332

ASTÉRISQUE

2010

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2008/2009
EXPOSÉS 997-1011

(1002) *La conjecture de Weinstein en dimension* 3

Denis AUROUX

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Séminaire BOURBAKI Mars 2009
61[e] année, 2008-2009, n° 1002, p. 135 à 159

LA CONJECTURE DE WEINSTEIN EN DIMENSION 3 [d'après C. H. Taubes]

par **Denis AUROUX**

Étant donnée une variété fermée munie d'une forme de contact a, la conjecture de Weinstein [**22**] affirme l'existence d'orbites périodiques du champ de Reeb (le champ de vecteurs qui engendre le noyau de da). Cette conjecture a été prouvée fin 2006 par C. H. Taubes [**18**] pour toute variété de contact de dimension 3. Le présent exposé décrit le résultat de Taubes et les principaux ingrédients de la preuve, en particulier les équations de Seiberg-Witten en dimension 3.

1. LA CONJECTURE DE WEINSTEIN

Soit M une variété compacte orientée de dimension $2n+1$, équipée d'une forme de contact a, c'est-à-dire une 1-forme telle que $a\wedge(da)^n$ soit une forme volume compatible avec l'orientation de M. Le champ d'hyperplans $\xi = \mathrm{Ker}(a)$ définit alors une structure de contact sur M.

La 2-forme da est de rang $2n$, et son noyau définit une famille de droites dans le fibré tangent TM, transverses aux hyperplans de contact ; le champ de Reeb est le champ de vecteurs v qui engendre ces droites, normalisé par la condition $a(v) = 1$.

Définition 1.1. — *Le champ de Reeb est l'unique champ de vecteurs v sur M tel que $da(v,\cdot) = 0$ et $a(v) = 1$.*

Par exemple, en dimension 3, il existe des coordonnées locales (x, y, z) telles que $a = dz - y\,dx$; le champ de Reeb est alors $v = \partial/\partial z$.

La conjecture de Weinstein [**22**], formulée il y a trente ans, affirme l'existence d'orbites périodiques du champ de Reeb sur les variétés compactes :

Conjecture 1.2 (Weinstein). — *Le champ de Reeb v possède au moins une courbe intégrale fermée.*

La conjecture de Weinstein était motivée par un résultat de Rabinowitz [**12**] affirmant l'existence d'orbites périodiques dans le cas particulier où M est une hypersurface étoilée dans $\mathbb{R}^{2n}$; ce résultat a ensuite été étendu par Viterbo [**21**] au cas des hypersurfaces de type contact dans $\mathbb{R}^{2n}$. Plus récemment, des progrès spectaculaires ont été accomplis grâce à la théorie des courbes pseudo-holomorphes. Ainsi, le lien entre orbites périodiques du champ de Reeb sur la variété de contact M et courbes pseudo-holomorphes dans la symplectisation $(M \times \mathbb{R},\, d(e^t a))$ a permis à Hofer [**3**] d'établir la conjecture de Weinstein pour la sphère S^3 munie d'une forme de contact arbitraire, ainsi que pour toutes les structures de contact vrillées en dimension 3, et pour toutes les variétés de dimension 3 telles que $\pi_2(M) \neq 0$ (voir également l'exposé de F. Laudenbach au Séminaire Bourbaki [**10**]).

Divers autres cas particuliers de la conjecture de Weinstein en dimension 3 ont également été résolus relativement récemment : voir par exemple les travaux d'Abbas, Cieliebak et Hofer [**1**] pour le cas des variétés qui admettent un livre ouvert planaire, et de Gay [**2**] pour les variétés qui contiennent un tore de torsion non nulle.

Dans son article [**18**], Taubes établit la conjecture de Weinstein pour toutes les variétés de dimension 3. Son résultat peut être formulé de façon plus précise. Pour ceci, on rappelle que la forme da définit une structure symplectique sur le champ d'hyperplans de contact $\xi = \mathrm{Ker}(a)$. On peut donc définir la classe de Chern $c_1(\xi) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Comme toute variété compacte orientée de dimension 3 est spin, la seconde classe de Stiefel-Whitney du fibré tangent $TM = \xi \oplus \mathbb{R}v$ s'annule. Ceci implique que $c_1(\xi)$ est divisible par 2.

Théorème 1.3 (Taubes [**18**]). — *Soit $e \in H^2(M, \mathbb{Z})$ une classe telle que $2e + c_1(\xi)$ soit un élément de torsion de $H^2(M, \mathbb{Z})$. Alors il existe une collection non vide de courbes intégrales fermées γ_i du champ de Reeb, et des multiplicités entières $m_i \geq 1$, telles que $\sum m_i[\gamma_i] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ représente le dual de Poincaré de e.*

La preuve de ce théorème repose sur une étude détaillée du comportement des solutions des équations de Seiberg-Witten sur M vis-à-vis d'une certaine perturbation des équations. Taubes montre que, si une suite de solutions des équations perturbées satisfait certaines estimées lorsque le paramètre de perturbation tend vers l'infini, alors il existe une sous-suite pour laquelle le lieu d'annulation d'une des composantes de la solution converge vers une collection d'orbites fermées du champ de Reeb. Ce résultat [**18**, théorème 2.1] est l'analogue en dimension 3 d'un théorème précédemment établi par Taubes, qui relie les équations de Seiberg-Witten sur les variétés symplectiques de dimension 4 aux courbes pseudo-holomorphes [**15**] (voir également les articles [**14, 16**] et l'exposé de D. Kotschick au Séminaire Bourbaki [**8**]). Nous tenterons d'esquisser les grandes lignes de l'argument au §2.

Le reste de la preuve du théorème 1.3 consiste alors à établir l'existence de solutions satisfaisant les conditions requises. Ceci repose sur les travaux de Kronheimer et Mrowka concernant l'homologie de Seiberg-Witten-Floer [**9**], et sur des estimées précises concernant le flot spectral et l'énergie des solutions [**18**]. Les principaux ingrédients de la preuve seront présentés au §3.

La relation qu'établit Taubes entre solutions des équations de Seiberg-Witten et orbites du champ de Reeb permet en fait d'obtenir des résultats beaucoup plus précis que le théorème 1.3. Taubes a récemment annoncé [**20**] un isomorphisme entre l'homologie de Seiberg-Witten-Floer déjà mentionnée, qui est l'homologie d'un complexe engendré par les solutions des équations de Seiberg-Witten, et l'homologie de contact plongée définie par M. Hutchings [**4, 5, 6**], qui est l'homologie d'un complexe engendré par des collections d'orbites fermées du champ de Reeb.

THÉORÈME 1.4 (Taubes [**20**]). — *Soit M une variété compacte orientée de dimension 3, munie d'une forme de contact a générique. Alors la cohomologie de Seiberg-Witten-Floer de M est isomorphe à l'homologie de contact plongée de (M, a).*

L'énoncé de ce théorème sera clarifié au §4, où nous donnerons une brève description de l'homologie de contact plongée.

Entre autres applications, la relation entre cohomologie de Seiberg-Witten-Floer et homologie de contact plongée permet à Taubes de construire des orbites fermées du champ de Reeb représentant des classes d'homologie plus générales que celles garanties par le théorème 1.3 [**19**]. Elle permet également à Hutchings et Taubes [**7**] de généraliser la conjecture de Weinstein aux variétés de dimension 3 munies d'une « structure hamiltonienne stable », c'est-à-dire une 1-forme a et une 2-forme ω telles que $d\omega = 0$, $a \wedge \omega > 0$, et $\mathrm{Ker}(\omega) \subset \mathrm{Ker}(da)$ (les formes de contact correspondent au cas particulier $\omega = da$).

2. ÉQUATIONS DE SEIBERG-WITTEN ET ORBITES DU CHAMP DE REEB

2.1. Les équations de Seiberg-Witten en dimension 3

Soit M une variété compacte orientée de dimension 3, et soit g une métrique riemannienne sur M. Le fibré des repères orthonormés directs de (TM, g) est un fibré principal au-dessus de M, de groupe structural $SO(3)$. D'autre part, l'action du groupe unitaire $U(2)$ par rotations de la droite projective $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$ induit un morphisme surjectif $\pi : U(2) \to SO(3)$, dont le noyau est le centre de $U(2)$, isomorphe à S^1.

DÉFINITION 2.1. — *Une* structure spin^c *sur* M *est la donnée d'un relèvement (via la projection* π*) du fibré des repères en un fibré principal* P *de groupe structural* $U(2)$*. Le* fibré des spineurs $\mathbb{S} = P \times_{U(2)} \mathbb{C}^2$ *est le fibré vectoriel complexe de rang 2 associé à* P *via la représentation standard de* $U(2)$*.*

L'ensemble des structures spin^c sur M est un espace principal homogène pour $H^2(M, \mathbb{Z})$: étant donnés une structure spin^c et son fibré des spineurs $\mathbb{S}$, le fibré des spineurs pour une autre structure spin^c est de la forme $\mathbb{S} \otimes E$, où E est un fibré en droites complexes au-dessus de M.

Le fibré des spineurs est naturellement muni d'une métrique hermitienne, et d'une action du fibré cotangent T^*M par endomorphismes antihermitiens, appelée *multiplication de Clifford*, telle que $cl(u)\, cl(v) + cl(v)\, cl(u) = -2g(u,v)\, \mathrm{Id}$ pour tous $u, v \in T^*M$, et $cl(e_1)cl(e_2)cl(e_3) = \mathrm{Id}$ lorsque (e_1, e_2, e_3) est un repère orthonormé direct.

Une *connexion spin^c* sur le fibré des spineurs est une connexion hermitienne induite par une connexion sur le fibré principal P qui relève la connexion de Levi-Civita sur le fibré des repères. La multiplication de Clifford vérifie alors la règle de Leibniz. Une connexion spin^c est déterminée uniquement par la connexion hermitienne qu'elle induit sur le fibré déterminant $\det(\mathbb{S}) = \wedge^2\mathbb{S}$: une connexion hermitienne $\mathbb{A}$ sur $\det(\mathbb{S})$ et la connexion de Levi-Civita déterminent une connexion spin^c sur $\mathbb{S}$, que l'on notera $\nabla^{\mathbb{A}}$.

L'*opérateur de Dirac* associé à une connexion spin^c $\nabla^{\mathbb{A}}$ est l'opérateur elliptique autoadjoint du premier ordre $D_{\mathbb{A}} : \Gamma(\mathbb{S}) \to \Gamma(\mathbb{S})$ obtenu en composant la dérivation covariante $\nabla^{\mathbb{A}} : \Gamma(\mathbb{S}) \to \Gamma(T^*M \otimes \mathbb{S})$ et la multiplication de Clifford $T^*M \otimes \mathbb{S} \to \mathbb{S}$.

