G/K = \dim V$, d'après le lemme 2.18, G agit transitivement sur un cône ouvert convexe saillant de V, si bien que Γ divise ce cône.

Supposons que la représentation ρ n'est ni positivement G-semi-proximale, ni G-proximale et donnons-nous (ρ', V') comme dans le lemme 2.19 appliqué au groupe $\mathbf{S}$. Étendons ρ' en une représentation de $\mathbf{G}$ à travers un caractère non-trivial de $\mathbf{T}$. Alors, ρ' est positivement Γ-proximale, mais n'est pas positivement G-proximale. En particulier, la restriction de ρ' à $\mathbf{S}$ n'est pas triviale et, donc, le noyau de ρ' est fini. Alors, d'après la proposition 2.12, le groupe $\rho'(\Gamma)$ préserve un cône ouvert convexe saillant de V' et on a donc

$$\operatorname{vcd}\Gamma \leq \dim V' < \dim V.$$

Enfin, supposons que ρ est G-proximale. Alors, d'après la proposition 2.12, le groupe $\rho(\Gamma)$ préserve un cône ouvert convexe saillant de V et on a

$$\operatorname{vcd}\Gamma \leq \dim V,$$

avec égalité si et seulement si Γ divise ce cône.

La démonstration du cas général repose sur des arguments analogues et sur une étude approfondie des valeurs propres des éléments des sous-groupes Zariski denses des groupes semi-simples. □

3. CONVEXES DIVISIBLES ET HYPERBOLICITÉ

3.1. Convexes divisibles strictement convexes

Nous nous intéressons à présent à la démonstration du théorème 1.7. Pour cela, commençons par établir la

PROPOSITION 3.1 ([**9**, Proposition 2.5]). — *Soient Ω un ouvert convexe saillant divisible de $\mathbb{P}(V)$ et d_Ω sa distance de Hilbert. L'espace métrique (Ω, d_Ω) est hyperbolique si et seulement si Ω est strictement convexe.*

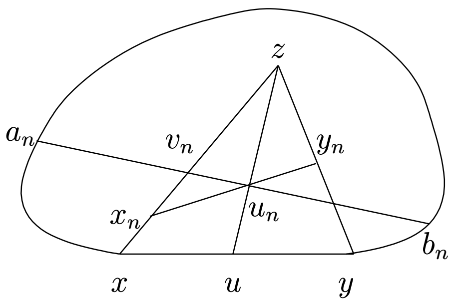

FIGURE 3. Un convexe hyperbolique est strictement convexe

Démonstration. — Supposons tout d'abord que Ω n'est pas strictement convexe et montrons que sa distance de Hilbert n'est pas hyperbolique. Cette partie ne nécessite pas que Ω soit divisible. Donnons-nous donc un segment maximal $[x, y]$ contenu dans le bord de Ω avec $x \neq y$, un point u de $]x, y[$ et un point z de Ω. Choisissons des suites (x_n), (y_n) et (u_n) de points de $]x, z]$, $]y, z]$ et $]u, z]$ qui convergent respectivement vers x, y et u. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout n, il existe v_n dans $[x_n, z] \cup [y_n, z]$ avec $d_\Omega(u_n, v_n) \leq \delta$ et, quitte à extraire une sous-suite et à échanger les rôles de x et de y, supposons que v_n appartient à $]x, z]$. Alors, comme la distance d_Ω est propre, la suite (v_n) tend vers x. Soient a_n et b_n les points d'intersection de la droite projective engendrée par u_n et v_n avec le bord de Ω, de façon à ce que v_n appartienne au segment $[a_n, u_n]$ et que u_n appartienne au segment $[b_n, v_n]$. Cette situation est représentée par la figure 3. Comme le segment $[u_n, v_n]$ tend vers $[u, x]$ et que le segment $[x, y]$ est maximal dans le bord de Ω, la suite (a_n) tend vers x. De même, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite (b_n) tend vers un point b de $[u, y]$. Plongeons $\bar{\Omega}$ dans un ouvert affine et choisissons une forme affine φ qui ne soit pas constante sur $[x, y]$. Alors, pour n suffisamment grand, on a

$$d_\Omega(u_n, v_n) = \frac{1}{2}\left|\log\left(\frac{\varphi(u_n) - \varphi(b_n)}{\varphi(u_n) - \varphi(a_n)}\frac{\varphi(v_n) - \varphi(a_n)}{\varphi(v_n) - \varphi(b_n)}\right)\right|$$

et, donc, comme (a_n) et (v_n) tendent vers x tandis que (u_n) tend vers u et que (b_n) tend vers b, $d_\Omega(u_n, v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, ce qui est contradictoire.

