

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

**Tome 148**  
**Fascicule 4**

**2020**

<b>Wolfgang Steiner</b> — Thue–Morse–Sturmian words and critical bases for ternary alphabets . .	597-611
<b>Samir Bedrouni &amp; David Marín</b> — Une nouvelle démonstration de la classification des feuilletages convexes de degré deux sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . . . . .	613-622
<b>Nguyen Kieu Hieu</b> — Shtukas adiques, modifications et applications . . . . .	623-650
<b>Zoghman Mebkhout</b> — Sur le théorème de la monodromie pour une famille d'équations différentielles $p$ -adiques . . . . .	651-708
<b>Nicolas Curien &amp; Cyril Marzouk</b> — Markovian explorations of random planar maps are roundish	709-732
<b>Shreyasi Datta &amp; Anish Ghosh</b> — Multiplicative $p$ -adic metric Diophantine approximation on manifolds and dichotomy of exponents . . . . .	733-747

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Pages 597-747



## Sommaire

<b>Wolfgang Steiner</b> — Mots de Thue–Morse–Sturm et bases critiques pour les alphabets ternaires .....	597-611
<b>Samir Bedrouni &amp; David Marín</b> — Une nouvelle démonstration de la classification des feuilletages convexes de degré deux sur $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .....	613-622
<b>Nguyen Kieu Hieu</b> — Shtukas adiques, modifications et applications	623-650
<b>Zoghman Mebkhout</b> — Sur le théorème de la monodromie pour une famille d'équations différentielles $p$ -adiques .....	651-708
<b>Nicolas Curien &amp; Cyril Marzouk</b> — Sur les explorations markoviennes des cartes planaires aléatoires .....	709-732
<b>Shreyasi Datta &amp; Anish Ghosh</b> — Approximation diophantienne métrique $p$ -adique multiplicative sur des variétés et dichotomie des exposants .....	733-747

## Contents

<b>Wolfgang Steiner</b> — Thue–Morse–Sturmian words and critical bases for ternary alphabets .....	597-611
<b>Samir Bedrouni &amp; David Marín</b> — A new proof of the classification of convex foliations of degree two on the complex projective plane .	613-622
<b>Nguyen Kieu Hieu</b> — Adic Shtukas, modifications and applications	623-650
<b>Zoghman Mebkhout</b> — On the monodromy theorem for the family of $p$ -adic differential equations .....	651-708
<b>Nicolas Curien &amp; Cyril Marzouk</b> — Markovian explorations of random planar maps are roundish .....	709-732
<b>Shreyasi Datta &amp; Anish Ghosh</b> — Multiplicative $p$ -adic metric Diophantine approximation on manifolds and dichotomy of exponents .	733-747

## THUE–MORSE–STURMIAN WORDS AND CRITICAL BASES FOR TERNARY ALPHABETS

BY WOLFGANG STEINER

---

ABSTRACT. — The set of unique  $\beta$ -expansions over the alphabet  $\{0, 1\}$  is trivial for  $\beta$  below the golden ratio and uncountable above the Komornik–Loreti constant. Generalisations of these thresholds for three-letter alphabets were studied by Komornik, Lai and Pedicini (2011, 2017). We use a class of  $S$ -adic words, including the Thue–Morse sequence (which defines the Komornik–Loreti constant) and Sturmian words (which characterise generalised golden ratios) to determine the value of a certain generalisation of the Komornik–Loreti constant to three-letter alphabets.

RÉSUMÉ (*Mots de Thue–Morse–Sturm et bases critiques pour les alphabets ternaires*). — L'ensemble des  $\beta$ -développements uniques avec l'alphabet  $\{0, 1\}$  est trivial pour  $\beta$  au-dessous du nombre d'or et non dénombrable au-dessus de la constante de Komornik–Loreti. Des généralisations de ces seuils pour les alphabets de trois lettres furent étudiées par Komornik, Lai et Pedicini (2011, 2017). Nous utilisons une classe de mots  $S$ -adiques comprenant la suite de Thue–Morse (qui définit la constante de Komornik–Loreti) et les mots sturmiens (qui caractérisent les nombres d'or généralisés) pour déterminer la valeur d'une certaine généralisation de la constante de Komornik–Loreti aux alphabets de trois lettres.

---

*Texte reçu le 18 février 2019, modifié le 25 février 2020, accepté le 30 avril 2020.*

WOLFGANG STEINER, Université de Paris, IRIF, CNRS, F-75006 Paris, France •  
E-mail : [steiner@irif.fr](mailto:steiner@irif.fr)

Mathematical subject classification (2010). — 11A63, 68R15.

Key words and phrases. —  $\beta$ -expansion, Unique expansion, Golden ratio, Komornik–Loreti constant, Thue–Morse sequence, Sturmian words,  $S$ -adic words.

This work was supported by the Agence Nationale de la Recherche through the project CODYS (ANR-18-CE40-0007).

### 1. Introduction and main results

For a base  $\beta > 1$  and a sequence of digits  $u_1 u_2 \cdots \in A^\infty$ , with  $A \subset \mathbb{R}$ , let

$$\pi_\beta(u_1 u_2 \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k}{\beta^k};$$

we say that  $u_1 u_2 \cdots$  is a  $\beta$ -expansion of this number. This paper deals with *unique  $\beta$ -expansions over  $A$* , that is, with

$$U_\beta(A) = \{\mathbf{u} \in A^\infty : \pi_\beta(\mathbf{u}) \neq \pi_\beta(\mathbf{v}) \text{ for all } \mathbf{v} \in A^\infty \setminus \{\mathbf{u}\}\}.$$

We know from [5] that  $U_\beta(\{0, 1\})$  is trivial if and only if  $\beta \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , where trivial means that  $U_\beta(\{0, 1\}) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ,  $\bar{a}$  being the infinite repetition of  $a$ . Therefore,

$$\mathcal{G}(A) = \inf\{\beta > 1 : |U_\beta(A)| > 2\}$$

is called the *generalised golden ratio* of  $A$ . By [6] the set  $U_\beta(\{0, 1\})$  is uncountable if and only if  $\beta$  is larger than or equal to the Komornik–Loreti constant  $\beta_{\text{KL}} \approx 1.787$ ; we call

$$\mathcal{K}(A) = \inf\{\beta > 1 : U_\beta(A) \text{ is uncountable}\}$$

the *generalised Komornik–Loreti constant* of  $A$ . (We can replace *uncountable* throughout the paper by *has the cardinality of the continuum*.) The precise structure of  $U_\beta(\{0, 1\})$  was described in [8]. For integers  $M \geq 2$ ,  $\mathcal{G}(\{0, 1, \dots, M\})$  was determined by [2], and  $U_\beta(\{0, 1, \dots, M\})$  was described in [12, 1].

For  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ , we have  $(xu_1 + y_1)(xu_2 + y_2) \cdots \in U_\beta(xA + y)$  if and only if  $u_1 u_2 \cdots \in U_\beta(A)$ , thus  $\mathcal{G}(xA + y) = \mathcal{G}(A)$  and  $\mathcal{K}(xA + y) = \mathcal{K}(A)$ . Hence, the only two-letter alphabet to consider is  $\{0, 1\}$ . A three-letter alphabet  $\{a_1, a_2, a_3\}$  with  $a_1 < a_2 < a_3$  can be replaced by  $\{0, 1, \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1}\}$  or  $\{0, 1, \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}\}$ . Since  $\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1}$  and  $\frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2}$  are on opposite sides of 2 (or both equal to 2), we can restrict ourselves to alphabets  $\{0, 1, m\}$ ,  $m \in (1, 2]$ . Of course, it is also possible to restrict ourselves to  $m \geq 2$ , as in [9] (note that the alphabet  $\{0, 1, m\}$  can be replaced by  $\{0, 1, \frac{m}{m-1}\}$ ), but we find it easier to work with  $m \leq 2$ . We write

$$U_\beta(m) = U_\beta(\{0, 1, m\}), \quad \mathcal{G}(m) = \mathcal{G}(\{0, 1, m\}), \quad \mathcal{K}(m) = \mathcal{K}(\{0, 1, m\}).$$

It was established in [9, 14, 3] that the generalised golden ratio  $\mathcal{G}(m)$  is given by mechanical words, i.e., Sturmian words and their periodic counterparts; in particular, we can restrict ourselves to sequences  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$ . Calculating  $\mathcal{K}(m)$  seems to be much harder, since this restriction is not possible. Therefore, we study

$$\mathcal{L}(m) = \inf\{\beta > 1 : U_\beta(m) \cap \{0, 1\}^\infty \text{ is uncountable}\},$$

following [11], where this quantity was determined for certain intervals. We give a complete characterisation in Theorem 1.1 below.

To this end, we use the substitutions (or morphisms)

$$\begin{aligned} L : 0 \mapsto 0, \quad M : 0 \mapsto 01, \quad R : 0 \mapsto 01, \\ 1 \mapsto 01, \quad 1 \mapsto 10, \quad 1 \mapsto 1, \end{aligned}$$

which act on finite and infinite words by  $\sigma(u_1u_2 \dots) = \sigma(u_1)\sigma(u_2)\dots$ . The monoid generated by a set of substitutions  $S$  (with the usual product of substitutions) is denoted by  $S^*$ . An infinite word  $\mathbf{u}$  is a *limit word* of a sequence of substitutions  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  (or an *S-adic word* if  $\sigma_n \in S$  for all  $n \geq 1$ ), if there is a sequence of words  $(\mathbf{u}^{(n)})_{n \geq 1}$  with  $\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u}^{(n)} = \sigma_n(\mathbf{u}^{(n+1)})$ , for all  $n \geq 1$ . The sequence  $(\sigma_n)_{n \geq 1}$  is called *primitive*, if for each  $k \geq 1$ , there is an  $n \geq k$ , such that both words  $\sigma_k\sigma_{k+1} \dots \sigma_n(0)$  and  $\sigma_k\sigma_{k+1} \dots \sigma_n(1)$  contain both letters 0 and 1. For  $S = \{L, M, R\}$ , this means that there is no  $k \geq 1$ , such that  $\sigma_n = L$  for all  $n \geq k$  or  $\sigma_n = R$ , for all  $n \geq k$ . Let  $\mathcal{S}_S$  be the set of limit words of primitive sequences of substitutions in  $S^\infty$ . Then  $\mathcal{S}_{\{L,R\}}$  consists of *Sturmian words*, and  $\mathcal{S}_{\{M\}}$  consists of the *Thue-Morse word*  $0\mathbf{u} = 0110100110010110\dots$ , which defines the Komornik-Loreti constant by  $\pi_{\beta_{\text{KL}}}(\mathbf{u}) = 1$ , and its reflection by  $0 \leftrightarrow 1$ . We call the elements of  $\mathcal{S}_{\{L,M,R\}}$ , which to our knowledge have not been studied yet, *Thue-Morse-Sturmian words*. For details on S-adic and other words, we refer to [15, 4].

For  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  and  $m \in (1, 2]$ , define  $f_{\mathbf{u}}(m)$  (if  $\mathbf{u}$  contains at least two 1s) and  $g_{\mathbf{u}}(m)$  as the unique positive solutions of

$$f_{\mathbf{u}}(m) \pi_{f_{\mathbf{u}}(m)}(\sup O(\mathbf{u})) = m \quad \text{and} \quad (g_{\mathbf{u}}(m) - 1)(1 + \pi_{g_{\mathbf{u}}(m)}(\inf O(\mathbf{u}))) = m,$$

respectively, where  $O(u_1u_2 \dots) = \{u_k u_{k+1} \dots : k \geq 1\}$  denotes the shift orbit, and infinite words are ordered by the *lexicographic order*. For the existence and monotonicity properties of  $f_{\mathbf{u}}(m)$  and  $g_{\mathbf{u}}(m)$ , see [3, Lemmas 3.11 and 3.12] and Lemma 2.1 below. We define  $\mu_{\mathbf{u}}$  by

$$f_{\mathbf{u}}(\mu_{\mathbf{u}}) = g_{\mathbf{u}}(\mu_{\mathbf{u}}),$$

i.e.  $f_{\mathbf{u}}(\mu_{\mathbf{u}}) = g_{\mathbf{u}}(\mu_{\mathbf{u}}) = \beta$  with  $\beta \pi_{\beta}(\sup O(\mathbf{u})) = (\beta - 1)(1 + \pi_{\beta}(\inf O(\mathbf{u})))$ .

The main result of [9] on generalised golden ratios of three-letter alphabets can be written as

$$\mathcal{G}(m) = \begin{cases} f_{\sigma(\bar{0})}(m) & \text{if } m \in [\mu_{\sigma(\bar{1}\bar{0})}, \mu_{\sigma(\bar{0})}], \sigma \in \{L, R\}^*M, \\ g_{\sigma(\bar{0})}(m) & \text{if } m \in [\mu_{\sigma(\bar{0})}, \mu_{\sigma(\bar{0}\bar{1})}], \sigma \in \{L, R\}^*M, \\ f_{\bar{1}}(m) & \text{if } m \in [\mu_{\bar{0}\bar{1}}, 2], \\ 1 + \sqrt{m} & \text{if } m = \mu_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L,R\}}; \end{cases}$$

cf. [3, Proposition 3.18], where substitutions  $\tau_h = L^hR$  are used, and  $f, g, \mu, \mathcal{S}$  are defined slightly differently. Our main theorem looks similar, but we need  $\{L, M, R\}$  instead of  $\{L, R\}$ , and the roles of  $f$  and  $g$  are exchanged.

THEOREM 1.1. — *The function  $\mathcal{L}(m) = \inf\{\beta > 1 : U_\beta(m) \cap \{0, 1\}^\infty \text{ is uncountable}\}$  is given for  $1 < m \leq 2$  by*

$$\mathcal{L}(m) = \begin{cases} g_{\sigma(1\bar{0})}(m) & \text{if } m \in [\mu_{\sigma(1\bar{0})}, \mu_{\sigma(01\bar{0})}], \sigma \in \{L, M, R\}^*M, \\ f_{\sigma(0\bar{1})}(m) & \text{if } m \in [\mu_{\sigma(10\bar{1})}, \mu_{\sigma(0\bar{1})}], \sigma \in \{L, M, R\}^*M, \\ g_{0\bar{1}}(m) & \text{if } m \in [\mu_{0\bar{1}}, 2], \\ f_{\mathbf{u}}(m) & \text{if } m = \mu_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L, M, R\}}. \end{cases}$$

The Hausdorff dimension of  $\pi_\beta(U_\beta(m))$  is positive for all  $\beta > \mathcal{L}(m)$ .

The graphs of  $\mathcal{G}(m)$  and  $\mathcal{L}(m)$  are drawn in Figure 1.1. For example,  $\sigma = M$  gives

$$\mathcal{L}(m) = \begin{cases} g_{00\bar{1}}(m) & \text{if } m \in [\mu_{00\bar{1}}, \mu_{1100\bar{1}}] \approx [1.281972, 1.46811], \\ f_{1\bar{1}0}(m) & \text{if } m \in [\mu_{001\bar{1}0}, \mu_{1\bar{1}0}] \approx [1.516574, 1.55496]. \end{cases}$$

Taking  $\sigma = M^2$ , we have  $\sigma(0) = 0110$ ,  $\sigma(1) = 1001$ , and

$$\mathcal{L}(m) = \begin{cases} g_{0010\bar{1}1\bar{1}0}(m) & \text{if } m \in [\mu_{0010\bar{1}1\bar{1}0}, \mu_{11010010\bar{1}1\bar{1}0}] \approx [1.47571, 1.503114], \\ f_{1101\bar{0}0\bar{1}}(m) & \text{if } m \in [\mu_{00101101\bar{0}0\bar{1}}, \mu_{1101\bar{0}0\bar{1}}] \approx [1.504152, 1.509304]. \end{cases}$$

Subintervals of the first three intervals were also given by [11].

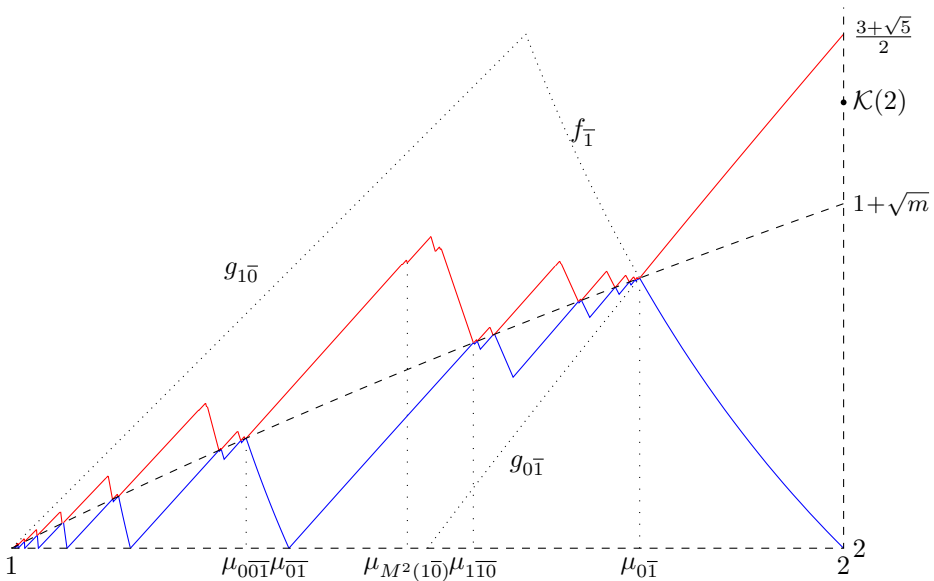


FIGURE 1.1. The critical bases  $\mathcal{G}(m)$  (below  $1 + \sqrt{m}$ , blue) and  $\mathcal{L}(m)$  (above  $1 + \sqrt{m}$ , red).



By [9, 11], we have, for all  $m \in (1, 2]$ ,

$$2 \leq \mathcal{G}(m) \leq 1 + \sqrt{m} \leq \mathcal{K}(m) \leq \mathcal{L}(m) \leq g_{1\bar{0}}(m) = 1 + m,$$

with  $\mathcal{G}(m) = \mathcal{L}(m)$  if and only if  $m \in \{\mu_{\sigma(1\bar{0})}, \mu_{\sigma(0\bar{1})}\}$ ,  $\sigma \in \{L, R\}^*M$  or  $m = \mu_{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L, R\}}$ . Besides those  $m$ , we only know the value of  $\mathcal{K}(m)$  for  $m = 2$  from [10]:  $\pi_{\mathcal{K}(2)}(2102012101202102 \dots) = 1$ , thus  $\mathcal{K}(2) \approx 2.536 < \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \mathcal{L}(2)$ . The functions  $\mathcal{G}(m)$ ,  $\mathcal{K}(m)$  and  $\mathcal{L}(m)$  are continuous for  $m > 1$  by [9, 11]; at least for the generalised golden ratio, this also holds for larger alphabets by [3].

### 2. Proof of the main theorem

We first prove that  $f_{\mathbf{u}}(m)$ ,  $g_{\mathbf{u}}(m)$  and  $\mu_{\mathbf{u}}$  are well defined and we determine monotonicity properties. For convenience, we write  $\inf(\mathbf{u})$  for  $\inf O(\mathbf{u})$  and  $\sup(\mathbf{u})$  for  $\sup O(\mathbf{u})$  in the following.

LEMMA 2.1. — *Let  $m \in (1, 2]$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in \{0, 1\}^\infty$ . Then  $g_{\mathbf{u}}(m)$  is well defined. If  $\mathbf{u}$  contains at least two 1s, then  $f_{\mathbf{u}}(m)$  and  $\mu_{\mathbf{u}}$  are well defined, and we have*

$$\begin{aligned} \max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m)) &\geq 2, \\ \beta > 1, \beta \pi_{\beta}(\sup(\mathbf{u})) < m &\quad \text{if and only if } \beta > f_{\mathbf{u}}(m), \\ \beta > 1, (\beta - 1)(1 + \pi_{\beta}(\inf(\mathbf{u}))) > m &\quad \text{if and only if } \beta > g_{\mathbf{u}}(m), \\ f_{\mathbf{u}}(m) > f_{\mathbf{u}'}(m') \text{ and } g_{\mathbf{u}}(m) < g_{\mathbf{u}'}(m') &\quad \text{if } m < m', \\ f_{\mathbf{u}}(m) < f_{\mathbf{u}'}(m) &\quad \text{if } \sup(\mathbf{u}) < \sup(\mathbf{u}') \text{ and } f_{\mathbf{u}}(m) \geq 2, \\ g_{\mathbf{u}}(m) > g_{\mathbf{u}'}(m) &\quad \text{if } \inf(\mathbf{u}) < \inf(\mathbf{u}') \text{ and } g_{\mathbf{u}'}(m) \geq 2. \end{aligned}$$

*Proof.* — Set  $h_{\mathbf{v}}(x, m) = x\pi_x(\mathbf{v}) - m$  with  $\mathbf{v} = \sup(\mathbf{u})$ . Then  $h_{\mathbf{v}}(x, m)$  is strictly decreasing in  $x$  (for  $x > 1$ ) and  $m$ . If  $\mathbf{u}$  contains at least two 1s, then  $\mathbf{v}$  also contains at least two 1s, thus  $\lim_{x \rightarrow 1} h_{\mathbf{v}}(x, m) \geq 2 - m$  and  $\lim_{x \rightarrow \infty} h_{\mathbf{v}}(x, m) = 1 - m$ . Therefore, for each  $m \in (1, 2]$ , there is a unique  $x_{m, \mathbf{v}} \geq 1$ , such that  $h_{\mathbf{v}}(x_{m, \mathbf{v}}, m) = 0$ , i.e.,  $f_{\mathbf{u}}(m) = x_{m, \mathbf{v}}$ , and we have  $\beta \pi_{\beta}(\sup(\mathbf{u})) < m$  for  $\beta > 1$ , if and only if  $\beta > f_{\mathbf{u}}(m)$ . If  $m < m'$ , then we have  $x_{m, \mathbf{v}} > x_{m', \mathbf{v}}$ , thus  $f_{\mathbf{u}}(m) > f_{\mathbf{u}'}(m')$ . If  $\mathbf{v} < \mathbf{v}'$  and  $x \geq 2$ , then we have  $h_{\mathbf{v}}(x, m) < h_{\mathbf{v}'}(x, m)$ , thus  $x_{m, \mathbf{v}} < x_{m, \mathbf{v}'}$ , if  $x_{m, \mathbf{v}} \geq 2$ , and, hence  $f_{\mathbf{u}}(m) < f_{\mathbf{u}'}(m)$ , if  $\sup(\mathbf{u}) < \sup(\mathbf{u}')$ , and  $f_{\mathbf{u}}(m) \geq 2$ .

Now let  $h_{\mathbf{v}}(x, m) = \frac{m}{x-1} - \pi_x(\mathbf{v}) - 1$  with  $\mathbf{v} = \inf(\mathbf{u})$ . Since  $\frac{m}{x-1} = \pi_x(\bar{m})$ ,  $h_{\mathbf{v}}(x, m)$  is strictly decreasing in  $x$  (for  $x > 1$ ) and strictly increasing in  $m$ . Again, for each  $m \in (1, 2]$ , there is a unique  $x_{m, \mathbf{v}} > 1$ , such that  $h_{\mathbf{v}}(x_{m, \mathbf{v}}, m) = 0$ , i.e.,  $g_{\mathbf{u}}(m) = x_{m, \mathbf{v}}$ . We have  $h_{\mathbf{v}}(x, m) < 0$  for  $x > 1$ , if and only if,  $x > x_{m, \mathbf{v}}$ ,  $x_{m, \mathbf{v}} < x_{m', \mathbf{v}}$  if  $m < m'$ , and  $h_{\mathbf{v}}(x, m) > h_{\mathbf{v}'}(x, m)$  if  $\mathbf{v} < \mathbf{v}'$ ,  $x \geq 2$ , and, thus  $x_{m, \mathbf{v}} > x_{m, \mathbf{v}'}$ , if  $x_{m, \mathbf{v}} \geq 2$ . This proves the monotonicity properties of  $g$ .

Since  $f_{\mathbf{u}}(m)$  is strictly decreasing,  $g_{\mathbf{u}}(m)$  is strictly increasing,  $f_{\mathbf{u}}(2) \leq 2$ ,  $g_{\mathbf{u}}(2) \geq 2$  and  $\lim_{m \rightarrow 1} f_{\mathbf{u}}(m) = \infty$ , we have  $f_{\mathbf{u}}(m) = g_{\mathbf{u}}(m)$  for a unique  $m \in (1, 2]$ .

Let  $\beta = f_{\mathbf{u}}(\mu_{\mathbf{u}}) = g_{\mathbf{u}}(\mu_{\mathbf{u}})$ , i.e.  $\beta \pi_{\beta}(\text{sup}(\mathbf{u})) = (\beta - 1)(1 + \pi_{\beta}(\text{inf}(\mathbf{u})))$ . We have  $\text{sup}(\mathbf{u}) \geq 1 \text{inf}(\mathbf{u})$ . If equality holds, then  $\beta = 2$ . Otherwise,  $\text{sup}(\mathbf{u})$  starts with  $1v_1 \cdots v_{k-1}1$ , and  $\text{inf}(\mathbf{u})$  starts with  $v_1 \cdots v_{k-1}0$  for some  $v_1 \cdots v_{k-1}$ ,  $k \geq 1$ . Then

$$\beta \pi_{\beta}(\text{sup}(\mathbf{u})) \geq 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{v_i}{\beta^i} + \frac{1}{\beta^k},$$

$$(\beta - 1)(1 + \pi_{\beta}(\text{inf}(\mathbf{u}))) \leq (\beta - 1) \left( 1 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{v_i}{\beta^i} \right) + \frac{1}{\beta^k},$$

and, thus  $\beta \geq 2$ . By the monotonicity properties that are proved above this implies that  $\max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m)) \geq 2$  for all  $m \in (1, 2]$ . □

Next we establish relations between  $f_{\mathbf{u}}(m)$ ,  $g_{\mathbf{u}}(m)$  and  $\mathbf{u} \in U_{\beta}(m)$ .

LEMMA 2.2. — *Let  $m \in (1, 2]$ ,  $\beta \in (1, 1 + m]$ . For  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^{\infty}$ , we have  $\mathbf{u} \in U_{\beta}(m)$ , if and only if,  $0\mathbf{u} \in U_{\beta}(m)$ . For  $\mathbf{u} \in 1\{0, 1\}^{\infty} \setminus \{1\bar{0}\}$ ,  $\mathbf{u} \in U_{\beta}(m)$  implies that  $\beta \geq \max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m))$ , and  $\beta > \max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m))$  implies that  $\mathbf{u} \in U_{\beta}(m)$ .*

*Proof.* — For  $\beta \in (1, 1 + m]$ ,  $\mathbf{u} = u_1 u_2 \cdots \in \{0, 1, m\}^{\infty}$ ,  $x \in [0, \frac{m}{\beta-1}]$ , we have  $\pi_{\beta}(\mathbf{u}) = x$ , if and only if,  $u_k = d(T^{k-1}(x))$  for all  $k \geq 1$ , with the branching  $\beta$ -transformation

$$T: [0, \frac{m}{\beta-1}] \rightarrow [0, \frac{m}{\beta-1}],$$

$$x \mapsto \beta x - d(x), \quad d(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < \frac{1}{\beta}, \\ 0 \text{ or } 1 & \text{if } \frac{1}{\beta} \leq x \leq \frac{m}{\beta(\beta-1)}, \\ 1 & \text{if } \frac{m}{\beta(\beta-1)} < x < \frac{m}{\beta}, \\ 1 \text{ or } m & \text{if } \frac{m}{\beta} \leq x \leq \frac{1}{\beta} + \frac{m}{\beta(\beta-1)}, \\ m & \text{if } x > \frac{1}{\beta} + \frac{m}{\beta(\beta-1)}, \end{cases}$$

see Figure 2.1. We thus have

$$\mathbf{u} \in U_{\beta}(m) \iff \pi_{\beta}(u_k u_{k+1} \cdots) \notin [\frac{1}{\beta}, \frac{m}{\beta(\beta-1)}] \cup [\frac{m}{\beta}, \frac{1}{\beta} + \frac{m}{\beta(\beta-1)}] \text{ for all } k \geq 1.$$

For  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^{\infty} \setminus \{\bar{0}\}$ , this means that  $\beta > 2$  and

$$\begin{aligned} \pi_{\beta}(u_k u_{k+1} \cdots) &< \frac{m}{\beta}, \\ \pi_{\beta}(u_{k+1} u_{k+2} \cdots) &> \frac{m}{\beta-1} - 1 \end{aligned} \quad \text{for all } k \geq 1 \text{ such that } u_k = 1,$$

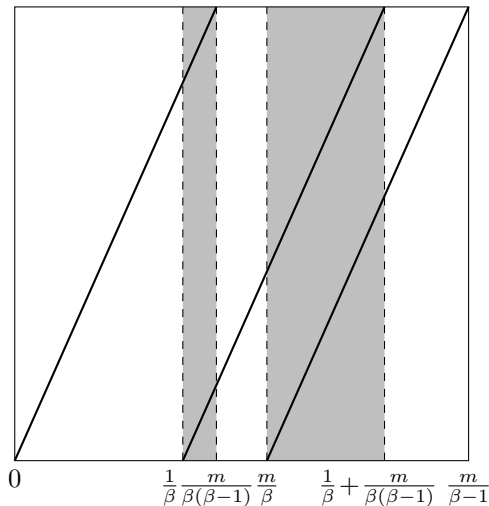


FIGURE 2.1. The branching  $\beta$ -transformation  $T$  for  $\beta = 9/4$ ,  $m = 3/2$ .

see [3, Lemma 3.9], i.e.

$$\beta \pi_\beta(\sup(\mathbf{u})) \leq m \leq (\beta - 1)(1 + \pi_\beta(\inf_1(\mathbf{u}))),$$

where  $\inf_1(u_1 u_2 \dots) = \inf\{u_{k+1} u_{k+2} \dots : k \geq 1, u_k = 1\}$ , with strict equalities if the supremum and infimum are attained. This shows that  $\mathbf{u} \in U_\beta(m)$ , if and only if,  $0\mathbf{u} \in U_\beta(m)$ . Note that  $\inf_1(\mathbf{u}) \neq \inf(\mathbf{u})$  implies that  $\inf(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ , hence we have  $\inf_1(\mathbf{u}) = \inf(\mathbf{u})$  when  $\mathbf{u}$  starts with 1. Then, by Lemma 2.1,  $\mathbf{u} \in U_\beta(m)$  implies that  $\beta \geq \max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m))$ , and  $\beta > \max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m))$  implies that  $\mathbf{u} \in U_\beta(m)$ .  $\square$

To calculate  $f_{\mathbf{u}}(m)$  and  $g_{\mathbf{u}}(m)$ , it is crucial to determine  $\inf(\mathbf{u})$  and  $\sup(\mathbf{u})$ . Similarly to  $\inf_1(u_1 u_2 \dots) = \inf\{u_{k+1} u_{k+2} \dots : k \geq 1, u_k = 1\}$ , set

$$\sup_0(u_1 u_2 \dots) = \sup\{u_{k+1} u_{k+2} \dots : k \geq 1, u_k = 0\}.$$

LEMMA 2.3. — For all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$ , we have

$$\inf(L(\mathbf{u})) = L(\inf(\mathbf{u})), \quad \inf(R(\mathbf{u})) = R(\inf(\mathbf{u})), \quad 0 \sup(L(\mathbf{u})) = L(\sup(\mathbf{u})).$$

If  $\inf(\mathbf{u}) = \inf_1(\mathbf{u})$ , then  $\inf(M(\mathbf{u})) = 0M(\inf(\mathbf{u}))$ . If  $\sup(\mathbf{u}) = \sup_0(\mathbf{u})$ , then

$$\sup(R(\mathbf{u})) = 1R(\sup(\mathbf{u})), \quad \sup(M(\mathbf{u})) = 1M(\sup(\mathbf{u})).$$

For each  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ , there is a suffix  $w$  of  $\sigma(1)$ , such that  $\inf_1(\sigma(\mathbf{u})) = \inf(\sigma(\mathbf{u})) = w\sigma(\inf(\mathbf{u}))$  for all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\inf(\mathbf{u}) = \inf_1(\mathbf{u})$ .

For each  $\sigma \in \{L, M, R\}^*M \cup \{L, M, R\}^*R$ , there is a suffix  $w$  of  $\sigma(0)$ , such that  $\text{sup}_0(\sigma(\mathbf{u})) = \text{sup}(\sigma(\mathbf{u})) = w\sigma(\text{sup}(\mathbf{u}))$  for all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\text{sup}(\mathbf{u}) = \text{sup}_0(\mathbf{u})$ .

For each  $\sigma \in \{L, M, R\}^*L$ , there is a prefix  $w$  of  $\sigma(\bar{0})$  such that  $w\text{sup}_0(\sigma(\mathbf{u})) = w\text{sup}(\sigma(\mathbf{u})) = \sigma(\text{sup}(\mathbf{u}))$  for all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\text{sup}(\mathbf{u}) = \text{sup}_0(\mathbf{u})$ .

*Proof.* — The first statements follow from the facts that  $L, M, R$  are order preserving on infinite words and that  $\text{inf}(\mathbf{u}) = \text{inf}_1(\mathbf{u})$ ,  $\text{sup}(\mathbf{u}) = \text{sup}_0(\mathbf{u})$  mean that  $1\text{inf}(\mathbf{u})$ ,  $0\text{sup}(\mathbf{u})$  are in the closure of  $O(\mathbf{u})$ .

We claim that, for each  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ , there is a suffix  $1w$  of  $\sigma(1)$ , such that  $\text{inf}_1(\sigma(\mathbf{u})) = \text{inf}(\sigma(\mathbf{u})) = w\sigma(\text{inf}(\mathbf{u}))$ , for all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\text{inf}(\mathbf{u}) = \text{inf}_1(\mathbf{u})$ . If  $1w$  is a suffix of  $\sigma(1)$ , then  $1L(w)$ ,  $10M(w)$  and  $1R(w)$  are suffixes of  $L\sigma(1)$ ,  $M\sigma(1)$  and  $R\sigma(1)$ , respectively. Therefore, this claim holds for  $L\sigma$ ,  $M\sigma$  and  $R\sigma$  when it holds for  $\sigma$ . Since it holds for  $\sigma = \text{id}$ , it holds for all  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ .

Next we claim that, for each  $\sigma \in \{L, M, R\}^*\{M, R\}$ , there is a suffix  $01w$  of  $\sigma(0)$ , such that  $\text{sup}_0(\sigma(\mathbf{u})) = \text{sup}(\sigma(\mathbf{u})) = 1w\sigma(\text{sup}(\mathbf{u}))$ , for all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\text{sup}(\mathbf{u}) = \text{sup}_0(\mathbf{u})$ . This holds for  $\sigma \in \{M, R\}$ . If  $01w$  is a suffix of  $\sigma(0)$ , then  $01L(w)$ ,  $01M(1w)$  and  $01R(1w)$  are suffixes of  $L\sigma(0)$ ,  $M\sigma(0)$  and  $R\sigma(0)$ , respectively. Therefore, this claim holds for all  $\sigma \in \{L, M, R\}^*\{M, R\}$ .

Finally, we claim that, for each  $\sigma \in \{L, M, R\}^*L$ , there is a prefix  $w0$  of  $\sigma(\bar{0})$ , such that  $w0\text{sup}_0(\sigma(\mathbf{u})) = w0\text{sup}(\sigma(\mathbf{u})) = \sigma(\text{sup}(\mathbf{u}))$  for all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\text{sup}(\mathbf{u}) = \text{sup}_0(\mathbf{u})$ . This holds for  $\sigma = L$ . If  $w0$  is a prefix of  $\sigma(\bar{0})$ , then  $L(w0)0$ ,  $M(w0)0$ , and  $R(w0)0$  are prefixes of  $L\sigma(\bar{0})$ ,  $M\sigma(\bar{0})$  and  $R\sigma(\bar{0})$ , respectively. Therefore, this claim holds for all  $\sigma \in \{L, M, R\}^*L$ .  $\square$

Now we can prove that Theorem 1.1 gives an upper bound for  $\mathcal{L}(m)$ , cf. Figure 2.2.

PROPOSITION 2.4. — *Let  $m \in (1, 2]$ . We have*

$$\mathcal{L}(m) \leq \begin{cases} g_{\sigma(1\bar{0})}(m) & \text{if } m \geq \mu_{\sigma(1\bar{0})}, \sigma \in \{L, M, R\}^*M, \\ f_{\sigma(0\bar{1})}(m) & \text{if } m \leq \mu_{\sigma(0\bar{1})}, \sigma \in \{L, M, R\}^*M, \\ g_{0\bar{1}}(m) & \text{if } m \geq \mu_{0\bar{1}}, \\ g_{\mathbf{u}}(m) & \text{if } m \geq \mu_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L, M, R\}}, \\ f_{\mathbf{u}}(m) & \text{if } m \leq \mu_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L, M, R\}}. \end{cases}$$

If  $\beta$  is above this bound, then the Hausdorff dimension of  $\pi_\beta(U_\beta(m))$  is positive.

*Proof.* — Let  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ . For all  $h \geq 1$ ,  $\mathbf{v} \in 1\{0(01)^h, 0(01)^{h+1}\}^\infty$ , we have

$$\text{inf}(\sigma(\mathbf{v})) \geq \text{inf}(\sigma(\overline{10(01)^{h-1}0})) \quad \text{and} \quad \text{sup}(\sigma(\mathbf{v})) \leq \text{sup}(\sigma(\overline{(01)^{h+1}0}))$$

by Lemma 2.3, with

$$\begin{aligned} \text{inf}(\sigma(\overline{10(01)^{h-1}0})) &\rightarrow \text{inf}(\sigma M(\bar{10})), \\ \text{sup}(\sigma(\overline{(01)^{h+1}0})) &\rightarrow \text{sup}(\sigma M(\bar{0})) \end{aligned} \quad (h \rightarrow \infty).$$

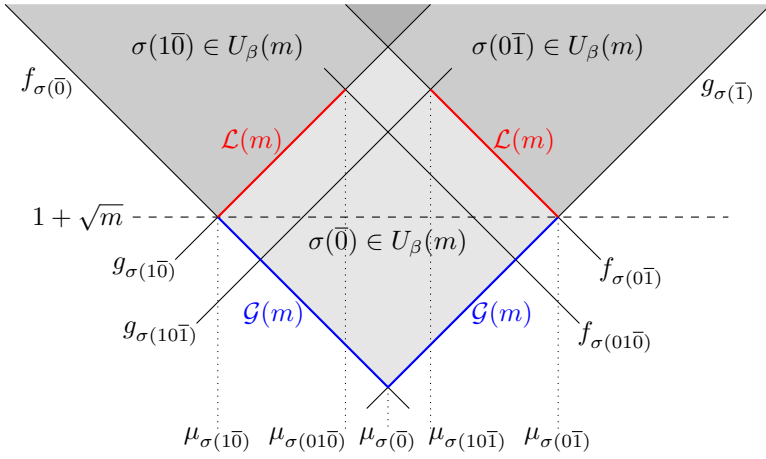


FIGURE 2.2. A schematic picture for  $\sigma \in \{L, R\}^*M$ . For  $\sigma \in \{L, M, R\}^*M$ , the situation is similar, except for  $\mathcal{G}(m)$  and  $1 + \sqrt{m}$ .

Therefore, we have for each  $\beta > \max(f_{\sigma M(0\bar{0})}(m), g_{\sigma M(1\bar{0})}(m))$  some  $h \geq 1$ , such that  $\sigma(\{0(01)^h, 0(01)^{h+1}\}^\infty) \subseteq U_\beta(m)$ . If  $m \geq \mu_{\sigma M(1\bar{0})}$ , then  $f_{\sigma M(0\bar{0})}(m) = f_{\sigma M(1\bar{0})}(m) \leq g_{\sigma M(1\bar{0})}(m)$ , and, thus  $U_\beta(m) \cap \{0, 1\}^\infty$  is uncountable (and has the cardinality of the continuum) for all  $\beta > g_{\sigma M(1\bar{0})}(m)$ , i.e.  $\mathcal{L}(m) \leq g_{\sigma M(1\bar{0})}(m)$ . By symmetry, sequences in  $\sigma(\{1(10)^h, 1(10)^{h+1}\}^\infty)$  give that  $\mathcal{L}(m) \leq f_{\sigma M(0\bar{1})}(m)$  for  $m \leq \mu_{\sigma M(0\bar{1})}$ . Similarly, sequences in  $\{01^h, 01^{h+1}\}^\infty$  give that  $\mathcal{L}(m) \leq g_{0\bar{1}}(m)$  for  $m \geq \mu_{0\bar{1}}$ .

Now let  $\mathbf{u}$  be a limit word of a primitive sequence  $(\sigma_n)_{n \geq 1} \in \{L, M, R\}^\infty$  and set  $\sigma'_n = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ . Then  $\inf(\sigma'_n(1\bar{0})) \leq \inf(\mathbf{u}) \leq \inf(\sigma'_n(10\bar{1}))$  for all  $n \geq 1$ , and thus  $\inf(\sigma'_n(1\bar{0})) \rightarrow \inf(\mathbf{u})$ , and (by symmetry)  $\sup(\sigma'_n(0\bar{1})) \rightarrow \sup(\mathbf{u})$  as  $n \rightarrow \infty$ . Therefore, for each  $\beta > \max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m))$ , there is  $n \geq 1$  such that  $\sigma'_n(\mathbf{v}) \in U_\beta(m)$  for all  $\mathbf{v} \in \{0, 1\}^\infty \setminus \{\bar{0}, \bar{1}\}$ , and hence  $\mathcal{L}(m) \leq g_{\mathbf{u}}(m)$  for  $m \geq \mu_{\mathbf{u}}$ , and  $\mathcal{L}(m) \leq f_{\mathbf{u}}(m)$  for  $m \leq \mu_{\mathbf{u}}$ .

If  $\{v, w\}^\infty \subseteq U_\beta(m)$ , then by [7] we have  $\dim_H(\pi_\beta(U_\beta(m))) \geq r$ , with  $r > 0$ , such that  $\beta^{-|v|r} + \beta^{-|w|r} = 1$ , where  $|v|$  and  $|w|$  denote the lengths of  $v$  and  $w$ . □

For the lower bound, we use Lemma 2.6 below, which tells us that, if the orbit of a sequence satisfies inequalities that hold for all nontrivial images of  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ , then it is eventually in the image of  $\sigma$ . In particular, with  $\sigma = M^n$ ,  $n \geq 0$ , this yields that  $U_\beta(\{0, 1\})$  is countable for all  $\beta$  less than the Komornik–Loreti constant; cf. [6]. First we show that the conditions of Lemma 2.3 are satisfied for a suffix.

LEMMA 2.5. — Let  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\mathbf{u} \neq 0^k\bar{1}$  and  $\mathbf{u} \neq 1^k\bar{0}$  for all  $k \geq 0$ . There is a suffix  $\mathbf{v}$  of  $\mathbf{u}$ , such that  $\inf(\mathbf{v}) = \inf_1(\mathbf{v}) = \inf_1(\mathbf{u})$  and  $\sup(\mathbf{v}) = \sup_0(\mathbf{v}) = \sup_0(\mathbf{u})$ .

*Proof.* — If  $\inf(\mathbf{u}) = \inf_1(\mathbf{u})$ , and  $\sup(\mathbf{u}) = \sup_0(\mathbf{u})$ , then we can take  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ . Otherwise, assume that  $\inf(\mathbf{u}) \neq \inf_1(\mathbf{u})$ , the case  $\sup(\mathbf{u}) \neq \sup_0(\mathbf{u})$  being symmetric. Then we have  $\inf(\mathbf{u}) = \mathbf{u} = 0^k 01\mathbf{u}'$  for some  $k \geq 0$ ,  $\mathbf{u}' \in \{0, 1\}^\infty \setminus \{\bar{1}\}$ ,

$$\begin{aligned} \sup_0(\mathbf{u}) &= \sup_0(01\mathbf{u}') = \sup(01\mathbf{u}'), \\ \inf_1(\mathbf{u}) &= \inf_1(01\mathbf{u}') = \inf_1(1\mathbf{u}') = \inf(1\mathbf{u}'). \end{aligned}$$

If  $\inf_1(01\mathbf{u}') \neq \inf(01\mathbf{u}')$ , then  $\mathbf{u}' = 1^n 01\mathbf{u}''$  with  $n \geq 0$ ,  $\mathbf{u}'' > \mathbf{u}'$ , which implies that  $\sup_0(\mathbf{u}) = \sup_0(1\mathbf{u}') = \sup(1\mathbf{u}')$ . Hence, we can take  $\mathbf{v} = 01\mathbf{u}'$  or  $\mathbf{v} = 1\mathbf{u}'$ . □

LEMMA 2.6. — Let  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$ ,  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ , with  $\inf(\mathbf{u}) \geq \inf(\sigma(1\bar{0}))$ ,  $\sup(\mathbf{u}) \leq \sup(\sigma(0\bar{1}))$ . Then  $\mathbf{u}$  ends with  $\sigma(\mathbf{v})$  for some  $\mathbf{v} \in \{0, 1\}^\infty$  or with  $\sigma'(\bar{0})$ ,  $\sigma' \in \{L, M, R\}^* M$ ,  $\sigma \in \sigma'\{L, M, R\}^*$ .

*Proof.* — The statement is trivially true when  $\sigma$  is the identity. Suppose that it holds for some  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ , let  $\varphi \in \{L, M, R\}$  and  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$  with  $\inf(\mathbf{u}) \geq \inf(\varphi\sigma(1\bar{0}))$ ,  $\sup(\mathbf{u}) \leq \sup(\varphi\sigma(0\bar{1}))$ .

If  $\varphi = L$ , then  $\sup(\mathbf{u}) \leq \bar{10}$ , and thus every 1 in  $\mathbf{u}$  is followed by a 0; hence  $\mathbf{u} = L(\mathbf{v})$  or  $\mathbf{u} = 1L(\mathbf{v})$  for some  $\mathbf{v} \in \{0, 1\}^\infty$ . Similarly, if  $\varphi = R$ , then  $\inf(\mathbf{u}) \geq \bar{01}$ , and hence  $\mathbf{u} = R(\mathbf{v})$ , or  $\mathbf{u} = 0R(\mathbf{v})$  for some  $\mathbf{v} \in \{0, 1\}^\infty$ . If  $\varphi = M$ , then  $\inf(\mathbf{u}) \geq \bar{001}$ , and  $\sup(\mathbf{u}) \leq \bar{110}$ . Hence, for all  $k \geq 1$ ,  $0(01)^k$  and  $1(10)^k$  are always followed in  $\mathbf{u}$  by 01 or 10. Since  $\mathbf{u}$  contains 001 or 110, if  $\mathbf{u} \notin \{M(\bar{0}), M(\bar{1})\}$ , we obtain that  $\mathbf{u}$  ends with  $M(\mathbf{v})$  for some  $\mathbf{v} \in \{0, 1\}^\infty$ .

We can assume that  $\mathbf{v} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$  or  $\inf_1(\mathbf{v}) = \inf(\mathbf{v})$  and  $\sup_0(\mathbf{v}) = \sup(\mathbf{v})$  by Lemma 2.5. If  $\mathbf{v} \neq \bar{0}$ , then we cannot have  $\inf(\mathbf{v}) < \inf(\sigma(1\bar{0}))$  because this would imply that  $\inf(\varphi(\mathbf{v})) < \inf(\varphi\sigma(1\bar{0}))$  by Lemma 2.3. Similarly, we obtain that  $\sup(\mathbf{v}) \leq \sup(\sigma(1\bar{0}))$  if  $\mathbf{v} \neq \bar{1}$ . If  $\mathbf{v} = \bar{0}$ ,  $\varphi \in \{L, R\}$ , then  $\inf(\varphi(\bar{0})) \geq \inf(\varphi\sigma(1\bar{0}))$  implies that  $\inf(\sigma(1\bar{0})) = \bar{0}$ , and thus  $\mathbf{v} = \sigma(\bar{0})$ . Similarly, if  $\mathbf{v} = \bar{1}$  and  $\varphi \in \{L, R\}$ , then  $\sup(\varphi(\bar{1})) \leq \sup(\varphi\sigma(0\bar{1}))$  implies that  $\sup(\sigma(0\bar{1})) = \bar{1}$ , thus  $\mathbf{v} = \sigma(\bar{1})$ . If  $\mathbf{v} \in \{\bar{0}, \bar{1}\}$ ,  $\varphi = M$ , and then  $\mathbf{u}$  ends with  $M(\bar{0})$  since  $M(\bar{1}) = 1M(\bar{0})$ . Therefore,  $\mathbf{u}$  ends with  $\varphi\sigma(\mathbf{v})$  or with  $\sigma'(\bar{0})$ ,  $\sigma' \in \{L, M, R\}^* M$ ,  $\varphi\sigma \in \sigma'\{L, M, R\}^*$ . □

We obtain the following lower bound for  $\mathcal{L}(m)$ , cf. Figure 2.2.

PROPOSITION 2.7. — Let  $m \in (1, 2]$ . We have  $\mathcal{L}(m) \geq g_{0\bar{1}}(m)$  and

$$\mathcal{L}(m) \geq \begin{cases} g_{\sigma(1\bar{0})}(m) & \text{if } m \leq \mu_{\sigma(01\bar{0})}, \sigma \in \{L, M, R\}^*, \\ f_{\sigma(0\bar{1})}(m) & \text{if } m \geq \mu_{\sigma(10\bar{1})}, \sigma \in \{L, M, R\}^*, \\ g_{\mathbf{u}}(m) & \text{if } m \leq \mu_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L, M, R\}}, \\ f_{\mathbf{u}}(m) & \text{if } m \geq \mu_{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L, M, R\}}. \end{cases}$$

*Proof.* — For all  $\mathbf{v} \in 1\{0, 1\}^\infty \setminus \{\bar{1}\}$ , we have  $\inf(\mathbf{v}) \leq 0\bar{1}$ . Then  $\mathbf{v} \in U_\beta(m)$  implies that  $\beta \geq g_{0\bar{1}}(m)$  by Lemma 2.2, hence  $\mathcal{L}(m) \geq g_{0\bar{1}}(m)$ .

Suppose that  $U_\beta(m) \cap \{0, 1\}^\infty$  is uncountable for  $\beta < g_{\sigma(1\bar{0})}(m)$ ,  $m \leq \mu_{\sigma(01\bar{0})}$ ,  $\sigma \in \{L, M, R\}^*M$ , and thus  $\beta < g_{\sigma(01\bar{0})}(m) \leq f_{\sigma(01\bar{0})}(m)$ . Then  $U_\beta(m)$  contains an aperiodic sequence  $\mathbf{v} \in 1\{0, 1\}^\infty$ , with  $f_{\mathbf{v}}(m) < f_{\sigma(01\bar{0})}(m)$  and  $g_{\mathbf{v}}(m) < g_{\sigma(1\bar{0})}(m)$  by Lemma 2.2; thus  $\inf(\mathbf{v}) > \inf(\sigma(1\bar{0}))$  and  $\sup(\mathbf{v}) < \sup(\sigma(01\bar{0}))$  by Lemma 2.1. By Lemma 2.6,  $\mathbf{v}$  ends with  $\sigma(\mathbf{v}')$  for some (aperiodic)  $\mathbf{v}' \in \{0, 1\}^\infty$ , contradicting that  $\sup(\mathbf{v}) < \sup(\sigma(01\bar{0}))$ . Symmetrically, we get that  $\mathcal{L}(m) \geq f_{\sigma(0\bar{1})}(m)$  for  $m \geq \mu_{\sigma(10\bar{1})}$ .

If  $\mathbf{u}$  is a limit word of a primitive sequence  $(\sigma_n)_{n \geq 1} \in \{L, M, R\}^\infty$ , then we have  $\mu_{\sigma'_n(01\bar{0})} \rightarrow \mu_{\mathbf{u}}$  for  $\sigma'_n = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n$  as  $n \rightarrow \infty$ , and thus  $\beta < g_{\mathbf{u}}(m)$ ,  $m \leq \mu_{\mathbf{u}}$  implies that  $\beta < \min(g_{\sigma'_n(01\bar{0})}(m), f_{\sigma'_n(01\bar{0})}(m))$  for some  $n \geq 1$ , and as in the previous paragraph, we obtain that  $U_\beta(m) \cap \{0, 1\}^\infty$  is at most countable. Therefore, we have  $\mathcal{L}(m) \geq g_{\mathbf{u}}(m)$  and, similarly,  $\mathcal{L}(m) \geq f_{\mathbf{u}}(m)$  for  $m \geq \mu_{\mathbf{u}}$ .  $\square$

Propositions 2.4 and 2.7 prove the formula for  $\mathcal{L}(m)$  in Theorem 1.1. It remains to show that this covers all  $m \in (1, 2]$ .

For the characterisation of  $\mathcal{G}(m)$ , in [3, Proposition 3.3] the partition

$$(\bar{0}, 0\bar{1}) = \mathcal{S}_{\{L, R\}} \cup \bigcup_{\sigma \in \{L, R\}^*} [\sigma(0\bar{0}\bar{1}), \sigma(0\bar{1})]$$

for intervals of sequences in  $\{0, 1\}^\infty$  is used, which is a consequence of the partition

$$(\bar{0}, 0\bar{1}) = L((\bar{0}, 0\bar{1})) \cup [0\bar{0}\bar{1}, 0\bar{1}] \cup R((\bar{0}, 0\bar{1})).$$

We have to refine these partitions. For  $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 1} \in \{L, M, R\}^\infty$ , set

$$I_\sigma = \begin{cases} \{\inf(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \text{ is a limit word of } \sigma\} & \text{if } \sigma \text{ is primitive,} \\ \{\inf(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n(1\bar{0}))\} & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1} \cdots = M\bar{L}, n \geq 1, \\ \{\inf(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n(10\bar{1})), \inf(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n(\bar{1}))\} & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1} \cdots = M\bar{R}, n \geq 1, \\ \emptyset & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$J_\sigma = \begin{cases} \{\sup(\mathbf{u}) : \mathbf{u} \text{ is a limit word of } \sigma\} & \text{if } \sigma \text{ is primitive,} \\ [\sup(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n(\bar{0})), \sup(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n(01\bar{0}))] & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1} \cdots = M\bar{L}, n \geq 1, \\ \{\sup(\sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_n(0\bar{1}))\} & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1} \cdots = M\bar{R}, n \geq 1, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Note that, for a primitive sequence  $\sigma$ ,  $\inf(\mathbf{u})$  and  $\sup(\mathbf{u})$  do not depend on the limit word  $\mathbf{u}$ . We order sequences in  $\{L, M, R\}^\infty$  lexicographically.

LEMMA 2.8. — In  $\{0, 1\}^\infty$ , we have

$$(\bar{0}, 0\bar{1}) = \bigcup_{\sigma \in \{L, M, R\}^\infty} I_\sigma \quad \text{and} \quad (1\bar{0}, \bar{1}) = \bigcup_{\sigma \in \{L, M, R\}^\infty} J_\sigma.$$

If  $\sigma < \sigma'$ , then  $\mathbf{v} < \mathbf{v}'$  for all  $\mathbf{v} \in I_\sigma$ ,  $\mathbf{v}' \in I_{\sigma'}$ , and for all  $\mathbf{v} \in J_\sigma$ ,  $\mathbf{v}' \in J_{\sigma'}$ .

*Proof.* — We clearly have  $I_\sigma \subset (\bar{0}, 0\bar{1})$  for all  $\sigma \in \{L, M, R\}^\infty$ . For all  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ , Lemma 2.3 gives that  $\inf(\sigma(1\bar{0})) = \inf(\sigma L(1\bar{0}))$ ,  $\inf(\sigma L(10\bar{1})) = \inf(\sigma M(1\bar{0}))$ , and we have  $M(\bar{1}) = R(1\bar{0})$ ,  $R(10\bar{1}) = 10\bar{1}$ , and thus

$$\begin{aligned} (\inf(\sigma(1\bar{0})), \inf(\sigma(10\bar{1}))) &= (\inf(\sigma L(1\bar{0})), \inf(\sigma L(10\bar{1}))) \\ &\cup \{\inf(\sigma M(1\bar{0}))\} \cup (\inf(\sigma M(1\bar{0})), \inf(\sigma M(10\bar{1}))) \\ &\cup [\inf(\sigma M(10\bar{1})), \inf(\sigma M(\bar{1}))] \\ &\cup (\inf(\sigma R(1\bar{0})), \inf(\sigma R(10\bar{1}))) \end{aligned}$$

(in this order). Inductively, we obtain that the sets  $I_\sigma$  are ordered by the lexicographical order on  $\{L, M, R\}^\infty$ . Moreover, the union of sets  $I_\sigma$  with  $\sigma$  ending in  $M\bar{L}$  or  $M\bar{R}$  covers  $(\inf(1\bar{0}), \inf(10\bar{1})) = (\bar{0}, 0\bar{1})$ , except for points lying in the intersection of nested intervals  $\bigcap_{n \geq 1} (\inf(\sigma_1 \cdots \sigma_n(1\bar{0})), \inf(\sigma_1 \cdots \sigma_n(10\bar{1})))$  for some  $\sigma = (\sigma_n)_{n \geq 1} \in \{L, M, R\}^\infty$ . Since  $\sigma_1 \cdots \sigma_n(\bar{0})$  is close to  $\sigma_1 \cdots \sigma_n(0\bar{1})$  for large  $n$ , these intervals tend to some  $\mathbf{v} \in \{0, 1\}^\infty$ . If  $\sigma$  is primitive, then  $I_\sigma = \{\mathbf{v}\}$ . If  $\sigma_{n+1}\sigma_{n+2}\cdots$  is  $\bar{L}$  or  $\bar{R}$ , then we have  $\mathbf{v} = \inf(\sigma_1 \cdots \sigma_n(1\bar{0}))$  or  $\mathbf{v} = \inf(\sigma_1 \cdots \sigma_n(10\bar{1}))$ , which are not in the intersection.

The proof for  $(1\bar{0}, \bar{1}) = \bigcup_{\sigma \in \{L, M, R\}^\infty} J_\sigma$  is similar, with

$$\begin{aligned} (\sup(\sigma(01\bar{0})), \sup(\sigma(0\bar{1}))) &= (\sup(\sigma L(01\bar{0})), \sup(\sigma L(0\bar{1}))) \\ &\cup [\sup(\sigma M(\bar{0})), \sup(\sigma M(01\bar{0}))] \\ &\cup (\sup(\sigma M(01\bar{0})), \sup(\sigma M(0\bar{1}))) \\ &\cup \{\sup(\sigma M(0\bar{1}))\} \cup (\sup(\sigma R(01\bar{0})), \sup(\sigma R(0\bar{1}))). \end{aligned}$$

Hence, the  $J_\sigma$  are also ordered by the lexicographical order on  $\{L, M, R\}^\infty$ .  $\square$

PROPOSITION 2.9. — We have the partition

$$\begin{aligned} (1, \mu_{0\bar{1}}) &= \{\mu_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\{L, M, R\}}\} \\ &\cup \bigcup_{\sigma \in \{L, M, R\}^* M} ([\mu_{\sigma(1\bar{0})}, \mu_{\sigma(01\bar{0})}] \cup [\mu_{\sigma(10\bar{1})}, \mu_{\sigma(0\bar{1})}]). \end{aligned}$$



*Proof.* — For  $m \in (1, \mu_{0\bar{1}})$ ,  $\sigma \in \{L, M, R\}^\infty$ , let

$$I'_\sigma(m) = \begin{cases} \{g_{\mathbf{u}}(m) : \mathbf{u} \text{ is a limit word of } \sigma\} & \text{if } \sigma \text{ is primitive,} \\ \{g_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n(\bar{10})}(m)\} & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1}\cdots = M\bar{L}, n \geq 1, \\ [g_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n(\bar{1})}(m), g_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n(10\bar{1})}(m)] & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1}\cdots = M\bar{R}, n \geq 1, \\ \emptyset & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$J'_\sigma(m) = \begin{cases} \{f_{\mathbf{u}}(m) : \mathbf{u} \text{ is a limit word of } \sigma\} & \text{if } \sigma \text{ is primitive,} \\ [f_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n(\bar{0})}(m), f_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n(01\bar{0})}(m)] & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1}\cdots = M\bar{L}, n \geq 1, \\ \{f_{\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n(0\bar{1})}(m)\} & \text{if } \sigma_n\sigma_{n+1}\cdots = M\bar{R}, n \geq 1, \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

By Lemmas 2.1 and 2.8, we have

$$(1, g_{1\bar{0}}(m)) = \bigcup_{\sigma \in \{L, M, R\}^\infty} I'_\sigma(m) \quad \text{and} \quad (1, f_{0\bar{1}}(m)) = \bigcup_{\sigma \in \{L, M, R\}^\infty} J'_\sigma(m).$$

(Note that  $f_{\mathbf{u}}(m)$  is close to  $f_{\mathbf{u}'}$ , if  $\text{sup}(\mathbf{u})$  is close to  $\text{sup}(\mathbf{u}')$ ;  $g_{\mathbf{u}}(m)$  is close to  $g_{\mathbf{u}'}$ , if  $\text{inf}(\mathbf{u})$  is close to  $\text{inf}(\mathbf{u}')$ .) If  $\sigma < \sigma'$ , then we have  $\beta > \beta'$ , if  $\beta \in I'_\sigma(m)$ ,  $2 \leq \beta' \in I'_{\sigma'}(m)$ , and  $\beta < \beta'$ , if  $2 \leq \beta \in J'_\sigma(m)$ ,  $\beta' \in J'_{\sigma'}(m)$ , by Lemmas 2.1 and 2.8. Since  $\max(f_{\mathbf{u}}(m), g_{\mathbf{u}}(m)) \geq 2$  for all  $\mathbf{u} \in \{0, 1\}^\infty$ , and  $\text{inf}(\sigma M(\bar{10})) \leq \text{inf}(\sigma M(\bar{0}))$ ,  $\text{sup}(\sigma M(0\bar{1})) \geq \text{sup}(\sigma M(\bar{1}))$  for all  $\sigma \in \{L, M, R\}^*$ , we have  $I'_\sigma(m) \subset [2, \infty)$  or  $J'_\sigma(m) \subset [2, \infty)$  for all  $\sigma \in \{L, M, R\}^\infty$ . Therefore, we have  $I'_\sigma(m) \cap J'_{\sigma'}(m) \neq \emptyset$  for some  $\sigma \in \{L, M, R\}^\infty$ . If  $\sigma$  is primitive, this means that  $m = \mu_{\mathbf{u}}$ . If  $\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots = M\bar{L}$ , then we have  $g_{\sigma_1\cdots\sigma_n(\bar{10})}(m) \in [f_{\sigma_1\cdots\sigma_n(\bar{0})}(m), f_{\sigma_1\cdots\sigma_n(01\bar{0})}(m)]$ , which means that  $m \in [\mu_{\sigma_1\cdots\sigma_n(\bar{10})}, \mu_{\sigma_1\cdots\sigma_n(01\bar{0})}]$ , see Figure 2.2. Similarly, if  $\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots = M\bar{R}$ , then we have that  $m \in [\mu_{\sigma_1\cdots\sigma_n(\bar{10}\bar{1})}, \mu_{\sigma_1\cdots\sigma_n(0\bar{1})}]$ .  $\square$

*Proof of Theorem 1.1.* — This is a direct consequence of Propositions 2.4, 2.7 and 2.9.  $\square$

### 3. Final remarks and open questions

According to [9, 3, 13], there are simple formulas for  $\mu_{\sigma(\bar{10})}$ ,  $\mu_{\sigma(\bar{0})}$  and  $\mu_{\sigma(0\bar{1})}$ ,  $\sigma \in \{L, R\}^*M$ , and for  $\mu_{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{L,R}$ . This is because, for  $\mathbf{u} \in \{\sigma(\bar{10}), \sigma(0\bar{1})\}$ ,  $\sigma \in \{L, R\}^*M$ , or  $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{L,R}$ , we have  $\text{inf}(\mathbf{u}) = 0\mathbf{v}$ ,  $\text{sup}(\mathbf{u}) = 1\mathbf{v}$  for some  $\mathbf{v}$ , and thus  $(\beta - 1)(1 + \pi_\beta(0\mathbf{v})) = (\beta - 1)^2 = \beta\pi_\beta(1\mathbf{v})$ , where  $\beta > 1$  is defined by  $\pi_\beta(20\mathbf{v}) = 1$ , which gives  $\mu_{\mathbf{u}} = (\beta - 1)^2$ . For  $\mathbf{u} = \sigma(\bar{0})$ , we have  $\text{inf}(\mathbf{u}) = 0w\bar{1}$ ,  $\text{sup}(\mathbf{u}) = \bar{1}w\bar{0}$ , with  $\sigma(0) = 0w1$ , and

$$(\beta - 1)(1 + \pi_\beta(\overline{0w1})) = (\beta - 1)\beta\pi_\beta(\overline{10w}) = \frac{(\beta - 1)^2\beta^{|\sigma(0)|}}{\beta^{|\sigma(0)|} - 1} = \beta\pi_\beta(\overline{1w0}),$$

where  $\beta > 1$  is defined by  $\pi_\beta(20w\bar{0}) = 1$ , and  $|\sigma(0)|$  is the length of  $\sigma(0)$ , and hence  $\mu_{\sigma(\bar{0})} = (\beta - 1)^2 \beta^{|\sigma(0)|} / (\beta^{|\sigma(0)|} - 1)$ . Are there similar formulas for  $\sigma \in \{L, M, R\}^* M$ ?

In [3, 13], it was proved that the Hausdorff dimension of  $\{\mu_{\mathbf{u}} : \mathbf{u} \in \mathcal{S}_{L,R}\}$  is 0, using that the number of balanced words grows polynomially. What is the complexity of  $\mathcal{S}_{L,M,R}$ ?

As mentioned in the Introduction, we know the generalised Komornik–Loreti constant  $\mathcal{K}(m)$  only for  $m = 2$  and when  $\mathcal{G}(m) = 1 + \sqrt{m} = \mathcal{K}(m) = \mathcal{L}(m)$ . This is due to the fact that it is usually difficult to study maps with two holes; see Figure 2.1. (For  $m = 2$ , we can use the symmetry of the map  $T$ , and for  $\mathcal{L}(m) = 1 + \sqrt{m}$ , we can restrict to sequences in  $\{0, 1\}^\infty$ .) New ideas are needed for the general case.

Finally, *Sturmian holes* are key ingredients in [16], where supercritical holes for the doubling map are studied. Do our Thue–Morse–Sturmian sequences also play a role in this context?