Les équations de Seiberg-Witten sont des équations aux dérivées partielles concernant une section $\psi \in \Gamma(\mathbb{S})$ du fibré des spineurs et une connexion hermitienne $\mathbb{A}$ sur le fibré en droites $\det(\mathbb{S})$. Elles peuvent s'écrire sous la forme :

$$(1) \qquad \begin{cases} *F_{\mathbb{A}} = \psi^* \tau \psi \\ D_{\mathbb{A}}\psi = 0 \end{cases}$$

où $F_{\mathbb{A}} \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ est la courbure de la connexion $\mathbb{A}$, et $\psi^*\tau\psi \in \Omega^1(M, i\mathbb{R})$ est le dual pour la métrique g de la forme linéaire $\langle \psi, cl(\cdot)\psi \rangle : T^*M \to i\mathbb{R}$. Comme cl induit un isomorphisme compatible avec la métrique entre 1-formes à valeurs imaginaires pures et endomorphismes hermitiens de trace nulle de $\mathbb{S}$, la forme $\psi^*\tau\psi$ est caractérisée par

$$(2) \qquad cl(\psi^*\tau\psi) = -2\psi^* \otimes \psi + |\psi|^2\, \mathrm{Id}.$$

Les équations (1) sont invariantes sous l'action du *groupe de jauge* $\mathcal{G} = C^\infty(M, S^1)$, qui agit par $u : (\mathbb{A}, \psi) \mapsto (\mathbb{A} - 2u^{-1}du, u\psi)$. L'*espace des modules* est le quotient de l'espace des solutions par l'action du groupe de jauge.

Comme on le verra au §3, il est important de distinguer entre solutions *irréductibles*, pour lesquelles ψ n'est pas identiquement nul et l'action du groupe de jauge est libre, et solutions *réductibles*, de la forme $(\mathbb{A}, 0)$ où $\mathbb{A}$ est une connexion plate sur $\det(\mathbb{S})$, sur lesquelles $\mathscr{G}$ agit avec stabilisateur S^1 (les transformations de jauge constantes).

Soit a une forme de contact sur une variété compacte orientée M de dimension 3. Comme $a \wedge da > 0$ est une forme volume, il est possible de choisir une métrique riemannienne g telle que $|a| = 1$ et $da = 2 * a$ en tout point de M. La distribution de contact $\xi = \mathrm{Ker}(a)$ est alors munie d'une structure complexe J telle que $g_{|\xi} = da(\cdot, J\cdot)$, ce qui en fait un fibré en droites complexes au-dessus de M.

Etant donnée une structure spin^c sur M, la multiplication de Clifford par a vérifie $cl(a)^2 = -\mathrm{Id}$, et les sous-espaces propres associés aux valeurs propres $\pm i$ décomposent le fibré des spineurs en la somme directe de deux fibrés en droites complexes. Il existe une structure spin^c dite *canonique*, pour laquelle le sous-fibré associé à la valeur propre $+i$ est topologiquement trivial, et le fibré des spineurs est $\mathbb{S}_0 = \underline{\mathbb{C}} \oplus \xi$; de plus il existe une connexion spin^c ∇^0 pour laquelle la section $(1, 0)$ du fibré $\mathbb{S}_0 = \underline{\mathbb{C}} \oplus \xi$ appartient au noyau de l'opérateur de Dirac. Pour une structure spin^c quelconque, le fibré des spineurs est de la forme

$$\mathbb{S} = \mathbb{S}_0 \otimes E = E \oplus (\xi \otimes E),$$

où E est un fibré en droites complexes sur M. Le fibré déterminant est alors $\det(\mathbb{S}) = \xi \otimes E^{\otimes 2}$, et la structure spin^c est déterminée de façon unique par la classe de Chern $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$. Une connexion spin^c sur $\mathbb{S}$ est déterminée par la donnée d'une connexion hermitienne A sur E et de la connexion ∇^0 sur $\mathbb{S}_0$. La connexion induite sur le fibré déterminant est alors de la forme $\mathbb{A} = \mathbb{A}_0 + 2A$, où $\mathbb{A}_0$ est la connexion induite par ∇^0 sur $\xi = \det(\mathbb{S}_0)$. On peut donc réécrire les équations de Seiberg-Witten en termes de la connexion A sur E.

Plus précisément, Taubes considère une modification des équations de Seiberg-Witten, qui dépend d'un paramètre réel $r \geq 1$:

Définition 2.2. — *Les équations de Seiberg-Witten perturbées par la forme de contact a s'écrivent sous la forme :*

$$\begin{cases} *F_A = r(\psi^* \tau \psi - ia) + *(i\, d\mu - \frac{1}{2} F_\xi) \\ D_A \psi = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Dans ces équations :

- *les inconnues sont une connexion hermitienne A sur E et une section ψ du fibré des spineurs ;*
- *les paramètres sont un nombre réel $r \geq 1$ et une 1-forme $\mu \in \Omega^1(M, \mathbb{R})$;*
- *$F_\xi \in \Omega^2(M, i\mathbb{R})$ est l'unique forme harmonique telle que $\frac{i}{2\pi}[F_\xi] = c_1(\xi)$;*
- *D_A est l'opérateur de Dirac associé à la connexion spin^c ∇^A induite par A.*

Le rôle de la 1-forme μ est purement technique : il s'agit d'assurer une propriété de transversalité pour les solutions par un choix générique de μ.

2.2. L'existence d'orbites fermées du champ de Reeb

Le principal ingrédient de la preuve de la conjecture de Weinstein est le résultat suivant, qui constitue le théorème 2.1 de [**18**] :

THÉORÈME 2.3 (Taubes). — *Etant donnée une structure spin^c sur M, soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tendant vers $+\infty$, et soit $(A_n,\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées* (3) *pour μ fixé et $r=r_n$. S'il existe des nombres réels δ et $\mathcal{E}$ (indépendants de n) tels que les deux conditions*

$$\sup_M(1-|\psi_n|)\geq\delta>0, \tag{4}$$

$$E(A_n)=i\int_M a\wedge F_{A_n}\leq\mathcal{E} \tag{5}$$

soient satisfaites, alors il existe une collection non vide de courbes intégrales fermées γ_i du champ de Reeb, et des multiplicités entières $m_i\geq 1$, telles que $\sum m_i[\gamma_i]\in H_1(M,\mathbb{Z})$ représente le dual de Poincaré de $c_1(E)$.

De façon plus précise, la décomposition $\mathbb{S}=E\oplus(\xi\otimes E)$ permet d'écrire $\psi_n=(\alpha_n,\beta_n)$. Le résultat est alors que, sous les hypothèses du théorème, les sous-ensembles $\alpha_n^{-1}(0)$ de M où la première composante de ψ_n s'annule admettent une sous-suite qui converge au sens des courants vers une collection d'orbites fermées du champ de Reeb.

La conjecture de Weinstein est alors ramenée au problème de l'existence de solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées vérifiant les conditions (4) et (5). La stratégie utilisée par Taubes pour construire ces solutions sera l'objet du §3 ci-dessous.

La preuve du théorème 2.3 repose sur des estimées *a priori* pour les solutions de (3) lorsque $r\to+\infty$. Dans ce qui suit, pour ne pas alourdir inutilement les notations, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté on utilisera la même notation ∇^A pour les dérivations covariantes induites par A et $\mathbb{A}_0$ sur les sous-fibrés E et $\xi\otimes E$ de $\mathbb{S}$.

LEMME 2.4 (Taubes [**18**], lemmes 2.2 et 2.3). — *Pour μ fixé, il existe une constante c_0 telle que, pour tout $r\geq 1$, si (A,ψ) est une solution de* (3) *alors les composantes*

(α, β) de ψ vérifient les estimées :

$$|\alpha| \leq 1 + \frac{c_0}{r} \tag{6}$$

$$|\beta|^2 \leq \frac{c_0}{r}(1 - |\alpha|^2) + \frac{c_0}{r^2} \tag{7}$$

$$|\nabla^A \alpha| \leq c_0 r^{1/2} \tag{8}$$

$$|\nabla^A \beta| \leq c_0. \tag{9}$$

Idée de démonstration. — D'après la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck,

$$D_A^2 \psi = (\nabla^A)^* \nabla^A \psi + \frac{R}{4}\psi - \frac{1}{2} cl(*F_{\mathbb{A}})\psi,$$

où R est la courbure scalaire de la métrique g, et $F_{\mathbb{A}} = F_{\mathbb{A}_0} + 2F_A$ est la courbure de la connexion $\mathbb{A}$ sur $\det(\mathbb{S})$. En utilisant (3) et (2), on obtient donc l'identité

$$\langle \psi, D_A^2 \psi \rangle = d^* d \frac{|\psi|^2}{2} + |\nabla^A \psi|^2 + \frac{R}{4}|\psi|^2 + r|\psi|^4 + ir\, \psi^* cl(a)\psi + \psi^* cl(*u)\psi = 0,$$

où $u = -i\, d\mu + \frac{1}{2}F_\xi - \frac{1}{2}F_{\mathbb{A}_0}$. Par conséquent,

$$d^* d \frac{|\psi|^2}{2} + r\left(|\psi|^2 - 1 - \frac{c}{r}\right)|\psi|^2 \leq 0$$

(où c est une constante qui borne $|\frac{R}{4}| + |u|$). Le principe du maximum implique alors que $|\psi|^2 \leq 1 + \frac{c}{r}$ en tout point, ce qui donne (6).

Si l'on considère séparément les composantes de l'identité $D_A^2 \psi = 0$ selon les sous-fibrés E et $\xi \otimes E$, on obtient des équations de la forme

$$(\nabla^A)^* \nabla^A \alpha - r(1 - |\alpha|^2 - |\beta|^2)\alpha + f_0(\nabla^A \alpha) + f_1(\nabla^A \beta) + f_2 \alpha + f_3 \beta = 0, \tag{10}$$

$$(\nabla^A)^* \nabla^A \beta + r(1 + |\alpha|^2 + |\beta|^2)\beta + f_0'(\nabla^A \alpha) + f_1'(\nabla^A \beta) + f_2' \alpha + f_3' \beta = 0, \tag{11}$$

où les quantités f_i et f_i' dépendent uniquement de la métrique g et de la forme u, et sont donc bornées indépendamment de r, α et β. En considérant une combinaison linéaire bien choisie des équations (10) et (11), Taubes en déduit une inégalité de la forme

$$d^* d\left(|\beta|^2 - \frac{c_1}{r}(1 - |\alpha|^2) - \frac{c_2}{r^2}\right) + r\left(|\beta|^2 - \frac{c_1}{r}(1 - |\alpha|^2) - \frac{c_2}{r^2}\right) \leq 0$$

où c_1 et c_2 sont des constantes indépendantes de r, α, β ; ceci implique (7) par le principe du maximum.