Réciproquement, supposons que Ω est strictement convexe, mais que sa distance de Hilbert n'est pas hyperbolique. Donnons-nous alors des suites (x_n), (y_n), (z_n) de points de Ω avec $u_n \in [x_n, y_n]$ et $d_\Omega(u_n, [x_n, z_n] \cup [y_n, z_n]) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Comme Ω est divisible, quitte à remplacer, pour tout n, u_n par une de ses images par un élément de $\operatorname{Aut}\Omega$ et à extraire une sous-suite, on peut supposer que (u_n) converge vers un point u de Ω et que (x_n), (y_n) et (z_n) convergent vers des points x, y et z de $\bar{\Omega}$. Alors, si on avait $x \neq z$, comme Ω est strictement convexe, on aurait $]x, z[\subset \Omega$ et

$d_\Omega(u,]x, z[) = \infty$. Par conséquent, on a $x = z$. De même, on a $y = z$ et, donc, comme $u \in [x, y]$, $u = x = y$, ce qui est impossible. □

Rappelons qu'on a noté Ω^* le convexe dual de Ω. L'ensemble Ω^* est un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V^*)$ et le bord de Ω est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si Ω^* est strictement convexe. La démonstration du théorème 1.7 s'achève avec la

Proposition 3.2 ([**9**, Proposition 2.7]). — *Soit Ω un ouvert convexe saillant divisible de $\mathbb{P}(V)$. L'ouvert Ω est strictement convexe si et seulement si Ω^* est strictement convexe.*

Démonstration. — Par dualité, il suffit de montrer une seule des implications. Soit Λ un sous-groupe discret sans torsion de $\mathrm{Aut}\,\Omega$ divisant Ω et préservant l'orientation. Alors, la dimension cohomologique de Λ est $\dim V - 1$ et, donc, la représentation adjointe de Λ divise Ω^*. Si Ω est strictement convexe, d'après la proposition 3.1, l'espace métrique (Ω, d_Ω) est hyperbolique, donc le groupe Λ est hyperbolique, donc l'espace métrique (Ω^*, d_{Ω^*}) est hyperbolique et, à nouveau d'après la proposition 3.1, le convexe Ω^* est strictement convexe. □

Pour terminer ce paragraphe, donnons des informations sur la régularité du bord des convexes divisibles strictement convexes. Munissons une fois pour toutes V d'une norme et $\mathbb{P}(V)$ de la distance associée d. Si M est une sous-variété de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{P}(V)$ et x un point de M, notons $\mathrm{T}_x^{\mathbb{P}}M$ la sous-variété projective tangente en x à M. Si α est un élément de $]1, 2[$, nous dirons que M est de classe $\mathscr{C}^\alpha$ si, pour tout compact K de M, il existe un réel $C \geq 0$ tel que, pour tous x et y dans K, on ait

$$d(y, \mathrm{T}_x^{\mathbb{P}}M) \leq C d(x, y)^\alpha$$

(cette notion est équivalente à la notion usuelle de régularité $\mathscr{C}^\alpha$, en vertu de propriétés classiques des fonctions höldériennes, voir [**9**, 4.2] ou [**35**]). Si β est un élément de $]2, \infty[$, nous dirons que M est β-convexe si, pour tout compact K de M, il existe un réel $C > 0$ tel que, pour tous x et y dans K, on ait

$$d(y, \mathrm{T}_x^{\mathbb{P}}M) \geq C d(x, y)^\beta.$$

Si Ω est un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$ et si $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, on montre aisément que Ω est de classe $\mathscr{C}^\alpha$ si et seulement si Ω^* est β-convexe (voir [**9**, 4.5] et [**24**, 3.2]). Dans ce cas, on pose

$$\alpha_\Omega = \sup\{\alpha \in]1, 2[\,|\, \partial\Omega \text{ est de classe } \mathscr{C}^\alpha\} \text{ et } \beta_\Omega = \inf\{\beta \in]2, \infty[\,|\, \partial\Omega \text{ est } \beta\text{-convexe}\},$$

de sorte que $\frac{1}{\alpha_\Omega} + \frac{1}{\beta_{\Omega^*}} = 1$.

Introduisons des objets reliés à ces quantités pour les éléments de $\mathrm{PGL}(V)$. Soit d la dimension de V. Si g est un élément de $\mathrm{GL}(V)$, on note $\lambda_1(g), \ldots, \lambda_d(g)$ les valeurs propres de g, comptées avec multiplicité et rangées de façon à ce que leurs modules décroissent et $\ell_1(g) \geq \ldots \geq \ell_d(g)$ les logarithmes de ces modules. Ainsi, g est proximal si et seulement si on a $\ell_1(g) > \ell_2(g)$. On dit que g est bi-proximal si g et son inverse sont proximaux ou encore si on a $\ell_1(g) > \ell_2(g)$ et $\ell_{d-1}(g) > \ell_d(g)$. Dans ce cas, on pose

$$\alpha_g = \frac{\ell_1(g) - \ell_d(g)}{\ell_1(g) - \ell_{d-1}(g)} \text{ et } \beta_g = \frac{\ell_1(g) - \ell_d(g)}{\ell_1(g) - \ell_2(g)},$$

si bien que $\frac{1}{\alpha_g} + \frac{1}{\beta_{g^{-1}}} = 1$ et $\min(\alpha_g, \alpha_{g^{-1}}) \leq 2$. Les nombres α_g et β_g ne dépendent que de l'image de g dans $\mathrm{PGL}(V)$.