## BIBLIOGRAPHY

- [1] R. ALCARAZ BARRERA, S. BAKER & D. KONG – “Entropy, topological transitivity, and dimensional properties of unique  $q$ -expansions”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **371** (2019), no. 5, p. 3209–3258.
- [2] S. BAKER – “Generalized golden ratios over integer alphabets”, *Integers* **14** (2014), Paper No. A15, 28.
- [3] S. BAKER & W. STEINER – “On the regularity of the generalised golden ratio function”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **49** (2017), no. 1, p. 58–70.
- [4] V. BERTHÉ & V. DELECROIX – “Beyond substitutive dynamical systems:  $S$ -adic expansions”, in *Numeration and substitution 2012*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B46, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014, p. 81–123.
- [5] Z. DARÓCZY & I. KÁTAI – “Univoque sequences”, *Publ. Math. Debrecen* **42** (1993), no. 3-4, p. 397–407.
- [6] P. GLENDINNING & N. SIDOROV – “Unique representations of real numbers in non-integer bases”, *Math. Res. Lett.* **8** (2001), no. 4, p. 535–543.
- [7] J. E. HUTCHINSON – “Fractals and self-similarity”, *Indiana Univ. Math. J.* **30** (1981), no. 5, p. 713–747.
- [8] V. KOMORNIK, D. KONG & W. LI – “Hausdorff dimension of univoque sets and Devil’s staircase”, *Adv. Math.* **305** (2017), p. 165–196.
- [9] V. KOMORNIK, A. C. LAI & M. PEDICINI – “Generalized golden ratios of ternary alphabets”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **13** (2011), no. 4, p. 1113–1146.

- [10] V. KOMORNIK & P. LORETI – “Subexpansions, superexpansions and uniqueness properties in non-integer bases”, *Period. Math. Hungar.* **44** (2002), no. 2, p. 197–218.
- [11] V. KOMORNIK & M. PEDICINI – “Critical bases for ternary alphabets”, *Acta Math. Hungar.* **152** (2017), no. 1, p. 25–57.
- [12] D. KONG, W. LI, F. LÜ & M. DE VRIES – “Univoque bases and Hausdorff dimension”, *Monatsh. Math.* **184** (2017), no. 3, p. 443–458.
- [13] D. KWON – “Sturmian words and Cantor sets arising from unique expansions over ternary alphabets”, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **39** (2019), no. 10, p. 2827–2854.
- [14] A. C. LAI – “Minimal unique expansions with digits in ternary alphabets”, *Indag. Math. (N.S.)* **21** (2011), no. 1–2, p. 1–15.
- [15] M. LOTHAIRE – *Algebraic combinatorics on words*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 90, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [16] N. SIDOROV – “Supercritical holes for the doubling map”, *Acta Math. Hungar.* **143** (2014), no. 2, p. 298–312.



## UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION DE LA CLASSIFICATION DES FEUILLETAGES CONVEXES DE DEGRÉ DEUX SUR $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

PAR SAMIR BEDROUNI & DAVID MARÍN

---

RÉSUMÉ. — Un feuilletage holomorphe sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ou analytique réel sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  est dit convexe si ses feuilles qui ne sont pas des droites n'ont pas de points d'inflexion. La classification des feuilletages convexes de degré 2 sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  a été établie en 2015 par C. FAVRE et J. PEREIRA. L'argument principal de cette classification était un résultat obtenu en 2004 par D. SCHLOMIUK et N. VULPE concernant les champs de vecteurs réels polynomiaux de degré 2 dont le feuilletage de  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  associé est convexe. Nous présentons ici une nouvelle démonstration de cette classification, plus simple, n'utilisant pas ce résultat et ne sortant pas du cadre holomorphe; elle s'appuie sur des propriétés de certains modèles de feuilletages convexes de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  de degré quelconque et du discriminant du tissu dual d'un feuilletage de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

---

*Texte reçu le 4 septembre 2019, accepté le 12 mai 2020.*

SAMIR BEDROUNI, Faculté de Mathématiques, USTHB, BP 32, El-Alia, 16111 Bab-Ezzouar, Alger, Algérie • *E-mail* : [sbedrouni@usthb.dz](mailto:sbedrouni@usthb.dz)

DAVID MARÍN, Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, E-08193 Bellaterra (Barcelona), Spain; Centre de Recerca Matemàtica, E-08193 Bellaterra, Spain • *E-mail* : [davidmp@mat.uab.es](mailto:davidmp@mat.uab.es)

Classification mathématique par sujets (2010). — 37F75, 32S65, 32M25.

Mots clefs. — Feuilletage convexe, Tissu dual, Discriminant, Singularité, Diviseur d'inflexion.

D. Marín acknowledges financial support from the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness, through the grants MTM2015-66165-P, PGC2018-095998-B-I00 and the « María de Maeztu » Programme for Units of Excellence in R&D (MDM-2014-0445).

ABSTRACT (*A new proof of the classification of convex foliations of degree two on the complex projective plane*). — A holomorphic foliation on  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , or a real analytic foliation on  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ , is said to be convex if its leaves other than straight lines have no inflection points. The classification of the convex foliations of degree 2 on  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  has been established in 2015 by C. FAVRE and J. PEREIRA. The main argument of this classification was a result obtained in 2004 by D. SCHLOMIUK and N. VULPE concerning the real polynomial vector fields of degree 2 whose associated foliation on  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  is convex. We present here a new proof of this classification, that is simpler, does not use this result and does not leave the holomorphic framework. It is based on the properties of certain models of convex foliations of  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  of arbitrary degree and of the discriminant of the dual web of a foliation of  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

### Introduction

L'ensemble  $\mathbf{F}(d)$  des feuilletages de degré  $d$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  s'identifie à un ouvert de ZARISKI dans un espace projectif de dimension  $(d+2)^2 - 2$  sur lequel agit le groupe  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ . Suivant [7] un feuilletage de  $\mathbf{F}(d)$  est dit *convexe* si ses feuilles qui ne sont pas des droites n'ont pas de points d'inflexion.

D'après [5, Proposition 2.2] tout feuilletage de degré 0 ou 1 est convexe. Pour  $d \geq 2$ , l'ensemble des feuilletages convexes de  $\mathbf{F}(d)$  est un fermé de ZARISKI propre de  $\mathbf{F}(d)$  et il contient les feuilletages  $\mathcal{H}_1^d$ , resp.  $\mathcal{F}_1^d$ , resp.  $\mathcal{F}_0^d$  définis en carte affine par les 1-formes (*voir* [2, Proposition 4.1], [1, page 75] et [7, page 179])

$$\begin{aligned}\omega_1^d &= y^d dx - x^d dy, \\ \text{resp. } \bar{\omega}_1^d &= y^d dx + x^d (xdy - ydx), \\ \text{resp. } \bar{\omega}_0^d &= (x^d - x)dy - (y^d - y)dx.\end{aligned}$$

Les feuilletages  $\mathcal{H}_1^d$  et  $\mathcal{F}_1^d$  appartiennent tous deux à l'adhérence dans  $\mathbf{F}(d)$  de l'orbite sous l'action de  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$  du feuilletage  $\mathcal{F}_0^d$ , dit feuilletage de FERMAT de degré  $d$ . Notons de plus que  $\mathcal{H}_1^d$  est *homogène* au sens où il est invariant par homothétie.

En 2015 FAVRE et PEREIRA [6, Proposition 7.4] ont classifié les feuilletages convexes de degré 2 sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Plus précisément ils ont montré le résultat suivant.

THÉORÈME A ([6]). — *À automorphisme de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  près, il y a trois feuilletages convexes de degré deux sur le plan projectif complexe, à savoir les feuilletages  $\mathcal{H}_1^2$ ,  $\mathcal{F}_1^2$  et  $\mathcal{F}_0^2$  décrits respectivement en carte affine par les 1-formes suivantes*

1.  $\omega_1^2 = y^2 dx - x^2 dy$  ;
2.  $\bar{\omega}_1^2 = y^2 dx + x^2 (xdy - ydx)$  ;
3.  $\bar{\omega}_0^2 = (x^2 - x)dy - (y^2 - y)dx$ .

L'argument fondamental de cette classification était le résultat de SCHLOMIUK et VULPE dans [10, Théorème 50]. Ces derniers donnent en carte affine une liste [10, Table 2] de formes normales pour les feuilletages convexes de degré 2 sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$  (ils considèrent en effet des champs de vecteurs de type  $X = A(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ , où  $A$  et  $B$  sont des polynômes de  $\mathbb{R}[x, y]$  vérifiant  $\text{pgcd}(A, B) = 1$  et  $\max(\deg A, \deg B) = 2$ ). FAVRE et PEREIRA [6, Proposition 7.4] ont remarqué que les arguments de [10, Théorème 50] s'appliquent de façon identique aux champs de vecteurs complexes. Leur démonstration a ainsi consisté à réduire le nombre de modèles de champs de vecteurs réels présentés dans [10, Table 2] en cherchant ceux qui sont conjugués par un automorphisme de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

Dans cet article nous donnons une nouvelle démonstration de cette classification, n'utilisant pas [10, Théorème 50] et ne sortant pas du cadre analytique complexe ; elle repose sur certaines propriétés des feuilletages  $\mathcal{H}_1^d, \mathcal{F}_0^d, \mathcal{F}_1^d$  ([2, Proposition 4.1], [2, Proposition 6.3], Proposition 2.4 démontrée au §2) et du discriminant du tissu dual d'un feuilletage de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ([4, Lemme 2.2] et [7, Proposition 3.3]), voir §2 et §3.

### 1. Singularités, diviseur d'inflexion et tissu dual d'un feuilletage de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$

Un feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}$  de degré  $d$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est défini en coordonnées homogènes  $[x : y : z]$  par une 1-forme du type

$$\omega = a(x, y, z)dx + b(x, y, z)dy + c(x, y, z)dz,$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des polynômes homogènes de degré  $d + 1$  sans facteur commun satisfaisant la condition d'EULER  $i_{\mathbb{R}}\omega = 0$ , où  $\mathbb{R} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$  désigne le champ radial et  $i_{\mathbb{R}}$  le produit intérieur par  $\mathbb{R}$ . Le lieu singulier  $\text{Sing } \mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}$  est le projectivisé du lieu singulier de  $\omega$

$$\text{Sing } \omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid a(x, y, z) = b(x, y, z) = c(x, y, z) = 0\}.$$

Rappelons quelques notions locales attachées au couple  $(\mathcal{F}, s)$ , où  $s \in \text{Sing } \mathcal{F}$ . Le germe de  $\mathcal{F}$  en  $s$  est défini, à multiplication près par une unité de l'anneau local  $\mathcal{O}_s$  en  $s$ , par un champ de vecteurs  $X = A(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + B(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$ . La multiplicité algébrique  $\nu(\mathcal{F}, s)$  de  $\mathcal{F}$  en  $s$  est donnée par

$$\nu(\mathcal{F}, s) = \min\{\nu(A, s), \nu(B, s)\},$$

où  $\nu(g, s)$  désigne la multiplicité algébrique de la fonction  $g$  en  $s$ . L'ordre de tangence entre  $\mathcal{F}$  et une droite générique passant par  $s$  est l'entier

$$\tau(\mathcal{F}, s) = \min\{k \geq \nu(\mathcal{F}, s) : \det(J_s^k X, R_s) \neq 0\},$$

où  $J_s^k X$  est le  $k$ -jet de  $X$  en  $s$  et  $R_s$  est le champ radial centré en  $s$ .

La singularité  $s$  de  $\mathcal{F}$  est dite *radiale* si  $\nu(\mathcal{F}, s) = 1$  et si de plus  $\tau(\mathcal{F}, s) \geq 2$ . Si tel est le cas, l'entier naturel  $\tau(\mathcal{F}, s) - 1$ , compris entre 1 et  $d - 1$ , est appelé l'*ordre de radialité* de  $s$ .

Rappelons la notion du diviseur d'inflexion de  $\mathcal{F}$ . Soit  $Z = E \frac{\partial}{\partial x} + F \frac{\partial}{\partial y} + G \frac{\partial}{\partial z}$  un champ de vecteurs homogène de degré  $d$  sur  $\mathbb{C}^3$  non colinéaire au champ radial décrivant  $\mathcal{F}$ , *i.e.* tel que  $\omega = i_{\mathbb{R}} i_Z dx \wedge dy \wedge dz$ . Le *diviseur d'inflexion* de  $\mathcal{F}$ , noté  $I_{\mathcal{F}}$ , est le diviseur défini par l'équation

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x & E & Z(E) \\ y & F & Z(F) \\ z & G & Z(G) \end{vmatrix} = 0.$$

Ce diviseur a été étudié dans [8] dans un contexte plus général. En particulier, les propriétés suivantes ont été prouvées.

1. Sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \text{Sing } \mathcal{F}$ ,  $I_{\mathcal{F}}$  coïncide avec la courbe décrite par les points d'inflexion des feuilles de  $\mathcal{F}$  ;
2. Si  $\mathcal{C}$  est une courbe algébrique irréductible invariante par  $\mathcal{F}$ , alors  $\mathcal{C} \subset I_{\mathcal{F}}$  si et seulement si  $\mathcal{C}$  est une droite invariante ;
3.  $I_{\mathcal{F}}$  peut se décomposer en  $I_{\mathcal{F}} = I_{\mathcal{F}}^{\text{inv}} + I_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$ , où le support de  $I_{\mathcal{F}}^{\text{inv}}$  est constitué de l'ensemble des droites invariantes par  $\mathcal{F}$  et où le support de  $I_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}$  est l'adhérence des points d'inflexion qui sont isolés le long des feuilles de  $\mathcal{F}$  ;
4. Le degré du diviseur  $I_{\mathcal{F}}$  est  $3d$ .

DÉFINITION 1.1 ([7]). — Un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est dit *convexe* si son diviseur d'inflexion  $I_{\mathcal{F}}$  est totalement invariant par  $\mathcal{F}$ , *i.e.* si  $I_{\mathcal{F}}$  est le produit de droites invariantes par  $\mathcal{F}$ .

Rappelons maintenant la définition d'un  $k$ -tissu sur une surface complexe  $S$ .

DÉFINITION 1.2. — Soit  $k \geq 1$  un entier. Un  $k$ -tissu (*global*)  $\mathcal{W}$  sur  $S$  est la donnée d'un recouvrement ouvert  $(U_i)_{i \in I}$  de  $S$  et d'une collection de  $k$ -formes symétriques  $\omega_i \in \text{Sym}^k \Omega_S^1(U_i)$ , à zéros isolés, satisfaisant :

- (a) il existe  $g_{ij} \in \mathcal{O}_S^*(U_i \cap U_j)$  tel que  $\omega_i$  coïncide avec  $g_{ij} \omega_j$  sur  $U_i \cap U_j$  ;
- (b) en tout point générique  $m$  de  $U_i$ ,  $\omega_i(m)$  se factorise en produit de  $k$  formes linéaires deux à deux non colinéaires.

Le *discriminant*  $\Delta(\mathcal{W})$  de  $\mathcal{W}$  est le diviseur défini localement par  $\Delta(\omega_i) = 0$ , où  $\Delta(\omega_i)$  est le discriminant de la  $k$ -forme symétrique  $\omega_i \in \text{Sym}^k \Omega_S^1(U_i)$ , voir [9, Chapitre 1, §1.3.4]. Le support de  $\Delta(\mathcal{W})$  est constitué des points de  $S$  qui ne vérifient pas la condition (b). Lorsque  $k = 1$  cette condition est toujours vérifiée et on retrouve la définition usuelle d'un feuilletage holomorphe  $\mathcal{F}$  sur  $S$ .



Un  $k$ -tissu global  $\mathcal{W}$  sur  $S$  est dit *décomposable* s'il existe des tissus globaux  $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2$  sur  $S$  n'ayant pas de sous-tissus communs tels que  $\mathcal{W}$  soit la superposition de  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_2$ ; on écrira  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 \boxtimes \mathcal{W}_2$ . Dans le cas contraire  $\mathcal{W}$  est dit *irréductible*. On dit que  $\mathcal{W}$  est *complètement décomposable* s'il existe des feuilletages globaux  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$  sur  $S$  tels que  $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{F}_k$ . Pour plus de détails sur ce sujet, nous renvoyons à [9].

Revenons au cas qui nous intéresse :  $S = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Se donner une  $k$ -tissu sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  revient à se donner une  $k$ -forme symétrique polynomiale  $\omega = \sum_{i+j=k} a_{ij}(x, y) dx^i dy^j$ , à zéros isolés et de discriminant non identiquement nul. Ainsi tout  $k$ -tissu sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  peut se lire dans une carte affine donnée  $(x, y)$  de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  par une équation différentielle polynomiale  $F(x, y, y') = 0$  de degré  $k$  en  $y'$ .

Suivant [7] à tout feuilletage  $\mathcal{F}$  de degré  $d \geq 1$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est associé un  $d$ -tissu irréductible sur le plan projectif dual  $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$ , appelé *transformée de LEGENDRE* (ou *tissu dual*) de  $\mathcal{F}$ , et noté  $\text{Leg}\mathcal{F}$ ; les feuilles de  $\text{Leg}\mathcal{F}$  sont les droites tangentes aux feuilles de  $\mathcal{F}$ . Plus explicitement, soit  $(x, y)$  une carte affine de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  et considérons la carte affine  $(p, q)$  de  $\check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  associée à la droite  $\{y = px - q\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ; si  $\mathcal{F}$  est défini par une 1-forme  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , où  $A, B \in \mathbb{C}[x, y]$ ,  $\text{pgcd}(A, B) = 1$ , alors  $\text{Leg}\mathcal{F}$  est donné par l'équation différentielle implicite

$$\check{F}(p, q, x) := A(x, px - q) + pB(x, px - q) = 0, \quad \text{avec} \quad x = \frac{dq}{dp}.$$

L'application de Gauss est l'application rationnelle  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}} : \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \dashrightarrow \check{\mathbb{P}}_{\mathbb{C}}^2$  qui à un point régulier  $m$  associe la droite tangente  $T_m\mathcal{F}$ . Si  $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est une courbe passant par certains points singuliers de  $\mathcal{F}$ , on définit  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{C})$  comme étant l'adhérence de  $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\mathcal{C} \setminus \text{Sing}\mathcal{F})$ . Il résulte de [4, Lemme 2.2] que

$$(2) \quad \Delta(\text{Leg}\mathcal{F}) = \mathcal{G}_{\mathcal{F}}(\text{I}_{\mathcal{F}}^{\text{tr}}) \cup \check{\Sigma}_{\mathcal{F}},$$

où  $\check{\Sigma}_{\mathcal{F}}$  désigne l'ensemble des droites duales des points de  $\Sigma_{\mathcal{F}} := \{s \in \text{Sing}\mathcal{F} : \tau(\mathcal{F}, s) \geq 2\}$ .

## 2. Résultats préliminaires

Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, la preuve du Théorème A s'appuie sur certaines propriétés des feuilletages  $\mathcal{H}_1^d, \mathcal{F}_0^d, \mathcal{F}_1^d$  et du discriminant du tissu dual d'un feuilletage de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ .

Notons d'abord que le feuilletage homogène  $\mathcal{H}_1^d$  possède deux singularités radiales d'ordre maximal  $d - 1$ . En fait cette propriété caractérise la  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ -orbite de  $\mathcal{H}_1^d$  comme le montre le résultat suivant, déduit de [2, Proposition 4.1] :

PROPOSITION 2.1 ([2]). — *Soit  $\mathcal{H}$  un feuilletage homogène de degré  $d \geq 2$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ayant deux singularités radiales distinctes d'ordre maximal  $d - 1$ . Alors  $\mathcal{H}$  est linéairement conjugué au feuilletage  $\mathcal{H}_1^d$  défini par la 1-forme  $\omega_1^d = y^d dx - x^d dy$ .*

On en tire en particulier le :

**COROLLAIRE 2.2.** — À automorphisme de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  près, il y a un et un seul feuilletage homogène convexe de degré 2 sur le plan projectif complexe, à savoir le feuilletage  $\mathcal{H}_1^2$  décrit par la 1-forme  $\omega_1^2 = y^2 dx - x^2 dy$ .

*Démonstration.* — On sait d’après [2, Proposition 2.2] que tout feuilletage homogène convexe de degré supérieur ou égal à 2 sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  possède au moins deux singularités radiales distinctes. L’énoncé découle alors immédiatement de [2, Proposition 4.1] (cf. Proposition 2.1 ci-dessus) et de la remarque évidente suivante : si un feuilletage  $\mathcal{F}$  de degré 2 sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  admet une singularité radiale  $s$ , alors l’ordre de radialité  $\tau(\mathcal{F}, s) - 1$  de  $s$  est égal à 1.  $\square$

Une propriété caractéristique de la  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ -orbite du feuilletage de FERMAT  $\mathcal{F}_0^d$  est donnée par [2, Proposition 6.3] :

**PROPOSITION 2.3** ([2]). — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré  $d \geq 2$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ayant trois singularités radiales d’ordre maximal  $d - 1$ , non alignées. Alors  $\mathcal{F}$  est linéairement conjugué au feuilletage de FERMAT  $\mathcal{F}_0^d$  défini par la 1-forme  $\bar{\omega}_0^d = (x^d - x)dy - (y^d - y)dx$ .

Une propriété caractéristique de la  $\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2)$ -orbite du feuilletage  $\mathcal{F}_1^d$  est donnée par la :

**PROPOSITION 2.4.** — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage convexe de degré  $d \geq 2$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Supposons que  $\mathcal{F}$  possède une singularité  $s_1$  de multiplicité algébrique maximale  $d$  et une singularité  $s_2$  radiale d’ordre maximal  $d - 1$ . Alors

- ou bien  $\mathcal{F}$  est homogène ;
- ou bien  $\mathcal{F}$  est linéairement conjugué au feuilletage  $\mathcal{F}_1^d$  décrit par la 1-forme  $\bar{\omega}_1^d = y^d dx + x^d(xdy - ydx)$ .

**REMARQUE 2.5.** — Notons qu’un feuilletage de degré  $d$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  est homogène si et seulement s’il possède une singularité de multiplicité algébrique maximale  $d$  et une droite invariante ne passant pas par cette singularité.

*Démonstration.* — Choisissons un système de coordonnées homogènes  $[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  tel que  $s_1 = [0 : 0 : 1]$  et  $s_2 = [0 : 1 : 0]$ . Par hypothèse nous avons  $\nu(\mathcal{F}, s_1) = d$ ,  $\nu(\mathcal{F}, s_2) = 1$  et  $\tau(\mathcal{F}, s_2) = d$ . L’égalité  $\nu(\mathcal{F}, s_1) = d$  assure que toute 1-forme  $\omega$  décrivant  $\mathcal{F}$  dans la carte affine  $z = 1$  est du type

$$\omega = A_d(x, y)dx + B_d(x, y)dy + C_d(x, y)(xdy - ydx),$$

où  $A_d, B_d$  et  $C_d$  sont des polynômes homogènes de degré  $d$ .

Dans la carte affine  $y = 1$  le feuilletage  $\mathcal{F}$  est donné par

$$\theta = -C_d(x, 1)dx - B_d(x, 1)dz + A_d(x, 1)(zdx - xdz);$$

nous avons  $\theta \wedge (zdx - xdz) = Q(x, z)dx \wedge dz$ , où  $Q(x, z) = xC_d(x, 1) + zB_d(x, 1)$ . L’égalité  $\tau(\mathcal{F}, s_2) = d$  se traduit alors par le fait que le polynôme  $Q \in \mathbb{C}[x, z]$

est homogène non nul de degré  $d + 1$ , ce qui permet d'écrire  $B_d(x, y) = \beta x^d$ ,  $C_d(x, y) = \delta x^d$ , avec  $\beta, \delta \in \mathbb{C}$ ,  $|\beta| + |\delta| \neq 0$ . Par suite nous avons  $J_{(0,0)}^1 \theta = A_d(0, 1)(zdx - xdz)$ ; alors l'égalité  $\nu(\mathcal{F}, s_2) = 1$  assure que  $A_d(0, 1) \neq 0$ . Ainsi  $\theta$  s'écrit

$$(3) \quad \theta = -x^d d(\delta x + \beta z) + A_d(x, 1)(zdx - xdz),$$

$$\beta, \delta \in \mathbb{C}, |\beta| + |\delta| \neq 0, A_d(0, 1) \neq 0.$$

Supposons que  $\mathcal{F}$  ne soit pas homogène; comme  $\nu(\mathcal{F}, s_1) = d$ , toute droite invariante par  $\mathcal{F}$  doit passer par  $s_1$  (Remarque 2.5) et doit donc être de la forme  $(ax + by = 0)$ ,  $[a : b] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ . Or nous remarquons à partir de (3) que la droite  $\ell = (\delta x + \beta z = 0)$  est invariante par  $\mathcal{F}$ . Il en résulte que  $\beta = 0$ ,  $\delta \neq 0$  et  $\ell = (x = 0)$ .

Par conséquent

$$\omega = A_d(x, y)dx + \delta x^d(xdy - ydx), \quad \delta A_d(0, 1) \in \mathbb{C}^*.$$

Posons  $P(t) = A_d(1, t)$ ; puisque  $A_d(0, 1) \neq 0$  le polynôme  $P \in \mathbb{C}[t]$  est de degré  $d$ . De plus l'homogénéité de  $A_d$  entraîne que

$$\omega = x^d \left( P \left( \frac{y}{x} \right) dx + \delta(xdy - ydx) \right), \quad \delta \in \mathbb{C}^*.$$

Nous constatons qu'une droite de la forme  $(y = rx)$ ,  $r \in \mathbb{C}$ , est invariante par  $\mathcal{F}$  si et seulement si  $r$  est une racine du polynôme  $P$ . Il s'en suit que l'ensemble des droites invariantes par  $\mathcal{F}$  est constitué de la droite  $(x = 0)$  et des droites  $(y = rx)$ , où  $r$  parcourt l'ensemble des racines de  $P$ .

En coordonnées homogènes, le feuilletage  $\mathcal{F}$  est décrit par le champ de vecteurs  $0 \frac{\partial}{\partial x} + A_d(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + \delta x^d \frac{\partial}{\partial z}$ ; d'après la formule (1), le diviseur d'inflexion  $I_{\mathcal{F}}$  de  $\mathcal{F}$  est donné par

$$0 = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ y & A_d(x, y) & \frac{\partial A_d}{\partial y}(x, y) \\ z & \delta x^d & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\delta x^{d+1} A_d(x, y) \frac{\partial A_d}{\partial y}(x, y) = -\delta x^{3d} P \left( \frac{y}{x} \right) P' \left( \frac{y}{x} \right).$$

Comme  $\mathcal{F}$  est par hypothèse convexe, nous en déduisons que toute racine de  $P'$  est une racine de  $P$  et donc que  $P$  est divisible par sa dérivée  $P'$ . Le polynôme  $P$  est alors nécessairement de la forme  $P(t) = \alpha(t - a)^d$ , avec  $a \in \mathbb{C}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}^*$ , d'où

$$\omega = \alpha(y - ax)^d dx + \delta x^d(xdy - ydx), \quad a \in \mathbb{C}, \alpha, \delta \in \mathbb{C}^*.$$

La 1-forme  $\omega$  est linéairement conjuguée à  $\bar{\omega}_1^d = y^d dx + x^d(xdy - ydx)$ ; en effet

$$\bar{\omega}_1^d = \frac{\delta^{d+1}}{\alpha^{d+2}} \varphi^* \omega, \quad \text{où } \varphi = \left( \frac{\alpha}{\delta} x, \frac{\alpha}{\delta} (y + ax) \right). \quad \square$$

Le lemme suivant joue un rôle crucial dans la preuve du Théorème A.

LEMME 2.6. — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage convexe de degré  $d \geq 2$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Alors l'ensemble  $\Sigma_{\mathcal{F}}$  des points singuliers  $s \in \text{Sing}\mathcal{F}$  tels que  $\tau(\mathcal{F}, s) \geq 2$  est de cardinal supérieur ou égal à 2.

Démonstration. — En vertu de la convexité de  $\mathcal{F}$ , la formule (2) entraîne que le discriminant  $\Delta(\text{Leg}\mathcal{F})$  de  $\text{Leg}\mathcal{F}$  est constitué des droites duales des points de  $\Sigma_{\mathcal{F}}$ . Si  $\Sigma_{\mathcal{F}}$  était vide ou réduit à un point, il en résulterait que  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \Delta(\text{Leg}\mathcal{F})$  serait simplement connexe de sorte que (cf. [9, Proposition 1.3.1]) le  $d$ -tissu  $\text{Leg}\mathcal{F}$  serait complètement décomposable, ce qui contredirait son irréductibilité.  $\square$

REMARQUE 2.7. — Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage de degré  $d \geq 2$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , alors

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} \cup \{s \in \text{Sing}\mathcal{F} : \nu(\mathcal{F}, s) \geq 2\},$$

où  $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$  désigne l'ensemble des singularités radiales de  $\mathcal{F}$ .

REMARQUE 2.8. — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de degré  $d \geq 2$  sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  tel que  $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$  ne soit pas vide. Soit  $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$ . Désignons par  $\text{mult}(\Delta(\text{Leg}\mathcal{F}), \check{\ell}_s)$  la multiplicité du discriminant  $\Delta(\text{Leg}\mathcal{F})$  de  $\text{Leg}\mathcal{F}$  le long de la droite  $\check{\ell}_s$  duale de  $s$ . Alors (voir [7, Proposition 3.3])

$$\text{mult}(\Delta(\text{Leg}\mathcal{F}), \check{\ell}_s) \geq \tau(\mathcal{F}, s) - 1;$$

l'égalité est réalisée si (condition suffisante) l'ordre de radialité  $\tau(\mathcal{F}, s) - 1$  de  $s$  appartient à  $\{d - 2, d - 1\}$ .

En particulier, si  $d = 2$ , resp.  $d = 3$ , alors, pour tout  $s \in \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$ , on a

$$\text{mult}(\Delta(\text{Leg}\mathcal{F}), \check{\ell}_s) = 1, \quad \text{resp. } \text{mult}(\Delta(\text{Leg}\mathcal{F}), \check{\ell}_s) = \tau(\mathcal{F}, s) - 1 \in \{1, 2\}.$$

### 3. Preuve du Théorème A

Démonstration du Théorème A. — Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage convexe de degré 2 sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Pour tout  $s \in \text{Sing}\mathcal{F}$ , nous avons  $\nu(\mathcal{F}, s) \leq \text{deg } \mathcal{F} = 2$ . Il résulte alors de la Remarque 2.7 que

$$\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} \cup \{s \in \text{Sing}\mathcal{F} : \nu(\mathcal{F}, s) = 2\}.$$

Notons (voir [3, Lemme 2.11]) que tout feuilletage de degré supérieur ou égal à 2 sur  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  a au plus une singularité de multiplicité algébrique maximale, égale à son degré. Nous en déduisons l'alternative suivante :

- ou bien  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$  ;
- ou bien  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} \cup \{s_1\}$  pour un certain  $s_1 \in \text{Sing}\mathcal{F}$  vérifiant  $\nu(\mathcal{F}, s_1) = 2$ .

Supposons dans un premier temps que  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$ . La convexité de  $\mathcal{F}$  et la formule (2) impliquent alors que le discriminant  $\Delta(\text{Leg}\mathcal{F})$  du 2-tissu  $\text{Leg}\mathcal{F}$  se décompose en produit de droites duales des points de  $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$ . Comme la droite duale de tout point de  $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$  est de multiplicité 1 dans  $\Delta(\text{Leg}\mathcal{F})$  (Remarque 2.8) et comme  $\deg(\Delta(\text{Leg}\mathcal{F})) = (\deg \mathcal{F} - 1)(\deg \mathcal{F} + 2) = 4$  (cf. [7, page 177]), il en résulte que  $\#\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} = 4$ . Les quatre points de  $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$  ne sont pas alignés, car toute droite de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  ne peut contenir plus de  $\deg \mathcal{F} + 1 = 3$  points singuliers de  $\mathcal{F}$ . Il s'en suit en particulier que  $\mathcal{F}$  possède trois singularités radiales non-alignées; ceci entraîne, d'après [2, Proposition 6.3], que  $\mathcal{F}$  est linéairement conjugué au feuilletage de FERMAT  $\mathcal{F}_0^2$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $s_1 \in \text{Sing}\mathcal{F}$  tel que  $\Sigma_{\mathcal{F}} = \Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}} \cup \{s_1\}$  et  $\nu(\mathcal{F}, s_1) = 2$ . Par le Lemme 2.6,  $\#\Sigma_{\mathcal{F}} \geq 2$  et donc  $\Sigma_{\mathcal{F}}^{\text{rad}}$  est non vide; d'où la présence d'une singularité radiale  $s_2$  de  $\mathcal{F}$ . Par suite, d'après la Proposition 2.4, ou bien  $\mathcal{F}$  est homogène, auquel cas  $\mathcal{F}$  est linéairement conjugué au feuilletage  $\mathcal{H}_1^2$  en vertu du Corollaire 2.2, ou bien  $\mathcal{F}$  est linéairement conjugué au feuilletage  $\mathcal{F}_1^2$ .  $\square$

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. BEDROUNI – « Feuilletages de degré trois du plan projectif complexe ayant une transformée de Legendre plate », 2017, Ph.D. thesis, University of Sciences and Technology Houari Boumediene, <https://arxiv.org/abs/1712.03895>.
- [2] S. BEDROUNI & D. MARÍN – « Tissus plats et feuilletages homogènes sur le plan projectif complexe », *Bull. Soc. Math. France* **146** (2018), no. 3, p. 479–516.
- [3] ———, « Classification of foliations of degree three on  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  with a flat legendre transform », 2019, to appear in *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*.
- [4] A. BELTRÁN, M. F. LUZA & D. MARÍN – « Flat 3-webs of degree one on the projective plane », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **23** (2014), no. 4, p. 779–796.
- [5] M. BRUNELLA – *Birational geometry of foliations*, IMPA Monographs, no. 1, Springer, Cham, 2015.
- [6] C. FAVRE & J. V. PEREIRA – « Webs invariant by rational maps on surfaces », *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **64** (2015), no. 3, p. 403–431.
- [7] D. MARÍN & J. V. PEREIRA – « Rigid flat webs on the projective plane », *Asian J. Math.* **17** (2013), no. 1, p. 163–191.
- [8] J. V. PEREIRA – « Vector fields, invariant varieties and linear systems », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **51** (2001), no. 5, p. 1385–1405.

- [9] J. V. PEREIRA & L. PIRIO – *An invitation to web geometry*, IMPA Monographs, no. 2, Springer, Cham, 2015.
- [10] D. SCHLOMIUK & N. VULPE – « Planar quadratic vector fields with invariant lines of total multiplicity at least five », *Qual. Theory Dyn. Syst.* **5** (2004), no. 1, p. 135–194.

## SHTUKAS ADIQUES, MODIFICATIONS ET APPLICATIONS

PAR NGUYEN KIEU HIEU

---

RÉSUMÉ. — Dans cet article, via l'étude des modifications de fibrés vectoriels sur la courbe de Fargues-Fontaine, on prouve une formule géométrique reliant les tours de Lubin-Tate avec les espaces de Rapoport-Zink non ramifiés simples basiques de type EL de signature  $(1, n-1), (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)$  où  $p_i q_i = 0$ . En particulier, on en déduit le calcul des groupes de cohomologie de ces derniers.

ABSTRACT (*Adic Shtukas, modifications and applications*). — In this paper, via the study of the modifications of vector bundles on the Fargues-Fontaine curve, we prove a geometric formula relating the Lubin-Tate towers with the simple basic unramified Rapoport-Zink spaces of EL type of signature  $(1, n-1), (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)$  where  $p_i q_i = 0$ . In particular, we deduce the computation of the cohomology groups of the latter.

### 1. Introduction

Le programme de Langlands prédit une bijection de nature arithmétique entre d'un côté les représentations galoisiennes et de l'autre les représentations automorphes. Pour construire des réalisations, on cherche des objets géométriques dont la cohomologie  $\ell$ -adique s'exprimera en termes de ces corres-

---

*Texte reçu le 2 mai 2019, accepté le 10 juin 2020.*

NGUYEN KIEU HIEU, Université Paris 13, Sorbonne Paris-Cité, LAGA, CNRS, UMR 7539, F-93430, Villetaneuse, France, PerCoLarTor, ANR-14-CE25 • *E-mail* : kieu.hieu.nguyen@math.univ-paris13.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 11F70, 11F80, 11F85, 11G18, 20C08.

Mots clefs. — La courbe de Fargues-Fontaine, Modification de fibrés vectoriels, Espaces de Rapoport-Zink.

pondances. Les premiers exemples sont donnés par les espaces de Rapoport-Zink ([18]). Par ailleurs, plus récemment, Scholze a construit des variétés de Shimura locales ([20], [17]) qui se décrivent comme des espaces de modules de Shtukas dont la partie supercuspidale de la cohomologie est décrite par la conjecture de Kottwitz.

Commençons par un triplet  $(G, \mu, b)$  où  $G$  est un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$ ,  $b \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$  et  $\mu \in X_*^+(T)$  avec  $b \in B(G, \mu)$  (c.f. section 3) auquel on associe un  $G$ -fibré  $\mathcal{E}_b$  sur la courbe de Fargues-Fontaine. De manière informelle, l'espace de module de Shtukas  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  est un faisceau sur  $\text{Perf}_{\check{\mathbb{F}}_p}$  classifiant les modifications de type  $\mu$  entre  $\mathcal{E}_b$  et  $\mathcal{E}_1$ . L'espace  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  admet une donnée de descente ainsi qu'une action du groupe  $G(\mathbb{Q}_p)$  (resp.  $J_b(\mathbb{Q}_p)$ ) définie par les isomorphismes de  $\mathcal{E}_1$  (resp.  $\mathcal{E}_b$ ). Le premier résultat principal de cet article est le théorème 6.3 suivant.

**THÉORÈME 1.1.** — *Notons  $Z_G^0$  la composante connexe neutre du centre  $Z_G$ ,  $\lambda$  un cocaractère central de  $G$  et  $[b_\lambda]$  l'unique élément de  $B(Z_G^0, \lambda)$ . Il y a un isomorphisme  $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de faisceaux pro-étale qui commute avec les données de descentes.*

$$\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \longrightarrow \text{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot \lambda).$$

Le résultat ci-dessus nous permet d'interpréter l'espace  $\text{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot \lambda)$  comme une modification centrale de l'espace  $\text{Sht}(G, \mu, b)$ . La démonstration se base sur l'étude des  $G$ -fibrés sur la courbe de Fargues-Fontaine. La première étape consiste à construire une modification de type  $\mu \cdot \lambda$  à partir de celle de type  $\mu$ . Ensuite, on propage cette construction au niveau des espaces de modules de Shtukas de manière compatible avec les actions de  $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p)$  et notamment avec les données de descentes.

On applique ce résultat géométrique au calcul des groupes de cohomologie d'espaces de Rapoport-Zink que l'on peut ainsi relier avec la tour de Lubin-Tate. Pour chaque sous-groupe compact ouvert  $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ , il y a un espace de module de Shtukas de niveau fini  $\text{Sht}(G, \mu, b)/K_p$  et une identification  $\text{Sht}(G, \mu, b) = \varprojlim_{K_p} \text{Sht}(G, \mu, b)/K_p$ . Lorsque  $\mu$  est minuscule et le triplet

$(G, \mu, b)$  est de type EL ou PEL, on retrouve les espaces de Rapoport-Zink, d'après le théorème 24.2.5 de [20]. Afin de se ramener à la tour de Lubin-Tate qui correspond à la signature  $\mu_{\mathcal{LT}} = (1, n-1), (0, n), \dots, (0, n)$ , on considère les espaces de Rapoport-Zink de type EL non ramifiés simples basiques de signature  $(1, n-1), (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k)$  où  $p_i q_i = 0$ . Soit  $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$  un sous groupe compact. On notera  $\text{Sht}(G, \mu, b)/K_p$  par  $\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu$ . D'après [11], on peut définir les groupes de cohomologie à support compact par

$$H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu, \mathbb{Z}_\ell) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ \mathbb{V}}} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ \mathbb{N}}} H_c^\bullet(V \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$$



où  $V$  parcourt les ouverts relativement compacts de  $\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu$  et où  $\ell \neq p$  est un nombre premier. On note également  $H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu, \mathbb{Q}_\ell) := H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu, \mathbb{Z}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$  lesquels sont des  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -représentations de  $G(\mathbb{Q}_p) \times D^\times \times W_{E_p}$  où  $J_b(\mathbb{Q}_p) = D^\times$  est le groupe des inversibles de l'algèbre de division d'invariant  $\frac{1}{n}$  et où  $W_{E_p}$  est le groupe de Weil du corps de définition  $E_p$  de  $\mu$ .

Les groupes de cohomologie de la tour de Lubin-Tate ont été entièrement calculés dans [3], [15] et [4]; par dualité [8], [13], [20], on obtient aussi le cas de Drinfeld. Pour un espace de type EL non ramifié général, la partie supercuspidale est traitée dans [11], [21]. Sous l'hypothèse précédente, on obtient alors la description complète de groupes de cohomologie suivante avec les notations de la section 7.

**THÉOREME 1.2.** — *Pour tout diviseur  $g$  de  $n = gs$  et toute représentation irréductible cuspidale  $\pi$  de  $GL_g(F)$ , on a des isomorphismes  $G(\mathbb{Q}_p) \times W_F$ -équivalents*

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{K}} H_c^{n-1-i}(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)[\pi[s]_D] \\ &= \begin{cases} \text{LT}_\pi(s, i) \otimes \mathcal{L}(\pi) \cdot | \cdot |^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} \cdot \prod_{\tau \in J} \omega_i \circ (\tau \text{rec}_F^{-1}) & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\pi[s]_D$  désignera la représentation  $JL^{-1}(\text{St}_s(\pi))^\vee$  de  $D^\times$ ,  $\omega_i$  est le caractère central de  $\text{LT}_\pi(s, i)$  et  $\text{rec}_F^{-1}$  est le morphisme de réciprocité d'Artin et où  $\tau \text{rec}_F^{-1} := \tau \cdot \text{rec}_F^{-1} \cdot \tau^{-1}$ .

La preuve repose sur le théorème 1.1 qui donne une relation entre la tour  $(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu)_{K_p}$  et la tour de Lubin-Tate ainsi que les résultats dans [4] décrivant la cohomologie de la dernière.

**REMARQUE 1.3.** — En utilisant les résultats de [2], on peut prouver que les groupes de cohomologie  $\lim_{\vec{K}} H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu, \mathbb{Z}_\ell)$  sont  $\mathbb{Z}_\ell$ -libres.

**2. La courbe de Fargues-Fontaine d'après [12]**

Soit  $E/\mathbb{Q}_p$  une extension finie de corps résiduel  $\mathbb{F}_q$  d'uniformisante  $\pi$ . Soit  $F/\mathbb{F}_q$  un corps parfait muni d'une valuation non-triviale  $v : F \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

On pose  $\mathcal{E} = W_{\mathcal{O}_E}(F) \left[ \frac{1}{\pi} \right]$  où  $W_{\mathcal{O}_E}(F)$  désigne l'anneau des vecteurs de Witt ramifiés à coefficients dans  $F$ . Plus précisément, on a

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \mid x_n \in F \right\}.$$

Le corps  $\mathcal{E}$  est une extension non ramifiée complète de  $E$  dont le corps résiduel est  $F$ . Il y a un relèvement de Teichmüller  $F \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ,  $x \mapsto [x]$ . On introduit alors le sous-anneau de  $\mathcal{E}$

$$B^{bd} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \in \mathcal{E} \mid \exists C, \forall n, |x_n| < C \right\}.$$

On définit ensuite des normes de Gauss sur  $B^{bd}$ . Pour  $r \in ]0, \infty[$  et  $\rho = q^{-r} \in ]0, 1[$  on pose pour  $x = \sum_n [x_n] \pi^n \in B^{bd}$

$$v_r(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} v(x_n) + nr \quad \text{et} \quad |x|_{\rho} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n| \rho^n.$$

Il s'agit de normes multiplicatives, autrement dit  $v_r$  est une valuation sur  $B^{bd}$ .

DÉFINITION 2.1. — Pour  $I \subset ]0, 1[$  un intervalle, on note  $B_I$  le complété de  $B^{bd}$  par rapport aux normes  $(|\cdot|_{\rho})_{\rho \in I}$ . Notons  $B = B_{]0, 1[}$ . On a alors  $B = \varprojlim_I B_I$  où  $I$  parcourt les intervalles compacts de  $]0, 1[$ .

L'anneau  $\mathcal{E}$  possède un morphisme de Frobenius  $\varphi$  tel que

$$\varphi \left( \sum_n [x_n] \pi^n \right) = \sum_n [x_n^q] \pi^n.$$

On note également  $\varphi : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]$  défini par  $\varphi(\rho) = \rho^q$ . Le Frobenius  $\varphi$  de  $B^{bd}$  s'étend en un isomorphisme

$$\varphi : B_I \xrightarrow{\sim} B_{\varphi(I)}.$$

Ce morphisme de Frobenius induit alors un automorphisme  $\varphi$  de  $B$  avec  $E = B^{\varphi = \text{Id}}$ .

DÉFINITION 2.2. — La courbe schématique de Fargues-Fontaine est  $X = \text{Proj}(P)$  où

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} B^{\varphi = \pi^d},$$

vue comme  $E$ -algèbre graduée.

On note  $\mathcal{O}_X(1) = \widetilde{P[1]}$  le fibré en droites tautologique sur  $X$  et pour  $d \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{O}_X(d) = \left( \mathcal{O}_X(1) \right)^{\otimes d}$ . On a alors

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(d)).$$

On rappelle ensuite la version adique de la courbe de Fargues-Fontaine. Si  $I = [\rho_1, \rho_2] \subset ]0, 1[$  avec  $\rho_1, \rho_2 \in |F^{\times}|$  alors  $B_I$  est une  $E$ -algèbre de Banach qui est un anneau principal. On pose alors  $Y_I = \text{Spa}(B_I, B_I^{\circ})$  comme espace topologique muni d'un préfaisceau d'anneaux.

**THÉOREME 2.3** ([9] 2.1). — *L'espace  $Y_I$  est adique i.e le préfaisceau  $\mathcal{O}_{Y_I}$  est un faisceau.*

Soient  $I \subset I' \subset ]0, 1[$  alors  $Y_I$  est un ouvert rationnel de  $Y_{I'}$ . Si  $I = [|a|, |b|]$  avec  $a, b \in F^\times$  alors

$$Y_I = Y_{I'} \left( \frac{[a]}{\pi}, \frac{\pi}{[b]} \right).$$

On pose  $Y = \varinjlim_I Y_I$  où  $I$  parcourt les intervalles compacts de  $]0, 1[$  d'extrémités dans  $|F^\times|$ .

C'est un espace adique tel que  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = B$ . On peut donc voir les éléments de  $B_I$  comme les fonctions holomorphes de la variable  $\pi$  sur la couronne de rayons définis par  $I$ . Le Frobenius  $\varphi$  de  $B^{bd}$  induit un isomorphisme  $\varphi : B_I \xrightarrow{\sim} B_{\varphi(I)}$  et on a donc un isomorphisme

$$\varphi : Y_{\varphi(I)} \xrightarrow{\sim} Y_I.$$

En prenant la limite sur les intervalles  $I$  on obtient un automorphisme

$$\varphi : Y \xrightarrow{\sim} Y.$$

Ce morphisme  $\varphi$  agit de manière proprement discontinue sur  $Y$  et on définit alors la courbe de Fargues-Fontaine adique de la manière suivante.

**DÉFINITION 2.4.** — La courbe de Fargues-Fontaine adique est  $X^{\text{ad}} = Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ .

On rappelle enfin la version relative de la courbe de Fargues-Fontaine sur un espace affinoïde perfectoïde  $S$ . Intuitivement, on peut y penser comme une famille de courbes  $(X_{k(s)})_{s \in S}$ .

Soit  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  un espace affinoïde perfectoïde sur  $\text{Spa}(\mathbb{F}_q)$ . Posons

$$\mathbf{A}_S = W_{\mathcal{O}_E}(R^+) = \left\{ \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n \mid x_n \in R^+ \right\},$$

où  $W_{\mathcal{O}_E}$  désigne les vecteurs de Witt ramifiés. Notons

$$B_S^{bd} = \left( \mathbf{A}_S \left[ \frac{1}{\pi} \right] \right)^{bd} = \left\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \mid x_n \in R, \sup_n |x_n| < +\infty \right\}.$$

Pour  $\rho \in ]0, 1[$ , il y a une norme de Gauss sur  $B_S^{bd}$  définie par

$$\left\| \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi^n \right\|_\rho = \sup_n |x_n| \rho^n.$$

De même, pour  $I \subset ]0, 1[$  un intervalle compact, on note  $B_{I,S}$  le complété de  $B_S^{bd}$  par rapport aux normes  $(\|\cdot\|_\rho)_{\rho \in I}$ . On note  $B_S = \varprojlim_I B_{I,S}$  le complété de  $B_S^{bd}$  par rapport aux normes  $(\|\cdot\|_\rho)_{\rho \in ]0, 1[}$ .

Comme auparavant,  $Y_{I,S} = \text{Spa} \left( B_{I,S}, (B_{I,S})^o \right)$  ainsi que  $Y_S = \varinjlim_I Y_{I,S}$  sont des espaces adiques. Finalement, on définit la courbe de Fargues-Fontaine relative comme suit

$$X_S^{ad} := Y_S / \varphi^{\mathbb{Z}}$$

où  $\varphi$  est le morphisme de Frobenius des vecteurs de Witt usuel

$$\varphi \left( \sum_{n \gg -\infty} [x_n] \pi_n \right) = \sum_{n \gg -\infty} [x_n^q] \pi_n.$$

Comme auparavant, il y a des fibrés vectoriels  $\mathcal{O}_{X_S^{ad}}(d)$  pour tout  $d \in \mathbb{Z}$  et on définit le schéma

$$X_S = \text{Proj}(P)$$

où  $P = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X_S^{ad}, \mathcal{O}_{X_S^{ad}}(d))$  et  $\mathcal{O}_{X_S^{ad}}(1) = \widetilde{(B_S)^{\varphi=\pi}}$ .

*Débasquements et diviseurs de Cartier sur la courbe.* — Soit  $R$  une  $\mathbb{F}_q$ -algèbre perfectoïde. Notons  $R^o \subset R$  le sous anneau des éléments de puissances bornées ainsi que  $R^{oo} \subset R^o$  l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents. Un élément  $f = \sum_{n \geq 0} [a_n] \pi^n \in \mathbf{A}_R$  est dit primitif de degré 1 si  $a_0 \in R^{oo} \cap R^\times$  et  $a_1 \in R^{o \times}$ .

PROPOSITION 2.5 (prop. 1.18 de [9], [14]). — • Soit  $R^\sharp$  un débasquement de  $R$  sur  $E$ . Alors, le noyau du morphisme de Fontaine

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E}(R^o) \rightarrow R^{\sharp, o}$$

est engendré par un élément primitif de degré 1.

- Inversement, si  $f \in \mathbf{A}_R$  est un élément primitif de degré 1 alors  $W_{\mathcal{O}_E}(R^o) \left[ \frac{1}{\pi} \right] / f$  est une  $E$ -algèbre perfectoïde qui est un débasquement de  $R$ .

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des débasquements de  $R$  sur  $E$  et l'ensemble des immersions fermées  $T \hookrightarrow Y_R$  définies localement par un élément primitif de degré 1.

Autrement dit, si  $S \in \text{Perf}_{\mathbb{F}_q}$  alors à chaque débasquement  $S^\sharp$  correspond un diviseur de Cartier  $D : S^\sharp \hookrightarrow Y_S$  et de plus ce diviseur de Cartier induit un diviseur de Cartier  $\varphi$ -invariant

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^{k*} D$$

et on obtient donc un diviseur de Cartier sur  $X_S^{ad}$ . Supposons que  $\overline{\mathbb{F}}_q \subset F$ . Pour tout  $h \in \mathbb{N}^*$ , il existe une unique extension non ramifiée  $E_h$  de degré  $h$

de  $E$ . Notons  $X_{E_h}$  la courbe adique associé à  $E_h$ , alors

$$\pi_h : X_{E_h} = X_E \otimes_E E_h \longrightarrow X_E$$

est un revêtement étale fini de degré  $h$ .

Pour tout  $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$  où  $(d, h) = 1$  et  $h > 0$ , on définit un fibré vectoriel  $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$  par la formule

$$\mathcal{O}_{X_E}(\lambda) = (\pi_h)_* \mathcal{O}_{X_{E_h}}(d).$$

On peut définir les fonctions rang et degré sur les classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels et puis appliquer le formalisme des filtrations de Harder-Narasimhan sur la catégorie de fibrés vectoriels. Pour  $\lambda = \frac{d}{h}$  avec  $(d, h) = 1$  alors  $\mathcal{O}_X(\lambda)$  est un fibré de degré  $d$  et de rang  $h$  et donc de pente de Harder-Narasimhan  $\mu(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \lambda$ .

DÉFINITION 2.6. — Un fibré vectoriel non nul  $X$  est semi stable si pour tout sous fibré vectoriel strict non nul  $X'$  de  $X$ , on a  $\mu(X') \leq \mu(X)$ .

THÉORÈME 2.7 ([12] théo 8.5.1). — *Supposons  $F$  algébriquement clos.*

- *Les fibrés semi-stables de pente  $\lambda$  sur  $X$ , à isomorphisme près, sont les  $\mathcal{O}_X(\lambda)^m$ .*
- *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur  $X$  est scindée.*
- *Tout fibré vectoriel sur  $X$  est isomorphe à un fibré de la forme  $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(\lambda_i)$  où  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$  est une suite décroissante dans  $\mathbb{Q}$ .*

Notons  $\varphi\text{-Mod}_B$  la catégorie des  $\varphi$ -modules libres sur  $B$ . On a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \varphi\text{-Mod}_B &\xrightarrow{\sim} \text{Fib}_X \\ (M, \varphi) &\longmapsto \left( \widetilde{\bigoplus_{d \geq 0} M^{\varphi = \pi^d}} \right). \end{aligned}$$

D'autre part le foncteur sections globales implique une équivalence entre la catégorie des fibrés  $\varphi$ -équivariants sur  $Y$  et celle des  $\varphi$ -modules sur  $B$ .

THÉORÈME 2.8. — ([10] théo. 3.5) *Supposons  $F$  algébriquement clos. Il y a une équivalence de catégories entre faisceaux cohérents sur  $X$  et sur  $X^{ad}$ .*

Notons  $\varphi\text{-Mod}_{\check{E}}$  la catégorie des isocristaux sur  $\check{E}$  où  $\check{E} := \widehat{E}^{\text{nr}}$ . Il y a un foncteur naturel de  $\varphi\text{-Mod}_{\check{E}}$  dans  $\text{Fib}_X$ . Soit  $(D, \varphi)$  un isocristal, on pose

$$\mathcal{E}(D, \varphi) = Y \times_{\varphi^{\mathbb{Z}}} D \longrightarrow Y/\varphi^{\mathbb{Z}} = X^{ad}$$

qui est un fibré vectoriel sur  $X^{ad}$ . Via *GAGA* cela correspond au fibré associé au  $P$ -module gradué  $\bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes \mathcal{O}(Y))^{\varphi \otimes \varphi = \pi^d}$ . Le théorème 2.7 implique que le foncteur  $\mathcal{E}(-) : \varphi - \text{Mod}_{\check{E}} \rightarrow \text{Fib}_X$  est essentiellement surjectif.

**DÉFINITION 2.9.** — Soit  $G$  un groupe réductif sur  $E$ . Notons  $\text{Bun}_X$  la catégorie des fibrés vectoriels sur  $X$ . Un  $G$ -fibré sur  $X$  (ou  $X^{ad}$ ) est un foncteur tensoriel exact

$$\text{Rep}_E G \rightarrow \text{Bun}_X .$$

On considère l'ensemble de Kottwitz  $B(G) = G(\check{E})/\sigma\text{-conj}$  des classes d'isomorphismes de  $G$ -isocristaux. Si  $b \in G(\check{E})$  on peut lui associer un  $G$ -fibré sur  $X$ , que on note  $\mathcal{E}_b$ , par composition

$$\begin{aligned} \text{Rep}(G) &\rightarrow \varphi - \text{Mod}_{\check{E}} \xrightarrow{\mathcal{E}(-)} \text{Bun}_X \\ (V, \rho) &\rightarrow (V_{\check{E}}, \rho(b)\sigma). \end{aligned}$$

**THÉORÈME 2.10** ([9] théorème 2.13). — *On suppose  $F$  algébriquement clos. Il y a une bijection entre  $B(G)$  et l'ensemble des  $G$ -fibrés.*

$$\begin{aligned} B(G) &\xrightarrow{\sim} H_{\text{et}}^1(X, G) \\ [b] &\mapsto [\mathcal{E}_b]. \end{aligned}$$

*Cette bijection généralise le théorème 2.7.*

Si  $S \rightarrow \text{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$  un espace affinoïde perfectoïde et  $b \in GL_n(\check{E})$ , on définit comme auparavant un fibré vectoriel  $\mathcal{E}_b$  sur  $X_S$  par la formule

$$\mathcal{E}_S(D, \varphi) = Y_S \times_{\varphi^{\mathbb{Z}}} D \rightarrow Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}} = X_S^{ad}$$

Si  $b \in G(\check{E})$ , on définit aussi un  $G$ -fibré  $\mathcal{E}_b$  sur  $X_S$

$$\begin{aligned} \text{Rep}(G) &\rightarrow \varphi - \text{Mod}_{\check{E}} \xrightarrow{\mathcal{E}_S(-)} \text{Bun}_{X_S} \\ (V, \rho) &\rightarrow (V_{\check{E}_p}, \rho(b)\sigma). \end{aligned}$$

Par abus de langage, on le note encore  $\mathcal{E}_b$ . De plus  $\mathcal{E}_1$  est le  $G$ -fibré trivial.

### 3. La $B_{dR}$ -Grassmannienne affine

Soient  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  affinoïde perfectoïde de caractéristique  $p$  et  $(S^\sharp, \iota)$  un débasqulement de  $S$  sur  $\mathbb{Q}_p$  et donc un diviseur de Cartier  $D_{S^\sharp} \hookrightarrow X_S$ . On a une application surjective

$$\theta : W(R^0) \rightarrow (R^\sharp)^0$$

dont le noyau est engendré par  $\xi \in W(R^0)$  qui n'est pas un diviseur de zéro. Alors  $B_{dR}^+(R^\sharp)$  est défini comme le complété  $\xi$ -adique de  $W(R^0) \left[ \frac{1}{p} \right]$

et  $B_{dR}(R^\sharp) = B_{dR}^+(R^\sharp)[\xi^{-1}]$ . Le complété de  $X_S$  au-dessus de  $D_{S^\sharp}$  est alors  $\mathrm{Spf}(B_{dR}^+(R^\sharp))$ . Notons  $B_e(R^\sharp) = H^0(X_S \setminus D_{S^\sharp}, \mathcal{O}_{X_S})$ .

Etant donné un  $G$ -fibré  $\mathcal{E}$ , posons  $\mathcal{E}_e$  sa restriction sur  $X_S \setminus D_{S^\sharp} = \mathrm{Spec} B_e(R^\sharp)$  ainsi que  $\mathcal{E}_{dR}^+$  son complété au-dessus de  $D_{S^\sharp}$ . La proposition suivante implique que  $\mathcal{E}$  est déterminé par  $\mathcal{E}_e$  et  $\mathcal{E}_{dR}^+$ .

PROPOSITION 3.1 ([1], Recollement de Beauville-Laszlo). — *La catégorie des  $G$ -fibrés sur  $X_S$  est équivalente à la catégorie des triplets  $(\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_{B_{dR}}^+, \iota)$  où  $\mathcal{E}_e$  est un  $G$ -fibré sur  $B_e(R^\sharp)$ ,  $\mathcal{E}_{B_{dR}}^+$  est un  $G$ -fibré sur  $B_{dR}^+(R^\sharp)$  et  $\iota : \mathcal{E}_e \otimes_{B_e(R^\sharp)} B_{dR}(R^\sharp) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{B_{dR}}^+ \otimes_{B_{dR}^+(R^\sharp)} B_{dR}(R^\sharp)$  est un isomorphisme.*

DÉFINITION 3.2. — Soit  $\mathcal{E}$  un  $G$ -fibré sur  $X_S$ . Une modification de  $\mathcal{E}$  au-dessus de  $D_{S^\sharp}$  est un  $G$ -fibré  $\mathcal{E}'$  avec un isomorphisme

$$\alpha : \mathcal{E}|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}}.$$

En vertu du recollement de Beauville-Laszlo, une modification entre  $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_{B_{dR}}^+, \iota)$  et  $\mathcal{E}' = (\mathcal{E}'_e, (\mathcal{E}'_e)_{B_{dR}}^+, \iota')$  est donnée par un isomorphisme  $\alpha : \mathcal{E}_e \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_e$ .

Supposons maintenant  $R^\sharp = C$  est un corps complet algébriquement clos. On a

$$X_{C^b} = \mathrm{Proj} \left( \bigoplus_{d \geq 0} (B_{C^b})^{\varphi = \pi^d} \right).$$

et le diviseur  $D_C \hookrightarrow X_{C^b}$  correspond à une injection  $\mathcal{O}_{X_{C^b}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_{C^b}}(1)$  des fibrés en droites sur  $X_{C^b}$  et donc un élément  $t \in H^0(X_{C^b}, \mathcal{O}_{X_{C^b}}(1)) = (B_{X_{C^b}})^{\varphi = \pi}$ .

Maintenant comme  $B_e(C) = H^0(X_{C^b} \setminus D_C, \mathcal{O}_{X_S})$  on voit que  $B_e(C) = \mathrm{Spec} \left( (B_{C^b}[t^{-1}])^{\varphi = \mathrm{Id}} \right)$ .

Soit  $(D, \varphi)$  un isocrystal, on y a associé un fibré vectoriel  $\mathcal{E}(D, \varphi)$ . En terme du recollement de Beauville-Laszlo,  $\mathcal{E}(D, \varphi)$  est donné par

$$\left( (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\tilde{E}} D)^{\varphi \otimes \varphi = \mathrm{Id}}, (B_{dR}^+(C))^n, \iota \right)$$

où  $\iota$  est le morphisme trivial

$$(B_{dR}(C))^n \xrightarrow{\sim} (B_{dR}^+(C))^n \otimes B_{dR}(C).$$

On suppose désormais que  $G$  est un groupe réductif connexe défini sur  $\mathbb{Q}_p$ .

DÉFINITION 3.3 ([20]). — La  $B_{dR}$ -Grassmannienne affine  $Gr_G^{B_{dR}}$  est la faisceautisation étale du foncteur qui à un espace affinoïde perfectoïde  $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$  avec un morphisme  $S \rightarrow \mathrm{Spd} \mathbb{Q}_p$  correspondant à un débasculément  $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$ , associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de  $G$ -torseurs sur  $\mathrm{Spec} B_{dR}^+(R^\sharp)$  trivialisés sur  $\mathrm{Spec} B_{dR}(R^\sharp)$ .

Comme tout  $G$ -torseur sur  $\mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$  devient trivial sur un recouvrement étale de  $\mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$ , on en déduit que  $Gr_G^{B_{dR}}$  est le faisceau étale associé au préfaisceau

$$(R^\sharp, (R^\sharp)^+) \mapsto G(B_{dR}(R^\sharp))/G(B_{dR}^+(R^\sharp)).$$

Notons  $G^*$  le groupe réductif forme intérieure quasi-déployée de  $G$  (i.e  $G_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \simeq G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}^*$ ) ainsi que  $T \subset B \subset G^*$  un tore maximal contenu dans un sous groupe de Borel de  $G^*$ .

Posons  $X_*(G) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}_p}}, G_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ . Le groupe de Galois  $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$  ainsi que  $G(\overline{\mathbb{Q}_p})$  agissent sur  $X_*(G)$  et on a

$$\Gamma \left[ X_*(G^*)/G^*(\overline{\mathbb{Q}_p}) \right] = \Gamma \left[ X_*(G)/G(\overline{\mathbb{Q}_p}) \right] = \Gamma \backslash X_*(T)^+.$$

Pour  $S = \mathrm{Spa}(C, C^+)$  avec  $C/\mathbb{Q}_p$  un corps perfectoïde algébriquement clos alors  $B_{dR}^+(C)$  est un anneau de valuation discrète et on voit que

$$Gr_G^{B_{dR}}(C, C^+) = G(B_{dR}(C))/G(B_{dR}^+(C)).$$

On a la décomposition de Cartan

$$G(B_{dR}(C)) = \bigsqcup_{\mu \in X_*(T)^+} G(B_{dR}^+(C))\mu(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C)).$$

NOTATION 3.4. — Notons  $\leq$  l'ordre de Bruhat sur  $X_*(T)^+$ , i.e  $\mu' \leq \mu$  si et seulement si  $\mu - \mu'$  est une somme des co-racines positives avec des coefficients positifs rationnels.

DÉFINITION 3.5 ([20] – 19.2.2. Variétés de Schubert). — Pour un cocaractère  $\mu \in X_*(T)^+$ , notons  $E$  son corps de définition et  $\check{E} := E \cdot \check{\mathbb{Q}_p}$ . Considérons les sous-foncteurs  $Gr_{G, \mu}^{B_{dR}} \subset Gr_{G, \leq \mu}^{B_{dR}} \subset Gr_G^{B_{dR}}$  qui sont définis par les conditions qu'un morphisme  $S \rightarrow Gr_G^{B_{dR}}$  avec un morphisme  $S \rightarrow \mathrm{Spd} \check{E}$  où  $S \in \mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}_p}}$  se factorise par  $Gr_{G, \mu}^{B_{dR}}$  resp.  $Gr_{G, \leq \mu}^{B_{dR}}$  si et seulement si pour tout point géométrique  $x = \mathrm{Spa}(C(x), C(x)^+) \rightarrow S$ , les éléments correspondant dans  $Gr_G^{B_{dR}}(C(x)) = \bigsqcup_{\mu \in X_*(T)^+} G(B_{dR}^+(C))\mu(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$  appartiennent à  $G(B_{dR}^+(C))\mu(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$ , resp. à  $\bigsqcup_{\mu' \leq \mu} G(B_{dR}^+(C))\mu'(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$ .

On dispose alors du théorème suivant.