Une fois les bornes sur $|\alpha|$ et $|\beta|$ établies, des techniques standard d'estimation elliptique permettent de borner $|\nabla^A \psi|$ par un multiple de $r^{1/2}$, ce qui implique (8). Enfin, Taubes obtient la borne (9) en considérant l'équation (11) et en utilisant les estimées obtenues précédemment. □

La preuve du théorème 2.3 fait également appel à une comparaison avec les solutions des équations vortex :

Définition 2.5. — *Les* équations vortex *sur* $\mathbb{C}$ *sont les équations*

$$\begin{cases} *d\mathscr{A} = -i(1-|\sigma|^2), \\ \overline{\partial}_{\mathscr{A}}\sigma = 0, \end{cases} \tag{12}$$

où σ est une fonction sur $\mathbb{C}$ à valeurs complexes, $\mathscr{A}$ est une 1-forme sur $\mathbb{C}$ à valeurs imaginaires pures, et $\overline{\partial}_{\mathscr{A}} = \overline{\partial} + \mathscr{A}^{0,1}$.

La géométrie des équations (12) est bien comprise (voir par exemple le §2b de [**17**]) :

Lemme 2.6. — *Soit $(\mathscr{A}, \sigma)$ une solution de* (12) *telle que $\int_{\mathbb{C}}(1-|\sigma|^2) < \infty$. Alors :*

1. *$|\sigma| \leq 1$ en tout point de $\mathbb{C}$;*
2. *il existe un entier naturel m tel que $\int_{\mathbb{C}}(1-|\sigma|^2) = 2\pi m$;*
3. *les zéros de σ sont isolés, et sont au nombre de m (en comptant avec multiplicités) ;*
4. *$|\sigma|$ est proche de 1 partout sauf au voisinage des zéros : $1-|\sigma|$ est majoré par une quantité qui décroît exponentiellement avec la distance à $\sigma^{-1}(0)$.*

De plus, l'espace des modules $\mathfrak{C}_m$ des solutions d'énergie $\int_{\mathbb{C}}(1-|\sigma|^2) = 2\pi m$ s'identifie naturellement avec le produit symétrique $\mathrm{Sym}^m(\mathbb{C})$*, via $\sigma \mapsto \sigma^{-1}(0)$.*

Nous pouvons maintenant esquisser la preuve du théorème 2.3. Soit (A, ψ) une solution de l'équation de Seiberg-Witten perturbée (3). L'équation de Dirac $D_A\psi = 0$ peut s'écrire en termes des composantes (α, β) de ψ sous la forme suivante :

$$D_A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\nabla_v^A \alpha + 2i\partial_\xi^A \beta \\ -i\nabla_v^A \beta + 2i\overline{\partial}_\xi^A \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_0\alpha + f_1\beta \\ f_0'\alpha + f_1'\beta \end{pmatrix} = 0, \tag{13}$$

où les quantités f_i et f_i' sont déterminées par la métrique et uniformément bornées, ∇_v^A est la dérivation covariante dans la direction du champ de Reeb v, et ∂_ξ^A et $\overline{\partial}_\xi^A$ sont respectivement les parties $\mathbb{C}$-linéaire et $\mathbb{C}$-antilinéaire de la dérivation covariante dans la direction des plans de contact $\xi = \mathrm{Ker}(a)$. Plus précisément, la restriction de $\nabla^A\alpha$ aux plans de contact définit un homomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $\nabla_\xi^A\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\xi, E)$, dont la partie $\mathbb{C}$-antilinéaire pour la structure complexe J sur ξ est une section de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\overline{\xi}, E) \cong \xi \otimes E$, que l'on note $\overline{\partial}_\xi^A\alpha$. La section $\partial_\xi^A\beta$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\xi, \xi \otimes E) \cong E$ est définie de façon analogue.

L'équation (13) et les estimées du lemme 2.4 impliquent l'existence d'une constante c_0' indépendante de r telle que

$$|\nabla_v^A\alpha| \leq c_0' \quad \text{et} \quad |\overline{\partial}_\xi^A\alpha| \leq c_0'. \tag{14}$$

D'autre part, on déduit de (3) que

$$(15)\quad ia \wedge F_A = r(|\beta|^2 - |\alpha|^2 + 1)\, vol_g + ia \wedge (i\, d\mu - \tfrac{1}{2} F_\xi) = r(1 - |\alpha|^2)\, vol_g + \mathcal{O}(1).$$

Ces estimées impliquent que, dans la direction des plans de contact, pour r suffisamment grand les solutions de (3) peuvent être approximées par des solutions des équations vortex (12) après une homothétie d'un facteur $r^{1/2}$.

Plus précisément, soit $p \in M$ un point où $|\alpha| \leq 1 - \frac{\delta}{2}$, où $\delta > 0$ est la constante qui apparaît dans l'énoncé du théorème 2.3. L'hypothèse (4) et l'inégalité (7) impliquent l'existence d'un tel point lorsque (A, ψ) est l'une des solutions (A_n, ψ_n) considérées dans l'énoncé du théorème 2.3 et r est suffisamment grand.

On identifie un voisinage de p (centré sur la courbe intégrale du champ de Reeb passant par p) avec un cylindre de la forme $D \times I$, où D est un disque muni de la coordonnée complexe $x + iy$ et I est un intervalle muni de la coordonnée réelle z, de telle sorte que le champ de Reeb s'identifie à $\partial/\partial z$, le point p correspond à l'origine, et les disques $D \times \{z\}$ sont tangents à la distribution de contact à l'origine (de telles coordonnées seront dites *adaptées*). Taubes montre alors que, pour z fixé, si l'on munit $D \times \{z\}$ de la coordonnée complexe $r^{1/2}(x + iy)$, la restriction de (A, α) peut être approximée au voisinage de l'origine par une solution de (12) [**18**, lemme 6.1].

Soit $D_r \subset D$ le disque de rayon $cr^{-1/2}$, avec $c > 0$ une constante bien choisie, et soit

$$e(z) = r \int_{D_r \times \{z\}} (1 - |\alpha|^2).$$

La borne uniforme sur $|\overline{\partial}^A_\xi \alpha|$ et l'inégalité $|\alpha(p)| \leq 1 - \frac{\delta}{2}$ permettent de montrer que $e(0)$ est minoré par une constante $\epsilon > 0$ indépendante de r. D'autre part, la borne uniforme sur $|\nabla^A_v \alpha|$ donne une borne uniforme sur de/dz. Il existe donc une constante ℓ indépendante de r telle que $e(z) \geq \epsilon/2$ pour tout $z \in [0, \ell]$. En utilisant (15), on en déduit que la contribution du cylindre $C(p) = D_r \times [0, \ell]$ (un voisinage de rayon $cr^{-1/2}$ et de longueur ℓ de la courbe intégrale du champ de Reeb passant par p) à l'énergie $E(A) = i \int a \wedge F_A$ est minorée par une constante indépendante de r.

D'autre part, la borne $e(\ell) \geq \epsilon/2$ implique (en comparant $\alpha_{|D \times \{\ell\}}$ à une solution de (12) et en utilisant les propriétés de ces solutions) l'existence d'un point p' de $D_r \times \{\ell\}$ où $|\alpha| \leq 1 - \frac{\delta}{2}$. Il est donc possible de répéter la construction précédente en partant du point p', et ainsi de suite : ceci donne une collection de cylindres $C(p_i)$ « empilés » le long d'une courbe intégrale du champ de Reeb (avec un décalage d'au plus $cr^{-1/2}$ entre deux cylindres consécutifs).

Comme la contribution de chaque cylindre $C(p_i)$ à l'énergie $E(A)$ est minorée de façon indépendante de r, l'hypothèse $E(A) \leq \mathcal{E}$ permet de majorer le nombre de cylindres disjoints par une constante N indépendante de r. Ceci implique que la courbe intégrale γ du champ de Reeb issue de p revient dans un voisinage de taille

$\mathcal{O}(r^{-1/2})$ d'elle-même en un temps borné par $N\ell$. On en déduit également que $\alpha^{-1}(0)$ est contenu dans un voisinage $\mathcal{V} = \mathcal{V}(A,\psi)$ de taille $\mathcal{O}(r^{-1/2})$ d'une collection de telles courbes intégrales « presque fermées » du champ de Reeb, de longueur totale bornée par $N\ell$.

Considérons maintenant la suite de solutions (A_n, ψ_n) qui apparaît dans l'énoncé du théorème 1.3 : la compacité de M et l'existence d'une borne indépendante de n sur la taille des voisinages $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}(A_n, \psi_n)$ permettent de prouver l'existence d'une sous-suite pour laquelle $\mathcal{V}_n \supset \alpha_n^{-1}(0)$ converge vers une collection d'orbites fermées du champ de Reeb. Ceci achève la preuve du théorème 2.3.

3. HOMOLOGIE DE SEIBERG-WITTEN-FLOER ET ESTIMÉES

3.1. L'homologie de Seiberg-Witten-Floer, d'après Kronheimer-Mrowka [9]

En première approximation, l'homologie de Seiberg-Witten-Floer est l'homologie de Morse ($\mathcal{G}$-équivariante) d'une fonctionnelle dont les points critiques sont les solutions des équations de Seiberg-Witten. Plus précisément, soit $\mathcal{C} = \mathrm{Conn}(\det(\mathbb{S})) \times \Gamma(\mathbb{S})$ l'espace des configurations pour les équations de Seiberg-Witten, et soit $\mathbb{A}_{\mathrm{ref}}$ une connexion hermitienne de référence sur $\det(\mathbb{S})$. On pose

$$\mathfrak{a}_0(\mathbb{A},\psi) = -\frac{1}{8}\int_M (\mathbb{A}-\mathbb{A}_{\mathrm{ref}}) \wedge (F_{\mathbb{A}} + F_{\mathbb{A}_{\mathrm{ref}}}) + \frac{1}{2}\int_M \psi^* D_{\mathbb{A}}\psi.$$

Les points critiques de $\mathfrak{a}_0$ sont exactement les solutions de (1). De plus, lorsque $c_1(\det(\mathbb{S}))$ est une classe de torsion, la fonctionnelle $\mathfrak{a}_0$ est invariante sous l'action du groupe de jauge $\mathcal{G}$; dans le cas général, $\mathfrak{a}_0$ n'est invariante qu'à multiples de $2\pi^2$ près.