Dans le cas des convexes divisibles strictement convexes, nous pouvons améliorer le lemme 2.13 :

Lemme 3.3 ([**9**, Proposition 5.1]). — *Soient Ω un ouvert strictement convexe de $\mathbb{P}(V)$. Si Λ est un sous-groupe discret sans torsion de* $\operatorname{Aut}\Omega$ *qui divise Ω, les relevés dans* $\mathrm{GL}(V)$ *des éléments non triviaux de Λ sont proximaux.*

Dans ce cas, on pose $\alpha_\Lambda = \inf_{g \in \Lambda - \{e\}} \alpha_g \leq 2$ et $\beta_\Lambda = \sup_{g \in \Lambda - \{e\}} \beta_g \geq 2$. On a le

Théorème 3.4 (Benoist [**9**, Corollaire 5.3], Guichard [**24**])

Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible de $\mathbb{P}(V)$. Il existe $1 < \alpha < 2$ tel que $\partial\Omega$ soit de classe $\mathscr{C}^\alpha$ et on a $\alpha_\Omega = \alpha_\Lambda = \alpha_{\Omega^*}$ et $\beta_\Omega = \beta_\Lambda = \beta_{\Omega^*}$.

L'existence de $\alpha > 1$ tel que le bord de Ω soit $\mathscr{C}^\alpha$ découle d'une propriété des flots d'Anosov. En effet, on peut définir le flot géodésique de Ω sur le fibré en sphères $\mathrm{S}\Omega$ de la façon suivante : si x est un élément de Ω et v une direction tangente à $\mathbb{P}(V)$ en x, on lui associe l'unique segment de droite projective $[x, y_{x,v}[\subset \Omega$ où $y_{x,v}$ est le point de $\partial\Omega$ tel que, dans un ouvert affine contenant Ω, le vecteur $y_{x,v} - x$ soit dans la direction v ; alors, le flot géodésique au temps $t \geq 0$ envoie (x, v) sur l'unique point (z, w) de $\mathrm{S}\Omega$ tel que z appartienne à $[x, y_{x,v}[$, que $d_\Omega(x, z) = t$ et que $y_{x,v} = y_{z,w}$. On définit de même le flot géodésique en temps négatif. La régularité de ce flot est donc fortement liée à la régularité de $\partial\Omega$. Si g est un élément de $\operatorname{Aut}\Omega$, ce flot commute à l'action naturelle de g sur $\mathrm{S}\Omega$. On a la

Proposition 3.5 ([**9**, Proposition 3.3]). — *Soient Ω un ouvert strictement convexe de $\mathbb{P}(V)$ et Λ un sous-groupe discret sans torsion de* $\operatorname{Aut}\Omega$ *qui divise Ω. Le flot géodésique de $\Lambda\backslash\mathrm{S}\Omega$ est un flot d'Anosov.*

Cette proposition entraîne alors (voir [**9**, Proposition 4.6]) que le bord de Ω est de classe $\mathscr{C}^\alpha$, pour un certain α. Ce résultat est à rapprocher des propriétés classiques de régularité höldérienne associées aux flots d'Anosov (voir [**25**, 19.1]).

Expliquons à présent une partie de la démonstration du théorème 3.4. Il s'agit de la

Proposition 3.6 ([**9**, Corollaire 5.3]). — *Soit Ω un ouvert strictement convexe de $\mathbb{P}(V)$. Si Λ est un sous-groupe discret sans torsion de* $\operatorname{Aut}\Omega$ *qui divise Ω, on a $1 < \alpha_\Omega \leq \alpha_\Lambda \leq 2 \leq \beta_\Lambda \leq \beta_\Omega < \infty$.*

La réciproque de cette proposition est due à Guichard [**24**].