THÉORÈME 3.6 ([20]). — Pour tout  $\mu \in X_*(T)^+$ ,  $Gr_{G, \leq \mu}^{B_{dR}}$  est un diamant spatial. Le sous-foncteur  $Gr_{G, \leq \mu}^{B_{dR}} \subset Gr_G^{B_{dR}}$  est un sous-foncteur fermé qui est propre sur  $\mathrm{Spa}(\check{E})^\diamond$  et  $Gr_{G, \mu}^{B_{dR}} \subset Gr_{G, \leq \mu}^{B_{dR}}$  est un sous-foncteur ouvert. De plus le morphisme  $Gr_{G, \leq \mu}^{B_{dR}} \rightarrow \mathrm{Spa}(\check{E})^\diamond$  est de dimension de transcendance finie (i.e  $\dim.\mathrm{trg} < \infty$ ).



*Démonstration.* — Toutes les assertions, sauf la dernière, sont démontrées dans la proposition 19.2.3 et le théorème 19.2.4 de [20]. L’assertion sur la finitude de la dimension de transcendance est démontrée implicitement dans les lemmes 19.3.2 et 19.3.3.

D’après le lemme 19.1.5 de loc.cit, toute injection de groupes réductifs  $G \hookrightarrow GL_n$  induit une immersion fermée  $Gr_{G, \leq \mu}^{B_{dR}} \hookrightarrow Gr_{GL_n, \leq \mu}^{B_{dR}}$ . On peut donc supposer  $G = GL_n$ .

Puisqu’il y a un nombre fini de  $\mu' \leq \mu$  et que chaque point  $x \in |Gr_{GL_n, \leq \mu}^{B_{dR}}|$  appartient à  $|Gr_{GL_n, \mu'}^{B_{dR}}|$  pour un  $\mu' \leq \mu$ , il suffit de montrer la dernière assertion pour  $Gr_{GL_n, \mu}^{B_{dR}}$ .

En vertu du lemme 19.3.3 de loc.cit., il suffit de considérer la résolution de Demazure  $\widetilde{Gr}_{GL_n, \mu}^{B_{dR}}$  de  $Gr_{GL_n, \mu}^{B_{dR}}$  (définition 19.3.1 de loc.cit). Nous allons suivre la suite de réductions du lemme 19.3.2. Le lemme 21.3 de [19] nous permet de supposer que  $\mu$  est minuscule. Ensuite, la question 21.4<sup>1</sup> de loc.cit nous permet de passer au recouvrement ouvert et comme dans le lemme 19.3.2 de [20], il suffit de considérer le morphisme  $Grass(d, n)^\diamond \rightarrow Spa(\check{E})^\diamond$ . Dans ce cas, le résultat découle de [16]. □

### 4. L’espace de modules de Shtukas

Supposons maintenant que le  $G$ -fibré  $\mathcal{E}$  est trivialisé sur  $B_{dR}^+(R^\sharp)$ . En terme du recollement de Beauville-Laszlo,  $\mathcal{E}$  correspond à un triplet  $(\mathcal{E}_e, \mathcal{E}_{1, B_{dR}}^+, \iota)$  où  $\mathcal{E}_{1, B_{dR}}^+$  est le  $B_{dR}^+$ -réseau trivial dans  $\mathcal{E}_{1, B_{dR}}(R^\sharp)$  et où  $\iota$  est un isomorphisme

$$(1) \quad \iota : \mathcal{E}_e \otimes_{B_e(R)} B_{dR}(R^\sharp) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1, B_{dR}}^+ \otimes_{B_{dR}^+(R^\sharp)} B_{dR}(R^\sharp) \simeq \mathcal{E}_{1, B_{dR}}.$$

Autrement dit, un fibré  $\mathcal{E}$  trivialisé sur  $B_{dR}^+(R^\sharp)$  est déterminé par un couple  $(\mathcal{E}_e, \iota)$  avec  $\iota$  comme décrit dans (1).

Soit  $R^\sharp = C$  un corps perfectoïde algébriquement clos ainsi que  $R = C^b$ . Considérons une modification

$$\alpha : \mathcal{E}_{b_1}|_{X_{C^b} \setminus D_C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{b_2}|_{X_{C^b} \setminus D_C}$$

où  $b_1, b_2 \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$ .

Puisque  $\mathcal{E}_{b_1}$  et  $\mathcal{E}_{b_2}$  possèdent une trivialisations naturelle sur  $B_{dR}^+(C)$ , la modification  $\alpha$  induit un automorphisme  $g = \iota_{b_2} \circ (\alpha \otimes \text{Id}_{B_{dR}(C)}) \circ \iota_{b_1}^{-1}$  de  $\mathcal{E}_{1, B_{dR}}$ . D’après la décomposition de Cartan, il existe un unique  $\mu \in X_*(T)^+$  de sorte

---

1. Nous utilisons la définition au début du page 120 et le lemme 21.3 ainsi que la question 21.4 sont donc vérifiés.

que  $g \in G(B_{dR}^+(C))\mu(t)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$ . On dit alors que la modification  $\alpha$  est de type  $\mu$ .

Revenons à la situation générale où  $R$  est une algèbre affinoïde perfectoïde et  $R^\sharp$  un débasculément de  $R$ . Une modification

$$\alpha : \mathcal{E}|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}}$$

est dite de type  $\mu$  si et seulement si pour tout point géométrique  $x_{C^b} : C^b \rightarrow \text{Spa}(R, R^+)$ , la modification  $x_{C^b}^* \alpha$  est de type  $\mu$ .

DÉFINITION 4.1. — Supposons nous donné un triplet  $(G, \mu, b)$  où  $G$  est un groupe réductif sur  $\mathbb{Q}_p$ ,  $b \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$  et  $\mu \in X_*^+(T)$  avec  $b \in B(G, \mu)$ . Notons  $E$  le corps de définition de  $\mu$ . L'espace de modules de Shtukas  $\text{Sht}(G, \mu, b) \rightarrow \text{Spa}(\check{E})^\diamond$  est le préfaisceau sur  $\text{Perf}_{\check{\mathbb{F}}_p}$  qui associe à chaque  $\check{E}$ -espace perfectoïde  $S^\sharp$ , avec un débasculément  $(S^\sharp)^b = S$ , l'ensemble des modifications

$$\alpha : \mathcal{E}_b|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}}$$

qui est de type  $\mu'$  plus petit que  $\mu$ .

Le foncteur  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  admet une action de  $G(\mathbb{Q}_p)$ , respectivement de  $J_b(\mathbb{Q}_p)$  via  $\alpha \mapsto g \circ \alpha$  pour  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ , respectivement  $\alpha \mapsto \alpha \circ h^{-1}$  pour  $h \in J_b(\mathbb{Q}_p)$ .

Puisque  $b^\sigma = b^{-1} \cdot b \cdot b^\sigma$  alors  $[b] = [b^\sigma]$  dans  $B(G)$ . Il y a donc un isomorphisme canonique

$$\tilde{\sigma} : \mathcal{E}_{b^\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b.$$

On définit alors la donnée de descente de  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  comme l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Fr}} : \text{Sht}(G, \mu, b) &\xrightarrow{\sim} \text{Sht}(G, b^\sigma, \mu) \\ \alpha &\mapsto \alpha \circ \tilde{\sigma}. \end{aligned}$$

Les actions de  $G(\mathbb{Q}_p)$  et  $J_b(\mathbb{Q}_p)$  commutent avec la donnée de descente.

THÉORÈME 4.2 ([20]). — *Étant donné un triplet  $(G, b, \mu)$  comme ci-dessus alors  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  est un diamant localement spatial. De plus, le morphisme  $f : \text{Sht}(G, \mu, b) \rightarrow \text{Spa}(\check{E})^\diamond$  est partiellement propre et  $\dim.\text{trg } f < \infty$ .*

Démonstration. — On a en effet  $\text{Sht}(G, \mu, b) = \varprojlim_{\check{K}} \text{Sht}(G, \mu, b)_K$ , le théorème 23.1.3 de [20] implique alors que  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  est un diamant localement spatial. D'autre part, la proposition 23.2.1 de loc.cit couplée avec 3.6 implique que  $f$  est partiellement propre et  $\dim.\text{trg } f < \infty$ . □

La proposition suivante est bien connue des experts.

PROPOSITION 4.3. — Soit  $G$  un groupe réductif connexe défini sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $b \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$ . Soient  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  un espace affinoïde perfectoïde sur  $\text{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  ainsi que  $\text{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$  un débasquement. Si  $\alpha : \mathcal{E}_b|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b|_{X_S \setminus D_{S^\sharp}}$  est une modification de  $G$ -fibrés de type  $\mu = 0$  alors  $\alpha$  s'étend en un isomorphisme de  $G$ -fibrés. En particulier on a une identification  $\text{Sht}(G, \text{Id}, 0) \simeq \underline{G}(\mathbb{Q}_p)$ .

Démonstration. — D'après le formalisme tanakien, il suffit de démontrer le résultat pour  $G = GL_n$ .

Supposons tout d'abord que  $\text{Spa}(R, R^0) = \text{Spa}(C^b, \mathcal{O}_{C^b})$  où  $C$  est un corps complet algébriquement clos. En utilisant le recollement de Beauville-Laszlo, on peut exprimer  $\mathcal{E}_b$  sous forme

$$\left( (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p^n)^{\varphi \otimes \text{Id}^{b\sigma}}, (B_{dR}^+(C))^n \right).$$

Comme la modification  $\alpha$  est de type 0, on en déduit que  $g := (\alpha \otimes \text{Id}_{B_{dR}(C)})$  est donné par un élément dans  $GL_n(B_{dR}^+(C))$ . En particulier le couple  $(\alpha, g)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{E}_b$ .

Le cas particulier où  $R = C^b$  couplé avec le lemme 3.4.6 de [5] implique le cas général où  $\text{Spa}(R, R^+)$  est un espace affinoïde perfectoïde.

Enfin, on voit que  $\text{Sht}(G, \text{Id}, 0)$  classe les automorphismes du  $G$ -fibré trivial  $\mathcal{E}_1$ . D'après l'exemple 2.21 de [9], on a une identification de diamants  $\text{Sht}(G, \text{Id}, 0) = \underline{G}(\mathbb{Q}_p)$ . □

### 5. Torsions des modifications des $G$ -fibrés

Soient  $X$  un schéma et  $G$  un  $X$ -schéma en groupes. Un  $G$ -torseur est un  $\mathbb{Q}_p$ -morphisme fidèlement plat  $\mathcal{T} \rightarrow X$  muni d'une action  $G \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  sur l'action triviale de  $X$  de sorte que, fppf-localement sur  $X$ , on a un isomorphisme  $G$ -équivariant  $\mathcal{T} \simeq G \times X$ .

LEMME 5.1 (théorème 3.2 de [7]). — Soit  $G \rightarrow X$  un schéma en groupes réductifs. La catégorie des  $G$ -fibrés sur  $X$  est équivalente à celle des  $G$ -torseurs sur  $X$ .

Soit  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  un espace affinoïde perfectoïde sur  $\text{Spa}(\mathbb{F}_q)$ . Considérons maintenant la courbe de Fargues-Fontaine  $X_S$ . Pour chaque  $b \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$ , on a un  $G$ -fibré  $\mathcal{E}_b$  sur  $X_S$ . Notons  $\mathcal{T}_b$  le  $G$ -torseur correspondant à  $\mathcal{E}_b$  via le lemme 5.1. On peut décrire ce  $G$ -torseur par la formule

$$(2) \quad \mathcal{T}_b = \text{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \left( H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[G] \right)^{\varphi_S \otimes b\sigma = \pi^d}$$

où  $\check{\mathbb{Q}}_p[G]$  est l'algèbre de définition de  $G_{\check{\mathbb{Q}}_p}$ . L'action de  $G$  sur  $\mathcal{T}_b$  est donnée par celle de  $G$  sur lui même par translation à droite. Désormais, notons  $\lambda_g$  et  $\rho_g$  respectivement la multiplication à gauche par  $g$  et à droite par  $g^{-1}$ .

Étant donné un groupe réductif connexe  $G$  défini sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\iota : Z_G^0 \hookrightarrow G$  la composante connexe neutre du centre  $Z_G$ . On va construire un morphisme naturel

$$\text{Bun}_G \times \text{Bun}_{Z_G^0} \longrightarrow \text{Bun}_G .$$

D’après le lemme 5.1, il suffit de définir le morphisme au niveau des toseurs. Considérons  $\mathcal{T}$  un  $G$ -torseur ainsi que  $\mathcal{T}'$  un  $Z_G^0$ -torseur sur  $X$ . Puisque  $Z_G^0$  est contenu dans le centre de  $G$ , on peut munir  $\mathcal{T}$  d’une action de  $Z_G^0$  telle que l’action de  $G$  et de  $Z_G^0$  commutent. Plus précisément, un élément  $g \in Z_G^0$  agit par action de  $g$  sur  $\mathcal{T}$ . Le produit contracté  $\mathcal{T} \times_{Z_G^0} \mathcal{T}'$  est alors un  $G$ -torseur.

PROPOSITION 5.2. — *Pour  $b \in B(G)$  et  $h \in B(Z_G^0)$ , l’image de  $(\mathcal{E}_b, \mathcal{E}_h)$  via le morphisme ci-dessus est  $\mathcal{E}_{b\bar{h}}$  où  $\bar{h} = \iota(h)$ .*

Démonstration. — Il suffit de démontrer  $\mathcal{T}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{b\bar{h}}$  pour  $b \in B(G)$  et  $h \in B(Z_G^0)$ .

D’après la formule (2) on a

$$\mathcal{T}_b = \text{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \left( H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[G] \right)^{\varphi_S \otimes b\sigma = \pi^d}$$

où l’action de  $G$  sur  $\mathcal{T}_b$  est donnée par action de  $G$  sur lui même par translation à droite et action de  $Z_G^0$  est donnée par translation à gauche.

On a le diagramme commutatif suivant où  $\mu$  désigne la multiplication de  $G$ .

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} G_{\check{\mathbb{Q}}_p} \times (Z_G^0)_{\check{\mathbb{Q}}_p} & \xrightarrow{\mu} & G_{\check{\mathbb{Q}}_p} \\ \lambda_b \times \rho_{\bar{h}}^{-1} \downarrow & & \downarrow \lambda_{b\bar{h}} \\ G_{\check{\mathbb{Q}}_p} \times (Z_G^0)_{\check{\mathbb{Q}}_p} & \xrightarrow{\mu} & G_{\check{\mathbb{Q}}_p} \end{array}$$

On en déduit que la co-multiplication  $\mu : \check{\mathbb{Q}}_p[G] \longrightarrow \check{\mathbb{Q}}_p[G] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0]$  induit l’isomorphisme voulu  $\mathcal{T}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{b\bar{h}}$ . □

Pour  $T$  un tore défini sur  $\check{\mathbb{Q}}_p$ , d’après Kottwitz on a une bijection

$$\kappa : B(T)_{\text{basic}} = B(T) \xrightarrow{\sim} X_*(T)_\Gamma .$$

On note  $b_\lambda$  l’élément correspondant à un  $\lambda \in X_*(T)_\Gamma$  via cette bijection. On voit également que  $B(T, \lambda) = \{b_\lambda\}$ , en particulier pour  $C$  un corps algébriquement clos, il existe une modification de type  $\lambda$

$$\alpha : \mathcal{E}_{b|X_{C^b} \setminus D_C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_{C^b} \setminus D_C}$$

si et seulement si  $\mathcal{E}_b \simeq \mathcal{E}_{b_\lambda}$ .

Étant données deux modifications  $\alpha, \alpha'$  de type  $\mu = 0 \in X_*(T)$ , d'après la proposition 5.2, on peut construire une autre modification qui est aussi de type  $\mu = 0$

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1.$$

En utilisant cette construction, on peut munir l'espace de Shtukas  $\text{Sht}(T, 0)$  d'une structure de diamant en groupes. En effet, pour  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  un espace affinoïde perfectoïde sur  $\text{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  ainsi que  $S^\sharp = \text{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$  un débasculement. Étant données deux modifications de type  $\mu = 0$

$$\alpha, \beta : \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}},$$

on définit le produit de  $\alpha$  et  $\beta$  par la formule

$$\alpha \times \beta : \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\alpha \times \beta} \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} = \mathcal{E}_1.$$

Alors  $\text{Sht}(T, 0)$  avec ce produit est un diamant en groupes. De plus, d'après la proposition 4.3, on a une identification de diamants en groupes  $\text{Sht}(T, 0) \simeq T(\mathbb{Q}_p)$ .

LEMME 5.3. — *Pour une modification  $\alpha : \mathcal{E}_{|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \rightarrow \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$  de  $G$ -torseurs et deux modifications  $\beta, \gamma : \mathcal{E}_{|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \rightarrow \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$  de  $Z_G^0$ -torseurs on a  $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$  comme modifications de  $G$ -torseurs.*

*Démonstration.* — Il s'agit d'utiliser le lemme 5.1 pour calculer explicitement les isomorphismes des toseurs. □

Étant donné un groupe réductif connexe  $G$  défini sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\iota : Z_G^0 \hookrightarrow G$  la composante connexe du tore central. Le morphisme  $\iota$  induit un morphisme  $\theta : X_*(Z_G^0) \rightarrow X_*(T)^+$  où  $T$  est le tore maximal de  $G$ . Afin d'alléger les notations, pour  $\lambda \in X_*(Z_G^0)$ , on note encore  $\lambda$  son image par  $\theta$  dans  $X_*(T)^+$ .

Soient  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  un espace affinoïde perfectoïde sur  $\text{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  ainsi que  $S^\sharp = \text{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$  un débasculement. Si l'on dispose d'une modification  $\alpha : \mathcal{E}_{h|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \rightarrow \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$  de  $Z_G^0$ -fibrés de type  $\lambda$ , alors pour tout  $G$ -fibré  $\mathcal{E}_b$  et tout isomorphisme  $f : \mathcal{E}_b \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b$  on a une modification de  $G$ -fibrés

$$\bar{\alpha} : \mathcal{E}_{b\bar{h}} \simeq \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{h|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{f \times \alpha} \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \simeq \mathcal{E}_b.$$

De même, pour une modification de  $G$ -fibrés  $\beta : \mathcal{E}_b \rightarrow \mathcal{E}_1$  de type  $\mu$ , on peut construire une modifications de  $G$ -fibrés

$$\bar{\beta} : \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\beta \times \text{Id}} \mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} = \mathcal{E}_1.$$

PROPOSITION 5.4. — *Supposons que  $G$  est déployé sur  $\check{\mathbb{Q}}_p$ .*

- (i) *La modification  $\bar{\alpha} : \mathcal{E}_{b\bar{h}} \rightarrow \mathcal{E}_b$  est de type  $\lambda$ .*
- (ii) *La modification  $\bar{\beta}$  est de type  $\mu$ .*

*Démonstration.* — D’après le formalisme tanakien, il suffit de démontrer le résultat pour toutes les représentations  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  de  $G$ . Puisque l’on est dans le cas de caractéristique 0 et que  $G$  est réductif, la catégorie  $\text{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$  est semi-simple. Il suffit donc de traiter les représentations irréductibles. Lorsque  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  est irréductible, on a  $\rho(Z_G^0) \subset Z_{GL(V)}$ . On obtient également un cocaractère de  $Z_{GL(V)}$

$$\rho \circ \lambda : \mathbb{G}_{m, \overline{\mathbb{Q}}_p} \rightarrow Z_{GL(V), \overline{\mathbb{Q}}_p}.$$

On peut supposer que  $G = GL(V)$ . On a alors  $Z_G^0 = GL_1$  et  $X_*(Z_G^0) \simeq \mathbb{Z}$ , de plus le cocaractère  $\lambda$  correspond à un  $d \in \mathbb{Z}$ . On en déduit que  $h = [p^d] \in B(Z_G^0)$  puisque la modification  $\alpha : \mathcal{E}_{h|X_S \setminus D_{S^\#}} \rightarrow \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}}$  est de type  $\lambda$ .

Pour calculer le type de  $\bar{\alpha}$ , il suffit de considérer le cas  $R = C^b$  où  $C$  est un corps complet algébriquement clos. D’après le recollement de Beauville-Laszlo, on a la description suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p^d} &= \left( (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes p^d \sigma}, B_{dR}^+(C) \right) \\ \mathcal{E}_1 &= \left( (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes \text{Id } \sigma}, B_{dR}^+(C) \right). \end{aligned}$$

La modification  $\alpha$  de type  $\lambda$  est alors donnée par l’isomorphisme

$$\begin{aligned} (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes p^d \sigma} &\rightarrow (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes \text{Id } \sigma} \\ x &\mapsto t_{C^b}^{-d} x. \end{aligned}$$

D’après la formule (2), la modification  $\alpha$  s’écrit en termes de  $Z_G^0$ -torseurs

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{p^d|X_{C^b} \setminus D_C} &\simeq \left( B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0] \right)^{\varphi \otimes p^d \sigma} \\ &\xrightarrow{\sim} \left( B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0] \right)^{\varphi \otimes \text{Id } \sigma} \simeq \mathcal{T}_{1|X_{C^b} \setminus D_C} \\ x \otimes x' &\mapsto t^{-d} x \otimes x'. \end{aligned}$$

En utilisant le diagramme (3), la modification  $\bar{\alpha}$  s’écrit en termes de  $G$ -torseurs

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{p^d b|X_{C^b} \setminus D_C} &\simeq \left( B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[G] \right)^{\varphi \otimes p^d b \sigma} \\ &\xrightarrow{\sim} \left( B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[G] \right)^{\varphi \otimes \text{Id } \sigma} \simeq \mathcal{T}_{1|X_{C^b} \setminus D_C} \\ x \otimes x' &\mapsto t_{C^b}^{-d} x \otimes x'. \end{aligned}$$

Finalement la modification  $\bar{\alpha}$  s’écrit sous la forme

$$\begin{aligned} (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\varphi \otimes p^d b \sigma} &\rightarrow (B_{C^b}[t^{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\varphi \otimes \text{Id } \sigma} \\ x &\mapsto t^{-d} x. \end{aligned}$$

Il est alors aisé de voir que la modification  $\bar{\alpha}$  est de type  $(d, \dots, d) \in \mathbb{Z}^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V} = X_*(GL(V))$ , autrement dit  $\bar{\alpha}$  est de type  $\lambda$ , ce qui démontre le point (i).

On démontre le point (ii) par le même argument. □

On peut ainsi utiliser la proposition 5.4 pour définir une action de  $\text{Sht}(Z_G^0, 0) \simeq \underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  et sur  $\text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$ . Soient  $S = \text{Spa}(R, R^+)$  un espace affinoïde perfectoïde sur  $\text{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$  ainsi que  $S^\# = \text{Spa}(R^\#, (R^\#)^+)$  un débasquement. Étant donnée une modification de type  $\mu = 0$  de  $Z_G^0$ -fibrés  $\alpha : \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}}$  et une modification de type  $\mu$  de  $G$ -fibrés  $\alpha' : \mathcal{E}_{b|X_S \setminus D_{S^\#}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}}$ , on définit l'action de  $\alpha$  sur  $\alpha'$  par la formule

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}} \xrightarrow{\alpha' \times \alpha} \mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}} = \mathcal{E}_1.$$

D'après la proposition 5.4,  $\alpha' \times \alpha$  est une modification de type  $\mu$ . Le lemme 5.3 implique que cela définit une action de  $\underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\text{Sht}(G, \mu, b)$ .

De même, si l'on a une modification de type  $\lambda$  de  $Z_G^0$ -fibrés  $\alpha' : \mathcal{E}_{b_\lambda|X_S \setminus D_{S^\#}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}}$ , on peut définir une autre modification de type  $\lambda$  par la formule

$$\mathcal{E}_{b_\lambda} = \mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{b_\lambda|X_S \setminus D_{S^\#}} \xrightarrow{\alpha^{-1} \times \alpha'} \mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}} = \mathcal{E}_1$$

où les actions de  $Z_G^0$  sur  $\mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_{b_\lambda}$  et  $\mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \mathcal{E}_1$  sont induites par celle sur la première composante.

REMARQUE 5.5. — Étant donné un élément  $g \in Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  correspondant à une modification de type  $\mu = 0$  de  $Z_G^0$ -fibrés  $\alpha : \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}}$  alors action de  $\alpha$  est celle de  $\iota(g)$  où  $\iota : Z_G^0(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$  est l'injection canonique. En effet, on a  $\alpha' \times \alpha = (\alpha' \circ \text{Id}_{\mathcal{E}_1}) \times (\text{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_1} \circ \alpha) = (\alpha' \times \text{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_1}) \circ (\text{Id}_{\mathcal{E}_1} \times \alpha) = \alpha' \circ \iota(g)$ .

LEMME 5.6. — Soient  $T$  un tore défini sur  $\mathbb{Q}_p$  et  $\alpha, \beta : \mathcal{E}_\lambda \rightarrow \mathcal{E}_1$  deux modifications de  $T$ -fibrés de type  $\lambda$ . Alors il existe une modification  $\gamma : \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$  (de type 0) de sorte que  $\beta = \alpha \times \gamma$ .

Démonstration. — Soit  $\alpha' : \mathcal{E}_{\lambda^{-1}} \rightarrow \mathcal{E}_1$  une modification de  $T$ -fibrés de type  $\lambda^{-1}$  (une telle modification existe). Considérons la modification suivante

$$\alpha \times \alpha' : \mathcal{E}_\lambda \times_T \mathcal{E}_{\lambda^{-1}|X_S \setminus D_{S^\#}} \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\#}}$$

Puisque  $\mathcal{E}_\lambda \times_T \mathcal{E}_{\lambda^{-1}} = \mathcal{E}_1$  (d'après la proposition 5.2), la modification  $\alpha \times \alpha'$  est en fait une modification de type 0 de  $\mathcal{E}_1$ . Posons  $\alpha' \times (\alpha \times \alpha')^{-1} \times \beta$  le

produit contracté

$$\mathcal{E}_{\lambda^{-1}} \times_T \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{\alpha' \times (\alpha \times \alpha')^{-1} \times \beta} \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_1.$$

En particulier d'après la proposition 5.2,  $\mathcal{E}_{\lambda^{-1}} \times_T \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_1$  et on voit que  $\alpha' \times (\alpha \times \alpha')^{-1} \times \beta$  est une modification de type 0 de  $\mathcal{E}_1$ . Finalement, d'après le lemme 5.3, on a

$$\alpha \times \left( \alpha' \times (\alpha \times \alpha')^{-1} \times \beta \right) = \left( \text{Id} \times \beta \right) = \beta$$

ce qui termine la démonstration. □

### 6. Modifications centrales des espaces de Shtukas

Dans cette section, on suppose que  $G$  est déployé sur  $\check{\mathbb{Q}}_p$ . En utilisant la proposition 5.4, on prouve un énoncé géométrique reliant deux espaces de modules de Shtukas. On donnera également une relation cohomologique de ces espaces.

Puisque le produit fibré de diamants existe ([19], Prop. 11.4), alors  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\check{\mathbb{Q}}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$  est un diamant. C'est le faisceau sur  $\text{Perf}_{\check{\mathbb{Q}}_p, \text{pro-ét}}$  qui associe à chaque  $\check{\mathbb{Q}}_p$ -espace perfectoïde  $S^\sharp$ , avec  $(S^\sharp)^b = S$ , l'ensemble des couples  $(\alpha, \beta)$  où  $\alpha : \mathcal{E}_{b|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$  est une modification de  $G$ -fibrés de type  $\mu'$  plus petit que  $\mu$  et  $\beta : \mathcal{E}_{b_\lambda|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$  est une modification de  $G$ -fibrés de type  $\lambda$ . Comme le diamant en groupes  $\text{Sht}(Z_G^0, 0) \simeq \underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)$  agit sur  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  et  $\text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$ , on peut définir le faisceau quotient.

**DÉFINITION 6.1.** — On définit  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$  comme le faisceau quotient. Plus précisément, c'est la faisceautisation du pré-faisceau sur  $\text{Perf}_{\check{\mathbb{F}}_p}$  qui associe à chaque  $\check{\mathbb{Q}}_p$ -espace perfectoïde  $S^\sharp$ , avec  $(S^\sharp)^b = S$ , l'ensemble  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\check{\mathbb{Q}}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)(S^\sharp, S) / \underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)(S^\sharp, S)$ .

Le groupe  $G(\mathbb{Q}_p) \times \text{J}_b(\mathbb{Q}_p)$  agit sur le diamant  $\text{Sht}(G, \mu, b)$ , on peut utiliser cette action pour définir une action de ce groupe sur le faisceau  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$ . Un élément  $g \in G(\mathbb{Q}_p)$  correspond à un isomorphisme  $\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$  et  $g$  agit sur  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  par composition avec cet isomorphisme. On définit alors l'action de  $g$  sur  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$  par la formule  $g((\alpha, \beta)) = (g \circ \alpha, \beta)$ . Cette action est bien définie car  $(g \circ \alpha) \times \gamma = (g \times \text{Id}_{\mathcal{E}_1}) \circ (\alpha \times \gamma) = g \circ (\alpha \times \gamma)$  pour tout  $\gamma \in \underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)$ .



De la même manière, on définit une action de  $J_b(\mathbb{Q}_p)^2$  sur  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$ . Il y a des isomorphismes canoniques

$$\sigma_b : \mathcal{E}_{b^\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b \quad \sigma_{b_\lambda} : \mathcal{E}_{b_\lambda^\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{b_\lambda}.$$

On définit alors la donnée de descente de  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$  comme l'isomorphisme

$$\text{Fr} : \text{Sht}(G, b^\sigma, \mu) \times_{\text{Sht}(Z_G^0, 0)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \xrightarrow{\sim} \text{Sht}(G, b^\sigma, \mu) \times_{\text{Sht}(Z_G^0, 0)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \\ (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \circ \sigma_b, \beta \circ \sigma_{b_\lambda}).$$

On vérifie aisément que cela est bien défini.

LEMME 6.2. — Notons  $\sigma_{b\bar{b}_\lambda} : \mathcal{E}_{(b\bar{b}_\lambda)^\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{b\bar{b}_\lambda}$  l'isomorphisme canonique. On a alors

$$\sigma_b \times \sigma_{\bar{b}_\lambda} = \sigma_{b\bar{b}_\lambda}.$$

Démonstration. — D'après la formule (2) on a

$$\mathcal{T}_b = \text{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \left( H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[G] \right)^{\varphi_S \otimes b\sigma = \pi^d},$$

et de même pour le torseur  $\mathcal{T}_{b^\sigma}$ . On en déduit que l'isomorphisme canonique  $\sigma_b : \mathcal{T}_{b^\sigma} \simeq \mathcal{T}_b$  est donné par  $\text{Id}_S \otimes b$ .

D'après la proposition 5.2, on sait que la co-multiplication  $\mu : \check{\mathbb{Q}}_p[G] \rightarrow \check{\mathbb{Q}}_p[G] \otimes_{\check{\mathbb{Q}}_p} \check{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0]$  induit l'isomorphisme  $\mathcal{T}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{T}_{b_\lambda} = \mathcal{T}_{b\bar{b}_\lambda}$ . On en déduit que  $\sigma_b \times \sigma_{\bar{b}_\lambda} = \sigma_{b\bar{b}_\lambda}$ .  $\square$

THÉORÈME 6.3. — Il y a un isomorphisme  $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de faisceaux pro-étale qui commute avec les données de descentes.

$$\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0}(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \rightarrow \text{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot \lambda).$$

Démonstration. — Pour une  $\check{\mathbb{Q}}_p$ -algèbre perfectoïde  $R^\sharp$  avec  $(R^\sharp)^b = R$  et un couple  $(\alpha, \beta) \in \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\check{\mathbb{Q}}_p)^\circ} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)(R^\sharp, R)$ , on peut construire, d'après la proposition 5.2, une modification

$$\alpha \times \beta : \mathcal{E}_{b\bar{b}_\lambda|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \rightarrow \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$$

D'autre part, en écrivant  $\alpha = \text{Id}_{\mathcal{E}_b} \circ \alpha$  et  $\beta = \beta \circ \text{Id}_{\mathcal{E}_1}$ , on voit que

$$\alpha \times \beta = \left( \alpha \times \text{Id}_{\mathcal{E}_1} \right) \circ \left( \text{Id}_{\mathcal{E}_b} \times \beta \right)$$

où  $\text{Id}_{\mathcal{E}_b} \times \beta$  et  $\alpha \times \text{Id}_{\mathcal{E}_1}$  sont des modifications de  $G$ -fibrés

$$\text{Id}_{\mathcal{E}_b} \times \beta : \mathcal{E}_{b\bar{b}_\lambda} \rightarrow \mathcal{E}_b \quad \alpha \times \text{Id}_{\mathcal{E}_1} : \mathcal{E}_b \rightarrow \mathcal{E}_1$$

qui sont respectivement de type  $\lambda$  et  $\mu$  d'après la proposition 5.4.

2.  $\bar{b}_\lambda$  étant un élément central de  $G(\check{\mathbb{Q}}_p)$ , on a alors  $J_b(\mathbb{Q}_p) = J_{b\bar{b}_\lambda}(\mathbb{Q}_p)$ .

Afin de calculer le type de  $\alpha \times \beta$ , on utilise la décomposition de Cartan

$$G(B_{dR}(C)) = \bigsqcup_{\eta \in X_*(T)/W} G(B_{dR}^+(C))\eta(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$$

où  $C$  est un corps perfectoïde algébriquement clos et  $T$  un tore maximal de  $G$ .

Pour  $g \in G(B_{dR}^+(C))\mu(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$  et  $h \in G(B_{dR}^+(C))\lambda(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$ , on voit que  $gh \in G(B_{dR}^+(C))\mu \cdot \lambda(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$  car  $\lambda(\xi)^{-1}$  est central. Autrement dit la modification  $\alpha \times \beta$  est de type  $\mu \cdot \lambda$ .

On a construit un morphisme  $\Phi : \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\mathbb{Q}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \rightarrow \text{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot \lambda)$ . Montrons ensuite que ce morphisme passe au quotient par  $\text{Sht}(Z_G^0, 0)$ .

Soient  $(\alpha, \beta) \in \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\mathbb{Q}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$  et  $\gamma \in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}$ , il faut montrer que  $(\alpha \times \gamma) \times (\gamma^{-1} \times \beta) = \alpha \times \beta$ . Or d'après le lemme 5.3, cette identité est vérifiée.

On va montrer que  $\Phi$  est en fait un isomorphisme. Il s'agit de montrer que  $\Phi_{R^\sharp, R}$  est un isomorphisme pour tous les couples  $(R^\sharp, R)$ . On aura besoin de l'ensemble auxiliaire suivant

$$S = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, b\bar{b}_\lambda) \times_{\text{Spa}(\mathbb{Q}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda^{-1}) \times_{\text{Spa}(\mathbb{Q}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)(R^\sharp, R) \right\} / \sim$$

où  $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha', \beta', \gamma')$  si, et seulement si, il existe  $\theta \in \text{Sht}(Z_G^0, 0)(R^\sharp, R)$  de sorte que  $\alpha' = \alpha \times \theta$ ,  $\beta' = \theta^{-1} \times \beta$  ou  $\beta' = \beta \times \theta$ ,  $\gamma' = \theta^{-1} \times \gamma$ .

On a donc une application canonique

$$f : S \rightarrow \text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, b\bar{b}_\lambda)(R^\sharp, R) \\ (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto \alpha \times \beta \times \gamma.$$

On montre que cela est une bijection. Étant donné une modification  $\alpha \in \text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, b\bar{b}_\lambda)(R^\sharp, R)$ , on choisit  $\beta$  et  $\gamma$  des modifications de  $Z_G^0$ -fibrés de type  $\lambda^{-1}$  et  $\lambda$  respectivement. Puisque  $\beta \times \gamma \in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}(R^\sharp, R)$  on peut choisir  $\delta \in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}(R^\sharp, R)$  de sorte que  $\delta \times \beta \times \alpha = \text{Id}_{\mathcal{E}_{11} \times_{S \setminus D_{S^\sharp}}}$ . On a alors  $f(\alpha, \delta \times \beta, \gamma) = \alpha$ . Autrement dit  $f$  est une surjection. Le même type d'argument couplé avec le lemme 5.6 montre également que  $f$  est injective, finalement on en déduit que  $f$  est une bijection.

Maintenant on définit l'application  $\Phi_{R^\sharp, R}^{-1}$  par la formule

$$\Phi_{R^\sharp, R}^{-1} : S \rightarrow \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\mathbb{Q}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)(R^\sharp, R) \\ (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha \times \beta, \gamma).$$

Il est facile de vérifier que  $\Phi_{R^\sharp, R}^{-1}$  est l'application inverse de  $\Phi_{R^\sharp, R}$ . Reste finalement à voir que  $\Phi_{R^\sharp, R}$  commute avec toutes les structures. La commutativité

avec l'action de  $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p)$  est claire et la commutativité avec les données de descentes résulte du lemme 6.2.  $\square$

On aimerait descendre en niveau fini l'énoncé géométrique de la proposition 6.3. Considérons un sous groupe compact  $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$  et posons  $K_Z := K \cap Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  lequel est un sous groupe compact de  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$ . Puisque  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  est commutatif,  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$  est encore un groupe (discret).

**COROLLAIRE 6.4.** — *Il y a un isomorphisme  $J_b(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant de faisceaux pro-étale qui commute avec les données de descentes.*

$$\left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z}} \left( \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z \right) \longrightarrow \text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, \bar{b}\bar{b}_\lambda)/K.$$

De plus, l'action de  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$  sur  $\left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times \left( \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z \right)$  est sans point fixe.

*Démonstration.* — D'après la remarque 5.5, l'action de  $g \in Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  sur  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  se fait via action de  $\iota(g)$  où  $\iota : Z_G^0(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$  est l'injection canonique. De plus  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  est commutatif, on en déduit que l'action (induite) de  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$  sur  $\text{Sht}(G, \mu, b)/K$  et sur  $\text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z$  est bien définie.

D'après la proposition 6.3, il y a un isomorphisme  $J(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant qui commute avec les données de descentes

$$\left( \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \right) / K \longrightarrow \text{Sht}(G, \bar{b}\bar{b}_\lambda, \mu \cdot \lambda) / K.$$

Il reste à comparer l'espace  $\left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z}} \left( \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z \right)$  avec le quotient  $\left( \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \right) / K$ . Il suffit de comparer au niveau des points.

Montrons tout d'abord que le morphisme canonique

$$(4) \quad \begin{aligned} & \left( \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \right) / K \\ & \longrightarrow \left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \end{aligned}$$

est un isomorphisme (ensembliste). En effet,  $(x, y)$  et  $(z, t)$  dans  $\text{Sht}(G, \mu, b) \times \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)$  sont dans la même classe dans l'ensemble à gauche si et seulement s'il existe  $g \in Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  et  $k \in K$  de sorte que  $z = x \cdot g \cdot k$  et  $t = g^{-1} \cdot y$ .

De même,  $(x, y)$  et  $(z, t)$  sont dans la même classe dans l'ensemble à droite si et seulement s'il existe  $g \in Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  et  $k \in K$  de sorte que  $z = x \cdot k \cdot g$  et  $t = g^{-1} \cdot y$ . Puisque  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$  est contenu dans le centre de  $G(\mathbb{Q}_p)$ , on voit que  $g \cdot k = k \cdot g$ . On en déduit que le morphisme (4) est un isomorphisme.

L'action de  $K_Z$  est triviale sur  $\text{Sht}(G, \mu, b)/K$  alors  $\left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \simeq \left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z$ . Maintenant, l'action

de  $K_Z$  étant triviale sur  $(\text{Sht}(G, \mu, b)/K) \times \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times_{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z \\ & \simeq \left( \text{Sht}(G, \mu, b)/K \right) \times_{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z. \end{aligned}$$

D'autre part, l'action de  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$  sur  $\text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z$  étant sans point fixe, on en déduit qu'il est de même pour l'action de  $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$  sur  $(\text{Sht}(G, \mu, b)/K) \times (\text{Sht}(Z_G^0, \lambda)/K_Z)$ .  $\square$

REMARQUE 6.5. — Notons  $\bar{\Phi}$  le changement de base vers  $\text{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond$  du morphisme  $\Phi : \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\check{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \rightarrow \text{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot \lambda)$ . On remarque que  $\bar{\Phi}$  admet une section. En effet,  $\mathbb{C}_p$  étant un corps perfectoïde, on peut choisir une modification  $\alpha$  dans  $\text{Sht}(Z_G^0, \lambda)(\mathbb{C}_p, \mathbb{C}_p^b)$  et on a également  $\alpha^{-1} \in \text{Sht}(Z_G^0, \lambda^{-1})(\mathbb{C}_p, \mathbb{C}_p^b)$ . Une section de  $\bar{\Phi}$  est donnée par

$$\text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, b\bar{b}_\lambda) \ni \beta \mapsto (\beta \times \alpha^{-1}, \alpha) \in \text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda).$$

En particulier, on a un isomorphisme (qui, à priori, ne commute pas avec les données de descentes)

$$\text{Sht}(G, \mu, b) \times_{\text{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, \lambda) \simeq \text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, b\bar{b}_\lambda) \times_{\text{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond} \text{Sht}(Z_G^0, 1).$$

Il y a également un isomorphisme  $G(\mathbb{Q}_p) \times \text{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant entre  $\text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, b\bar{b}_\lambda)_{\mathbb{C}_p}$  et  $\text{Sht}(G, \mu, b)_{\mathbb{C}_p}$  donné par

$$\text{Sht}(G, \mu, b) \ni \gamma \mapsto \alpha \times \gamma \in \text{Sht}(G, \mu \cdot \lambda, b\bar{b}_\lambda)$$

qui, à priori, ne commute pas avec les données de descentes.

### 7. Groupes de cohomologie de quelques espaces de Rapoport-Zink

Dans ce paragraphe, on va calculer la cohomologie de quelques espaces de Rapoport-Zink non ramifiés en utilisant les résultats des paragraphes précédents et [4], [2].

Considérons un triplet  $(G, \mu, b)$  où  $G$  est un groupe réductif (non ramifié) sur  $\mathbb{Q}_p$ ,  $b \in G(\check{\mathbb{Q}}_p)$  et  $\mu \in X_*^+(T)$  minuscule avec  $b \in B(G, \mu)$ . On suppose que  $(G, \mu, b)$  correspond à une donnée de Rapoport-Zink de type  $EL$  ([18]). À une telle donnée  $(G, \mu, b)$ , on associe un groupe  $p$ -divisible  $\mathbb{X}$  avec structures additionnelles. Notons  $\mathcal{M}(G, \mu, b)$  le foncteur qui classe les déformations par quasi-isogénies de  $\mathbb{X}$  avec structures additionnelles. Ce foncteur est représentable par un schéma formel défini sur  $\text{Spf}(\mathcal{O}_{\check{\mathbb{Q}}_p})$  que l'on notera encore  $\mathcal{M}(G, \mu, b)$ .

Considérons ensuite l'espace rigide  $\check{\mathcal{M}}(G, \mu, b)$  défini sur  $\check{\mathbb{Q}}_p$  associé au schéma formel  $\mathcal{M}(G, \mu, b)$ . Pour chaque sous groupe compact ouvert  $K_p \subset$

$G(\mathbb{Z}_p)$ , il existe un espace rigide  $\check{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)$  qui est défini comme le revêtement étale de  $\check{\mathcal{M}}(G, \mu, b)$  classifiant les  $\mathcal{O}_F$  trivialisations modulo  $K_p$  du module de Tate  $p$ -adique de groupe  $p$ -divisible universel sur  $\check{\mathcal{M}}(G, \mu, b)$ . On a donc une tour d'espaces rigides  $(\check{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b))_{K_p}$  qui possède à la fois une action de  $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p)$  et une donnée de descente.

Il y a un espace de module de Shtukas  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  associé à chaque donnée  $(G, \mu, b)$ . On a une identification de diamants sur  $\text{Spa}(\check{\mathbb{Q}}_p) : \text{Sht}(G, \mu, b) = \varprojlim_{\overline{K}_p} \text{Sht}(G, \mu, b)/K_p$ .

Puisque  $\mu$  est minuscule, d'après le théorème 24.2.5 de [20], on a

$$(5) \quad \text{Sht}(G, \mu, b)/K_p = \check{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)^\diamond.$$

Soit  $X$  un  $\mathbb{C}_p$ -espace analytique tel que  $|X|$  est séparé. Un faisceau  $\mathbb{Z}_\ell$ -adique sur  $X_{\text{ét}}$  est un système projectif  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de faisceaux en  $\mathbb{Z}_\ell$ -module sur  $X_{\text{ét}}$  vérifiant  $\ell^n \mathcal{F}_n = 0$ . D'après [11], pour un faisceau  $\mathbb{Z}_\ell$ -adique  $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on définit le foncteur sections globales à support compact par la formule

$$\Gamma_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \left\{ (s_n)_n \in \varprojlim_{\leftarrow} \Gamma(X, \mathcal{F}_n) \mid \overline{\bigcup_n \text{supp}(s_n)} \text{ est compact} \right\}.$$

On posera  $H_c^q(X, (\mathcal{F}_n)_n) = R^q \Gamma_c(X, \bullet)((\mathcal{F}_n)_n)$ .

Soit  $K_p \subset G(\mathbb{Z}_p)$  un niveau. D'après [11], on peut montrer que

$$H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b), \mathbb{Z}_\ell) = \varprojlim_{\overline{V}} \varprojlim_{\overline{n}} H_c^\bullet(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z})$$

où  $V$  parcourt les ouverts relativement compacts de  $\check{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)$  et où  $\ell \neq p$  est un nombre premier. On note également

$$H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b), \mathbb{Q}_\ell) := H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b), \mathbb{Z}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell.$$

EXEMPLE 7.1 ([11]). — Soit  $Z$  un tore non ramifié et  $K_Z \subset Z(\mathbb{Q}_p)$  un sous groupe compact. Alors, on a

$$H_c^q(\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, 1, \text{Id}), \mathbb{Q}_\ell) = \begin{cases} \mathcal{C}_c^\infty(Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc

$$\varprojlim_{\overline{K}_Z} H_c^0(\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, 1, \text{Id}), \mathbb{Q}_\ell) = \mathcal{C}_c^\infty(Z(\mathbb{Q}_p), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

où action de  $J_b(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}(\mathbb{Q}_p)$  se fait par la représentation régulière. L'action du groupe de Weil  $W_E$  est l'action triviale. D'après la remarque 6.5, il y a un isomorphisme  $Z(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Z}(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant  $\text{Sht}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p} \xrightarrow{\sim} \text{Sht}(Z, 1, \text{Id})_{\mathbb{C}_p}$ . Il y a donc des isomorphismes  $Z(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants

$$H_c^q(\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, 1, \text{Id}), \mathbb{Q}_\ell) = H_c^q(\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p)), \mathbb{Q}_\ell).$$

On considère maintenant les triplets  $(G, \mu, b)$  tels que

- $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_F(V)$  où  $F$  est l'unique extension non ramifiée de degré  $d$  de  $\mathbb{Q}_p$  et  $V$  est un  $F$ -espace vectoriel de dimension  $n$ ,
- $\mu$  est un cocaractère minuscule de  $G$ . Un tel  $\mu$  est déterminé par des couples d'entiers  $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in I}$  où  $I = \text{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ . On suppose de plus que
  - Il existe  $\tau_0 \in I$  tel que  $(p_{\tau_0}, q_{\tau_0}) = (1, n - 1)$ ,
  - Pour  $\tau \neq \tau_0$  on a  $(p_\tau, q_\tau) = (0, n)$  ou  $(p_\tau, q_\tau) = (n, 0)$ .
- $b \in B(G, \mu)$  est l'unique élément basique.

Pour un tel triplet, on a  $J_b(\mathbb{Q}_p) = D_{n/F}^\times$ , le groupe des inversibles de l'algèbre de division d'invariant  $\frac{1}{n}$ , de centre  $F$ . Le corps de définition de  $\mu$  est  $F$ . On note encore  $J \subset I \setminus \{\tau_0\}$  l'ensemble de  $\tau \neq \tau_0$  tel que  $(p_\tau, q_\tau) = (n, 0)$ . Les espaces de Rapoport-Zink associés sont non ramifiés de type  $EL$ . Par la suite, on notera  $\text{Sht}(\mu)$  (resp.  $\check{\mathcal{M}}_K^\mu$ ) pour  $\text{Sht}(G, \mu, b)$  (resp.  $\mathcal{M}_K(G, \mu, b)$ ). Lorsque la signature  $\mu_{\mathcal{L}\mathcal{T}} = (1, n - 1), (0, n), \dots, (0, n)$ , on retrouve la tour de Lubin-Tate. Pour  $\sigma$  une représentation irréductible de  $D_{n/F}^\times$ , on notera  $H_c^q(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)[\sigma] = \text{Hom}_{D_{n/F}^\times}(H_c^q(\check{\mathcal{M}}_K^\mu, \mathbb{Q}_\ell), \sigma)$ .

DÉFINITION 7.2 ([4]). — • Soient  $\pi_1$  et  $\pi_2$  des représentations de respectivement  $GL_{n_1}(F)$  et  $GL_{n_2}(F)$ , on note  $\pi_1 \times \pi_2$  l'induite parabolique  $\text{Ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(F)}^{GL_{n_1+n_2}(F)}(\pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\})$ .

- Soit  $g$  un diviseur de  $n = sg$  et  $\pi$  une représentation cuspidale irréductible de  $GL_g(F)$  :
  - $\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \dots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$  possède un unique quotient (resp. sous espace) irréductible. C'est une représentation de Steinberg (resp. de  $\text{Speh}$ ) généralisée notée habituellement  $\text{St}_s(\pi)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi)$ ).
  - $\text{St}_{s-i}(\pi)\{\frac{-i}{2}\} \times \text{Speh}_i(\pi)\{\frac{s-i}{2}\}$  possède un unique sous espace irréductible que l'on note  $\text{LT}_\pi(s, i)$ . En particulier, pour  $i = 0$  (resp.  $i = s - 1$ ), on retrouve  $\text{St}_s(\pi)$  (resp.  $\text{Speh}_s(\pi)$ )
- Pour  $\pi$  une représentation irréductible cuspidale de  $GL_g(F)$  et  $t > 0$ ,  $\pi[t]_D$  désignera la représentation  $\text{JL}^{-1}(\text{St}_t(\pi))^\vee$  de  $D_{n/F}^\times$ .

THÉORÈME 7.3. — *Pour tout diviseur  $g$  de  $n = gs$  et toute représentation irréductible cuspidale  $\pi$  de  $GL_g(F)$ , on a alors des isomorphismes  $G(\mathbb{Q}_p) \times W_F$ -équivalents*

$$\begin{aligned} & \lim_{\vec{K}} H_c^{n-1-i}(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)[\pi[s]_D] \\ &= \begin{cases} \text{LT}_\pi(s, i) \otimes \mathcal{L}(\pi) \cdot | \cdot |^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} \cdot \prod_{\tau \in J} \omega_i \circ (\tau \text{rec}_F^{-1}) & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

où  $\omega_i$  est le caractère central de  $\text{LT}_\pi(s, i)$  et  $\text{rec}_F^{-1}$  est le morphisme de réciprocity d'Artin et où  $\tau \text{rec}_F^{-1} := \tau \cdot \text{rec}_F^{-1} \cdot \tau^{-1}$ .

REMARQUE 7.4. — Tout énoncé valable sur l'espace de Lubin-Tate trouvera son analogue dans la situation plus générale précédente. En particulier, dans [2] il est annoncé que les  $\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^{\mu, \mathcal{L}\tau}, \mathbb{Z}_\ell)$  sont  $\mathbb{Z}_\ell$ -libres, ce qui impliquerait la même propriété pour  $\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^\bullet(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu, \mathbb{Z}_\ell)$ .

Démonstration. — On exploitera les résultats obtenus dans les sections précédentes pour calculer la cohomologie de la tour  $(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu)_{K_p}$ . Il s'agit de trouver les relations de ce dernier avec la tour de Lubin-Tate. Tout d'abord, d'après [4], on a des isomorphismes  $G(\mathbb{Q}_p) \times W_F$ -équivariants

$$\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^{n-i-1}(\check{\mathcal{M}}_{K_p}^{\mu, \mathcal{L}\tau})[\pi[s]_D] = \begin{cases} \text{LT}_\pi(s, i) \otimes \mathcal{L}(\pi) \cdot | \cdot |^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0. \end{cases}$$

Le groupe  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_F(V)$  est déployé sur  $F$  et  $G_F(F) \simeq \prod_{\tau \in I} GL_n(F)$ . Le centre de  $G$  est  $Z = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_1$  et il est aussi déployé sur  $F : Z_F \simeq \prod_{\tau \in I} GL_1(F)$ . Identifions  $I$  avec  $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ , le groupe de caractère est donné par

$$X_*(Z) = \left\{ (x_{ij})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n} \mid \forall i, j, x_{i,j} \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Le groupe de Weil associé est  $W = S_n^d$ . Le cocaractère  $\mu$  s'écrit sous la forme  $(x_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n}$

$$x_{i,j} = \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) & \text{si } i = i_0 \\ (1, 1, \dots, 1) & \text{si } i \in J \\ (0, 0, \dots, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons maintenant le cocaractère  $\lambda = (z_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n}$  où  $z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Il est clair que  $\lambda(p)$  est dans le centre de  $G(\check{\mathbb{Q}}_p)$  et d'autre part, on constate que  $\mu = \mu_{\mathcal{L}\tau} \cdot \lambda$ . On voit également que  $b_{\mathcal{L}\tau} \cdot \lambda(p)$  est l'unique classe basique de  $B(G, \mu)$ . D'après la remarque 6.5, il y a un isomorphisme  $G(\mathbb{Q}_p) \times \text{Jb}(\mathbb{Q}_p)$ -équivariant

$$\text{Sht}(\mu)_{\mathbb{C}_p} \xrightarrow{\sim} \text{Sht}(\mu_{\mathcal{L}\tau})_{\mathbb{C}_p}.$$

Pour toute représentation supercuspidale  $\pi$  de  $GL_g(F)$ , il y a alors des isomorphismes  $G(\mathbb{Q}_p)$ -équivariants

$$(6) \quad \lim_{\vec{K}} H_c^q(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)[\pi[s]_D] = \lim_{\vec{K}} H_c^q(\check{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\tau})[\pi[s]_D].$$

En particulier, on a  $H_c^{n-i-1}(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)[\pi[s]_D] = 0$  pour  $i < 0$ .

D'après le corollaire 6.4, il y a un isomorphisme  $D_{n/F}^\times$ -équivariant d'espaces rigides qui commute avec la donnée de descente

$$\check{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\tau} \times_{Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z} \check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p)) \longrightarrow \check{\mathcal{M}}_K^\mu.$$

On en déduit qu'il y a un isomorphisme  $D_{n/F}^\times \times W_F$ -équivariant

$$(7) \quad R\Gamma_c\left((\check{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\tau})_{\mathbb{C}_p} \times \check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\right) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell[Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z]}^{\mathbb{L}} \mathbb{Q}_\ell \\ \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c\left((\check{\mathcal{M}}_K^\mu)_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\right).$$

D'après la remarque 6.5, on voit que  $(\check{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\tau})_{\mathbb{C}_p} \times \check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}$  est un  $Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z$ -torseur trivial au-dessus de  $(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)_{\mathbb{C}_p}$ . Alors, le produit tensoriel dérivé dans (7) dégénère en un produit tensoriel. Puisque les groupes de cohomologie supérieure de  $\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}$  s'annulent, la formule de Kunnetth implique qu'il y a un isomorphisme  $D_{n/F}^\times \times W_F$ -équivariant

$$H_c^q\left((\check{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\tau})_{\mathbb{C}_p} \times \check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\right) \\ \simeq H_c^q\left((\check{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\tau})_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\right) \times H_c^0\left(\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\right)$$

On en déduit qu'il y a un isomorphisme  $W_F$ -équivariant entre  $H_c^q(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)[\pi[s]_D]$  et

$$\left(H_c^q(\check{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\tau})[\pi[s]_D] \times \text{Hom}(H_c^0(\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p)), \mathbb{Q}_\ell), \mathbb{Q}_\ell)\right) \otimes_{\mathbb{Q}_\ell[Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z]} \mathbb{Q}_\ell.$$

D'après [6], il y a des isomorphismes  $Z(\mathbb{Q}_p) \times W_F$ -équivariants

$$\text{Hom}_{Z_\lambda(\mathbb{Q}_p)}(H^0(\check{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p)), \mathbb{Q}_\ell), \omega_i) = \omega_i \otimes \prod_{\tau \in J} \omega \circ (\tau \text{rec}_F^{-1})$$

On en déduit que pour  $0 \leq i < s$ , il y a une inclusion

$$(8) \quad \text{LT}_\pi(s, i)^K \otimes \mathcal{L}(\pi) \cdot \left|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}}\right. \cdot \prod_{\tau \in J} \omega_\pi \circ (\tau \text{rec}_F^{-1}) \hookrightarrow H_c^{n-i-1}(\check{\mathcal{M}}_K^\mu)[\pi[s]_D].$$

Mais l'isomorphisme (6) implique que l'inclusion (8) est en fait un isomorphisme de représentations de  $W_F$ . En prenant la limite projective lorsque le niveau  $K$



varie, on en déduit que, pour  $0 \leq i < s$ ,

$$\lim_{\overline{K}} H_c^{n-i-1}(\check{\mathcal{M}}_K^\mu[\pi[s]_D]) = \text{LT}_\pi(s, i) \otimes \mathcal{L}(\pi) \cdot \left| \cdot \right|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} \cdot \prod_{\tau \in J} \omega_\pi \circ (\tau \text{rec}_F^{-1}).$$

□

*Remerciements.* — Je remercie profondément Pascal Boyer et Laurent Fargues tant pour leur aide mathématique déterminante que pour leurs constants encouragements. Je voudrais remercier le rapporteur pour le temps et l'effort qu'il a consacrés à mes travaux.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. BEAUVILLE & Y. LASZLO — « Un lemme de descente », *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Serie Mathématique* **3** (1995), no. 320, p. 335–340.
- [2] P. BOYER — « La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est sans torsion », prépublication.
- [3] ———, « Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Invent. Math.* **138** (1999), no. 3, p. 573–629.
- [4] ———, « Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples », *Invent. Math.* **177** (2009), no. 2, p. 239–280.
- [5] A. CARAIANI & P. SCHOLZE — « On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties », *Annals of Mathematics (2)* **186** (2017), no. 3, p. 649–766.
- [6] M. CHEN — « Le morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles ».
- [7] P. DELIGNE & J. S. MILNE — « Hodge cycles, motives, and Shimura varieties », no. 900, ch. Tannakian Categories, p. 101–228, 1982.
- [8] G. FALTINGS — « Algebraic number theory and algebraic geometry », *Contemp. Math.*, no. 300, ch. A relation between two moduli spaces studied by V.G. Drinfeld, p. 115–129, 2002.
- [9] L. FARGUES — « Geometrization of the local Langlands correspondance : an overview ».
- [10] ———, *Quelques résultats et conjectures concernant la courbe*, *Asterisque*, no. 369.
- [11] ———, « Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink de correspondances de Langlands locales », *Astérisque*, no. 291, ch. Cohomologie des espaces de modules de groupes  $p$ -divisibles et correspondances de Langlands locales, p. 1–199, 2004.
- [12] L. FARGUES & J. M. FONTAINE — « Courbes et Fibrés vectoriels en théorie de Hodge  $p$ -adique ».

- [13] L. FARGUES, A. GENESTIER & V. LAFFORGUE – *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in Mathematics, no. 262, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [14] J. M. FONTAINE – « Séminaire Bourbaki », Astérisque, no. 352, ch. Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze), p. 509–534, 2013.
- [15] R. HARRIS & M. TAYLOR – *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, no. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [16] R. HUBER – *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces*, Aspects of Mathematics, no. E30, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996, MR1734903.
- [17] M. RAPOPORT & E. VIEHMANN – « Towards a theory of local Shimura varieties », *Münster Journal of Mathematics* **7** (2014), p. 273–326, on the occasion of P. Schneider's 60th birthday.
- [18] M. RAPOPORT & T. ZINK – *Period spaces for  $p$ -divisible groups*, Annals of Mathematics Studies, no. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [19] P. SCHOLZE – « Étale cohomology of diamonds », prépublication.
- [20] P. SCHOLZE & J. WEINSTEIN – « Berkeley lectures on  $p$ -adic geometry », prépublication, à paraître dans Annals of Math Studies.
- [21] S. W. SHIN – « On the cohomology of Rapoport-Zink spaces of EL-type », *Amer. J. Math.* **134** (2012), no. 2, p. 407–452, MR2905002.

## SUR LE THÉORÈME DE LA MONODROMIE POUR UNE FAMILLE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES $p$ -ADIQUES

PAR ZOGHMAN MEBKHOUT

---

*À la Mémoire d'Alexandre Grothendieck*

RÉSUMÉ. — Dans cet article nous démontrons un théorème de monodromie semi-global pour un fibré de de Rham  $p$ -adique au voisinage d'un point générique d'une hypersurface d'un schéma lisse sur un corps parfait de caractéristique  $p > 0$  en dimensions supérieures.

ABSTRACT (*On the monodromy theorem for the family of  $p$ -adic differential equations*). — In this article we prove a semi-global monodromy theorem for a  $p$ -adic de Rham bundle in the neighbourhood of a generic point of a hypersurface of a smooth scheme over a perfect field with characteristic  $p > 0$  in higher dimensions.

Dans cet article nous étendons le théorème de la monodromie des équations différentielles sur un corps  $p$ -adique de corps résiduel parfait  $k$  ([1], [16], [18], [19]) au cas d'un corps  $p$ -adique de corps résiduel de type fini sur  $k$  et nous montrons dans le §5, en utilisant la Théorie des Schémas [14], le théorème de monodromie semi-global pour les fibrés  $p$ -adiques en dimensions supérieures qui a été notre motivation géométrique. Dans ce but nous étudions dans le §1 l'action de Frobenius sur les corps des scalaires, nous montrons qu'en général un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet à corps résiduel parfait n'admet

---

*Texte reçu le 23 juin 2017, modifié le 25 février 2019, accepté le 25 mai 2020.*

ZOGHMAN MEBKHOUT, Institut de Mathématiques de Jussieu UMR7586, Université D. Diderot Paris 7, Batiment Sophie Germain, Case 7012 75205 Paris cedex 13 •  
*E-mail* : [zoghman.mebkhout@imj-prg.fr](mailto:zoghman.mebkhout@imj-prg.fr)

Classification mathématique par sujets (2010). — 11S20, 12H25, 14F40.

Mots clés. — Familles d'équations différentielles  $p$ -adiques, Actions géométriques de Frobenius, Théorème de monodromie en rang 1, Propriétés (DNL), (NLE) des exposants, Structures géométriques de Frobenius, Foncteurs de monodromies, Théorème de monodromie semi-global.

pas d'extension finie admettant un automorphisme de Frobenius qui prolonge l'automorphisme de l'anneau des vecteurs de Witt du corps résiduel et nous introduisons l'action géométrique de Frobenius ( $\sigma$ ). Nous montrons dans le §2, qui est indépendant du §1, qu'un module soluble de rang 1 et de pente non nulle devient de pente nulle après extension permise finie pour tout corps  $p$ -adique à valuation discrète complet sans autres conditions, ce qui clarifie une fois pour toute, comme nous l'espérons, une situation bien confuse à ce jour. Dans le §3 nous étudions les rapports entre constituants irréductibles et absolument irréductibles d'un module différentiel. En tenant compte de ces résultats nous améliorons dans le §4 les résultats des articles ([18], [19]), en particulier nous obtenons en égales caractéristiques zéro le meilleur théorème de décomposition en rang 1 possible. Cet article peut servir au lecteur non averti d'introduction aux résultats les plus profonds de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques.

Nous remercions infiniment le rapporteur de la section 5 de l'avoir relu soigneusement, qui a permis d'améliorer sa rédaction et ses notations pour le bénéfice du lecteur et pour la promotion des mathématiques.

## 1. Endomorphismes géométriques de Frobenius d'un corps $p$ -adique

Soient  $p > 0$  un nombre premier et  $\mathbb{Q}_p$  le corps des nombres  $p$ -adiques muni de la valeur absolue  $|\cdot|$  normalisée par  $|p| = 1/p$ .

DÉFINITION 1.1. — Nous appelons corps  $p$ -adique une extension  $\mathbb{Q}_p \rightarrow L$  de corps valués ultramétriques.

Si  $L$  est un corps  $p$ -adique on note  $|\cdot|$  sa valeur absolue,  $\mathcal{O}_L$  son anneau des entiers et  $k := k_L$  son corps résiduel. On rappelle qu'un endomorphisme (de corps) borné d'un corps valué est une isométrie, en particulier un endomorphisme d'un corps  $p$ -adique  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire continu est une isométrie. Nous indiquons dans chaque énoncé les hypothèses faites sur le corps des scalaires. Mais pour la commodité du lecteur nous désignons en général par  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet dont le corps résiduel est parfait, par  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet de corps résiduel éventuellement non parfait et par  $C$  un corps  $p$ -adique algébriquement clos et complet.

DÉFINITION 1.2. — On dit qu'un endomorphisme d'un corps  $p$ -adique  $\sigma : L \rightarrow L$  est de Frobenius s'il induit l'identité sur  $\mathbb{Q}_p$ , s'il est continu et si pour tout élément  $a$  de l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_L$  on a l'inégalité  $|\sigma(a) - a^p| < 1$ .

Autrement dit un endomorphisme de Frobenius est un endomorphisme  $\mathbb{Q}_p$ -linéaire continu qui relève l'endomorphisme de Frobenius du corps résiduel. Le complété  $\mathbb{C}_p$  d'une clôture algébrique de  $\mathbb{Q}_p$  admet un automorphisme de Frobenius qui dépend de l'axiome du choix ([4], prop. 1.10.1). Dans le cas

général l'existence ou non d'un endomorphisme de Frobenius sur un corps  $p$ -adique est une question plutôt délicate qui a donné lieu à une grande confusion. Nous allons examiner le cas d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète complet à corps résiduel parfait, le cas d'un corps à valuation discrète complet à corps résiduel parfait puis le cas d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète de corps résiduel un corps de fonctions sur un corps parfait.

