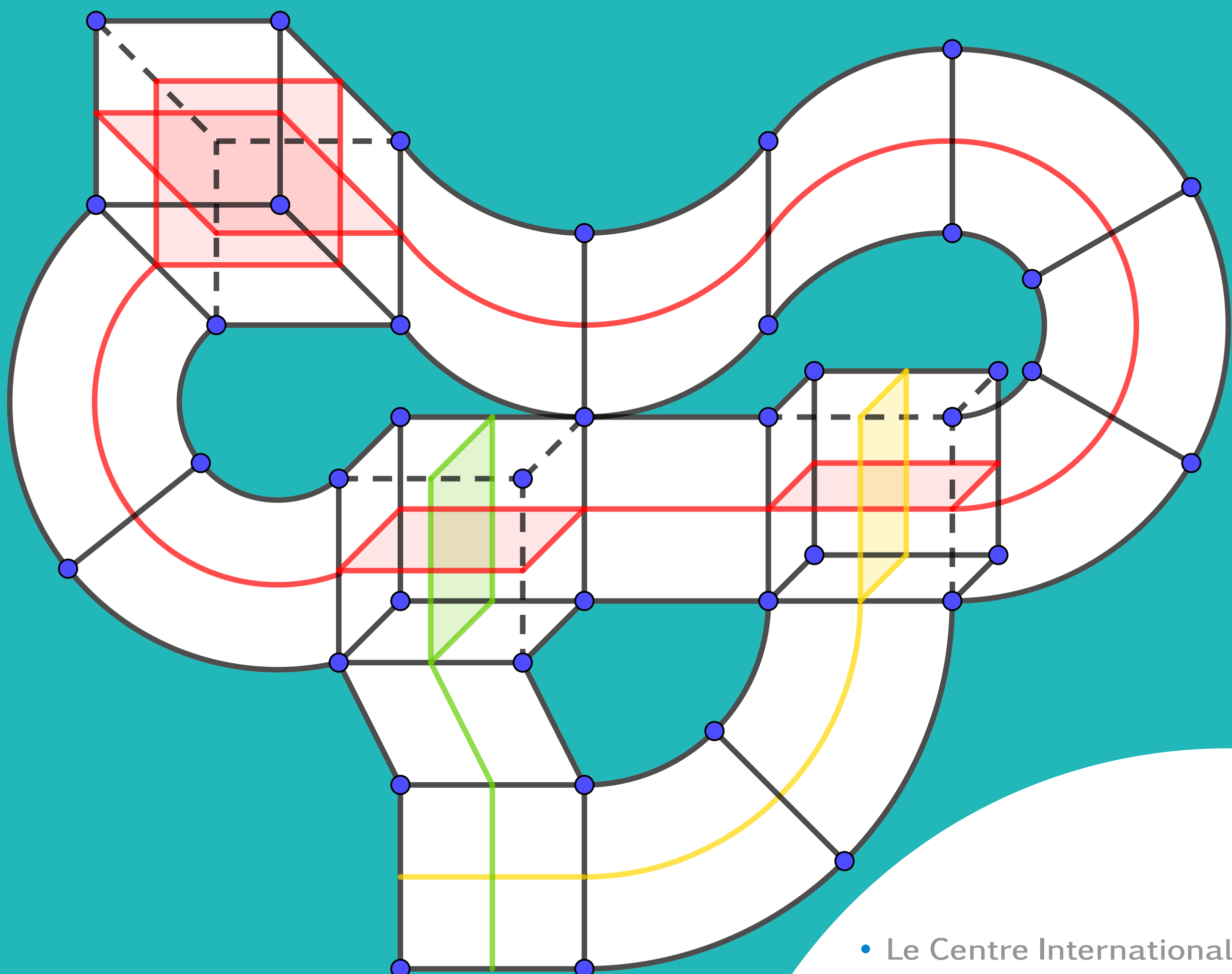
AVRIL 2020 – N° 164

la Gazette des Mathématiciens



- **Le Centre International de Rencontres Mathématiques**
- **Mathématiques** – La mathématisation de l'hérédité
- **Entretien** avec Bernard MALGRANGE
- **Raconte-moi...** les complexes cubiques CAT(0)

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :
SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. Exemple de complexe cubique contenant des configurations d'hyperplans dites « pathologiques » : auto-intersection, auto-tangence, inter-tangence. Ce sont ces configurations qui sont interdites dans la théorie des complexes cubiques spéciaux développée par F. Haglund and D. Wise. (crédit : Anthony Genevois).

Nº 164

Éditorial

Une architecture conviviale, un environnement unique et magnifique, une organisation sans failles, une bibliothèque incroyable, « et une bouillabaisse légendaire ! » ajouteraient d'autres collègues que je ne citerai pas ici. Vous avez deviné, je parle du Cirm. Cette nouvelle *Gazette* présente un mini-dossier faisant le point sur ce haut lieu des mathématiques internationales. Vous y trouverez une interview rondement menée de son directeur, Patrick Foulon, ainsi qu'une présentation des récents changements, y compris architecturaux. Les rôles du Cirm sont bien évidemment rappelés. Savez-vous par exemple, que vous pouvez postuler à pas moins de 12 cases pour passer une semaine ou deux à 20 minutes à pied des calanques sans culpabiliser, pardon pour travailler d'arrache-pied en confinement mathématique ?

Comment parvient-on à mathématiser le vivant, y compris celui qui nous confine en ce moment ? Un article historique passionnant retrace les aventures des pères de la génétique mathématique, Mendel, Galton et Pearson qui, à coups de probabilités conditionnelles et d'audacieuses hypothèses sur les mécanismes de l'hérédité, ont établi les fondements de cette discipline. Outre les avancées théoriques, on y trouvera des anecdotes bien croustillantes sur l'eugénisme de certains ou sur les combats épiques entre *biométriciens* et *généticiens*. Il vous faudra choisir votre camp.

Il a participé lui-même à l'histoire des mathématiques : Bernard Malgrange est interviewé dans cette *Gazette*. Avec son langage truculent bien à lui, il retrace son parcours et ses mathématiques, et décoche en passant quelques flèches bien distrayantes. L'intervieweur a bien pris soin par ailleurs de fournir des éléments mathématiques pour éclairer les quelques fulgurances qui jaillissent parfois des réponses de l'interviewé. Bref, ne manquez pas soixante-dix ans de mathématiques incarnées.

Tout aussi intrigante qu'un coronavirus en 3D, notre nouvelle couverture mélange deux styles, celui des graphes et celui de la géométrie, et l'on se demande bien ce dont il s'agit. C'est un exemple de *complexe cubique*, une créature non virale née dans l'esprit M. Gromov à la fin des années quatre-vingt. Le lecteur novice comme je l'étais sera très surpris sans doute d'apprendre que ces chapelets amusants permettent de comprendre les variétés bien lisses de dimension trois. Un Raconte-moi tout en douceur et beauté vous expliquera, entre autres, ce lien fort étonnant.

Ce numéro est dense en discussions, politiques, morales ou simplement pragmatiques, concernant les différentes casquettes de notre métier. Nous publions ainsi une intense réflexion autour de la récente et audacieuse Licence *mathématiques et humanités* marseillaise, un texte qui pourrait faire bouger les lignes concernant nos enseignements, mais également notre regard sur les autres sciences. En tribune, vous pourrez lire une autre réflexion, beaucoup plus véhémente, qui renoue assez brutalement avec le ton plus emporté qui animait les lettres à la *Gazette* il y a quelques décennies. La SMF étant frontalement critiquée, vous trouverez à la suite de cette tribune une réponse de deux de ses représentants, en accord avec les auteurs de celle-ci.

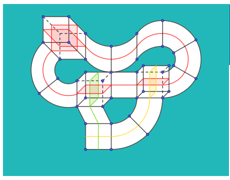
Nous publions enfin de beaux textes sur deux de nos collègues récemment décédés, Christian Mauduit et Patrick Dehornoy. Entre mathématiques et tranches de vie, celles et ceux qui les ont connus retrouveront sans doute avec bonheur les mathématiciens qu'ils ont croisés ou côtoyés ; les autres découvriront deux vies liées à des personnes, des lieux... et des théorèmes qui resteront.

Ceci est le dernier numéro de Boris Adamczewski (mais peut-être reviendra-t-il à la *Gazette* dans quelques décennies ?). J'aimerais de nouveau louer son travail de titan éclairé lors de la refonte en 2014 de notre revue chérie, ainsi que ses talents de rédacteur en chef. Je voudrais également le remercier d'avoir prolongé son mandat dans le comité pendant un an et demi, ce qui, entre autres, m'a permis de prendre la relève dans de bonnes conditions. J'aimerais aussi remercier, plus que d'habitude, Claire Ropartz pour son travail en confinement dans des conditions difficiles. Enfin, j'exprime toute ma reconnaissance à celles (nombreuses et en première ligne) et ceux qui continuent à se rendre sur leur lieu de travail pour que nous puissions continuer à vivre et à être soignés normalement ; et toute mon animosité pour ceux qui ont toujours cherché à affaiblir et durcir les conditions de vie et de travail de ces véritables premiers de cordée.

Au nom de toute l'équipe de la *Gazette*, je vous souhaite une bonne lecture confinée.

Damien Gayet

la Gazette des Mathématiciens



N° 164

Sommaire

la Gazette des Mathématiciens

Société Mathématique de France

Nº 164

Mot du président

Chères et chers collègues,

C'est dans un contexte bien particulier que j'écris ce « mot du président » qui sera mon dernier dans la *Gazette*.

Le confinement dû au Covid-19 nous touche tous directement, femmes et hommes, enseignants ou chercheurs dans des établissements publics ou privés, et évidemment parents et citoyens. Cette crise aura de nombreuses conséquences à moyen et long terme qu'on ne peut encore imaginer. Toutes les sciences, et les mathématiques en particulier, occupent un rôle fondamental pendant cette période, et pour la construction de notre avenir commun. L'annonce faite en mars 2020 par le Président Macron sur la LPPR pour augmenter de 33% le financement de la recherche en France sur 10 ans constitue un engagement véritablement important – reste à voir la répartition des sommes et la place réservée à l'emploi scientifique dans cette réforme. Cela représente une étape significative dans la reconstruction du paysage scientifique et médical, que nous espérons encore plus ambitieuse. En effet, la recherche est la pierre de voute qui permet d'anticiper des crises comme celle que nous traversons, et de réagir au plus vite. Des investissements massifs seront donc indispensables au sortir de la crise, et il faudra veiller à ce que cette dernière ne serve pas de justification à des mesures qui ne correspondraient pas aux besoins de la communauté scientifique.

Durant cette période, en partenariat avec le collectif de sociétés savantes avec lequel la SMF collabore depuis près de deux ans, nous continuons à promouvoir la parole et l'approche scientifiques dans les médias et alertons sur la situation délicate des plus jeunes et des plus précaires de nos collègues. Nous relayons également toutes les inquiétudes sur l'impact du confinement sur l'avancée des projets de recherche. D'autres actions communes sont à venir dans les prochains mois, qui s'annoncent délicats.

Du côté de la SMF, très rapidement nous avons pris des mesures pour traverser cette période. Les personnels à Paris et à Marseille, à la SMF et au CIRM, sont passés en télétravail et continuent, malgré les conditions, d'assurer au mieux la continuité de service. Tout le monde s'adapte pour continuer à sortir nos publications, préparer les centaines de manifestations à venir, et apporter à nos membres des contenus scientifiques variés. Cependant, l'impact de cette crise sanitaire, notamment sur le CIRM, sera important.