Démonstration. — Commençons par montrer qu'on a $\beta_\Lambda \leq \beta_\Omega$. Soit g dans $\Lambda - \{e\}$. Il s'agit de montrer qu'on a $\beta_g \leq \beta_\Omega$. Pour cela, notons x_g^+ la droite propre de valeur propre $\lambda_1(g)$ de g dans V. Pour tout x dans $\mathbb{P}(V)$, si x n'appartient pas à l'image projective de l'unique hyperplan H_g^- de V supplémentaire de x_g^+ et stable par g, on a $g^n x \xrightarrow[n\to\infty]{} x_g^+$ et, donc, x_g^+ appartient à $\bar{\Omega}$. Comme l'action de Λ sur Ω est propre, x_g^+ appartient à $\partial\Omega$. Par ailleurs, l'hyperplan H_g^- est le point fixe attracteur de l'action de g^* dans $\mathbb{P}(V^*)$. De même, si x_g^- est la droite propre de valeur propre $\lambda_d(g)$ dans V et H_g^+ son unique supplémentaire g-stable, alors H_g^+ est le point fixe attracteur de l'action de $(g^{-1})^*$ dans $\mathbb{P}(V^*)$, si bien que H_g^+ appartient à $\partial\Omega^*$, c'est-à-dire que l'hyperplan projectif $\mathbb{P}\left(H_g^+\right)$ est tangent à Ω. Comme cet hyperplan contient x_g^+ et que Ω est strictement convexe, cet hyperplan est exactement l'hyperplan tangent à $\partial\Omega$ en x_g^+.

Considérons dorénavant l'ouvert affine $W = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}\left(H_g^-\right)$ comme un espace vectoriel d'élément neutre x_g^+. Alors, l'espace $W_g^+ = \mathbb{P}\left(H_g^+\right) \cap W$ est un hyperplan de W et l'intersection D_g^- de W avec la droite projective engendrée par x_g^+ et par x_g^- est une droite vectorielle de W. Dans une base de W associée à la somme directe $W = W_g^+ \oplus D_g^-$, l'action de g se lit comme celle d'une matrice

$$A(g) = \frac{1}{\lambda_1(g)} \begin{pmatrix} B(g) & 0 \\ 0 & \lambda_d(g) \end{pmatrix}$$

où $B(g)$ est une matrice de rayon spectral $e^{\ell_2(g)}$. En particulier, pour tout x dans W, on a

$$d(g^n x, W_g^+) = O\left(e^{-n(\ell_1(g)-\ell_d(g))}\right),$$

tandis que, si x n'appartient pas au supplémentaire g-invariant dans W du sous-espace de W où toutes les valeurs propres de $B(g)$ sont de module $e^{\ell_2(g)-\ell_1(g)}$,

$$e^{-n(\ell_1(g)-\ell_2(g))} = O(d(g^n x, x_g^+)).$$

Comme $\partial\Omega$ contient des points x satisfaisant à ces hypothèses, si $\beta \geq 2$ est tel que $\partial\Omega$ soit β-convexe, on a

$$e^{-n\beta(\ell_1(g)-\ell_2(g))} = O\left(e^{-n(\ell_1(g)-\ell_d(g))}\right),$$

c'est-à-dire $\beta \geq \beta_g$, ce qu'il fallait démontrer.

Alors, comme Λ divise Ω^*, on a aussi $\beta_\Lambda \leq \beta_{\Omega^*}$ et, donc, par dualité, $\alpha_\Omega \leq \alpha_\Lambda$. □

Corollaire 3.7 ([**9**, Proposition 6.1]). — *Soit Ω un ouvert strictement convexe divisible de $\mathbb{P}(V)$. Si $\alpha_\Omega = 2$, Ω est un ellipsoïde.*

Autrement dit, la régularité des ouverts strictement convexes divisibles qui ne sont pas homogènes ne peut pas être trop grande.

Démonstration. — Soit Λ un sous-groupe discret sans torsion de $\operatorname{Aut}\Omega$ qui divise Ω. D'après le théorème 2.1 et la classification de Vinberg des cônes convexes homogènes [**47**], si Ω n'est pas un ellipsoïde, Λ est Zariski dense dans $\mathrm{PGL}(V)$. Ce fait peut d'ailleurs se montrer directement (voir [**6**, 3.6]). Supposons donc que Ω n'est pas un ellipsoïde et que $\alpha_\Omega = 2$. Alors, d'après la proposition 3.6, pour tout g dans G, on a $\alpha_g = 2$. Or, comme Λ est Zariski dense, d'après [**5**, 1.2], si ℓ_Λ est le cône fermé engendré par l'image de l'ensemble $\{(\ell_1(g), \dots, \ell_d(g)) | g \in \Lambda\}$ dans le quotient de $\mathbb{R}^d$ par la droite engendré par le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$, le cône ℓ_Λ est convexe et d'intérieur non vide, ce qui contredit le fait que $\alpha_g = 2$ pour tout g dans Λ, d'où le résultat. $\square$

3.2. Convexes hyperboliques

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques indications sur les grandes étapes de la démonstration du théorème 1.8. Pour cela, notons X l'ensemble des ouverts convexes saillants de $\mathbb{P}(V)$, muni de l'action naturelle de $\mathrm{PGL}(V)$. On munit $\mathbb{P}(V)$ de la distance provenant d'une norme sur V et X de la distance de Hausdorff associée. L'espace X est alors localement compact. Pour tout $\delta > 0$, on note X^δ l'ensemble des Ω dans X tels que (Ω, d_Ω) soit δ-hyperbolique. Nous avons la