**1.1. Cas d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète et de corps résiduel parfait.** — Soit  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet et à corps résiduel parfait, l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_K$  est donc une extension finie totalement ramifiée de l'anneau  $W(k)$  des vecteurs de Witt à coefficients dans  $k$ . On note  $\bar{K}$  une clôture algébrique de  $K$  et  $C$  le complété de  $\bar{K}$ . Nous montrons :

**THÉORÈME 1.3.** — *Le corps  $\bar{K}$  admet un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  qui prolonge l'automorphisme de Frobenius canonique  $\sigma_c$  sur l'anneau  $W(k)$  et qui se prolonge en un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  du corps  $C$ .*

**LEMME 1.4.** — *Soit  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet et à corps résiduel parfait, alors l'anneau  $W(\bar{k})$  des vecteurs de Witt à coefficient dans la clôture algébrique  $\bar{k}$  s'injecte canoniquement dans l'anneau des entiers du corps  $C$  de façon compatible avec le passage au corps résiduel.*

*Démonstration.* — Considérons l'ensemble des extensions finies  $k \rightarrow k'$  dans le corps résiduel de  $\bar{K}$  et leur relèvement canonique  $W(k) \rightarrow W(k')$  dans  $\bar{K}$  qui forment de façon naturelle un ensemble inductif  $W(k')_{k \rightarrow k'}$ . Le complété de la limite inductive  $\widehat{\lim_{k \rightarrow k'} W(k')}$  dans l'anneau métrique complet  $\mathcal{O}_C$  est un anneau de valuation discrète complet non ramifié sur  $W(k)$  et dont le corps résiduel est la clôture algébrique  $\bar{k}$ . Il admet donc un  $W(k)$ -isomorphisme canonique sur l'anneau  $W(\bar{k})$ .  $\square$

On rappelle qu'un corps ultramétrique  $\Omega$  est maximalelement complet si l'intersection de toute suite de disques emboîtés non vides est non vide. Un corps maximalelement complet est complet. Nous rappelons le théorème ([13], lem. 8.2) :

**THÉORÈME 1.5.** — *Soit  $\Omega$  un corps ultramétrique algébriquement clos et maximalelement complet, alors tout automorphisme borné d'un sous-corps se prolonge en un automorphisme borné de  $\Omega$ .*

L'hypothèse d'être algébriquement clos est indispensable, elle est nécessaire pour le point 8.3.2 de la démonstration du lemme 8.2. Il est facile de construire des exemples où un tel automorphisme ne prolonge pas sans cette hypothèse. Un tel prolongement dépend de l'axiome du choix.

On rappelle qu'une extension immédiate d'un corps ultramétrique est une extension qui admet même corps des restes et même groupe des valeurs absolues. Nous rappelons le théorème cf. ([4], th. 1.9.7)

**THÉORÈME 1.6.** — *Tout corps ultramétrique algébriquement clos admet une extension immédiate maximale complète qui est automatiquement algébriquement close.*

Le point de la démonstration est d'établir que la classe des extensions immédiates d'un corps est un ensemble inductif dont un élément maximal se trouve être une extension cherchée.

*Démonstration du théorème 1.3.* — Soit  $W(\bar{k}) \rightarrow O_C$  l'extension du lemme 1.4,  $W(\bar{k})[1/p] \rightarrow C$  l'extension des corps des fractions et  $C \rightarrow \Omega$  une extension maximale complète fournie par le théorème 1.6. En vertu du théorème 1.5 l'automorphisme de Frobenius  $\sigma_c$  du corps  $W(\bar{k})[1/p]$  se prolonge en un automorphisme continu  $\sigma$  de  $\Omega$ . Soit  $a$  un élément de l'anneau des entiers de  $\Omega$  et  $a_0$  un élément de l'anneau  $W(\bar{k})$  qui relève la classe de  $a$  dans le corps résiduel qui existe puisque les trois corps  $W(\bar{k})[1/p], C, \Omega$  admettent  $\bar{k}$  comme résiduel. L'inégalité ultramétrique  $|\sigma(a) - a^p| \leq \max(|\sigma(a) - \sigma(a_0)|, |\sigma(a_0) - a_0^p|, |a^p - a_0^p|)$  montre que  $|\sigma(a) - a^p| < 1$  et donc  $\sigma$  est un automorphisme de Frobenius de  $\Omega$ . Soit  $a$  un élément de  $\bar{K}$ , comme  $\sigma$  induit l'automorphisme  $\sigma$  du corps de fractions  $K_0$  de l'anneau  $W(k)$  on trouve que  $\sigma(a)$  est un élément de  $\bar{K}$ . De même comme  $\sigma^{-1}$  induit l'automorphisme  $\sigma_c^{-1}$  du corps  $K_0$  on trouve que  $\sigma^{-1}(a)$  un élément de  $\bar{K}$  et donc  $\sigma$  induit un automorphisme de  $\bar{K}$  qui est automatiquement de Frobenius que nous notons encore  $\sigma$ . L'automorphisme de Frobenius de  $\bar{K}$  se prolonge par continuité en un automorphisme du complété  $C$  et comme ces deux corps ont même corps résiduel ceci montre que le prolongement à  $C$  est un automorphisme de Frobenius que nous notons encore  $\sigma$ .  $\square$

## 1.2. Cas d'un corps à valuation discrète dont le corps résiduel est parfait. —

Si on considère la clôture algébrique  $\mathbb{Q}_p \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}_p$  dans  $\bar{K}_0$  un automorphisme  $\sigma$  de Frobenius de  $\bar{K}_0$  induit un automorphisme de Frobenius de  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  qui est un élément du groupe de Galois de  $\bar{\mathbb{Q}}_p$  sur  $\mathbb{Q}_p$ . Il stabilise donc toutes les extensions galoisiennes de  $\mathbb{Q}_p$ . Dans le cas général  $K_0 \rightarrow \bar{K}_0$  un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  n'est pas un élément du groupe de Galois de  $\bar{K}_0$  sur  $K_0$  et il ne stabilise pas les extensions galoisiennes finies, c'est là une différence essentielle.

**PROPOSITION 1.7.** — *Soit  $K_0 \rightarrow K$  une extension finie contenue dans  $\bar{K}_0$  d'indice de ramification  $e$  premier à  $p$ , si  $\sigma$  est un automorphisme de Frobenius de  $\bar{K}_0$  fournit par le théorème 1.3 alors  $K$  admet une extension finie dans  $\bar{K}_0$  qui est stable par  $\sigma$  qui induit un automorphisme.*

*Démonstration.* — Soit  $k \rightarrow k'$  l'extension résiduelle et  $K_0 \rightarrow W(k')[1/p] \rightarrow K$  la factorisation canonique, l'action de Frobenius de  $W(k')[1/p]$  prolonge celle de

$K_0$  et on peut supposer que  $K$  est totalement ramifié sur  $K_0$ . Une uniformisante de  $K$  est solution d'une équation d'Eisenstein  $(\theta)^e + a_1(\theta)^{e-1} + \dots + a_e$ ,  $a_i \in (p)$ ,  $a_e \notin (p^2)$ . On a l'égalité  $\sigma(\theta) = \theta u$  où  $u$  est une unité de  $\overline{K_0}$  solution d'un polynôme de degré  $e$  à coefficients dans  $\mathcal{O}_K$  et sa réduction  $\bar{u}$  est une racine  $e$ -ème d'un élément non nul du corps résiduel. Comme  $e$  est premier à  $p$  en vertu du lemme de Hensel une extension finie  $K \rightarrow K'$  non ramifiée contient  $u$  et  $K'$  est stable par l'action de  $\sigma$  qui est un automorphisme.  $\square$

La situation où l'indice de ramification est divisible par  $p$  est très différente et plutôt surprenante. Avec les notations précédentes supposons que l'extension  $\overline{\mathbb{F}_p} \rightarrow \bar{k}$  induite par une clôture algébrique  $k \rightarrow \bar{k}$  est non triviale de sorte qu'il existe un élément  $\bar{u}$  de  $k$  qui est transcendant sur  $\mathbb{F}_p$ , soient  $u$  un relèvement de  $\bar{u}$  dans  $W(k)$  et  $w := \sqrt[e]{1+pu}$  une racine  $p$ -ème de  $1+pu$  contenue dans  $\overline{K_0}$ . Notons que la démonstration du théorème 1.3 montre que tout automorphisme de Frobenius d'une extension finie de  $W(k)$  qui prolonge l'automorphisme canonique se prolonge à un automorphisme  $\sigma$  de  $\overline{W(k)}$ . Soit  $\sigma$  un tel automorphisme, notons  $K_1 := K := K_0(w)$  et  $K_n := K_0(w, \sigma(w), \dots, \sigma^{n-1}(w))$  pour  $n \geq 1$ , les corps  $K_n$  sont des extensions finies de  $K_0$  contenues dans  $\overline{K_0}$ .

**THÉOREME 1.8.** — *Supposons pour simplifier que  $p = 2$ , alors le corps  $K_n$  est de degré  $p^n = 2^n$  sur  $K_0$  pour tout  $n \geq 1$  et le corps  $K$  n'admet aucune extension finie stable par  $\sigma$ .*

*Démonstration.* — La seconde assertion est conséquence de la première assertion, en effet une extension finie de  $K$  qui est stable par  $\sigma$  contient tous les corps  $K_n$  pour tout  $n \geq 1$  ce qui n'est pas tenable. Pour la première assertion nous démontrons par récurrence sur  $n \geq 1$  les 3 propriétés suivantes  $(r_1)_n$  : les monômes  $w^{n_0}(\sigma(w))^{n_1} \dots (\sigma^{n-1}(w))^{n_{n-1}}$  pour  $0 \leq n_i \leq 1$ ,  $0 \leq i \leq n-1$  forment une base de l'extension  $K_0 \rightarrow K_n$ ,  $(r_2)_n$  : si un élément  $a$  de  $K_n$  est tel que son carré appartient à  $K_0$  alors  $a$  est le produit d'un élément de  $K_0$  et d'un élément de la base précédente et enfin  $(r_3)_n$  : l'élément  $\sigma^n(w)$  n'appartient pas à  $K_n$ . L'extension  $K_0 \rightarrow K_1$  est quadratique et  $(r_1)_1$  est vraie. Si un élément  $b + aw$  de  $K_1$  est tel que  $b^2 + 2abw + a^2w^2$  appartient à  $K_0$  alors nécessairement il est égal à  $b$  ou à  $aw$  pour  $a, b$  dans  $K_0$  et  $(r_2)_1$  est vraie. Si  $\sigma(w) := b + aw$  alors, en vertu de  $(r_2)_1$ ,  $\sigma(w)$  est égal à  $b$  ou à  $aw$ . L'égalité  $\sigma(w) = b$  ne peut avoir lieu. Supposons que  $\sigma(w) = aw$  avec  $a \in K_0$  comme les réductions de  $w, \sigma(w)$  modulo l'idéal maximum de  $K_2$  sont égales à 1 cela implique que  $a = 1 + pc$ ,  $c \in W(k)$ . En prenant le carré de chaque membre on trouve l'égalité  $\sigma(1+pu) = (1+pc)^2(1+pu)$  qui montre que  $\sigma(u) - u \in pW(k)$  soit  $\bar{u}^p = \bar{u}$  ce qui est exclu par hypothèse. La propriété  $(r_3)_1$  est vraie. Supposons que  $(r_1)_n, (r_2)_n, (r_3)_n$  sont vraies pour  $n \geq 2$  et que  $\sigma^n(w)$  appartient à  $K_n$ , on a alors l'égalité  $\sigma^n(w) = b + a\sigma^{n-1}(w)$  où  $a, b$  sont des éléments de  $K_{n-2}$  en vertu de la propriété  $(r_1)_n$ . Cela implique que  $ab = 0$  en vertu de la propriété  $(r_3)_n$ , on a alors en vertu de la propriété  $(r_2)_n$  une égalité

$\sigma^n(w) = b'w^{n_0}(\sigma(w))^{n_1} \dots (\sigma^{n-1}(w))^{n_{n-1}}$  pour  $0 \leq n_i \leq 1, 0 \leq i \leq n - 1$  avec  $b'$  un élément de  $W(k)$  de la forme  $1 + pc, c \in W(k)$ , soit en prenant les carrés l'égalité  $\sigma^n(1 + pu) = (1 + pc)^2(1 + pu)^{n_0}(\sigma(1 + pu))^{n_1} \dots (\sigma^{n-1}(1 + pu))^{n_{n-1}}$  qui implique que  $\bar{u}$  est algébrique sur  $\mathbb{F}_p$  ce qui est contraire à l'hypothèse et donc la propriété  $(r_3)_{n+1}$  est vraie. L'extension  $K_n \rightarrow K_{n+1}$  est quadratique, comme le cardinal de la base de  $K_n$  est égale à  $2^n$ , le corps  $K_{n+1}$  est de degré  $2^{n+1}$  sur  $K_0$  et comme les éléments  $w^{n_0}(\sigma(w))^{n_1} \dots (\sigma^{n-1}(w))^{n_n}$  pour  $0 \leq n_i \leq 1, 0 \leq i \leq n$  engendrent le  $K_0$ -espace vectoriel  $K_{n+1}$ , la propriété  $((r_1)_{n+1}$  est vraie. Le même raisonnement montre que la propriété  $(r_2)_{n+1}$  est aussi vraie. D'où le théorème 1.8.  $\square$

REMARQUE 1.9. — Le lecteur notera que les extensions  $K_n \rightarrow K_{n+1}, n \geq 0$  sont totalement ramifiées. En faite la réunion des corps  $K_n$  est la plus petite extension de  $K_0$ , qui est stable par  $\sigma$ , elle est totalement ramifiée et donc de valuation non discrète. Le théorème précédent est vrai pour tout  $p$  avec le même principe de démonstration, mais en plus compliquée. Ce théorème n'est pas utilisé par la suite mais justifie et explique les considérations que nous sommes amené à faire.

**1.3. Cas d'une clôture algébrique d'un corps à valuation discrète dont le corps résiduel est un corps de fonctions.** — Soit  $L$  un corps valué ultramétrique complet, le corps  $L(y) := L(y_1, \dots, y_m)$  des fonctions rationnelles à  $m$ -variables muni de la valeur absolue de Gauss est un corps valué ultramétrique, notons  $E_{L,y}$  son complété qui est par définition le corps des éléments analytiques à  $m$ -variables à coefficients dans  $L$ . Son corps résiduel est le corps  $k(y) := k(y_1, \dots, y_m)$  des fonctions rationnelles à coefficients dans le corps résiduel  $k$  de  $L$ .

LEMME 1.10. — *Sous les conditions précédentes soit  $L \rightarrow L'$  une extension finie séparable, considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} L' \otimes_L L(y) & \longrightarrow & L'(y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L' \otimes_L E_{L,y} & \longrightarrow & E_{L',y} \end{array}$$

alors les morphismes horizontaux sont des isomorphismes de corps.

Démonstration. — Un polynôme à une variable à coefficients dans  $L$  irréductible reste irréductible sur  $L(y)$ . Appliquons cela au polynôme minimal d'un élément primitif de  $L'$ , on trouve que  $L' \otimes_L L(y)$  est un corps. Le premier morphisme est donc injectif. Par ailleurs le premier corps contient les polynômes à coefficients dans  $L'$ , il contient donc leurs inverses et le premier morphisme est surjectif, c'est donc un isomorphisme. En vertu du premier isomorphisme  $L'(y)$  est un sous-corps de  $L' \otimes_L E_{L,y}$  et la norme induite par une base de  $L'$  est



équivalente à la norme de Gauss parce que le corps  $E_{L,y}$  est complet et toutes les normes sont équivalentes sur un espace vectoriel de dimension finie. Comme  $L' \otimes_L E_{L,y}$  est complet le second morphisme est un isomorphisme parce que les deux membres sont des complétés du même corps  $L'(y)$ .  $\square$

**THÉORÈME 1.11.** — *Soit  $K$  est un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet à corps résiduel  $k$  parfait, alors une clôture algébrique du corps  $E_{K,y}$  admet un endomorphisme  $\sigma$  de Frobenius qui prolonge l'endomorphisme canonique de  $W(k)$  et qui se prolonge en un endomorphisme de Frobenius de son complété.*

**LEMME 1.12.** — *Soit  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet à corps résiduel  $k$  parfait, alors le corps des fractions  $W(\overline{k(y)})[1/p]$  de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans une clôture algébrique du corps  $k(y)$  est une extension canonique, de corps à valuation discrète complets, du corps des éléments analytiques  $E_{K_0,y}$  de façon compatible avec l'endomorphisme de Frobenius  $\sigma_c$  qui opère canoniquement sur le corps  $K_0$  et par  $\sigma_c(y_i) := y_i^p, i = 1, \dots, m$  sur les générateurs  $y_i$ .*

*Démonstration.* — Le morphisme canonique  $W(k) \rightarrow W(\overline{k(y)})$  est un morphisme d'anneaux et se prolonge en un morphisme de  $W(k)$ -algèbres  $W(k)[y] \rightarrow W(\overline{k(y)})$  en associant aux générateurs  $y_i$  les vecteurs de Witt  $(y_i, 0, \dots)$ , c'est un morphisme d'anneaux qui est une isométrie. Il se prolonge aux corps des fractions  $W(k)[1/p](y) \rightarrow W(\overline{k(y)})[1/p]$  puis aux complétés  $E_{K_0,y} \rightarrow W(\overline{k(y)})[1/p]$ . Par construction les endomorphismes de Frobenius canoniques  $\sigma_c$  sont compatibles.  $\square$

**REMARQUE 1.13.** — Autrement dit cette dernière extension est une extension de corps de valuation discrète complets d'indice de ramification égal à 1, compatible avec l'action de Frobenius et relève par chance l'extension  $k(y) \rightarrow \overline{k(y)}$  malgré les extensions inséparables.

Notons pour simplifier  $A_{K_0,y}$  une clôture algébrique du corps de Witt à coefficients dans  $\overline{k(y)}$  et  $C_{K_0,y}$  son complété.

**LEMME 1.14.** — *L'automorphisme de Frobenius  $\sigma_c$  du corps  $W(\overline{k(y)})[1/p]$  se prolonge en un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  du corps  $A_{K_0,y}$  qui se prolonge en un automorphisme  $\sigma$  de Frobenius du corps  $C_{K_0,y}$ .*

*Démonstration.* — En vertu du théorème 1.6 le corps  $C_{K_0,y}$ , qui est algébriquement clos en vertu du théorème de Krasner, admet une extension immédiate, algébriquement close et maximale complète  $\Omega$ . En vertu du théorème 1.5 l'automorphisme de Frobenius  $\sigma_c$  du corps  $W(\overline{k(y)})[1/p]$  se prolonge en un automorphisme  $\sigma$  du corps  $\Omega$  qui est nécessairement de Frobenius par le raisonnement précédent parce que le corps résiduel n'augmente pas. Si  $a$  est un élément algébrique sur  $W(\overline{k(y)})[1/p]$  son image par  $\sigma$  est encore algébrique

parce que  $\sigma$  induit  $\sigma_c$  sur le corps  $W(\overline{k(y)})[1/p]$  et donc le corps  $A_{K_0,y}$  est stable par  $\sigma$ . L'endomorphisme  $\sigma$  du corps  $A_{K_0,y}$  est un automorphisme parce que  $\sigma_c$  est un automorphisme du corps  $W(k(y))[1/p]$  qui se prolonge en un automorphisme  $\sigma$  du corps  $C_{K_0,y}$ . Ces automorphismes  $\sigma$  sont nécessairement de Frobenius parce que le corps résiduel n'augmente pas.  $\square$

**COROLLAIRE 1.15.** — *L'endomorphisme de Frobenius  $\sigma_c$  du corps  $E_{K_0,y}$  se prolonge en un endomorphisme  $\sigma$  de sa clôture algébrique  $\overline{E_{K_0,y}}$  dans le corps  $A_{K_0,y}$  ainsi qu'à son complété.*

*Démonstration.* — En effet si  $a$  est un élément algébrique sur le corps  $E_{K_0,y}$  son image par l'automorphisme  $\sigma$  de  $A_{K_0,y}$  est encore algébrique parce que  $\sigma$  induit l'endomorphisme de Frobenius  $\sigma_c$  du corps  $E_{K_0,y}$  et donc la clôture algébrique  $\overline{E_{K_0,y}}$  est stable par  $\sigma$  qui est nécessairement un endomorphisme de Frobenius qui induit l'endomorphisme  $\sigma_c$  sur  $E_{K_0,y}$  qui n'est pas surjectif. Cet endomorphisme se prolonge en un endomorphisme de Frobenius du complété.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.11.* — En effet l'extension  $E_{K_0,y} \rightarrow E_{K,y}$  est finie en vertu du lemme 1.10 et induit un isomorphisme sur les clôtures algébriques, le théorème 1.11 résulte alors du corollaire précédent.  $\square$

Ce qui précède conduit à la définition :

**DÉFINITION 1.16.** — Soit  $L$  un corps  $p$ -adique, nous dirons que  $L$  a la propriété  $(\sigma)$  si une clôture algébrique  $L \rightarrow \overline{L}$  admet un endomorphisme de Frobenius  $\sigma$  tel que  $\sigma(L)$  est contenu dans une extension finie de  $L$ .

On vérifie à l'aide d'un élément primitif le lemme :

**LEMME 1.17.** — *La propriété  $(\sigma)$  est stable par extension finie et pour tout  $j \geq 1$  il existe une extension finie de  $L$  qui contient  $\sigma^j(L)$ . De plus la propriété  $(\sigma)$  est stable par clôture algébrique et complétion de la clôture algébrique.*

En vertu des théorèmes précédents les corps  $K$  et  $E_{K,y}$  ont la propriété  $(\sigma)$  si  $K$  est un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet à corps résiduel parfait.

**1.4. Morphismes de Frobenius des anneaux de séries.** — Soit  $L$  un corps valué ultramétrique, notons  $\mathcal{E}_{L,x}$  le  $L$ -espace vectoriel des séries de Laurent  $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$  en la variable  $x$  et à coefficients dans  $L$  telles que  $\sup |a_n|, n \in \mathbb{Z}$  est fini et que  $\lim_{n \rightarrow -\infty} |a_n| = 0$ . Si  $L$  est complet, muni de la norme multiplicative  $|g| := \sup |a_n|$  l'espace  $\mathcal{E}_{L,x}$  est une  $L$ -algèbre complète. Si  $L$  est complet notons  $\mathcal{R}_{L,x}$  le  $L$ -espace vectoriel des séries de Laurent  $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$  qui convergent pour  $|x| \in ]1 - \epsilon, 1[$  pour un  $\epsilon > 0$  non précisé, c'est une  $L$ -algèbre. Notons  $\mathcal{E}_{L,x}^\dagger$  l'intersection des  $L$ -algèbres  $\mathcal{E}_{L,x}$  et  $\mathcal{R}_{L,x}$  dans le  $L$ -espace vectoriel des séries de Laurent. Si  $L$  est maximale complet l'anneau  $\mathcal{R}_{L,x}$  est

de Besout, c'est-à-dire ses idéaux de type fini sont principaux ([9], prop. 3.1.1), c'est une conséquence d'un théorème de M. Lazard.

1.4.1. *Morphismes de Frobenius  $L$ -linéaires.* — Si  $A$  est l'une des trois  $L$ -algèbres précédentes on note  $\text{MLC}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules libres de type fini muni d'une connexion. Si  $L$  est un corps  $p$ -adique complet on note  $\varphi$  le  $L$ -endomorphisme de  $A$  défini par  $\varphi(x) := x^p$  et  $\varphi^*$  le foncteur image inverse de la catégorie  $\text{MLC}(A)$  induit par l'extension  $\varphi : A \rightarrow A$ . Nous allons rappeler les propriétés du foncteur  $\varphi^*$ . Si  $\mathcal{M}$  est un module de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{L,x})$ , sa fonction rayon de convergence est définie par :

$$\rho \in ]1 - \epsilon, 1[ \mapsto \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho) := \min(\rho, \liminf_{k \rightarrow \infty} (|G_k|_\rho)^{-1/k})$$

où  $G_k$  est la matrice de l'opérateur  $\Delta_x^k := \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k}$  dans une base. Si  $g = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$  est une série de Laurent la norme en  $\rho$  est par définition  $|g|_\rho := \max_n |a_n| \rho^n$ . La fonction rayon de convergence ne dépend pas de la base choisie : c'est le rayon de convergence des solutions locales dans le disque générique  $D(t_\rho, \rho^-)$ . Un disque générique  $D(t_\rho, \rho^-)$  au bord du disque  $D(0, \rho^-)$  appartient à une extension  $L \rightarrow \Omega$  transcendante de  $L$ , pour tout  $\rho$  une telle extension existe. La fonction rayon de convergence est à valeurs réelles positives, logarithmiquement concave. La limite

$$\text{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) := \lim_{\rho \rightarrow 1^-} \text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$$

existe et, de plus, la fonction  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$  est logarithmiquement dérivable à gauche, de valeur éventuellement infini, quand  $\rho \rightarrow 1^-$ . Par construction on a la majoration  $\text{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) \leq 1$ . On dispose de la définition ([9], 4.1.1) :

DÉFINITION 1.18. — On dit que  $\mathcal{M}$  est soluble en 1 si  $\text{Ray}(\mathcal{M}, 1^-) = 1$ . On note  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  la catégorie des modules solubles.

Si le corps  $L$  est maximalelement complet les catégories  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{L,x})$ ,  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  sont abéliennes stables par extensions et par dualité ([10], th. 3.2.5, prop. 4.1.2).

THÉORÈME 1.19. — *Le foncteur  $\varphi^*$  est une équivalence de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{E}_{L,x}^\dagger)$  dans elle-même. Si  $L$  est maximalelement complet le foncteur  $\varphi^*$  est une équivalence de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  dans elle-même.*

L'essentielle surjectivité du foncteur  $\varphi^*$  dans le cas de  $\mathcal{E}_{L,x}^\dagger$  résulte de la structure de Frobenius faible de Christol-Dwork [7]. La pleine fidélité pour les 2 cas et l'essentielle surjectivité du foncteur  $\varphi^*$  dans le cas de l'anneau  $\mathcal{R}_{L,x}$  sont montrées dans ([19], th. 2.5.4).

1.4.2. *Morphismes géométriques de Frobenius.* — Soit  $L$  un corps  $p$ -adique complet et  $L \rightarrow \bar{L}$  une clôture algébrique. Les anneaux  $\bar{L} \otimes_L A_{L,x} := \bar{L} \otimes_L A_L$  apparaissent de façon naturelle comme les limites inductives filtrantes  $\lim_{L \rightarrow L'} L' \otimes_L A_{L,x}$  indexées par des extensions finies  $L \rightarrow L'$  de  $\bar{L}$ . Supposons que le corps  $p$ -adique des scalaires  $E = L$  est à **valuation discrète et complet**, alors les anneaux  $\mathcal{E}_{E,x}, \mathcal{E}_{E,x}^\dagger$  sont des corps  $p$ -adiques à valuation discrète dont le corps résiduel est le corps des séries formelles  $k((x))$  à coefficients dans le corps résiduel  $k$  du corps  $E$ , le corps  $\mathcal{E}_{E,x}$  est complet et le corps  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger$  est hensélien. Les  $\bar{E}$ -algèbres  $\bar{E} \otimes_E \mathcal{E}_{E,x}^\dagger, \bar{E} \otimes_E \mathcal{E}_{E,x}$  sont des corps  $p$ -adiques non complets dont le corps résiduel est la limite inductive  $\varinjlim_{k \rightarrow k'} k'((x)) = \bar{k} \otimes_k k((x))$  des corps résiduels. Si  $C$  est le complété de  $\bar{L}$  l'anneau  $\bar{L} \otimes_L A_{E,x}$  apparaît comme le sous anneau de la  $C$ -algèbre  $A_{C,x}$  de séries de Laurent dont les coefficients appartiennent à une extension finie de  $L$  non précisée.

DÉFINITION 1.20. — Supposons que  $L$  a la propriété  $(\sigma)$ . On appelle **morphisme géométrique** de Frobenius d'ordre  $j \geq 1$  de  $A_{L,x}$  et on note  $\varphi_{\sigma,L,L'}^j$  un morphisme d'anneaux de  $A_{L,x}$ , vers  $A_{L',x}$  où  $L'$  est une extension finie non précisée de  $L$  contenant  $\sigma^j(L)$ , défini par  $\varphi_{\sigma,L,L'}^j(\sum_n a_n x^n) := \sum_n \sigma^j(a_n)(x^{p^j})^n$ . Par construction un morphisme  $\varphi_{\sigma,L,L'}^j$  est de la forme  $\varphi_j \circ \sigma^j$  où  $\varphi_j$  est un  $L'$ -endomorphisme de Frobenius d'ordre  $j$ . Un morphisme  $\varphi_{\sigma,L,L'}^j$  se prolonge en un endomorphisme  $\varphi_\sigma^j$  sur les anneaux  $\bar{L} \otimes_L A_{L,x}$ , et un endomorphisme  $\varphi_\sigma^j$  sur ces anneaux se descend en un endomorphisme  $\varphi_{\sigma,L,L'}^j$ , ce qui explique la terminologie.

REMARQUE 1.21. — Si  $\sigma$  stabilise  $L : \sigma(L) \subset L$  le morphisme  $\varphi_{\sigma,L,L}^j$  induit un morphisme de Frobenius des anneaux  $\mathcal{E}_{L,x}, \mathcal{E}_{L,x}^\dagger, \mathcal{R}_{L,x}$ , mais cela est restrictif même après extension finie en vertu du théorème 1.8. Par ailleurs la condition  $(\sigma)$  donne un sens précis au prolongement d'un automorphisme de Frobenius à une extension finie non précisée que nous avons utilisée dans les articles ([18], [19]) dans le cas d'un corps résiduel parfait.

## 1.5. Structures géométriques de Frobenius. —

DÉFINITION 1.22. — Supposons que  $L$  a la propriété  $(\sigma)$ . Une structure **géométrique** de Frobenius d'ordre  $j \geq 1$  sur un module  $\mathcal{M}$  de la catégorie  $\text{MLC}(A)$  est un isomorphisme horizontal de  $L' \otimes_L A$ -modules entre  $(\varphi_{\sigma,L,L'}^j)^* \mathcal{M}$  et  $L' \otimes_L \mathcal{M}$ , resp.  $\bar{L} \otimes_L A$ -modules entre  $(\varphi_\sigma^j)^* \mathcal{M}$  et  $\bar{L} \otimes_L \mathcal{M}$ . Par construction une structure géométrique de Frobenius d'ordre  $j$  sur un  $A$ -module  $\mathcal{M}$  libre de type fini à connexion se prolonge en une structure de Frobenius d'ordre  $j$  du module  $\bar{L} \otimes_L \mathcal{M}$  et une structure de Frobenius d'ordre  $j$  du module  $\bar{L} \otimes_L \mathcal{M}$  se descend en une structure géométrique de Frobenius d'ordre  $j$  du module  $L' \otimes_L \mathcal{M}$  pour

une extension finie  $L \rightarrow L'$  non précisée. Nous dirons structure géométrique de Frobenius pour structure géométrique de Frobenius d'ordre non précisé.

Les  $L$ -morphisms de Frobenius ne posent aucune difficulté et on peut utiliser des morphismes de la forme  $\varphi_u(x) := x^p + u$  où  $u$  est un élément de  $\mathcal{E}_{L,x}^\dagger$  de norme strictement plus petite que 1, mais la condition  $(\sigma)$  sur le corps des scalaires est indispensable. En fait il est nécessaire de considérer les morphismes  $\varphi_u$  dans la démonstration du théorème 2.9 et leurs prolongements :

PROPOSITION 1.23. — Soient  $E$  un corps à valuation discrète complet et  $v : \mathcal{E}_{E,x} \rightarrow \mathcal{E}_{E,x'}$  resp.  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E,x'}^\dagger$  est une extension finie dont l'extension résiduelle  $k((x)) \rightarrow k((x'))$  est séparable, un morphisme  $\varphi_u$  de  $\mathcal{E}_{E,x}$ , resp.  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger$ , se prolonge en un morphisme  $\varphi_{u'}$  du corps  $\mathcal{E}_{E,x'}$ , resp.  $\mathcal{E}_{E,x'}^\dagger$ .

Démonstration. — Dans le cas complet  $\mathcal{E}_{E,x} \rightarrow \mathcal{E}_{E,x'}$  l'extension induite sur les anneaux des entiers  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}}$  est plate, non ramifiée par construction et comme l'extension résiduelle est séparable ceci implique que l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}}$  est une  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x}}$ -algèbre formellement lisse ([14], IV<sub>1</sub>, 0, 19.3.1, 19.7.1)). Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x}} & \xrightarrow{v} & \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}} & & k((x)) & \xrightarrow{\bar{v}} & k((x')) \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x}} & \xrightarrow{v} & \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}} & & k((x)) & \xrightarrow{\bar{v}} & k((x')) \end{array}$$

où les morphismes verticaux du diagramme de droite sont les élévations à la puissance  $p$  des variables  $x, x'$ . Comme l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{\sigma(E),x'}}$  est complet et noethérien il admet la propriété de relèvement ([14], IV<sub>1</sub>, 0, 19.8.2) et le diagramme commutatif de gauche se relève en diagramme commutatif qui fournit le morphisme  $\varphi_{u'}$  du corps  $\mathcal{E}_{E,x'}$ . Si le morphisme  $v$  provient d'un morphisme  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E,x'}^\dagger$  l'élément  $(x')^p + u'$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}}$  fournit dans le cas complet est par construction solution d'une équation polynomiale à coefficients dans l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}^\dagger}$ . Mais le couple  $(\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}^\dagger}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}})$  a la propriété d'approximation d'Artin et l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}^\dagger}$  est algébriquement fermé dans l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}}$ , l'élément  $u'$  appartient bien à l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}_{E,x'}^\dagger}$ . □

### 2. Le théorème de la monodromie pour un module de rang 1

Pour décomposer les modules de rang divisible par  $p$  un point essentiel [18] est de passer aux modules des endomorphismes et d'utiliser le théorème de monodromie pour les modules de rang 1 qui décompose un module complètement irréductible ([11], def. 3.0.7). Le but de ce paragraphe est de montrer un théorème de monodromie en rang 1 sur un corps  $p$ -adique à valuation discrète et

complet, en particulier pour le corps  $E_{K,y}$  qui intervient dans le §5. Nous devons surmonter simultanément les difficultés dues à l'inexistence d'une action de Frobenius sur une extension finie des scalaires et aux extensions inséparables du corps résiduel.

**2.1. Cas d'un corps  $K$  admettant un automorphisme de Frobenius.** Nous allons d'abord traiter le cas d'un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet admettant un automorphisme de Frobenius qui implique que son corps résiduel est parfait. Nous suivons en partie la méthode de l'article [6] dans le cas de rang 1.

LEMME 2.1. — *Soient  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet admettant un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  et  $A$  un élément de  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger$  de norme 1,  $B$  un élément de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  non nul et  $j \geq 1$  un entier. Alors il existe une extension finie  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  composée d'extensions non ramifiées dont les extensions résiduelles sont séparables et un élément  $S$  de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  tels que  $\varphi_\sigma^j(S) - f(A)S - f(B)$  est de norme **strictement** inférieure à  $|B|$  où  $\varphi_\sigma^j$  est un morphisme de Frobenius de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  qu'on peut choisir commuter avec  $f$ .*

*Démonstration.* — Posons  $q := p^j$  et soit  $d$  un élément de  $K$  dont la valeur absolue soit égale à celle de  $B$ , on a donc  $B = dB'$  où  $B'$  est une unité. Soit l'unité  $d/\sigma^j(d)$  et  $u$  sa réduction dans le corps résiduel  $k$ . Soient  $a$  et  $b'$  les réductions dans  $k((x))$  de  $A$  et  $B'$  et considérons le polynôme  $T^q - uaT - ub'$  à coefficients dans le corps  $k((x))$  qui est séparable et donc il existe une extension finie séparable  $k(x) \rightarrow k'(x')$  dans laquelle ce polynôme admet un zéro  $s'$ . Comme  $k$  est parfait on a la factorisation  $k((x)) \rightarrow k'((x)) \rightarrow k'((x'))$  qui se relève en  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  telle que  $K'$  est non ramifié sur  $K$  et donc l'automorphisme  $\sigma$  se prolonge à  $K'$  en un automorphisme de Frobenius noté encore  $\sigma$ . Soit  $S'$  un relèvement dans  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  de ce zéro et considérons l'élément  $\varphi_\sigma^j(S') - \frac{d}{\sigma^j(d)}f(A)S' - \frac{d}{\sigma^j(d)}f(B')$  de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  dont la norme est strictement plus petite que 1. Posons  $S := dS'$  on trouve que  $\varphi_\sigma^j(S) - f(A)S - f(B)$  est de norme strictement bornée par  $|\sigma^j(d)| = |d| = |B|$ . La proposition 1.23 montre la dernière assertion  $\square$

LEMME 2.2. — *Soient  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet admettant un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  et  $A$  un élément de  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger$  de norme 1,  $\omega$  un réel tel que  $0 < \omega < 1$  et  $j \geq 1$  un entier. Alors il existe une extension finie  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  non ramifiée et d'extension résiduelle séparable et un élément  $S$  de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  de norme 1 tels que*

$$\varphi_\sigma^j(S) - f(A)S$$

*est de norme strictement inférieure à  $\omega$  où  $\varphi_\sigma^j$  est un morphisme de Frobenius de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$ .*

*Démonstration.* — Soit  $a$  la réduction de  $A$  dans  $k$ , si le polynôme  $T^{q-1} - a$ ,  $q = p^j$ , a une racine dans  $k((x))$  notons  $S_0$  un relèvement dans  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger$  de cette racine. Par construction  $B_0 := \varphi_\sigma^j(S_0) - AS_0$  est de norme strictement bornée par 1. Si après adjonction  $k \rightarrow k(\xi)$  à  $k$  d'une racine primitive  $(q - 1)$ -ème de l'unité le polynôme  $T^{q-1} - a$  admet une racine on définit  $S_0$  et  $B_0$  comme précédemment. Si le polynôme  $T^{q-1} - a$  est irréductible le corps  $k(\xi)((x))[T]/(T^{q-1} - a)$  est un corps de décomposition du polynôme  $T^{q-1} - a$  qui est une extension séparable. On définit  $S_0$  comme le relèvement de la classe de  $T$  et  $B_0 := \varphi_{\sigma,j}(S_0) - AS_0$  est de norme strictement bornée par 1. En vertu du lemme 2.1 après une extension  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  qui a les propriétés du lemme, il existe un élément  $S'_0$  de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  tel que  $\varphi_\sigma^j(S'_0) - f(A)S'_0 - B_0$  est de norme strictement bornée par  $|B_0|$  où on note par abus  $B_0$  sont image dans  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$ . Par construction on a l'égalité  $|B_0| = |S'_0|$ . À partir du triplet  $(S_0, B_0, S'_0)$  on construit par récurrence pour  $n \geq 1$  des éléments  $(S_n, B_n, S'_n)$  d'une extension finie composée d'extensions qui ont la propriété du lemme en posant  $S_n := S_{n-1} - S'_{n-1}$ ,  $B_n := \varphi_\sigma^j(S_n) - f(A)S_n$  et en définissant  $S'_n$  comme solution de l'inégalité  $|\varphi_\sigma^j(S'_n) - f(A)S'_n - B_n| < |B_n|$  qui existe en vertu du lemme 2.1. Par construction on trouve l'égalité des normes  $|B_n| = |S'_n| = |\varphi_\sigma^j(S_n) - f(A)S_n|$ , la suite  $|B_n|$  est strictement décroissante et  $S_n := S_0 - S'_0 - \dots - S'_{n-1}$  est de norme 1. Pour  $n$  assez grand  $S := S_n$  a les propriétés du théorème 2.2. □

REMARQUE 2.3. — Dans les deux lemmes précédentes il est essentiel que les extensions des scalaires soient **non ramifiées** pour qu'une suite d'éléments dont les normes décroissent strictement converge vers zéro.

THÉOREME 2.4. — Soient  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet admettant un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  et soit  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{E}_{K,x}^\dagger)$  de rang 1 muni d'une structure de Frobenius d'ordre  $j$ . Supposons que dans une base la matrice  $A$  de l'action de Frobenius est telle que  $|1 - A| < \omega$  où  $\omega^{p-1} = |p| = 1/p$ , alors  $\mathcal{M}$  est trivialisable sur  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger$ .

Nous allons démontrer quelques résultats préliminaires valable sur sur un corps  $p$ -adique complet  $L$ .

LEMME 2.5. — Soit  $L$  un corps  $p$ -adique complet et  $f$  un élément non nul de  $\mathcal{O}_L[[x]]$  tel que  $|f - 1| < \omega$  et est solution de l'opérateur  $\frac{d}{dx}f - gf = 0$  où  $g \in L[[x]]$  et admet un rayon de convergence strictement plus grand que 1, alors  $f$  admet aussi un rayon de convergence strictement plus grand que 1.

*Démonstration.* — On peut supposer que  $L$  contient  $\pi$ ,  $|\pi| = \omega$  et  $f = 1 + \pi\alpha f'$  où  $\alpha \in L$  de norme bornée strictement par 1 et  $f' \in \mathcal{O}_L[[x]]$ . Alors si  $g(x) = c_0 + c_1x \dots$ , on a l'égalité

$$\text{Log}(1 + \pi\alpha f'(x)) = \text{Log}(1 + \pi\alpha f'(0)) + c_0x + \dots (-1)^n \frac{c_n}{n+1} x^{n+1} + \dots$$

qui montre que  $|(-1)^n \frac{c_n}{n+1}| \leq \omega|\alpha|$  puisque la norme de Gauss de  $\text{Log}(1 + \pi\alpha f'(x))$  est bornée par  $\omega|\alpha|$ . Posons  $\pi\alpha g' := c_0x + \dots (-1)^n \frac{c_n}{n+1}x^{n+1} + \dots$ , alors  $|g'| < 1$  et

$$f = (1 + \pi\alpha f'(0))(1 + \pi\alpha g' + \dots \frac{(\pi\alpha g')^n}{n!} + \dots).$$

Ceci montre pour  $\rho > 1$  assez près de 1 que la série  $\sum_n \frac{(\pi\alpha g')^n}{n!}$  converge dans le domaine  $|x| \leq \rho$ , ce qui implique que  $f$  admet un rayon de convergence strictement plus grand que 1.  $\square$

Notons  $\gamma^+$  la projection de  $\mathcal{E}_{L,x}$  sur  $xL[[x]]$ . Si  $L$  admet un endomorphisme de Frobenius  $\sigma$  et  $\varphi_{\sigma,u}$  l'endomorphisme de Frobenius de  $\mathcal{E}_{L,x}$  qui prolonge  $\sigma$  défini par  $x^p + u$ ,  $|u| < 1$ , définissons pour tout entier  $h \geq 1$ , tout entier  $j \geq 1$  et tout élément  $g \in xL[[x]]$  les opérateurs de  $xL[[x]]$  par  $\xi(g) := \gamma^+ \circ \varphi_{\sigma,u}^j(g)$ ,  $\xi^i(g) := \xi \circ \xi \circ \dots \xi$  ( $i$ -fois) et  $\Phi_h(g) := g + \sum_{1 \leq i \leq h} \xi^i(g)$

LEMME 2.6. — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet admettant un endomorphisme  $\sigma$  et  $g$  est élément de  $x\mathcal{O}_L[[x]]$ , alors la suite  $\Phi_h(g)$  converge pour la topologie  $(\mathfrak{m}, x)$ -adique de l'anneau  $\mathcal{O}_L[[x]]$  où  $\mathfrak{m}$  est l'idéal maximal de  $\mathcal{O}_L$ .*

*Démonstration.* — On peut écrire  $g := x^p u_0 + u_1 + \dots u_i + \dots$  où  $u_0$  de valuation  $x$ -adique non négative et chaque  $u_i$  est un **polynôme** de Laurent de valuation  $x$ -adique bornée par  $p-1$  et de valuation  $\mathfrak{m}$ -adique  $\geq i$ . Posons  $\Phi_{h, < p^{jh}}(g) := \sum_{1 \leq i < p^{jh}} a_{h,i} x^i$  et  $\Phi_{h, \geq p^{jh}}(g) := \sum_{i \geq p^{jh}} a_{h,i} x^i$  si  $a_{h,i} \in \mathcal{O}_L$  sont les coefficients du développement  $x$ -adique de  $\Phi_h(g)$ . Le fait que les éléments  $u_i$  sont des polynômes implique que la valuation  $(\mathfrak{m}, x)$ -adique de  $\Phi_{h, < p^{jh}}(g)$  tend vers l'infini avec  $h$ . Cela entraîne pour  $i$  fixé que la valuation  $\mathfrak{m}$ -adique du coefficient  $a_{h,i}$  de  $\Phi_{h, < p^{jh}}(g)$  tend vers l'infini avec  $h$ . Si on pose  $a_i := \sum_{h, p^{jh} > i} a_{h,i}$  la série  $\sum_{i=1, \infty} a_i x^i$  est un élément bien défini de  $x\mathcal{O}_L[[x]]$  et qui est la limite de la suite  $\Phi_{h, < p^{jh}}(g)$  pour la topologie  $(\mathfrak{m}, x)$ -adique. Comme la suite  $\Phi_{h, \geq p^{jh}}(g)$  converge pour la topologie  $x$ -adique vers un élément de  $x\mathcal{O}_L[[x]]$  on trouve que la suite converge  $\Phi_h(g)$  converge pour la topologie  $(\mathfrak{m}, x)$ -adique de l'anneau  $\mathcal{O}_L[[x]]$  vers un élément  $\Phi(g)$  de  $x\mathcal{O}_L[[x]]$ .  $\square$

LEMME 2.7. — *Sous les conditions précédentes soit  $A$  un élément de  $\mathcal{E}_{L,x}$  tel que  $|A-1| < 1$ . Pour tout entier  $j \geq 1$  il existe un élément  $B$  de  $\mathcal{O}_L[[x]]$ , tel que  $|B-1| \leq |A-1|$  et  $\varphi_{\sigma,u}^j(g)Ag^{-1}$  est un élément de  $L[[1/x]] \cap \mathcal{E}_{L,x}$  tel que  $|\varphi_{\sigma,u}^j(g)Ag^{-1} - 1| \leq |A-1|$  et en particulier est non nul.*

Posons  $\delta := |A-1| < 1$ ,  $U_\delta := \{g(x) \in xL[[x]], |g| \leq \delta\}$ , soit  $\Phi(g) := g + \xi(g) + \dots + \xi^n(g) + \dots$  l'opérateur défini sur  $U_\delta$  par le lemme précédent. On a la relation

$$g = \Phi(g - \xi(g)) = \Phi(g) - \xi \circ \Phi(g)$$



et les inégalités  $|\xi(g)| \leq |g|$ ,  $|\Phi(g)| \leq |g|$  qui montrent que l'opérateur  $\Phi$  est une isométrie. Par ailleurs  $U_\delta$  est fermé dans  $\mathcal{E}_{L,x}$  pour la norme de Gauss et donc complet et  $1 + U_\delta$  est un groupe multiplicatif. Pour  $g \in U_\delta$  l'élément  $\varphi_{\sigma,u}^j(1+g)(1+g)^{-1}A$  est de norme bornée par  $\delta$  et  $\Phi \circ \gamma^+(\varphi_{\sigma,u}^j(1+g)(1+g)^{-1}A)$  est un élément de  $U_\delta$ . Si l'on pose

$$G(1+g) := 1 + g + \Phi \circ \gamma^+(\varphi_{\sigma,u}^j(1+g)(1+g)^{-1}A),$$

$G$  opère sur  $1 + U_\delta$ .

LEMME 2.8. — L'opérateur  $G$  de  $1 + U_\delta$  est une contraction de rapport borné par  $\delta$ .

Démonstration. — L'égalité  $g = \Phi \circ \gamma^+(g - \varphi_{\sigma,u}^j(g))$  montre que

$$G(1+g) = 1 + \Phi \circ \gamma^+(\varphi_{\sigma,u}^j(1+g)A(1+g)^{-1} + g - \varphi_{\sigma,u}^j(g)).$$

Soit

$$\begin{aligned} G(1+g) - G(1+g') &= \Phi \circ \gamma^+(\varphi_{\sigma,u}^j((1+g)(1+g)^{-1} - \varphi_{\sigma,u}^j((1+g')(1+g')^{-1})A \\ &\quad + g - g' - \varphi_{\sigma,u}^j(g - g')). \end{aligned}$$

Mais le terme à l'intérieur de la parenthèse du membre de droite est égal à

$(g - g')(\varphi_{\sigma,u}^j((1+g)((1+g)^{-1}(1+g')^{-1}A - 1) + \varphi_{\sigma,u}^j(g - g')((1+g')^{-1}A - 1))$ , dont la norme majore celle de  $G(1+g) - G(1+g')$ . Par ailleurs les normes de chaque terme se trouvant entre les grandes parenthèses sont majorées par  $\delta$ , ce qui implique l'inégalité  $|G(1+g) - G(1+g')| \leq \delta|g - g'|$ .  $\square$

Démonstration du lemme 2.7. — Soit alors  $B$  un point fixe de  $G$ , on trouve que  $\Phi \circ \gamma^+(\varphi_{\sigma,u}^j(B)AB^{-1}) = 0$ ,  $\gamma^+(\varphi_{\sigma,u}^j(B)AB^{-1}) = 0$  et donc  $\varphi_{\sigma,u}^j(B)AB^{-1} \in K[[1/x]] \cap \mathcal{E}_{K,x}$ . Par ailleurs les inégalités  $|B - 1| \leq \delta$ ,  $|\varphi_{\sigma,u}^j(B) - 1| \leq \delta$  entraînent l'inégalité  $|\varphi_{\sigma,u}^j(B)AB^{-1} - 1| \leq \delta$ .  $\square$

Démonstration du théorème 2.4. — Soit  $A$  la matrice de l'action de Frobenius dans une base de  $\mathcal{M}$ . Par hypothèse  $|A - 1| = \delta < \omega$ . En vertu du lemme 2.7 il existe un élément  $B$  dans  $\mathcal{O}_K[[x]]$  tel que  $|B - 1| \leq \delta$  et  $\varphi_{\sigma,u}^j(B)AB^{-1} \in K[[1/x]] \cap \mathcal{E}_{K,x}$ ,  $|\varphi_{\sigma,u}^j(B)AB^{-1} - 1| \leq \delta$ . Soit  $G$  la matrice de la connexion, on a alors par définition de  $A$ ,  $A^{-1} \frac{dA}{dx} = (\frac{d\varphi_{\sigma,u}^j(x)}{dx})\varphi_{\sigma,u}^j(G) - G$ . Effectuant le changement de base à l'aide de  $B$ , la matrice de la connexion dans la nouvelle base est  $G' := G + B^{-1} \frac{dB}{dx}$ , on trouve que la matrice de l'action de Frobenius dans la nouvelle base est  $A' := \varphi_{\sigma,u}^j(B)AB^{-1}$  qui est un élément de  $K[[1/x]] \cap \mathcal{E}_{K,x}$  tel que  $|A' - 1| \leq \delta$ . Soit  $A'_0$  le coefficient constant de la série  $A'$ , alors  $|A'_0 - 1| \leq \delta$ . En remplaçant  $A'$  par  $A'_0^{-1}A'$  on peut supposer que  $A'_0 = 1$ . Considérons l'élément  $g$  de  $\mathcal{O}_K[[1/x]]$  inverse du produit infini convergent

$A' \varphi_{\sigma,u}^j(A')(\varphi_{\sigma,u}^j(A'))^2 \dots$ , on a alors la relation  $\varphi_{\sigma,u}^j(g) = A'g$  et l'inégalité  $|g - 1| \leq \delta$ . Il vient  $A' = g^{-1} \varphi_{\sigma,u}^j(g)$  et

$$A'^{-1} \frac{dA'}{dx} + G' = \frac{d\varphi_{\sigma,u}^j(x)}{dx} \varphi_{\sigma,u}^j(G'),$$

en tenant compte de l'égalité  $(\varphi_{\sigma,u}^j(g))^{-1} \frac{d\varphi_{\sigma,u}^j(g)}{dx} = \frac{d\varphi_{\sigma,u}^j(x)}{dx} (\varphi_{\sigma,u}^j(g^{-1} \frac{dg}{dx}))$  on trouve l'égalité :

$$G' - g^{-1} \frac{dg}{dx} = \frac{d\varphi_{\sigma,u}^j(x)}{dx} (\varphi_{\sigma,u}^j(G' - g^{-1} \frac{dg}{dx})).$$

Mais les inégalités  $|\frac{d\varphi_{\sigma,u}^j(x)}{dx}| < 1$  et  $|\varphi_{\sigma,u}^j(G' - g^{-1} \frac{dg}{dx})| \leq |G' - g^{-1} \frac{dg}{dx}|$  entraîne l'égalité  $\frac{dg}{dx} = G'g$  qui montre que  $G'$  est un élément de  $\mathcal{O}_K[[1/x]]$ . Finalement en vertu du lemme 2.5 la série  $g$  admet un rayon de convergence strictement plus grand que 1. Posons  $g' := g/B$  alors  $g'$  qui est un élément de  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger$  et est solution de l'opérateur  $\frac{dg'}{dx} = Gg'$ , qui montre que  $\mathcal{M}$  est trivialisable sur  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger$ .  $\square$

**THÉOREME 2.9.** — *Soient  $K$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet muni d'un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  et  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger$  module de rang 1 soluble, alors il existe une extension finie  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  non ramifiée d'extension résiduelle séparable telle que  $f^* \mathcal{M}$  est le produit d'un module défini par  $x' \frac{d}{dx'} - \alpha'$  où  $\alpha'$  est un multiple du résidu de  $\mathcal{M}$  par un module trivialisable sur  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\alpha$  le résidu de la connexion dans une base, la solubilité implique que c'est un élément de  $\mathbb{Z}_p$  et  $\mathcal{M}$  est le produit tensoriel d'un module soluble de résidu nul par le module défini par  $x^\alpha$ . Le foncteur image inverse commute au produit tensoriel et l'image inverse du module défini par  $x^\alpha$  est défini par  $x' \frac{d}{dx'} - \alpha'$  où  $\alpha'$  est un multiple de  $\alpha$ . Cette réduction ramène à supposer que le résidu de  $\mathcal{M}$  est nul. Puisque  $K$  admet un automorphisme de Frobenius  $\sigma$  il existe une structure de Frobenius d'ordre  $j$  sur  $\mathcal{M}$  ([5], [3]). Soit  $A$  la matrice de l'action de Frobenius dans une base, c'est donc un élément de  $\mathcal{E}_{K,x}^\dagger$ . On peut supposer que la norme de  $A$  est égale à 1. En vertu du lemme 2.2 il existe une extension  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  ayant la propriété du théorème telle qu'il existe un élément  $S$  de  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  de norme 1 et que la norme de  $\varphi_{\sigma,u}^j(S) - AS$  est de norme strictement bornée par  $\omega$  où  $A$  désigne encore l'image de  $A$  dans l'extension. Mais la norme de  $\varphi_{\sigma,u}^j(S)$  est égale à 1 et la norme de  $1 - (\varphi_{\sigma,u}^j(S))^{-1} AS$  est majorée par  $\omega$ . Il y a encore une difficulté qui explique qu'on a considéré les morphismes  $\varphi_u$ . Notons  $\mathcal{M}'$  l'image inverse  $f^* \mathcal{M}$  alors  $A$  est la matrice de l'isomorphisme entre  $f^* \circ \varphi_{\sigma,j}^* \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  qui **n'est pas** l'isomorphisme entre  $\varphi_{\sigma,j}^* \mathcal{M}'$  et  $\mathcal{M}'$  si le morphisme de Frobenius ne commute avec  $f$ . Il faut utiliser la proposition 1.23 qui prolonge  $\varphi_u$  dans les lemmes précédents pour que le morphisme de Frobenius commute avec  $f$ .

Dans ce cas là si on effectue le changement de bases à l'aide de la matrice  $S$  on trouve que la matrice de Frobenius dans la nouvelle base est  $(\varphi_{\sigma,u}^j(S))^{-1}AS$ . En vertu du théorème 2.4 le module  $\mathcal{M}'$  est trivialisable.  $\square$

**2.2. Extensions résiduelles permises pour un corps  $E$ .** — Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet de corps résiduel  $k$  et  $k((x)) \rightarrow N$  une extension finie séparable dont l'extension résiduelle  $k \rightarrow k'$  est séparable, alors cette extension se relève en une extension composée d'une extension des scalaires  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x}^\dagger$  non ramifiée et d'une extension  $\mathcal{E}_{E',x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  dont l'extension résiduelle est séparable et totalement ramifiée. Par contre une extension galoisienne  $k((x)) \rightarrow N$  cyclique d'ordre  $p$  d'indice de ramification égal 1 dont l'extension résiduelle  $k \rightarrow k'$  est radicielle **n'est pas**  $k$ -isomorphe à  $k'((x))$  bien qu'elle admette un corps de représentants qui définit un isomorphisme de corps entre  $N$  et  $k'((x))$ .

EXEMPLE 2.10. — Prenons  $p = 2, k := \mathbb{F}_2(y)$  et  $P = T^2 - xT - y$ . Le polynôme précédent est irréductible sur  $k((x))$  et l'extension résiduelle de l'extension galoisienne  $k((x)) \rightarrow k((x))[T]/T^2 - xT - y$  est radicielle de degré 2.

Une telle extension se relève en une extension qui n'est pas une extension des scalaires et qui ne se prête pas au calcul différentiel, il nous faut absolument les éviter. Ceci conduit à la définition :

DÉFINITION 2.11. — Soit  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet de corps résiduel  $k$ , nous dirons qu'une extension finie du corps  $k((x))$  est **permise** si elle est des deux formes suivantes :

- 1)  $k((x)) \rightarrow k'((x))$  où l'extension  $k \rightarrow k'$ , éventuellement inséparable, est l'extension résiduelle d'une extension finie  $E \rightarrow E'$ , éventuellement ramifiée,
- 2)  $k((x)) \rightarrow k((x'))$  une extension séparable totalement ramifiée.

Une extension permise se relève en une extension finie de  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger$  qui est soit une extension des scalaires soit une extension de la forme  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  dont l'extension résiduelle est séparable et totalement ramifiée. Nous dirons alors que le relèvement d'une extension permise est une extension permise et que qu'une composé d'un nombre fini d'extensions permises est une extension permise finie.

Par construction une composée d'extensions permises est la forme  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',y}^\dagger$  et se prolonge en une extension  $\mathcal{R}_{E,x} \rightarrow \mathcal{R}_{E',y}$  qui est la raison d'être des extensions permises. On rappelle les deux propositions suivantes bien connues dans la théorie des extensions d'Artin-Schreier :

PROPOSITION 2.12. — Soient  $N$  un corps de caractéristique  $p > 0, j \geq 1, q := p^j$  et  $a, b$  des éléments non nuls du corps  $N$ , alors après adjonction d'une  $(q-1)$ -ème racine primitive de l'unité et d'une  $(q-1)$ -ème racine de  $a$  un corps de

décomposition du polynôme  $T^q - aT - b$  est galoisien dont le groupe de Galois est un  $p$ -groupe.

PROPOSITION 2.13. — Soit  $k$  un corps de caractéristique  $p > 0$  et  $b$  un élément du corps  $k((x))$ , alors le polynôme  $T^p - T - b$  est irréductible sur  $k((x))$  si et seulement si il reste irréductible sur  $k'((x))$  pour toute extension  $k \rightarrow k'$ .

THÉORÈME 2.14. — Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet de corps résiduel  $k$  et un polynôme  $T^p - T - b$  irréductible sur  $k((x))$ , alors après éventuelle extension finie  $E \rightarrow E'$  on peut extraire une racine de ce polynôme à l'aide d'une extension galoisienne cyclique d'ordre  $p$  dont l'extension résiduelle est soit triviale soit galoisienne d'ordre  $p$ .

Démonstration. — Le polynôme  $T^p - T - b$  est irréductible sur  $k((x))$  cela implique en vertu du lemme de Hensel que la valuation  $x$ -adique de  $b$  est négative ou nulle. Si elle est nulle la réduction modulo  $x$  du  $T^p - T - b$  est séparable donc irréductible en vertu du lemme de Hensel et l'extension  $k((x)) \rightarrow k((x))[T]/T^p - T - b$  est non ramifiée et d'extension résiduelle galoisienne. Supposons que la valuation  $v_x(b)$  est strictement négative, soit  $b = \frac{a_m}{x^m} + \dots$ ,  $m > 0$  et que  $m$  est premier à  $p$ . Si l'indice de ramification  $e$  de l'extension galoisienne  $k((x)) \rightarrow k((x))[T]/T^p - T - b$  est égal à 1,  $x$  est une uniformisante de cette extension et si  $t$  est la classe de  $T$  dans cette extension la valuation  $x$ -adique de l'élément  $t^p - t$  est strictement négative et divisible par  $p$ , ceci est impossible puisque que  $m$  est premier à  $p$  et donc  $e = p$  et l'extension précédent est nécessairement totalement ramifiée. On peut supposer que  $m = pm'$ . Si  $a_m$  n'est pas de la forme  $a'^p$  soit  $A$  un relèvement de  $a_m$  dans  $E$  et considérons l'extension finie  $E \rightarrow E(A^{1/p})$  et  $k \rightarrow k'$  l'extension résiduelle, alors  $k'$  contient la réduction de  $A^{1/p}$  qui est une racine  $p$ -ième  $a' = a_m^{1/p}$  de  $a_m$ . En vertu de la proposition précédente le polynôme  $T^p - T - b$  reste irréductible sur  $k'((x))$ . On peut faire le changement de variables  $T = T' + \frac{a'}{x^{m'}}$  et le polynôme  $T^p - T - b$  devient  $T'^p - T' - b'$  où la valuation  $-v_x(b')$  est strictement inférieure à  $-v_x(b)$  et la  $k'((x))$ -extension  $k'((x))[T]/T^p - T - b$  est isomorphe à la  $k'((x))$ -extension  $k'((x))[T']/T'^p - T' - b'$ . Par récurrence sur  $-v_x(b)$  on peut supposer qu'il existe une extension finie  $E' \rightarrow E''$  telle que l'extension  $k''(x) \rightarrow k''(x)[T']/T'^p - T' - b'$  est une extension galoisienne non ramifiée d'extension résiduelle galoisienne d'ordre  $p$  ou galoisienne d'ordre  $p$  et totalement ramifiée.  $\square$

THÉORÈME 2.15. — Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet de corps résiduel  $k$  et  $P$  un polynôme à coefficients dans le corps  $k((x))$  dont un corps de décomposition est galoisien dont le groupe de Galois est un  $p$ -groupe, alors on peut extraire une racine de ce polynôme par une suite finie d'extensions permises.

*Démonstration.* — Soit  $p^h$  l'ordre du groupe de Galois  $G$  d'un corps  $N$  de décomposition du polynôme  $P$ . Alors le groupe  $G$  admet une suite de composition  $G := G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_h := 1$  où les groupes  $G_i$  sont normaux dans  $G$  et les quotients  $G_i/G_{i+1}$  sont cycliques d'ordre  $p$ . En vertu de la théorie de Galois l'extension  $k((x)) \rightarrow N$  se factorise par des extensions cycliques d'ordre  $p$   $k((x)) =: N_0 \rightarrow N_1 \cdots \rightarrow N_h := N$ . En vertu de la théorie d'Artin-Schreier  $N_{i+1}$  est isomorphe au corps de décomposition d'un polynôme  $T^p - T - b_i$  où  $b_i$  est un élément de  $N_i$ ,  $i = 0, \dots, h - 1$ . Considérons  $b_0 \in k((x))$  en vertu du théorème précédent il existe une extension finie  $E \rightarrow E_0$  d'extension résiduelle  $k \rightarrow k_0$  telle que l'on ait un diagramme commutatif d'extensions finies

$$\begin{array}{ccc} k((x)) & \longrightarrow & N_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ k_0((x)) & \longrightarrow & k_0((x))[T]/T^p - T - b_0 \end{array}$$

où l'extension résiduelle de la ligne du bas est soit triviale soit galoisienne d'ordre  $p$  et le corps

$$k_0((x))[T]/T^p - T - b_0$$

est  $k_0((x))$ -isomorphe au corps des séries formelles  $k'_1((x_1))$  à coefficients dans le corps résiduel où  $x_1$  est une uniformisante. Notons  $b'_1$  l'image de  $b_1$  dans  $k'_1(x_1)$ . Si le polynôme  $T^p - T - b'_1$  admet un zéro dans le corps  $k'_1(x_1)$  alors  $N_2$  est un sous-corps de  $k'_1((x_1))$ , on pose  $k_1 := k'_1$ ,  $k'_2 := k'_1$  et  $x_2 := x_1$  de sorte que l'on a un diagramme commutatif d'extensions finies :

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \longrightarrow & N_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ k_0((x_1)) & \longrightarrow & k'_2((x_2)) \end{array}$$

Supposons que le polynôme  $T^p - T - b'_1$  est irréductible sur  $k'_1((x_1))$  alors en vertu du théorème précédent il existe une extension des scalaires  $k'_1 \rightarrow k_1$  composée d'extensions permises telle que l'extension galoisienne  $k_1((x_1)) \rightarrow k_1((x_1))[T]/T^p - T - b'_1$  est d'extension résiduelle galoisienne d'ordre  $p$  ou triviale et donc isomorphe au corps des séries formelles  $k'_2((x_2))$  et l'on a un diagramme commutatif d'extensions finies

$$\begin{array}{ccc} N_1 & \longrightarrow & N_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ k_0((x_1)) & \longrightarrow & k'_2((x_2)). \end{array}$$

De proche en proche on construit une suite d'extensions composées d'extensions permises

$$k_0((x_0)) := k((x)) \rightarrow k_1((x_1)) \rightarrow \cdots \rightarrow k_h((x_h))$$

et telle que le corps de décomposition  $N$  du polynôme  $P$  est un sous-corps de  $k_h((x_h))$ .  $\square$

REMARQUE 2.16. — La démonstration précédente montre en fait que toute extension finie séparable du corps  $k((x))$  admet une extension permise finie et un nombre fini d'extensions permises finies admettent une extension permise finie commune.

**2.3. Cas d'un corps  $E$ .** — Pour montrer le théorème de monodromie en rang 1 dans le cas où le corps des scalaires n'admet pas d'automorphisme de Frobenius on ne peut pas appliquer la méthode du théorème 2.9. Aussi nous allons utiliser la pente  $p$ -adique d'un module soluble. On rappelle d'abord le théorème de la plus grande pente d'un module soluble ([10], th. 4.2.1).