Le hessien de $\mathfrak{a}_0$ en un point critique $(\mathbb{A},\psi)$ est décrit par l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}_{(\mathbb{A},\psi)} : \Omega^1(M, i\mathbb{R}) \oplus \Gamma(\mathbb{S}) \to \Omega^1(M, i\mathbb{R}) \oplus \Gamma(\mathbb{S})$ obtenu en linéarisant les équations (1). Plus précisément, à cause de l'invariance dans la direction des orbites de $\mathcal{G}$, on considère la restriction de $\mathcal{L}_{(\mathbb{A},\psi)}$ à $\mathrm{Ker}(d^*) \oplus \Gamma(\mathbb{S})$. Le spectre de cet opérateur est discret et non borné ; si l'on fixe un opérateur de référence $\mathcal{L}_0$, le flot spectral d'une famille d'opérateurs reliant $\mathcal{L}_0$ à $\mathcal{L}_{(\mathbb{A},\psi)}$ permet de définir l'indice d'un point critique non dégénéré de $\mathfrak{a}_0$: on pose $\deg(\mathbb{A},\psi) = -sf(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_{(\mathbb{A},\psi)})$.

Lorsque $c_1(\det(\mathbb{S}))$ est une classe de torsion, la situation est compliquée par la présence de solutions réductibles $(\mathbb{A}, 0)$, sur lesquelles le groupe de jauge agit avec stabilisateur S^1 (les transformations de jauge constantes). La solution utilisée par Kronheimer et Mrowka pour définir l'homologie de Seiberg-Witten-Floer consiste à modifier l'espace des configurations par un éclatement réel le long des configurations réductibles [9]. Concrètement, il s'agit de remplacer $\mathscr{C}/\mathscr{G}$ par $\mathscr{C}^\sigma/\mathscr{G}$, où

$$\mathscr{C}^\sigma = \{(\mathbb{A}, \phi, s) \in \mathrm{Conn}(\det(\mathbb{S})) \times \Gamma(\mathbb{S}) \times \mathbb{R}_{\geq 0},\ \|\phi\|_{L^2} = 1\}.$$

La projection $\pi^\sigma : \mathscr{C}^\sigma \to \mathscr{C}$ définie par $\pi^\sigma(\mathbb{A}, \phi, s) = (\mathbb{A}, s\phi)$ permet de relever l'action de $\mathscr{G}$ sur $\mathscr{C}$ en une action libre sur $\mathscr{C}^\sigma$.

La fonctionnelle $\mathfrak{a}_0$ se relève en une fonctionnelle $\mathfrak{a}_0^\sigma$ sur $\mathscr{C}^\sigma$, dont les points critiques sont de deux types : d'une part, les solutions irréductibles de (1), et d'autre part, des points critiques réductibles où $\mathbb{A}$ est une connexion plate, ϕ est un vecteur propre de $D_\mathbb{A}$, et $s = 0$. De plus, le gradient de $\mathfrak{a}_0^\sigma$ est tangent au bord ($s = 0$) de $\mathscr{C}^\sigma/\mathscr{G}$.

Étant donnée une fonction de Morse f sur une variété à bord B, telle que le gradient de f soit tangent à ∂B et $f_{|\partial B}$ soit également une fonction de Morse, Kronheimer et Mrowka définissent trois versions du complexe de Morse, $\check{C}_*(f)$, $\hat{C}_*(f)$, et $\bar{C}_*(f)$. Ces complexes sont construits à partir de C_*^0 engendré par les points critiques de f dans l'intérieur de B, C_*^s engendré par les points critiques *stables* de $f_{|\partial B}$, c'est-à-dire ceux où le hessien de f est positif dans la direction normale à ∂B, et C_*^u engendré par les points critiques *instables* de $f_{|\partial B}$, c'est-à-dire ceux où le hessien est négatif dans la direction normale au bord (l'indice de ces points critiques varie donc de 1 selon qu'on les considère comme points critiques de f ou de $f_{|\partial B}$). Le complexe $\bar{C}_*(f) = (C_*^s \oplus C_{*+1}^u, \bar{\partial})$ est alors le complexe de Morse de $f_{|\partial B}$, tandis que $\check{C}_*(f) = (C_*^0 \oplus C_*^s, \check{\partial})$ et $\hat{C}_*(f) = (C_*^0 \oplus C_*^u, \hat{\partial})$, où les différentielles $\check{\partial}$ et $\bar{\partial}$ sont définies par

$$\check{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_0^0 & \partial_0^u \bar{\partial}_u^s \\ \partial_s^0 & \partial_s^s + \partial_s^u \bar{\partial}_u^s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{\partial} = \begin{pmatrix} \partial_0^0 & \partial_0^u \\ \bar{\partial}_u^s \partial_s^0 & \bar{\partial}_u^u + \bar{\partial}_u^s \partial_s^u \end{pmatrix}$$

où, pour $i, j \in \{0, s, u\}$, $\partial_j^i : C^i \to C^j$ compte les trajectoires du gradient de f contenues dans l'intérieur de B tandis que $\bar{\partial}_j^i : C^i \to C^j$ compte celles contenues dans ∂B. Les homologies des trois complexes sont reliées par une suite exacte :

$$\cdots \to \bar{H}_*(f) \to \hat{H}_*(f) \to \check{H}_*(f) \to \bar{H}_{*-1}(f) \to \cdots$$

qui coïncide avec la suite exacte pour l'homologie relative de $(B, \partial B)$.

En traitant de façon similaire les points critiques de $\mathfrak{a}_0^\sigma$ sur $\mathscr{C}^\sigma/\mathscr{G}$, Kronheimer et Mrowka construisent trois variantes de l'homologie de Seiberg-Witten-Floer pour une variété M munie d'une structure spin^c $\mathfrak{s}$, notées $\overline{HM}_*(M, \mathfrak{s})$, $\widecheck{HM}_*(M, \mathfrak{s})$ et $\widehat{HM}_*(M, \mathfrak{s})$. Dans le cas où $c_1(\det(\mathbb{S}))$ est une classe de torsion, ces groupes sont $\mathbb{Z}$-gradués ; sinon, ils sont $\mathbb{Z}/N$-gradués, où N est la divisibilité de $c_1(\det(\mathbb{S}))$. On a une suite exacte

$$\cdots \to \overline{HM}_*(M, \mathfrak{s}) \to \widehat{HM}_*(M, \mathfrak{s}) \to \widecheck{HM}_*(M, \mathfrak{s}) \to \overline{HM}_{*-1}(M, \mathfrak{s}) \to \cdots .$$

Le résultat suivant joue un rôle crucial dans la preuve du théorème 1.3 :

THÉORÈME 3.1 (Kronheimer-Mrowka [**9**], corollaire 35.1.4)
Pour toute variété M et toute structure spin^c $\mathfrak{s}$ telle que $c_1(\det(\mathbb{S}))$ *soit une classe de torsion, l'ensemble des degrés $d \in \mathbb{Z}$ pour lesquels $\widehat{HM}_d(M,\mathfrak{s}) \neq 0$ est infini et n'admet pas de borne inférieure.*

Ce résultat découle d'un théorème de structure pour $\overline{HM}_*(M,\mathfrak{s})$ [**9**, théorème 35.1.1] qui repose sur une analyse détaillée de la contribution des points critiques réductibles de $\mathfrak{a}_0^\sigma$, c'est-à-dire les points critiques de la forme $(\mathbb{A},\phi,0)$, où $\mathbb{A}$ est une connexion plate sur $\det(\mathbb{S})$ (dont l'existence est garantie par l'hypothèse sur la classe de Chern) et ϕ est un vecteur propre de l'opérateur de Dirac $D_{\mathbb{A}}$. (Les propriétés de compacité des équations de Seiberg-Witten impliquent que les points critiques irréductibles sont en nombre fini et n'affectent donc pas le résultat.)

3.2. Perturbation de contact et flot spectral

En présence d'une forme de contact a, les équations de Seiberg-Witten perturbées considérées par Taubes sont également les équations des points critiques d'une fonctionnelle $\mathfrak{a}$ sur l'espace des configurations. Comme au §2, on identifie l'espace des connexions spin^c avec l'espace des connexions hermitiennes sur le fibré en droites E ; l'espace des configurations est donc $\mathscr{C} = \mathrm{Conn}(E) \times \Gamma(\mathbb{S})$. On se restreint au cas où $c_1(\det(\mathbb{S})) = 2c_1(E) + c_1(\xi)$ est une classe de torsion ; il existe alors une connexion hermitienne A_E sur E dont la courbure vérifie $F_{A_E} = -\frac{1}{2}F_\xi$.

DÉFINITION 3.2. — *Pour un nombre réel $r \geq 1$ et une 1-forme $\mu \in \Omega^1(M,\mathbb{R})$ fixés, on associe à $(A,\psi) \in \mathrm{Conn}(E) \times \Gamma(\mathbb{S})$ les quantités suivantes :*

$$E(A) = i\int_M a \wedge F_A, \tag{16}$$

$$\mathfrak{cs}(A) = -\int_M (A - A_E) \wedge (F_A - F_{A_E}), \tag{17}$$

$$\mathfrak{a}(A,\psi) = \frac{1}{2}(\mathfrak{cs}(A) - rE(A)) + i\int_M \mu \wedge F_A + r\int_M \psi^* D_A \psi. \tag{18}$$

L'homologie de Seiberg-Witten-Floer peut être construite en utilisant la fonctionnelle $\mathfrak{a}$, dont les points critiques sont les solutions de (3), au lieu de $\mathfrak{a}_0$. L'invariance de la théorie vis-à-vis des perturbations implique que le théorème 3.1 reste valide pour la version perturbée de l'homologie de Seiberg-Witten-Floer.

Le théorème 3.1 implique l'existence de solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées (3). En fait, il existe toujours des solutions réductibles, de la forme $(A,0)$ où $A = A_E - i\frac{r}{2}a + i\mu + i\theta$ avec $\theta \in \Omega^1(M,\mathbb{R})$ une 1-forme fermée. Toutefois ces solutions ne permettent pas de construire des orbites fermées du champ de Reeb ; en fait, elles ont une énergie $E(A) = \frac{r}{2}\int_M a \wedge da + \mathscr{O}(1) = r\,\mathrm{vol}(M,g) + \mathscr{O}(1)$ qui tend vers l'infini lorsque $r \to +\infty$, ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème 2.3.