Proposition 3.8 ([**8**, Proposition 2.10 et Corollaire 2.12]). — *L'ensemble X^δ est un fermé $\mathrm{PGL}(V)$-invariant de X dont tous les éléments sont strictement convexes et à bord $\mathscr{C}^1$. Réciproquement, si F est un fermé $\mathrm{PGL}(V)$-invariant de X dont tous les éléments sont strictement convexes (resp. à bord $\mathscr{C}^1$), il existe $\delta > 0$ tel que $F \subset X^\delta$.*

Le fait qu'il soit équivalent, pour un fermé $\mathrm{PGL}(V)$-invariant de X, d'avoir tous ses éléments strictement convexes ou tous ses éléments de classe $\mathscr{C}^1$, découle du résultat suivant de Benzécri :

Lemme 3.9 (Benzécri [**13**]). — *Soit Ω dans X. Si le bord de Ω n'est pas $\mathscr{C}^1$, l'adhérence de $\mathrm{PGL}(V)\Omega$ dans X contient un élément qui n'est pas strictement convexe. Si Ω n'est pas strictement convexe, l'adhérence de $\mathrm{PGL}(V)\Omega$ dans X contient un élément dont le bord n'est pas $\mathscr{C}^1$.*

Démonstration. — Il suffit de montrer la première de ces deux assertions, la seconde s'en déduisant par dualité. Nous démontrons le résultat quand $\dim V = 3$, le cas général s'en déduisant par des arguments généraux (voir [**8**, 2.7] ou [**13**, V.3]).

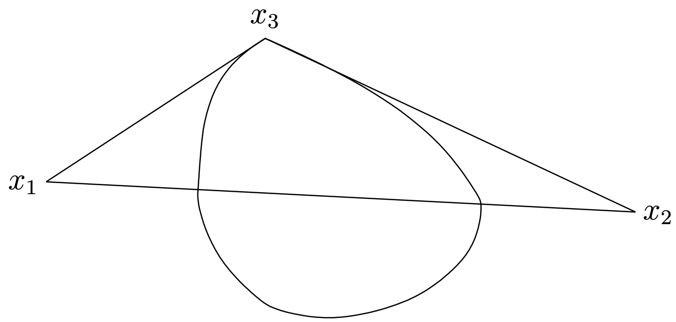

FIGURE 4. Un triangle dans une adhérence d'orbite

Soit donc Ω un ouvert convexe saillant de $\mathbb{P}(V)$ dont le bord n'est pas $\mathscr{C}^1$ et soient H_1 et H_2 des plans distincts de V tels que les droites projectives $\mathbb{P}(H_1)$ et $\mathbb{P}(H_2)$ soient toutes deux tangentes à Ω en un point x_3 de Ω. Choisissons des points $x_1 \in \mathbb{P}(H_1)$ et $x_2 \in \mathbb{P}(H_2)$ différents de x_3 et un élément g de $\mathrm{GL}(V)$ admettant x_3 pour droite propre de valeur propre 1 et x_1 et x_2 pour droites propres de valeur propre $\lambda > 1$. On vérifie aisément que la suite $(g^n\Omega)$ converge vers un triangle de sommets x_1, x_2 et x_3 (voir figure 4). Le résultat en découle. $\square$

Introduisons un nouvel espace. On note X^* l'ensemble des couples (Ω, x) où Ω appartient à X et x appartient à Ω. La démonstration de la proposition 3.8 s'établit de manière analogue à celle de la proposition 3.1 en utilisant le

LEMME 3.10 (Benzécri [**13**, V.2], [**8**, Proposition 2.3]). — *L'action naturelle de* $\mathrm{PGL}(V)$ *sur* X^* *est propre et co-compacte.*

Démonstration. — La démonstration du fait que cette action est propre est analogue à celle du lemme 2.11. Le fait qu'elle est co-compacte provient alors de ce que, pour tous $\Omega_1 \subset \Omega_2$ dans X, l'ensemble $\{\Omega \in X | \Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2\}$ est compact dans X. $\square$

Démonstration de la proposition 3.8. — D'après le lemme 3.9, il suffit de montrer que, pour tout $\delta > 0$, l'ensemble X^δ est fermé et qu'une partie fermée et $\mathrm{PGL}(V)$-invariante de X ne contient que des éléments strictement convexes si et seulement s'il existe $\delta > 0$ avec $F \subset X^\delta$. Grâce au lemme 3.10, la démonstration de ces faits est analogue à celle de la proposition 3.1, en remplaçant l'ouvert Ω par une suite d'ouverts. $\square$

Nous allons à présent utiliser la proposition 3.8 pour caractériser l'hyperbolicité d'un convexe en termes d'objets vivant sur le bord de ce convexe. Si Ω est un ouvert strictement convexe à bord $\mathscr{C}^1$ et a, b, c, d sont des points de $\partial\Omega$, on dit que le quadruplet (a, b, c, d) est harmonique si les droites projectives (ac) et (bd) se coupent en