THÉORÈME 2.17. — *Soient un corps  $p$ -adique complet  $L$  et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$ , alors sa fonction rayon de convergence  $\text{Ray}(\mathcal{M}, \rho)$  est égale à  $\rho^{1+\beta}$  pour  $\rho \in ]1 - \epsilon, 1[$  et pour un nombre rationnel non négatif  $\beta \geq 0$  qui est par définition la plus grande pente de  $\mathcal{M}$ .*

Il résulte du théorème d'intégralité ([10], ([11]) que la pente d'un module de rang 1 soluble est un entier de  $\mathbb{N}$ , du moins si on suppose que  $L$  est maximallement complet. Soit  $\beta = \delta p^n$ ,  $(\delta, p) = 1$  un entier, alors il existe un polynôme  $\omega_{\beta,b}(1/x) := \frac{\pi}{\delta p^n x^{\delta p^n}} + \frac{b_1}{\delta p^{n-1} x^{\delta p^{n-1}}} \cdots + \frac{b_n}{\delta x^\delta}$  où  $b = (b_1, \dots, b_n)$  sont des éléments contenus dans une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  tels que le module exponentiel  $\exp(\omega_{\beta,b}(1/x))$  est soluble de pente  $\beta$  ([24], [17]). On dispose alors du théorème de structure des modules de rang 1 ([18], th. 2.0.1) :

THÉORÈME 2.18. — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximallement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{E}_{L,x}^\dagger)$  de rang 1 de pente  $\beta > 0$ , alors il existe un entier  $N \geq 1$ , des entiers  $0 < \beta_1 < \cdots < \beta_N := \beta$  et des éléments  $(a_1, \dots, a_N)$  de normes 1 contenus dans une extension finie de  $L$  tels que  $\mathcal{M}$  est isomorphe sur une extension finie  $L \rightarrow L'$  au module défini par le produit  $x^\alpha \exp(\omega_{\beta_1, b^1}(a_1/x)) \cdots \exp(\omega_{\beta, b}(a_N/x))$ , où  $\alpha$  est le résidu déterminantiel de  $\mathcal{M}$ .*

On a alors le théorème :

THÉORÈME 2.19. — *Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet et le  $\mathcal{M}$  le module défini par  $\exp(\omega_{\beta,b}(a/x))$  où  $\exp(\omega_{\beta,b}(1/x))$  le module précédent défini par des  $(b_1, \dots, b_n)$  contenus dans une extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  et a un élément de  $E$  de norme 1, alors il existe une extension  $f : \mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  permise finie telle que l'image inverse  $f^* \mathcal{M}$  est de pente nulle.*

*Démonstration.* — Soit  $K$  l'extension finie de  $\mathbb{Q}_p$  qui contient  $\pi, b_1, \dots, b_n$  qu'on peut supposer galoisienne donc admet un automorphisme de Frobenius, alors en vertu du théorème 2.9 il existe une extension  $f : \mathcal{E}_{K,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger$  composée d'un nombre finie d'extensions définies par un polynôme  $T^q - AT - B$  telle que  $f^* \exp(\omega_{\beta,b}(1/x))$  est de pente nulle. Soient  $\mathcal{E}_{K',x'}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  une extension et  $T^q - AT - B$  un polynôme à coefficient dans  $\mathcal{E}_{K',x'}$ , considérons le diagramme commutatif où le morphisme horizontal du haut opère sur les coefficients d'un polynôme par le morphisme du bas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger[T]/T^q - AT - B & \longrightarrow & \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger[T]/T^q - A'T - B' \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger \end{array},$$

où  $A'$  et  $B'$  sont les image de  $A$  et  $B$ . En vertu du théorème 2.15 il existe un morphisme  $\mathcal{E}_{E',x'}^\dagger[T]/T^q - A'T - B' \rightarrow \mathcal{E}_{E'',x''}^\dagger$  tel que l'extension composée  $\mathcal{E}_{E',x'}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E'',x''}^\dagger$  est permise finie. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger[T]/T^q - AT - B & \longrightarrow & \mathcal{E}_{E'',x''}^\dagger \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{E}_{K',x'}^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger \end{array}.$$

Le module  $\exp(\omega_{\beta,b}(a/x))$  est l'image inverse du module  $\exp(\omega_{\beta,b}(1/x))$  par l'application  $x \mapsto x/a$  si  $E'$  contient  $a$  et les  $b_i$ . On construit de proche en proche une extension  $f : \mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  permise finie telle que l'image inverse  $f^* \mathcal{M}$  est une image inverse d'un module de pente nulle est lui-même de pente nulle.  $\square$

**THÉOREME 2.20.** — *Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet et soit  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{E}_{E,x}^\dagger)$  de rang 1, alors il existe une extension  $f : \mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  permise finie telle que le module image inverse  $f^* \mathcal{M}$  est de **pente nulle**.*

*Démonstration.* — En effet en vertu du théorème de structure des modules de rang 1  $\mathcal{M}$  est isomorphe après extension finie  $E \rightarrow E'$  au produit tensoriel  $x^\alpha \otimes_{\mathcal{E}_{E',x}^\dagger} \exp(\omega_{\beta_1,b_1}(a_1/x)) \cdots \otimes_{\mathcal{E}_{E',x}^\dagger} \exp(\omega_{\beta,b}(a_N/x))$  et le théorème précédent fournit pour chaque  $i, 1 \leq i \leq N$  une extension permise finie  $f_i : \mathcal{E}_{E',x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E_i,x_i}^\dagger$  telle que  $f^* \mathcal{M}$  est de pente nulle. Mais par construction il existe une extension permise finie  $f : \mathcal{E}_{E',x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E'',x''}^\dagger$  qui se factorise par  $f_i$  pour tout  $i$ . Par ailleurs le foncteur image inverse commute au produit tensoriel et donc  $f^* \mathcal{M}$  est de pente nulle comme produit tensoriel de modules de pente nulle.  $\square$

**REMARQUE 2.21.** — Le lecteur notera que pour le théorème 2.20 de monodromie en rang 1 l'action de Frobenius sur le corps de scalaires n'intervient par

chance que sur les extensions finies galoisiennes de  $\mathbb{Q}_p$ . Nous avons été perplexe pendant longtemps à propos du rôle de l'action de Frobenius sur le corps des scalaires et au moment où cette action intervient vraiment dans la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques. Cette perplexité nous a conduit à l'étudier cette action de plus près dans le §1 qui montre que notre interrogation était fondée.

### 3. Résidus déterminantiels

Pour passer au théorème de la monodromie en rangs supérieurs dans la situation d'un corps  $E$  à valuation discrète complet de corps résiduel éventuellement non parfait nous allons utiliser la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques, en particulier la théorie des exposants et des pentes  $p$ -adiques ([8], [9], [10], [11]) où précisément le corps résiduel n'intervient pas et par suite une éventuelle action de Frobenius sur le corps des scalaires ne joue aucun rôle, qui explique pourquoi nous n'avons pas regardé à tort auparavant de plus près cette action. Nous nous excusons auprès du lecteur.

#### 3.1. Rappels sur la structure d'un point singulier d'une équation différentielle.

— Nous rappelons pour la commodité du lecteur non averti les points de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques utilisés dans cet article. Soit  $L$  un corps  $p$ -adique complet. On dispose de la définition ([9], def. 6.2.5) :

DÉFINITION 3.1. — Soit  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$ , on dit que  $\mathcal{M}$  est purement de pente  $\gamma$  pour un nombre réel non négatif  $\gamma$  si les solutions locales au voisinage d'un point générique  $t_\rho$  ont **même rayon** de convergence égal à  $\rho^{1+\gamma}$  pour tout  $\rho \in ]1 - \epsilon, 1[$  pour un  $\epsilon > 0$  non précisé.

Si  $L$  est maximale complet les catégories  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{L,x})$  et  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  sont abéliennes ([10], th. 3.2.5). On rappelle le théorème ([10], [11]) :

THÉORÈME 3.2. — *Supposons que le corps  $p$ -adique  $L$  est maximale complet et soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{R}_{L,x}$ -module soluble, alors il admet une filtration décroissante fonctorielle de façon exacte et stricte  $\mathcal{M}_{>\gamma}$  dans la catégorie abélienne  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  indexée par les nombres réels  $\gamma \geq 0$  telle que les modules gradués  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  sont purement de pente  $\gamma$  et l'on a la décomposition canonique et fonctorielle en somme directe :*

$$\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\gamma \geq 0} Gr^\gamma(\mathcal{M}).$$

De plus si  $m_\gamma$  désigne le rang de  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  le produit  $\gamma m_\gamma$  est un **entier** de  $\mathbb{N}$ .

La décomposition selon les pentes est invariante par extension des scalaires, en particulier le polygone de Newton de  $\mathcal{M}$  défini par les multiplicités  $m_\gamma$  et les pentes  $\gamma$  est invariant par extension des scalaires.



Pour tout entier  $m \geq 1$  on définit l'ensemble  $\mathfrak{E}_m$  des exposants de rang  $m$  comme le quotient de  $(\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z})^m$  par la relation d'équivalence  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$  ([9], def. 4.4.8). La relation  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$  se relève en une relation d'équivalence entre les éléments de  $(\mathbb{Z}_p)^m$  noté encore  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$ .

Un nombre de Liouville  $p$ -adique peut être défini comme un élément  $\alpha$  de  $\mathbb{Z}_p$  tel que la  $\mathbb{Q}_p$ -dimension du conoyau de l'action de l'opérateur  $x \frac{d}{dx} - \alpha$  sur le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p, x}$  est infinie. Un nombre  $\alpha$  de  $\mathbb{Z}_p$  a la propriété (NL) si le conoyau de l'action de l'opérateur  $x \frac{d}{dx} - \alpha$  sur le  $\mathbb{Q}_p$ -espace vectoriel  $\mathcal{R}_{\mathbb{Q}_p, x}$  est de dimension finie, auquel cas cette dimension est égale à 1 si  $\alpha$  est un élément de  $\mathbb{Z}$  et 0 sinon.

L'ensemble  $\mathfrak{E}_m$  contient comme sous-ensemble l'ensemble  $\mathfrak{E}_m^{\text{DNL}}$  des exposants dont les différences ont la propriété (NL). Si un élément  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  de  $(\mathbb{Z}_p)^m$  a des différences  $\alpha_i - \alpha_j$  qui ont la propriété (NL), pour tout élément  $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_m)$  de  $(\mathbb{Z}_p)^m$  tel que  $\alpha \overset{\mathfrak{E}}{\sim} \alpha'$  il existe une permutation  $s$  de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$  tel que  $\alpha_i - \alpha'_{s(i)} \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, m$  ([9], th. 4.4.7) de sorte que la classe de  $\alpha$  pour la relation  $\overset{\mathfrak{E}}{\sim}$  peut être représentée par un ensemble  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  de  $m$ -éléments de  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$  non ordonnés et comptés avec leur multiplicité.

Si  $\mathcal{M}$  est un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L, x})$  de rang  $m$  et de pente nulle on définit son exposant  $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$  comme un élément de  $\mathfrak{E}_m$  ([9], §5) dans le cas d'un sous-corps complet de  $\mathbb{C}_p$  étendu dans [12] au cas d'un corps  $p$ -adique complet. L'exposant est invariant par extensions des scalaires.

**DÉFINITION 3.3.** — Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximallement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L, x})$ , on définit l'exposant de  $\mathcal{M}$  et on note  $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$  comme l'exposant de sa partie de pente nulle  $Gr^0(\mathcal{M})$ .

Si  $\mathcal{M}$  est soluble il admet trois invariants importants, son rang  $m$ , son polygone de Newton  $New(\mathcal{M}, p)$  et son exposant  $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$ .

**DÉFINITION 3.4.** — On dit qu'un module  $\mathcal{M}$  soluble a la propriété (DNL) si son exposant a des différences (NL).

On rappelle le théorème de la monodromie dans le cas de la pente nulle ([9]) :

**THÉOREME 3.5.** — *Soit  $L$  un corps  $p$ -adique complet, alors sous la condition (DNL) un module de  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L, x})$  de pente nulle est irréductible si, et seulement si, il est de rang 1 dont la classe d'isomorphie est classifiée par l'exposant. De façon équivalente si l'exposant  $\mathfrak{Exp}(\mathcal{M})$  d'un module de pente nulle a la propriété (DNL) il admet une base dans laquelle la matrice de la connexion est à coefficients dans le corps des scalaires et dont les classes des valeurs propres sont égales aux classes des exposants.*

REMARQUE 3.6. — Le lecteur prendra garde qu'un exemple du à G. Christol montre qu'il existe des modules irréductibles de pente nulle et de rang  $\geq 2$  (cf. [19], 3.0.7), ce qui est essentiel.

Comme nous l'avons déjà signalé une éventuelle action de Frobenius sur le corps des scalaires ne joue aucun rôle dans les théorèmes précédents, par contre le foncteur  $\varphi^*$  dit de Frobenius faible joue un rôle essentiel.

Tous les résultats précédents ont été motivés par le théorème de l'indice qui est au fond du problème de la finitude dans la théorie  $p$ -adique :

THÉORÈME 3.7. — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximallement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  tel que son exposant à la propriété (DNL) et que ses exposants ont la propriété (NL) alors son indice  $\chi(\mathcal{M}, \mathcal{R}_{L,x}) := \dim_L \text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[x \frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{R}_{L,x}) - \dim_L \text{Ext}_{\mathcal{R}_{L,x}[x \frac{d}{dx}]}^1(\mathcal{M}, \mathcal{R}_{L,x})$  existe et est nul.*

Notre but dans cet article est de définir des conditions  $p$ -adiques sur un module de pente strictement positive pour qu'il devienne de pente nulle après extension finie composée d'extensions permises avec contrôle de l'exposant. C'est la condition (NLE) qui joue le rôle central dans ce cas là. Si un module  $\mathcal{M}$  est soluble, son module des endomorphismes  $\mathcal{R}_{L,x}$ -linéaires  $\text{End}_{\mathcal{R}_{L,x}}(\mathcal{M})$  est aussi soluble et sa partie de pente nulle est bien définie en vertu du théorème de décomposition selon les pentes si le corps de base est maximalelement complet.

DÉFINITION 3.8. — On dit que  $\mathcal{M}$  a la propriété (NLE) si l'exposant de la partie de pente nulle de  $\text{End}_{\mathcal{R}_{L,x}}(\text{Gr}^\gamma(\mathcal{M}))$  a la propriété (DNL) et les exposants eux-mêmes ont la propriété (NL) pour tout  $\gamma > 0$ .

La condition (NLE) permet de disposer pour le module  $\text{End}_{\mathcal{R}_{L,x}}(\mathcal{M})$  du théorème de l'indice qui est au fond du problème en particulier pour construire des réseaux méromorphes [11]. Par ailleurs la propriété (NLE) est stable par sous-quotient dans la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$ .

**3.2. Résidus déterminantiels.** — Pour contrôler les exposants qui éventuellement apparaissent par extension permise il nous faut comprendre les rapports entre le résidus déterminantiel d'un module irréductible et les résidus déterminantiels de ses constituants absolument irréductibles, c'est-à-dire qui restent irréductibles après extension finie du corps des scalaires, ce qui n'était pas fait dans [11]. Il est facile de voir qu'un module absolument irréductible n'a pas d'endomorphisme horizontal non scalaire, mais la réciproque n'a pas lieu sans condition sur les exposants, il se pourrait qu'un module n'admet pas d'endomorphisme non scalaire tout en étant réductible.

THÉORÈME 3.9. — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalelement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{L,x})$  de rang  $m$  irréductible ayant un endomorphisme horizontal non scalaire, alors il existe une extension finie galoisienne*

$L \rightarrow L'$  telle que  $\mathcal{M}_{L'} := L' \otimes_L \mathcal{M}$  est somme directe de modules de même rang divisant  $m$ .

*Démonstration.* — Par hypothèse  $\mathcal{M}$  admet un endomorphisme horizontal **non scalaire**  $u$  qui admet un polynôme minimal  $P$  dans  $L[s]$  puisse que la  $L$ -algèbre  $\text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  est de dimension finie bornée par  $m$ . Comme  $L$  est de caractéristique nulle un corps de décomposition de  $P$  est une extension galoisienne finie  $L \rightarrow L'$  de groupe de Galois  $G_{L'/L}$ . Considérons l'extension des scalaires  $\mathcal{R}_{L,x} \rightarrow \mathcal{R}_{L',x}$  qui est un revêtement galoisien mais aussi une extension fidèlement plate. Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_j$  les racines de  $P$  et considérons pour chaque  $j$  le noyau  $\mathcal{M}_j$  de  $\tilde{u} - \lambda_j$  dans  $\mathcal{M}_{L'} := L' \otimes_L \mathcal{M}$  qui est encore un module de la catégorie abélienne  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{L',x})$  ([10], 3.2.5) où l'on note  $\tilde{u}$  l'action induite par celle de  $u$  sur  $\mathcal{M}'_L$ . Si l'action de  $\tilde{u} - \lambda_j$  sur  $\mathcal{M}_{L'}$  est injective elle devient bijective en vertu de l'additivité du rang et  $u$  serait scalaire. La somme  $\bigoplus_j \mathcal{M}_j$  est donc non nulle, directe et est munie d'une action de  $G_{L'/L}$  qui permute les modules  $\mathcal{M}_j$ . On peut appliquer non pas la descente galoisienne parce que l'anneau  $\mathcal{R}_{L,x}$  **n'est pas un corps** mais la descente de Grothendieck cf. ([19], th. 5.0.27) par revêtement galoisien qui est une extension fidèlement plate pour en déduire que l'injection

$$\bigoplus_j \mathcal{M}_j \rightarrow \mathcal{M}_{L'}$$

est un isomorphisme de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{L',x})$  puisque  $\mathcal{M}$  est irréductible et les modules  $\mathcal{M}_j$  sont de même rang divisant  $m$ . □

**COROLLAIRE 3.10.** — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{L,x})$  irréductible, alors la  $L$ -algèbre de dimension finie  $\text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  est un **corps commutatif**.*

*Démonstration.* — Soit  $u, v$  deux endomorphismes horizontaux, alors leur crochet  $[u, v]$  est encore un endomorphisme horizontal. Considérons le noyau du commutateur  $[u, v] : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  et un corps de décomposition des polynômes minimaux de  $u, v$ . Sur ce corps le crochet  $[\tilde{u}, \tilde{v}]$  est identiquement nul en vertu du théorème précédent et donc le crochet  $[u, v]$  est aussi nul par fidélité. La  $L$ -algèbre  $\text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  est commutative. Par ailleurs tout endomorphisme horizontal est inversible puisque  $\mathcal{M}$  est irréductible et donc  $\text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  est un corps commutatif extension finie de  $L$ . □

**REMARQUE 3.11.** — Dans le cas où  $L$  est à valuation discrète complet l'irréductibilité des équations différentielles  $p$ -adiques semble fournir des extensions finies  $L \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  intéressantes du point de vue de la théorie de la ramification des corps.

**THÉORÈME 3.12.** — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  ayant la propriété (NLE), alors  $\mathcal{M}$  est absolument irréductible si et seulement si  $\dim_L \text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M}) = 1$ .*

*Démonstration.* — Soit une extension finie  $L \rightarrow L'$  telle que les constituants irréductibles de  $\mathcal{M}' := \mathcal{M}_{L'}$  soient absolument irréductibles, alors  $\mathcal{M}'$  est nécessairement indécomposable parce que  $\dim_{L'} \text{hom}_{\mathcal{R}_{L',x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}', \mathcal{M}') = 1$ . Mais  $\mathcal{M}'$  admet la condition (NLE) et le théorème de l'indice implique que tous les constituants absolument irréductibles sont isomorphes ([11], th. 6.0.16). Dans ce cas  $\mathcal{M}'$  admet un constituant qui est un sous-module et un module quotient, cela implique que  $\mathcal{M}'$  admet un endomorphisme horizontal qui se factorise à travers ce constituant et dont n'est pas scalaire, contrairement à l'hypothèse. Le module  $\mathcal{M}$  est absolument irréductible.  $\square$

**COROLLAIRE 3.13.** — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  de rang  $m$  ayant la propriété (NLE) et irréductible, alors le corps de décomposition d'un élément primitif du corps  $\text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  décompose  $\mathcal{M}$  en somme directe de modules absolument irréductibles de rang  $m/d$ , en particulier  $d$  divise  $m$  où  $d$  est la dimension sur  $L$  du corps précédent. De plus le corps de décomposition du polynôme minimal d'un élément primitif ne dépend pas de l'élément primitif choisi de sorte que la décomposition précédente est canonique.*

*Démonstration.* — En vertu des résultats précédents un corps  $L'$  de décomposition d'un élément primitif décompose  $\mathcal{M}$  en somme directe de  $d$  modules  $\mathcal{M}_j$  de rang  $m/d$ . Cela implique que  $\dim_{L'} \text{hom}_{\mathcal{R}_{L',x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}_j, \mathcal{M}_j) = 1$ . Par ailleurs la condition (NLE) est stable par extension des scalaires et stable par sous-quotients. Mais  $\text{End}_{\mathcal{R}_{L',x}}(\mathcal{M}_j)$  est un sous-quotient de  $\text{End}_{\mathcal{R}_{L',x}}(\mathcal{M}')$ , il admet la propriété (NLE) et est donc absolument irréductible en vertu du théorème précédent. Si  $L'_1$  et  $L'_2$  sont deux corps de décomposition de deux éléments primitifs  $u_1$  et  $u_2$  alors comme  $u_1$  appartient à  $L'_2$  la polynôme minimal de  $u_1$  se décompose dans  $L'_2$  et donc  $L'_1 \subset L'_2$  et par suite  $L'_1 = L'_2$  par symétrie.  $\square$

On rappelle que le résidu déterminantiel d'un module soluble est la classe dans  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$  de la trace du coefficient résidu dans une base, c'est aussi le résidu du module déterminant.

**COROLLAIRE 3.14.** — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalement complet,  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  de rang  $m$  ayant la propriété (NLE) irréductible et  $\mathcal{M}_j$  un constituant absolument irréductible, alors on a l'égalité dans  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$  entre les résidus déterminantiels si  $d = \dim_L \text{hom}_{\mathcal{R}_{L,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  :*

$$\frac{m}{d} \text{resdet}(\mathcal{M}_j) = \text{resdet}(\mathcal{M}).$$

*Démonstration.* — En effet les résidus déterminantiels des constituants absolument irréductibles sont des éléments de  $\mathbb{Z}_p$  donc invariants par l'action du groupe de Galois de l'extension du corollaire précédent. Ils sont tous égaux, d'où la relation.  $\square$

**COROLLAIRE 3.15.** — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  ayant la propriété (NLE) et irréductible, alors le résidu déterminantiel de  $\mathcal{M}$  appartient à  $\mathbb{Q}$ , resp.  $\overline{\mathbb{Q}}$ , si et seulement si le résidu déterminantiel d'un constituant absolument irréductible appartient à  $\mathbb{Q}$ , resp.  $\overline{\mathbb{Q}}$ .*

*Démonstration.* — C'est une conséquence de l'égalité précédente.  $\square$

Si  $L$  est un corps  $p$ -adique maximalement complet a la propriété  $(\sigma)$  notons  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x}, \text{geo}\mathbf{F})$  la catégorie des modules ayant une structure géométrique de Frobenius. C'est alors une sous-catégorie de  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  ([10], 6.3.11). Si  $\sigma$  est un automorphisme la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x}, \text{geo}\mathbf{F})$  est abélienne ([11], prop. 6.0.15, th. 6.0.16) parce que le foncteur image inverse induit par  $\sigma \circ \varphi$  est une équivalence de catégorie. Dans le cas général ce foncteur est seulement pleinement fidèle. Cependant :

**PROPOSITION 3.16.** — *Les exposants d'un module muni d'une structure géométrique de Frobenius sont de nombres de  $\mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* — Le morphisme  $\varphi$  commute à l'extension finie des scalaires et induit une équivalence de la catégorie  $\text{MLS}(\overline{L} \otimes_L \mathcal{R}_{L,x})$ . Le foncteur induit par  $\varphi$  respecte la décomposition par les pentes ([11], prop. 6.3.12). Le foncteur induit par  $\sigma$  est pleinement fidèle et respecte la décomposition par les pentes. Les foncteurs induits par  $\varphi_\sigma^j$  sont pleinement fidèles et respectent la décomposition par les pentes. Soit  $\mathcal{L}$  un module de pente nulle ayant une structure de Frobenius d'ordre  $i \geq 1$ , alors  $\varphi^{i*} \circ \sigma^{i*} \mathcal{L}$  est isomorphe à  $\mathcal{L}$ , en particulier l'exposant  $\mathfrak{E}xp(\varphi^{i*} \circ \sigma^{i*} \mathcal{L})$  est égal à  $\mathfrak{E}xp(\mathcal{L})$ . Mais  $\mathfrak{E}xp(\sigma^{i*} \mathcal{L})$  est égal à  $\mathfrak{E}xp(\mathcal{L})$  parce que  $\sigma^i$  est une extensions des scalaires. Comme  $\mathfrak{E}xp(\varphi^{i*} \circ \sigma^{i*} \mathcal{L})$  est égal à  $p^i \mathfrak{E}xp(\sigma^{i*} \mathcal{L})$  ([9], prop. 5.5.1) on trouve l'égalité  $p^i \mathfrak{E}xp(\mathcal{L}) = \mathfrak{E}xp(\mathcal{L})$ . La relation d'équivalence  $p^i \mathfrak{E}xp(\mathcal{L}) \stackrel{\mathfrak{E}}{\sim} \mathfrak{E}xp(\mathcal{L})$  implique que  $\mathfrak{E}xp(\mathcal{L})$  se relève en des nombres rationnels ([9], th. 5.5.3).  $\square$

Pour la rationalité des résidus déterminantiels nous avons besoin d'une condition sur  $\sigma$  plus restrictive :

**DÉFINITION 3.17.** — Nous dirons qu'un corps  $p$ -adique  $L$  maximalement complet a la propriété (w) si une clôture algébrique  $\overline{L}$  admet une extension complète qui admet un automorphisme de Frobenius qui induit un endomorphisme  $\sigma$  de Frobenius de  $\overline{L}$  tel que  $\sigma(L)$  est contenu dans une extension finie de  $L$ .

PROPOSITION 3.18. — *Supposons que le corps  $L$  admet la propriété (w) alors ses résidus déterminantiels d'un module  $\mathcal{M}$  muni d'une structure géométrique de Frobenius sont des éléments de  $\mathbb{Q}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\bar{L} \rightarrow C$  une extension complète qui admet un automorphisme  $\sigma$  de Frobenius qui induit un endomorphisme de Frobenius sur  $\bar{L}$ , le point est qu'un constituant irréductible de  $\bar{L} \otimes_L \mathcal{M}$  reste irréductible sur  $C$ . En effet les exposants de  $\mathcal{E}nd_{\bar{L} \otimes_L \mathcal{R}_{L,x}}(\bar{L} \otimes_L \mathcal{M})$  sont rationnels et si  $\mathcal{N}$  est un constituant irréductible les exposants de  $\mathcal{E}nd_{\bar{L} \otimes_L \mathcal{R}_{L,x}}(\mathcal{N})$  sont rationnels et de multiplicité 1 ([11], th. 3.0.6, prop. 3.0.9) et ceci est invariant par extension des scalaires. Mais sur  $C$  un constituant irréductible est muni d'une structure de Frobenius, en particulier son résidu déterminantiel est rationnel et le résidu déterminantiel de  $\mathcal{N}$  qui est égal à celui de son étendu est rationnel.  $\square$

REMARQUE 3.19. — Il n'est pas claire à ce stade que  $\mathcal{N}$  est muni d'une structure géométrique de Frobenius. Dans l'article [19] nous avons étudié dans le cas d'un corps à valuations discrète complet à corps résiduel parfait le problème inverse, à savoir que la rationalité des exposants de  $\mathcal{M}$ , de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{K,x}}(\mathcal{M})$  et des résidus déterminantiels des constituants absolument irréductibles, qui sont des conditions **purement  $p$ -adiques**, impliquent l'existence d'une structure géométrique de Frobenius non précisée. Dans le présent article (th. 4.10) nous allons préciser ce résultat sur deux points, d'une part assouplir la condition sur le corps des scalaires et remplacer la rationalité des résidus déterminantiels des constituants absolument irréductibles par la rationalité des résidus déterminantiels des constituants irréductibles eux-mêmes.

THÉORÈME 3.20. — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique complet ayant la propriété  $(\sigma)$  et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{E}_{L,x}^\dagger)$  de rang 1 dont le résidu déterminantiel est rationnel alors il admet une structure géométrique de Frobenius.*

*Démonstration.* — Si  $\alpha$  est un nombre de  $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$  alors le module défini par  $x^\alpha$  admet une structure géométrique de Frobenius. On peut supposer que dans une base la matrice de la connexion de  $\mathcal{M}$  est un polynôme en  $1/x$  à coefficients dans  $L$  de valuation  $1/x$ -adique  $\geq 2$ . Soient  $C$  le complété d'une clôture algébrique  $\bar{L}$  et  $\varphi_\sigma$  un endomorphisme de Fobenius du corps  $\bar{L} \otimes_L \mathcal{E}_{L,x}^\dagger$ , il se prolonge canoniquement à  $\mathcal{E}_{C,x}^\dagger$ . Par ailleurs si  $j \geq 1$  le foncteur  $\varphi_\sigma^{j*}$  est compatible au changement de bases  $f : \bar{L} \otimes_L \mathcal{E}_{L,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{C,x}^\dagger$  et le morphisme naturel

$$\begin{aligned} f^* \mathcal{H}om_{\bar{L} \otimes_L \mathcal{E}_{L,x}^\dagger}(\varphi_\sigma^{*j}(\bar{L} \otimes_L \mathcal{M}), \bar{L} \otimes_L \mathcal{M}) \\ \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{C,x}^\dagger}(\varphi_\sigma^{*j}(f^*(\bar{L} \otimes_L \mathcal{M})), f^*(\bar{L} \otimes_L \mathcal{M})) \end{aligned}$$

est un isomorphisme sur  $\mathcal{E}_{C,x}^\dagger$ . Comme le changement de bases  $f$  est une extension des scalaires la **pen**te de module de droite est égale à celle de

$\text{Hom}_{\bar{L} \otimes_L \mathcal{E}_{L,x}^\dagger}(\varphi_\sigma^{*j}(\bar{L} \otimes_L \mathcal{M}), \bar{L} \otimes_L \mathcal{M})$  et  $\bar{L} \otimes_L \mathcal{M}$  admet une structure de Frobenius  $\bar{L} \otimes_L \mathcal{E}_{L,x}^\dagger$  si et seulement si  $f^*(\bar{L} \otimes_L \mathcal{M})$  admet une structure de Frobenius. Une lecture très attentive de la démonstration de ([5], [3]) montre que l'existence d'un endomorphisme de Frobenius de  $C$  suffit pour avoir une structure de Frobenius sur  $f^*(\bar{L} \otimes_L \mathcal{M})$  sans la condition (w).  $\square$

#### 4. Le théorème de décomposition en rangs supérieurs

Dans ce paragraphe en utilisant les résultats précédents nous allons préciser les résultats des articles ([18], [19]) pour englober le cas d'un corps de fonctions sur un corps parfait comme corps résiduel. Dans la théorie  $p$ -adique les théorèmes de décomposition et de monodromie locale sont intimement liés. La décomposition d'un module irréductible de rang  $m$  se ramène par extension finie des scalaires dans le cas (NLE) à celle des ses constituants absolument irréductibles dont le rang divise  $m$  en vertu du paragraphe précédent. Nous rappelons la définition ([11], def. 3.0.7) :

DÉFINITION 4.1. — Si  $L$  est un corps  $p$ -adique maximalelement complet, on appelle module complètement irréductible un  $\mathcal{R}_{L,x}$ -module  $\mathcal{M}$  soluble tel que le rang de la partie de pente nulle  $Gr^0(\text{End}_{\mathcal{R}_{L,x}}(\mathcal{M}))$  est exactement 1.

Nous rappelons le théorème ([11], th. 3.0.6, prop. 3.0.9) :

THÉORÈME 4.2. — Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalelement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  qui est **absolument irréductible**, de pente  $\text{pt}(\mathcal{M}) > 0$  et qui a la propriété (NLE). Alors le rang de la partie de pente nulle  $Gr^0(\text{End}_{\mathcal{R}_{L,x}}(\mathcal{M}))$  est égal à un entier  $\delta$  **premier avec  $p$  divisant le rang  $m$  de  $\mathcal{M}$  et dont les exposants  $p$ -adiques sont les classes de  $0, 1/\delta, \dots, (\delta - 1)/\delta$  dans le quotient  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$  et qui forment un groupe d'ordre  $\delta$** . De plus après adjonction  $L \rightarrow L' := L(\xi, \lambda^{1/\delta})$  d'une racine primitive  $\delta$ -ème de l'unité  $\xi$  et d'une  $\delta$ -ème racine d'un scalaire  $\lambda$  de  $L$ , qui ne dépend pas du scalaire  $\lambda$  choisi, la ramification d'indice  $\delta$  décompose  $\mathcal{M}_{L'}(\sqrt[\delta]{x}) := L' \otimes_L \mathcal{M}(\sqrt[\delta]{x})$  en somme directe de modules **complètement irréductibles** de même rang  $m/\delta$  et de même résidu déterminantiel  $\alpha$  tel que  $\delta(\alpha - \text{resdet}(\mathcal{M}))$  est un entier. De plus  $\mathcal{M}_{L'}$  est induit par cette ramification par un des ses constituant complètement irréductible.

La conjecture de l'article ([11], Conj. 3.0.12) est que les modules complètement irréductibles sont de rang une puissance de  $p$ , ce qui est équivalent à ce que l'entier  $\delta$  dans le théorème précédent soit égal la partie de  $m$  première à  $p$ ,  $m = \delta p^h, (\delta, p) = 1$ . La conjecture précédente est motivée par le principe de transfert pour les singularités irrégulières (th. 4.12, Rem. 4.15) ci-dessous de cet article.

**4.1. Cas d'un rang premier à  $p$ .** — Dans le cas où  $m$  est premier avec  $p$  cette conjecture est montrée dans l'article ([18], th. 4.0.12) :

**THÉORÈME 4.3.** — *Soient  $L$  un corps  $p$ -adique maximalement complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{L,x})$  qui est **absolument irréductible** de rang  $m$  **premier à  $p$** , de pente  $\text{pt}(\mathcal{M}) > 0$  et qui a la propriété (NLE), alors après extension finie de  $L$  la ramification **d'indice exactement  $m$**  décompose  $\mathcal{M}$  en somme directe de module de rang 1 et  $\mathcal{M}$  est induit par un de ces modules par cette ramification d'indice  $m$ .*

La démonstration [18] consiste d'abord à décomposer un module de pente entière par torsion par des modules de rang 1 qui sont des modules exponentiels de Robba [24] puis par récurrence sur le rang à l'aide d'extensions des scalaires, qui laissent invariants les exposants, et de ramifications d'indice premier à  $p$  qui multiplie les exposants par l'indice de ramification qui préserve la propriété (NL) et donc la propriété (NLE). Le théorème 2.20 de la monodromie en rang 1 implique :

**THÉORÈME 4.4.** — *Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$  qui est **irréductible** de rang  $m$  **premier à  $p$** , de pente  $\text{pt}(\mathcal{M}) > 0$  et qui a la propriété (NLE), il existe une extension finie  $f : \mathcal{R}_{E,x} \rightarrow \mathcal{R}_{E',x'}$  composée d'extensions permises telle que l'image inverse  $f^*\mathcal{M}$  se décompose en somme directe de modules de rang 1 et de pente nulle.*

*Démonstration.* — Soit  $d$  le degré de l'extension  $E \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{R}_{E,x}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ , en vertu du corolaire 3.13 un corps de décomposition du polynôme minimal d'un élément primitif décompose  $\mathcal{M}$  en somme directe de modules absolument irréductibles de rang  $m/d$ . En vertu du théorème 4.3 après éventuelle extension des scalaires la ramification d'indice  $m/d$  décompose les constituants absolument irréductibles en somme directe de modules de rang 1. Un module soluble de rang 1 sur l'anneau  $\mathcal{R}_{E',x'}$  est défini sur  $\mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  et on applique le théorème 2.20.  $\square$

**4.2. Cas d'un rang divisible par  $p$ .** — Le cas d'un module  $\mathcal{M}$  complètement irréductible de rang  $m$  divisible par  $p$  est beaucoup plus délicat. Notre point de départ est de considérer le module  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})$  et sa décomposition canonique horizontale

$$\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})^{trn} \oplus \mathcal{R}_{E,x} I_m$$

en module de trace nulle et en module scalaire. Le rang  $m^2 - 1$  est premier avec  $p$  et donc admet un constituant irréductible de rang premier avec  $p$ . Si on savait que ce constituant a la propriété (NLE) en appliquant le théorème de décomposition dans le cas de rang premier on se ramène par extension des scalaires et ramification d'indice premier à  $p$  au cas où le module de trace nulle



admet un constituant irréductible de rang 1 et le théorème de monodromie dans le cas de rang 1 transforme  $\mathcal{M}$  en un module qui n'est pas complètement irréductible. Si l'image inverse n'est pas absolument irréductible une extension des scalaires le décompose, sinon une extension des scalaires suivie d'une ramification d'indice premier à  $p$  le décompose. Mais pour pouvoir appliquer la récurrence sur le rang on se heurte avec cette méthode de nouveau à la stabilité de la propriété (NLE). Ces deux difficultés ne se présentent pas dans le cas où  $\mathcal{M}$  admet une structure géométrique de Frobenius sur un corps des scalaires qui a la propriété  $(\sigma)$ . C'est la méthode suivie dans l'article [18].

**THÉOREME 4.5.** — *Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet ayant la propriété  $(\sigma)$ ,  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F})$  et  $\mathcal{N}$  un constituant complètement irréductible de rang divisible par  $p$ , alors il existe une extension  $f : \mathcal{R}_{E,x} \rightarrow \mathcal{R}_{E',x'}$  permise finie tel que  $f^*(\mathcal{N})$  est de pente nulle et dont les exposants sont des classes de nombres rationnels.*

*Démonstration.* — Le module  $\text{End}_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{N})^{\text{trn}}$  admet un constituant irréductible de rang premier à  $p$  et dont les exposants sont rationnels en vertu de la proposition 3.16. En vertu du théorème 4.3 il existe une extension composée d'un nombre finie d'extensions permises telle que l'image inverse de  $\text{End}_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{N})^{\text{trn}}$  admet un constituant de rang 1. En vertu du théorème 2.20 il existe une extension  $f$  composée d'un nombre finie d'extensions permises telle l'image inverse du module précédent admet un constituant de rang 1 et de pente nulle et après ces extensions  $\mathcal{N}$  est transformé en un module  $\mathcal{N}'$  qui n'est pas complètement irréductible. Si  $\mathcal{N}'$  n'est pas absolument irréductible une extension des scalaires le transforme en somme directe de modules absolument irréductibles de rang strictement plus petit que le rang de  $\mathcal{N}$ . Si  $\mathcal{N}'$  est absolument irréductible après extension finie des scalaires et ramification d'indice premier à  $p$  l'image inverse de  $\mathcal{N}'$  est somme directe de modules de rang inférieur au rang de  $\mathcal{N}$ . Le point est que la structure géométrique de Frobenius de  $\mathcal{M}$  est stable par images inverses, ce qui implique le rationalité des exposants des images inverses des sous-quotients du module des endomorphismes. D'où le théorème par récurrence sur le rang.  $\square$

**THÉOREME 4.6.** — *Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet ayant la propriété  $(\sigma)$  et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F})$ , alors il existe une extension  $f : \mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  permise finie telle que  $f^*(\mathcal{M})$  est de pente nulle et dont les exposants sont des classes de nombres rationnels.*

*Démonstration.* — Par une extension finie des scalaires on ramène au cas où tous les constituants irréductibles sont absolument irréductibles, puis par extension finie des scalaires et d'une ramification d'indice premier à  $p$  on se ramène au cas où tous les constituants sont complètement irréductibles.  $\square$

**4.3. Structure des modules complètement irréductibles.** — La démonstration précédente du théorème de la monodromie dans le cas de l'existence d'une structure géométrique de Frobenius ne montre pas la conjecture sur le rang des modules complètement irréductibles, ni ne donne des conditions  $p$ -adiques portants sur  $\mathcal{M}$  pour qu'il admette une structure géométrique de Frobenius. Il faut recourir à la démonstration de l'article [19] dans le cas d'un corps résiduel parfait.

**THÉORÈME 4.7.** — *Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet ayant la propriété (w) et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$  complètement irréductible, alors son rang est une puissance de  $p$  et il existe une extension  $f : \mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  permise finie telle que  $f^*(\mathcal{M})$  est somme directe de modules de rang 1 de pente nulle et d'exposant  $p$ -adique un multiple du résidu déterminantiel de  $\mathcal{M}$ . De plus si son résidu déterminantiel est rationnel il admet une structure géométrique de Frobenius.*

La démonstration de ce théorème dans le cas où le corps résiduel est parfait occupe les §§4, 5, 6, 7, 8, 9 de l'article [19]. Nous allons rappeler les points clefs de la démonstration et voir que seule la propriété (w) est utilisée. Un module soluble est toujours isomorphe au produit tensoriel d'un module soluble de résidu déterminantiel rationnel par un module soluble de rang 1 et on peut supposer dès le départ dans l'énoncé précédent que le résidu de  $\mathcal{M}$  est rationnel. Dans ce dernier cas on procède par récurrence sur le rang mais l'assertion sur le rang et l'assertion sur l'existence d'une structure géométrique de Frobenius ne sont pas indépendantes et se démontrent simultanément qui explique le rôle de l'action géométrique de Frobenius sur le corps des scalaires.

1. Soit  $\mathcal{M}$  un module complètement irréductible, par définition le module  $\text{End}_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})$  admet un unique exposant entier en particulier a la propriété (NLE). Si le rang  $m$  est premier avec  $p$  en vertu du théorème 4.3 le rang est égal à 1. En vertu du théorème 3.20 si son résidu est rationnel il admet une structure géométrique de Frobenius. En vertu du théorème 2.20 il existe une extension permise finie telle l'image inverse de  $\mathcal{M}$  soit de pente nulle et d'exposant rationnel, d'où le théorème 4.7 dans le cas de rang premier avec  $p$ .
2. On peut donc supposer que le rang  $m$  est **divisible** par  $p$ , on considère le module  $\text{End}_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})^{trn}$  des endomorphismes de trace nulle qui est donc de rang  $m^2 - 1$  premier à  $p$  et admet donc un constituant irréductible de rang premier à  $p$  et après extension finie de  $E$  il admet un constituant absolument irréductible de rang premier à  $p$ , soit  $\mathcal{N}$ . On ne peut pas appliquer le théorème 4.3 pour extraire un module de rang 1 parce que on ne sait pas s'il a la propriété (NLE). Mais le théorème ([19], th. 3.0.5) montre qu'un module absolument irréductible de rang  $m'$  premier à  $p$  se décompose après extension finie du corps de base et ramification

d'indice  $d$  divisant le rang en somme directe de modules qui sont le produit tensoriel d'un module soluble exponentiel soluble  $\exp(w(1/x))$  par un module  $\mathcal{L}$  de **pen**te nulle et de rang  $m'/d$ . Appliquons ceci à  $\mathcal{N}$  on trouve, après extension finie du corps des scalaires que  $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{R}_{E',x}} \exp(w(1/x))$  est un sous-module de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M}(\sqrt[d]{x}))$  et donc que  $\mathcal{L}$  est un sous-module de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M}(\sqrt[d]{x})) \otimes_{\mathcal{R}_{E',x}} \exp(-w(1/x))$  qui est canoniquement isomorphe comme module à connexion à

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{R}_{E,x}}\left(\mathcal{M}(\sqrt[d]{x}), \mathcal{M}(\sqrt[d]{x}) \otimes_{\mathcal{R}_{E',x}} \exp(-w(1/x))\right).$$

Le lecteur prendra garde que l'isomorphisme précédent s'obtient par dualité en utilisant que le produit tensoriel des modules libres de type fini commute à la dualité et n'est pas l'isomorphisme du produit tensoriel. Les modules  $\mathcal{M}(\sqrt[d]{x}), \mathcal{M}(\sqrt[d]{x}) \otimes_{\mathcal{R}_{E',x}} \exp(-w(1/x))$ , sont complètement irréductibles et en vertu du théorème de rigidité ([9], th. 7.0.28) le rang de la partie de pente nulle de

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{R}_{E,x}}\left(\mathcal{M}(\sqrt[d]{x}), \mathcal{M}(\sqrt[d]{x}) \otimes_{\mathcal{R}_{E',x}} \exp(-w(1/x))\right)$$

au borné par 1 et  $\mathcal{L}$  est de rang 1 et dont l'exposant est rationnel. En vertu du théorème 2.20 il existe une extension  $f$  finie composée d'extensions permises telle que  $f^*(\mathcal{M})$  n'est plus complètement irréductible, le rang de la partie de pente nulle du modules des endomorphismes et de rang  $\geq 2$ , mais le problème délicat est de contrôler les exposants qui apparaissent.

3. Parmi les extensions permises seules les extensions galoisiennes cyclique d'ordre  $p$  totalement ramifiée peuvent éventuellement transformer une pente non nulle en une pente nulle et par suite si  $\mathcal{M}$  est complètement irréductible après un nombre fini d'extensions permises il existe une extension galoisienne cyclique d'ordre  $p$  qui crée au moins un exposant rationnel, mais alors quels sont les autres exposants qui peuvent apparaître. L'étude du § 6.1 de l'article [19] montre que si un module soluble irréductible se décompose par revêtement galoisien son image inverse par ce revêtement admet une **seule pente** qui est donc donnée par la fonction rayon de convergence. L'étude du § 7 de l'article [19] contrôle la plus grande pente de image inverse d'un module soluble par une extension d'ordre  $p$  séparable totalement ramifiée en fonction du degré de séparabilité de l'extension et de la pente du module. L'étude du § 8 de l'article [19] montre alors que si un exposant est créé par une extension galoisienne d'ordre  $p$  dans le module des endomorphisme d'un module complètement irréductible il provient d'un résidu d'un constituant de rang 1 et donc est rationnel puisque tous les résidus des constituant de rang 1 du module des endomorphismes d'un module complètement irréductible sont rationnels.

4. En vertu de ce qui précède après un nombre fini d'extensions permise il existe une extension galoisienne d'ordre  $p$  telle que l'image inverse, disons  $f^*(\mathcal{M})$ , de  $\mathcal{M}$  n'est plus complètement irréductible mais dont tous les exposants de son module des endomorphisme sont **rationnels** mais peuvent avoir des dénominateurs qui empêchent les constituants absolument irréductibles de  $f^*(\mathcal{M})$  d'être complètement irréductibles. Si  $f^*(\mathcal{M})$  est absolument irréductible son résidu est multiple du résidu de  $\mathcal{M}$  est rationnel et après extension finie du corps des scalaires une ramification d'indice premier à  $p$  décompose l'image inverse de  $f^*(\mathcal{M})$  en somme directe de modules complètement irréductibles de résidus rationnels. Si  $f^*(\mathcal{M})$  n'est absolument irréductible une extension finie des scalaires le décompose en modules absolument irréductibles, mais comme l'extension des scalaires commute à une extension galoisienne d'ordre  $p$  totalement ramifiée la décomposition précédente est celle d'un module irréductible par une extension cyclique d'ordre  $p$  et est donc une somme directe de  $p$  modules irréductibles de même rang et d'exposants rationnels qui sont décomposés après extension finie des scalaires et ramification d'indice premier à  $p$ . Dans les deux situations on obtient des constituants complètement irréductibles de rang strictement inférieur à celui de  $\mathcal{M}$  et dont les résidus sont rationnels. L'hypothèse de récurrence sur le rang montre de ces constituants sont munis d'une structure géométrique de Frobenius.

5. En vertu du théorème ([11], th. 6.0.16) un module dont les constituants absolument irréductibles sont munis d'une structure géométrique de Frobenius est lui même muni d'une structure géométrique de Frobenius.

Si l'on note encore par  $f^*(\mathcal{M})$  son image inverse par l'extension qui le décompose en modules complètement on trouve en vertu de l'hypothèse de récurrence sur le rang que  $f^*(\mathcal{M})$  et  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E',x'}}(f^*(\mathcal{M}))$  sont munis d'une structure géométrique de Frobenius.

En vertu de la proposition 3.16 le résidu déterminantiel de tout sous-module de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E',x'}}(f^*(\mathcal{M}))$  est rationnel, c'est ce point qui demande le passage de la propriété ( $\sigma$ ) à la propriété (w). Si maintenant on revient au point de départ et si  $\mathcal{L}$  est un sous-module de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})^{trn}$  son image inverse  $f^*(\mathcal{L})$  admet comme résidu déterminantiel un nombre rationnel qui est un multiple du résidu déterminantiel de  $\mathcal{L}$ .

6. Donc l'hypothèse de récurrence sur le rang implique que les résidus déterminantiels des constituants absolument irréductibles de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})^{trn}$  sont rationnels mais peuvent avoir des dénominateurs qui sont premier avec  $p$ .

Nous dirons qu'un module  $\mathcal{N}$  de  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$  est absolument  $\ell$ -irréductible si  $\mathcal{N}(\sqrt[\ell]{x})$  est absolument irréductible pour tout entier  $\ell$  premier avec  $p$ . Si  $\mathcal{N}$  est  $\ell$ -absolument irréductible et de résidu déterminantiel rationnel la ramification d'indice le dénominateur du résidu le transforme

en module  $\ell$ -absolument irréductible et de résidu **entier**. Si  $\mathcal{N}$  n'est pas  $\ell$ -absolument irréductible il existe une ramification d'indice  $e$  premier avec  $p$  telle que  $\mathcal{N}(\sqrt[e]{x})$  n'est pas absolument irréductible. On peut supposer que  $e = e_1 e_2$ , que  $\mathcal{N}(\sqrt[e_2]{x})$  est absolument irréductible et que  $e_1$  est premier distinct de  $p$ . Alors après extension finie des scalaires qui contient une racine primitive de l'unité d'ordre  $e_1$  le module  $\mathcal{N}(\sqrt[e]{x})$  est une somme directe de modules de même rang divisant le rang de  $\mathcal{N}$  et de même résidu déterminantiel  $\alpha$  tel que  $e_1(\alpha - \text{resdet}(\mathcal{N}))$  est un entier de  $\mathbb{Z}$  et donc que  $\alpha$  est rationnel. Par récurrence sur le rang on trouve qu'un module  $\mathcal{N}$  absolument irréductible dont le résidu déterminantiel est rationnel alors il existe une extension finie  $f : \mathcal{R}_{E,x} \rightarrow \mathcal{R}_{E',x'}$  composée d'extensions de scalaires et de ramification d'indice premier à  $p$  telle que  $f^*(\mathcal{N})$  est somme directe de modules absolument  $\ell$ -irréductibles de résidu déterminantiel **entiers**. Appliquons ce qui précède aux constituants absolument irréductibles de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})^{trn}$  on trouve qu'il existe une extension composée d'extensions des scalaires et de ramification d'indices premiers à  $p$  telle que les constituants de l'image inverse de ce modules sont  $\ell$ -absolument irréductibles de résidus **entiers**.

7. Mais  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})^{trn}$  a un sous-module  $\mathcal{L}$  de rang 1 et de résidu entier auquel on peut appliquer le théorème de monodromie 2.20. Après une extension  $f : \mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  composée d'extensions des scalaires, d'une extension cyclique d'ordre premier à  $p$  et d'extensions cycliques d'ordre  $p$  d'extension résiduelle totalement ramifiée l'image inverse  $f^*(\mathcal{L})$  est de pente nulle et d'exposant entier. Si un constituant irréductible de  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})^{trn}$  est décomposé par une extension cyclique d'ordre  $p$  la décomposition est une somme directe de  $p$ -modules dont le résidu déterminantiel est **entier** parce qu'un élément de  $\mathbb{Z}_p$  ne peut pas avoir un dénominateur divisible par  $p$ . Si bien que l'extension  $f$  ne crée que des exposants **entiers** dans  $\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(f^*(\mathcal{M}))$ , si le module  $f^*(\mathcal{M})$  n'est pas absolument irréductible une extension fini des scalaires le décompose en une somme  $p$ -modules nécessairement complètement irréductibles dont les résidus déterminantiels sont rationnels. En vertu de l'hypothèse de récurrence ces constituants sont de rang une puissance de  $p$ , admettent une structure géométrique de Frobenius et il existe une extension permise finie qui transforme ces constituants en une somme directe de modules de rang 1 et d'exposant rationnel. En particulier  $f^*(\mathcal{M})$  est de rang une puissance de  $p$  et donc  $\mathcal{M}$  est de rang une puissance de  $p$  et il existe une extension permise finie telle que l'image inverse de  $\mathcal{M}$  est une somme directe de module de rang 1 et de pente nulle. Reste à montrer que  $\mathcal{M}$  admet une structure géométrique de Frobenius.
8. Par construction  $f$  se factorise par  $g \circ f'$  où  $f' : \mathcal{E}_{E,x}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',z}^\dagger$  est une extension permise finie et  $g : \mathcal{E}_{E',z}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{E',x'}^\dagger$  une  $p$ -extension cyclique telles

que  $f'^*(\mathcal{M})$  est complètement irréductible et l'image inverse  $f^*(\mathcal{M})$  est une somme directe de  $p$ -modules de rang une puissance de  $p$  et de résidu rationnel, soit

$$f^*(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{M}' \oplus s^*(\mathcal{M}') \oplus \dots \oplus s^{(p-1)*}(\mathcal{M}')$$

où  $s$  est le générateur du groupe de Galois de l'extension  $g$ . L'hypothèse de récurrence sur le rang montre que  $\mathcal{M}'$  admet une structure géométrique de Frobenius

$$\Phi : \sigma_\sigma^{*j}(\bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{M}') \simeq \bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{M}'$$

de  $\bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{R}_{E',x'}$ -modules à connexion pour un morphisme de Frobenius  $\varphi_\sigma$  de  $\bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{R}_{E',x'}$ . Soit un isomorphisme  $s^{i*}(\sigma_\sigma^{*j}(\bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{M}')) \simeq s^{i*}(\bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{M})$  pour  $i = 1, \dots, p - 1$ . Si l'on choisit une base de  $\mathcal{M}'$  la résolvente fournit un isomorphisme canonique  $s^{i*}(\varphi_\sigma^{*j}(\bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{M}')) \simeq \varphi_\sigma^{*j}(s^{i*}(\bar{E} \otimes_{E'} \mathcal{M}'))$  pour  $i = 1, \dots, p - 1$  et on trouve un isomorphisme  $\Phi : \varphi_\sigma^{*j}(\bar{E} \otimes_{E'} f^*(\mathcal{M})) \simeq \bar{E} \otimes_{E'} f^*(\mathcal{M})$  qui par construction compatible à l'action du groupe de Galois de l'extension  $g$  et donc se descent en une structure géométrique de Frobenius de  $f'^*(\mathcal{M})$  en vertu de la descente de Grothendieck par revêtement galoisien ([19], th. 5.0.27) sachant qu'une extension galoisienne du corps  $\mathcal{E}_{E,x}^\dagger$  induit un revêtement galoisien de  $\mathcal{R}_{E,x}$  ([19], prop. 5.0.25).

9. Il reste à voir que la structure géométrique de Frobenius de  $f'^*(\mathcal{M})$  se descent en une structure géométrique de Frobenius de  $\mathcal{M}$ . L'extension  $f'$  est composée par construction d'extensions des scalaires et d'extensions galoisiennes dont l'extension résiduelle est totalement ramifiées et qui ne décomposent pas  $\mathcal{M}$  puisque qu'il reste complètement irréductible de rang une puissance de  $p$ . Une extension finie des scalaires ne change pas la clôture algébrique et la structure géométrique de Frobenius reste stable par restriction des scalaires. Le critère de descente des morphismes des modules complètement irréductibles du §6.2 de l'article ([19], th. 6.2.1) montre qu'une structure géométrique de Frobenius d'un module complètement irréductible de rang une puissance de  $p$  et compatible avec une structure de Frobenius du module déterminant qui provient par image inverse par une extension galoisienne totalement ramifiée se descent au module lui-même. En vertu du théorème 3.20  $\mathcal{M}$  admet une structure géométrique de Frobenius, d'où le théorème 4.7. □

Le théorème 4.7 a de nombreuses conséquences sur un corps  $p$ -adique  $E$  ayant la propriété (w). Rappelons que les extensions finies de  $E_{K,y}$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $n \geq 0$  ont la propriété (w) dont les extensions résiduelles peuvent être très compliquées, ce qui ouvre un grand champ d'applications du théorème 4.7 dans des situations relatives où l'on rencontre des singularités en caractéristique  $p > 0$ .

REMARQUE 4.8. — La démonstration précédente montre que les extensions permises envisagées ne créent que des exposants rationnels pour le module des endomorphismes d'un module complètement irréductible. A partir de là on peut voire par récurrence sur le rang qu'un module purement de pente non nulle ayant a propriété (NLE) devient de pente nulle par extensions permises finie pour tout corps  $p$ -adique à valuation discrète complet sans autres conditions.

THÉORÈME 4.9. — Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet ayant la propriété (w) et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$  **absolument irréductible** de rang  $m = \delta p^h$ ,  $(\delta, p) = 1$  et ayant la propriété (NLE), alors :

- 1) Le rang de la partie de pente nulle  $Gr^0(\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M}))$  est exactement  $\delta$  et ses exposant sont les classes dans  $\mathbb{Z}_p/\mathbb{Z}$  de  $(0, \frac{1}{\delta}, \dots, \frac{\delta-1}{\delta})$  qui forme un groupe.
- 2) Après adjonction d'une racine  $\xi$  primitive de l'unité d'ordre  $\delta$  il existe une extension  $E(\xi) \rightarrow E(\xi, \lambda^{1/\delta})$  cyclique d'ordre  $\delta$  qui ne dépend du scalaire choisi  $\lambda$ , la ramification d'indice  $\delta$  décompose  $\mathcal{M}(\sqrt[\delta]{x})$  en une somme directe de modules complètement irréductibles de rang  $p^h$  de même résidu déterminantiel  $\alpha$  tel que  $\delta(\alpha - \text{resdet}(\mathcal{M}))$  est un entier.
- 3)  $\mathcal{M}$  est l'image directe par la ramification d'indice  $\delta$  de l'un des ses constituants et si son résidu déterminantiel est rationnel son étendu à  $\overline{E}$  est muni d'une structure de Frobenius non précisée.

Démonstration. — Grâce à la précision sur le rang et la structure de Frobenius des modules complètement irréductibles fournies par le théorème 4.7, le théorème se réduit au théorème ([11], th. 3.0.6) en tenant compte de la compatibilité du foncteur de Frobenius avec l'image directe, c'est-à-dire la restriction des scalaires pour une extension permise.  $\square$

Si  $E$  est un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet ayant la propriété (w) notons  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \mathbb{Q})$  la sous-catégorie de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$  des modules  $\mathcal{M}$  tels que :

- 1) la partie de pente nulle  $Gr^0(\mathcal{M})$  admet des exposants rationnels,
- 2) la partie de pente nulle  $Gr^0(\mathcal{E}nd_{\mathcal{R}_{E,x}}(Gr^\gamma(\mathcal{M})))$  admet des exposants rationnels pour tout  $\gamma > 0$  et
- 3) les résidus déterminantiels des constituants irréductibles de  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  sont rationnels pour tout  $\gamma > 0$ .

THÉORÈME 4.10. — Soit  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet ayant la propriété (w), alors l'inclusion  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F}) \subset \text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \mathbb{Q})$  est une **égalité** de catégorie abéliennes stables par extensions, produit tensoriel, par dualité et par images directes et inverses par extension finie des scalaires et extension dont l'extension résiduelle est séparable totalement ramifiée. De plus la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F})$  ne dépend pas de l'action de Frobenius sur  $\overline{E}$  ni du morphisme  $\varphi$  choisi.

*Démonstration.* — En vertu du théorème de la monodromie dans le cas de la pente nulle [9] le module  $Gr^0(\mathcal{M})$  est somme directe de module indécomposable qui sont extensions successives de modules de rang 1 d'exposant rationnel dont l'étendu à  $\overline{E}$  admet une structure de Frobenius non précisée. En vertu du théorème ([11], th. 6.0.16) l'étendu des indécomposables admet une structure de Frobenius non précisée.

Soit  $\gamma > 0$  un nombre rationnel, alors si  $\mathcal{N}_i$  est un constituant irréductible de  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  par hypothèse  $\text{resdet}(\mathcal{N})$  est rationnel et en vertu du corollaire 3.10 la  $E$ -extension  $\text{hom}_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_i)$  est un corps commutatif. Si  $P_i$  est le polynôme minimal d'un élément primitif du corps précédent, en vertu du théorème 3.12 un corps de décomposition des tous les polynômes  $P_i$  transforme  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  en modules dont tous les constituants irréductibles sont absolument irréductibles de résidu déterminantiel rationnel. En vertu du point 3) du corollaire précédent l'étendu à  $\overline{E}$  de chaque constituant est muni d'une structure de Frobenius non précisée. En vertu du théorème ([11], th. 6.0.16) l'étendu à  $\overline{E}$  de  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  est muni d'une structure de Frobenius non précisée. D'où l'égalité  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F}) = \text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \mathbb{Q})$ .

Les propriétés des deux catégories se complètent et se rajoutent. La catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \mathbb{Q})$  est stable par sous-quotient et par extensions, en particulier elle est abélienne et donc la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F})$  est stable par sous-quotient et par extensions, en particulier elle est abélienne.

La catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F})$  est stable par produit tensoriel, par dualité et par images directes et inverses par extension finie des scalaires et extension dont l'extension résiduelle est séparable totalement ramifiée et donc la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \mathbb{Q})$  est stable par produit tensoriel et dualité et par images directes et inverses par extension finie des scalaires et extension dont l'extension résiduelle est séparable totalement ramifiée. Comme la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \mathbb{Q})$  ne dépend que de la connexion la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x}, \text{geo}\mathbf{F})$  de dépend pas de l'action de Frobenius sur  $\overline{E}$  ni du morphisme  $\varphi$  choisi.  $\square$

**THÉORÈME 4.11.** — *Soient  $E$  un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet ayant la propriété (w) et  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$  purement de pente  $\gamma > 0$  et de résidus rationnels, alors les exposants de  $\text{End}_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})$  sont rationnels si et seulement si les constituants absolument irréductibles ont la propriété (NLE).*

*Démonstration.* — En effet sous la condition (NLE) le module  $\mathcal{M}$  se décompose en modules complètement irréductibles de résidus rationnel et en vertu du théorème précédent  $\mathcal{M}$  admet une structure géométrique de Frobenius ainsi que  $\text{End}_{\mathcal{R}_{E,x}}(\mathcal{M})$  et ses exposants sont rationnels.  $\square$

Ce résultat explique le rôle central de la propriété (NLE) dans le cas de pente non nulle.



**4.4. Le théorème de décomposition unifié.** — Les démonstrations des théorèmes de décomposition précédents permettent de formuler de façon beaucoup plus précise sur un même pied le théorème de décomposition dans le cas d'égales caractéristiques zéro et d'inégales caractéristiques  $p > 0$ . Soit  $R$  l'un des deux anneaux suivants, le corps  $k((x))$  des séries formelles en la variable  $x$  à coefficients dans un corps  $k$  de caractéristique zéro ou l'anneau  $\mathcal{R}_{L,x}$  pour un corps  $p$ -adique  $L$  maximalelement complet. Si  $\mathcal{M}$  est un  $k((x))$ -espace vectoriel de dimension finie, resp. un  $\mathcal{R}_{L,x}$ -module libre de type fini, à connexion, resp. soluble, on dispose de la décomposition par les pentes

$$\mathcal{M} \simeq \bigoplus_{\gamma \geq 0} Gr^\gamma(\mathcal{M}),$$

tel que le polygone de Newton est à coordonnées entières. Un  $R$ -module complètement irréductible est un module dont la multiplicité de la pente nulle de  $End_R(\mathcal{M})$  est égale à 1. Notons alors  $T(R)$  la catégorie des  $k((x))$ -espaces vectoriels de dimension finie à connexion, resp. la catégorie des  $\mathcal{R}_{E,x}$ -modules, pour un corps  $E$  ayant la propriété (w) de corps résiduel  $k$ , libres de type fini, solubles  $\mathcal{M}$  tels que les exposants de la partie de pente nulle  $Gr^0(\mathcal{M})$  ont des différences (NL) et les exposants de la partie de pente nulle  $Gr^0(End_{\mathcal{R}_{E,x}}(Gr^\gamma(\mathcal{M})))$  ont des différences (NL) et ont eux-mêmes la propriété (NL) pour tout  $\gamma > 0$ . On peut résumer les résultats du §4 de cet article par le théorème qui unifie les deux situations en précisant les extensions des scalaires et des ramifications premières à  $p$  à faire ce qui fournit une décomposition canonique et précise ([19], th. 10.0.24) :

THÉORÈME 4.12. — *Sous les conditions précédentes, soit  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $T(R)$  :*

- 1) *Si  $\mathcal{M}$  est **complètement irréductible**, alors son rang est une puissance de l'exposant caractéristique  $p$  du corps résiduel  $k$ .*
- 2) *Si  $\mathcal{M}$  est **absolument irréductible** de rang  $m = \delta p^h$ ,  $(\delta, p) = 1$  où  $p$  est l'exposant caractéristique de  $k$ , le rang de la partie de pente nulle  $Gr^0(End_R(\mathcal{M}))$  est exactement  $\delta$  et ses exposants sont les classes dans  $\mathbb{Z}[1/\delta]/\mathbb{Z}$  de  $(0, \frac{1}{\delta}, \dots, \frac{\delta-1}{\delta})$  qui forme un sous-groupe. Après adjonction d'une racine  $\xi$  primitive de l'unité d'ordre  $\delta$  il existe une extension  $E(\xi) \rightarrow E(\xi, \lambda^{1/\delta})$  cyclique d'ordre  $\delta$  qui ne dépend pas du scalaire choisi  $\lambda$ , la ramification d'indice  $\delta$  décompose  $\mathcal{M}(\sqrt[\delta]{x})$  en une somme directe de modules complètement irréductibles de rang  $p^h$  de même résidu déterminantiel  $\alpha$  tel que  $\delta(\alpha - \text{resdet}(\mathcal{M}))$  est un entier. Le module  $\mathcal{M}$  est l'image directe par la ramification d'indice  $\delta$  de l'un des ses constituants complètement irréductibles.*
- 3) *Si  $\mathcal{M}$  est **irréductible** de rang  $m$  le module  $\text{hom}_{R[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$  des endomorphismes horizontaux est un corps commutatif de degré  $d$  qui divise  $m$  sur  $k$ , resp. sur  $E$ , et un corps de décomposition du polynôme minimal*

d'un élément primitif de ce corps décompose  $\mathcal{M}$  en somme directe de modules absolument irréductibles de même rang  $m/d$  et de même résidu déterminantiel  $\alpha$  tel que  $\frac{m}{d}\alpha - \text{resdet}(\mathcal{M})$  est un entier de  $\mathbb{Z}$ .