Il est donc nécessaire de prouver l'existence de solutions *irréductibles.* Taubes accomplit ceci en estimant le flot spectral d'une famille d'opérateurs de Dirac lorsque la connexion spin^c varie d'une connexion de référence à la connexion A considérée ; ceci lui permet d'estimer le flot spectral pour la linéarisation des équations (3), ce qui détermine le degré d'une solution donnée de (3) dans le complexe de Seiberg-Witten-Floer.

PROPOSITION 3.3 (Taubes [**18**], proposition 5.1). — *Pour $\mu \in \Omega^1(M,\mathbb{R})$ fixé, il existe une constante κ telle que, pour tout $r \geq 1$, le degré du générateur du complexe de Seiberg-Witten-Floer correspondant à une solution non dégénérée (A,ψ) de (3) vérifie*

$$\left|\deg(A,\psi) + \tfrac{1}{4\pi^2}\mathfrak{cs}(A)\right| \leq \kappa r^{31/16}. \tag{19}$$

Ce résultat implique en particulier que le degré des solutions réductibles (pour lesquelles $\mathfrak{cs}$ est de l'ordre de r^2) tend vers $-\infty$ lorsque $r \to \infty$; pour r suffisamment grand, les représentants d'une classe d'homologie de Seiberg-Witten-Floer de degré fixé sont donc toujours des solutions *irréductibles.*

Le point clé de la preuve consiste à montrer que le flot spectral pour une famille d'opérateurs de Dirac qui relie D_{A_E} à D_A est de l'ordre de $\frac{1}{8\pi^2}\mathfrak{cs}(A)$ [**18**, proposition 5.5]. L'argument repose sur une analyse détaillée du noyau de la chaleur.

Nous nous contenterons d'illustrer ce résultat en considérant le cas particulier de la famille de connexions $A = A_E - ira/2$. Soit $\psi = (\alpha,\beta)$ un vecteur propre de D_A, associé à une valeur propre λ telle que $|\lambda| \ll r^{1/2}$, et normalisé de telle sorte que $\|\psi\|_{L^2} = 1$.

Comme dans la preuve du lemme 2.4, la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck permet d'écrire l'identité $D_A^2\psi = \lambda^2\psi$ sous la forme

$$(\nabla^A)^*\nabla^A\alpha - r\alpha + f_0(\nabla^A\alpha) + f_1(\nabla^A\beta) + f_2\alpha + f_3\beta = \lambda^2\alpha,$$
$$(\nabla^A)^*\nabla^A\beta + r\beta + f_0'(\nabla^A\alpha) + f_1'(\nabla^A\beta) + f_2'\alpha + f_3'\beta = \lambda^2\beta,$$

où f_i et f_i' sont bornés indépendamment de r et ψ. Comme $|\lambda| \ll r^{1/2}$, la seconde équation permet de montrer que $\|\beta\|_{L^2}$ est borné par un multiple constant de $r^{-1/2}$, tandis que $\|\alpha\|_{L^2}$ est proche de 1. Si l'on considère maintenant ψ et λ comme des fonctions de r (que l'on suppose localement lisses), en dérivant l'égalité $D_A\psi = \lambda\psi$ par rapport à r on obtient :

$$-\frac{i}{4}cl(a)\psi + D_A\dot{\psi} = \dot{\lambda}\psi + \lambda\dot{\psi}. \tag{20}$$

D'autre part, la normalisation de ψ implique que $\langle\psi,\dot{\psi}\rangle_{L^2} = 0$. De même, $\langle\psi, D_A\dot{\psi}\rangle_{L^2} = \langle D_A\psi,\dot{\psi}\rangle_{L^2} = \lambda\langle\psi,\dot{\psi}\rangle_{L^2} = 0$. En prenant le produit scalaire de

(20) avec ψ, il vient donc

$$\dot{\lambda} = -\frac{i}{4}\int_M \psi^* cl(a)\psi = \frac{1}{4}\int_M |\alpha|^2 - |\beta|^2 \approx \frac{1}{4}.$$

Pour Λ fixé, la variation du flot spectral entre $r-\Lambda$ et $r+\Lambda$ est donc approximativement le nombre de valeurs propres de D_A telles que $|\lambda| \leq \Lambda/4$. L'estimée sur le flot spectral découle alors d'une estimation du nombre de telles valeurs propres par une quantité de l'ordre de $r\,\mathrm{vol}(M,g)\,\Lambda$, qui peut s'expliquer en utilisant (13) pour comparer l'équation de Dirac à l'équation $\overline{\partial}^A_\xi \alpha = 0$. Comme la courbure de la connexion A dans la direction des plans de contact est de l'ordre de $-i\frac{r}{2}\,da$, on peut construire des solutions approchées de l'équation de Dirac dont l'expression en coordonnées locales adaptées est de la forme $\exp(-\frac{r}{8}(|x|^2+|y|^2))\,h(x+iy)\,\chi(x+iy,z)$, où h est une fonction holomorphe et χ est une fonction *cut-off* qui s'annule à une distance de l'ordre de $r^{-1/2}$ dans la direction des plans de contact et de l'ordre de Λ^{-1} dans la direction du champ de Reeb. La dimension de l'espace des sections ainsi construites est de l'ordre de $r\,\mathrm{vol}(M)\,\Lambda$.

3.3. Estimation des fonctionnelles $\mathfrak{a}$, E et $\mathfrak{cs}$

La proposition 3.3 permet de contrôler la fonctionnelle $\mathfrak{cs}(A)$ pour une solution de (3) représentant une classe d'homologie de degré donné en homologie de Seiberg-Witten-Floer. Toutefois, le théorème 2.3 requiert un contrôle sur $E(A)$; pour ce faire, Taubes prouve le résultat suivant (cf. [**18**, corollaire 4.7]) :

PROPOSITION 3.4 (Taubes). — *Étant donnée une structure spin^c telle que $c_1(\det(\mathbb{S}))$ soit une classe de torsion, soit $r \mapsto (A(r),\psi(r))$ une famille de solutions de* (3) *dont la dépendance en r est différentiable sauf pour un ensemble discret de valeurs de r pour lesquelles il peut y avoir des discontinuités. Si $\mathfrak{a}(r) = \mathfrak{a}(A(r),\psi(r))$ est une fonction continue de r, alors il existe une suite $r_n \to +\infty$ telle que $A_n = A(r_n)$ possède l'une des deux propriétés (mutuellement exclusives) suivantes :*

1. *il existe une constante $\epsilon > 0$ telle que $E(A_n) \geq \epsilon r_n$ et $\mathfrak{cs}(A_n) \geq \epsilon r_n^2$,*
2. *il existe une constante $\mathcal{E}$ telle que $E(A_n) \leq \mathcal{E}$ pour tout n.*

La preuve fait appel au résultat technique suivant (cf. [**18**, lemme 2.4]) :

LEMME 3.5 (Taubes). — *Il existe une constante κ telle que, si (A,ψ) est une solution de* (3)*, alors il existe une transformation de jauge $u : M \to S^1$ telle que*

$$|(A - u^{-1}du) - A_E| \leq \kappa r^{2/3}(|E(A)|+1)^{1/3} \tag{21}$$

et

$$|\mathfrak{cs}(A - u^{-1}du)| \leq \kappa r^{2/3}(|E(A)|+1)^{4/3}. \tag{22}$$

Idée de démonstration. — Le choix de la transformation de jauge u permet d'assurer que la 1-forme $\hat{a} = A - u^{-1}du - A_E$ vérifie $d^*\hat{a} = 0$; on peut alors décomposer $\hat{a}$ en la somme d'une forme harmonique h et d'une forme co-exacte b. De plus, quitte à modifier u par une transformation de jauge harmonique, on peut borner h par une constante dépendant uniquement de la métrique. Par ailleurs, $b = d^*G(F_A - F_{A_E})$, où G est l'opérateur de Green qui permet d'inverser le laplacien sur les 2-formes. Les estimées standard sur la fonction de Green impliquent alors une borne de la forme

$$|\hat{a}(x)| \leq c\left(\int_M \frac{|F_A|}{\mathrm{dist}(x,.)^2} + 1\right)$$

pour tout $x \in M$. Pour $\rho > 0$ fixé, l'intégrale sur le complémentaire de la boule de rayon ρ est bornée par $\rho^{-2}\int_M |F_A|$. L'équation (3) et les estimées du lemme 2.4 impliquent que $|F_A| = r(1 - |\alpha|^2) + \mathscr{O}(1)$; en utilisant (15), on a donc $\int_M |F_A| = E(A) + \mathscr{O}(1)$. D'autre part, comme $|F_A| = \mathscr{O}(r)$, l'intégrale sur la boule de rayon ρ centrée en x est bornée par un multiple de $r\rho$. On a donc une borne de la forme

$$|\hat{a}(x)| \leq c\rho^{-2}(E(A) + c_1) + c_2\, r\rho + c,$$

pour tout $\rho > 0$.

En choisissant ρ de façon optimale, c'est-à-dire $\rho = r^{-1/3}(E(A)+c_1)^{1/3}$, on obtient la borne voulue sur $|\hat{a}|$. La borne sur $\mathfrak{cs}(A - u^{-1}du) = -\int_M \hat{a} \wedge (F_A - F_{A_E})$ se déduit alors de la borne sur $|\hat{a}|$ et de l'estimée $\int_M |F_A| = E(A) + \mathscr{O}(1)$. □

Démonstration de la proposition 3.4. — Pour des raisons de simplicité, on se limitera au cas $\mu = 0$. Si l'on pose $\mathfrak{cs}(r) = \mathfrak{cs}(A(r))$ et $E(r) = E(A(r))$, la définition de $\mathfrak{a}$ implique alors que

$$\mathfrak{a}(r) = \frac{1}{2}(\mathfrak{cs}(r) - rE(r)).$$

En utilisant l'invariance de $\mathfrak{cs}$ par transformations de jauge lorsque $c_1(\det(\mathbb{S}))$ est une classe de torsion, le lemme 3.5 donne une borne sur $\mathfrak{cs}(r)$. Comme la proposition est clairement satisfaite lorsque $E(r) \leq 1$ pour une infinité de valeurs de r, on peut se restreindre au cas où $E(r) \geq 1$ pour $r \gg 1$, ce qui permet de réécrire (22) sous la forme

$$|\mathfrak{cs}(r)| \leq c_0 r^{2/3} E(r)^{4/3}. \tag{23}$$

On considère deux cas :

Cas 1. Supposons pour commencer qu'il existe $\eta > 0$ tel que $|\mathfrak{cs}(r)| \geq \eta r E(r)$ pour une infinité de valeurs de r. Alors, pour ces valeurs de r, on déduit de (23) que

$$r^{2/3}E(r)^{4/3} \geq \frac{1}{c_0}|\mathfrak{cs}(r)| \geq \frac{\eta}{c_0} rE(r),$$

d'où $E(r)^{1/3} \geq (\eta/c_0)\, r^{1/3}$, soit $E(r) \geq (\eta/c_0)^3\, r$, et donc $|\mathfrak{cs}(r)| \geq \eta(\eta/c_0)^3\, r^2$. On est donc dans le premier cas de l'alternative proposée par l'énoncé.