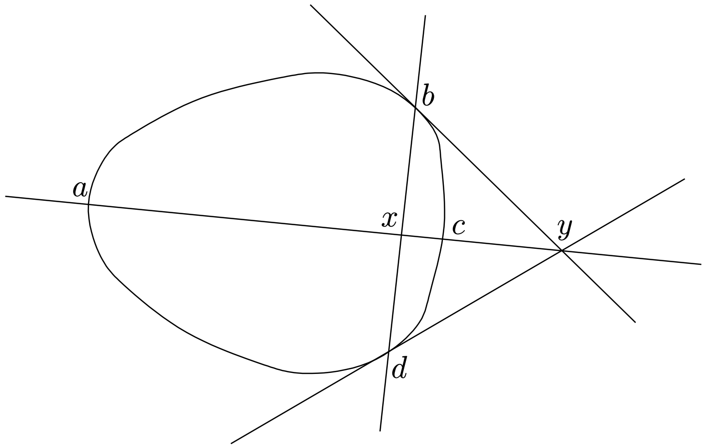

FIGURE 5. Un quadruplet harmonique

un point x de Ω et si la droite (ac) rencontre les hyperplans projectifs tangents en b et d à Ω en un même point y (voir figure 5). Dans ce cas, on pose

$$\psi_{\partial\Omega}(a,b,c,d) = -[x,y,a,c] = -\frac{c-x}{a-x}\frac{a-y}{c-y} > 0.$$

L'ensemble des quadruplets harmoniques de $\partial\Omega$ est noté $H(\partial\Omega)$ et on pose

$$\Delta_\Omega = \sup_{\xi\in H(\partial\Omega)} \psi_{\partial\Omega}(\xi).$$

Comme, si (a,b,c,d) est harmonique, (c,b,a,d) l'est aussi et

$$\psi_{\partial\Omega}(c,b,a,d) = \psi_{\partial\Omega}(a,b,c,d)^{-1},$$

on a $\Delta_\Omega \geq 1$.

PROPOSITION 3.11 ([**8**, Proposition 3.2]). — *Pour tout $\delta > 0$, il existe $\Delta \geq 1$ tel que, pour tout Ω dans X, si (Ω, d_Ω) est δ-hyperbolique, on ait $\Delta_\Omega \leq \Delta$. Pour tout $\Delta \geq 1$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout Ω dans X, si $\Delta_\Omega \leq \Delta$, (Ω, d_Ω) soit δ-hyperbolique.*

En particulier, (Ω, d_Ω) est hyperbolique si et seulement si $\Delta_\Omega < \infty$.

Démonstration. — Montrons la première assertion. Supposons au contraire qu'il existe une suite (Ω_n) dans X^δ avec $\Delta_{\Omega_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Choisissons alors, pour tout n, un quadruplet harmonique (a_n, b_n, c_n, d_n) dans $H(\partial\Omega_n)$ de façon à ce que $\psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ et notons x_n et y_n comme dans la définition. Alors, comme l'action de $\mathrm{PGL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$ préserve les bi-rapports des points alignés, d'après le lemme 3.10, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite

(Ω_n) converge vers un élément Ω de X et que (x_n) converge vers un élément x de Ω. D'après la proposition 3.8, Ω est strictement convexe et à bord $\mathscr{C}^1$. Quitte à encore extraire une sous-suite, on peut aussi supposer que (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) convergent vers des points a, b, c et d de $\partial\Omega$ et que (y_n) converge vers un point y de $\mathbb{P}(V) - \Omega$. Comme x appartient à $\Omega \cap (ac) \cap (bd)$, on a $a \neq c$ et $b \neq d$ et, donc, comme y est dans l'intersection des hyperplans tangents à Ω en b et d et que Ω est strictement convexe, on a $y \notin \partial\Omega$. Alors, le quadruplet (a, b, c, d) est harmonique et on a $\psi_{\partial\Omega}(a, b, c, d) = \lim_{n\to\infty} \psi_{\partial\Omega_n}(a_n, b_n, c_n, d_n) = \infty$, ce qui est absurde.

La seconde assertion se démontre de manière analogue : on pose

$$E = \{\Omega \in X | \Omega \text{ est strictement convexe et à bord } \mathscr{C}^1 \text{ et } \Delta_\Omega \leq \Delta\}.$$

Alors, d'après la proposition 3.8, il s'agit de montrer que tout élément de l'adhérence de E dans X est strictement convexe. Ceci se montre par l'absurde, en utilisant le fait, découlant de la démonstration du lemme 3.9, que, si ce n'était pas le cas, il existerait des éléments de l'adhérence de E dont une section plane serait un triangle. □

La fin de la démonstration du théorème 1.7 consiste à montrer que, si Ω est un ouvert strictement convexe à bord $\mathscr{C}^1$, on a $\Delta_\Omega < \infty$ si et seulement si Ω est quasi-symétriquement convexe. La démonstration de ce fait découle d'une étude minutieuse de la notion de fonction quasi-symétriquement convexe.

4. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

Nous mentionnons ici des exemples de convexes divisibles qui sont construits par Benoist dans **[11]** et **[12]**. Ces exemples sont tous construits sur le principe suivant : on se donne un système de Coxeter (S, M), c'est-à-dire un ensemble S et une famille $M = (m_{s,t})_{s,t\in S}$ d'éléments de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ avec, pour tout s dans S, $m_{s,s} = 1$ et, pour tous $s \neq t$ dans S, $m_{s,t} = m_{t,s} \geq 2$. Le groupe de Coxeter W associé à ce système est le groupe défini par des générateurs $(g_s)_{s\in S}$, avec les relations $(g_s g_t)^{m_{s,t}} = e$, pour s, t dans S tels que $m_{s,t} < \infty$. En particulier, les éléments $(g_s)_{s\in S}$ sont des involutions. On va alors chercher à construire une représentation linéaire de W qui divise un cône convexe. Dans cette représentation, les $(g_s)_{s\in S}$ agiront comme des symétries hyperplanes. Il s'agit donc d'exhiber un espace vectoriel V et des éléments $(v_s)_{s\in S}$ de V et $(\varphi_s)_{s\in S}$ de V^* avec, pour tout s dans S, $\varphi_s(v_s) = 2$, de façon à ce que les symétries hyperplanes $\sigma_s : v \mapsto v - \varphi_s(v)v_s, V \to V$, $s \in S$, vérifient les mêmes relations que les $(g_s)_{s\in S}$. Des critères dus à Tits et à Vinberg (voir **[11]**, 4.1], **[14]**, **[48]**) permettent de garantir que cette représentation est fidèle et discrète et qu'elle divise un cône convexe. Par ailleurs, un critère dû à Moussong **[18, 19]** permet de déterminer si le groupe W est hyperbolique.

Appliquées à des exemples précis, ces notions permettent d'établir les résultats suivants.

Proposition 4.1 ([**11**, Proposition 1.3]). — *Il existe un sous-groupe discret et Zariski dense de* $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{R})$ *qui divise un ouvert convexe saillant non strictement convexe de* $\mathbb{P}^3$.

Proposition 4.2 ([**12**, Proposition 3.1]). — *Il existe un sous-groupe discret et Zariski dense de* $\mathrm{PGL}_5(\mathbb{R})$ *qui divise un ouvert strictement convexe de* $\mathbb{P}^4$*, mais qui n'est pas isomorphe à un sous-groupe discret co-compact de* $\mathrm{SO}(4,1)$.

Ce dernier résultat a récemment été étendu par Kapovich [**30**] en toute dimension ≥ 4 par des méthodes différentes. Notons que la conjecture d'hyperbolisation de Thurston implique qu'un tel exemple ne peut pas exister en dimension 3.

RÉFÉRENCES

[1] H. Abels – Parallelizability of proper actions, global K-slices and maximal compact subgroups, *Math. Ann.* **212** (1974/75), p. 1–19.

[2] L. V. Ahlfors – *Lectures on quasiconformal mappings*, 2e éd., University Lecture Series, vol. 38.

[3] R. C. Alperin – An elementary account of Selberg's lemma, *Enseign. Math.* **33** (1987), p. 269–273.

[4] R. Benedetti & J.-J. Risler – *Real algebraic and semi-algebraic sets*, Actualités Mathématiques., Hermann, 1990.

[5] Y. Benoist – Propriétés asymptotiques des groupes linéaires, *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), p. 1–47.

[6] ———, Automorphismes des cônes convexes, *Invent. Math.* **141** (2000), p. 149–193.

[7] ———, Convexes divisibles. II, *Duke Math. J.* **120** (2003), p. 97–120.

[8] ———, Convexes hyperboliques et fonctions quasisymétriques, *Publ. Math. I.H.É.S.* **97** (2003), p. 181–237.

[9] ———, Convexes divisibles. I, in *Algebraic groups and arithmetic*, Tata Inst. Fund. Res., 2004, p. 339–374.

[10] ———, Convexes divisibles. III, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **38** (2005), p. 793–832.

[11] ———, Convexes divisibles. IV. Structure du bord en dimension 3, *Invent. Math.* **164** (2006), p. 249–278.

[12] ———, Convexes hyperboliques et quasiisométries, *Geom. Dedicata* **122** (2006), p. 109–134.

[13] J.-P. Benzécri – Sur les variétés localement affines et localement projectives, *Bull. Soc. Math. France* **88** (1960), p. 229–332.

[14] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVIII : Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4–6*, Hermann, 1975.

[15] H. Busemann & P. J. Kelly – *Projective geometry and projective metrics*, Academic Press Inc., 1953.