La transition est difficile, mais ce dernier mot dans la *Gazette* est l'occasion pour moi de tirer un bilan de mes quatre années de présidence. Arrivé il y a 7 ans à la SMF, j'ai été fasciné par l'énergie déployée par les personnels et bénévoles pour faire vivre l'association et les mathématiques en général, mais aussi surpris par le déficit d'image et de publicité de la SMF au regard de son engagement. Aussi, lorsque l'on m'a proposé de prendre la succession de Marc Peigné (que je remercie encore pour l'énorme travail qu'il a effectué), j'ai décidé de m'engager sur trois chantiers majeurs :

– moderniser notre fonctionnement et notre structure,
– étendre nos actions pour promouvoir et diffuser des mathématiques,
– collaborer avec d'autres sociétés savantes pour renforcer le poids de nos actions.

Le précédent site web et notre système informatique était obsolète et nonconforme, donnant une image dépassée de la SMF. Comme pour la *Gazette*, il était urgent de tout faire évoluer pour être en accord avec la modernité de la science que nous sommes censés représenter. La refonte du système informatique, la restructuration de notre maison d'édition et la mise à jour de nos statuts d'association ont occupé une grande partie de notre énergie et de nos moyens. La SMF a développé un environnement numérique sécurisé, dématérialisé, fondé sur des bases de données unifiées. Nous continuons à investir pour nous maintenir à jour et pour l'adapter aux usages des abonnés et des membres. C'est au prix de grands efforts des personnels de la SMF, des bureaux et conseils d'administration que la migration fin 2018 fut un succès. Du côté des publications, grâce à Valérie Berthé et Frédéric Bayart, la SMF s'est réorganisée en fonction de ses nouveaux outils et de ses nouvelles attributions. En particulier nous sommes désormais en charge de l'ensemble du processus éditorial des *Annales de l'ÉNS*. Tous nos fascicules et ouvrages sortent à présent en temps et en heure, à des tarifs d'abonnement que nous maintenons toujours aussi bas, conformément à notre statut d'utilité publique.

Tous les présidents de la SMF doivent répondre tous les trois jours aux questions « pourquoi adhérer ? » et « qu'est-ce que ça m'apporte à moi et aux autres ? ». Pas si facile d'y répondre, l'argument « adhérez car c'est important de soutenir la SMF » n'est pas ou plus suffisant ! Il fallait donc développer et promouvoir nos actions de diffusion, en accord avec nos missions. Nous organisions déjà les cycles « Un texte, un mathématicien »» et « Une question un chercheur », destinés aux élèves de lycée et de classes préparatoires. Dorénavant « Mathématiques étonnantes », porté par Jérôme Buzzi, s'adresse aux étudiant.e.s de licence, et le concours SMF junior (pour lequel vous pouvez proposer des sujets !) réunit tous les deux ans des centaines d'étudiant.e.s de master pour une compétition en équipe sur 10 jours. Depuis 2019, les conférences SMF-CIRM sont, elles, spécialement dédiées aux doctorants et jeunes docteurs. Je vous annonce enfin que la SMF va succéder dès cette année à la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris à la coordination du programme MathC2+. En partenariat avec le Ministère de l'éducation nationale et Animath, et avec le soutien du Collège de France, la SMF sera le gestionnaire principal de MathC2+. Le principe de ce programme est de financer des stages de quelques jours en mathématiques pour les élèves des classes de 4^{e} à la 1re, partout en France – chaque année, près de 1500 élèves regroupés en une quarantaine de stages bénéficient de ce programme. Nous avons également contribué au montage du réseau R2M, pour que les docteurs puissent garder un contact avec la recherche même en ne travaillant pas dans des milieux académiques. Ainsi, la SMF promeut désormais les mathématiques durant tout le parcours élève-étudiant, de la 4^{e} jusqu'à la thèse et après : vous voici maintenant équipés pour répondre aux fameuses questions !

De nombreux débats issus des conseils et comités de la SMF, et beaucoup d'autres messages qui nous sont remontés, méritent d'être portés auprès et au-delà de la communauté. J'ai la conviction que pour que nos revendications sur l'enseignement (avec l'engagement remarquable de Louise Nyssen) et la recherche, nos alertes (sur les collègues en difficulté par exemple), soient plus largement diffusés et entendus, il faut travailler avec d'autres associations et sociétés savantes, pas seulement liées aux mathématiques. Ainsi, collaborer avec cette assemblée de sociétés savantes (voir `https://societes-savantes.fr/`) constituée il y a deux ans nous a permis par exemple de faire signer notre manifeste pour un enseignement des mathématiques au lycée par une trentaine de sociétés. Nos prises de position communes, souvent publiées dans des quotidiens nationaux, ont circulé au sein de nombreux ministères et cabinets de responsables politiques. Il faut bien reconnaître que cela n'a pas eu encore tous les effets escomptés mais clairement c'est une voie qu'il faut continuer à explorer.

Enfin, je ne réalisais pas vraiment le rôle de la SMF dans le fonctionnement du CIRM avant de faire partie du Bureau de la SMF – peut-être est-ce votre cas. Pourtant ce rôle est essentiel, à la fois dans la gestion et dans l'évolution du CIRM. J'ai eu la chance de contribuer à l'extension du CIRM portée par Patrick Foulon : extension du bâtiment de l'Annexe (projet CNRS-région PACA, soutenu par la SMF à hauteur de 800.000 euros) et rénovation du restaurant (projet d'un montant de 1,2 million d'euros intégralement géré par la SMF). J'en profite d'ailleurs pour remercier ici Patrick Foulon, directeur du CIRM depuis près de 10 ans, qui a transformé, avec ses équipes et le soutien des tutelles AMU, CNRS et SMF, ce bel établissement en un outil moderne et efficace. Dans sa nouvelle configuration, le CIRM peut accueillir en plus d'une conférence « standard » un deuxième événement d'une cinquantaine de personnes toujours dans des conditions exceptionnelles : n'hésitez pas à y aller, enfin dans quelques semaines...

Malgré ces avancées, la SMF fait encore face à de nombreux défis, dans l'édition, l'organisation et la mobilisation pour ses événements, et la défense des mathématiques auprès de tous les acteurs de la société.

Tout d'abord, le changement de modèle dans l'édition scientifique remet en question notre équilibre financier. Nous avons entamé une évolution et réfléchissons à d'autres modèles de diffusion en open access, comme la mise en ligne gratuite de nos collections de livres. Nos revues, elles, ont encore un très large public. Par exemple, le nombre de soumissions a augmenté de 50 pour cent en 2019! Le défi consiste à trouver le bon modèle pour nos revues, pour mieux répondre à l'exigence de notre communauté autour d'un accès plus large, et de façon plus pragmatique à la baisse inéluctable des abonnements, probablement accélérée par la crise actuelle et son exigence de dématérialisation. Même si pour le moment la santé financière de la SMF est bonne (merci au trésorier David Dos Santos Ferreira!), l'adaptation de notre modèle nécessitera un soutien financier de la communauté.

Un autre challenge est la mobilisation des adhérent.e.s et la participation à nos activités associatives. Les bénévoles et personnels de la SMF s'impliquent énormément pour organiser nos manifestations, mais il est souvent décevant de voir une salle à moitié pleine pour des exposés remarquables. Participer à nos événements, amener certains cycles dans votre université, nous aide et fait connaître les actions de la SMF. La mobilisation de la communauté, y compris lorsque nous effectuons des enquêtes sur l'enseignement ou la recherche, est indispensable, en plus des adhésions. Incitez vos jeunes collègues à adhérer (c'est gratuit!), les moins jeunes également, et à publier sur notre forum ou dans la *Gazette* – tout article publié dans la *Gazette* est lu par près de 2000 personnes, c'est beaucoup plus que dans les meilleures revues!

Le défi le plus grand reste celui de porter la voix des mathématiques, auprès des médias, politiques, entreprises. La place de l'enseignement de notre science dans l'enseignement secondaire est fragilisée, le discours et l'approche scientifiques ne prédominent pas dans la société, et le doctorat dans les entreprises ou au sein de l'État n'est pas assez reconnu. Évidemment nous ne sommes pas seuls et beaucoup d'autres structures (nos amies la SMAI et la SFdS, l'INSMI, toutes les associations avec Animath en tête) s'attellent à ces questions. Le chemin semble encore long, même si la situation actuelle pourrait de façon fortuite nous replacer au centre des débats.

Ces quatre années intenses de présidence, avec leurs nombreux challenges, m'ont apporté une expérience mémorable. J'en retiens également la riche collaboration avec tous les personnels de la SMF, à Paris et à Marseille : Christian, Claire, Mafalda, Marie-Françoise, Odile, et Sabine, qui sont dévoués à la SMF et m'ont supporté (dans tous les sens du terme) lors de mes mandats. Merci également à toutes celles et ceux qui œuvrent au quotidien pour que le CIRM reste le plus bel endroit pour faire des mathématiques. Tous les projets ont été portés par les nombreux membres des Bureaux, qui ont donné bénévolement leur temps sans compter pour porter la voix des mathématiques. Tout a été avant tout un travail d'équipe, et l'état d'esprit sérieux mais convivial qui régnait lors des Bureaux de la SMF, a rendu possibles nos avancées. Je remercie sincèrement toutes et tous, personnels et bénévoles, d'avoir cru en les projets que je présentais, de les avoir critiqués quand c'était nécessaire (souvent, donc !), et de m'avoir soutenu même quand ceux-ci balbutiaient. Et c'est avec impatience que j'attendrai les futures *Gazette* pour y découvrir les nouvelles actions et idées développées par nos successeurs.

Bien à vous,

Le 14 avril 2020

Stéphane SEURET, président de la SMF

Un entretien avec Patrick Foulon, directeur du Cirm

Patrick Foulon revient sur ces dix années passées à la tête du Cirm.
Propos recueillis par S. Vareilles[1], avec C. Montibeller[2].

Qu'est-ce qui vous a motivé en 2010 pour accepter ce poste ?

Tout d'abord de très bons souvenirs de séjours au Cirm...

Un lieu convivial où l'on prend le temps de réfléchir et d'échanger avec nos collègues. Ensuite évidemment le challenge ! J'ai eu envie de contribuer au rayonnement de cet outil au service de la communauté mathématique française et mondiale.

Quelle place occupe le Cirm dans le paysage mathématique national et international ? Qu'est-ce qui le caractérise ?

C'est tout d'abord le premier centre de ce type au monde en termes de fréquentation : nous avons reçu en 2017 plus de 3700 chercheurs.ses, et encore 3421 en 2018 malgré une période difficile de travaux. Le Cirm agrandi a accueilli 4735 participant.e.s en 2019 !

Le Cirm est un lieu destiné à faire pleinement connaître les résultats de son travail et échanger avec les collègues dans des conditions uniques et remarquables et qui font sa valeur ajoutée, comme par exemple : l'immersion, son site exceptionnel, sa communication internationale qui développe sa visibilité, sa réputation et qui en font un lieu connu et reconnu dans le monde entier, un témoin de la recherche grâce à la production de films.

Comment sont sélectionnées les conférences ? Quels sont les critères principaux d'évaluation ?