- 4) Dans le cas général soit  $\mathcal{M}_{i_\gamma}$ ,  $i_\gamma \in I_\gamma$ , les constituants irréductibles de  $Gr^\gamma(\mathcal{M})$  pour  $\gamma > 0$  et  $P_{i_\gamma}$  le polynôme minimal d'un élément primitif du corps  $\text{hom}_{\mathbb{R}[\frac{d}{dx}]}(\mathcal{M}_{i_\gamma}, \mathcal{M}_{i_\gamma})$ , alors un corps de décomposition des polynômes  $P_{i_\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ ,  $i_\gamma \in I_\gamma$  décompose  $\mathcal{M}$  en une somme directe de modules qui sont le produit tensoriel d'un module absolument irréductible par un module unipotent. Soit  $\ell$  le p.p.c.m. des parties première  $\delta$  à  $p$  des rangs des constituants absolument irréductibles, après l'extension des scalaires précédente et adjonction de racines primitives de l'unité d'ordre les parties premières  $\delta$  à  $p$  et des racines  $\lambda^{1/\delta}$ , la ramification d'indice  $\ell$  décompose  $\mathcal{M}$  en somme directe de modules qui sont les produits tensoriel d'un module complètement irréductible par un module unipotent.

REMARQUE 4.13. — Dans le théorème précédent la première assertion qui est la plus simple, la plus concise mais est aussi la plus profonde surtout dans le cas  $p$ -adique, ce qui explique que la conjecture ([9], Conj. 3.0.12) était au fond du problème. Les autres assertions en découlent. Autrement dit les modules complètement irréductibles de la théorie  $p$ -adique jouent le rôle des modules de rang 1 de la théorie formelle en caractéristique nulle. La structure générale d'un module se ramène donc à celle des modules complètement irréductibles. La structure des modules de rang 1 est donnée par le théorème 2.18 alors que celles des modules complètement irréductibles de rangs  $p^h$ ,  $h \geq 1$  méritent encore des efforts.

REMARQUE 4.14. — En caractéristique résiduelle nulle le théorème précédent est le meilleur théorème de décomposition qu'on peut obtenir. Sa démonstration en plus simple est parallèle au théorème 4.3 où seule intervient une récurrence sur le rang. Dans le cas complexe le premier résultat de décomposition dans le cas de singularités irrégulières est dû à Turrittin par des méthodes transcendentes [25]. Depuis de nombreuses démonstrations ont été obtenues et a été généralisé en dimensions supérieures. En dimensions supérieures en plus des ramifications il faut faire, comme l'a mis en évidence C. Sabbah des éclatements pour trouver des bonnes décompositions formelles. Les analogues  $p$ -adiques de tous ces problèmes à plusieurs variables sont largement ouverts pour les générations futures.

REMARQUE 4.15. — On dit qu'un module de  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E,x})$  satisfait au principe de transfert s'il se décompose en modules de rang de 1 après extension finie du corps des scalaires et ramification d'indice premier à  $p$ . Le théorème précédent dit qu'un module de la catégorie  $T(\mathcal{R}_{E,x})$  dont les rangs des constituants absolument irréductibles sont premiers à  $p$  satisfait au principe de transfert. La structure d'un tel module qui se ramène au cas d'un module de rang 1.

Les deux situations diffèrent par le théorème de monodromie  $p$ -adique qu'on obtient à partir de l'énoncé analogue pour les modules complètement irréductibles du théorème 4.7 :

**THÉOREME 4.16.** — *Supposons que  $R = \mathcal{R}_{E,x}$ , donc par définition le corps  $E$  a la propriété (w) et soit  $\mathcal{M}$  un module de la catégorie  $T(\mathcal{R}_{E,x})$ , alors il existe une extension  $f$  permise finie telle que l'image inverse  $f^*(\mathcal{M})$  est somme directe de modules qui sont le produit tensoriel d'un module unipotent par un module de rang 1 de **pen**te nulle dont l'exposant est un multiple d'un résidu déterminantiel d'un constituant complètement irréductible de  $\mathcal{M}$ . De plus si les résidus déterminantiaux de  $\mathcal{M}$  sont rationnels le module  $f^*(\mathcal{M})$  est quasi-unipotent et  $\mathcal{M}$  est muni d'une structure géométrique de Frobenius.*

**REMARQUE 4.17.** — Comme nous l'avons déjà observé la première propriété dans le théorème précédent qui concernant la pente est vraie pour tout corps  $p$ -adique à valuation discrète complet sans autres conditions. Ceci montre que le théorème de monodromie en tout rang ne dépend que des exposants et est indépendant de toute action de Frobenius.

Autrement dit la dernière assertion dit que  $f^*(\mathcal{M})$  est extensions successives de modules définis par  $x \frac{d}{dx} - \alpha_i$  où les  $\alpha_i$  sont des nombres de  $\mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$  et  $f^*(\mathcal{M})$  est muni d'une structure géométrique de Frobenius qui se descendent à  $\mathcal{M}$ .

Les propriétés (DNL) et (NLE) des exposants  $p$ -adiques impliquent le théorème de la monodromie et si en plus les résidus déterminantiaux sont rationnels l'existence d'une structure géométrique de Frobenius. C'est le résultat le plus achevé de la théorie des équations différentielles  $p$ -adiques qui donne le rapport exact entre les conditions  $p$ -adiques (DNL) et (NLE) et les structures géométriques de Frobenius. C'est sous cette forme que le théorème de la monodromie est utile en dimensions supérieures comme nous allons le voir dans le § suivant.

## 5. Le théorème de la monodromie semi-globale

**5.1. La catégorie des modules spéciaux.** — Pour définir intrinsèquement le foncteur de monodromie en dimensions supérieures nous allons utiliser la théorie des modules spéciaux qui est valable sur un anneau de base nothérien ([2]). Nous rappelons pour la commodité du lecteur quelques éléments de cette théorie qui est purement algébrique adaptée à l'étude de la cohomologie de de Rham  $p$ -adique qui est une théorie cohomologique pour les variétés algébriques définies sur un corps de caractéristique  $p > 0$  à coefficients dans un corps  $p$ -adique, et est indépendante de toute considération de géométrie analytique non archimédienne, ce qui permet d'utiliser les ressources de la géométrie algébrique de caractéristique  $p > 0$ . C'est une situation bien différente de la théorie de Hodge  $p$ -adique de Jean Marc Fontaine qui est l'étude des théories cohomologiques des

variétés propres et lisses sur les extensions finie de  $\mathbb{Q}_p$  à valeurs dans différents coefficients.

5.1.1. Soient  $(R, I)$  un anneau commutatif unitaire noethérien muni de la topologie  $I$ -adique où  $I$  est un idéal de  $R$  et  $X$  un schéma lisse sur  $R_1 := R/I$ . On peut considérer le site infinitésimal  $X_{\text{inf}}^*$  pour la topologie  $I$ -adique de  $R$  [2], le signe typographique  $\star$  prenant les 2 valeurs  $\wedge, \dagger$ , formel pour  $\wedge$  et faiblement formel pour  $\dagger$ . Rappelons ([2], def. 3.1) que ses ouverts  $\mathcal{U}^* := (U, \mathcal{O}_{U^*/R})$  sont des schémas, formels dans le cas  $\wedge$  [14], I, et faiblement formels dans le cas  $\dagger$  [22], localement topologiquement de type fini, plats sur  $R$  et relevant le schéma induit sur un ouvert de Zariski  $U$  de  $X$ . Sur le site  $X_{\text{inf}}^*$  on dispose de 3 faisceaux canoniques, le faisceau structural  $\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^*/R}$ , le faisceau des opérateurs différentiels  $\dagger$ -adiques  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/R}^\dagger$  et le faisceau  $\mathcal{G}_{X_{\text{inf}}^*}$  des automorphismes de  $R$ -algèbres du faisceau structural  $\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^*/R}$  qui se réduisent suivant l'identité modulo  $I$ . Tout faisceau d'ensembles  $\mathcal{F}_{\text{inf}}$  sur le site  $X_{\text{inf}}^*$  est muni d'une action géométrique à gauche ( $\sharp$ ) du faisceau de groupes  $\mathcal{G}_{X_{\text{inf}}^*}$  ([2], prop. 4.7).

5.1.2. En vertu du théorème de base ([2], th. 5.1) le faisceau  $\mathcal{G}_{X_{\text{inf}}^*}$  est un sous-faisceau de groupes pour la structure multiplicative du faisceau d'anneaux  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/R}^\dagger$ . Pour toute extension des scalaires  $R \rightarrow S$  on dispose de la catégorie  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/S}^\dagger\text{-Mod}$  des  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/S}^\dagger$ -modules à gauche et de sa sous-catégorie pleine  $\text{Sp}(X_{\text{inf}}^*/S)$  des  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/S}^\dagger$ -modules spéciaux, à savoir la catégorie des  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/S}^\dagger$ -modules dont l'action géométrique ( $\sharp$ ) coïncide avec l'action différentielle ( $\diamond$ ) qui se fait à travers le morphisme canonique  $\mathcal{G}_{X_{\text{inf}}^*} \rightarrow \mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/S}^\dagger$ . La catégorie  $\text{Sp}(X_{\text{inf}}^*/S)$  est abélienne ([2], prop. 6.17), a suffisamment d'objets injectifs ([2], th. 6.24), de plats ([2], th. 10.2) et est un champ ([2], th. 6.23), bien que ce ne soit pas une catégorie de modules parce que le  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/S}^\dagger$ -module à gauche  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/S}^\dagger$  n'est pas spécial.

5.1.3. Le faisceau de groupes  $\mathcal{G}_{X_{\text{inf}}^*}$  joue à beaucoup d'égards dans la théorie de de Rham  $\star$ -adique le rôle du groupe de Galois-Grothendieck dans la théorie des revêtements topologiques ou algébriques, en particulier il permet le passage canonique et fonctoriel de la caractéristique  $p > 0$  à la caractéristique zéro. La considération de l'action simultanée du couple  $\mathcal{G}_{X_{\text{inf}}^*} \hookrightarrow \mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/R}^\dagger$  nous a fait comprendre la théorie de de Rham et les problèmes qui se posent. Par ailleurs un module spécial a les propriétés d'un Cristal de Grothendieck, il se propage canoniquement ([2], th. 6.14) et ses relèvements sont canoniquement isomorphes ([2], th. 6.10). Ces propriétés sont à la base du succès du couple  $\mathcal{G}_{X_{\text{inf}}^*} \hookrightarrow \mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^*/R}^\dagger$  pour les variétés ouvertes et de leurs morphismes. La théorie des modules spéciaux donne naissance à la cohomologie de de Rham  $p$ -adique d'un schéma qui est fonctorielle ([2], th. 13.16).

5.1.4. La catégorie  $\mathrm{Sp}(X_{\mathrm{inf}}^\dagger/S)$  contient comme sous-catégorie pleine la catégorie  $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\dagger/S})$  des modules lisses, à savoir ceux qui sont localement libres de type fini sur  $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\dagger/S}$  ([2], def. 10.28), c'est une notion purement algébrique.

5.1.5. Soit  $Z$  un fermé de  $X$  pour la topologie de Zariski. Nous avons défini le foncteur de cohomologie locale topologique  $\mathbf{R}\Gamma_Z(-)$  pour la catégorie  $\mathbf{D}^+(\mathrm{Sp}(X_{\mathrm{inf}}^\dagger/S))$  ([2], def. 12.4). C'est une bonne notion très sensible si  $\star = \dagger$  mais pas dans le cas  $\star = \wedge$ .

5.1.6. Dans le cas  $\star = \wedge$ , pour définir le foncteur de cohomologie locale utile qui sert surtout d'intermédiaire nous faisons pour simplifier la restriction que  $Z$  est une hypersurface, c'est-à-dire défini localement par une équation. Nous allons rappeler la définition du faisceau  $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge, Z^\dagger/R}$  des éléments superadmissibles le long de  $Z$  ([20], 1.5). Soient  $U$  un ouvert affine de  $X$  au-dessus duquel le fermé  $Z$  est défini par une équation,  $A$  une  $R$ -algèbre complète qui relève l'algèbre de  $U$  définissant un schéma formel affine  $U^\wedge = (U, \mathcal{O}_{U^\wedge/R})$  et  $f$  est un élément de  $A$  qui relève une équation de  $Z$ . L'anneau  $A$  est noethérien et le complété faible  $(A[1/f])^\dagger$  [23] pour la topologie  $I$ -adique de  $A$  de la  $A$ -algèbre  $A[1/f]$  ne dépend pas du relèvement  $f$  choisi et définit un faisceau  $\mathcal{O}_{U^\wedge, Z^\dagger/R}$  de  $\mathcal{O}_{U^\wedge/R}$ -modules [22]. Quand l'ouvert  $U^\wedge$  varie ces faisceaux ont la propriété de restriction ([2], def. 3.9) et définissent un faisceau  $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge, Z^\dagger/R}$  de  $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge/R}$ -modules sur le site  $X_{\mathrm{inf}}^\wedge$ . Soit  $j$  l'inclusion canonique de  $X - Z$  dans  $X$ , alors les faisceaux  $j_*j^{-1}\mathcal{D}_{U^\wedge/R}^\dagger$  quand  $U^\wedge$  varie ont la propriété de restriction et définissent un faisceau  $j_*^{\mathrm{diff}}j_{\mathrm{diff}}^*\mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge/R}^\dagger$  sur le site  $X_{\mathrm{inf}}^\wedge$ . On définit le faisceau  $\mathcal{D}_{U^\wedge, Z^\dagger/R}^\dagger$  comme le sous-faisceau de  $\mathrm{End}_R(\mathcal{O}_{U^\wedge, Z^\dagger/R})$  des endomorphismes dont les réductions locales par les puissances  $I^s$  sont des opérateurs différentiels dont l'ordre est borné par une fonction affine de  $s$ . Quand  $U^\wedge$  varie les faisceaux  $\mathcal{D}_{U^\wedge, Z^\dagger/R}^\dagger$  ont la propriété de restriction et définissent un faisceau  $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge, Z^\dagger/R}^\dagger$  sur le site  $X_{\mathrm{inf}}^\wedge$ . On dispose alors de morphismes canoniques  $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge/R}^\dagger \rightarrow \mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge, Z^\dagger/R}^\dagger \rightarrow j_*^{\mathrm{diff}}j_{\mathrm{diff}}^*\mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge/R}^\dagger$ . Si  $R \rightarrow S$  est une extension des scalaires on obtient par changement de base les faisceaux analogues sur  $S$  et la notion de  $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\wedge, Z^\dagger/S}^\dagger$ -module à gauche spécial est bien définie.

5.1.7. On arrive à la définition générale des  $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\dagger, Z^\dagger/S}^\dagger$ -modules lisses sur l'anneau  $S$  :

DÉFINITION 5.1. — On définit la catégorie  $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\dagger, Z^\dagger/S})$  des modules lisses comme la catégorie des  $\mathcal{D}_{X_{\mathrm{inf}}^\dagger, Z^\dagger/S}^\dagger$ -modules à gauche spéciaux qui sont localement libres de type fini sur  $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\dagger, Z^\dagger/S}$ , c'est une catégorie abélienne.

On dispose d'un foncteur canonique  $\mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{U_{\mathrm{inf}}^\dagger/S}) \rightarrow \mathrm{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{inf}}^\dagger, Z^\dagger/S})$ .

**5.2. Les faisceaux de Laurent.** —

5.2.1. *Les faisceaux*  $\mathcal{B}_{Y_{\text{inf},t}}, \mathcal{E}_{Y_{\text{inf},t}}, \mathcal{E}_{Y_{\text{inf},t}}^\dagger$ . — Soient  $Y$  une hypersurface définie par une équation lisse  $t : X \rightarrow \text{Spec } R_1[t]$  et  $A$  une  $R$ -algèbre complète formellement lisse relevant un ouvert affine  $U$  de  $X$  et  $T$  un relèvement dans  $A$  de  $t$ . Posons  $A_T := A/AT$  qui est donc une algèbre complète pour la topologie  $I$ -adique. Pour  $U$  assez petit le relèvement  $T$  fait parti d'un système de coordonnées adapté au morphisme  $A \rightarrow A_T$  ([2], def. 11.2) et les opérateurs différentiels  $\Delta_T^\alpha, \alpha \geq 0$  de  $A$  sont bien définis, dépendent du système de coordonnées locales commutent aux opérateurs associés aux autres coordonnées et l'on a  $\Delta_T^\alpha(T^\beta) = \binom{\alpha}{\beta} T^{\alpha-\beta}$ .

LEMME 5.2. — *Si  $(T, T')$  est un couple de relèvements dans  $A$  de  $t$ , il existe un diagramme commutatif canonique de morphismes d'algèbres*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_T \\ g_{T,T'} \downarrow & & \downarrow \bar{g}_{T,T'} \\ A & \longrightarrow & A_{T'} \end{array}$$

*Démonstration.* — Pour tout  $f \in A$  posons  $g_{T,T'}(f) := \sum_{n \geq 0} (T' - T)^n \Delta_T^n(f)$  qui est une série convergente dans  $A$  et  $g_{T,T'}$  est un élément du groupe  $G_A$  des automorphismes d'algèbre qui se réduisent à l'identité modulo  $I$ . Par construction le morphisme  $g_{T,T'}$  passe au quotient et induit un morphisme bijectif d'algèbres  $\bar{g}_{T,T'} : A_T \rightarrow A_{T'}$ . □

Si on munit l'ensemble des relèvements  $T$  du préordre trivial (pour tous  $T, T', T \leq T'$ ) les algèbres  $A_T$  forment un système inductif dont on note  $A_t$  la limite inductive  $\varinjlim_T A_T$ .

LEMME 5.3. — *Si  $r^* : A \rightarrow A'$  est un morphisme d'algèbres relevant une inclusion d'ouverts affines  $r : U' \rightarrow U$ , ce morphisme induit un morphisme d'algèbres  $r^* : A_t \rightarrow A'_t$  compatible avec la composition.*

*Démonstration.* — Soit  $T$  un relèvement de  $t$  dans  $A$ , notons  $A_{U'}$  la restriction de  $A$  à  $U'$  et  $A_{TU'}$  celle de  $A_T$  de sorte que  $r^*$  se factorise  $A \rightarrow A_{U'} \rightarrow A'$  et induit un morphisme  $A_{TU'} \rightarrow A'_{r^*(T)}$  comme  $r^*(T)$  est un relèvement de  $t$  dans  $A'$  le morphisme représente le morphisme du lemme. □

NOTATION 5.4. — En vertu du lemme précédent l'application  $A \rightarrow A_t$  définit un préfaisceau abélien sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  qui est en fait un faisceau provenant du faisceau défini par la  $A$ -algèbre  $A_T$  à support dans  $Y$ , nous le noterons  $\mathcal{O}_{Y_{\text{inf},t}}$ . Le lecteur prendra garde que ce faisceau qui dépend de  $t$  est distinct du faisceau structural  $\mathcal{O}_{Y_{\text{inf}}^\wedge/R}$  du site  $Y_{\text{inf}}^\wedge$ .

NOTATION 5.5. — Si  $D_{A_T/R}^\dagger$  désigne l'anneau des opérateurs différentiels de l'algèbre  $A_T$ , le morphisme  $\bar{g}_{T,T'}$  induit un isomorphisme d'anneaux  $\bar{g}_{T,T'} \circ P \circ \bar{g}_{T,T'}^{-1} : D_{A_T/R}^\dagger \rightarrow D_{A_{T'}/R}^\dagger$  et si on note  $D_{A_t/R}^\dagger$  la limite inductive, l'application  $A \rightarrow D_{A_t/R}^\dagger$  définit un faisceau d'anneaux  $\mathcal{D}_{Y_{\text{inf},t}/R}^\dagger$  sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  et  $\mathcal{O}_{Y_{\text{inf},t}}$  est un  $\mathcal{D}_{Y_{\text{inf},t}/R}^\dagger$ -module à gauche.

Le couple  $(A, T)$  étant choisi, notons  $\mathcal{B}_{B,T}$  la  $A_T$ -algèbre  $A_T[[T]]$  des séries formelles à coefficients dans l'anneau  $A_T$  munie des opérateurs  $\Delta_T^m, m \geq 0$  qui commutent, par définition, avec l'action de  $A_T$ .

DÉFINITION 5.6. — On définit le morphisme de restriction  $Rest_{A,T} : A \rightarrow \mathcal{B}_{B,T}$  en posant pour tout élément  $f \in A$

$$Rest_{A,T}(f) := \sum_{n \geq 0} \overline{\Delta_T^n(f)} T^n,$$

où  $\overline{\Delta_T^n(f)}$  désigne la classe de  $\Delta_T^n(f)$  dans  $A_T$ . Le morphisme  $Rest_{A,T}$  est un morphisme d'anneaux qui commute avec l'action des opérateurs  $\Delta_T^n, n \geq 0$  et  $Rest_{A,T}(T^n) = T^n$ .

LEMME 5.7. — Un couple  $(T, T')$  définit un diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{Rest_{A,T}} & \mathcal{B}_{B,T} \\ g_{T,T'} \downarrow & & \downarrow u_{T,T'} \\ A & \xrightarrow{Rest_{A,T'}} & \mathcal{B}_{B,T'} \end{array}$$

Démonstration. — Si pose  $u_{T,T'}(\sum_{n \geq 0} \bar{a}_n T^n) := \sum_{n \geq 0} \bar{g}_{T,T'}(\bar{a}_n) T'^n$  cela définit un diagramme de morphismes d'algèbres. Il reste à voir qu'il commutatif, c'est-à-dire que la classe dans  $A_{T'}$  de  $g_{T,T'}(\Delta_T^n(f))$  est égale à celle de  $\Delta_{T'}^n(g_{T,T'}(f))$  pour tout  $n \geq 0$ . Mais l'opérateur différentiel  $g_{T,T'} \Delta_T^n$  de  $A$  est égal à l'opérateur  $\Delta_{T'}^n g_{T,T'}$ , en particulier  $g_{T,T'} \Delta_T^n(f)$  est égal à  $\Delta_{T'}^n g_{T,T'}(f)$  comme élément de  $A$ . □

NOTATION 5.8. — Les morphismes  $u_{T,T'}$  sont des isomorphismes d'algèbres et définissent de même une limite inductive  $\mathcal{B}_{A_t}$ . L'application  $A \rightarrow \mathcal{B}_{A_t}$  définit un faisceau  $\mathcal{B}_{Y_{\text{inf},t}}$  sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$ . Les morphismes de restriction induisent un morphisme de modules sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$

Rest : 
$$\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge/R} \rightarrow \mathcal{B}_{Y_{\text{inf},t}}.$$

De plus  $\mathcal{B}_{Y_{\text{inf},t}}$  est muni d'une action de l'opérateur canonique  $t \frac{d}{dt}$  qui est la classe de l'opérateur  $T \frac{d}{dT}$ . Par ailleurs  $\mathcal{B}_{Y_{\text{inf},t}}$  est muni d'une action à gauche du faisceau  $\mathcal{D}_{Y_{\text{inf},t}/R}^\dagger$  qui commute avec l'action de  $t \frac{d}{dt}$  et devient un  $\mathcal{D}_{Y_{\text{inf},t}/R}^\dagger[t \frac{d}{dt}]$ -module à gauche.

Nous allons définir par la même méthode les faisceaux  $\mathcal{E}_{B_{\text{inf},t}}, \mathcal{E}_{B_{\text{inf},t}}^\dagger$ . Soit un couple  $(A, T)$  qui relève  $(U, t)$  et considérons le  $A_T$ -module  $A_T[[T, T^{-1}]]$  des séries de Laurent à coefficients dans  $A_T$  et  $\mathcal{E}_{A_T, T}$ , resp.  $\mathcal{E}_{A_T, T}^\dagger$ , le  $A_T$ -sous-module des séries  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$  telles que la valuation  $I$ -adique  $v_I(a_{-n})$  tend vers l'infini avec  $n$ , resp. est  $\geq cn$  pour  $n > 0$  et une constant  $c > 0$  non précisée, alors  $\mathcal{E}_{A_T, T}$ , resp.  $\mathcal{E}_{A_T, T}^\dagger$  est une  $A_T$ -algèbre sur laquelle l'action de  $u_{T, T'}$  se prolonge par  $u_{T, T'}(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{g}_{T, T'}(a_n) T'^n$  et la limite inductive  $\mathcal{E}_{B_{\text{inf},t}}$ , resp.  $\mathcal{E}_{B_{\text{inf},t}}^\dagger$ , définit un faisceau  $\mathcal{E}_{Y_{\text{inf},t}}$ , resp.  $\mathcal{E}_{Y_{\text{inf},t}}^\dagger$  sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  de  $\mathcal{D}_{Y_{\text{inf},t}/R}^\dagger[t \frac{d}{dt}]$ -modules à gauche.

5.2.2. *Les faisceaux  $\mathcal{A}_{Y_{\text{inf},t}}, \mathcal{R}_{Y_{\text{inf},t}}$ .* — Dans la suite de ce § nous supposons que  $(R, I, R_1, S) = (V, \mathfrak{m}, k, K)$  où  $V$  est un anneau de valuation discrète complet. Pour un couple  $(A, T)$  on peut considérer la  $K$ -algèbre de Banach  $A_{T/K} := K \otimes_V A_T$  et l'algèbre  $A_{T/K}[[T]]$  des série formelles à coefficients dans  $A_{T/K}$ . Un morphisme  $u_{(T, T')}$  se prolonge en un isomorphisme  $A_{T/K}[[T]] \rightarrow A_{T'/K}[[T']]$ . Si on choisit une norme de  $A_{T/K}$ , dans  $A_{T/K}[[T]]$  on peut considérer le sous-anneau  $\mathcal{A}_{A_{T/K}, T}$  des séries qui convergent dans le disque  $[0, 1[$ . L'anneau  $\mathcal{A}_{A_{T/K}, T}$  ne dépend pas de la norme choisie et la limite inductive  $\mathcal{A}_{A_{t/K}, t}$  définit le faisceau  $\mathcal{A}_{Y_{\text{inf},t}}$  sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  qui est un  $\mathcal{D}_{Y_{\text{inf},t}/K}^\dagger[t \frac{d}{dt}]$ -module à gauche. De même on peut considérer le  $A_{T/K}$ -module des séries de Laurent  $A_{T/K}[[T, T^{-1}]]$  et le sous-anneau  $\mathcal{R}_{A_{T/K}, T}$  des séries qui convergent dans un domaine  $[1 - \epsilon, 1[$  pour un  $\epsilon > 0$  non précisée et la limite inductive  $\mathcal{R}_{A_{t/K}, t}$  définit le faisceau  $\mathcal{R}_{Y_{\text{inf},t}}$  sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  qui est un  $\mathcal{D}_{Y_{\text{inf},t}/K}^\dagger[t \frac{d}{dt}]$ -module à gauche. Les faisceaux  $\mathcal{A}_{Y_{\text{inf},t}}, \mathcal{R}_{Y_{\text{inf},t}}$  ne sont définis que sur  $K$  et leur notation est cohérente.

**5.3. Le foncteur de monodromie  $\text{Mon}_{\eta, t}$ .** — Si  $A$  est une  $V$ -algèbre on définit  $A_K := A \otimes_V K$ . Considérons le morphisme canonique de  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}}^\wedge/V}^\dagger$ -modules spéciaux :

$$\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge/V} \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/V}.$$

LEMME 5.9. — *Si  $A \rightarrow (A[1/T])^\dagger$  est un relèvement de ce morphisme, alors il existe un morphisme de restriction  $(A_K[1/T])^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{A_{KT}, T}^\dagger$  qui s'inscrit dans un diagramme commutatif de morphismes d'algèbres*

$$\begin{array}{ccc} A_K & \longrightarrow & (A_K[1/T])^\dagger \\ \text{Rest}_{A_K, T} \downarrow & & \downarrow \text{Rest}_{(A_K[1/T])^\dagger} \\ \mathcal{B}_{A_{KT}, T} & \longrightarrow & \mathcal{E}_{A_{KT}, T}^\dagger \end{array}$$

*Démonstration.* — Si  $h := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ ,  $a_n \in A_K$ , est un élément de  $(A_K[1/T])^\dagger$ , il existe un opérateur différentiel  $P = \sum_{m \geq 0} b_m \Delta_T^m$ ,  $b_m \in A_K$



de  $D_{A/K}^\dagger$  tel que  $P(1/T) = h$ . On pose

$$Rest_{(A_K[1/T])^\dagger}(h) := \sum_{m \geq 0} (-1)^m Rest_{A_K, T}(b_m) T^{-m-1}.$$

L'élément  $Rest_{(A_K[1/T])^\dagger}(h)$  ne dépend pas de l'opérateur choisi parce que l'annulateur de  $1/T$  est engendré par l'opérateur  $T \frac{d}{dT} + 1$ , c'est ce point qui nécessite le passage de  $V$  à  $K$ . Par ailleurs le morphisme  $Rest_{(A_K[1/T])^\dagger}$  est multiplicatif et définit le diagramme du lemme.  $\square$

Si  $(A, T')$  est un autre couple l'opérateur  $g_{T, T'}$  se prolonge en un isomorphisme d'algèbre  $(A_K[1/T])^\dagger \rightarrow (A_K[1/T'])^\dagger$ , définissant un morphisme de restriction de faisceaux sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  :

$$\text{Rest} : \mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/K} \rightarrow \mathcal{E}_{Y_{\text{inf}, t}/K}^\dagger \rightarrow \mathcal{R}_{Y_{\text{inf}, t}}$$

Notons  $\text{MLC}(\mathcal{R}_{Y_{\text{inf}, t}})$  la catégorie des  $\mathcal{R}_{Y_{\text{inf}, t}}$ -module localement libre de type fini muni d'une action à gauche de  $D_{Y_{\text{inf}, t}/K}^\dagger[t \frac{d}{dt}]$ .

DÉFINITION 5.10. — Soit  $t : X \rightarrow \text{Spec } k[t]$  un morphisme de  $X$  sur la droite affine définissant une hypersurface  $Y$  lisse sur  $k$ , on définit le foncteur  $\text{Mon}_t : \text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/K}) \rightarrow \text{MLC}(\mathcal{R}_{Y_{\text{inf}, t}})$  par

$$\text{Mon}_t(\mathcal{M}_{X, Y^\dagger}^\wedge) := \mathcal{R}_{Y_{\text{inf}, t}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/K}} \mathcal{M}_{X, Y^\dagger}^\wedge.$$

Si  $\mathcal{M}_{U_{\text{inf}}}^\dagger$  est un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{U_{\text{inf}}}^\dagger/K)$  on définit  $\text{Mon}_t(\mathcal{M}_U^\dagger) :$

$$\text{Mon}_t(\mathcal{M}_U^\dagger) := \text{Mon}_t(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/K} \otimes_{j_*^{\text{diff}}} \mathcal{O}_{U_{\text{inf}}}^\dagger/K \ j_*^{\text{diff}} \mathcal{M}_U^\dagger)$$

où  $j_*^{\text{diff}} \mathcal{O}_{U_{\text{inf}}}^\dagger/K \rightarrow \mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/K}$  est l'extension naturelle, avec l'abus de notations qui consiste à noter les faisceaux du site  $X_{\text{inf}}^\dagger$  de la même façon que leur image comme faisceau du site  $X_{\text{inf}}^\wedge$ .

On peut localiser les constructions précédentes au voisinage d'un point  $\eta$  de  $Y$ . Soient  $U$  voisinage affine de  $\eta$ ,  $(A, T)$  un relèvement du couple  $(U, t)$  et  $(U, \mathcal{O}_{U^\wedge/V})$  le schéma formel associé. Posons  $B_{\eta, t} := \varinjlim_T \varinjlim_W \Gamma(W, \mathcal{O}_{U^\wedge/V})/T$ , où  $W$  est un voisinage affine de  $\eta$ , on obtient un faisceau ponctuel du site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  qui est une  $V$ -algèbre locale.

PROPOSITION 5.11. — *Supposons que  $\eta$  est un point générique de  $Y$ , alors l'anneau  $B_{\eta, t}$  est un anneau de valuation discrète d'indice de ramification sur  $V$  égal à 1 et dont le corps résiduel est le corps  $\kappa(\eta)$  du point  $\eta$  de  $Y$ .*

Démonstration. — En effet la réduction modulo  $\mathfrak{m}$  de  $B_{\eta, t}$  est l'anneau local au point  $\eta$  du sous-schéma  $Y$  qui est précisément le corps  $\kappa(\eta)$ .  $\square$

Cependant  $B_{\eta,t}$  **n'est pas complet** pour la topologie  $\mathfrak{m}$ -adique parce qu'une limite inductive **ne commute pas** avec une limite projective, c'est là une difficulté essentielle dans la théorie à plusieurs variables. D'où la définition :

DÉFINITION 5.12. — On appelle  $V$ -anneau de Cohen géométrique du couple  $(\eta, t)$  et on note  $C_{\eta,t}$  le complété  $\mathfrak{m}$ -adique de l'anneau  $B_{t,\eta}$  et on appelle  $K$ -corps de Cohen géométrique du couple  $(\eta, t)$  et on note  $E_{\eta,t}$  le corps des fractions de l'anneau  $C_{\eta,t}$ .

L'anneau  $C_{\eta,t}$  est un  $V$ -anneau de Cohen, en ce sens que c'est un anneau de valuation discrète complet d'indice de ramification sur  $V$  égal à 1, qui est aussi un faisceau ponctuel porté par  $\eta$  sur le site  $X_{\text{inf}}^\wedge$  ainsi que le corps  $E_{\eta,t}$ , de ce fait les anneaux et les corps de Cohen géométriques jouissent de bien meilleures propriétés de fonctorialité que les anneaux de Cohen généraux.

Le corps  $E_{\eta,t}$  est donc un corps  $p$ -adique à valuation discrète complet dont le corps résiduel est le corps des fonctions  $\kappa(\eta)$  qui est l'exemple type de corps pour lesquels les méthodes de cet article sont destinées. On peut donc considérer la catégorie abélienne  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}})$  dans laquelle tous les résultats des §§ précédents s'appliquent.

On dispose d'un morphisme canonique de restriction compatible avec l'action de  $t \frac{d}{dt}$  :

$$\mathcal{R}_{Y_{\text{inf},t}} \rightarrow \mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}}.$$

DÉFINITION 5.13. — Sous les condition précédentes, on définit le foncteur de monodromie en  $\eta$ ,  $\text{Mon}_{\eta,t} : \text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}},Y^\dagger/K}) \rightarrow \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}})$  par

$$\text{Mon}_{\eta,t}(\mathcal{M}_{X,Y^\dagger}^\wedge) := \mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}} \otimes_{\mathcal{R}_{Y_{\text{inf},t}}} \text{Mon}_t(\mathcal{M}_{X,Y^\dagger}^\wedge).$$

Si  $V$  est d'inégales caractéristiques  $(o, p)$  en utilisant les techniques du théorème de division [21] on peut montrer que l'action du faisceau  $\mathcal{D}_{X_{\text{inf}},Y^\dagger/K}^\dagger$  sur  $\mathcal{M}_{X,Y^\dagger}^\wedge$  implique la solubilité de la monodromie  $\text{Mon}_{\eta,t}(\mathcal{M}_{X,Y^\dagger}^\wedge)$  et on dispose donc de la décomposition par les pentes

$$\text{Mon}_{\eta,t}(\mathcal{M}_{X,Y^\dagger}^\wedge) \simeq \bigoplus_{\gamma \geq 0} Gr^\gamma(\text{Mon}_{\eta,t}(\mathcal{M}_{X,Y^\dagger}^\wedge)).$$

Au voisinage de  $\eta$  deux équations lisses  $t, t'$  différent par une unité. Le choix d'un relèvement dans  $A$  de cette unité définit un isomorphisme d'anneaux  $E_{\eta,t'} \otimes_{E_{\eta,t}} \mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}} \simeq \mathcal{R}_{E_{\eta,t',t'}}$  qui laissent invariants les normes en  $\rho \in ]1 - \epsilon, 1[$  et induit un isomorphisme entre l'image inverse du foncteur  $\text{Mon}_{\eta,t}$  et  $\text{Mon}_{\eta,t'}$ . Ceci implique que les invariants de la monodromie, rang, polygone de Newton, exposants, résidues déterminantiels ne dépendent pas de l'équation  $t$ .

**5.4. Le théorème de monodromie semi-globale.** — Soient  $V$  un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristique  $(0, p)$ ,  $X$  un schéma lisse sur le corps résiduel  $k$ ,  $Y$  une hypersurface et  $\eta$  un point générique de  $Y$ . Supposons  $k$  parfait.

THÉOREME 5.14. — *Si  $\mathcal{M}_{X, Y^\dagger}^\wedge$  est un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}, Y^\dagger/K})$  tel que sa monodromie en  $\eta$  a les propriétés (DNL), (NLE), quitte à se restreindre à un voisinage assez petit  $X$  de  $\eta$  il existe un morphisme fini  $f : X' \rightarrow X$  de schémas lisses sur  $k$  tel que la monodromie de  $f_{\text{diff}}^*(\mathcal{M}_{X, Y^\dagger}^\wedge)$  en tout point générique  $\eta'$  de  $Y' := f^{-1}(Y)$  est isomorphe après extension finie des scalaires à une somme directe de modules qui sont le produit tensoriel d'un module unipotent par un module de rang 1 de pente nulle dont l'exposant est un multiple d'un résidu déterminantiel de la monodromie de  $\mathcal{M}_{X, Y^\dagger}^\wedge$  en  $\eta$ .*

Pour démontrer ce théorème nous utilisons les ressources immenses de la Théorie des Schémas ([14]). Le théorème locale 4.16 fournit une suite finie d'extensions permises en caractéristique  $p > 0$ . Pour passer à une situation semi-globale nous effectuons des changements de bases et des descentes du corps de base en caractéristique  $p > 0$ .

5.4.1. *La catégorie des revêtements spéciaux de la droite époincée.* — Soit  $N$  un corps et  $\text{Ét}(\text{Spec } N[x, x^{-1}])$  la catégorie des revêtement finis de la droite affine époincée qui est géométriquement connexe. Rappelons [15] qu'on dit qu'un revêtement fini de la droite affine époincée est spécial s'il est modérément ramifié à l'infini et si son groupe de monodromie géométrique n'a qu'un seul  $p$ -groupe de Sylow où  $p$  est l'exposant caractéristique de  $N$ . On note  $\text{Ét}(\text{Spec } N[x, x^{-1}], \text{spé})$  la catégorie des revêtement finis spéciaux.

On a alors le théorème ([15], th. 1.4.1) :

THÉOREME 5.15. — *Le foncteur  $\text{Ét}(\text{Spec } N[x, x^{-1}], \text{spé}) \rightarrow \text{Ét}(\text{Spec } N((x)))$  naturel de restriction est une équivalence de catégories.*

5.4.2. *Deux propriétés des revêtements spéciaux.* — Nous allons montrer deux propriétés des revêtements spéciaux. Soit  $Z^* \rightarrow \text{Spec } N[x, x^{-1}]$  un revêtement spécial, alors  $Z^*$  admet une compactification  $\bar{Z}$  qui est un schéma de dimension 1 normal et donc régulier ([14], II, 7.4.11). Le morphisme fini  $Z^* \rightarrow \text{Spec } N[x, x^{-1}]$  se prolonge en un morphisme fini  $\bar{Z} \rightarrow P_N$  ([14], II, 7.4.9) où  $P_N$  est la droite projective sur  $N$ . On obtient par changement de base un morphisme fini  $Z \rightarrow \text{Spec } N[x]$  sur la droite affine sur  $N$  tel que  $Z$  est régulier.

PROPOSITION 5.16. — *Le cardinal de la fibre de  $Z$  au-dessus de l'origine est égal au cardinal du revêtement de  $\text{Spec } N((x))$  qui lui donne naissance.*

Démonstration. — Le schéma  $Z$  est affine, soit  $B$  son algèbre qui est donc finie sur  $A = N[x]$  et  $\text{Spec } N((x)) \otimes_A B = \text{Spec } N((x)) \otimes_{N[[x]]} N[[x]] \otimes_A B = \text{Spec } N((x)) \otimes_{N[[x]]} \hat{B}_x$  où  $\hat{B}_x$  est le complété de  $B$  pour la topologie  $x$ -adique.

Le support du schéma formel associé à  $\hat{B}_x$  est la fibre au-dessus de l'origine. On trouve que  $\hat{B}_x = \bigoplus_{\mathfrak{n}} \hat{B}_{\mathfrak{n}}$  où  $\mathfrak{n}$  parcourt les idéaux maximaux aux points de la fibre. On trouve que

$$\mathrm{Spec} N((x)) \otimes_A B = \mathrm{Spec} N((x)) \otimes_{N[[x]]} \bigoplus_{\mathfrak{n}} \hat{B}_{\mathfrak{n}} := \bigoplus_{\mathfrak{n}} \mathrm{Spec} \hat{B}_{\mathfrak{n}}[1/x],$$

qui montre bien l'égalité des cardinaux.  $\square$

**PROPOSITION 5.17.** — *Supposons que  $N((x)) \rightarrow N((x'))$  est une extension séparable totalement ramifiée, alors l'unique point de  $Z$  au dessus de l'origine est rationnel sur  $N$ ,  $Z$  est lisse sur  $N$  en ce point et  $x'$  est une uniformisante de l'anneau local de  $Z$  en ce point. De plus  $Z$  est géométriquement connexe.*

*Démonstration.* — Le corps des fractions du complété de l'anneau local de  $Z$  en ce point est  $N$ -isomorphe à  $N((x'))$ , c'est donc un point rationnel sur  $N$ . Mais  $Z$  est régulier et est donc lisse sur  $N$ . De plus  $Z$  apparaît comme le normalisé dans le revêtement qui lui donne naissance qui est alors connexe et  $Z$  est connexe et le reste après extension finie.  $\square$

**PROPOSITION 5.18.** — *Soit  $Z$  une courbe lisse sur  $N$  et  $o$  un point rationnel sur  $N$  et  $N((z)) \rightarrow N((z'))$  une extension séparable totalement ramifiée du corps local complet en  $o$ , alors il existe un voisinage  $U$  de  $o$  et un morphisme fini  $Z' \rightarrow U$  qui est étale en dehors de  $o$  et n'a qu'un point rationnel au-dessus de  $o$ . De plus  $Z'$  est lisse sur  $N$ , géométriquement connexe et redonne par changement de base l'extension précédente.*

*Démonstration.* — Soit un voisinage  $U$  de  $o$  et un morphisme étale sur la droite  $\mathrm{Spec} N[z]$  qui envoie le point marqué  $o$  à l'origine. Quitte à enlever un nombre fini de point on peut supposer que  $U$  n'a qu'un seul point au-dessus de l'origine. L'extension  $N((z)) \rightarrow N((z'))$  donne naissance à un morphisme fini  $T \rightarrow \mathrm{Spec} N[z]$  qui est un prolongement d'un revêtement spécial de la droite affine époiné. On obtient par changement de base un morphisme  $Z' \rightarrow U$  qui a les propriétés voulues.  $\square$

**5.5. Descente des propriétés de la fibre générique.** — Soit  $S$  un schéma affine intègre noethérien de point générique  $\eta = \mathrm{Spec} N$ . Le théorème suivant est un cas très particulier des propriétés de descente des limites projectives de schémas localement de présentation finie sur un schéma de base et de leurs morphismes localement de présentation finie ([14], IV<sub>3</sub>, §8, §9) :

**THÉORÈME 5.19.** — 1) *Soit  $Z \rightarrow S$  un morphisme de type fini et  $Z'_\eta \rightarrow Z_\eta$  un morphisme fini au-dessus de  $\eta$ , alors ce morphisme se prolonge en un morphisme fini  $Z' \rightarrow Z$  au-dessus d'un voisinage de  $\eta$ .*  
2) *Soit  $Z' \rightarrow S$  un morphisme de type fini dont la fibre  $Z'_\eta$  est lisse sur  $\eta$ , alors  $Z'$  est lisse au-dessus d'un voisinage de  $\eta$ .*

*Démonstration.* — 1) Le schéma  $S$  étant noethérien et le morphisme  $Z'_\eta \rightarrow Z_\eta$  de type fini, il existe un morphisme de type fini  $Z' \rightarrow Z$  de  $S$ -schémas de type fini qui le prolonge quitte à remplacer  $S$  par un ouvert affine voisinage de son point générique. Mais la fibre générique  $Z'_\eta \rightarrow Z_\eta$  est un morphisme fini et en vertu de la constructibilité de cette propriété ([14], IV<sub>3</sub>, 8.10.5, (x)) il existe un voisinage de  $\eta$  au dessus duquel le morphisme  $Z' \rightarrow Z$  est fini.

2) En vertu du théorème de platitude générique le schéma  $Z'$  est plat au-dessus d'un voisinage de  $\eta$  ([14], IV<sub>2</sub>, 6.9.1). Par ailleurs la fibre  $Z'_\eta$  est lisse sur  $\eta$ , en particulier géométriquement régulière, en vertu de la constructibilité de cette propriété ([14], IV<sub>3</sub>, 9.9.5, (v)) les fibres au dessus d'un point dans un voisinage de  $\eta$  sont géométriquement régulières. Mais un morphisme de type fini plat dont les fibres sont géométriquement régulières est lisse ([14], IV<sub>4</sub>, 17.5.2).  $\square$

**COROLLAIRE 5.20.** — *Supposons  $S$  lisse sur un corps parfait  $k$ , soient  $q : X \rightarrow Z$  un morphisme étale de schémas affines, connexes et lisses sur  $S$  de dimension relative 1, une hypersurface  $W$  de  $Z$  dont la fibre  $W_\eta$  est un point rationnel sur  $N$  et telle que la fibre  $Y_\eta$  de  $Y := q^{-1}(W)$  est constituée d'un nombre fini de points rationnels sur  $N$ .*

- 1) *Soit  $(\star) : N \rightarrow N'$  une extension finie, alors quitte à remplacer  $S$  par un voisinage affine de  $\eta$  cette extension se prolonge en un morphisme fini  $S' \rightarrow S$  tel que  $S'$  est affine connexe, lisse sur  $k$  et de corps de fractions  $N'$ . Le changement de base fournit un diagramme  $(X' \rightarrow Z', W', Y')$  fini au-dessus de  $(X \rightarrow Z, W, Y)$  qui a les propriétés analogues avec  $N$  remplacer par  $N'$ . De plus si  $t$  est une équation réduite de  $W$  au voisinage de  $W_\eta$  son image est réduite et définit encore  $W'$  au voisinage de  $W'_\eta$ .*
- 2) *Soit  $t$  une équation réduite de  $W$  au voisinage de son point générique et  $(\star\star) : N((t)) \rightarrow N((t'))$  une extension finie séparable totalement ramifiée, alors quitte à remplacer  $S$  par un voisinage affine de  $\eta$  cette extension se prolonge en un morphisme fini  $Z' \rightarrow Z$  de schémas lisses sur  $S$  de dimension relative 1 tel que la fibre  $W'_\eta$  de l'image inverse ensembliste  $W'$  est un point rationnel sur  $N$ .*

*Le changement de base fournit un diagramme  $(X' \rightarrow Z', W', Y')$  fini au-dessus de  $(X \rightarrow Z, W, Y)$  qui a les propriétés analogues.*

*Démonstration.* — 1) Soit  $(\star) : N \rightarrow N'$  une extension finie, la première partie du théorème 5.19 ne fournit pas un tel prolongement dans cette situation, mais en vertu de (Bourbaki, Alg. comm. chap. V, §3, n°2, th. 2) le normalisé de  $S$  dans  $N'$  est un schéma  $S'$  de type fini sur  $k$ , fini sur  $S$ , intègre et de corps de fractions  $N'$  et quitte à prendre un voisinage plus petit on peut supposer que  $S'$  est lisse sur le corps parfait  $k$ . Par changement de base on obtient le diagramme cherché et la différentielle de l'image de  $t$  n'est pas nulle au point  $W'_\eta$ .

2) Soit  $(\star\star) : N((t)) \rightarrow N((t'))$  une extension finie séparable totalement ramifiée, la fibre générique  $Z_\eta$  est lisse sur  $N$  et  $W_\eta$  est un point rationnel sur  $N$ , en vertu de la proposition 5.18 quitte à remplacer  $Z_\eta$  par un voisinage de  $W_\eta$  cette extension se prolonge en un morphisme fini  $Z'_\eta \rightarrow Z_\eta$  de courbes lisses sur  $N$  et connexes tel que  $Z'_\eta$  n'a qu'un seul point  $W'_\eta$  rationnel sur  $N$  au-dessus de  $W_\eta$ . En vertu de la première partie du théorème 5.19 ce morphisme, quitte à localiser au voisinage de  $\eta$ , se prolonge en un morphisme fini  $Z' \rightarrow Z$  de schémas de type fini sur  $S$ . En vertu de la deuxième partie du théorème 5.19, quitte à localiser au voisinage de  $\eta$ , le schéma  $Z'$  est lisse sur  $S$  de dimension relative 1 et nécessairement connexe parce que sa fibre  $Z'_N$  est connexe. L'image ensembliste  $W'$  admet un point rationnel sur  $N$  au-dessus de  $W_\eta$ . l'image inverse de l'ouvert  $Z - W$  est étale. On obtient le diagramme cherché par le changement de base du morphisme  $Z' \rightarrow Z$ .  $\square$

## 5.6. Compatibilité des foncteurs image inverse et monodromies. —

5.6.1. *Foncteurs images inverses.* — Nous étudions les compatibilités qui s'introduisent entre le foncteur image inverse  $f_{\text{diff}}^*$  des Modules Spéciaux et le foncteur  $\text{Mon}_{\eta,t}$ . Nous rappelons que si  $f : X' \rightarrow X$  est un morphisme de schémas lisses sur  $k$  on dispose du foncteur image inverse pour toute extension des scalaires  $V \rightarrow S$  ([2], §10)

$$f_{\text{diff}}^* : \mathbf{D}^-(\text{Sp}(X_{\text{inf}}^\wedge/S)) \rightarrow \mathbf{D}^-(\text{Sp}(X'_{\text{inf}}^\wedge/S)).$$

Si les schémas  $X, X'$  se relèvent en schémas formels plats  $\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{X}'^\wedge$ , le module de transfert  $\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\wedge \rightarrow \mathcal{X}'^\wedge/V}^\dagger$  est bien défini et le foncteur image inverse coïncide avec le foncteur défini par ce module ([2], 10.25).

PROPOSITION 5.21. — *Supposons  $f$  fini et  $X, X'$  se relevant en  $\mathcal{X}^\wedge, \mathcal{X}'^\wedge$ , alors le morphisme canonique  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'^\wedge/V} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\wedge/V}} f^{-1}\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\wedge/V}^\dagger \rightarrow \mathcal{D}_{\mathcal{X}^\wedge \rightarrow \mathcal{X}'^\wedge/V}^\dagger$  est un isomorphisme de  $f^{-1}\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\wedge/V}^\dagger$ -modules à droite.*

*Démonstration.* — Le morphisme est injectif parce qu'il factorise l'injection  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}'^\wedge/V} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\wedge/V}} f^{-1}\mathcal{D}_{\mathcal{X}^\wedge/V}^\dagger \rightarrow \text{Hom}_V(f^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\wedge/V}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}'^\wedge/V})$ . Pour montrer qu'il est surjectif, la question est locale sur  $X$ . On peut supposer que  $X$  est affine muni de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  définissant les opérateurs différentiels  $\Delta_x^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^n$  au-dessus de  $\mathcal{X}$ . Soit  $v : A \rightarrow A'$  un relèvement de  $f$  en un  $V$ -morphisme d'algèbres complètes et plates qui fait de  $A'$  un  $A$ -module de type fini engendré par des relèvements  $(e_1, \dots, e_m)$  des générateurs modulo  $\mathfrak{m}$ . Les sections globales du module de transfert sont des séries  $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha v \circ \Delta_x^\alpha$  où  $a_\alpha$  est une suite d'éléments de  $A'$  telle que la valuation  $\mathfrak{m}$ -adique de  $a_\alpha$  est minorée par  $\lambda(\alpha_1 + \dots + \alpha_n), \lambda > 0$  [21]. Le théorème de continuité de la division par des sous-modules ([21], 2.3.2) montre que le module des sections globales est engendré par les  $e_i$  comme  $D_{A/V}^\dagger$ -module à droite.  $\square$

Cela implique, si  $f$  est fini, que l'image inverse de  $\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/V}$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{O}_{X'_{\text{inf}}^\wedge, Y'^\dagger/V}, Y' := f^{-1}(Y)$ , et le foncteur  $f_{\text{diff}}^*$  se restreint en un foncteur exact de catégorie abéliennes

$$f_{\text{diff}}^* : \text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/S}) \rightarrow \text{MLS}(\mathcal{O}_{X'_{\text{inf}}^\wedge, Y'^\dagger/S}).$$

Par ailleurs le foncteur image inverse est compatible avec le foncteur entre la catégorie des modules lisses sur le site  $U_{\text{inf}}^\dagger, U = X - Y$  aux modules de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^\wedge, Y^\dagger/S})$ .

5.6.2. *Cas d'un changement de base* ( $\star$ ). — Si  $(S, \eta, N, Z, W)$  est la situation du corollaire 5.20, notons encore pour simplifier  $\eta$  le point générique de  $W$  au-dessus du point générique de  $S$ . Soient  $(S', \eta', N', Z', W')$  la situation obtenue par changement de base fini  $N \rightarrow N'$  et  $t$  est une équation lisse sur  $k$  de  $W$  dans un voisinage de  $\eta$ , quitte à diminuer  $Z$  on peut supposer que l'image inverse  $t'$  de  $t$  définit  $W'$  et les faisceaux  $\mathcal{E}_{W_{\text{inf},t}}^\dagger$  et  $\mathcal{E}_{W'_{\text{inf},t'}}^\dagger$  sont bien définis.

Soient  $C \rightarrow C'$  un morphisme de  $V$ -algèbres plates et complètes qui relève le morphisme  $Z' \rightarrow Z, T$  un relèvement de  $t$  et  $T'$  sont image, alors le morphisme  $C/T \rightarrow C'/T'$  induit un morphisme  $\mathcal{E}_{W_{\text{inf},t}}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{W'_{\text{inf},t'}}^\dagger$  qui se prolonge en un morphisme de faisceaux  $\mathcal{R}_{W_{\text{inf},t}} \rightarrow \mathcal{R}_{W'_{\text{inf},t'}}$  puis en un morphisme d'anneaux  $\mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}} \rightarrow \mathcal{R}_{E_{\eta',t',t'}}$ . Notons  $f_{\text{loc}}^*$  le foncteur image inverse  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}}) \rightarrow \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta',t',t'}}$ . Si  $(X, Y)$  est un couple au-dessus de  $(Z, W)$  comme dans le corollaire 5.20 et  $(X', Y')$  le couple obtenu par changement de base, on voit que  $f_{\text{loc}}^*(\text{Mon}_{\eta,t}(\mathcal{M}_{X,Y^\dagger}^\wedge))$  est canoniquement isomorphe à  $\text{Mon}_{\eta',t'}(f_{\text{diff}}^*(\mathcal{M}_{X',Y'^\dagger}^\wedge))$  pour le point générique  $\eta'$  de  $Y'$  au-dessus du point générique  $\eta$  de  $Y$ .

5.6.3. *Cas d'un changement de base* ( $\star\star$ ). — Le cas d'un changement de base ( $\star\star$ ) est plus délicat. Soient  $t$  une équation de  $W$  et  $(Z', W')$  la couple obtenu dans le corollaire 5.20 après extension totalement ramifiée  $N((t)) \rightarrow N((t'))$  d'indice de ramification  $e \geq 1$ . Quitte à changer d'uniformisante  $t'$  on peut supposer que  $t'$  définit  $W'$  au voisinage de  $\eta'$ . Quitte à prendre un ouvert  $Z$  plus petit on peut supposer que l'image de  $t$  par le morphisme  $C_1 \rightarrow C'_1$  associé à  $Z' \rightarrow Z$  est  $\bar{u}t'^e$  où  $\bar{u}$  est un élément inversible de  $C'_1$ . Soit  $(C, T)$ , resp.  $(C', T')$  un relèvement de  $(C_1, t)$ , resp. de  $(C'_1, T')$  et  $f^* : C \rightarrow C'$  un relèvement de  $Z' \rightarrow Z$ , d'où un morphisme  $C_T \rightarrow C'_{T'}$ .

Soit le morphisme

$$f_{\text{loc}}^* : \mathcal{E}_{C_{KT},T}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{C'_{KT'},T'}^\dagger$$

qui à  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$  associe  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a'_n \text{Rest}(C'_{KT'}[1/T'])^\dagger(f^*(T)^n)$  où  $a'_n$  est l'image de  $a_n$  par  $C_{KT} \rightarrow C'_{KT'}$

PROPOSITION 5.22. — *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{CD}
 (C_K[1/T])^\dagger @>f^*>> (C'_K[1/T'])^\dagger \\
 @V{Rest_{(C_K[1/T])^\dagger}}VV @VV{Rest_{(C'_K[1/T'])^\dagger}}V \\
 \mathcal{E}_{C_{KT},T}^\dagger @>f_{loc}^*>> \mathcal{E}_{C'_{KT'},T'}^\dagger
 \end{CD}$$

*Démonstration.* — En effet le morphisme de la ligne du bas se factorise par  $\mathcal{E}_{C_{KT},T}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{C_{KT},T}^\dagger \otimes_{(C_K[1/T])^\dagger} (C'_K[1/T'])^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{C'_{KT'},T'}^\dagger$  où le deuxième morphisme est celui du produit dans l'algèbre  $\mathcal{E}_{C_{KT'},T'}^\dagger$ . □

Soit  $u$  un relèvement de l'unité  $\bar{u}$ , on définit  $\mathcal{E}_{C_{KT},T}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{C'_{KT'},T'}^\dagger$  un morphisme d'algèbres par :

$$f_{loc,u}^* \left( \sum_n a_n T^n \right) := \sum_n a'_n (Rest_{C'_K, T'}(u) T'^e)^n,$$

qui dépend de  $u$  et ne coïncide pas avec  $f_{loc}^*$ . Par passage à la limite on obtient deux foncteurs  $f_{loc}^*, f_{loc,u}^* : \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}}) \rightarrow \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta',t',t'}})$ .

PROPOSITION 5.23. — *Si  $\mathcal{M}$  est un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta,t,t}})$  le choix d'une base définit un isomorphisme entre  $f_{loc}^*(\mathcal{M})$  et  $f_{loc,u}^*(\mathcal{M})$  dans la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta',t',t'}})$ .*

*Démonstration.* — Posons pour simplifier  $g_1 := f_{loc}^*, g_2 := f_{loc,u}^*$  et soient  $G_n, G := G_1$  les matrices des opérateurs  $\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n}$  dans une base de  $\mathcal{M}$ , ces matrices sont à coefficients dans l'anneau des séries de Laurent en la variable  $t$  à coefficients dans le corps  $p$ -adique  $E_{\eta,t}$  qui convergent dans un domaine  $]1-\epsilon, 1[$ . La résolvante

$$Y_G(x, t) := \sum_{n \geq 0} G_n(t)(x - t)^n$$

est définie dans un domaine  $|x| \in ]1-\epsilon[, |t| \in ]1-\epsilon[, |x-t| < \text{Ray}(\mathcal{M}, |t|)$  est une série de Laurent en les variables  $(x, t, t^{-1})$  à coefficients dans  $E_{\eta,t}$ . La résolvante a les trois propriétés formelles suivantes : 1) elle est inversible et son inverse est la série  $Y_G(t, x)$ , 2)  $\frac{d}{dt} Y_G(x, t) = -Y_G(x, t)G(t)$ , 3)  $\frac{d}{dx} Y_G(x, t) = G(x)Y_G(x, t)$ . Maintenant si on pose

$$H(g_2, g_1) := - \sum_{n \geq 0} g_1(G_n)(g_2(t) - g_1(t))^n$$

on trouve que  $H(g_2, g_1)$  est une matrice inversible à coefficients dans  $\mathcal{R}_{E_{\eta',t',t'}}$  parce que  $g_2(t) - g_1(t)$  est un élément de  $\mathcal{E}_{E_{\eta',t',t'}}^\dagger$  de norme strictement plus



petite que 1 et  $f^*(\mathcal{M})$  est soluble. De plus elle est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}H(g_2, g_1) + \frac{d}{dt}(g_2(t))g_2(G)H(g_2, g_1) - H(g_2, g_1)\frac{d}{dt}(g_1(t))g_1(G) = 0$$

et réalise un isomorphisme horizontal entre  $f_{loc}^*(\mathcal{M})$  et  $f_{loc,u}^*(\mathcal{M})$ . □

COROLLAIRE 5.24. — *Dans le cas d'un changement de base de type  $(\star\star)$ , le foncteur  $f_{loc,u}^*$  est indépendant à isomorphisme près du relèvement  $u$  et définit un foncteur pour un point générique  $\eta$  de  $Y$  d'image inverse  $\eta'$ , tel que le diagramme suivant est commutatif à isomorphisme près, :*

$$\begin{array}{ccc} \text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^{\wedge}, Y^{\dagger}/K}) & \xrightarrow{f_{\text{diff}}^*} & \text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^{\wedge}, Y'^{\dagger}/K}) \\ \text{Mon}_{t,\eta} \downarrow & & \downarrow \text{Mon}_{t',\eta'} \\ \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{t,\eta},t}) & \xrightarrow{f_{loc,u}^*} & \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{t',\eta'},t'}) \end{array}$$

Démonstration. — Cela résulte des compatibilités précédentes. □

**5.7. Démonstration du théorème 5.14.** — Soit  $X$  un voisinage affine d'un point générique  $\eta$  d'une hypersurface  $Y$ , comme  $k$  est supposé parfait quitte à diminuer  $X$  il existe, en vertu du critère jacobien, des coordonnées au-dessus de  $X$   $(t, y) = (t, y_1, \dots, y_n), n \geq 0$  telles que  $Y$  est définie par l'équation  $t : X \rightarrow \text{Spec } k[t]$  et le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } k[t, y]$  défini par  $(t, y)$  est étale. Soit  $k[t, y] \rightarrow \text{Spec } k[y]$  la projection sur l'axe des paramètres  $y$ , notons  $Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow S$  le diagramme obtenu. Le corps résiduel  $\kappa(\eta)$  du point  $\eta$  est une extension finie **séparable** du corps  $k(y)$  ainsi qu'un corps de décomposition  $N'$  du polynôme minimal d'un élément primitif de  $\kappa(\eta)$ . Le corps  $N'$  se relève en une extension finie non ramifiée  $E'$  de  $E_{K,y}$  contenue dans une clôture algébrique de  $E_{K,y}$  et  $E'$  est un corps  $p$ -adique qui a la propriété (w). Effectuons le changement de base de type  $(\star) : k(y) \rightarrow N'$ , le corollaire 5.20 fournit un diagramme  $Y' \rightarrow X' \rightarrow Z' \rightarrow S'$  tel que les points génériques de  $W', Y'$  au-dessus de  $\eta' := \text{Spec } N'$  sont rationnels sur  $N'$  et  $E'$  est isomorphe à  $E_{\eta',t'}$ . Si  $\mathcal{M}_{X,Y}^{\dagger}$  est un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{O}_{X_{\text{inf}}^{\wedge}, Y^{\dagger}/K})$ , sa monodromie  $\text{Mon}_{\eta,t}(\mathcal{M}_{X,Y}^{\dagger})$  est un module de la catégorie  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta,t},t})$  et a par hypothèse du théorème 5.14 les propriétés (DNL), (NLE) ainsi que son image  $\mathcal{M}_{\eta',t'}$  dans  $\text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{\eta',t'},t'})$ . Si  $\mathcal{M}_{X',Y'}^{\dagger}$  est l'image inverse de  $\mathcal{M}_{X,Y}^{\dagger}$  par le morphisme  $X' \rightarrow X$ , en chaque point générique  $\eta'$  de  $Y'$  la monodromie  $\text{Mon}_{\eta',t'}(\mathcal{M}_{X',Y'}^{\dagger})$  est canoniquement isomorphe comme module à connexion à  $\mathcal{M}_{\eta',t'}$ . En vertu du théorème 4.16 il existe une extension  $f_{loc} : \mathcal{E}_{E_{\eta',t'},t'}^{\dagger} \rightarrow \mathcal{E}_{E',t'}^{\dagger}$  permise finie  $f_{loc,i}, \dots, f_{loc,1}$  telle que l'image inverse  $f_{loc}^*(\mathcal{M}_{\eta',t'})$  est isomorphe à une somme directe de modules qui sont le produit tensoriel d'un module de pente nulle et d'exposant provenant d'un résidu déterminantiel par un module unipotent. En

vertu du corollaire 5.20 chaque extension  $f_{loc,i}$  se prolonge en un morphisme fini  $f_i : (X_i, Y_i) \rightarrow (X_{i-1}, Y_{i-1}), (X_0, Y_0) := (X', Y')$  de schémas affines lisses sur  $k$  quitte à se restreindre au départ à un voisinage de  $\eta$ . En vertu de la commutativité à isomorphisme près des foncteur  $f_{diff}^*$  et  $f_{loc}^*$ , par construction si on désigne par  $\mathcal{M}_i$  l'image inverse de  $\mathcal{M}_{X',Y'}$  sur  $X_i$ , sa monodromie en chaque point générique de  $Y_i$  est isomorphe à  $f_{loc,i}^* \circ \dots \circ f_{loc,1}^*(\mathcal{M}_{\eta',t'})$ .