Cas 2. Sinon, il existe $\eta < \frac{1}{5}$ et r_0 tels que $|\mathfrak{cs}(r)| \leq \eta r E(r)$ pour tout $r \geq r_0$. Soit

$$\mathcal{V}(r) = -\frac{2\mathfrak{a}(r)}{r} = E(r) - \frac{1}{r}\mathfrak{cs}(r).$$

Pour $r \geq r_0$, on a $\mathcal{V}(r) \geq (1-\eta)E(r)$, et donc

$$|\mathfrak{cs}(r)| \leq \epsilon r \mathcal{V}(r) \tag{24}$$

où $\epsilon = \frac{\eta}{1-\eta} < \frac{1}{4}$. Lorsque $r \mapsto (A(r), \psi(r))$ est différentiable, le fait que $(A(r), \psi(r))$ est un point critique de $\mathfrak{a}$ implique que

$$\frac{d\mathfrak{a}(r)}{dr} = d\mathfrak{a}\left(\frac{dA(r)}{dr}, \frac{d\psi(r)}{dr}\right) + \frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial r}(A(r), \psi(r)) = \frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial r}(A(r), \psi(r)),$$

où

$$\frac{\partial\mathfrak{a}}{\partial r}(A, \psi) = -\frac{1}{2}E(A) + \int_M \psi^* D_A \psi = -\frac{1}{2}E(A).$$

On a donc

$$\frac{d\mathcal{V}}{dr} = \frac{2\mathfrak{a}}{r^2} - \frac{2}{r}\frac{d\mathfrak{a}}{dr} = \left(\frac{\mathfrak{cs}}{r^2} - \frac{E}{r}\right) + \frac{E}{r} = \frac{\mathfrak{cs}}{r^2}. \tag{25}$$

En combinant (25) et (24) on obtient l'inégalité $d\mathcal{V}/dr \leq \epsilon\mathcal{V}/r$, d'où l'on déduit par intégration une borne de la forme $|\mathcal{V}(r)| \leq C\, r^\epsilon$, et donc $E(r) \leq \frac{1}{1-\eta}\mathcal{V}(r) \leq C' r^\epsilon$.

La borne (23) implique alors que $|\mathfrak{cs}(r)| \leq c_0 C'^{4/3}\, r^{(2+4\epsilon)/3}$; on déduit de (25) que

$$\left|\frac{d\mathcal{V}}{dr}\right| = \frac{|\mathfrak{cs}|}{r^2} \leq \frac{c_0 C'^{\frac{4}{3}}}{r^{\frac{4}{3}(1-\epsilon)}}.$$

Puisque $\frac{4}{3}(1-\epsilon) > 1$, cette borne implique que $\mathcal{V}$ est une fonction bornée de r, et donc $E(r) \leq \frac{1}{1-\eta}\mathcal{V}(r)$ est également bornée. □

3.4. La preuve du théorème 1.3

La preuve du théorème 1.3 combine les ingrédients qui ont été introduits dans les sections précédentes. Elle peut être divisée en cinq étapes.

Étape 1. — Soit $\mathfrak{s}$ la structure spin^c sur M telle que $c_1(E) = e$. Le théorème 3.1 garantit l'existence d'une infinité de degrés $d \in \mathbb{Z}$ tels que $\widehat{HM}_d(M, \mathfrak{s}) \neq 0$. De plus, la proposition 3.3 garantit que, pour d fixé, il existe $r_0 = r_0(d)$ tel que, pour tout $r \geq r_0$, les solutions réductibles de (3) sont d'indice strictement inférieur à d.

Étape 2. — Soit $\theta \neq 0$ une classe d'homologie de Seiberg-Witten-Floer de degré d fixé ; si $c_1(E) = 0$, on impose $d \neq 0$ (la raison de cette condition sera expliquée à l'étape 4). Il n'est en général pas possible d'associer à θ une famille différentiable de solutions de (3). Le problème est le même qu'en théorie de Morse : lorsque r varie, il peut y avoir des annulations entre points critiques de $\mathfrak{a}$. Toutefois, Taubes montre qu'il existe une famille de solutions $(A(r), \psi(r))$ qui est différentiable en dehors d'un ensemble discret de discontinuités, et telle que les valeurs critiques de $\mathfrak{a}$ correspondant à ces solutions dépendent continûment de r. L'idée est la suivante : pour r et μ fixés, étant donné un cycle η qui représente la classe θ, de la forme $\eta = \sum_i n_i\, p_i$ où p_i sont des points critiques de $\mathfrak{a}$, on pose $\hat{\mathfrak{a}}(\eta) = \max_i \mathfrak{a}(p_i)$. On définit alors

$$\mathfrak{a}_\theta(r) = \min\{\hat{\mathfrak{a}}(\eta) : \eta \text{ représente } \theta\}.$$

Taubes montre que, pour μ générique, $\mathfrak{a}_\theta$ est une fonction continue de r pour $r \geq r_0(d)$ [**18**, proposition 4.2]. Plus précisément, en choisissant μ de façon générique on peut s'assurer que, en dehors d'un ensemble discret de valeurs de r, les points critiques de $\mathfrak{a}$ qui nous intéressent sont non dégénérés, varient de façon différentiable avec r, et correspondent à des valeurs critiques distinctes. Comme en théorie de Cerf, on doit considérer divers types d'accidents (apparition ou disparition de points critiques, saut dans la différentielle en présence d'une trajectoire d'indice 0, égalité entre deux valeurs critiques) ; Taubes montre que la continuité de $\mathfrak{a}_\theta$ est préservée dans tous les cas. L'argument est en fait similaire à celui qui permet la construction d'invariants spectraux en théorie de Floer [**11, 13**]. La famille de solutions $(A(r), \psi(r))$ est alors obtenue en considérant les points critiques qui réalisent la valeur critique $\mathfrak{a}_\theta(r)$.

Étape 3. — Puisque les solutions $(A(r), \psi(r))$ correspondent à des points critiques de degré d fixé, l'estimation du flot spectral (proposition 3.3) implique que $|\mathfrak{cs}(A(r))|$ croît moins rapidement que r^2. Ceci élimine la première possibilité dans la proposition 3.4. Il existe donc une suite de valeurs $r_n \to +\infty$ telle que $E(A(r_n))$ soit bornée. Les solutions $(A_n, \psi_n) = (A(r_n), \psi(r_n))$ vérifient alors la condition (5) du théorème 2.3.

Étape 4. — Comme au §2, soient (α_n, β_n) les composantes de ψ_n. Lorsque $c_1(E)$ est non nul, l'existence d'un point où α_n s'annule implique immédiatement (en utilisant le lemme 2.4 pour borner β_n) que la condition (4) du théorème 2.3 est satisfaite.

Lorsque $c_1(E) = 0$ (ce qui ne peut arriver que si $c_1(\xi)$ est une classe de torsion), il existe toujours une classe d'équivalence de solutions de (3) pour laquelle la condition (4) n'est pas satisfaite. Si l'on choisit μ de telle sorte que $i\, d\mu = \frac{1}{2} F_\xi$, une telle solution est donnée par A la connexion triviale sur $E = \underline{\mathbb{C}}$ (la connexion spin^c sur $\mathbb{S} = \mathbb{S}_0$ est alors la connexion de référence ∇^0) et $\psi = (1, 0)$. Toutefois, Taubes montre que ces solutions particulières correspondent à des points critiques de $\mathfrak{a}$ de degré nul [**18**, lemme 5.4]. Le choix d'un degré $d \neq 0$ garantit donc que les solutions (A_n, ψ_n) vérifient (4).

Étape 5. — Les conditions (4) et (5) étant satisfaites, le théorème 2.3 s'applique et garantit l'existence d'orbites fermées du champ de Reeb.

4. HOMOLOGIE DE CONTACT PLONGÉE ET COHOMOLOGIE DE SEIBERG-WITTEN-FLOER

4.1. L'homologie de contact plongée

Soit M une variété compacte orientée de dimension 3, munie d'une forme de contact a. L'homologie de contact plongée $ECH_*(M,a)$ est l'homologie d'un complexe dont les générateurs sont des collections d'orbites fermées du champ de Reeb, muni d'une différentielle qui compte des courbes pseudo-holomorphes plongées dans la variété symplectique $\mathbb{R}\times M$; voir [**4**] et [**5**, §11].

Plus précisément, soit γ une orbite périodique du champ de Reeb v associé à la forme de contact a. Étant donné un point p de γ, la linéarisation du flot de Reeb induit sur le plan de contact $\xi_p = \mathrm{Ker}(a_p)$ une application de premier retour $P_\gamma \in \mathrm{End}(\xi_p)$, qui préserve la forme symplectique da. Un choix générique de la forme de contact garantit que toutes les orbites périodiques du champ de Reeb sont *non dégénérées*, c'est-à-dire que $P_\gamma - \mathrm{id}$ est inversible. L'orbite γ est dite *elliptique* si les valeurs propres de P_γ sont complexes conjuguées, *hyperbolique* si elles sont réelles.

DÉFINITION 4.1. — *Pour $\Gamma \in H_1(M,\mathbb{Z})$ fixé, on note $ECC_*(M,a,\Gamma)$ le groupe abélien libre engendré par tous les ensembles finis de la forme $\{(\gamma_i,m_i)\}$, où les γ_i sont des orbites périodiques plongées distinctes du champ de Reeb, les m_i sont des entiers positifs tels que $m_i = 1$ lorsque γ_i est hyperbolique, et $\sum m_i[\gamma_i] = \Gamma$.*

Soit J une structure presque complexe sur $\mathbb{R}\times M$ (où on note s la coordonnée dans la direction réelle) invariante par translation dans la direction réelle et telle que $J(\frac{\partial}{\partial s}) = v$, $J(\xi) = \xi$, et $da(u,Ju) \geq 0$ pour tout $u \in \xi$. De plus, on choisit J de façon générique parmi les structures presque complexes qui possèdent ces propriétés, afin d'assurer de bonnes propriétés de transversalité pour les courbes pseudo-holomorphes.