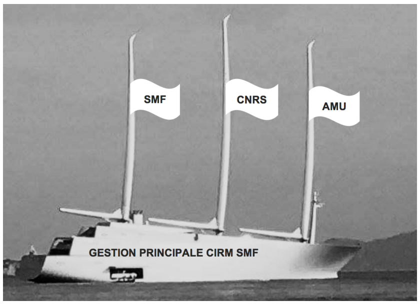
Ce sont les membres du Conseil scientifique international du Cirm qui étudient les dossiers reçus en réponse à nos appels d'offres bi-annuels. Les président.e.s du Conseil scientifique (actuellement Françoise Dal'Bo) présentent ensuite en Conseil d'administration les différents choix. Ces dernières années la mission du cs a été particulièrement difficile : la pression était telle qu'il était impossible d'accepter tous les très bons dossiers – au regard des créneaux disponibles au Cirm. La pression scientifique du Cirm était de plus de 2... ! Une candidature sur deux n'était pas retenue... Cette situation est notamment une des principales raisons qui ont imposé la nécessité d'un important développement immobilier. Avec deux salles de conférences en 2019 et des logements supplémentaires il est désormais possible d'accueillir deux grands événements simultanément au Cirm. En revanche, les financements – qui nous permettent de soutenir les événements à hauteur de 40 personnes pour chaque conférence – restent les mêmes. Ce qui nous a amenés à développer de nouvelles offres pour accueillir des événements autofinancés qui remplissent cependant les mêmes critères d'excellence scientifique. Parmi les éléments de choix du cs, citons par exemple : projet scientifique de haut niveau, originalité du projet, équilibre des thématiques, transfert de connaissances vers les doctorants et jeunes chercheurs, la

1. Responsable communication/audiovisuel - Cirm.
2. Chargée de la coopération internationale - Cirm.

présence d'au moins une femme et d'étrangers, de jeunes, dans le comité d'organisation, etc.

Quelles sont les grandes composantes des ressources du Cirm ?

J'ai pris l'habitude d'illustrer le fonctionnement financier du Cirm par un bateau à 3 mâts – chacune des voiles est une de nos tutelles (cnrs-smf-amu) – auquel s'ajoute un moteur complémentaire qui est le ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation. La coque du bateau est ce que l'on appelle le Cirm-smf et qui s'occupe de toute la gestion « accueil-hôtellerie-restauration ». Le Cirm-smf est une composante clairement identifiée dans la Société Mathématique de France et est autogéré avec l'ensemble des tutelles. Au cours des années le développement du Cirm a été aussi accompagné par une croissance des soutiens d'organismes étrangers.

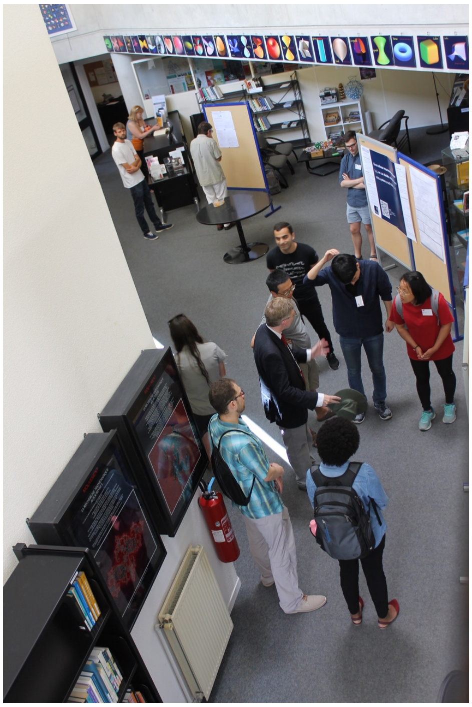


Si vous deviez retenir quelques événements marquants depuis la création du CIRM, quels seraient-ils ?

Peut-être pas des événements, car ils sont nombreux depuis 1981... Je parlerais d'abord de personnes, de mathématicien.e.s. , de ceux et celles qui ont fait le Cirm et qui continuent de le faire vivre. Et puis il y a ceux qui ont marqué son histoire et celle des mathématiques françaises et mondiales. Des influenceurs sans le savoir – comme Jean Morlet, Alex Grossman ; l'immense Jean-Pierre Serre – ami fidèle du Cirm. Même si le Cirm doit beaucoup à énormément de collègues, à titre personnel j'ai envie de remercier Jean-Pierre Bourguignon, Franck Pacard ou Christoph Sorger, qui ont aidé le Cirm en bien des occasions. Et puis de nombreux autres géants des mathématiques sont passés au Cirm, il serait sans doute plus intéressant de citer tous les médaillés Fields qui n'y sont jamais venus... Beaucoup d'entre eux tels que mon ami Jean-Christophe Yoccoz nous ont laissé des interviews émouvantes. On apprécie aussi pleinement le Cirm lorsque l'on voit le regard de tous ces jeunes qui viennent, certains pour présenter pour la première fois leurs travaux de recherche devant une audience internationale. Et puis de temps en temps, quelques étudiants et même des élèves, dont on lit dans les yeux l'émotion de se retrouver dans un tel endroit à côté de savants. Il y a cependant des moments intenses qui ont rassemblé plein d'acteurs du domaine autour du Cirm. J'ai eu la chance d'organiser avec l'équipe les 30 ans du Cirm en 2011. C'était formidable de voir ces anciens directeurs, ou président.e.s de la smf rassemblés pour témoigner de tous ces efforts et péripéties qui font ce qu'est le Cirm aujourd'hui. Et l'année prochaine, en 2021, le Cirm fêtera ses 40 ans ! Les faits marquants ce sont aussi les élans et les projets qui ont fait un Cirm précurseur, qui est désormais visible, qui crée la tendance. Je pense par exemple au Cirm producteur de films, au développement d'une véritable stratégie de communication et à une politique internationale qui ont porté leurs fruits. Le Cirm tient maintenant un rôle dans les instances internationales, des instituts nous envoient leurs personnels visiter le Cirm, etc. Et ne cachons pas notre plaisir, la forte croissance des financements étrangers est un témoignage sonnant et trébuchant de cette visibilité et de cette respectabilité reconnues.

Le Cirm propose-t-il des événements spécifiques à destination des jeunes (post-doctorants, doctorants/jeunes docteurs, ou même étudiants/lycéens) ?

Bien-sûr, et c'est l'une des missions du Cirm : assurer le transfert de connaissances envers les chercheurs et doctorants. Je pense notamment au Cemracs, Centre d'Été Mathématique de Recherche Avancée en Calcul Scientifique porté par la smai (Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles), qui se déroule au Cirm depuis 1996. Rencontres entre chercheurs et industriels, il est l'occasion en particulier pour les jeunes chercheurs, doctorants, post-doctorants, étudiants de présenter leurs résultats de recherche, de se faire connaître des milieux de la recherche universitaire et industrielle. Le Cirm a également lancé le programme « Interface » en 2019. « Interface » est un programme original d'acquisition et de discussions des outils et concepts mathématiques, informatiques et numériques pertinents pour les industriels. Porté par les acteurs de mathématiques en France et en partenariat avec cnrs Formation Entreprises, il propose des sessions de formations de 2 à 4 jours, en totale immersion au Cirm. Nous accueillons également des événements dédiés aux lycéennes : des camps organisés pour inciter les jeunes filles à oser embrasser les carrières scientifiques (pôle diversité et réussite de Polytechnique ou Les Cigales-I2M). Depuis 2013 le Cirm organise également des Mercredis mathématiques pour les lycéens et le grand public (Mathématiques de la planète Terre, Data is everywhere, etc.)



Pourriez-vous décrire les modalités d'accès aux différents programmes du Cirm ?

Deux appels d'offres annuels permettent de présenter un dossier pour organiser un événement qui peut être une conférence ou une école de recherche. Notre politique de soutien est à hauteur de 40 participants dans ce premier cas. Mais on peut déposer aussi un dossier pour un mois ou même un semestre entier regroupant plusieurs événements comme dans le cas du mois thématique, du cemracs ou de la Chaire Jean-Morlet. Les sélections sont faites par notre Conseil scientifique qui est aujourd'hui à parité hommes-femmes et français-étrangers, une volonté forte. Les Recherches en binômes (financées par le Cirm) ou Workshops de taille plus compacte (autofinancés) font des demandes au fil de l'eau. Grâce à l'extension du Cirm nous avons de nouveaux programmes qui permettent, après validation par le Conseil scientifique, d'organiser des événements scientifiques de taille importante et autofinancés.

Parlez-nous un peu de la chaire Jean-Morlet que vous avez lancée en 2013.

Chaque semestre de Chaire est destiné à un chercheur de renommée internationale, issu d'une institution étrangère et porteur d'un projet pouvant associer étroitement les unités de recherche du pôle d'Aix-Marseille. Avec l'aide d'un porteur local, le titulaire organise un programme scientifique complet. L'idée est non seulement d'établir une collaboration à un niveau international, mais également de développer de fortes synergies entre les laboratoires, les chercheurs et les doctorants, au sein de la communauté mathématique et au-delà. La Chaire est ouverte à tous les domaines des sciences mathématiques et mathématiques en interaction.

Chaque semestre se construit autour d'activités scientifiques : au minimum 1 conférence, 1 école de recherche, 1 à 2 workshops et 2 recherches en binômes + toute autre activité parallèle telle que des Masterclasses, conférences pour des lycéens, conférences à la frumam, etc. Nous avons même eu une très belle exposition sur les Singularités sur le Vieux-Port de Marseille grâce à la présence d'Herwig Hauser en 2015. Ce programme scientifique est organisé en parallèle avec un programme d'environnement (bien soutenu par la Ville de Marseille et le LabEx Carmin) permettant l'invitation de collaborateurs, doctorants et post-doctorants, invités spéciaux, etc. Ce dernier apporte un financement supplémentaire à la Chaire ainsi qu'une visibilité internationale.

Ce programme, internationalement reconnu depuis sa création en 2013 et remarqué dans l'évaluation du LabEx Carmin par l'anr, est l'occasion idéale de promouvoir l'attractivité de la région marseillaise et de valoriser les recherches actuelles et les idées émergentes dans tous les domaines des sciences mathématiques. La quinzième chaire débutera en janvier 2020 et nous travaillons déjà activement sur 2021.

Pourriez-vous nous parler des actions qui ont développé la participation d'étrangers aux rencontres du Cirm et de sa visibilité internationale ?

L'accroissement du nombre de participants étrangers est devenu un objectif dès 2011, afin de pouvoir placer le Cirm dans la liste des instituts les plus connus et reconnus par la communauté mathématique internationale. Nous avons donc commencé par publier tous nos calendriers et appels d'offres sur des plateformes étrangères et nous avons décidé d'« exporter » le Cirm physiquement en tenant un stand aux congrès icm Rio-2014 et ecm Berlin-2016. C'est d'ailleurs le Cirm qui a mené ces opérations et persuadé la smf et l'Insmi de l'y rejoindre. La Chaire Jean-Morlet a été également un vecteur très riche en attirant en moyenne 70% d'étrangers dans presque chaque événement. Tout ceci a contribué au fait que le nombre total de participants étrangers au Cirm est passé de 43% en 2013 à 55% en 2019. Le nouveau site bilingue du Cirm, lancé à l'icm-Séoul, et toutes les actions de communication via le partage et la diffusion sur réseaux sociaux a fait exploser notre visibilité. Aujourd'hui la part des étrangers visionnant nos vidéos mathématiques est de 70%.

D'autre part, le Cirm a toujours été un membre assidu d'ercom (European Research Centres on Mathematics)[1], un think-tank européen d'instituts rassemblés sous l'égide de la Société Mathématique Européenne. Nous avons organisé sa session plénière en 2013 et participé à chaque session. On m'a demandé depuis 2015 d'en être le vice-président et nous communiquons donc largement avec plus de 25 centres qui alertent leurs communautés sur nos activités. Nous sommes largement sollicités pour présenter notre politique de site lors des sessions annuelles et accueillons des représentants de centres au Cirm dans le cadre d'un échange de bonnes pratiques pour mieux répondre aux besoins des chercheurs itinérants. En mars 2020, ce sont tous les présidents des sociétés mathématiques européennes et le comité exécutif de l'ems qui se retrouveront au Cirm durant le week-end du lancement de la première Journée internationale des Mathématiques (Unesco). Un beau gage de notre visibilité et une belle marque de confiance.