Mais les modules de monodromie sont définis sur des corps de Cohen qui sont non ramifiés sur  $K$  alors que les extensions finies des scalaires peuvent être arbitrairement ramifiées sur  $K$ . Il nous reste à examiner cette dernière compatibilité. Soit  $E \rightarrow E'$  une  $E_{K,y}$ -extension finie de  $E_{K,y}$ -extensions finies contenus dans une clôture algébrique  $\overline{E}_{K,y}$ , qui peut-être ramifiée dont l'extension résiduelle  $k_E \rightarrow k_{E'}$  n'a aucune raison d'être séparable mais en vertu du corollaire 5.20 se descent en une extension finie  $B_1 \rightarrow B'_1$  de  $k$ -algèbres lisses intègres qui se relève en un morphisme finie  $B \rightarrow B'$  de  $V$ -algèbres complètes topologiquement de type fini et formellement lisses induisant une extension finie  $E_B \rightarrow E_{B'}$  de  $K$ -corps de Cohen géométriques dont l'extension résiduelle coïncident avec l'extention résiduelle  $k_E \rightarrow k_{E'}$ . L'anneau des entier du corps  $E_B$  est formellement lisse sur  $V$  et l'anneau des entiers  $\mathcal{O}_E$  est un anneau local noethérien complet, en vertu du théorème des relèvements ([14], IV<sub>1</sub>, 0, 19.8.2) il existe un morphisme non canonique de corps  $E_B \rightarrow E$  qui est une extension finie totalement ramifiée et un morphisme non canonique de corps  $E_{B'} \rightarrow E'$  qui est une extension finie totalement ramifiée. D'où un diagrammes d'extensions

$$\begin{array}{ccc} E_B & \longrightarrow & E_{B'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ E & \longrightarrow & E' \end{array}$$

qui n'a aucune raison d'être commutatif mais dont le diagramme des extensions résiduelles est commutatif. La méthode précédente de la résolvante montre que le diagramme induit des foncteurs images inverses

$$\begin{array}{ccc} \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_B,t}) & \longrightarrow & \text{MLS}(\mathcal{R}_{E_{B'},t}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{MLS}(\mathcal{R}_{E,t}) & \longrightarrow & \text{MLS}(\mathcal{R}_{E',t}) \end{array}$$

est commutatif à isomorphisme près, ce qui montre la compatibilité des foncteurs  $f_{diff}^*, f_{loc}^*$  à isomorphisme près, dans le cas d'un changement de base de type  $(\star)$ . Le même raisonnement montre la compatibilité de la monodromie à isomorphisme près avec le changement de base de type  $(\star\star)$ . Quitte à diminuer  $X$  il existe un morphisme fini  $f : X' \rightarrow X$  tel que  $f_{diff}^*(\mathcal{M}_{X,Y}^\wedge)$  a les propriétés du théorème 5.14. □

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. ANDRÉ – « Filtrations de Hasse-Arf et monodromie  $p$ -adique », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 285–317.
- [2] A. ARABIA & Z. MEBKHOUT – « Sur le topos infinitésimal  $p$ -adique d'un schéma lisse I », *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **60** (2010), p. 1905–2094.
- [3] B. CHIARELLOTTO & G. CHRISTOL – « Overconvergent isocrystals and F-isocrystals », *Comp. Math.* **100** (1996), p. 77–99.
- [4] G. CHRISTOL – *Modules différentielles et équations différentielles  $p$ -adiques*, Queen's Paper in Pure and Applied Math., no. 66, Kingston, 1983.
- [5] ———, « Fonctions et éléments algébriques », *Pacific J. of Math.* **125** (1986), p. 1–37.
- [6] ———, « About a Tsuzuki theorem », *Lecture Notes in Pure and Applied Math.*, no. 222, ch.  $p$ -adic functional analysis, p. 63–74, Marcel Dekker, 2001.
- [7] G. CHRISTOL & B. DWORK – « Modules différentiels sur les couronnes », *Ann. Inst. Fourier* **44** (1994), p. 663–701.
- [8] G. CHRISTOL & Z. MEBKHOUT – « Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques I », *Ann. Inst. Fourier* **43** (1993), p. 1545–1574.
- [9] ———, « Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques II », *Annals of Math.* **146** (1997), p. 345–410.
- [10] ———, « Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques III », *Annals of Math.* **151** (2000), p. 385–457.
- [11] ———, « Sur le théorème de l'indice des équations différentielles  $p$ -adiques IV », *Invent. Math.* **143** (2001), p. 629–672.
- [12] B. DWORK – « On exponents of  $p$ -adic differential modules », *J. Reine Angew. Math.* **484** (1997), p. 85–126.
- [13] B. DWORK & P. ROBBA – « On ordinary linear  $p$ -adic differential equations », *Trans. A.M.S* **231** (1977), p. 1–46.
- [14] A. GROTHENDIECK & J. DIEUDONNÉ – « Éléments de géométrie algébrique », *Publ. IHES*, I 4 (1960), II 8 (1961), IV<sub>1</sub> 20 (1964), IV<sub>2</sub> 24 (1965), IV<sub>3</sub> 28 (1966), IV<sub>4</sub> 32 (1967).
- [15] N. KATZ – « Local-to-global extensions of representations of fundamental groups », *Ann. de l'Institut Fourier* **36** (1986), p. 69–106.
- [16] K. S. KEDLAYA – « A  $p$ -adic local monodromy theorem », *Ann. of Math.* **106** (2004), p. 93–184.
- [17] S. MATSUDA – « Local indices of  $p$ -adic differential equations corresponding to Artin-Schreier-Witt coverings », *Duke Math.* **143** (2001), p. 629–672.
- [18] Z. MEBKHOUT – « Analogie  $p$ -adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie  $p$ -adique », *Invent. Math.* **148** (2002), p. 319–351.

- [19] ———, « Structures de Frobenius et exposants de la monodromie  $p$ -adique des équations différentielles », *Contemp. Math.* **474** (2008), p. 175–243.
- [20] ———, « Constructibilité de de Rham  $p$ -adique », *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **351** (2013), p. 617–621.
- [21] Z. MEBKHOUT & L. NARVAEZ – « Le théorème du symbole total d'un opérateur différentiel  $p$ -adique », *Rev. Mat. Iberoam.* **26** (2010), p. 825–859.
- [22] D. MEREDITH – « Weak formal schemes », *Nagoya Math. J.* **45** (1972), p. 1–38.
- [23] P. MONSKY & G. WASHNITZER – « Formal cohomology I », *Annals of Math.* **88** (1968), p. 181–217.
- [24] P. ROBBA – « Indice d'un opérateur différentiel  $p$ -adique IV. Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque », *Ann. Inst. Fourier* **35** (1985), p. 13–55.
- [25] H. L. TURRITTIN – « Convergent solutions of ordinary homogeneous differential equations in the neighborhood of irregular singular point », *Acta Math.* **93** (1955), p. 27–66.

## MARKOVIAN EXPLORATIONS OF RANDOM PLANAR MAPS ARE ROUNDISH

BY NICOLAS CURIEN & CYRIL MARZOUK

---

ABSTRACT. — Infinite discrete stable Boltzmann maps are “heavy-tailed” generalisations of the well-known uniform infinite planar quadrangulation. Very efficient tools to study these objects are Markovian step-by-step explorations of the graph called peeling processes. Such a process depends on an algorithm that at each step selects the next edge where the exploration continues. We prove here that, whatever the algorithm, a peeling process always reveals about the same portion of the map, thus growing roughly like metric balls. Applied to well-designed algorithms, this enables us to easily compare distances in the map and in its dual, as well as to control the so-called pioneer points of the simple random walk, both on the map and on its dual.

RÉSUMÉ (*Sur les explorations markoviennes des cartes planaires aléatoires*). — Les cartes de Boltzmann infinies stables sont des généralisations à queue lourde de la quadrangulation et triangulation infinies uniformes du plan. L’un des outils pour l’étude de ces objets est le *processus d’épluchage* qui est une méthode d’exploration pas-à-pas de ces graphes aléatoires. Ces explorations dépendent d’un algorithme qui sélectionne au fur et à mesure les arêtes à éplucher. Nous montrons ici, qu’indépendamment de l’algorithme, le processus révèle peu ou prou la même portion de la carte aléatoire. Cela permet en particulier de contrôler les distances duales et primales dans la carte, de même que les points pionniers de la marche aléatoire.

---

*Texte reçu le 5 juin 2019, modifié le 9 avril 2020, accepté le 10 juin 2020.*

NICOLAS CURIEN, Département de Mathématiques, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay and IUF • *E-mail* : [nicolas.curien@gmail.com](mailto:nicolas.curien@gmail.com)

CYRIL MARZOUK, Centre de Mathématiques Appliquées, École polytechnique, France • *E-mail* : [cyril.marzouk@polytechnique.edu](mailto:cyril.marzouk@polytechnique.edu)

Mathematical subject classification (2010). — 05C80, 60J05, 60E07.

Key words and phrases. — Random planar maps, Exploration process, Stable processes.

## 1. Introduction

*The peeling process.* Since the introduction of the UIPT (uniform infinite planar triangulation) by Angel and Schramm [3], the study of the large-scale properties of infinite planar maps has been an intensive field of research. One of the main tools to study these random graphs is the so-called *peeling process*, which is a Markovian way to explore these random discrete surfaces step by step and connects them with random walks. It has been used fruitfully in the case of the UIPT (or its quadrangular cousin, the UIPQ) to study, e.g. its geometry [1, 16], the behaviour of the simple random walk [4], its conformal structure [14] or fine properties of percolation [1, 2]. The idea of Markovian exploration of random triangulations can be traced back to Watabiki in the physics literature, and it was first formalised by Angel [1]. Later, Budd [9] introduced a different and more robust version of it, which we will use below.

The main advantage of the peeling process is the flexibility with the choice of the exploration, which depends on an *algorithm*; the results cited above were obtained using different peeling algorithms. However, certain properties of the peeling process are universal in the sense that they do not depend upon the algorithm, for example the law of the underlying random walk driving the perimeter process or the fact that any peeling process eventually discovers the complete underlying lattice [16, Corollary 6]. In this work we will show, in a rather strong sense, that all Markovian explorations of the UIPT/UIPQ are bound to discover roughly the same portion of the map at time  $n$ . In fact, our result applies more generally to infinite (bipartite) “discrete stable” Boltzmann maps, whose definition we now recall.

*The infinite Boltzmann map and the filled-in peeling process.* As usual, all planar maps in this work are rooted, i.e. equipped with a distinguished oriented edge, and as it is customary, we will only consider *bipartite* planar maps (all faces have an even degree). Given a non-zero sequence  $\mathbf{q} = (q_k)_{k \geq 1}$  of non-negative numbers we define the Boltzmann measure  $w$  on the set of all bipartite planar maps by the formula

$$w(\mathbf{m}) := \prod_{f \in \text{Faces}(\mathbf{m})} q_{\deg(f)/2}.$$

We shall assume that  $\mathbf{q}$  is a *critical weight sequence of type*  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ . This means that the equation  $z = 1 + \sum_{i \geq 1} \binom{2i-1}{i-1} q_i z^i$  has a unique solution  $Z_{\mathbf{q}} > 1$  and that the probability measure

$$\mu(0) = Z_{\mathbf{q}}^{-1} \quad \text{and} \quad \mu(k) = Z_{\mathbf{q}}^{k-1} \binom{2k-1}{k-1} q_k.$$

has mean 1, and either it has finite variance in the case  $a = \frac{5}{2}$ , or it is in the strict domain of attraction of an  $(a - 1/2)$ -stable distribution, i.e.  $\mu([k, \infty)) \sim ck^{-a+1/2}$  for some constant  $c > 0$  as  $k \rightarrow \infty$ , see [10, 21, 8] and [20] for details. One can then define (using the assumption of criticality only) a random infinite

bipartite map  $\mathfrak{M}_\infty$  of the plane as the local weak limit of random maps sampled according to  $w(\cdot)$  and conditioned to be large, see [7, 24]. We will consider so-called *filled explorations* of  $\mathfrak{M}_\infty$ , which are sequences of dub-maps with one hole

$$\bar{e}_0 \subset \cdots \subset \bar{e}_n \subset \cdots \subset \mathfrak{M}_\infty,$$

obtained by starting with the root edge  $\bar{e}_0$  of  $\mathfrak{M}_\infty$  and iteratively *peeling* an edge on the boundary of  $\bar{e}_n$  at each step. If the peeling of an edge creates more than one hole, then we immediately fill in the finite part (recall that  $\mathfrak{M}_\infty$  is one-ended), see Section 2.1 and [15] for details. As recalled above, these explorations depend on an algorithm, hereafter denoted by  $\mathcal{A}$ , to choose the next edge to peel  $\mathcal{A}(\bar{e}_n)$  on the boundary of the explored part. This algorithm can be deterministic, or it may depend on another source of randomness, as long as it is independent of the unexplored region  $\mathfrak{M}_\infty \setminus \bar{e}_n$ , and we denote by  $(\bar{e}_n^{\mathcal{A}})_{n \geq 0}$  the filled-in peeling exploration of  $\mathfrak{M}_\infty$  to highlight the dependence on the algorithm  $\mathcal{A}$ .

The ball of radius  $r$  in  $\mathfrak{M}_\infty$ , denoted by  $\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, r)$ , is obtained by keeping the faces of  $\mathfrak{M}_\infty$  that have at least one vertex at graph distance smaller than  $r$  from the origin  $\rho$  of (the root edge of) the map; its hull  $\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)$  is obtained by filling in all the finite regions of the complement of  $\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, r)$  in  $\mathfrak{M}_\infty$ . Our main result is then the following, which explains the title:

**THEOREM 1.1.** — *Fix a critical weight sequence  $\mathbf{q}$  of type  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ . For any  $\varepsilon > 0$ , there exist  $0 < c_\varepsilon < C_\varepsilon < \infty$ , such that for any algorithm  $\mathcal{A}$ , we have for every  $n$  large enough*

$$\mathbb{P}\left(\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, c_\varepsilon n^{\frac{1}{2(a-1)}}) \subset \bar{e}_n^{\mathcal{A}} \subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, C_\varepsilon n^{\frac{1}{2(a-1)}})\right) \geq 1 - \varepsilon.$$

Our main result thus shows, in a sense, that Markovian explorations of  $\mathfrak{M}_\infty$  are bound to discover roughly the same region of  $\mathfrak{M}_\infty$  by time  $n$  with high probability. In particular, this implies that any Markovian exploration will eventually discover the full map, a fact already proved in [15, Corollary 27]. In the other direction, the paper [18] studies the decay of the (small) probability that a given edge remains exposed on the boundary of  $\bar{e}_n$  for large  $n$ 's.

**REMARK 1.2.** — There is little doubt that our results also hold in the case of non-bipartite maps, but we restrict to the case of bipartite maps for technical convenience. In the particular case of the UIPT (of type I), our geometric estimates on maps (Proposition 2.2) can be derived from [12], and Propositions 2.3 and 2.4 on maps with a boundary may be obtained using similar techniques, with [23].

Let us now derive corollaries of our main theorem by specifying it to well-chosen peeling algorithms.

*Dual graph distance.* There is an algorithm  $\mathcal{L}_{\text{dual}}$  that explores the hull of the balls for the *dual* metric on  $\mathfrak{M}_\infty$  (i.e. the graph distance on the dual graph  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$ ), whose details can be found in Section 3. Since faces of a map correspond

to vertices of its dual, in order to compare these two lattices, let us view  $\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, r)$  as the sub-set of vertices of  $\mathfrak{M}_\infty$ , which are incident to a face at dual graph distance from the root face (the one to the right of the root edge) less than  $r$ , then let  $\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, r)$  be the set of all these vertices to which we add all the finite regions of the complement.

When  $a \in (2, \frac{5}{2}]$ , the so-called “dilute phase”, balls in the dual graph grow polynomially in the radius [10]; combined with the above result, this yields the following rough comparison between primal and dual distances in  $\mathfrak{M}_\infty$ : the hull of the ball of radius  $r$  in  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$  is close to the hull of the ball of radius  $r^{1/(2a-4)}$  in  $\mathfrak{M}_\infty$ . For the so-called “dense phase”  $a \in (\frac{3}{2}, 2)$ , the balls in the dual graph grow exponentially in the radius [10], whilst in the intermediate regime  $a = 2$ , they have an “intermediate growth”, exponential in the square root of the radius [11], so now the hull of the dual ball of radius  $r$  is close to the hull of a primal ball with radius of order  $e^r$  when  $a < 2$  and  $e^{\sqrt{r}}$  for  $a = 2$ .

COROLLARY 1.3. — *Fix a critical weight sequence  $\mathbf{q}$  of type  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ ; there exists  $c_a > 0$ , such that the following holds: for every  $\varepsilon > 0$ , there exist  $0 < c_\varepsilon < C_\varepsilon < \infty$ , such that for every  $r$  large enough, we have*

$$\begin{aligned} \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, c_\varepsilon r^{\frac{1}{2a-4}}) &\subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, r) \subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, C_\varepsilon r^{\frac{1}{2a-4}}) \text{ when } a \in (2; 5/2], \\ \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, e^{\pi\sqrt{r/2}(1-\varepsilon)}) &\subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, r) \subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, e^{\pi\sqrt{r/2}(1+\varepsilon)}) \text{ when } a = 2, \\ \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, e^{c_a(1-\varepsilon)r}) &\subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, r) \subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, e^{c_a(1+\varepsilon)r}) \text{ when } a \in (3/2; 2), \end{aligned}$$

with a probability of at least  $1 - \varepsilon$ .

Observe that  $2a - 4 = 1$  when  $a = 5/2$ ; in the case of triangulations, it is known more precisely that the distances on the primal and dual are, in fact, asymptotically proportional [17].

*Pioneer points for the simple random walk.* In another direction, we study the behaviour of the simple random walk on  $\mathfrak{M}_\infty$  and  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$  using algorithms  $\mathcal{S}_{\text{primal}}$  and  $\mathcal{S}_{\text{dual}}$ , respectively, which both explore the map  $\mathfrak{M}_\infty$  along the corresponding walk. These algorithms enable us to keep track of the so-called *pioneer points* of the walk, which are roughly speaking steps performed by the walk, which lead to the discovery of a new vertex, which is not disconnected from infinity when removing the past trajectory (see Section 3.2 for details). Our theorem shows that the respective walk performs about

$$\begin{aligned} r^{2a-2} &\text{ pioneer steps within } \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r) \quad (\text{primal}), \\ g_a(r) &\text{ pioneer steps within } \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, r) \quad (\text{dual}), \end{aligned}$$

with high probability, where  $g_a(r) = r^{\frac{a-1}{a-2}} \mathbf{1}_{\{a>2\}} + e^{\sqrt{r}} \mathbf{1}_{\{a=2\}} + e^r \mathbf{1}_{\{a<2\}}$ . We refer to Corollaries 3.1 and 3.2 for more precise statements.



For the walk on the primal map  $\mathfrak{M}_\infty$ , we are able to replace the hull  $\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)$  by the ball itself, which, in the dilute regime  $a > 2$ , establishes a *sub-diffusivity* phenomenon in the sense that with high probability, the  $n$ -th step of the walk is at a distance of at most  $n^{1/(2a-2)}$  from its starting point. This idea to use the pioneer points to derive a dub-diffusive behaviour was exploited in [4] on the UIPQ and, in some sense, considers the worst case, where each step of the random walk is a pioneer point. It is likely that this is far from what really occurs and controlling this would improve the exponent (see [18] for an argument based on reversibility, which improves the exponent in the case of the UIPT/Q) a tiny bit. Let us mention that in a forthcoming paper [19], we use a completely different method to prove that the walk on the primal map is actually always sub-diffusive with an exponent of at most  $1/3$ , for all  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ .

One could apply our main result to many other peeling algorithms, such as uniform peeling (or metric exploration for the Eden model), peeling along percolation interfaces or peeling associated with internal DLA. We refrain from doing so to keep the paper short.

Throughout this work, for two positive random processes  $(X_n)_{n \geq 0}$  and  $(Y_n)_{n \geq 0}$ , we write  $X_n \lesssim Y_n$ , and  $X_n \gtrsim Y_n$ , when

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n > CY_n) = 0, \quad \text{resp.} \quad \lim_{C \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < C^{-1}Y_n) = 0.$$

We also write  $X_n \approx Y_n$ , when both  $X_n \lesssim Y_n$  and  $X_n \gtrsim Y_n$  hold. This notion of comparison is different from the one used in [4], where these symbols have the following different meaning: there,  $X_n \lesssim Y_n$  means that there exists  $\kappa > 0$ , such that  $X_n/(Y_n \log^\kappa n)$  converges almost surely to 0. This notion is neither weaker nor stronger than the present one (it is a trade-off between a strong convergence and logarithmic factors instead of constants). We believe that all our results also hold in this sense, but our current estimates do not imply it.

*Acknowledgments.* — We acknowledge support from the Fondation Mathématique Jacques Hadamard. This project has also received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme, grant agreement No. ERC-2016-STG 716083 “CombiTop” (C.M. is thankful to Guillaume Chapuy for having benefited from this grant) and ERC Advanced Grant 740943 “GeoBrown”. Finally, we thank the two anonymous referees for their comments.

## 2. The peeling process and geometric estimates

In this section, we briefly recall the filled-in peeling process of  $\mathfrak{M}_\infty$  and refer the reader to [15] for details. We also gather the geometric estimates needed for the proof of our main result, which is then rather short and simple. The proofs of these estimates, which are based on constructions with labelled trees, are postponed to Section 4.4.

**2.1. The filled-in peeling process.** — Given an instance of  $\mathfrak{M}_\infty$ , a filled-in peeling process is a sequence of growing sub-maps  $\bar{\epsilon}_0 \subset \bar{\epsilon}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{M}_\infty$ , where  $\bar{\epsilon}_0$  is the root edge of  $\mathfrak{M}_\infty$ , and  $\bar{\epsilon}_{n+1}$  is obtained by the peeling of one edge on the boundary of  $\bar{\epsilon}_n$ . More precisely,  $\bar{\epsilon}_n$  is a planar (bipartite) map with a hole, i.e. a distinguished face whose boundary is simple. We say that  $\bar{\epsilon}_n$  is a sub-map of  $\mathfrak{M}_\infty$  in the sense that  $\mathfrak{M}_\infty$  can be recovered by gluing a proper map with (general) boundary inside the unique hole of  $\bar{\epsilon}_n$ . To pass on from  $\bar{\epsilon}_n$  to  $\bar{\epsilon}_{n+1}$  we first select an edge  $\mathcal{A}(\bar{\epsilon}_n)$  on the boundary of the hole of  $\bar{\epsilon}_n$ , where  $\mathcal{A}$  is our peeling algorithm, which may depend on another source of randomness as long as it is independent of  $\mathfrak{M}_\infty$ . Once  $\mathcal{A}(\bar{\epsilon}_n)$  is picked, we reveal its status inside the map  $\mathfrak{M}_\infty$ , two cases may appear, as illustrated in Figure 2.1:

- Either the peel edge is incident to a new face in  $\mathfrak{M}_\infty$  of degree  $2k$ , then  $\bar{\epsilon}_{n+1}$  is obtained from  $\bar{\epsilon}_n$  by gluing this face on the peel edge without performing any other identification. This event is called an event of type  $C_k$ .
- Or the peel edge is incident to another face of  $\bar{\epsilon}_n$  in the map  $\mathfrak{M}_\infty$ , in which case we perform the identification of the two boundary edges of  $\bar{\epsilon}_n$ . When doing so, the hole of  $\bar{\epsilon}_n$  of perimeter, say  $2p$ , is split into two holes of perimeter  $2p_1$  and  $2p_2$  with  $p_1 + p_2 = p - 1$ . Since

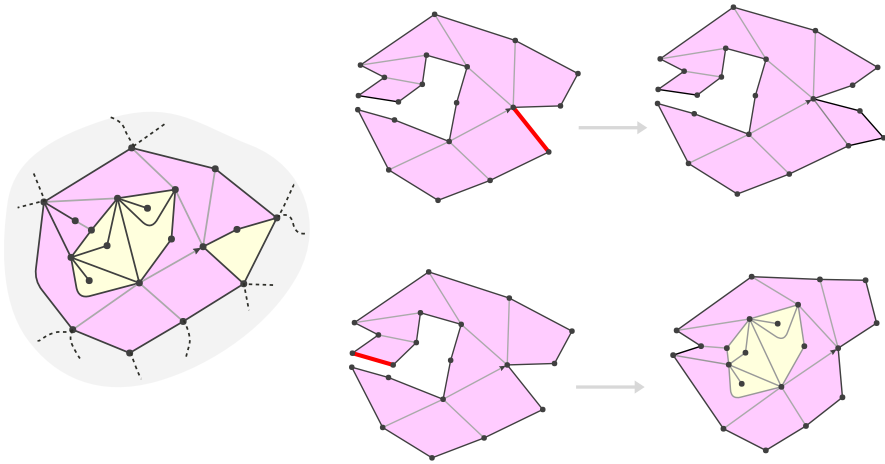


FIGURE 2.1. Illustration of the filled-in peeling process. In the left-most figure we have explored a certain region  $\bar{\epsilon}_n \subset \mathfrak{M}_\infty$  corresponding to the faces in pink glued by the edges in gray. Depending on the edge to peel at the next step, we may end up either with an event of type  $C_2$  (top figures) or an event of type  $G_{3,*}$  (bottom figures).

$\mathfrak{M}_\infty$  is almost surely one-ended, only one of these holes corresponds to an infinite region in  $\mathfrak{M}_\infty$ . We then fill in the finite hole with the corresponding map inside  $\mathfrak{M}_\infty$  to obtain  $\bar{\mathfrak{e}}_{n+1}$ . We speak of an event of type  $\mathbf{G}_{*,p_1}$  or  $\mathbf{G}_{p_2,*}$ , depending whether the finite hole is to the left or to the right of the peel edge.

During a filled-in peeling exploration  $(\bar{\mathfrak{e}}_n)_{n \geq 0}$  of  $\mathfrak{M}_\infty$  we denote by  $|\partial\bar{\mathfrak{e}}_n|$  the half-perimeter of the boundary of the unique hole of  $\bar{\mathfrak{e}}_n$  and by  $|\bar{\mathfrak{e}}_n|$  the number of inner vertices. The process  $(|\partial\bar{\mathfrak{e}}_n|, |\bar{\mathfrak{e}}_n|)_{n \geq 0}$  is a Markov chain whose law is independent of the peeling algorithm with explicit probability transitions [9]. In particular, we recall that  $(|\partial\bar{\mathfrak{e}}_n|)_{n \geq 0}$  is a Doob  $h$ -transform of a random walk with i.i.d. increments of law  $\nu$  for the function  $h^\uparrow(p) = 2p \cdot 2^{-2p} \binom{2p}{p}$  for  $p \geq 0$  and where  $\nu$  satisfies

$$\nu(-k) \sim \mathfrak{p}_q \cdot k^{-a} \quad \text{and} \quad \nu([k, \infty)) = \frac{\mathfrak{p}_q}{a-1} \cos(a\pi) k^{1-a},$$

where the constant  $\mathfrak{p}_q > 0$  depends on our weight sequence. Precise scaling limits for the process  $(|\partial\bar{\mathfrak{e}}_n|, |\bar{\mathfrak{e}}_n|)_{n \geq 0}$  are known ([10, Theorem 3.6] in the case  $a \neq 2^1$  and [11, Theorem 1] in the case  $a = 2$ ), and, in particular, it follows that

**PROPOSITION 2.1 (Peeling growth).** — *Let  $(\bar{\mathfrak{e}}_n)_{n \geq 0}$  be a filled-in peeling process of  $\mathfrak{M}_\infty$ . Then we have*

$$|\partial\bar{\mathfrak{e}}_n| \approx n^{\frac{1}{a-1}} \quad \text{and} \quad |\bar{\mathfrak{e}}_n| \approx n^{\frac{a-1/2}{a-1}}.$$

**2.2. Geometric estimates.** — We now recall state a few geometric estimates that we will use during the proof of our main result. Although some of them may be obtained using the peeling process, we find it more convenient to prove them using Schaeffer-type construction of  $\mathfrak{M}_\infty$  [7, 24]. We postpone the proof of these estimates to Section 4.4. Recall that  $|\mathfrak{m}|$  denotes the number of vertices of a map  $\mathfrak{m}$  and  $\rho$  is the origin vertex of  $\mathfrak{M}_\infty$ .

**PROPOSITION 2.2 (Volume growth and tentacles).** — *We have*

$$|\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, r)| \approx r^{2a-1}, \quad |\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)| \approx r^{2a-1}, \quad \text{and} \\ \max\{d_{\text{gr}}(\rho, u); u \in \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)\} \approx r.$$

This proposition will be deduced from the results of Le Gall and Miermont [21], who studied scaling limits of our finite Boltzmann maps conditioned to be large. The next estimates deal with *maps with a boundary*. For  $p \geq 1$ , we denote by  $\mathfrak{M}^{(p)}$  a  $\mathbf{q}$ -Boltzmann map with a (general) boundary of perimeter

---

1. The case  $a = 5/2$  is not considered there, but the arguments extend readily.

$2p$ , which is a random bipartite planar map, with a root face of degree  $2p$ , and whose law is given by

$$\mathbb{P}(\mathfrak{M}^{(p)} = \mathbf{m}) \propto \prod_{f \text{ inner face}} q_{\deg(f)/2}.$$

This law is important, since in a filled-in exploration, during an event of type  $\mathbb{G}_{p,*}$  or  $\mathbb{G}_{*,p}$ , the finite hole of perimeter  $2p$  is filled in with a copy of  $\mathfrak{M}^{(p)}$  independently of the past exploration. It can be shown that in the finite map  $\mathfrak{M}^{(p)}$  with boundary length  $2p$ , the volume grows like  $p^{2a-1}$ , whilst the diameter grows like  $p^{1/2}$ . The next result considers the volume growth of the balls in such a map with a boundary.

PROPOSITION 2.3. — *There exists  $c > 0$  and  $\lambda > 0$ , such that for all  $r$  large enough and all  $p \geq 2r^2$ , we have*

$$\mathbb{P}\left(|\text{Ball}(\mathfrak{M}^{(p)}, r)| > \lambda r^{2a-1}\right) > c.$$

We can also define  $\mathfrak{M}_\infty^{(p)}$  as the infinite  $\mathbf{q}$ -Boltzmann map with the boundary of perimeter  $2p$  as a local limit of finite maps conditioned to be large, see, e.g. [15]. If  $\mathbf{m}$  is a map with a boundary, we define the *aperture* of  $\mathbf{m}$  as

$$\text{aper}(\mathbf{m}) = \max\{d_{\text{gr}}(x, y) : x, y \text{ two vertices on the boundary of } \mathbf{m}\}.$$

PROPOSITION 2.4. — *We have*

$$\text{aper}(\mathfrak{M}_\infty^{(p)}) \approx p^{1/2}.$$

**2.3. Proof of the main result.** — We may now prove Theorem 1.1 relying on the preceding estimates and on properties of the peeling process. Fix any peeling process  $(\bar{\mathbf{e}}_n)_{n \geq 0}$  of  $\mathfrak{M}_\infty$ , and for every  $n \geq 0$ , let us denote by  $D_n^-$  and  $D_n^+$  the smallest and the largest distance *in the whole map* to the origin  $\rho$  of a vertex on the boundary  $\partial\bar{\mathbf{e}}_n$ . We stress that  $D_n^-$  is measurable with respect to  $\bar{\mathbf{e}}_n$ , and it equals the smallest distance *in the sub-map*  $\bar{\mathbf{e}}_n$  to the origin  $\rho$  of a vertex on  $\partial\bar{\mathbf{e}}_n$ , whereas  $D_n^+$  is not measurable with respect to  $\bar{\mathbf{e}}_n$  and is smaller than or equal to the largest distance in the sub-map  $\bar{\mathbf{e}}_n$  to the origin  $\rho$  of a vertex on  $\partial\bar{\mathbf{e}}_n$ . Clearly,

$$(1) \quad \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, D_n^- - 1) \subset \bar{\mathbf{e}}_n \subset \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, D_n^+ + 1).$$

Theorem 1.1 thus follows, if we prove that

$$D_n^- \gtrsim n^{\frac{1}{2(a-1)}} \quad \text{and} \quad D_n^+ \lesssim n^{\frac{1}{2(a-1)}}.$$

We shall prove these two bounds separately. The second bound  $D_n^+ \lesssim n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  is the easy one, it will follow from the same proof technique as that of [4], which is also recalled in [18, Proposition 3.1] and is primarily based on the aperture estimate of Proposition 2.4. The first bound  $D_n^- \gtrsim n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  will follow from more precise volume consideration. The main idea is that, if  $D_n^-$  is small, then

a lot of “large” peeling steps will accumulate too much volume near the origin of  $\mathfrak{M}_\infty$ .

*Upper bound*  $D_n^+ \lesssim n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  *via aperture.* We follow the same lines as [18, Proposition 3.1] in our more general context of infinite “discrete stable” maps of type  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ . Since  $|\bar{\epsilon}_n| \approx n^{\frac{a-1/2}{a-1}}$  by Proposition 2.1 and  $|\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)| \approx r^{2a-1}$  by Proposition 2.2, from (1) we deduce the first bounds

$$D_n^- \lesssim n^{\frac{1}{2(a-1)}} \quad \text{and} \quad D_n^+ \gtrsim n^{\frac{1}{2(a-1)}}.$$

Notice also the easy bound  $D_n^+ - D_n^- \leq \text{aper}(\mathfrak{M}_\infty \setminus \bar{\epsilon}_n)$ ; now recall that the *spatial Markov property* of the peeling exploration asserts that conditionally on  $|\partial\bar{\epsilon}_n|$ , the unexplored region  $\mathfrak{M}_\infty \setminus \bar{\epsilon}_n$  is independent of  $\bar{\epsilon}_n$  and has the law of  $\mathfrak{M}_\infty^{(p)}$  with  $p = |\partial\bar{\epsilon}_n|$ . Since  $|\partial\bar{\epsilon}_n| \approx n^{\frac{1}{a-1}}$  by Proposition 2.1, we conclude using Proposition 2.4 that

$$D_n^+ - D_n^- \lesssim |\partial\bar{\epsilon}_n|^{1/2} \approx n^{\frac{1}{2(a-1)}}.$$

Combined with the previous bound, we get  $D_n^+ \approx n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  as desired.

*Lower bound*  $D_n^- \gtrsim n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  *via accumulation of volume near the origin.* As announced, the lower bound will follow from volume consideration. More precisely, we shall consider  $|\text{Ball}(\bar{\epsilon}_n, 2r)|$  the number of vertices in the ball of radius  $2r$  in the sub-map  $\bar{\epsilon}_n$  centred at the origin  $\rho$  of the map  $\mathfrak{M}_\infty$  and study its variation  $\Delta|\text{Ball}(\bar{\epsilon}_n, 2r)| = |\text{Ball}(\bar{\epsilon}_{n+1}, 2r)| - |\text{Ball}(\bar{\epsilon}_n, 2r)|$ . Below we write  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  for the filtration generated by the peeling process, recalling that  $D_n^-$  and  $|\partial\bar{\epsilon}_n|$  are measurable with respect to  $\mathcal{F}_n$ .

LEMMA 2.5. — *There exist two constants  $K, \lambda > 0$ , such that for all  $r$  and  $n$  large enough, we have*

$$\mathbb{P}(\Delta|\text{Ball}(\bar{\epsilon}_n, 2r)| > \lambda r^{2a-1} \mid \mathcal{F}_n, D_n^- \leq r) \geq K \cdot |\partial\bar{\epsilon}_n|^{-(a-1)} \mathbf{1}_{|\partial\bar{\epsilon}_n| \geq 4r^2}.$$

*Proof.* — Let us condition on  $\mathcal{F}_n$  and on the events  $D_n^- \leq r$  and  $|\partial\bar{\epsilon}_n| \geq 4r^2$ . Suppose that in the next peeling step, we identify the peel edge with another one on the boundary, separating from infinity a part of the boundary containing (twice)  $-\Delta|\partial\bar{\epsilon}_n| - 1 \geq |\partial\bar{\epsilon}_n|/2$  edges. On such an event, by symmetry, there is a chance of at least  $1/2$  that the boundary swallowed in the finite part contains a vertex  $x_n^-$ , say, at distance  $D_n^- \leq r$  from the origin. Then we fill in this hole by inserting an independent finite Boltzmann map with half-perimeter  $-\Delta|\partial\bar{\epsilon}_n| - 1$ . Since such a map is invariant under re-rooting along the boundary, we may assume that its root vertex is matched with  $x_n^-$ . See Figure 2.2.

In this scenario,  $\Delta|\text{Ball}(\bar{\epsilon}_n, 2r)|$  is larger than or equal to the volume of the ball of radius  $r$  in the map with half-boundary  $-\Delta|\partial\bar{\epsilon}_n| - 1$  that we just added. According to Proposition 2.3, there exist  $c > 0$  and  $\lambda > 0$ , such that for any  $p \geq 2r^2$ , we have  $\mathbb{P}(|\text{Ball}(\mathfrak{M}^{(p)}, r)| > \lambda r^{2a-1}) > c$ , for all  $r$  large enough.

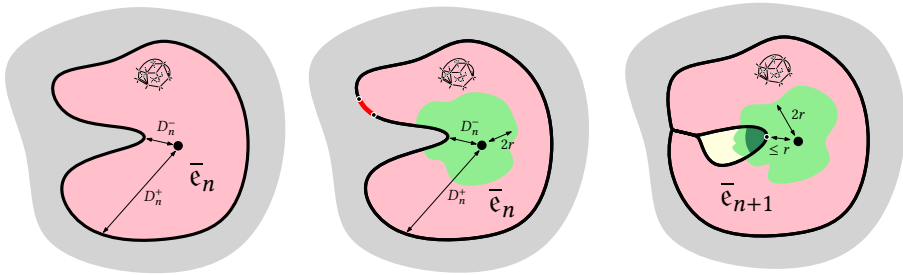


FIGURE 2.2. Illustration of the proof of Lemma 2.5. The edge to peel is the red edge. The green region is  $\text{Ball}(\bar{e}_n, 2r)$ . On the event where  $-\Delta|\partial\bar{e}_n| \geq |\partial\bar{e}_n|/2$ , there is a chance of at least  $1/2$  that the swallowed part of the boundary contains a point at minimal distance (inside  $\bar{e}_n$ ) from the origin. If  $D_n^- < r$ , then we add (at least!) to  $\text{Ball}(\bar{e}_{n+1}, 2r)$  the ball of radius  $r$  in the map filling in the hole centered at this point (in dark green in the figure above).

Therefore, for  $r$  large, as soon as  $|\partial\bar{e}_n| \geq 4r^2$ , on the event  $-\Delta|\partial\bar{e}_n| - 1 \geq |\partial\bar{e}_n|/2 \geq 2r^2$ , the ball of radius  $r$  in the map we add to fill in the hole has volume at least  $\lambda r^{2a-1}$  with probability at least  $c$ . By the exact transition probabilities of the Markov chain  $|\partial\bar{e}_n|$  and the facts that  $\nu(-k) \sim \rho_{\mathbf{q}}k^{-a}$  and  $h^\uparrow(p) \sim c'\sqrt{p}$  for some  $c' > 0$ , the probability that such a peeling step occurs is bounded below by

$$\mathbb{P}(\Delta|\partial\bar{e}_n| \leq -|\partial\bar{e}_n|/2 \mid \mathcal{F}_n) \geq \sum_{k=|\partial\bar{e}_n|/2}^{3|\partial\bar{e}_n|/4} \frac{h^\uparrow(|\partial\bar{e}_n| - k)}{h^\uparrow(|\partial\bar{e}_n|)} \nu(-k) \geq C \cdot |\partial\bar{e}_n|^{-(a-1)},$$

for some constant  $C > 0$ . Moreover, given that  $\Delta|\partial\bar{e}_n| - 1 \leq -|\partial\bar{e}_n|/2$ , the probability that a given vertex  $x_n^-$  at distance  $D_n^- \leq r$  from the origin sits on the part of the boundary separated from infinity is at least  $1/2$ . Gathering up the pieces we deduce as desired that

$$\mathbb{P}(\Delta|\text{Ball}(\bar{e}_n, 2r)| > \lambda r^{2a-1} \mid \mathcal{F}_n, D_n^- \leq r, |\partial\bar{e}_n| \geq 4r^2) \geq \frac{1}{2} \times c \times C \cdot |\partial\bar{e}_n|^{-(a-1)}$$

for  $r, n$  large enough. □

Let us come back to the proof of the lower bound  $D_n^- \gtrsim n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  in order to complete the proof of Theorem 1.1. Let us fix  $\varepsilon > 0$ ; we aim at showing that there exists  $\delta > 0$ , such that for all  $n$  large enough, we have  $\mathbb{P}(D_n^- \leq \delta n^{\frac{1}{2(a-1)}}) \leq \varepsilon$ . Fix  $A$  large (the value of  $A$  will be fixed in a few lines by  $\varepsilon$ ); we

will first choose  $\eta$  small enough so that

$$(2) \quad \mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n \frac{K}{|\partial \bar{\epsilon}_i|^{a-1}} \mathbf{1}_{|\partial \bar{\epsilon}_n| \geq \eta n^{1/(a-1)}} > A \right) \geq 1 - \varepsilon/4,$$

where  $K$  is the constant appearing in Lemma 2.5. This is indeed possible, since by [10, Theorem 3.6] in the case  $a \neq 2$  and [11, Theorem 1] in the case  $a = 2$ : for each  $\eta > 0$  the sum in the above display converges in distribution towards

$$\int_0^1 \frac{dt}{(\Upsilon_t^\uparrow)^{a-1}} \mathbf{1}_{\Upsilon_t^\uparrow > \eta},$$

where  $\Upsilon_t^\uparrow$  is an  $(a - 1)$ -stable Lévy process conditioned to stay positive (the details of this process can be found in the above references), for which we have  $\int_0^1 (\Upsilon_t^\uparrow)^{1-a} dt = \infty$  almost surely by an application of Jeulin’s lemma, see [15, Corollary 27]. We now apply Lemma 2.5 with  $r \equiv r_n = \delta n^{1/(2a-2)}$ , with  $\delta$  chosen small enough so that  $\eta \geq 4\delta^2$ ; for all  $n$  large enough it holds that

$$\mathbb{P} \left( \Delta |\text{Ball}(\bar{\epsilon}_i, 2r_n)| > \lambda r_n^{2a-1} \mid \mathcal{F}_n, D_i^- \leq r_n \right) \geq K \cdot |\partial \bar{\epsilon}_i|^{-(a-1)} \mathbf{1}_{|\partial \bar{\epsilon}_i| \geq \eta n^{\frac{1}{a-1}}},$$

for all  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Let us denote by  $X_{n,i}$  the indicator of the event in the conditional probability above. Notice that since  $D_i^-$  is non-decreasing, if  $D_n^- \leq r_n$ , then  $D_i^- \leq r_n$ , for all  $1 \leq i \leq n$ . By this remark, conditionally on  $D_n^- \leq r_n$  and on the event studied in (2), the variable  $\sum_{i=1}^n X_{n,i}$  is stochastically lower bounded by a sum of independent Bernoulli random variables  $Z_i$ , with success parameter  $0 < p_i < \eta^{a-1}/i$  and so that  $\sum_{i=1}^n p_i \geq A$ , for  $n$  large enough. An easy Chernoff bound then shows that

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n Z_i > \frac{A}{8} \right) \geq 1 - \varepsilon/4.$$

When this scenario occurs, the ball of radius  $2r_n$  in  $\mathfrak{M}_\infty$  contains a volume of at least  $A/8$  times  $\lambda r_n^{2a-1}$ , whence we deduce that

$$\mathbb{P} \left( |\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, 2r_n)| \geq \frac{A}{8} \lambda r_n^{2a-1} \right) \geq \mathbb{P} \left( D_n^- \leq \delta n^{1/(2(a-1))} \right) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Now, one can further assume that  $A$  was chosen large enough, so that  $\mathbb{P}(|\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, 2r)| \geq \frac{A}{8} \lambda r^{2a-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , for all  $r$  large enough by Proposition 2.2. This finally proves that  $\mathbb{P}(D_n^- \leq \delta n^{1/(2(a-1))}) \leq \varepsilon$ , as desired.  $\square$

### 3. Applications

Let us apply Theorem 1.1 to three peeling procedures especially designed to study the volume growth of the dual map, the behaviour of a simple random walk on  $\mathfrak{M}_\infty$  and the behaviour of a simple random walk on  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$ .

**3.1. Comparison with the dual map.** —

*Proof of Corollary 1.3.* — We apply Theorem 1.1 to the peeling  $\bar{c}_n$  with the algorithm  $\mathcal{L}_{\text{dual}}$  defined in [10, Section 2.3]. Very briefly, in this algorithm, we start with the root face of  $\mathfrak{M}_\infty$  (the one to the right of its root edge), and we first peel all the edges of this face to reveal the hull of the dual ball of radius 1. Then we iteratively peel all the edges that, *at this moment*, are on the boundary of the explored region to reveal the hull of the dual ball of radius 2, etc. Note that at every step  $n$ , the faces incident to the boundary are either at a dual distance  $H_n$  say, to the root face, or at dual distance  $H_n + 1$ . We deduce from Theorem 1.1 that for every  $\varepsilon > 0$ , there exist  $0 < c_\varepsilon < C_\varepsilon < \infty$ , such that for every  $n$  large enough, we have

$$(3) \quad \overline{\text{Ball}}\left(\mathfrak{M}_\infty, c_\varepsilon n^{\frac{1}{2(a-1)}}\right) \subset \overline{\text{Ball}}\left(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, H_n\right) \subset \overline{\text{Ball}}\left(\mathfrak{M}_\infty, C_\varepsilon n^{\frac{1}{2(a-1)}}\right),$$

with probability at least  $1 - \varepsilon$ . Now, depending on the value  $a \in (3/2; 5/2]$  we know the asymptotic behaviour of  $H_n$ : for  $a \in (2; 5/2]$ , by [10, Theorem 4.2], we have  $H_n \approx n^{\frac{a-2}{a-1}}$ , for  $a \in (3/2; 2)$ , combining [10, Theorem 5.3] and [10, Lemma 5.8], the ratio  $H_n/\log n$  converges in probability to some constant  $C_a > 0$ , and finally for  $a = 2$ , according to [11, Proposition 4], the ratio  $H_n/\log^2 n$  converges in probability to  $(2\pi^2)^{-1}$ . For some  $0 < c'_\varepsilon < C'_\varepsilon < \infty$ , we thus have with probability at least  $1 - \varepsilon$  when  $n$  is large enough,

$$\begin{aligned} c'_\varepsilon n^{\frac{a-2}{a-1}} &\leq H_n \leq C'_\varepsilon n^{\frac{a-2}{a-1}} && \text{when } a \in (2; 5/2], \\ (1 - \varepsilon)C_a \log n &\leq H_n \leq (1 + \varepsilon)C_a \log n && \text{when } a \in (3/2; 2), \\ \frac{1 - \varepsilon}{2\pi^2} \log^2 n &\leq H_n \leq \frac{1 + \varepsilon}{2\pi^2} \log^2 n && \text{when } a = 2. \end{aligned}$$

Corollary 1.3 then follows by combining these bounds with (3) and using monotonicity properties. □

**3.2. Pioneer points and sub-diffusivity.** —

*Walk on  $\mathfrak{M}_\infty$ .* — Let  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  be the simple random walk on  $\mathfrak{M}_\infty$  started from the origin  $\rho$ , which should be viewed as a sequence  $(\vec{E}_n)_{n \geq 0}$  of oriented edges, such that  $\vec{E}_0$  is the root edge, and for every  $n \geq 0$ , conditional on the edge  $\vec{E}_n$ , we choose one of the edges incident to the tip of  $\vec{E}_n$  uniformly at random; then  $\vec{E}_{n+1}$  is this new edge, oriented from the tip of  $\vec{E}_n$ . Then  $X_n$  is the origin of the edge  $\vec{E}_n$ . We say that  $\tau \geq 0$  is a *pioneer time*, if  $X_\tau$  lies on the boundary of the unique infinite component when we remove all the faces incident to one of the  $X_i$ 's for  $i < \tau$ ; then  $X_\tau$  is called a *pioneer point* (so  $X_0 = \rho$  is a pioneer point). For every  $n \geq 0$ , we let  $\mathcal{P}_n$  be the  $n$ -th pioneer point.



COROLLARY 3.1. — Fix a critical weight sequence  $\mathbf{q}$  of type  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ . We have

$$\sup_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}(\rho, \mathcal{P}_k) \approx n^{\frac{1}{2(a-1)}} \quad \text{and} \quad \sup_{0 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}(\rho, X_k) \lesssim n^{\frac{1}{2(a-1)}}.$$

*Proof of Corollary 3.1.* — We use the peeling algorithm  $\mathcal{S}_{\text{primal}}$  defined in [4, Section 1.4], which follows the walk  $X$ : if  $X_n$  is not a pioneer point, it lies in the interior of the sub-map that we have revealed so far, and we may directly move to  $X_{n+1}$ . If otherwise  $X_n$  is a pioneer point, then it lies on the boundary of the explored part, and we peel the edge on the boundary that lies immediately to the left of  $X_n$ . We continue to do so until  $X_n$  does not belong to the boundary of the explored part. The 1-neighborhood of  $X_n$  has then been completely explored, and we may perform a random walk step.

Let us denote by  $(\bar{\epsilon}_n)_{n \geq 0}$  the associated filled-in peeling process and write  $\theta_n$  for the number of pioneer points we encountered in the first  $n$  peeling steps. Since we only peel when the walk is at a pioneer point, we have  $\theta_n \leq n + 1$ . On the other hand, if  $X_n$  is on the boundary of the explored part of perimeter, say  $2p \geq 4$ , there is a probability of at least  $\nu(-1)h^\uparrow(p-1)/h^\uparrow(p)$  that  $X_n$  is swallowed by a peeling step of type  $\mathbb{G}_{*,0}$  and is no longer exposed on the boundary of the explored part. If  $p = 1$ , the point  $X_n$  can be swallowed in two peeling steps. Since  $\inf_{p \geq 2} \nu(-1)h^\uparrow(p-1)/h^\uparrow(p) > c > 0$ , we see that the time it takes to discover the neighbourhood of a given pioneer point is stochastically dominated by a geometric random variable. It easily follows that

$$\theta_n \approx n.$$

Using this and Theorem 1.1 it follows that the first  $n$  pioneers points of the walk, and a fortiori the first  $n$  steps of the walk, take place within  $\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, C_\epsilon n^{\frac{1}{2(a-1)}})$  with probability at least  $1 - \epsilon$ . Using the third item of Proposition 2.2 it follows that

$$\sup_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}(\rho, \mathcal{P}_k) \lesssim n^{\frac{1}{2(a-1)}} \quad \text{and so} \quad \sup_{0 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}(\rho, X_k) \lesssim n^{\frac{1}{2(a-1)}}.$$

For the lower bound  $\sup_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}(\rho, \mathcal{P}_k) \gtrsim n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  notice that the  $n$ -th pioneer point is necessarily outside  $\bar{\epsilon}_{n-1}$  and so by Theorem 1.1 it must be at distance at least  $c_\epsilon n^{\frac{1}{2(a-1)}}$  from the origin of the map with probability at least  $1 - \epsilon$ .  $\square$

*Walk on  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$ .* — We can use the same strategy as in the last section to study the random walk on  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$ . More precisely, let us denote by  $X^\dagger = (X_n^\dagger)_{n \geq 0}$  the simple random walk on  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$  started from the root face  $f_r$ . As before, one can design an algorithm  $\mathcal{S}_{\text{dual}}$  that explores the map along the walk (see [15, Section 8.2.2]). The latter is simpler than  $\mathcal{S}_{\text{primal}}$ . The walk starts from the root face  $f_r$  and wants to traverse one of the edges of this face, and we then peel this edge and reveal the face on the other side before moving to  $X_1^\dagger$ . Then we continue like this: at each step, either the walk wants to traverse an edge such that the other side has not been revealed yet, in which case, we peel this edge,

or the other side is known, and the walk can move directly. We call *pioneer edges* the edges traversed by the walk that lead to the triggering of a peeling step; for all  $k \geq 0$ , let us denote by  $\mathcal{P}_k^\dagger$  the origin of the  $k$ -th pioneer edge. Finally, we denote by  $d_{\text{gr}}^\dagger$  the graph distance in  $\mathfrak{M}_\infty^\dagger$ .

**COROLLARY 3.2.** — *Fix a critical weight sequence  $\mathbf{q}$  of type  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ ; there exists  $c_a > 0$ , such that the following holds: for every  $\varepsilon > 0$ , there exist  $0 < c_\varepsilon < C_\varepsilon < \infty$ , such that for every  $r$  large enough, we have*

$$\begin{aligned}
 c_\varepsilon n^{\frac{a-2}{a-1}} &\leq \max_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, \mathcal{P}_k^\dagger) \leq C_\varepsilon n^{\frac{a-2}{a-1}} && \text{when } a \in (2, 5/2], \\
 (1 - \varepsilon)c_a \log n &\leq \max_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, \mathcal{P}_k^\dagger) \leq (1 + \varepsilon)c_a \log n && \text{when } a \in (3/2, 2), \\
 \frac{1 - \varepsilon}{2\pi^2} \log^2 n &\leq \max_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, \mathcal{P}_k^\dagger) \leq \frac{1 + \varepsilon}{2\pi^2} \log^2 n && \text{when } a = 2.
 \end{aligned}$$

with probability at least  $1 - \varepsilon$ .

*Proof.* — Let  $(\bar{\varepsilon}_n)_{n \geq 0}$  be the filled-in peeling process associated with  $\mathcal{S}_{\text{dual}}$ . Using the fact that the sub-maps  $(\bar{\varepsilon}_k)_{0 \leq k \leq n}$  are nested, a moment’s thought shows that

$$\begin{aligned}
 \min_{f \in \partial \bar{\varepsilon}_n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, f) &\leq d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, \mathcal{P}_n^\dagger) \leq \max_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, \mathcal{P}_k^\dagger) \\
 &\leq \max_{1 \leq k \leq n} \max_{f \in \partial \bar{\varepsilon}_k} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, f) = \max_{f \in \partial \bar{\varepsilon}_n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, f),
 \end{aligned}$$

where by  $f \in \partial \bar{\varepsilon}_n$  we mean a face incident to the boundary  $\partial \bar{\varepsilon}_n$ . By Theorem 1.1, the smallest and the largest *primal* graph distances to the root vertex of the boundary  $\partial \bar{\varepsilon}_n$  are both of order  $n^{1/(2a-2)}$ , and we then conclude from Corollary 1.3 that  $\min_{f \in \partial \bar{\varepsilon}_n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, f)$  and  $\max_{f \in \partial \bar{\varepsilon}_n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, f)$  satisfy the lower and upper bounds, respectively, of our claim.  $\square$

We point out that, as opposed to Corollary 3.1, this result does not imply upper bounds for the quantities  $\max_{1 \leq k \leq n} d_{\text{gr}}^\dagger(f_r, X_k^\dagger)$  because we do not have the last claim of Proposition 2.2 for the dual map. We do get that the walk  $X^\dagger$  up to time  $n$  stays within a hull  $\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty^\dagger, r_n)$  for some  $r_n$  given by Corollary 3.2, but this hull may have “tentacles” reaching a distance much larger than  $r_n$  (at least in the dense regime, but it should not be the case in the dilute regime).

### 4. Maps as labelled trees and geometric estimates

In this section, we recall the other very efficient tool to study planar maps, which is a construction from the *labelled mobiles* originally due to Bouttier, Di Francesco, and Guitter. Let us first define these objects before recalling the construction (we refer the reader to [6, Section 6] for details).

**4.1. Bouttier–Di Francesco–Guitter coding of bipartite maps. —**

*Finite maps.* Let us set  $\mathbb{Z}_{\geq -1} = \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ , and for every  $k \geq 1$ , consider the following set of bridges:

$$\mathcal{B}_k^{\geq -1} = \{(b_0, \dots, b_k) : b_0 = b_k = 0 \text{ and } b_j - b_{j-1} \in \mathbb{Z}_{\geq -1} \text{ for } 1 \leq j \leq k\}.$$

A *mobile* is a finite rooted plane tree whose vertices at even (or odd) generations are white (or black). We consider *labelled* mobiles in which every white vertex  $u$  carries a label  $\ell(u) \in \mathbb{Z}$ . We say that a finite-ordered forest of mobiles  $(\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_p)$  is *well labelled* if

- (i) The sequence of labels of the roots of  $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_p, \mathfrak{t}_1$  belongs to  $\mathcal{B}_{p+1}^{\geq -1}$ .
- (ii) For every black vertex  $u$ , if  $u_0$  denotes its white parent and  $u_1, \dots, u_k$  its white children, ordered from left to right, then the sequence of labels  $(\ell(u_0), \ell(u_1), \dots, \ell(u_k), \ell(u_0))$  belongs to  $\mathcal{B}_{k+1}^{\geq -1}$ .

Imagine that the forest  $\mathfrak{t}_1, \dots, \mathfrak{t}_p$  is properly drawn on the plane inside a cycle of length  $p$ , with the roots grafted in counterclockwise order on the cycle. Let us define the *white contour sequence*  $(c_n^\circ)_{n \geq 0}$  as the sequence of corners formed by the white vertices, starting from  $c_0^\circ$ , the corner between the root of  $\mathfrak{t}_1$  and its first black child (if any, otherwise the corner formed by this root only), and following the contour of the forest from left to right cyclically. Recall that the white vertices are labelled, we associate with each white corner the label of the corresponding vertex; we then say that a corner  $c_j^\circ$  is the *successor* of another corner  $c_i^\circ$ , if  $c_j^\circ$  is the first corner in the cyclic contour after  $c_i^\circ$ , such that  $\ell(c_j^\circ) = \ell(c_i^\circ) - 1$ . For this definition to hold also when  $\ell(c_i^\circ) = \ell_{\min}$  is the overall minimum of labels, we add an extra vertex  $u_\star$  labelled  $\ell_{\min} - 1$ .

We associate a *pointed* planar map — i.e. a map with a distinguished vertex — with such a well-labelled forest of mobiles by drawing the links between each corner and its successor in a non-crossing fashion and then erasing the embedding of the cycle and the edges of the mobiles; we are then left with a bipartite map on the set of white vertices of the forest and the distinguished vertex  $u_\star$ , with a black vertex inside each inner face, and the degree of this vertex in its mobile is half the degree of the face in the map. The external face of the map is the face that “encloses” the cycle on which the mobiles have been grafted. The root edge of the map is not prescribed by the forest and is taken uniformly at random on the external face of degree  $2p$  (oriented so that the external face is on its right). The labelling of the above forest has a geometric interpretation in terms of the map; the label of a vertex minus  $\ell_{\min}$  plus 1 is the graph distance in the map to the distinguished vertex  $u_\star$ . See Figure 4.1 for an illustration.

*Infinite maps.* Let us next briefly extend the preceding construction to infinite maps with boundary length  $2p$ . We start as above with a forest of mo-

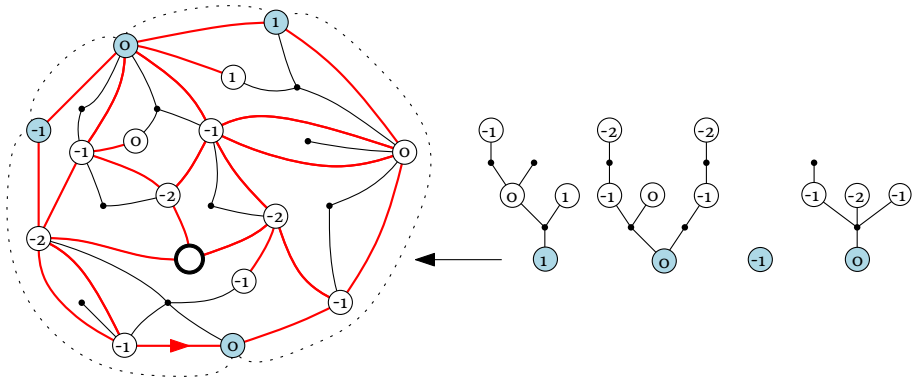


FIGURE 4.1. Illustration of the construction of a pointed (at the white unlabelled vertex) bipartite planar map with a boundary of perimeter 8 (in red) from a forest of 4 mobiles. Note that the boundary is simple here, which may not be the case in general.

biles  $(t_1, \dots, t_p)$ , where the  $t_i$ 's for  $i \geq 2$  are as above, but  $t_1$  is now an infinite mobile with one end, in the sense that it is locally finite, and there is a unique self-avoiding infinite path, thereafter called the *spine*, so the tree can be constructed from such a half-line of alternating white and black vertices  $s_0^\circ, s_0^\bullet, s_1^\circ, s_1^\bullet, s_2^\circ, s_2^\bullet, \dots$  on which finite trees are grafted. This spine splits the forest into two parts: the one on its left made of all the trees grafted to the left of the spine, and the one on the right made of all the trees grafted to the right of the spine and the other  $t_i$ 's. Then we may define a white contour sequence as a process indexed by  $\mathbb{Z}$ ; define  $(c_n^\circ)_{n \geq 0}$  following the contour of  $t_1$  starting as above from  $c_0^\circ$ , the corner between the root of  $t_1$  and its first black child; on the other hand, define  $(c_{-n}^\circ)_{n \geq 1}$  following the contour of the forest but now from right to left:  $c_{-1}^\circ$  is the corner between the root of  $t_p$  and its last black child, and we then visit all the white corners of the  $t_i$ 's for  $i \geq 2$  before reaching  $t_1$  and following the part to the right of the spine.

As before, we consider labels on the white vertices and we say that the forest is well labelled when the labels satisfy the same local rule as in the finite case, and, furthermore, the set of labels on the spine is not bounded below. We then construct a map as previously, by first imagining that the trees are properly drawn inside a cycle of length  $p$  with a unique accumulation point (corresponding to the infinite tree) and then linking every white corner to its successor in a non-crossing fashion. Our assumption ensures that this is always possible, so there is no need to add any extra vertex here (the distinguished vertex is “sent to infinity”). The root edge is chosen uniformly at random on

the external face as above. We refer to [24, Section 6.3] and [7, Section 2] for this construction in the case  $p = 1$ .

**4.2. The distribution of random labelled mobiles.** — A way to generate random bipartite pointed Boltzmann planar maps consists in constructing it as previously, starting from a random forest. Let  $\mathcal{T}$  be an *alternating two-type Bienaymé–Galton–Watson tree*: it has white and black vertices at even and odd generation, respectively, which reproduce independently according to the following offspring distributions:

$$\mu_{\circ}(k) = Z_{\mathbf{q}}^{-1}(1 - Z_{\mathbf{q}}^{-1})^k \quad \text{and} \quad \mu_{\bullet}(k) = \frac{Z_{\mathbf{q}}^{k+1} \binom{2k+1}{k} q_{k+1}}{Z_{\mathbf{q}} - 1},$$

for all  $k \geq 0$ . Recall the law  $\mu$  from the introduction; note that for  $k \geq 1$ , the ratio  $\mu(k)/\mu_{\bullet}(k - 1)$  is constant, so  $\mu_{\bullet}$  or  $\mu$  has finite variance or belongs to the strict domain of attraction of an  $(a - 1/2)$ -stable distribution, if and only if the other satisfies the same property. Furthermore, easy calculations show that  $\mu$  has mean 1, if and only if the product of the means of  $\mu_{\circ}$  and  $\mu_{\bullet}$  equals 1, so the two-type tree is critical. A simple and useful observation is that the tree induced by the white vertices, given by keeping only these white vertices and linking each one to its white grandparent, is a Bienaymé–Galton–Watson forest; we shall denote the offspring distribution by  $\tilde{\mu}$ , which differs slightly from  $\mu$  but has the same “stable behaviour”, see [21, Section 3.2].

Let  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$  be i.i.d. copies of  $\mathcal{T}$  and, conditionally on this forest, sample labels uniformly at random amongst all possibilities that make the forest well labelled; this just means that at every black vertex with, say,  $k - 1$  offsprings, the sequence of labels around it in clockwise order forms a uniformly random bridge in  $\mathcal{B}_k^{\geq -1}$  shifted by the value of the label of its parent, independently of the rest, and similarly so for the roots. The law of that bridge is the same as that of a random walk bridge of length  $k$ , with i.i.d. increments of law

$$(4) \quad \mathbb{P}(\xi = k) = 2^{-2-k} \quad \text{for } k \geq -1.$$

Then [6, Proposition 22] shows that the pointed map constructed as above from  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$  has the law of a  $\mathbf{q}$ -Boltzmann *pointed* planar map with a boundary with length  $2p$ , which we denote by  $\mathfrak{M}_{\bullet}^{(p)}$ , i.e.  $\mathbb{P}(\mathfrak{M}_{\bullet}^{(p)} = (\mathbf{m}, \bullet)) \propto w(\mathbf{m})$ . This is not quite the desired law  $\mathfrak{M}^{(p)}$ , but the latter can be obtained by a simple bias: for every non-negative function  $f$  that depends on the map only (not on its distinguished vertex  $\bullet$ ),

$$(5) \quad \mathbb{E} \left[ f(\mathfrak{M}^{(p)}) \right] = \frac{1}{\mathbb{E}[1/|\mathfrak{M}_{\bullet}^{(p)}|]} \cdot \mathbb{E} \left[ f(\mathfrak{M}_{\bullet}^{(p)}) \cdot \frac{1}{|\mathfrak{M}_{\bullet}^{(p)}|} \right],$$

where  $|\mathbf{m}|$  is the number of vertices of the map  $\mathbf{m}$ .

Similarly, if the random labelled forest  $(\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p)$  has the same law as above, except that  $\mathcal{T}_1$  is infinite, and has the law of  $\mathcal{T}_\infty$ , the two-type Bienaymé–Galton–Watson trees *conditioned to survive* as above, then the associated map has the law  $\mathfrak{M}_\infty^{(p)}$  (this follows from [6, Proposition 22] and the work [24]). The law of  $\mathcal{T}_\infty$  may be constructed in the following way: all the vertices reproduce independently; the ones outside the spine reproduce according to their respective offspring distribution, and the ones on the spine  $s_i^\circ, s_i^\bullet$  reproduce according the *size-biased* versions of these laws; finally, the offspring of a vertex on the spine that belongs to the spine is chosen uniformly at random.

**4.3. Asymptotic estimates on labelled mobiles.** — Let us consider a sequence  $(\mathcal{T}_n)_{n \geq 1}$  of i.i.d. well-labelled mobiles with the same distribution as  $\mathcal{T}$ , which we view as an ordered forest; the labels of the roots of the mobiles are zero, and the rest of the labels of the mobiles are sampled uniformly at random as above. Let  $S^\circ = (S_k^\circ)_{k \geq 0}$  and  $L^\circ = (L_k^\circ)_{k \geq 0}$  be, respectively, the white Łukasiewicz walk and the label process associated with this forest, constructed as follows: let us read the white vertices of the forest in depth-first search order, starting at 0 from the root of the first tree, then put  $S_0^\circ = 0$  and for every  $k \geq 0$ , let the difference  $S_{k+1}^\circ - S_k^\circ$  record the number of grandchildren minus one of the  $k$ -th white vertex (so  $S^\circ$  is nothing but a centred random walk with step distribution  $\tilde{\mu}(\cdot + 1)$ ), and let  $L_k^\circ$  denote the label of this  $k$ -th white vertex. According to Le Gall and Miermont [21, Theorem 1], for  $a \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ , we have the convergence in distribution in the Skorohod space

$$(6) \quad \left( n^{-\frac{1}{a-1/2}} S_{[nt]}^\circ, n^{-\frac{1}{2a-1}} L_{[nt]}^\circ \right)_{t \geq 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (c_0 \mathcal{S}_t, \sqrt{2c_0} \mathcal{Z}_t)_{t \geq 0},$$

where  $c_0$  is some constant depending on  $\tilde{\mu}$ , where  $\mathcal{S}$  is an  $(a - 1/2)$ -stable Lévy process with no negative jump, and the process  $\mathcal{Z}$  is the *continuous distance process* constructed in [21].