Si γ est une orbite périodique de v, alors le cylindre $\mathbb{R}\times\gamma \subset \mathbb{R}\times M$ est pseudo-holomorphe. On considère des courbes pseudo-holomorphes dont le comportement pour $s \to \pm\infty$ est asymptotique à une collection de revêtements de tels cylindres : on dit qu'une courbe pseudo-holomorphe possède une extrémité positive (resp. négative) de multiplicité k le long de l'orbite γ si lorsque $s \to +\infty$ (resp. $s \to -\infty$) elle est asymptotique à un revêtement de degré k de $\mathbb{R}\times\gamma$. Il peut y avoir plusieurs extrémités asymptotiques à une même orbite.

Étant donnés deux générateurs $\underline{\gamma} = \{(\gamma_i,m_i)\}$ et $\underline{\gamma}' = \{(\gamma'_i,m'_i)\}$, on note $\mathcal{M}(\underline{\gamma},\underline{\gamma}')$ l'espace des modules des courbes pseudo-holomorphes dans $\mathbb{R}\times M$ (pas nécessairement connexes) dont les extrémités positives (resp. négatives) sont asymptotiques aux orbites γ_i (resp. γ'_i), et telles que la somme des multiplicités des extrémités positives (resp. négatives) le long de γ_i (resp. γ'_i) soit égale à m_i (resp. m'_i).

La théorie des courbes pseudo-holomorphes associe à une telle courbe C un indice

$$\operatorname{ind}(C) = -\chi(C) + 2c_1(\xi_{|C}, \tau) + \sum_{i,k} CZ_\tau(m_{i,k}\gamma_i) - \sum_{i,k} CZ_\tau(m'_{i,k}\gamma'_i),$$

où τ est un choix de trivialisation du champ de plans de contact ξ le long des orbites γ_i et γ'_i ; $c_1(\xi_{|C}, \tau)$ est le degré du fibré en droites complexes $\xi_{|C}$ relativement à la trivialisation τ aux extrémités de C ; les entiers $m_{i,k}$ (resp. $m'_{i,k}$), dont la somme vaut m_i (resp. m'_i), sont les multiplicités des diverses extrémités de C le long de γ_i (resp. γ'_i) ; enfin, CZ_τ est l'indice de Conley-Zehnder, qui mesure la rotation du flot de Reeb linéarisé par rapport à la trivialisation τ le long d'une orbite fermée. Pour J générique, au voisinage d'une courbe C dont aucune composante n'est un revêtement multiple, l'espace des modules $\mathcal{M}(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')$ est une variété lisse de dimension $\operatorname{ind}(C)$.

Hutchings définit également un second indice

$$I(C) = c_1(\xi_{|C}, \tau) + Q_\tau(C) + \sum_i \sum_{\ell=1}^{m_i} CZ_\tau(\ell\gamma_i) - \sum_i \sum_{\ell=1}^{m'_i} CZ_\tau(\ell\gamma'_i),$$

où Q_τ est une forme d'intersection en homologie relative, définie par rapport à la trivialisation τ : c'est le nombre d'intersection algébrique entre une surface plongée S qui représente la même classe relative que C et une déformation S' choisie de telle sorte que, pour $|s|$ suffisamment grand, les tresses obtenues au voisinage de chaque orbite de Reeb en intersectant S et S' avec $\{s\} \times M$ ont un nombre d'entrelacement nul vis-à-vis de la trivialisation τ.

Soit $H_2(M, \underline{\gamma}, \underline{\gamma}')$ l'espace affine modelé sur $H_2(M, \mathbb{Z})$ dont les éléments sont les classes d'homologie relative représentées par les chaînes Z telles que $\partial Z = \sum m_i\gamma_i - \sum m'_i\gamma'_i$. Alors la projection sur M d'une courbe pseudo-holomorphe $C \in \mathcal{M}(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')$ définit une classe $[C] \in H_2(M, \underline{\gamma}, \underline{\gamma}')$. Hutchings [**4**] montre que $I(C)$ ne dépend que de $\underline{\gamma}$, $\underline{\gamma}'$ et $[C]$. De plus, $I(C) - I(C') = \langle c_1(\xi) + 2\Gamma, [C] - [C'] \rangle$. Si on note N la divisibilité de la classe $c_1(\xi) + 2\Gamma$, cette propriété et l'additivité de I permettent de définir un *degré relatif* sur $ECC_*(M, a, \Gamma)$, à valeurs dans $\mathbb{Z}/N$, tel que

$$\deg(\underline{\gamma}) - \deg(\underline{\gamma}') \equiv I(C) \mod N$$

pour tout $C \in \mathcal{M}(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')$. De plus, Hutchings montre le résultat suivant :

Théorème 4.2 (Hutchings [**4**]). — *Pour tout $C \in \mathcal{M}(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')$ dont aucune composante n'est un revêtement multiple, on a l'inégalité*

$$\operatorname{ind}(C) \leq I(C) - 2\delta(C), \tag{26}$$

où $\delta(C)$ est le nombre de points doubles de C. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si C vérifie une condition « de partition », qui détermine les multiplicités individuelles des extrémités de C le long de chaque orbite γ_i ou γ'_i.

Hutchings montre également que si J est générique, alors toutes les courbes pseudo-holomorphes vérifient $I(C) \geq 0$, et $I(C) = 0$ si et seulement si C est une union de cylindres de la forme $\mathbb{R} \times \gamma_i$ ou de revêtements de tels cylindres, tandis que $I(C) = 1$ si et seulement si C est constituée d'une courbe plongée lisse C' telle que $I(C') = 1$ et qui vérifie la condition de partition, et d'une collection de cylindres disjoints de C'. Après passage au quotient par les translations dans la direction de $\mathbb{R}$, ces courbes sont des points isolés de l'espace des modules.

DÉFINITION 4.3. — *Étant donné un générateur $\underline{\gamma} \in ECC_*(M, a, \Gamma)$, on définit*

$$\partial(\underline{\gamma}) = \sum_{\underline{\gamma}'} \sum_{\substack{C \in \mathcal{M}(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')/\mathbb{R} \\ I(C)=1}} \varepsilon(C)\, \underline{\gamma}',$$

où $\varepsilon(C) \in \{\pm 1\}$ est un signe déterminé par l'orientation de l'espace des modules.

L'existence de l'homologie de contact plongée $ECH_*(M, a, \Gamma)$ découle alors du résultat suivant :

THÉORÈME 4.4 (Hutchings-Taubes [**6**]). — *∂ est bien définie, et $\partial^2 = 0$.*

4.2. Homologie de contact plongée et cohomologie de Seiberg-Witten-Floer

Soit M une variété compacte orientée de dimension 3, munie d'une forme de contact a pour laquelle les orbites périodiques du champ de Reeb sont non dégénérées. Étant donnée une classe d'homologie $\Gamma \in H_1(M, \mathbb{Z})$, soit E le fibré en droites complexes tel que $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ soit la classe duale de Poincaré de Γ, et soit $\mathfrak{s}_\Gamma$ la structure spin^c dont le fibré des spineurs est $\mathbb{S}_\Gamma = \mathbb{S}_0 \otimes E = E \oplus (\xi \otimes E)$.

La *cohomologie de Seiberg-Witten-Floer* $\widehat{HM}^*(M, \mathfrak{s}_\Gamma)$ est définie en considérant le dual du complexe qui détermine l'homologie $\widehat{HM}_*(M, \mathfrak{s}_\Gamma)$ décrite au §3.1. En d'autres termes, c'est la *cohomologie* de Morse de la fonctionnelle $\mathfrak{a}_0$ (avec un traitement spécifique des points critiques réductibles, comme on l'a vu au §3.1). De façon équivalente, comme un changement d'orientation de M change le signe de $\mathfrak{a}_0$, on a un isomorphisme

$$\widehat{HM}^*(M, \mathfrak{s}_\Gamma) \simeq \widetilde{HM}_{-*}(-M, \mathfrak{s}_\Gamma)$$

(cf. [**9**, corollaire 22.5.10]). On rappelle également qu'en général le degré n'est défini que de façon relative (la *différence* entre le degré de deux générateurs), et modulo un entier N, à savoir la divisibilité de $c_1(\det(\mathbb{S}_\Gamma)) = c_1(\xi) + 2\Gamma$.

Taubes a récemment annoncé [**20**] l'existence d'un isomorphisme entre homologie de contact plongée et cohomologie de Seiberg-Witten-Floer, qui change le signe du degré :

THÉORÈME 4.5 (Taubes). — $ECH_*(M, a, \Gamma) \simeq \widehat{HM}^{-*}(M, \mathfrak{s}_\Gamma)$.

Le texte [20] donne une description relativement détaillée de la preuve de ce théorème ; toutefois, l'argument repose sur une série d'articles actuellement en préparation.

Dans les grandes lignes, il s'agit de construire une application linéaire du complexe $ECC_*(M, a, \Gamma)$ vers le complexe de Seiberg-Witten-Floer, puis de montrer qu'elle est compatible avec les différentielles et induit un isomorphisme en (co)homologie. La construction repose sur le lien géométrique déjà mentionné au §2.2 entre solutions des équations de Seiberg-Witten perturbées (3) et orbites périodiques du champ de Reeb.

Plusieurs détails viennent compliquer la situation. Tout d'abord, la partie du complexe de Seiberg-Witten-Floer qui correspond aux solutions irréductibles est toujours de rang fini (même si ce rang peut augmenter avec r), alors que le complexe qui détermine l'homologie de contact plongée est en général de rang infini. Taubes considère une filtration naturelle sur le complexe $ECC_*(M, a, \Gamma)$: étant donné un générateur $\underline{\gamma} = \{(\gamma_i, m_i)\}$, on note $\ell(\underline{\gamma}) = \sum m_i \int_{\gamma_i} a$. La condition $da(\cdot, J\cdot) \geq 0$ imposée sur la structure presque complexe implique que, si $\mathscr{M}(\underline{\gamma}, \underline{\gamma}')$ est non vide, alors $\ell(\underline{\gamma}') \leq \ell(\underline{\gamma})$. Pour $L > 0$ fixé, on note $ECC^L_*(M, a, \Gamma)$ le sous-complexe de rang fini engendré par les générateurs tels que $\ell(\underline{\gamma}) \leq L$: on a alors

$$ECH_*(M, a, \Gamma) = \varinjlim_{L\to\infty} H_*(ECC^L_*(M, a, \Gamma), \partial).$$

Un examen de la preuve du théorème 2.3 suggère que les collections d'orbites du champ de Reeb telles que $\ell(\underline{\gamma}) \leq L$ correspondent aux limites pour $r \to \infty$ de familles de solutions irréductibles de (3) telles que $E(A) = i \int_M a \wedge F_A \leq \mathscr{E}(L) = 2\pi L$.