Enfin, il est clair qu'une bonne visibilité internationale attire souvent des financements supplémentaires. Ici aussi le Cirm a réussi à dynamiser son attractivité en attirant de plus en plus de sponsors étrangers. Ceci est parti notamment de la Chaire Jean-Morlet où nous proposons un accompagnement administratif renforcé des porteurs pour solliciter des sponsors européens et internationaux. Nous avons ainsi pu construire un réseau de partenaires financiers réguliers qui viennent renforcer les soutiens locaux et nationaux déjà présents. Depuis son lancement, la Chaire a attiré 240K€ de fonds de l'étranger (nsf, cmi, Chaires du Canada, etc.) et cette attractivité s'étend de plus en plus aux autres programmes que nous organisons. Le cimpa s'associe aujourd'hui au mois thématique de février en sponsorisant 3 lauréats internationaux, jeunes chercheurs de pays en développement invités tous frais payés, y compris voyage, pendant au moins 4 semaines.

D'autres actions de poursuite et d'amplification de notre processus d'internationalisation sont à l'étude mais tout ceci est bien sûr sujet à un budget global accru et il est nécessaire de cibler stratégiquement les partenariats, en réfléchissant aussi à être en prise avec les grands enjeux sociétaux et géopolitiques, et à la place spéciale qu'occupe le Cirm en étant basé à Marseille et donc aux portes du monde méditerranéen et de l'Afrique.

Le Cirm a notamment entièrement refondu ses sites web et s'est doté d'outils de production audiovisuelle, pouvez-vous décrire ces actions ?

Oui le Cirm a vécu une formidable transformation digitale ces dernières années. Nous en avions besoin pour être plus visible, en France comme à l'étranger (près de 5000 visites chaque semaine). En plus d'un site web bilingue, riche d'informations et d'actualité, et qui est également consultable avec smartphones et tablettes, nous offrons un service supplémentaire aux organisateurs d'événements puisque chaque rencontre possède son propre mini site. Nous gérons près de 150 sites/conférences en même temps. Le développement des réseaux sociaux – encore très rares dans la communauté lorsque nous les avons développés – est aujourd'hui un outil précieux de diffusion et d'échanges d'informations avec notre communauté locale, nationale et internationale.

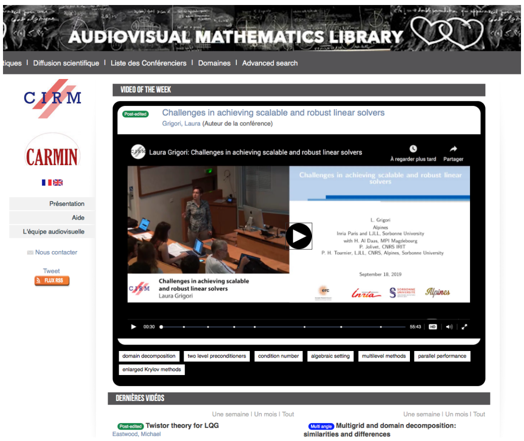
En ce qui concerne la production audiovisuelle, là aussi nous avons été pionniers. Ce projet s'inscrit dans le cadre du LabEx Carmin, commun aux quatre centres de rencontres mathématiques en France (ihp, ihés, cimpa et Cirm). Un des objectifs du LabEx était la valorisation de la richesse des mathématiques que nous accueillons via la production audiovisuelle. Au Cirm, dès 2012 nous avons lancé le projet, réalisé une régie audiovisuelle professionnelle, équipé notre auditorium de caméras hd et

1. ercom : un comité européen de l'ems, forum collaboratif de communication et transfert inter-centres. Chair : David Abrahams, (ini Cambridge), Vice-Chair depuis 2015 : Patrick Foulon (Cirm). Le consortium regroupe les 29 centres suivants : Banach Varsovie, bcam Bilbao, cib Lausanne, cim Coimbra, Cirm Marseille, crm Barcelona, cwi Amsterdam, Emmy Noether Israël, Ennio di Giorgi Pisa, Eurandom Eindhoven, esi Vienne, fim Zürich, Fraunhofer Kaiserslautern, Isaac Newton Cambridge, icmat Madrid, icms Edimbourg, ictp Trieste, ihp Paris, ihés Bures/Yvette, im-cas Prague, indam Rome, Renyi Budapest, mfo Oberwolfach, Institut Mittag-Leffler Stockholm, mpim Bonn, mis-mpg Leipzig, pdmi St-Petersbourg, ricam Linz, Weierstrass Berlin.

d'un environnement numérique associé.

L'extension du Cirm nous a permis de construire une deuxième régie dans le nouvel auditorium, équipé lui-même de caméras HD. Nous sommes capables désormais, à la demande, de filmer les conférences qui ont lieu au Cirm chaque semaine, dans les deux auditoriums. Grâce au nouveau système audiovisuel nous offrons également aux conférenciers la possibilité de s'enregistrer de façon automatique grâce à une caméra Tracking et d'une configuration pilotée par tablette.

Cette richesse audiovisuelle j'ai décidé de l'organiser, de la répertorier, au même titre que des publications scientifiques, dans une Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle, que nous avons lancée en 2014, après une longue période de réflexion sur les aspects éditoriaux, juridiques et documentaires.



Les mathématiques sont une science vivante qui mérite un support scientifique vivant qu'est la vidéo. À l'oral les mathématicien.n.e.s en disent certainement davantage qu'à l'écrit et les échanges avec le public peuvent ouvrir de nouveaux questionnements scientifiques. Il faut filmer tout ceci, le classer et le conserver, c'est notre patrimoine.

Est-ce que le Cirm mène certaines actions en faveur de la parité ?

Le taux de participation des femmes au Cirm est de 21%. La présence d'au moins une femme dans le comité scientifique et d'organisation est demandée par notre Conseil scientifique. Chaque semaine nous filmons 5 conférences, nous demandons aux organisateurs qu'il y ait au moins une femme parmi ces 5 choix. C'est un formidable tremplin. Et les résultats sont déjà visibles ! Nous sommes passés en 6 ans de 8% de femmes filmées à 26% ! Nous les valorisons sur la chaine YouTube du Cirm où les mathématiciennes ont leur playlist « Women at Cirm ». D'ailleurs, la troisième interview la plus regardée sur YouTube est celle de Maria Chudnovsky (Princeton) qui a quasiment 60 000 vues !

En janvier 2018, Geneviève Walsh (Tufts) a été la première femme titulaire de la Chaire Jean-Morlet au Cirm en binôme avec Luisa Paoluzzi d'Aix-Marseille Université. Ce sont de nouveau deux mathématiciennes qui ont pris avec plein succès les rênes des deux semestres suivants : Kerrie Mengersen (QUT Australie) et Tamara Grava (SISSA & Bristol University).

L'extension du Cirm nous permet également de dédier de l'hébergement à l'accueil des familles, pour les parents qui, pour différentes raisons, doivent venir accompagnés de leurs enfants en bas âge. Certains éléments réglementaires nous ont permis d'avancer sur ce dossier, notamment une directive européenne concernant l'information des consommateurs sur les denrées alimentaires qui soulage nos contraintes pour accueillir des enfants au restaurant.

Vous avez porté deux opérations immobilières conséquentes – l'extension de l'Annexe, 2R-CIRM et celle du restaurant – pour développer les capacités d'accueil du Cirm, quels étaient les objectifs ?

Ils répondaient à une nécessité,

- pour faire face à une utilisation en pleine expansion des mathématiques, notamment au service de la science, de la santé, de l'économie et de la société en général. Les mathématiques sont de plus en plus fortement sollicitées et les besoins protéiformes justifient une plus grande variété d'échanges : conférences, écoles de recherche, workshops, recherches en binômes, séances de brainstorming, transfert de technologie, discussions à distance ;
- pour répondre à une pression scientifique trop forte pour les capacités du Cirm ;

- pour résoudre les problèmes d'accessibilité de notre superbe site et faire un lien clair avec la ville et le campus universitaire ;
- pour moderniser et professionnaliser l'accueil in situ au centre, tout en se dotant d'outils de gestion et de suivi nécessaires à la montée en charge d'activité de près de 40%. La démarche est encore renforcée par les nouvelles exigences et règles tenant à : la sécurité, la comptabilité, l'information. Aujourd'hui nous suivons en même temps 150 événements scientifiques ;
- pour continuer et amplifier notre politique de création d'un fonds audiovisuel de grande qualité avec les outils les plus modernes ;
- pour conforter notre implantation au service des acteurs locaux : laboratoires, université et entreprises ; pour répondre aux standards européens et internationaux, etc.

Un peu d'historique nous montre qu'après la proposition informelle que j'avais présentée au Conseil d'administration en 2011, les tutelles ont – par la voix des présidents de la SMF et par celles des directeurs de l'Insmi – très vite pris l'enjeu et adopté les mesures nécessaires à la maturation du projet. C'est aussi avec un soutien très fort de la Région Sud au niveau financier, mais pas seulement, que le projet a pu être lancé et aboutir aujourd'hui.

Le portage stratégique du ministère de l'Enseignement supérieur, de la Recherche et de l'Innovation a été déterminant pour l'inscription au CPER 2015-2020 au titre du Programme 172 « Recherches scientifiques et technologiques pluridisciplinaires ». L'université d'Aix-Marseille, devenue tutelle du Cirm en 2012, nous a accompagnés avec bienveillance notamment en soutenant sans relâche la Chaire Jean-Morlet qui est aujourd'hui l'un des phares internationaux du Cirm. Je remercie ici tous ces soutiens.

Durant cette année de lourds travaux, le Cirm a tout de même poursuivi son activité scientifique sans fermer ses portes et en accueillant 3421 participants en 2018 et 4732 en 2019. Un tour de force ?

Tous ces travaux ont entraîné beaucoup de complexité dans un site qui a effectivement continué à fonctionner 50 semaines par an sans restreindre fortement ses activités. Cela a eu d'ailleurs été très difficile à synchroniser car nos programmes sont fixés deux années en amont par le Conseil scientifique et les travaux ont leur propre calendrier. Dans ces conditions vous imaginez toutes les difficultés transitoires qui ont dû être surmontées. Je pense que globalement tout s'est bien passé. C'est grâce à nos personnels, en les incluant toutes et tous, que cela a été rendu possible. Je leur adresse toutes mes félicitations et mes plus forts et sincères remerciements. Ils ont su en plus gérer l'inconfort de leurs postes qui ont évolué pour mener la politique de changement accompagnant ce projet scientifique et immobilier. Je remercie également tous les congressistes venus au Cirm pendant les travaux qui ont montré patience et bienveillance.

Ces investissements immobiliers, cette période de travaux, les nouveaux programmes ont-ils impacté l'activité financière du Cirm ?

La fréquentation du Cirm est passée en un an de 3421 à 4735 participants, de 76 événements organisés à 96, et ce lors d'une année de travaux ! Naturellement, le volet budgétaire le plus impacté par la hausse de la fréquentation sont les frais d'hôtellerie, d'entretien, de restauration : la prestation Eurest (entreprise à qui nous confions toute la partie hôtellerie/restauration du Cirm) a corrélativement sensiblement augmenté. Mais parallèlement les ressources propres du Cirm (paiements des frais de séjour) ont presque doublé en 2019.

Le Cirm est construit sur un socle solide et prêt à un bel avenir.

Quelle est votre vision du Cirm dans les années à venir ?