[16] R. D. Canary, D. B. A. Epstein & P. Green – Notes on notes of Thurston, in *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 111, Cambridge Univ. Press, 1987, p. 3–92.

[17] S. Choi & W. M. Goldman – Convex real projective structures on closed surfaces are closed, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), p. 657–661.

[18] M. W. Davis – Nonpositive curvature and reflection groups, in *Handbook of geometric topology*, North-Holland, 2002, p. 373–422.

[19] ———, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 32, Princeton Univ. Press, 2008.

[20] É. Ghys & P. De la Harpe (éds.) – *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Math., vol. 83, Birkhäuser, 1990.

[21] W. M. Goldman – Projective structures with Fuchsian holonomy, *J. Differential Geom.* **25** (1987), p. 297–326.

[22] ———, Convex real projective structures on compact surfaces, *J. Differential Geom.* **31** (1990), p. 791–845.

[23] W. M. Goldman & J. J. Millson – Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space, *Invent. Math.* **88** (1987), p. 495–520.

[24] O. Guichard – Sur la régularité Hölder des convexes divisibles, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **25** (2005), p. 1857–1880.

[25] B. Hasselblatt & A. Katok – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge Univ. Press, 1995.

[26] S. Helgason – *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 80, Academic Press Inc., 1978.

[27] F. John – Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, in *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*, Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., 1948, p. 187–204.

[28] D. Johnson & J. J. Millson – Deformation spaces associated to compact hyperbolic manifolds, in *Discrete groups in geometry and analysis (New Haven, Conn., 1984)*, Progr. Math., vol. 67, Birkhäuser, 1987, p. 48–106.

[29] V. G. Kac & È. B. Vinberg – Quasi-homogeneous cones, *Mat. Zametki* **1** (1967), p. 347–354.

[30] M. Kapovich – Convex projective structures on Gromov-Thurston manifolds, *Geom. Topol.* **11** (2007), p. 1777–1830.

[31] A. Karlsson & G. A. Noskov – The Hilbert metric and Gromov hyperbolicity, *Enseign. Math.* **48** (2002), p. 73–89.

[32] J.-L. Koszul – Variétés localement plates et convexité, *Osaka J. Math.* **2** (1965), p. 285–290.

[33] ______, Déformations de connexions localement plates, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18** (1968), p. 103–114.

[34] H. Kraft, P. Slodowy & T. A. Springer (éds.) – *Algebraische Transformationsgruppen und Invariantentheorie*, DMV Seminar, vol. 13, Birkhäuser, 1989.

[35] S. G. Krantz – Lipschitz spaces, smoothness of functions, and approximation theory, *Exposition. Math.* **1** (1983), p. 193–260.

[36] N. H. Kuiper – Sur les surfaces localement affines, in *Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953*, Centre National de la Recherche Scientifique, 1953, p. 79–87.

[37] ______, On convex locally-projective spaces, in *Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Italia, 1953*, Edizioni Cremonese, 1954, p. 200–213.

[38] D. Li & H. Queffélec – *Introduction à l'étude des espaces de Banach*, Cours Spécialisés, vol. 12, Soc. Math. France, 2004.

[39] G. Prasad – **R**-regular elements in Zariski-dense subgroups, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **45** (1994), p. 541–545.

[40] M. S. Raghunathan – *Discrete subgroups of Lie groups*, Ergebnisse Math. Grenzg., vol. 68, Springer, 1972.

[41] M. Sato & T. Kimura – A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, *Nagoya Math. J.* **65** (1977), p. 1–155.

[42] A. Selberg – On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, in *Contributions to function theory (Internat. Colloq. Function Theory, Bombay, 1960)*, Tata Institute of Fundamental Research, 1960, p. 147–164.

[43] J-P. Serre – Cohomologie des groupes discrets, in *Prospects in mathematics (Proc. Sympos., Princeton Univ., Princeton, N.J., 1970)*, Ann. of Math. Studies, vol. 70, Princeton Univ. Press, 1971, p. 77–169.

[44] D. Sullivan & W. Thurston – Manifolds with canonical coordinate charts : some examples, *Enseign. Math.* **29** (1983), p. 15–25.

[45] J. Vey – Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **24** (1970), p. 641–665.

[46] È. B. Vinberg – The theory of homogeneous convex cones, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **12** (1963), p. 303–358.

[47] ______, Structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **13** (1965), p. 56–83.

[48] ______, Discrete linear groups that are generated by reflections, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **35** (1971), p. 1072–1112.

[49] A. Weil – On discrete subgroups of Lie groups, *Ann. of Math.* **72** (1960), p. 369–384.

Jean-François QUINT

Université Paris XIII
Institut Galilée
LAGA
UMR 7539 du CNRS
99 avenue J.-B. Clément
F-93430 Villetaneuse
E-mail : quint@math.univ-paris13.fr