D'autre part, la construction d'une solution des équations de Seiberg-Witten à partir d'une collection d'orbites de Reeb est grandement simplifiée si l'on dispose d'un modèle local adapté au voisinage de ces orbites. Taubes montre [**20**, proposition 2.5] que, pour L fixé, il est possible de déformer la forme de contact a et la structure presque complexe J, sans affecter les orbites fermées du champ de Reeb de longueur au plus L ni la différentielle sur $ECC^L_*(M, a, \Gamma)$, de manière à garantir que le flot du champ de Reeb et la structure presque complexe soient décrits par un modèle local explicite au voisinage de chaque orbite fermée de longueur au plus L. Le modèle local souhaité est déterminé complètement par le type elliptique ou hyperbolique de l'orbite et par le nombre de rotation du flot de Reeb linéarisé le long de l'orbite ; voir la condition (2.11) de [**20**].

Pour L fixé, une fois a et J modifiés de la façon décrite ci-dessus, et pour r suffisamment grand, Taubes construit une bijection Φ^r entre les générateurs de $ECC^L_*(M, a, \Gamma)$ et les solutions de (3) telles que $E(A) \leq 2\pi L$: voir [**20**, théorème 4.2].

La bijection Φ^r est obtenue en plusieurs étapes. Tout d'abord, étant donnés une orbite fermée γ du champ de Reeb et un entier $m \geq 1$ (avec $m = 1$ si γ est hyperbolique), Taubes construit une solution approchée des équations (3) au voisinage de γ à partir d'une famille de solutions d'énergie $2\pi m$ des équations vortex (12), $c_\gamma : S^1 \to \mathfrak{C}_m$ (cf. lemme 2.6). Plus précisément, étant donnée une famille de solutions $t \mapsto c(t) = (\mathscr{A}(t), \sigma(t))$ des équations vortex, on construit au voisinage de γ une connexion A sur E et une section ψ du fibré des spineurs dont les restrictions à une famille de disques transverses à γ, munis de la coordonnée complexe $r^{1/2}(x+iy)$, sont respectivement $\mathscr{A}(t)$ et $(\sigma(t), 0)$. Taubes montre alors que (A, ψ) est une solution approchée de (3) si et seulement si la famille de configurations $c(t)$ satisfait la condition

$$\frac{dc}{dt} = X_h(c(t)), \tag{27}$$

où X_h est le champ de vecteurs hamiltonien sur $\mathfrak{C}_m \simeq \mathrm{Sym}^m(\mathbb{C})$ associé à une fonction $h : \mathfrak{C}_m \to \mathbb{R}$ déterminée explicitement par le modèle local pour le flot de Reeb au voisinage de γ. Taubes montre de plus que, pour les modèles locaux définis par [**20**, condition (2.11)], l'homologie de Floer associée au hamiltonien h est

$$\begin{cases} \mathbb{Z} & \text{lorsque } m = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{lorsque } m > 1 \text{ et } \gamma \text{ est elliptique,} \\ 0 & \text{lorsque } m > 1 \text{ et } \gamma \text{ est hyperbolique.} \end{cases}$$

Le dernier cas est exclu par les hypothèses.

Il est en fait facile de décrire la solution c_γ de (27) qui correspond au générateur de $HF_*(h)$: il s'agit de la trajectoire constante telle que, pour tout t, $c_\gamma(t)$ est l'unique solution d'énergie $2\pi m$ de (12) pour laquelle $\sigma^{-1}(0) = \{0\}$.

L'étape suivante consiste à recoller les solutions approchées de (3) ainsi construites au voisinage des différentes orbites γ_i qui composent $\underline{\gamma}$ avec une configuration de référence définie sur le reste de la variété M, pour laquelle la connexion A est plate et la section ψ est de norme constante égale à 1. Ceci permet d'associer à $\underline{\gamma}$ une solution approchée de (3). Taubes montre enfin que, pour r suffisamment grand, cette solution approchée peut être perturbée en une solution de (3), que l'on note $\Phi^r(\underline{\gamma})$.

L'injectivité de Φ^r découle immédiatement de la construction ; la surjectivité, quant à elle, est essentiellement une conséquence du théorème 2.3.

Une fois les générateurs des deux complexes identifiés par la bijection Φ^r, il reste à identifier les espaces de modules qui définissent les différentielles dans les deux théories. Ceci fait l'objet des théorèmes 4.3 et 4.4 de [**20**]. D'une part, étant donnés deux générateurs $\underline{\gamma}, \underline{\gamma}'$ de $ECC_*^L(M, a, \Gamma)$, Taubes montre que pour r suffisamment grand les courbes pseudo-holomorphes d'indice $I = 1$ qui relient $\underline{\gamma}$ à $\underline{\gamma}'$ sont en bijection avec les trajectoires d'indice 1 du gradient de la fonctionnelle $\mathfrak{a}$ qui relient $\Phi^r(\underline{\gamma})$ à $\Phi^r(\underline{\gamma}')$ [**20**, théorème 4.3]. La construction de cette bijection est similaire à celle utilisée dans l'article [**17**], mais présente des complications supplémentaires dues à la non-compacité de $\mathbb{R} \times M$. D'autre part, Taubes montre également que, pour r suffisamment grand, la différentielle en cohomologie de Seiberg-Witten-Floer préserve le sous-groupe engendré par les solutions de (3) pour lesquelles $E(A) \leq 2\pi L$ [**20**, théorème 4.4] ; ceci est en fait une conséquence des estimées sur $\mathfrak{cs}$, $\mathfrak{a}$ et E qui ont été décrites au §3. Le théorème 4.5 est alors obtenu à partir de ces résultats par passage à la limite lorsque $L \to \infty$.

Entre autres conséquences remarquables du théorème 4.5, on notera celle-ci :

Corollaire 4.6 (Taubes). — *L'homologie de contact plongée $ECH_*(M, a, \Gamma)$ ne dépend pas de la forme de contact, mais uniquement de la classe de cohomologie $c_1(\xi) + 2\Gamma$. De plus, l'homologie de contact plongée est de rang fini en chaque degré.*

RÉFÉRENCES

[1] C. Abbas, K. Cieliebak & H. Hofer – The Weinstein conjecture for planar contact structures in dimension three, *Comment. Math. Helv.* **80** (2005), p. 771–793.

[2] D. T. Gay – Four-dimensional symplectic cobordisms containing three-handles, *Geom. Topol.* **10** (2006), p. 1749–1759.

[3] H. Hofer – Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three, *Invent. Math.* **114** (1993), p. 515–563.

[4] M. Hutchings – An index inequality for embedded pseudoholomorphic curves in symplectizations, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **4** (2002), p. 313–361.

[5] M. Hutchings & M. Sullivan – Rounding corners of polygons and the embedded contact homology of T^3, *Geom. Topol.* **10** (2006), p. 169–266.

[6] M. Hutchings & C. H. Taubes – Gluing pseudoholomorphic curves along branched covered cylinders. I, *J. Symplectic Geom.* **5** (2007), p. 43–137.

[7] ———, The Weinstein conjecture for stable Hamiltonian structures, *Geom. Topol.* **13** (2009), p. 901–941.

[8] D. Kotschick – The Seiberg-Witten invariants of symplectic four-manifolds (after C. H. Taubes), Séminaire Bourbaki, vol. 1995/96, exposé n° 812, *Astérisque* **241** (1997), p. 195–220.

[9] P. Kronheimer & T. Mrowka – *Monopoles and three-manifolds*, New Mathematical Monographs, vol. 10, Cambridge Univ. Press, 2007.

[10] F. Laudenbach – Orbites périodiques et courbes pseudo-holomorphes, application à la conjecture de Weinstein en dimension 3 (d'après H. Hofer et al.), Séminaire Bourbaki, vol. 1993/94, exposé n° 786, *Astérisque* **227** (1995), p. 309–333.

[11] Y.-G. Oh – Construction of spectral invariants of Hamiltonian paths on closed symplectic manifolds, in *The breadth of symplectic and Poisson geometry*, Progr. Math., vol. 232, Birkhäuser, 2005, p. 525–570.

[12] P. H. Rabinowitz – Periodic solutions of Hamiltonian systems, *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), p. 157–184.

[13] M. Schwarz – On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds, *Pacific J. Math.* **193** (2000), p. 419–461.

[14] C. H. Taubes – The Seiberg-Witten and Gromov invariants, *Math. Res. Lett.* **2** (1995), p. 221–238.

[15] ———, SW $\Rightarrow$ Gr : from the Seiberg-Witten equations to pseudo-holomorphic curves, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), p. 845–918.

[16] ———, The geometry of the Seiberg-Witten invariants, in *Surveys in differential geometry, Vol. III (Cambridge, MA, 1996)*, Int. Press, Boston, MA, 1998, p. 299–339.

[17] ———, Gr $\Longrightarrow$ SW : from pseudo-holomorphic curves to Seiberg-Witten solutions, *J. Differential Geom.* **51** (1999), p. 203–334.

[18] ———, The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture, *Geom. Topol.* **11** (2007), p. 2117–2202.

[19] ———, The Seiberg-Witten equations and the Weinstein conjecture. II. More closed integral curves of the Reeb vector field, *Geom. Topol.* **13** (2009), p. 1337–1417.

[20] ———, Embedded contact homology and Seiberg-Witten Floer cohomology I, prépublication arXiv:0811.3985.

[21] C. Viterbo – A proof of Weinstein's conjecture in $\mathbf{R}^{2n}$, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **4** (1987), p. 337–356.

[22] A. Weinstein – On the hypotheses of Rabinowitz' periodic orbit theorems, *J. Differential Equations* **33** (1979), p. 353–358.

Denis AUROUX

Massachusetts Institute of Technology
Department of Mathematics
77 Massachusetts Avenue
Cambridge, MA 02139
États-Unis
E-mail : auroux@math.mit.edu