Créé en 1981 par nos pairs, le Cirm, cher au cœur de nos collègues, a su relever les défis d'une science en plein essor avec l'aide sans faille d'une communauté math et info tant au niveau local qu'au niveau national et international. Le moment était simplement venu où il fallait redéfinir une stratégie. Le Cirm rénové est semble-t-il en bonne voie pour relever tous ces nouveaux défis. Aujourd'hui il est équipé pour être un instrument de référence au premier plan mondial au service des sciences mathématiques et de leurs interactions. Après toutes ces années c'est Pascal Hubert, dès septembre 2020, qui sera le nouveau capitaine du navire et qui embarquera vers de nouvelles aventures. Je lui souhaite bon vent !

Patrick Foulon est directeur du Cirm depuis 2010, directeur de recherche, spécialiste en systèmes dynamiques. Il est par ailleurs vice-président du consortium ERCOM (European Research Centers On Mathematics).

Un instrument de référence au premier plan mondial

au service des sciences mathématiques et de leurs interactions

• S. Vareilles

Un peu d'histoire

Né en 1981, le Cirm fêtera bientôt ses 40 ans. Les mathématiciens français rêvaient d'un MFO (Oberwolfach Research Institute for Mathematics) en France. Un rapport de la commission 01 CNRS sorti en 1959 recommandait déjà un lieu de ce type basé sur le centre allemand. En 1976 c'est un autre château, au cœur d'un autre parc, qui est choisi : Luminy. En 1979 la SMF devient propriétaire du domaine incluant la Bastide (XIXe siècle) et deux autres bâtiments. En 1981 naît le Centre international de rencontres mathématiques, créé par des mathématiciens pour des mathématiciens. Un historique très détaillé du Cirm a été publié par la SMF en 2006 : *À la rencontre du Cirm* par Michel Zisman. Un résumé est également disponible en ligne sur le site web du Cirm. Le Centre international de rencontres mathématiques, dont les tutelles sont le Centre national de la recherche scientifique (CNRS), la Société Mathématique de France (SMF) et, depuis 2013, Aix-Marseille Université, accueille et organise des colloques, conférences, workshops, recherches en binôme, accueillant les mathématicien.n.e.s internationaux pour faire des recherches collaboratives depuis 1981.

Suite à une forte pression scientifique, la « Villa Médicis des mathématiques » a développé son offre scientifique et hôtelière en 2018-2019 et a accueilli 96 événements en 2019 qui ont rassemblé 4735 participant.e.s en 2019, dont 20% de femmes et 53% de chercheur.s.e.s étranger.e.s.

Le cœur d'activité du Cirm : l'accueil et l'organisation d'événements scientifiques

Le Cirm met à la disposition des organisateurs un écosystème scientifique, logistique, de gestion et d'information complet qui assure le bon déroulement de chaque rencontre et assure leur visibilité dans le monde entier.

Citons notamment :

- une offre scientifique renouvelée, un conseil scientifique international, qui permettent plus de diversité ;
- un accompagnement solide à l'organisation des événements scientifiques et des séjours : plateforme de dépôts des programmes, des présentations, des emplois du temps, des vidéos de la semaine, etc. qui alimentent un mini site internet propre à chaque événement ; visas ; aides à la demande de financements extérieurs, etc.
- un développement numérique qui améliore et professionnalise la gestion des participants, la réservation de chambres, des repas et salles de travail/conférences, la gestion du budget, etc.
- des espaces scientifiques modernisés et équipés de systèmes audiovisuels performants ; une offre de captation audiovisuelle des exposés, de diffusion et d'archivage des vidéos, etc.

1. 12 programmes : une offre scientifique diversifiée

Conférences & écoles de recherche. Les conférences et écoles retenues par le Conseil scientifique du Cirm se déroulent sur une semaine. Chaque année, 35 événements de ce type sont soutenus : prise en charge de l'hébergement et des repas de 40 participants pour un événement rassemblant en moyenne 60 participants.

Mois thématique (programme conjoint Cirm & Aix-Marseille Université). Le Cirm propose à la communauté locale de mathématiciens d'organiser chaque année en février un mois complet au Cirm autour d'une thématique de leur choix (Statistiques, Probabilités, Cryptographie, Systèmes dynamiques etc). Le format alterne semaines de conférences et semaines d'écoles de recherche. Le Cirm soutient également cet événement au même titre que les conférences et écoles de recherche.

Écoles de recherche (programme conjoint Cirm & ihp). Le Cirm accueille chaque année deux semaines introductives à certains trimestres thématiques de l'Institut Henri Poincaré (Paris). Le Cirm soutient également cet événement au même titre que les conférences et écoles de recherche.

Programmes pluriannuels « Mathématiques » et « Mathématiques en interactions » : du temps pour la recherche. Ces programmes sont destinés aux chercheurs dont le projet scientifique nécessite plus de temps et davantage de visibilité sur le long terme pour aboutir et se concrétiser. Ce rendez-vous annuel peut être réservé au Cirm pour trois ans.

cemracs (programme conjoint Cirm & smai). Chaque été, le Cirm accueille durant 6 semaines un programme proposé, organisé et financé par la Société de mathématiques appliquées et industrielles : le cemracs [1].

1. Centre d'Été Mathématique de Recherche Avancée en Calcul Scientifique.

Semaines SMF (programme conjoint CIRM & SMF). La SMF soutient financièrement ces deux semaines annuelles à hauteur maximale de 50 pour cent des dépenses. Le reste devra être couvert par des financements extérieurs. Ces semaines doivent remplir les conditions suivantes : avoir plusieurs mini-cours pendant les 5 jours de conférence, faire une large place aux doctorants, post-doctorants, jeunes chercheurs, notamment en leur proposant des exposés et/ou posters, et compter parmi ses organisateurs des membres de la SMF.

Semaines institutionnelles ANF-GDS/RNBM, MATHRICE, etc. Semaines dédiées aux réunions et formation ANR des Groupements de services (GDS) tels que le Réseau National des Bibliothèques de Mathématiques (RNBM), le réseau d'informaticiens MATHRICE et aussi des professeurs de Classes préparatoires.

La Chaire Jean-Morlet : un semestre scientifique au CIRM. Un chercheur international en résidence chaque semestre au CIRM associé à un chercheur local, une thématique mathématique, une organisation structurée autour de quatre événements (conférences, écoles, workshops, etc.), un programme d'invitation : c'est le concept de la Chaire Jean-Morlet, lancée au CIRM en 2013. La Chaire a déjà accueilli 15 professeurs internationaux, dont 3 femmes. L'actuel titulaire est Jorge Vitorio Pereira (IMPA - Rio de Janeiro) avec Erwan Rousseau (I2M - Aix-Marseille Université). Il sera suivi par Robert Tichy (TU Graz) au deuxième semestre 2020 avec Joël Rivat (I2M - Aix-Marseille Université) et Shi Jin (Shanghai Jiao Tong University) et Mihaï Bostan (I2M - CNRS) au premier semestre 2021.

Programme Interface : formation à destination des ingénieurs et chercheurs en entreprise. Le programme Interface est une formation intense et originale, en immersion au CIRM, conçue pour les ingénieurs et chercheurs en entreprises et ouverte aux académiques. En partenariat avec CNRS-Formation Entreprises elle est portée par les acteurs des mathématiques en France : l'INSMI, les sociétés savantes françaises (SFdS, SIF, SMAI, SMF) et les LabEx AMIÈS, ARCHIMÈDE et CARMIN. Trois à quatre sessions sont organisées chaque année.

Workshops. Parallèlement aux conférences et écoles de recherche, le CIRM accueille l'organisation de workshops pouvant comprendre de 10 à 40 personnes. Ce format est particulièrement bien adapté aux Groupements de recherche (GDR), à des projets financés par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR), etc.

Recherches en binôme. Les Recherches en binôme (de 2 à 4 personnes) permettent à des chercheurs de travailler ensemble sur un projet spécifique, tel que la finalisation d'un article ou d'un livre, l'étude d'un problème particulier, le lancement d'un travail collaboratif, etc. Elles se déroulent en général sur 1 ou 2 semaines (exceptionnellement 3 sous conditions). Il est possible de déposer un dossier à tout moment de l'année.

Recherches internationales en groupes (IRIGS). Dans le cadre d'une nouvelle collaboration conjointe avec le consortium ERCOM (European Research Centres on Mathematics), les IRIGS (International Research in Groups) permettent à de petits groupes de chercheurs de se réunir pour un projet d'une durée totale de 2 à 4 semaines, réparties sur une période maximale de 18 mois, et accueillies dans deux centres ERCOM (partenaires du projet : CIRM Luminy, CRM Barcelona, ICMS Edinburgh, IHP Paris et Banach Centre, Bedlewo).

Les contenus des programmes, appels d'offres, modalités d'accès, candidatures, etc. sont détaillés en ligne.

Environnement de travail et capacités d'accueil développés, agrandis et modernisés

Deux grandes opérations immobilières se sont achevées au printemps 2019.

Opération cnrs : 2r-Cirm, la nécessaire extension du Cirm

En novembre 2011, Patrick Foulon, directeur du Centre International de Rencontres Mathématiques (Cirm-Luminy) propose un projet de rénovation et d'extension du Cirm. Son conseil d'administration et ses tutelles émettent un avis très favorable. Fortement soutenu, il est inscrit comme priorité par l'Insmi (Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions) au cper 2015/2020, dans le cadre du Programme 172 « Recherches scientifiques et technologiques pluridisciplinaires ». En juin 2019, après un an et demi de travaux, cette vaste opération immobilière est livrée, opérationnelle et permet au Cirm de déployer sa politique scientifique et de conforter son rôle d'accueil des mathématiques locales, nationales et internationales. 2r-Cirm a été inauguré le 16 octobre 2019. L'agrandissement des espaces d'accueil – scientifique et résidentiel – du Cirm est en premier lieu une réponse à une pression scientifique croissante que subit le Cirm depuis quelques années (la demande est supérieure à notre capacité d'accueil actuelle). Le « bâtiment-passerelle » permet d'une part d'augmenter la capacité d'accueil du Cirm et, d'autre part, de relier les bâtiments entre eux et d'apporter ainsi cohérence et accessibilité à l'ensemble du site. La rénovation de l'Annexe a permis de créer une grande salle de conférence d'une capacité de 100 places, une salle de travail et de visioconférences et de nouvelles chambres et studios. Cette deuxième grande salle permet désormais d'accueillir deux événements simultanément au Cirm.

Opération smf : l'agrandissement et la rénovation du restaurant qui accompagne le projet 2r-Cirm

Pour accompagner l'agrandissement de ses capacités d'accueil, le Cirm a également augmenté la capacité d'accueil du restaurant (passant de 90 à 150 couverts). La salle du restaurant a été rénovée et agrandie, la cuisine a été reconstruite et équipée.

Une bibliothèque mathématique de référence

Vivante, accueillante, elle offre aux chercheurs des collections riches, couvrant l'ensemble des domaines mathématiques pures et appliquées. La bibliothèque propose plus de 32900 ouvrages et e-books, 700 revues papiers, 450 revues électroniques ainsi qu'un petit fonds de livres de loisirs, de jeux et de casse-tête. La bibliothèque a su évoluer au cours des années. Elle offre des espaces de silence et d'autres pour travailler en groupe. L'équipe a su diversifier ses activités en développant des actions de valorisation, de médiation et le traitement documentaire des vidéos à travers la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle mise en place en 2014 par le Cirm. La bibliothèque assure un rôle important dans la conservation du patrimoine mathématique national grâce à sa forte implication dans le plan de conservation des périodiques papier mathématique (PCMath).

Production audiovisuelle, diffusion et archivage

Le Cirm permet aux mathématiques qu'il accueille de s'exporter et d'être vues dans le monde entier. En effet, dans le cadre du Laboratoire d'excellence Carmin (Cirm, Centre International de Mathématiques Pures et Appliquées, Institut des Hautes Études Scientifiques et Institut Henri Poincaré) le Cirm joue un rôle pilote depuis 2013 dans la production de films scientifiques dont le but est de diffuser dans le monde entier les derniers progrès des recherches qui y sont présentées. 5 conférences sont enregistrées chaque semaine, toute l'année, dont une chapitrée et indexée avec son auteur.