Let us say a few words about this process  $\mathcal{Z}$ . In the discrete setting, the label of a white vertex is the sum of the label increments along its ancestral line, between each white ancestor,  $u$  say, and its grandparent,  $v$  say, and these increments are given by the value  $B(k, j)$  of an independent uniformly random bridge with jumps in  $\mathbb{Z}_{\geq -1}$  of length  $k$  at time  $j$ , where  $k$  is the degree of the black vertex between  $u$  and  $v$ , and  $j$  is the position of  $u$  amongst its siblings. The ancestors of the  $n$ -th white vertex are given by those times  $m \leq n$ , such that  $S_m^\circ \leq \min_{[m+1, n]} S^\circ$ , and the values  $k$  and  $k - j$  associated with this ancestor are encoded in the Łukasiewicz path: suppose for simplicity that  $v$  has only one black child, then  $k$  and  $k - j$  are given, respectively, by  $S_{m+1}^\circ - S_m^\circ + 1$  and  $\min_{[m+1, n]} S^\circ - S_m^\circ$ . At the continuum level, the construction of  $\mathcal{Z}$  is similar: conditional on  $\mathcal{S}$ , for every  $t > 0$ , the value of  $\mathcal{Z}_t$  is given by the sum of independent Brownian bridges of length given by the jumps  $\mathcal{S}_s - \mathcal{S}_{s-}$  and evaluated at times given by  $\inf_{[s, t]} \mathcal{S} - \mathcal{S}_{s-}$ , only for those times  $s < t$  such

that  $\inf_{[s,t]} \mathcal{S} > \mathcal{S}_-$ . It is shown in [21] that such a process is well defined and admits a continuous version.

In the case  $a = \frac{5}{2}$ , the convergence (6) still holds, where  $\mathcal{S}$  is now a Brownian motion, and  $\mathcal{Z}$  is the so-called *head of the Brownian snake* driven by  $\mathcal{S}$ , which can be viewed as a Brownian motion indexed by the Brownian forest encoded by  $\mathcal{S}$ ; the argument may be adapted from [22], which considers size-conditioned trees with offspring distribution  $\mu$  instead.

We next derive a version of (6) for the tree  $\mathcal{T}_\infty$  conditioned to survive. Let us similarly define its Łukasiewicz path  $S^\infty$  and its label process  $L^\infty$  by restricting to the white vertices on the left part of the tree. It is known that  $S^\infty$  has the law of the random walk  $S^\circ$  conditioned to always stay non-negative (see, e.g. [5]), which can be rigorously defined as the Doob  $h$ -transform using the harmonic function  $h(n) = (n + 1)\mathbf{1}_{\{n \geq 0\}}$ . Similarly, the Lévy process  $\mathcal{S}$  can be conditioned to stay positive via such an  $h$ -transform, and we denote this process by  $\mathcal{S}^\uparrow$ , see the introduction in [13] and references therein. One can finally adapt the construction of the process  $\mathcal{Z}$  from  $\mathcal{S}$  in [21] to this setting and define a process  $\mathcal{Z}^\uparrow$  from  $\mathcal{S}^\uparrow$ , when  $a < \frac{5}{2}$ ; when  $a = \frac{5}{2}$ , the process  $\mathcal{Z}^\uparrow$  is simply the head of the Brownian snake driven by a three-dimensional Bessel process (a Brownian motion conditioned to stay positive).

PROPOSITION 4.1. — *We have the convergence in distribution for the Skorohod topology*

$$\left( n^{-\frac{1}{a-1/2}} S_{[nt]}^\infty, n^{-\frac{1}{2a-1}} L_{[nt]}^\infty \right)_{t \geq 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} (c_0 \mathcal{S}_t^\uparrow, \sqrt{2c_0} \mathcal{Z}_t^\uparrow)_{t \geq 0},$$

*Proof sketch.* Since the path  $S^\infty$  has the law of the random walk  $S^\circ$  conditioned to stay non-negative, the convergence of the former follows from that of the latter in (6), see Caravenna and Chaumont [13]. Let us next focus on the convergence of the finite-dimensional marginals of the label process. By appealing to Skorohod’s representation theorem, we may assume that the convergence of the Łukasiewicz path holds almost surely. Recall the construction of the process  $L^\infty$  from random bridges associated with each black branch point. When  $a < \frac{5}{2}$ , the proof goes exactly like that of Proposition 7 in [21]. It suffices to only consider the large black branch points, since the contribution of all the others is small; these large branch points, with length of order  $n^{1/(a-1/2)}$ , give at the limit, after a diffusive scaling  $n^{1/(2a-1)}$ , independent Brownian bridges and the sum of these bridges evaluated at the corresponding times, along the ancestral line of a point is the definition of  $\mathcal{Z}_t^\uparrow$ . When  $a = \frac{5}{2}$ , we may similarly adapt the argument from [22]; here the branch points are too small, and the label increments between a white individual in the tree and its white grandparent behave almost like i.i.d. random variables with finite variance, which at the limit gives a Brownian motion indexed by the infinite Brownian tree, which again is the definition of  $\mathcal{Z}_t^\uparrow$ .

Finally, tightness of  $L^\infty$  follows by absolute continuity considerations with respect to the infinite forest. Indeed, for any  $N \geq 1$  fixed, the law of the pair  $(S_k^\infty, L_k^\infty)_{k \leq N}$  is absolutely continuous with respect to the similar pair associated with a mobile conditioned to have more than  $2N$  white vertices, which has the law of the first mobile in the infinite forest with more than  $2N$  white vertices. This is well known for the Łukasiewicz path and more generally for conditioned random walk, and it extends to the label process by construction, since the latter is obtained from the Łukasiewicz path and independent random bridges.  $\square$

For every  $r \geq 0$ , let  $\sigma_r$  denote the first instant  $i \geq 0$ , such that the  $i$ -th white vertex of  $\mathcal{T}_\infty$  is on its spine, and it is the first one on the spine with label smaller than  $-r$ . The preceding proposition yields the following asymptotic behaviour.

COROLLARY 4.2. — *We have*

$$\sigma_r \approx r^{2a-1} \quad \text{and} \quad \max_{k \leq \sigma_r} |L_k^\infty| \approx r.$$

*Proof.* — It is clear from the definition that the times of visit of a white vertex on the spine correspond to those times  $i \geq 0$ , such that  $S_i^\infty = \min_{j \geq i} S_j^\infty$ . The continuum analogue of  $\sigma_r$  is the first-passage time  $\Sigma_\alpha$  below  $-\alpha < 0$  of the process  $\sqrt{2c_0}Z^\uparrow$  restricted to those times  $t \geq 0$ , such that  $S_s^\uparrow \geq S_t^\uparrow$ , for all  $s \geq t$ , which is easily seen to be finite for all  $\alpha > 0$ . We claim that

$$\left( r^{-(2a-1)} \sigma_r, r^{-1} \max_{k \leq \sigma_r} |L_k^\infty| \right) \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{(d)} \left( \Sigma_1, \sup_{0 \leq s \leq \Sigma_1} |\sqrt{2c_0}Z_s^\uparrow| \right).$$

Indeed, in the case  $a = 5/2$ , the label process along the spine behaves like a Brownian motion, which, almost surely, takes values smaller than  $-1$  immediately after reaching  $-1$ , so the last display is implied by Proposition 4.1. In particular,  $\sigma_r \approx r^{2a-1}$  and  $\max_{k \leq \sigma_r} |L_k^\infty| \approx r$ , when  $a = 5/2$ . When  $a < 5/2$ , the same phenomenon occurs, and, in fact, the limiting process of labels on the spine is a  $2(a - 3/2)$ -stable symmetric Lévy process, which jumps strictly below  $-1$  when entering  $(-\infty, -1]$ . We conclude similarly.  $\square$

**4.4. Proof of the geometric estimates on maps.** — In this final section, we prove the volume estimates from Section 2.2, which we used in the proof of Theorem 1.1, appealing to the results from the preceding section on labelled forests. Let us first start by considering  $\mathfrak{M}_\infty$  and proving Proposition 2.2 on the balls and their hulls, that is,

$$|\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, r)| \approx r^{2a-1}, \quad |\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)| \approx r^{2a-1}, \quad \text{and} \\ \max\{d_{\text{gr}}(\rho, u); u \in \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)\} \approx r.$$



*Proof of Proposition 2.2.* — We suppose that  $\mathfrak{M}_\infty$  is constructed from  $\mathcal{T}_\infty$  as in the last section (this corresponds to the case  $p = 1$ ), and let us suppose for convenience that we rooted the map in such a way that the origin vertex is the origin of the tree (otherwise it is at distance at most 1 from it). Recall that  $\mathcal{T}_\infty$  has a spine and denote by  $\mathbb{T}_r$  the tree  $\mathcal{T}_\infty$  obtained by chopping off the descendant of the first white vertex on the spine whose label drops below  $-r - 3$ . Using the well-known “cactus bound”, the proof of [4, Equation 19] shows *mutatis mutandis* (considering only white vertices and corners) that the following inclusion holds in terms of white vertices in  $\mathfrak{M}_\infty$ :

$$(7) \quad \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r) \subset \mathbb{T}_r.$$

Using the notation of Corollary 4.2, the number of white vertices on the “spine” of  $\mathbb{T}_r$  and to its left is given by  $\sigma_{r+3}$ , and the number of white vertices on the spine and to the right has the same law by symmetry. By Corollary 4.2 the number of white vertices of  $\mathbb{T}_r$  is, therefore, of order  $r^{2a-1}$ ; note that we counted the vertices on the spine twice, which is negligible.

Next we claim that

$$(8) \quad \max\{d_{\text{gr}}(\rho, u); u \in \mathbb{T}_r\} \leq 2 + 3 \max_{u \in \mathbb{T}_r} |\ell(u)| \approx r,$$

where the distance  $d_{\text{gr}}$  is in the map  $\mathfrak{M}_\infty$ , and  $\rho$  is its origin vertex. Indeed, the chain of successors starting from any white vertex in  $\mathbb{T}_r$  must coalesce with the chain starting from the root corner, and this produces a path between those two vertices of length bounded above by  $2 + 3 \max_{u \in \mathbb{T}_r} |\ell(u)|$ . This variable is of order  $r$  by Corollary 4.2.

We can then prove the three points of the proposition. The third point follows from (8) and (7) after noting that  $\max\{d_{\text{gr}}(\rho, u); u \in \overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r)\}$  is certainly at least  $r$ . Using (7) together with  $|\mathbb{T}_r| \approx r^{2a-1}$  then yields

$$\overline{\text{Ball}}(\mathfrak{M}_\infty, r) \lesssim r^{2a-1}.$$

Finally, note that in terms of vertex set in the map we have  $\mathbb{T}_r \subset \text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, R)$ , where  $R = 3 + 3 \max_{u \in \mathbb{T}_r} |\ell(u)| \approx r$ . This yields a lower bound  $r^{2a-1} \lesssim |\text{Ball}(\mathfrak{M}_\infty, r)|$  on the volume of balls, whence on their hull, and completes the proof of the proposition.  $\square$

We finally consider maps with a boundary.

*Proof of Proposition 2.4.* — Suppose that  $\mathfrak{M}_\infty^{(p)}$  is constructed from a forest  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_p$  as in the preceding section where  $\mathcal{T}_i, i \geq 2$  are independent two-type Galton–Watson trees, and  $\mathcal{T}_1$  is the infinite one. Let  $\Delta_p$  be the largest label in absolute value over all the vertices in the finite trees  $\mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_p$ . Recalling the law (4) of the labels of the root of the trees, it follows from (6) that

$$\Delta_p \approx p^{1/2}.$$

On the other hand, it is easy to see from the construction of  $\mathfrak{M}_\infty^{(p)}$  from the forest that if  $x, y$  are any two vertices on the boundary of  $\mathfrak{M}_\infty^{(p)}$ , then they correspond to two vertices in the forest for which the iterated chain of successors coalesce before  $2\Delta_p + 2$  steps. Whence we deduce that

$$\text{aper}(\mathfrak{M}_\infty^{(p)}) \lesssim 4\Delta_p + 4 \approx p^{1/2}.$$

The lower bound is obtained by saying that  $\text{aper}(\mathfrak{M}_\infty^{(p)})$  is at least the largest difference between labels of the root of the trees (they must belong to the boundary) and so of order  $p^{1/2}$ .  $\square$

We finally prove Proposition 2.3, which we recall for the reader’s convenience: for any  $r$  large enough and any  $p \geq 2r^2$ ,

$$\mathbb{P}\left(|\text{Ball}(\mathfrak{M}^{(p)}, r)| > \lambda r^{2a-1}\right) > c,$$

where  $c > 0$  and  $\lambda > 0$  are some constants that do not depend on  $p$  and  $r$ .

*Proof of Proposition 2.3.* — Fix  $p \geq 2r^2$ . We will rely on the construction of the pointed map  $\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}$  from a forest  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$  of i.i.d. two-type Galton–Watson trees together with the relation (5) between  $\mathfrak{M}^{(p)}$  and  $\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}$ . We shall assume for simplicity that the origin of  $\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}$  corresponds to the root of  $\mathcal{T}_1$  in the construction. We will denote by  $\mathcal{E}_\lambda$  the following event:

- (i) The largest label in absolute value amongst the roots of  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{r^2}$  is smaller than  $r/2$ ;
- (ii) The maximum over  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_{r^2}$  of the largest relative label in absolute value inside each tree (so each root is reset to 0) is smaller than  $r/2$ , and the total number of vertices in these  $r^2$  trees is larger than  $\lambda r^{2a-1}$ .
- (iii) The total number of white vertices in  $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_p$  is less than  $p^{a-\frac{1}{2}}$ .

On the event  $\mathcal{E}_\lambda$  we have from (iii) that  $|\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}| \leq p^{a-\frac{1}{2}}$ . Also, combining (i) and (ii) and using the usual bound on distances in the map we deduce that as a vertex set of white vertices  $\bigcup_{1 \leq i \leq r^2} \mathcal{T}_i \subset \text{Ball}(\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}, 2r + 2)$ , and so the latter has cardinality more than or equal to  $\lambda r^{2a-1}$ . Using (5) we can write

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\text{Ball}(\mathfrak{M}^{(p)}, 2r + 2) > \lambda r^{2a-1}\right) &\geq \frac{1}{\mathbb{E}[1/|\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}|]} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{\mathcal{E}_\lambda\}} \cdot \frac{1}{|\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}|}\right] \\ &\geq \frac{\mathbb{P}(\mathcal{E}_\lambda)}{\mathbb{E}[p^{a-\frac{1}{2}}/|\mathfrak{M}_\bullet^{(p)}|]}. \end{aligned}$$

By [10, Proposition 3.4] (and its easy extension to the case  $a = 5/2$ , see [9, Eq. (51)]) we deduce that the denominator on the right-hand side is convergent and is thus bounded as  $p \rightarrow \infty$ . All that remains to be seen is that one can find  $\lambda > 0$  small enough so that  $\mathcal{E}_\lambda$  occurs with probability at least  $c > 0$ , irrespectively of  $p$  large. The first point is clearly satisfied with an asymptotically positive

probability, since the labels of the root of the trees converge after diffusive scaling towards a Brownian bridge, see [21, Eq. (18)]. As for points (ii) and (iii), they are independent of point (i) and are clearly satisfied with an asymptotically positive probability thanks to (6). Et voilà.  $\square$

## BIBLIOGRAPHY

- [1] O. ANGEL – “Growth and percolation on the uniform infinite planar triangulation”, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 5, p. 935–974.
- [2] O. ANGEL & N. CURIEN – “Percolations on random maps I: Half-plane models”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **51** (2015), no. 2, p. 405–431.
- [3] O. ANGEL & O. SCHRAMM – “Uniform infinite planar triangulations”, *Comm. Math. Phys.* **241** (2003), no. 2-3, p. 191–213.
- [4] I. BENJAMINI & N. CURIEN – “Simple random walk on the uniform infinite planar quadrangulation: subdiffusivity via pioneer points”, *Geom. Funct. Anal.* **23** (2013), no. 2, p. 501–531.
- [5] J. BERTOIN & R. A. DONEY – “On conditioning a random walk to stay nonnegative”, *Ann. Probab.* **22** (1994), no. 4, p. 2152–2167.
- [6] J. BETTINELLI & G. MIERMONT – “Compact Brownian surfaces I: Brownian disks”, *Probab. Theory Related Fields* **167** (2017), no. 3-4, p. 555–614.
- [7] J. BJÖRNBERG & S. O. STEFÁNSSON – “Recurrence of bipartite planar maps”, *Electron. J. Probab.* **19** (2014), no. 31, Paper 40.
- [8] G. BOROT, J. BOUTTIER & E. GUITTER – “A recursive approach to the  $O(n)$  model on random maps via nested loops”, *J. Phys. A* **45** (2012), no. 4, p. 045002–045038.
- [9] T. BUDD – “The peeling process of infinite Boltzmann planar maps”, *Electron. J. Combin.* **23** (2016), no. 1, Paper P1.28.
- [10] T. BUDD & N. CURIEN – “Geometry of infinite planar maps with high degrees”, *Electron. J. Probab.* **22** (2017), p. Paper 35.
- [11] T. BUDD, N. CURIEN & C. MARZOUK – “Infinite random planar maps related to Cauchy processes”, *J. Éc. polytech. Math.* **5** (2018), p. 749–791.
- [12] T. BUDZINSKI – “The hyperbolic Brownian plane”, *Probab. Theory Related Fields* **171** (2018), no. 1, p. 503–541.
- [13] F. CARAVENNA & L. CHAUMONT – “Invariance principles for random walks conditioned to stay positive”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **44** (2008), no. 1, p. 170–190.
- [14] N. CURIEN – “A glimpse of the conformal structure of random planar maps”, *Comm. Math. Phys.* **333** (2015), no. 3, p. 1417–1463.
- [15] ———, “Peeling random planar maps”, 2019, (Saint-Flour lecture notes). Preliminary version available on the author’s webpage.

- [16] N. CURIEN & J.-F. LE GALL – “Scaling limits for the peeling process on random maps”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **53** (2017), no. 1, p. 322–357.
- [17] ———, “First-passage percolation and local modifications of distances in random triangulations”, *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **52** (2019), no. 3, p. 631–701.
- [18] N. CURIEN & C. MARZOUK – “How fast planar maps get swallowed by a peeling process”, *Electron. Commun. Probab.* **23** (2018), p. Paper 18.
- [19] N. CURIEN & C. MARZOUK – “Infinite stable Boltzmann planar maps are sub-diffusive”, 2019, Preprint available at arXiv:1910.09623.
- [20] N. CURIEN & L. RICHIER – “Duality of random planar maps via percolation”, 2019, to appear in *Ann. Inst. Fourier*. Preprint available at arXiv:1802.01576.
- [21] J.-F. LE GALL & G. MIERMONT – “Scaling limits of random planar maps with large faces”, *Ann. Probab.* **39** (2011), no. 1, p. 1–69.
- [22] C. MARZOUK – “On scaling limits of planar maps with stable face-degrees”, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **15** (2018), p. 1089–1122.
- [23] G. MIERMONT – “Invariance principles for spatial multitype Galton-Watson trees”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **44** (2008), no. 6, p. 1128–1161.
- [24] R. STEPHENSON – “Local convergence of large critical multi-type Galton-Watson trees and applications to random maps”, *J. Theoret. Probab.* **31** (2018), no. 1, p. 159–205.

## MULTIPLICATIVE $p$ -ADIC METRIC DIOPHANTINE APPROXIMATION ON MANIFOLDS AND DICHOTOMY OF EXPONENTS

BY SHREYASI DATTA & ANISH GHOSH

---

ABSTRACT. — In this paper we study  $p$ -adic Diophantine approximation on manifolds, specifically multiplicative Diophantine approximation on affine subspaces and a Diophantine dichotomy for analytic  $p$ -adic manifolds.

RÉSUMÉ (*Approximation diophantienne métrique  $p$ -adique multiplicative sur des variétés et dichotomie des exposants*). — Dans cet article, nous étudions les approximations diophantiennes  $p$ -adiques sur des variétés, plus précisément les approximations diophantiennes multiplicatives sur des sous-espaces affines et une dichotomie diophantienne pour les variétés analytiques  $p$ -adiques.

---

*Texte reçu le 24 juin 2019, modifié le 1<sup>er</sup> novembre 2019, accepté le 10 juin 2020.*

SHREYASI DATTA, School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India 400005 • *E-mail* : [shreya@math.tifr.res.in](mailto:shreya@math.tifr.res.in)

ANISH GHOSH, School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai, India 400005 • *E-mail* : [ghosh@math.tifr.res.in](mailto:ghosh@math.tifr.res.in)

Mathematical subject classification (2010). — 37A17, 11J61, 11J83.

Key words and phrases. —  $p$ -adic Diophantine approximation, Diophantine approximation on manifolds, Dynamics on homogeneous spaces.

A.G. gratefully acknowledges support from a grant from the Indo-French Centre for the Promotion of Advanced Research, a Department of Science and Technology, Government of India Swarnajayanti fellowship and a MATRICS grant from the Science and Engineering Research Board. S.D. and A.G. acknowledge support of the Department of Atomic Energy, Government of India, under project 12-R&D-TFR-5.01-0500. This work received support from a grant from the Infosys foundation.

## 1. Introduction

This paper is concerned with  $p$ -adic Diophantine approximation on manifolds, specifically with multiplicative Diophantine approximation and a Diophantine dichotomy in the  $p$ -adic setting. In an earlier paper [6], we introduced a new  $p$ -adic Diophantine exponent and answered questions of Kleinbock and Kleinbock–Tomanov concerning  $p$ -adic Diophantine approximation on affine subspaces. The Diophantine exponent that we introduced is better suited to homogeneous dynamics. In this paper, we continue our study by establishing multiplicative versions of our results and by establishing a Diophantine dichotomy for  $p$ -adic analytic manifolds. For  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$  and  $q_0 \in \mathbb{Z}$ , set  $\tilde{\mathbf{q}} := (q_0, q_1, \dots, q_n)$ . Following Kleinbock and Tomanov, [21], we define the Diophantine exponent  $w(\mathbf{y})$  of  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$  to be the supremum of  $v > 0$ , such that there are infinitely many  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}^n$  satisfying

$$(1) \quad |q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_p \leq \|\tilde{\mathbf{q}}\|_\infty^{-v}.$$

In view of Dirichlet's theorem ([21] §11.2),  $w(\mathbf{y}) \geq n + 1$  for every  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$ , with equality for Haar-almost every  $\mathbf{y}$  by the Borel–Cantelli lemma. We will also need the following definition from [6].

DEFINITION 1.1 ( $v$ - $\mathbb{Z}[1/p]$ -approximable vectors). —  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$  is  $v$ - $\mathbb{Z}[1/p]$ -approximable, if there exist  $\tilde{\mathbf{q}}$  with unbounded  $\|\mathbf{q}\|_p \|\tilde{\mathbf{q}}\|_\infty$ , such that

$$(2) \quad |\mathbf{q} \cdot \mathbf{y} + q_0|_p < \frac{1}{(\|\mathbf{q}\|_p \|\tilde{\mathbf{q}}\|_\infty)^v \|\tilde{\mathbf{q}}\|_\infty},$$

where we recall that  $\tilde{\mathbf{q}} = (q_0, \mathbf{q}) \in \mathbb{Z}[1/p]^{n+1}$ .

We will denote  $v$ - $\mathbb{Z}[1/p]$ -approximable points by  $\mathcal{W}_v^p$  and also define

$$(3) \quad w_p(\mathbf{y}) := \sup\{v \text{ appearing in (2)}\}.$$

By Proposition 3.1 from [6], we have that for any  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$  we have

$$(4) \quad w_p(\mathbf{y}) = w(\mathbf{y}) + 1.$$

In [6], we studied the exponents  $w_p$  and  $w$  in detail and proved an inheritance result for the exponent  $w$  when restricted to submanifolds. This result was proved using the dynamical technique of Kleinbock and Margulis, and the exponent  $w_p$  played a key role.

In [18], D. Kleinbock established a remarkable *dichotomy* with regards to certain Diophantine properties. In particular, he proved that for connected, analytic manifolds, having one not very well approximable point implies that almost every point is not very well approximable. Our first result addresses this in the  $p$ -adic context.

**THEOREM 1.2.** — *Suppose  $\mathcal{M}$  is an analytic manifold of  $\mathbb{Q}_p^n$ . Let  $v \geq n + 1$  and suppose  $w(\mathbf{y}_0) \leq v$  for some  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{M}$ , then for almost every  $\mathbf{y}$  around a neighbourhood of  $\mathbf{y}_0$ ,  $w(\mathbf{y}) \leq v$ .*

We now turn our attention to multiplicative Diophantine approximation; see [4] for a survey of this topic, which has several parallels with, as well as striking differences from, Diophantine approximation with the usual norm. For  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^n$  and  $q_0 \in \mathbb{Z}$ , set  $\tilde{\mathbf{q}} := (q_0, q_1, \dots, q_n)$ . We define

$$|q|_+ = \begin{cases} |q|_\infty & \text{if } q \neq 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for  $q \in \mathcal{D}$ . For  $q \in \mathbb{Z}$ , this definition matches with the classical one. Further define

$$\Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}) = \prod_{i=0, \dots, n} |q_i|_+.$$

Say that  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$  is very well multiplicatively approximable (VWMA), if, for some  $\varepsilon > 0$ , there are infinitely many solutions  $\tilde{\mathbf{q}} = (q_0, q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$  to

$$(5) \quad |q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}|_p \leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}})^{-(1+\varepsilon)}.$$

Following Kleinbock [17], we say that a differentiable map  $f : U \rightarrow \mathbb{Q}_p^n$ , where  $U$  is an open subset of  $\mathbb{Q}_p^d$ , is nondegenerate in an affine subspace  $\mathcal{L}$  of  $\mathbb{Q}_p^n$  at  $x \in U$  if  $f(U) \subset \mathcal{L}$ , and the span of all the partial derivatives of  $f$  at  $x$  up to some order coincides with the linear part of  $\mathcal{L}$ . If  $\mathcal{M}$  is a  $d$ -dimensional submanifold of  $\mathcal{L}$ , we will say that  $\mathcal{M}$  is nondegenerate in  $\mathcal{L}$  at  $y \in \mathcal{M}$ , if there exists a diffeomorphism  $f$  between an open subset  $U$  of  $\mathbb{Q}_p^d$ , and a neighbourhood of  $y$  in  $\mathcal{M}$  is nondegenerate in  $\mathcal{L}$  at  $f^{-1}(y)$ . We also denote the Haar measure on  $\mathbb{Q}_p^d$  by  $\lambda$ . Finally, we will say that  $f : U \rightarrow \mathcal{L}$  (and  $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ ) is nondegenerate in  $\mathcal{L}$ , if it is nondegenerate in  $\mathcal{L}$  at  $\lambda$ -a.e. point of  $U$  (and of  $\mathcal{M}$ , in the sense of the smooth measure class on  $\mathcal{M}$ ).

A manifold is called strongly extremal if almost every point with respect to the Lebesgue measure is not very well multiplicatively approximable. Our second result resolves the conjecture by Kleinbock and Tomanov in [21] in the multiplicative case.

**THEOREM 1.3.** — *Let  $\mathcal{L}$  be an affine subspace of  $\mathbb{Q}_p^n$  and let  $\mathbf{f} : \mathbb{Q}_p^d \mapsto \mathcal{L}$  be a  $C^k$  that is nondegenerate in  $\mathcal{L}$  at  $\lambda$ -a.e. point. Suppose that the volume measure  $\lambda$  on  $\mathcal{L}$  is strongly extremal, then so is  $\mathbf{f}_*\lambda$ .*

Our third result shows a dichotomy for the multiplicative case as follows.

**THEOREM 1.4.** — *For any analytic manifold of  $\mathbb{Q}_p^n$ , if one point is not very well multiplicatively approximable, then the set of not very well multiplicatively approximable points has a positive measure.*

The approach used in this paper uses homogeneous dynamics as introduced by Kleinbock and Margulis in their important paper [20]. Diophantine approximation on affine subspaces has seen several developments recently; we refer the reader to [1, 16, 17, 10, 9, 13, 11, 12, 15, 8] and [14] for a survey. Likewise, Diophantine approximation on manifolds in the  $p$ -adic setting was studied in [21] and subsequently in [3, 22, 23, 7, 6].

## 2. Quantitative nondivergence

We will use quantitative nondivergence estimates for certain flows on homogeneous spaces. This estimate has its origin in the influential work of Kleinbock and Margulis [20]. We refer the reader to the recent survey [2] for instances of the ubiquity of quantitative nondivergence. In the context of the present paper, the most relevant developments are an  $S$ -adic version of quantitative nondivergence developed by Kleinbock and Tomanov [21] and an improved estimate, crucial to Diophantine applications, developed by Kleinbock in [17]. A  $p$ -adic version of this estimate was used in our earlier work [6] and will also play a central role in the present paper. We recall some notation and definitions and state Theorem 5.3 from [6], a  $p$ -adic version of D. Kleinbock's improved quantitative nondivergence theorem from [17]. This theorem more or less follows from [17] by adapting the necessary changes from [21]. For completeness, a proof is provided in [6].

We need some definitions and notation and follow [21] in our exposition. A metric space  $X$  is called *Besicovitch* [21], if there exists a constant  $N_X$ , such that the following holds: for any bounded subset  $A$  of  $X$  and for any family  $\mathcal{B}$  of nonempty open balls in  $X$  such that

$$\forall x \in A \text{ is a center of some ball of } B,$$

there is a finite or countable subfamily  $\{B_i\}$  of  $B$  with

$$1_A \leq \sum_i 1_{B_i} \leq N_X.$$

We now define  $D$ -Federer measures following [19]. Let  $\mu$  be a Radon measure on  $X$  and  $U$  an open subset of  $X$  with  $\mu(U) > 0$ . We say that  $\mu$  is  $D$ -Federer on  $U$ , if

$$\sup_{\substack{x \in \text{supp } \mu, r > 0 \\ B(x, 3r) \subset U}} \frac{\mu(B(x, 3r))}{\mu(x, r)} < D.$$

Finally, we say that  $\mu$  as above is Federer, if for  $\mu$ -a.e.  $x \in X$ , there exists a neighbourhood  $U$  of  $x$  and  $D > 0$ , such that  $\mu$  is  $D$ -Federer on  $U$ . We refer the reader to [19, 21] for examples of Federer measures.

Following, [17], for a subset  $M$  of  $\mathbb{Q}_p^n$ , define its affine span  $\langle M \rangle_a$  to be the intersection of all affine subspaces of  $\mathbb{Q}_p^n$  containing  $M$ . Let  $X$  be a metric



space,  $\mu$  a Borel measure on  $X$ ,  $\mathcal{L}$  an affine subspace of  $\mathbb{Q}_p^n$  and  $f$  a map from  $X$  into  $\mathcal{L}$ . Say that  $(f, \mu)$  is nonplanar in  $\mathcal{L}$ , if

$$\mathcal{L} = \langle f(B \cap \text{supp } \mu) \rangle_a \forall \text{ nonempty open } B \text{ with } \mu(B) > 0.$$

For a subset  $U$  of  $X$  and  $C, \alpha > 0$ , say that a Borel measurable function  $f : U \rightarrow \mathbb{Q}_p$  is  $(C, \alpha)$ -good on  $U$  with respect to  $\mu$ , if for any open ball  $B \subset U$  centered in  $\text{supp } \mu$  and  $\varepsilon > 0$ , one has

$$(6) \quad \mu(\{x \in B \mid |f(x)| < \varepsilon\}) \leq C \left( \frac{\varepsilon}{\sup_{x \in B} |f(x)|} \right)^\alpha |B|,$$

where  $\|f\|_{\mu, B} = \sup\{c : \mu(\{x \in B : |f(x)| > c\}) > 0\}$ .

Let  $S = \{\infty, p\}$ ,  $\mathbb{Q}_S := \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{D} := \mathbb{Z}[1/p]$  and

$\mathcal{P}(\mathcal{D}, m) :=$  the set of all nonzero primitive submodules of  $\mathcal{D}^m$ .

A vector  $\mathbf{x}$  of  $\mathbb{Q}_S^m$  will be denoted as  $\mathbf{x} = (x^{(\infty)}, x^{(p)})$ , where  $x^{(v)} = (x_1^{(v)}, \dots, x_m^{(v)}) \in \mathbb{Q}_v^m$ . The norm  $\|\mathbf{x}\|$  and the content  $c(\mathbf{x})$  of  $\mathbf{x}$  are defined to be the maximum (respectively the product) of all the numbers  $\|(x^{(v)})\|_v$ .

For a discrete  $\mathcal{D}$ -submodule  $\Lambda$  of  $\mathbb{Q}_S^m$ , we set

$$\delta(\Lambda) := \min\{c(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Lambda \setminus \{0\}\},$$

The covolume,  $\text{cov}()$  of a lattice used below is defined as in §8.3 of [21].

We recall Theorem 5.3 from [6].

**THEOREM 2.1.** — *Let  $X$  be a be a Besicovitch metric space,  $\mu$  a uniformly Federer measure on  $X$ , and let  $S$  be as above. For  $m \in \mathbb{N}$ , let a ball  $B = B(x_0, r_0) \subset X$  and a continuous map  $h : \tilde{B} \rightarrow \text{GL}(m, \mathbb{Q}_S)$  be given, where  $\tilde{B}$  stands for  $B(x_0, 3^m r_0)$ . Now suppose that for some  $C, \alpha > 0$  and  $0 < \rho < 1$ , one has*

- (i) *for every  $\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{D}, m)$ , the function  $\text{cov}(h(\cdot)\Delta)$  is  $(C, \alpha)$ -good on  $\tilde{B}$  with respect to  $\mu$ ;*
- (ii) *for every  $\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{D}, m)$ ,  $\sup_{x \in B \cap \text{supp } \mu} \text{cov}(h(x)\Delta) \geq \rho^{\text{rank}(\Delta)}$ .*

*Then for any positive  $\varepsilon \leq \rho$ , one has*

$$\mu(\{x \in B \mid \delta(h(x)\mathcal{D}^m) < \varepsilon\}) \leq mC(N_X D_\mu^2)^m \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^\alpha \mu(B)$$

### 3. Dichotomy: proof of Theorem 1.2

In this section, we address *p*-adic versions of D. Kleinbock’s paper [18], where he proved that analytic manifolds possess a remarkable dichotomy with regard to certain Diophantine properties, see also [5] and [24]. We begin with

**LEMMA 3.1.** — *For any  $\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{D}, n + 1)$  and  $g \in \text{GL}(n + 1, \mathbb{Q}_S)$  we have*

$$\delta(g\mathcal{D}^{n+1}) \leq \text{cov}(g\Delta)^{\frac{1}{\text{rank}(\Delta)}}.$$

*Proof.* — Note that  $g\Delta$  is a lattice in  $\mathbb{Q}_S g\Delta$ . Set  $j = \text{rank}(\Delta)$ . Now consider the ball

$$\begin{aligned} D &= D_\infty \times D_p \\ &= \left\{ x^{(\infty)} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x^{(\infty)}\|_\infty \leq (\text{cov}(g\Delta))^{\frac{1}{j}} \right\} \\ &\quad \times \left\{ x^{(p)} \in \mathbb{Q}_p^{n+1} \mid |x_1^{(p)}|_p \leq 1, |x_2^{(p)}|_p \leq 1, \dots, |x_{n+1}^{(p)}|_p \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

Denote  $D \cap \mathbb{Q}_S g\Delta = D_1$ , a ball in  $\mathbb{Q}_S g\Delta$ . The normalized Haar measure on  $\mathbb{Q}_S \Delta_1$  where  $\Delta_1 = g\Delta$  is defined as  $\lambda_S(D_1) = \mu_S(\pi^{-1}(D_1))$ , where  $\mu_S$  is the Haar measure on  $\mathbb{Q}_S^j$  and  $\pi : \mathbb{Q}_S^j \mapsto \mathbb{Q}_S \Delta_1 = \mathbb{Q}_S v_1 + \dots + \mathbb{Q}_S v_j$  and  $v_1, v_2, \dots, v_j$  are taken such that  $v_1^\infty, \dots, v_j^\infty$  form an orthonormal basis of  $(\mathbb{Q}_S \Delta_1)_\infty$  and  $(\mathbb{Q}_S \Delta_1)_p \cap \mathbb{Z}_p^{n+1} = \mathbb{Z}_p v_1^{(p)} + \dots + \mathbb{Z}_p v_j^{(p)}$ . So

$$\lambda_S(D_1) \geq 2^j \text{cov}(g\Delta).$$

Hence, by Minkowski’s theorem there exists  $g\gamma \in g\Delta$ , i.e.  $\gamma \in \mathcal{D}^{n+1}$ , such that

$$\begin{aligned} \|(g\gamma)^{(\infty)}\|_\infty &\leq \text{cov}(g\Delta)^{\frac{1}{j}} \\ \|(g\gamma)^{(p)}\|_p &\leq 1. \end{aligned}$$

Therefore,  $c(g\gamma) \leq \text{cov}(g\Delta)^{\frac{1}{\text{rank}(\Delta)}} \Rightarrow \delta(g\mathcal{D}^{n+1}) \leq \text{cov}(g\Delta)^{\frac{1}{\text{rank}(\Delta)}}$ . □

**PROPOSITION 3.2.** — *Let  $U$  be an open subset of  $\mathbb{Q}_p^d$  and let  $\mathcal{F}$  be a finite-dimensional space of analytic  $\mathbb{Q}_p$ -valued functions on  $U$ . Then, for any  $\mathbf{x} \in U$ , there exists  $C, \alpha > 0$  and a neighbourhood  $W$  of  $\mathbf{x}$ , such that every element of  $\mathcal{F}$  is  $(C, \alpha)$ -good on  $W$ .*

*Proof.* — Without loss of generality, we may assume that  $\mathcal{F}$  contains constant functions. Let  $1, f_1, \dots, f_n$  be a basis of  $\mathcal{F}$ . Then,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  is nonplanar (cf. [21]). For analytic functions, nondegeneracy is equivalent to nonplanarity. Therefore, the conclusion follows from Proposition 4.2 of [21]. □

The Corollary below now follows from the expression of  $\text{cov}(g_t u_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})\Delta)$  in (6.12) from [6] as a maximum of norms of linear combinations of  $f_i$ ’s.

**COROLLARY 3.3.** — *Let  $U$  be an open subset of  $\mathbb{Q}_p^d$  and let  $\mathbf{f} : U \mapsto \mathbb{Q}_p^n$  be an analytic map. Then, for any  $\mathbf{x}_0 \in U$ , there exists  $C, \alpha > 0$  and a neighbourhood  $W$  of  $\mathbf{x}_0$  contained in  $U$ , such that for any  $\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{D}, n + 1)$  and  $t \in \mathbb{N}$ , the functions  $\mathbf{x} \mapsto \text{cov}(g_t u_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\Delta)$  are  $(C, \alpha)$ -good on  $W$ .*

Define

$$\gamma(\mathbf{y}) := \sup \{ c \geq 0 \mid \delta(g_t u_{\mathbf{y}} \mathcal{D}^{n+1}) \leq p^{-ct} \text{ for infinitely many } t \in \mathbb{N} \}$$

for  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$ . From Proposition 4.1 and Lemma 6.1 of [6] we can conclude that

$$(7) \quad w_p(\mathbf{y}) = \frac{n(1 + \gamma(\mathbf{y})) + \gamma(\mathbf{y})}{1 - (n + 1)\gamma(\mathbf{y})}.$$

We are now ready for

**THEOREM 3.4.** — *Suppose  $\mathbf{f} : U \mapsto \mathbb{Q}_p^n$  is an analytic map, and  $U$  is an open subset of  $\mathbb{Q}_p^d$ . Denote by  $\lambda$  the Haar measure on  $\mathbb{Q}_p^d$ . Let  $\gamma \geq 0$  and  $\mathbf{x}_0 \in U$  be such that  $\gamma(f(\mathbf{x}_0)) \leq \gamma$ , then  $\lambda$ -almost every  $\mathbf{x}$  in a neighbourhood of  $\mathbf{x}_0$ , we have  $\gamma(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \gamma$ .*

*Proof.* — Let  $\gamma \geq 0$  and  $\mathbf{x}_0 \in U$  be such that  $\gamma(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)) \leq \gamma$ . We consider the sets  $U_1 := \{\mathbf{x} \in U \mid \gamma(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \gamma\}$  and

$$U_2 := \{\mathbf{x} \in U \mid \mu(B \setminus U_1) = 0 \text{ for some neighbourhood } B \text{ of } \mathbf{x}\}.$$

We claim that  $U_2 = \bar{U}_1 \cap U$ . So if  $\mathbf{x}_0 \in U_1$ , then  $\mathbf{x}_0 \in U_2$ , which implies that  $U_2$  is a nonempty open set, and the conclusion of the theorem follows.

Now take a point  $\mathbf{x}_1 \in \bar{U}_1 \cap U$  and a ball  $B$  of  $\mathbf{x}_1$ , such that  $\tilde{B} := 3^{d-1}B$  is inside a neighbourhood appearing in Corollary 3.3. We want to apply Theorem 2.1 to the function  $\mathbf{x} \mapsto g_t u_{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$ . The first condition (i) of the Theorem is satisfied by Corollary 3.3. Since  $\mathbf{x} \in \bar{U}_1$ , there exists  $\mathbf{x}' \in B \cap U_1$ , and this implies that  $\gamma(\mathbf{f}(\mathbf{x}')) \leq \gamma$ , which, in turn, implies that

$$\forall \gamma' > \gamma, \quad \delta(g_t u_{\mathbf{f}(\mathbf{x}')} \mathcal{D}^{n+1}) \geq p^{-\gamma' t} \text{ for all but finitely many } t \in \mathbb{N}.$$

Now applying Lemma 3.1 we have that

$$\text{cov}(g_t u_{\mathbf{f}(\mathbf{x}')} \Delta)^{\frac{1}{\text{rank}(\Delta)}} \geq p^{-\gamma' t}$$

for all  $\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{D}, n + 1)$  and for all but finitely many  $t \in \mathbb{N}$ . Hence, condition (ii) of the Theorem is satisfied. Taking  $\varepsilon = p^{-\gamma'' t}$ , where  $\gamma'' > \gamma'$ , and applying Theorem 2.1, we have

$$\lambda \left\{ \mathbf{x} \in B \mid \delta(g_t u_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \mathcal{D}^{n+1}) < p^{-\gamma'' t} \right\} \leq C' \left( \frac{p^{-\gamma'' t}}{p^{-\gamma' t}} \right)^\alpha \mu(B).$$

By the Borel–Cantelli lemma we immediately have that for  $\mu$ -a.e.  $\mathbf{x} \in B$  we have that

$$\delta(g_t u_{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \mathcal{D}^{n+1}) \leq p^{-\gamma'' t}$$

for infinitely many  $t \in \mathbb{N}$ . Hence, by definition, for  $\lambda$ -a.e.  $\mathbf{x} \in B$ ,  $\gamma(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq \gamma$  as  $\gamma'', \gamma'$  were taken arbitrarily close to  $\gamma$ . This implies  $\mathbf{x}_1 \in U_2$  giving  $\bar{U}_1 \cap U \subset U_2$  and clearly  $U_2 \subset \bar{U}_1$ . □

Now from formula 7 we can conclude the following:

**COROLLARY 3.5.** — *Suppose  $\mathbf{f} : U \mapsto \mathbb{Q}_p^n$  is an analytic map, and  $U$  is an open subset of  $\mathbb{Q}_p^d$ . Let  $v \geq n$  and  $\mathbf{x}_0 \in U$  be such that  $w_p(f(\mathbf{x}_0)) \leq v$ , then for  $\lambda$ -almost every  $\mathbf{x}$  in a neighbourhood of  $\mathbf{x}_0$ , we have  $w_p(\mathbf{f}(\mathbf{x})) \leq v$ .*

Since one can parameterize analytic manifolds by images of open neighbourhoods under analytic functions, we have the following theorems.

**THEOREM 3.6.** — *Suppose  $\mathcal{M}$  is an analytic manifold of  $\mathbb{Q}_p^n$ . Let  $v \geq n$  and suppose  $w_p(\mathbf{y}_0) \leq v$  for some  $\mathbf{y} \in \mathcal{M}$ , then for almost every  $\mathbf{y}$  in a neighbourhood of  $\mathbf{y}_0$ ,  $w_p(\mathbf{y}) \leq v$ .*

Therefore by Proposition 3.1 from [6], see (4), we also have,

**THEOREM 3.7.** — *Suppose  $\mathcal{M}$  is an analytic manifold of  $\mathbb{Q}_p^n$ . Let  $v \geq n + 1$  and suppose  $w(\mathbf{y}_0) \leq v$  for some  $\mathbf{y}_0 \in \mathcal{M}$ , then for almost every  $\mathbf{y}$  in a neighbourhood of  $\mathbf{y}_0$ ,  $\omega(\mathbf{y}) \leq v$ .*

So, if one point in an analytic  $p$ -adic manifold is not very well approximable, then the set of not very well approximable points has positive measure. Note that this phenomenon was already clear from Theorem 6.2 of [6] for manifolds that were nondegenerate inside some affine subspace. In fact, in that case, the set of not VWA would have measure full by existence of one not VWA vector. The theorems above constitute  $p$ -adic analogues of Theorem 1.4 (a) of [18]. We have not pursued part (b) of the Theorem in loc. cit., which has to do with singular vectors.

#### 4. Multiplicative Diophantine approximation

The multiplicative analogues of Sprindžhuk's conjectures were formulated by Baker and settled by Kleinbock and Margulis in [20]. In [16], D. Kleinbock proves his results for affine subspaces and their nondegenerate manifolds also in the multiplicative context. The setup is more subtle, but the dynamical approach is powerful enough to deal with this; one replaces the one-parameter diagonal action with a multiparameter action. In [11], the second author proved a multiplicative version of a Khintchine type theorem for hyperplanes. Further in [21], the authors established the  $S$ -adic Baker–Sprindžhuk conjectures, namely they also considered the multiplicative case. In §6.3 of [17], D. Kleinbock refers to the possibility of proving his improved exponent results also for subspaces; some of this was accomplished in [25].

**4.1. A dynamical correspondence for *p*-adic VWMA vectors.** — In this section, we define  $g_{\mathbf{t}} \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{R})$ , such that

$$g_{\mathbf{t}}^p := \text{diag}(p^{-t}, 1, \dots, 1) \quad \text{and} \quad g_{\mathbf{t}}^\infty := \text{diag}(p^{-t_0}, p^{-t_1}, \dots, p^{-t_n}),$$

where  $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_n)$  and  $t := \sum_{i=0}^n t_i$ .

LEMMA 4.1. — *A vector  $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}_p^n$  is very well multiplicatively approximable, if and only if, there exist unbounded  $t > 0$  with  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ , such that*

$$\delta(g_{\mathbf{t}} u_{\mathbf{y}} \mathcal{D}^{n+1}) \leq p^{-\gamma t}$$

for some  $0 < \gamma < \frac{1}{n+1}$ .

*Proof.* — Suppose  $\delta(g_{\mathbf{t}} u_{\mathbf{y}} \mathcal{D}^{n+1}) \leq p^{-\gamma t}$ ; this implies that for unbounded  $t > 0$  and  $\tilde{\mathbf{q}} = (q_0, \mathbf{q}) \in \mathcal{D}^{n+1}$ , we have that

$$(8) \quad \max(p^t |q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}|_p, \|\mathbf{q}\|_p) \max_{i=0, \dots, n} (p^{-t_i} |q_i|_\infty) \leq p^{-\gamma t},$$

which implies that

$$(9) \quad \max(p^t \|\mathbf{q}\|_p q_0 + \|\mathbf{q}\|_p \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}|_p, \|\mathbf{q}\|_p) \max_{i=0, \dots, n} (p^{-t_i} |q_i|_\infty) \leq p^{-\gamma t}.$$

This implies that

$$(10) \quad \max(p^t |q'_0 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}|_p \max_{i=0, \dots, n} (p^{-t_i} |q'_i|_\infty), \max_{i=0, \dots, n} (p^{-t_i} |q'_i|_\infty)) \leq p^{-\gamma t},$$

where  $\tilde{\mathbf{q}}' = \|\mathbf{q}\|_p \tilde{\mathbf{q}}$ . Since  $\gamma > 0$ , we have  $\mathbf{q} \neq 0$ . Hence, for  $i = 1, \dots, n$ , we have  $|q'_i|_p = \frac{|q_i|_p}{\|\mathbf{q}\|_p} \leq 1$  giving  $q'_i \in \mathbb{Z}$  for such  $i$ . There exists  $1 \leq k \leq n + 1$ , such that  $\#\{i \mid t_i \geq \gamma t\} = k$ , possibly considering a subsequence of  $\mathbf{t}$ . From  $\max_{i=0, \dots, n} (p^{-t_i} |q'_i|_\infty) \leq p^{-\gamma t}$ , we have that

$$|q'_i|_\infty \leq p^{-\gamma t + t_i} \quad \text{and} \quad 1 \leq p^{-\gamma t + t_i}$$

for  $k$  instances of  $i$ . Otherwise we have  $|q'_i|_\infty \leq p^{-\gamma t + t_i} < 1$ . Therefore,

$$(11) \quad \begin{aligned} \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}') &\leq \prod_{i \text{ such that } t_i \geq \gamma t} |q'_i|_+ \\ &\leq p^{-k\gamma t + \sum_{i \text{ such that } t_i \geq \gamma t} t_i} \\ &\leq p^{(1-k\gamma)t}. \end{aligned}$$

Again possibly taking a subsequence, there exists  $1 \leq m \leq n + 1$ , such that  $\#\{i \mid q'_i \neq 0\} = m$ . By definition,  $q'_i \neq 0$  implies  $|q_i|_+ = |q_i|_\infty$ . Now, by (10) we have that

$$|q'_0 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}|_p |q'_i|_\infty \leq \frac{p^{-\gamma t}}{p^{t-t_i}}.$$

Multiplying over all those  $i$ , such that  $q'_i \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} |q'_0 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}|_p^m \cdot \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}') &\leq \frac{p^{-m\gamma t}}{p^{mt - \sum_{i \text{ such that } q'_i \neq 0} t_i}} \\ &\leq \frac{p^{-m\gamma t}}{p^{mt}} \cdot p^t \\ &\leq p^{-(m\gamma+m-1)t}. \end{aligned}$$

Now, from (11) it follows that

$$\begin{aligned} |q'_0 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}|_p^m &\leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}')^{-\left(\frac{\gamma m+m-1}{1-k\gamma}+1\right)} \\ &\leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}')^{-\frac{m\gamma+m-k\gamma}{1-k\gamma}}. \end{aligned}$$

Hence, we have that

$$|q'_0 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}|_p \leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}')^{-\frac{(m\gamma+m-k\gamma)}{m(1-k\gamma)}}.$$

Since  $\gamma < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{k}$ , we have

$$\frac{(m\gamma + m - k\gamma)}{m(1 - k\gamma)} - 1 = \frac{\gamma(m - k + mk)}{m(1 - k\gamma)} = \varepsilon > 0.$$

We now claim that the  $\Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}')$  appearing here are unbounded. Note that  $|q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}|_p^m \cdot \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}) \rightarrow 0$  due to the existence of unbounded many  $t > 0$ . The same reason also gives

$$1 < |q_0|_p |q_0|_\infty \leq \max(p^{-\gamma t}, \|\mathbf{q}\|_p |q_0|_\infty \|\mathbf{y}\|_p),$$

which implies that

$$1 \leq \|\mathbf{q}\|_p |q_0|_\infty \|\mathbf{y}\|_p,$$

if  $q_0$  is nonzero, which says that  $|q'_0|_+ \geq c$ , where  $c > 0$  depends only on  $\mathbf{y}$ . We denote  $q_i = p^{l_i} z_i \in \mathcal{D}$ , where  $z_i$  are integers without any  $p$  factor. Then,

$$|q'_i|_+ = \begin{cases} |q_i|_\infty \|\mathbf{q}\|_p & \text{if } q_i \neq 0 \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Suppose  $\Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}') \leq M$  for some  $M > 0$ , i.e.  $\prod_{i=0, \dots, n} (|q'_i|_+) \leq M$ , which, in turn, implies that

$$|q'_0|_+ \prod_{\{i>1 \mid q_i \neq 0\}} |z_i|_\infty \leq M.$$

Here we are using that if  $\|\mathbf{q}\|_p = p^l$ , then  $-l_i \leq l$  for  $i > 1$ . Since  $|q'_0|_+$  is bounded below by a positive number, there are finitely many options for the integers  $z_i$  occurring in  $q_i$  for  $i > 1$ . Hence, we have that

$$|q'_0|_+ \prod_{\{i>1 \mid q_i \neq 0\}} (p^{l_i} \|\mathbf{q}\|_p) \leq M'$$

for some  $M' > 0$ . The above inequality gives

$$(12) \quad |q'_0|_+ \prod_{\{i>1 \mid q_i \neq 0\}} p^{l+l_i} \leq M'.$$

Hence, we have  $|q'_0|_+ \leq M'$ , and arguing as in (10) we may conclude that

$$|z_0|_\infty = |q'_0|_\infty |q'_0|_p \leq \max(1, M' \|\mathbf{y}\|_p)$$

has only finitely many options. Now, from (12)

$$c \leq \prod_{\{i \mid q_i \neq 0\}} p^{l+l_i} \leq M'.$$

Thus, we now have  $-\alpha \leq \sum_{\{i \mid q_i \neq 0\}} l_i + ml \leq \alpha$  for some  $\alpha > 0$ . Since  $c \leq |q_0|_+ \leq M'$ , which gives  $-\beta \leq (l_0 + l) \leq \beta$  for some  $\beta > 0$ . Hence, for  $i > 1$  and  $q_i \neq 0$ , we have  $0 \leq l_i + l \leq \alpha'$  for some  $\alpha' > 0$ . But the only way  $|q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}|_p^m \cdot \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}})$  can go to 0 is if there exists some  $\tilde{\mathbf{q}} (\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ , such that  $q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y} = 0$ . In that case,  $\mathbf{y}$  is very well multiplicatively approximable. So, if  $\mathbf{y}$  is not such, then  $\Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}')$  has to be unbounded and satisfies

$$|q'_0 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}|_p \leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}')^{-(1+\varepsilon)},$$

where  $\tilde{\mathbf{q}}' = (q'_0, \mathbf{q}') \in \mathbb{Z}[1/p] \times \mathbb{Z}^n$ . Another crucial observation now is that  $|q'_0|_p$  is bounded above by a constant depending on  $\mathbf{y}$ . So, in the case  $q'_0 \notin \mathbb{Z}$ , we can write

$$|q'_0|_p \cdot (q'_0 + \mathbf{q}' \cdot \mathbf{y})|_p |q'_0|_p \leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}')^{-(1+\varepsilon)}.$$

Now taking  $\tilde{\mathbf{q}}'' = |q_0|_p \tilde{\mathbf{q}}'$  and using the upper bound on  $|q_0|_p$  enables us to conclude

$$|q''_0 + \mathbf{q}'' \cdot \mathbf{y}|_p \leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}}'')^{-(1+\varepsilon')}$$

for infinitely many  $\tilde{\mathbf{q}}'' \in \mathbb{Z}^{n+1}$  with  $\varepsilon' < \varepsilon$ . Therefore,  $\mathbf{y}$  is very well multiplicatively approximable.

We now prove the converse. Suppose that

$$(13) \quad |q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}|_p \leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}})^{-(1+\varepsilon)},$$

for infinitely many  $\tilde{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}^{n+1}$ . Now choose  $t_i > 0$ , such that  $|q_i|_+ = \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}})^{-\frac{\varepsilon}{n+1}} p^{t_i}$ . Multiplying these we get  $p^t = \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}})^{(1+\varepsilon)}$ , which guarantees  $t$  to be unbounded. The choice of  $t_i$  gives the following condition

$$p^{-t_i} |q_i|_\infty \leq p^{-t_i} |q_i|_+ \leq \Pi_+(\tilde{\mathbf{q}})^{-\frac{\varepsilon}{n+1}} = p^{-\gamma t} \quad \forall i = 0, \dots, n,$$

where  $\gamma = \frac{\varepsilon}{(n+1)(1+\varepsilon)}$ . Hence,  $\|g_t^\infty u_\mathbf{y}^\infty \tilde{\mathbf{q}}\|_\infty \leq p^{-\gamma t}$ . On the other hand,

$$|p^{-t}(q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})|_p = p^t |q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}|_p \leq p^t \cdot \frac{1}{p^t} = 1,$$

due to (13). Therefore we have  $c(g_{\mathbf{t}}u_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{Q}}) \leq p^{-\gamma t}$ . Now taking  $[\mathbf{t}]$  consisting of integer factors and observing that the ratio of  $\delta(g_{[\mathbf{t}]}u_{\mathbf{y}}\mathcal{D}^{n+1})$ , and  $\delta(g_{\mathbf{t}}u_{\mathbf{y}}\mathcal{D}^{n+1})$  is bounded by a uniform factor. Hence, reducing  $\gamma$  a bit we can conclude the lemma.  $\square$

Note that one direction ( $\Rightarrow$ ) of the last lemma was already observed by Kleinbock and Tomanov in [21], with a slight variation. The main content of the previous lemma is that we can come back from dynamics to number theory using the reverse direction, which, to the best of our knowledge, was not known earlier.

**THEOREM 4.2.** — *For any analytic manifold of  $\mathbb{Q}_p^n$ , if one point is not very well multiplicatively approximable, then almost every point in a neighbourhood of that point is not very well multiplicatively approximable.*

*Proof.* — Following the proof of Theorem 3.4 and considering

$$U_1 := \left\{ \mathbf{x} \in U \left| \begin{array}{l} \text{for any } 0 < \gamma < \frac{1}{n+1}, \delta(g_{\mathbf{t}}u_{\mathbf{y}}\mathcal{D}^{n+1}) > p^{-\gamma t} \\ \text{for all but finitely many } \mathbf{t} \in \mathbb{Z}_+^{n+1} \end{array} \right. \right\}$$

, one can show that  $U_1$  has positive measure if nonempty. Then, using the above Lemma 4.1 one can conclude that if one point is not very well multiplicatively approximable, then  $U_1 \neq \emptyset$ , hence is of positive measure. Then again using Lemma 4.1, the conclusion follows.  $\square$

We now turn to the proof of Theorem 1.3. Note that by repeating the argument as in Proposition 6.1 of [6], it can be proved that:

**PROPOSITION 4.3.** — *Take  $\mathcal{R} = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{R}$ . Let  $X$  be a Besicovitch metric space and  $\mu$  be a uniformly Federer measure on  $X$ . Denote  $\tilde{B} := B(x, 3^{n+1}r)$ . Suppose we are given a continuous function  $\mathbf{f} : X \mapsto \mathbb{Q}_p^n$  and  $C, \alpha > 0$  with the following properties*

- (i)  $x \mapsto \text{cov}(g_{\mathbf{t}}u_{\mathbf{f}(x)}\Delta)$  is  $(C, \alpha)$ -good with respect to  $\mu$  in  $\tilde{B} \forall \Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{D}, n+1)$ ,
- (ii) for any  $d > 0$  there exists  $T = T(d) > 0$ , such that for any  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$  with  $t \geq T$  and any  $\Delta \in \mathcal{P}(\mathcal{D}, n+1)$ , one has

$$(14) \quad \sup_{x \in B \cap \text{supp } \mu} \text{cov}(g_{\mathbf{t}}u_{\mathbf{f}(x)}\Delta) \geq p^{-(\text{rank } \Delta)dt}.$$

Then, for  $\mu$ -a.e.  $x$ ,  $\mathbf{f}(x)$  is not VWMA.

Note that condition (ii) in the above Lemma is actually necessary. If (ii) does not hold, then there exists unbounded  $t$  with  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ , such that

$$\delta(g_{\mathbf{t}}u_{\mathbf{f}(x)}\mathcal{D}^{n+1}) \leq p^{-dt}$$



for some  $0 < d < \frac{1}{n+1}$  for all  $x \in B \cap \text{supp } \mu$ . Now, from the above lemma, we have that  $\mathbf{f}(x) \in \mathcal{WM}_{\frac{md+m-kd}{m(1-kd)}}$  for some  $1 \leq m, k \leq n + 1$ . Since  $\frac{md+m-kd}{m(1-kd)} > \frac{1}{1-d} > 1$ , we have that  $\mathbf{f}(B \cap \text{supp } \mu) \subset \mathcal{WM}_{\frac{1}{1-d}}$ , i.e  $\mathbf{f}(x)$  is VWMA for all  $x \in B \cap \text{supp } \mu$ . Also condition (ii) in the above proposition is the same as

for any  $d > 0 \exists T = T(d) > 0$  such that for any  $\mathbf{t} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$  with  $t \geq T$

$$(15) \quad \forall j = 1, \dots, n \text{ and } \forall \mathbf{w} \in \bigwedge^j \mathcal{D}^{n+1}, \text{ one has}$$

$$\max (p^t \|Rc(\mathbf{w})\|_p, \|\pi(\mathbf{w})\|_p) \max_I p^{-t_I} \|w_I\|_\infty \geq p^{-jdt},$$

which is independent of  $\mathbf{f}$  but depends on the affine subspace in which the manifold is nondegenerate.

Combining all these previous observations and repeating the same arguments as in section §7 of [6], we have the following.

**THEOREM 4.4.** — *Let  $\mu$  be a Federer measure on a Besicovitch metric space  $X, \mathcal{L}$  an affine subspace of  $\mathbb{Q}_p^n$ , and let  $\mathbf{f} : X \rightarrow \mathcal{L}$  be a continuous map, such that  $(\mathbf{f}, \mu)$  is good and nonplanar. Then the following are equivalent:*

- (i)  $\{x \in \text{supp } \mu \mid \mathbf{f}(x) \text{ is not VWMA} \}$  is nonempty.
- (ii)  $\mathbf{f}(x)$  is not VWMA for  $\mu$ -a.e  $x$ .
- (iii) Condition (15) holds.

Theorem 1.3 now follows as a corollary using Theorem 4.3 of [21].

### BIBLIOGRAPHY

- [1] V. BERESNEVICH, V. BERNIK, H. DICKINSON & M. M. DODSON – “On linear manifolds for which the Khintchin approximation theorem holds”, *Vesti Acad Navuk Belarusi. Ser. Fiz.-Mat. Navuk* **2000** (2000), p. 14–17, Belorussian.
- [2] V. BERESNEVICH & D. KLEINBOCK – “Quantitative non-divergence and Diophantine approximation on manifolds”, <https://arxiv.org/abs/1906.00747>.
- [3] V. V. BERESNEVICH & E. I. KOVALEVSKAYA – “On Diophantine approximations of dependent quantities in the *p*-adic case”, *Mat. Zametki* **73** (2003), no. 1, p. 22–37, translation: *Math. Notes* 73:1-2 (2003), 21–35.
- [4] Y. BUGEAUD – “Dynamical systems and Diophantine approximation”, *Semin. Congr.*, no. 19, ch. Multiplicative Diophantine approximation, p. 105–125, Soc. Math. France, Paris, 2009.
- [5] R. CAO & J. YOU – “Diophantine vectors in analytic submanifolds of Euclidean spaces”, *Sci. China Ser. A* **50** (2007), p. 1334–1338.

- [6] S. DATTA & A. GHOSH – “Diophantine inheritance for  $p$ -adic measures”, <https://arxiv.org/abs/1903.09362>.
- [7] ———, “ $S$ -arithmetic inhomogeneous Diophantine approximation on manifolds”, <https://arxiv.org/abs/1801.08848v1>.
- [8] A. GANGULY & A. GHOSH – “Quantitative diophantine approximation on affine subspaces”, *Math. Z.* **292** (2019), no. 3–4, p. 923–935.
- [9] A. GHOSH – “Dynamics of homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds”, Ph.D. Thesis, Brandeis University.
- [10] ———, “A Khintchine-type theorem for hyperplanes”, *J. London Math. Soc.* **72** (2005), no. 2, p. 293–304.
- [11] ———, “Diophantine approximation on affine hyperplanes”, *Acta Arithmetica* **144** (2010), p. 167–182.
- [12] ———, “Diophantine approximation and the Khintchine-Groshev theorem”, *Monatsh. Math.* **3** (2011), no. 163, p. 281–299.
- [13] ———, “A Khintchine Groshev theorem for affine hyperplanes”, *International Journal of Number Theory* **7** (2011), no. 4, p. 1045–1064.
- [14] ———, “Handbook of group actions. Vol. IV”, Adv. Lect. Math. (ALM), no. 41, ch. Diophantine approximation on subspaces of  $\mathbb{R}^n$  and dynamics on homogeneous spaces, p. 509–527, Int. Press, Somerville, MA, 2018.
- [15] A. GHOSH & A. MARNAT – “On Diophantine transference principles”, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **166** (2019), no. 3, p. 415–431.
- [16] D. KLEINBOCK – “Extremal subspaces and their submanifolds”, *Geom. Funct. Anal.* **13** (2003), no. 2, p. 437–466.
- [17] ———, “An extension of quantitative nondivergence and applications to Diophantine exponents”, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), no. 12, p. 6497–6523.
- [18] ———, “An ‘almost all versus no’ dichotomy in homogeneous dynamics and Diophantine approximation”, *Geom. Dedicata* **149** (2010), p. 205–218.
- [19] D. KLEINBOCK, E. LINDENSTRAUSS & B. WEISS – “On fractal measures and Diophantine approximation”, *Selecta Math. (N.S.)* **10** (2004), no. 4, p. 479–523.
- [20] D. KLEINBOCK & G. A. MARGULIS – “Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds”, *Ann Math* **148** (1998), p. 339–360.
- [21] D. KLEINBOCK & G. TOMANOV – “Flows on  $S$ -arithmetic homogeneous spaces and applications to metric Diophantine approximation”, *Comm. Math. Helv.* **82** (2007), p. 519–581.
- [22] A. MOHAMMADI & A. S. GOLSEFIDY – “ $S$ -arithmetic Khintchine-type theorem”, *Geom. Funct. Anal.* **4** (2009), no. 19, p. 1147–1170.
- [23] ———, “Simultaneous Diophantine approximation on non-degenerate  $p$ -adic manifolds”, *Israel J. Math.* **188** (2012), p. 231–258.

- [24] N. MOSHCHEVITIN – “On Kleinbock’s Diophantine result”, *Publ. Math. Debrecen* **79** (2011), no. 3–4, p. 531–537.
- [25] Y. ZHANG – “Multiplicative Diophantine exponents of hyperplanes and their non-degenerate submanifolds”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **664** (2012), p. 93–113.