Youtube est l'outil de streaming vidéo du Cirm. Les données liées à la fréquentation sont impressionnantes : près de 30 000 vues par mois, 1,3 million de vues depuis la création de la chaîne, une visibilité dans le monde entier, etc. En plus de l'enregistrement des talks scientifiques, le Cirm a lancé en 2012 *Les interviews du Cirm* qui proposent un regard plus intimiste sur la carrière des mathématicien.n.e.s. De Jean-Pierre Serre à Claire Voisin, en passant par Endre Szemerédi ou Peter Scholze, les mathématicien.n.e.s du monde entier de passage au Cirm se livrent au micro du Cirm. Les interviews en ligne sont très regardées, dans le monde entier : jusqu'à 90 000 vues pour celle de Terence Tao, 80 000 pour Peter Scholze, etc. !). Plusieurs organismes nationaux et internationaux les citent et les partagent régulièrement, avec notamment l'aide d'un solide réseau de diffusion et d'échanges comme Twitter par exemple.

Bibliothèque audiovisuelle : de véritables documents scientifiques

Dès 2013 une réflexion a été menée au Cirm sur la conservation, la documentation, la structuration éditoriale, la diffusion, l'exploitation et la propriété intellectuelle de ce fonds audiovisuel grandissant. Le projet a été confié aux services de documentation, informatique, communication et audiovisuel. La Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle est née en 2014. Cette plateforme documentaire de diffusion audiovisuelle réunit le corpus de conférences filmées au Cirm, ce fonds est valorisé à l'aide de métadonnées structurées (résumé, notice bibliographique, chapitrage par mots et moments clés, bibliographie, classification mathématique, etc.). Quatre collections ont été créés : Exposés de recherche, Écoles de recherche, Diffusion scientifique et Actions thématiques. Le Cirm est devenu leader mondial dans la réalisation de vidéos mathématiques de qualité, chapitrées et indexées.

La captation automatique des conférences

La nouvelle salle de conférence (bâtiment-passerelle) a été équipée, à l'instar de l'Auditorium, d'un système audiovisuel complet et d'une régie performante. Une des valeurs ajoutées du nouveau système est le vidéo-tracking : paramétrable à partir d'une tablette tactile, les organisateurs peuvent décider d'enregistrer les conférences eux-mêmes et télécharger leurs vidéos à la fin de leur séjour.

Informatique et Réseaux : les fondations de toute modernisation

La hausse de la fréquentation, les extensions immobilières et la modernisation du Cirm sont indissociables de la sécurisation des réseaux et du développement d'outils et programmes informatiques solides et pérennes. Le Cirm a déjà profondément restructuré ses outils de gestion et d'affichage des informations : emplois du temps dynamiques en ligne ; déploiement d'un logiciel hôtelier capable de gérer la réservation et la gestion hôtelières, la facturation, la comptabilité, en lien avec l'installation du système de contrôle d'accès par badge ; etc.

Le Cirm en chiffres / contacts

Ses tutelles : Aix-Marseille Université, Société Mathématique de France, cnrs.
Ses partenaires : Ministère de l'Enseignement supérieur de la recherche et de l'innovation, LabEx Carmin & Archimède, Région Sud, Ville de Marseille.

- 4735 participants inscrits en 2019.
- 20 % de femmes.
- 53 % d'étrangers.
- 13 programmes scientifiques.
- L'accueil et l'organisation de près de 90 événements par an.
- Une chaire internationale – la Chaire Jean-Morlet – portée chaque semestre par un professeur étranger et un porteur local.
- Un programme de transfert de connaissances vers l'industrie : Interface.
- Un producteur de films : 1500 vidéos (conférences et interviews) déjà en ligne sur youtube, plus de 13 000 abonnés, 35 000 vues par mois ces vidéos sont en ligne enrichies et cataloguées sur la bibliothèque mathématique audiovisuelle.

Plus d'informations en ligne : `www.cirm-math.fr`
Et sur les réseaux sociaux : YouTube, Twitter, Facebook, Instagram

La mathématisation de l'hérédité

• H. Perdry

Ce court texte présente quelques-uns des aspects des théories de l'hérédité qui se sont prêtées à une mathématisation, à travers les contributions de Mendel, de Galton et Pearson, puis de Fisher ; cette approche historique permettra de présenter la notion, toujours d'actualité, d'*héritabilité*.

1. Gregor Mendel

Gregor Mendel est né en 1822 d'une famille de paysans sans fortune, dans ce qui était alors l'Empire d'Autriche. Devenu moine, il réalisa ses célèbres expériences sur les pois dans les jardins du monastère de Brno. Pour cette raison, on conserve souvent de lui l'image d'un scientifique amateur. Il reçut cependant une éducation scientifique complète à l'université de Vienne ; s'il était bien un scientifique amateur dans la mesure où la science n'était pas son métier, sa formation fut en revanche celle d'un professionnel. Il était préparé à utiliser la méthode expérimentale, et ses cours de botanique l'avaient familiarisé avec l'hybridation des plantes et le phénomène de réapparition de caractères ancestraux dans la descendance des hybrides. Quand il s'installe au monastère de Brno en 1853 après avoir terminé ses études, c'est cette question qu'il est décidé à étudier de façon scientifique.

1.1 – Recherches sur l'hybridation des plantes

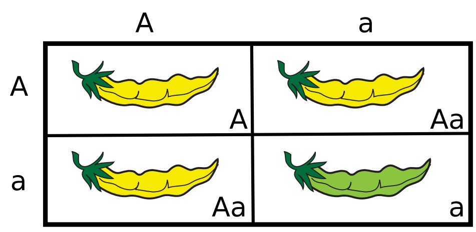
Mendel choisit de procéder à des expériences sur le pois *(Pisum sativa)* dont la reproduction est facile à contrôler et qui produit des hybrides fertiles. Ses travaux seront communiqués à la Société des Sciences naturelles de Brno en 1865, et publiés dans les actes de cette société, sous le titre *Recherches sur l'hybridation des plantes* [20] (traduction anglaise dans [3]). Nous allons donner ici un rapide aperçu du contenu de ce mémoire. Mendel s'y intéresse presque exclusivement à des caractères discontinus (couleur ou forme des gousses, etc., en tout sept caractères), dont il souligne l'absence de formes intermédiaires.

Cas d'un caractère

La première génération d'hybrides (génération F1 en terminologie moderne) entre deux plantes issues de lignées pures qui diffèrent pour un certain caractère ne présente qu'un seul des deux caractères ancestraux, qu'il nomme le caractère *dominant*. Par exemple, un hybride entre des pois à gousses vertes et des pois à gousses jaunes aura des gousses jaunes – ce caractère est donc le caractère dominant. L'autre caractère, ici la couleur verte, est le caractère *récessif*.

Le pois est une plante autogame, c'est-à-dire qu'un individu peut se reproduire avec lui-même. Mendel laisse les hybrides se reproduire par autogamie, et observe à la génération suivante (la génération F2) la réapparition du caractère récessif ; il observe que les individus présentant les caractères récessifs et dominants sont dans les proportions d'une plante récessive pour trois plantes dominantes (figure 1), soit en proportions 1 : 3.

Figure 1 – Descendance d'un hybride. Les lettres en marge représentent les gamètes parentaux (voir plus bas).



Mendel poursuit l'expérience, toujours en laissant les plantes se reproduire par autogamie. Il observe ainsi que dans la descendance d'un individu de la génération F2 présentant le caractère récessif (gousses vertes) on n'observe plus que ce caractère. D'autre part, il observe qu'un tiers des plantes F2 présentant le caractère dominant ont une descendance exclusivement dominante, tandis que les deux-tiers restant ont, comme l'hybride F1, une descendance où les deux caractères s'observent en proportion 1 : 3.

Mendel comprend que la proportion 1 : 3 observée à la génération F2 est en fait une proportion 1 : 2 : 1 de formes qu'il note A, Aa et a : les formes A et a sont « constantes » pour les caractères dominants et récessifs, et Aa est la forme hybride où les deux caractères sont présents, le caractère dominant étant seul visible ; il choisit de résumer ces proportions par l'expression formelle.

$$A + 2\,Aa + a$$

qui résume les proportions observées dans la descendance d'un croisement d'une plante de forme A avec une plante forme a. Ce principe est aujourd'hui connu sous le nom de *loi de ségrégation des caractères*.

Cas de plusieurs caractères

Mendel poursuit ses expériences en hybridant des plantes qui diffèrent par plusieurs caractères, un des parents portant des caractères A, B, etc., et l'autre des caractères a, b, etc. Il obtient à la génération F1 des plantes « dihybrides » (de forme $AaBb$) qui ne présentent que des caractères dominants ; à la génération F2 il obtient les 4 combinaisons possibles de caractères dans les proportions 1 : 3 : 3 : 9 (soit une plante sur 16 présentant les deux caractères récessifs, 3 plantes récessives pour le premier caractère et dominantes pour le second, etc. ; figure 2).

Mendel explique cette répartition en remarquant comme auparavant que certaines des plantes qui présentent un caractère dominant portent les deux caractères, le dominant étant le seul observé. Les proportions de chacun des types sont obtenues en combinant formellement les deux expressions $A + 2\,Aa + a$ et $B + 2\,Bb + b$ pour obtenir

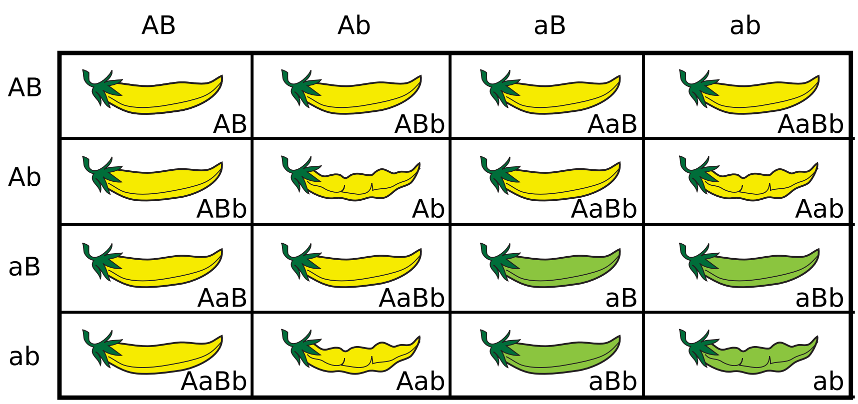
$$\begin{aligned} &AB + 2\,ABb + Ab + 2\,AaB + 4\,AaBb \\ &\quad +2\,Aab + aB + 2\,aBb + ab. \end{aligned}$$

De même que l'écriture $A + 2Aa + a$ évoquait le développement de $(A + a)^2$, cette combinaison évoque celui de $(A + a)^2(B + b)^2$, à la disparition des exposants près – Mendel ne fait aucun commentaire à ce sujet. La même démarche permet d'obtenir les proportions pour trois caractères ou davantage.

La figure 2, où les capitales A et B correspondent aux caractères dominants « gousse jaune » et « gousse gonflée », associés aux caractères récessifs « gousse verte » et « gousse étranglée », illustre le raisonnement. Cette figure peut s'obtenir en éclatant les quatre cases de la figure 1, où seule la couleur de la gousse est importante (le caractère A/a) en quatre cases où on fait varier la forme de la gousse (le caractère B/b) selon un motif analogue.

Ce résultat est connu sous le nom de loi de ségrégation indépendante des caractères.

Figure 2 – Descendance d'un dihybride. Les caractères dominants sont « gousse jaune » et « gousse gonflée », associés respectivement aux caractères récessifs « gousse verte » et « gousse étranglée ».



Mécanisme proposé

Mendel propose un mécanisme simple pour expliquer ses résultats : les cellules reproductrices émises par les plantes (en termes modernes, les gamètes ; Mendel utilise les mots *Keimzellen* et *Pollenzellen*, cellules germinales et cellules du pollen) ont (ou portent) un caractère A ou a ; chez les hybrides, seul le caractère dominant s'exprime ; et leurs cellules reproductrices présentent toutes les combinaisons possibles de caractères ancestraux dans des proportions égales.

Ainsi, les hybrides Aa émettent des gamètes A et a dans les proportions 1 : 1 et l'appariement aléatoire des gamètes fait le reste. Le même mécanisme explique ce qui est constaté pour les dihybrides, avec quatre types gamétiques AB, Ab, aB et ab (voir les marges des figures 1 et 2).

Mendel teste cette hypothèse avec succès par une expérience appelée aujourd'hui *rétrocroisement :* il s'agit de croiser un hybride avec un de ses parents (ou toute autre plante de forme constante, qui n'émet des gamètes que d'un seul type). Ainsi, le croisement d'une plante Aa croisée avec une plante a produit, selon l'hypothèse de Mendel, des plantes Aa et a (qui présentent respectivement les caractères dominant et récessif) en proportions 1 : 1. De même, le croisement d'une plante $AaBb$ avec une plante ab produit des plantes $AaBb$, aBb, Aab et ab dans les proportions 1 : 1 : 1 : 1. Ici encore, ces quatre types de plantes sont reconnaissables par l'observation des caractères présentés.

Caractères continus

Ces résultats concernent des caractères discontinus, sans forme intermédiaire. Mendel rapporte également des expériences sur les haricots *(Phaseolus multiflorus)*, pour lesquels il a notamment considéré la couleur des fleurs. Il est dérouté par les résultats : il observe en effet un continuum de variations (du blanc au violet) et de trop rares retours à la forme récessive ou supposée telle (le blanc).

Il note pourtant :

> Même ces résultats énigmatiques, cependant, peuvent probablement s'expliquer par les lois qui régissent *Pisum* si nous supposons que la couleur des fleurs et des graines de *Ph. multiflorus* est la combinaison de deux couleurs entièrement indépendantes ou plus, qui se comportent individuellement comme n'importe quel autre caractère constant de la plante. Si la couleur de fleur A est la résultante des caractères $A_1+A_2+\cdots$, qui produit la couleur violette, alors par hybridation avec le caractère distinct de couleur blanche a, on obtient un individu hybride $A_1a+A_2a+\cdots$ (...). Selon les hypothèses précédentes, ces caractères hybrides sont indépendants et vont par conséquence se développer de façon indépendante. On voit alors facilement que la combinaison indépendantes de tels caractères produirait une série complète de couleurs. Si par exemple, $A = A_1 + A_2$, alors aux hybrides A_1a et A_2a correspondent les séries
>
> $$A_1+2A_1a+a$$
> $$A_2+2A_2a+a$$
>
> dont les membres se combinent de neuf façons différentes, chacune désignant une couleur différente :
>
> $$\begin{array}{lll} 1\ A_1A_2 & 2\ A_1aA_2 & 1\ A_2a \\ 2\ A_1A_2a & 4\ A_1aA_2a & 2\ A_2aa \\ 1\ A_1a & 2\ A_1aa & 1\ aa \end{array}$$
>
> Les nombres qui précèdent chaque combinaison indiquent combien de plantes de la couleur correspondante font partie de la série. Le total étant de 16, toutes les couleurs doivent en moyenne apparaître parmi 16 plantes, mais, on le voit, en proportions inégales.

Il est difficile de ne pas voir, dans ce court passage, une esquisse du modèle polygénique que Fisher développera en 1918.

1.2 – Postérité

Le mémoire de Mendel est étonnant de clarté et de modernité ; cela s'explique en partie par le fait que le modèle proposé par Mendel, qui correspond à une certaine réalité biologique, nous est familier puisqu'il est utilisé et enseigné de nos jours. Dans le texte qui précède, il n'y a presque qu'un changement qui serait fait par un biologiste moderne : c'est l'utilisation de la notation AA au lieu de A, pour les plantes ne portant que le caractère A. On parle aujourd'hui des deux *allèles* A et a du gène considéré ; la notation AA indique le fait qu'un individu a reçu un allèle A de chacun de ses parents. On appelle *génotype*, AA, Aa ou aa, la paire (non ordonnée) d'allèles reçus des parents. Le caractère observé est appelé *phénotype*.

Les travaux de Mendel sont passés inaperçus de son vivant. C'est peut-être en partie dû au fait qu'ils étaient présentés comme des travaux sur l'hybridation des plantes, et non sur les lois de l'hérédité, sujet qui intéressait plus particulièrement ceux qui l'auraient lu avec le plus d'intérêt ; mais surtout, Mendel étant devenu en 1868 le père supérieur de son couvent, il fut absorbé par cette tâche et n'eut guère le loisir de donner davantage de publicité à sa théorie. Il mourut en janvier 1884 d'une insuffisance rénale, et ses travaux ne furent redécouverts qu'en 1900 par Hugo de Vries, Karl Correns et Erich von Tschermak qui réalisaient des expériences similaires. Mendel n'émet aucune hypothèse sur la nature matérielle des caractères transmis ; l'hypothèse que les chromosomes en constituaient le support physique fut vite émise, notamment par un des pionniers de la génétique, Thomas Hunt Morgan. C'est à son collaborateur Alfred Sturtevant, qui établit en 1913 la première carte génétique – celle d'un des chromosomes de la drosophile –, qu'on doit la confirmation expérimentale de ce fait.

La loi de ségrégation indépendante des caractères est fausse en générale : elle n'est vraie que pour des caractères *non liés* – c'est le cas si les gènes correspondant à ces caractères sont sur des chromosomes distincts. Dans le cas contraire, la loi reste approximativement vraie si les gènes sont suffisamment éloignés les uns des autres. C'est globalement le cas des sept caractères étudiés par Mendel, à l'exception de deux (la longueur de la tige et la forme des gousses) [29], pour lesquels il est possible qu'il n'ait pas réalisé d'expérience avec des doubles hybrides.

La note finale est plus négative : en 1936, Ronald Fisher réanalyse les résultats de Mendel [7], et montre que les proportions observées par Mendel dévient trop peu de celles prédites par la théorie par rapport aux déviations aléatoires attendues. L'accumulation de déviations trop petites, d'expérience en expérience, est accablante. Voici donc Gregor Mendel soupçonné d'avoir manipulé ses données. Il faut cependant nuancer un peu. Mendel n'avait aucune idée des ordres de grandeurs des déviations attendues ; il a pu écarter de bonne foi de ses hybrides F2 des échantillons à ses yeux suspects de contamination par une fertilisation extérieure ; il a également pu réaliser plusieurs expériences et choisir de ne rapporter que celle qui correspondait le mieux à la théorie, méthode qui fournit des déviations en accord avec celles qui sont observées [28]. Les exigences de rigueur expérimentale en biologie ne pouvaient pas en 1850 être ce qu'elles sont de nos jours, et cette erreur ne peut être jugée avec la sévérité qui serait de mise à présent. Il faut noter en outre que ces critiques ne portent que sur la collecte ou le traitement des données issues des expériences ; la conception des expériences est impeccable, et les rétrocroisements restent un des outils des expérimentateurs en génétique animale ou végétale.

2. Sir Francis Galton

Francis Galton est né en 1822 (la même année que Mendel) dans une famille anglaise aisée ; c'est un enfant précoce et brillant. Son père le destine à la médecine, mais les études médicales lui déplaisent, sa préférence allant aux mathématiques ; il fit en troisième année d'études à Cambridge une dépression sévère, liée à des résultats moins bons qu'espérés dans cette matière [26]. Il se tourne alors à nouveau brièvement vers la médecine, jusqu'à la mort de son père en 1844, qui le rend financièrement indépendant. Il voyage en Afrique et au Moyen-Orient, tout d'abord sans but scientifique, puis sous le patronage de la Société royale de géographie. Il devient alors un auteur prolifique, publiant chaque année plusieurs articles et ouvrages sur une foule de sujets : météorologie, avalanches, voyages...

Comme beaucoup de ses contemporains, il est passionné par l'ouvrage de Charles Darwin (qui se trouve être son cousin [1]) publié en 1859, *L'Origine des espèces*. Il consacre dès lors une part croissante de son activité à la réflexion sur les lois de l'hérédité, ce qui le conduira à fonder une nouvelle science, l'« eugénisme », qu'il définit comme la science qui traite des façons d'améliorer l'espèce humaine [11].

2.1 – Les lois de l'hérédité

Galton réalisera une série d'expériences pour tester la théorie de la pangenèse de Darwin, qui postulait que tous les organes émettent des *gemmules* qui s'agrègent entre elles avant d'être trans-

1. ou plus précisément son demi-cousin, la mère de Francis Galton, Frances Darwin, étant la demi-sœur de Robert Darwin, le père de Charles Darwin. Leur grand-père commun, Erasmus Darwin, est un médecin et naturaliste célèbre.

mises à la descendance. Malheureusement, ces expériences échouèrent à démontrer l'existence des gemmules [12]. Galton élaborera alors sa propre théorie de l'hérédité [17, 16, 9, 4], formulant tout d'abord une théorie biologique, avant de se concentrer sur la recherche d'une loi mathématique de l'hérédité. Galton cherche une loi qui explique à la fois l'hérédité des traits continus (comme la stature) et celle des traits discrets (la couleur des yeux), et en particulier pour ces derniers la réapparition de caractères ancestraux qu'il appelle l'*atavisme*, phénomène qui, on l'a vu, a été l'objet des travaux de Mendel.

Une théorie de l'hérédité : la *stirpe*

Dans *Une théorie de l'hérédité* [9], article publié en 1875, Galton propose d'appeler *stirpe* (du latin *stirpes*, racine), l'ensemble des germes présents dans l'œuf fertilisé et qui sont à l'origine du développement de l'organisme. Il énonce quatre postulats qui lui semblent nécessaires à une théorie organique de l'hérédité :

1. l'organisme est la juxtaposition d'un grand nombre d'unités quasi-indépendantes, qui dérivent de germes distincts ;
2. la stirpe contient une multitude de germes, bien plus nombreux et divers que les unités organiques qui en seront dérivées, de sorte que très peu de ces germes sont finalement développés ;
3. les germes qui ne sont pas développés conservent leur vitalité et contribuent à la formation de la stirpe de la descendance de l'individu ;
4. la structure de l'organisme découle des affinités mutuelles des germes, au sein de la stirpe et au cours du développement.

Pour résumer en termes modernes la théorie développée par Galton, on peut imaginer la stirpe comme une population de cellules souches, dont une partie (aléatoire) donnera naissance aux différents organes et tissus de l'organisme ; les cellules restantes se multiplient et sont transmises à la génération suivante. Galton hésite à exclure tout à fait la possibilité d'une transmission des caractères acquis, mais il ne lui concède qu'un rôle au mieux marginal, quelques cellules provenant du reste du corps pouvant réintégrer la stirpe de façon exceptionnelle.

On sait que ce modèle est biologiquement erroné : l'individu se développe à partir d'une seule cellule, l'œuf, formé par fusion des gamètes parentaux, c'est-à-dire, chez les animaux, de l'ovule et du spermatozoïde. Pourtant, il a de bonnes propriétés et permet à Galton de formuler des idées pertinentes.

Natural Inheritance

Dans *Natural Inheritance* (L'Hérédité naturelle) [15], ouvrage publié en 1889, Galton reprend et développe des travaux publiés antérieurement sous forme d'articles. Il y analyse notamment la stature des membres d'une famille.

Francis Galton a collecté ou fait collecter la stature de 928 individus adultes, répartis en 205 fratries, et celle de leurs parents. Il corrige la différence de stature entre hommes et femmes en multipliant la stature des femmes par $1,08$; en prenant la moyenne de la stature des deux parents, il obtient la stature du « parent-moyen » *(mid-parent)* qu'il compare à la stature des enfants du couple. Le résultat est reproduit dans la table 1.

Galton estime le demi-écart interquartile [2] de la stature dans la population générale, il est de $1,7$ pouce ; celui de la stature M du parent-moyen est estimé à $1,19$ pouce, ce qui est cohérent avec une valeur théorique (en supposant l'indépendance des tailles des deux parents) de $\frac{1}{\sqrt{2}}1,7 = 1,21$ pouce [3] ; et il estime le demi-écart interquartile dans les fratries à $1,5$ pouce.

À partir de la Table 1, Galton met en évidence la *regression towards mediocrity*, en français « régression vers la moyenne » : l'écart entre la stature Y d'un individu et la stature moyenne μ de la population tend à être moins important que celui qu'on

2. Le demi-écart interquartile Q est la mesure de dispersion utilisée par Galton. La distribution étant symétrique, 50% des mesures sont donc entre $m - Q$ et $m + Q$, où m est la moyenne des mesures. Dans le cas de la loi normale on a $Q = 0,76\times$ l'écart-type ; les mesures ci-dessous correspondent à des écart-types de $2,52$ pouces (population), $1,76$ pouce (parent-moyen), $2,22$ pouces (fratries).

3. L'écart-type de la moyenne de deux variables aléatoires indépendantes X et Y est $\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)}$. Le demi-écart inter-quartile d'une loi normale étant proportionnel à son écart-type, on en déduit une loi similaire.

Tableau 1 – Table de contingence des statures des enfants et de leurs « parents-moyens » [18, 15]. Les mesures sont en pouces (un pouce = 2,54 cm).

TABLE I.

Number of Adult Children of various statures born of 205 Mid-parents of various statures.
(All Female heights have been multiplied by 1·08).

Heights of the Mid-parents in inches.	Heights of the Adult Children.														Total Number of		Medians.
	Below	62·2	63·2	64·2	65·2	66·2	67·2	68·2	69·2	70·2	71·2	72·2	73·2	Above	Adult Children.	Mid-parents.	
Above ..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1	3	..	4	5	..
72·5	..	..	..	..	..	..	..	1	2	1	2	7	2	4	19	6	72·2
71·5	..	..	..	..	1	3	4	3	5	10	4	9	2	2	43	11	69·9
70·5	1	..	1	..	1	1	3	12	18	14	7	4	3	3	68	22	69·5
69·5	..	..	1	16	4	17	27	20	33	25	20	11	4	5	183	41	68·9
68·5	1	..	7	11	16	25	31	34	48	21	18	4	3	..	219	49	68·2
67·5	..	3	5	14	15	36	38	28	38	19	11	4	..	..	211	33	67·6
66·5	..	3	3	5	2	17	17	14	13	4	..	..	..	..	78	20	67·2
65·5	1	..	9	5	7	11	11	7	7	5	2	1	..	..	66	12	66·7
64·5	1	1	4	4	1	5	5	..	2	..	..	..	..	..	23	5	65·8
Below ..	1	..	2	4	1	2	2	1	1	..	..	..	..	..	14	1	..
Totals ..	5	7	32	59	48	117	138	120	167	99	64	41	17	14	928	205	..
Medians ..	..	..	66·3	67·8	67·9	67·7	67·9	68·3	68·5	69·0	69·0	70·0	..	..	..	..	..

observe entre M (la moyenne de la stature de ses deux parents) et μ. Plus précisément, on a approximativement (les notations sont de nous) [4]

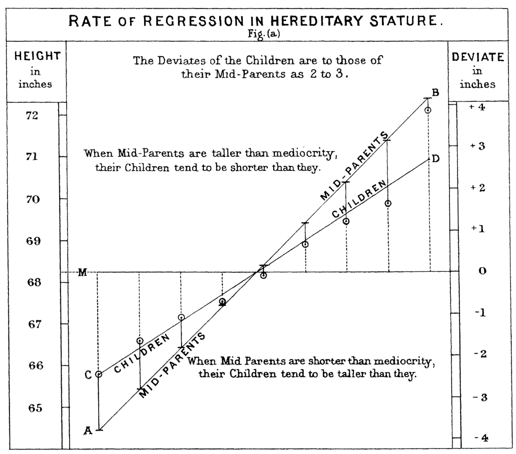
$$E(Y-\mu|M)=\frac{2}{3}(M-\mu).$$

Il s'agit de l'espérance de Y conditionnellement à M (dans le texte : la déviation filiale vaut *en moyenne* seulement les deux-tiers de la déviation du parent-moyen). Toujours à partir de cette table, Galton estime également la « régression de la stature du parent-moyen », ou l'espérance de $M-\mu$ conditionnellement à Y) :

$$E(M-\mu|Y)=\frac{1}{3}(Y-\mu).$$

Pour estimer le coefficient de régression de la stature des enfants, Galton répartit les parents-moyens en catégories (la stature est arrondie au pouce le plus proche), puis il calcule la moyenne des statures de tous les enfants d'une catégorie; on reporte les quantités obtenues sur un graphe (figure 3), et, les points étant à peu près alignés, on y fait passer « au jugé » une droite dont on détermine ensuite la pente (figure 3).

Figure 3 – La droite de régression (figure IX de [18]). En abscisse, on a la taille M du « parent-moyen »; les points correspondent à la taille moyenne des enfants. La droite (AB) est simplement la droite d'équation $y=x$.



Voici une interprétation moderne des résultats obtenus : la loi jointe du vecteur $(Y-\mu, M-\mu)$ est à peu près une loi normale bivariée centrée, de matrice de variance

$$2{,}52^2\times\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

4. Pour ce coefficient de $\frac{2}{3}$, Galton dit avoir tout d'abord fait une estimation de $\frac{3}{5}$, mais avoir préféré $\frac{2}{3}$ qui est plus simple. Est-ce parce qu'il recherche une loi naturelle qu'il pense devoir être parcimonieuse ?

ce qui correspond aux régressions

$$E(Y-\mu|M) = \frac{2}{3}(M-\mu)$$

et $E(M-\mu|Y) = \frac{1}{3}(Y-\mu)$. En outre, la variance de Y conditionnellement à une valeur donnée de M est

$$\operatorname{var}(Y) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 \operatorname{var}(M) = \frac{14}{18} \times 2,52^2 \simeq 2,22^2,$$

ce qui est cohérent (l'ordre de grandeur de l'erreur est d'un millième de pouce) avec la valeur de l'écart-type à l'intérieur des fratries estimée (indirectement) par Galton (voir la note en bas de la page 24).

Il faudra attendre quelques années pour que Yule, Edgeworth, et bien sûr Pearson (cf. par exemple [23]) posent des bases mathématiques solides à la théorie de la régression linéaire, permettant une formalisation similaire de ces résultats, et la vérification de la cohérence des diverses estimations de Galton.

Contribution de chaque ancêtre. À partir des constatations faites ci-dessus, Galton veut estimer la contribution de chaque ancêtre à la stature de l'individu. En effet, il faut démêler dans ce qui précède ce qui est réellement imputable aux parents, de ce qui est imputable à une partie de la stirpe transmise par les parents mais provenant d'ancêtres plus lointains, et qu'on n'observe qu'indirectement chez les parents – Galton ne fait pas explicitement référence à la stirpe dans le texte, mais on ne comprend sa démarche que si l'on a ce modèle à l'esprit.

À partir des coefficients de régression qu'il vient d'estimer, Galton cherche à déterminer la contribution de chacun des ancêtres d'un individu à la composition de sa stirpe. Après quelques arguments obscurs, et très fragiles sur le plan mathématique, que nous ne reproduirons donc pas, il conclut :

> Ainsi l'influence pure et simple du parent-moyen peut être considérée comme égale à $\frac{1}{2}$, celle du grand-parent à $\frac{1}{4}$, etc. Par conséquence l'influence d'un parent individuel est de $\frac{1}{4}$, d'un grand-parent de $\frac{1}{16}$, etc.

Nous allons clarifier cette loi dans le paragraphe qui suit. Swinburne [30] remarque que Galton l'avait en fait déjà énoncée en 1865 [14]. Loin de la déduire de ses observations, comme il le prétend, il n'a fait que chercher à confirmer son intuition première.

La loi de l'hérédité de 1897

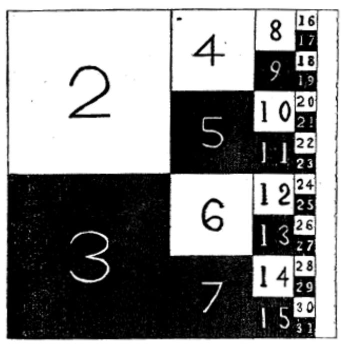
En 1897, dans *La contribution moyenne de chacun des ancêtres à l'héritage total de leur descendance* [19], Galton n'hésite plus : la loi qu'il a ébauchée dans *Natural Inheritance* lui semble à présent suffisamment confirmée, en particulier par l'analyse de nouvelles données sur la couleur du pelage des bassets.

Il postule donc que les parents d'un individu contribuent à eux deux (en moyenne) pour moitié à l'héritage total de leur enfant, soit (en moyenne) un quart chacun ; que les quatre grands-parents contribuent (en moyenne) pour un quart, soit un seizième chacun ; etc. Avec des notations modernes, on pourra écrire

$$\begin{aligned} Y_1 = \frac{1}{4}\underbrace{(Y_2+Y_3)}_{\text{deux parents}} + \frac{1}{16}\underbrace{(Y_4+Y_5+Y_6+Y_7)}_{\text{quatre grands-parents}} \\ + \frac{1}{64}\underbrace{(Y_8+\cdots+Y_{15})}_{\text{huit bisaïeuls}} + \cdots \end{aligned} \tag{1}$$

Les quantités Y_1, Y_2, etc., sont les valeurs des phénotypes des individus, par exemple la stature. La théorie de Galton est donc que la stature d'un individu est la moyenne pondérée (par les poids $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, etc., qui apparaissent dans l'équation (1)) de la stature de tous ses ancêtres. La séduction de cette loi aux yeux de Galton tient beaucoup au fait que la somme des poids vaut 1 (c'est une vraie moyenne), ce qui permet d'appliquer la loi tant au phénotype (la stature) qu'à son écart d'avec le phénotype moyen : on peut remplacer dans (1) tous les Y_i par $(Y_i - \mu)$.

Figure 4 – Un diagramme de l'hérédité. Les carrés 2 et 3 sont la contribution des parents, les carrés 4 à 7 des grands-parents, etc. Il faut mentalement compléter le carré par une multitude de carrés de plus en plus petits. Figure de Meston [21], reproduite par Galton [8].



Dans une lettre à Nature de 1898 [8], Galton reproduit la figure 4 créée par Meston [21], qui lui paraît propre à illustrer et à populariser cette loi. L'intérêt de cette figure apparaît mieux si l'on considère que Galton veut en fait élucider la composition de la stirpe, même s'il n'en fait plus mention : elle représente la stirpe d'un individu, mosaïque des stirpes de ses ancêtres.

Bien que l'égalité énoncée ci-dessus paraisse déterministe, une variabilité subsiste : un individu n'est pas totalement déterminé par l'ensemble de ses ancêtres – il faut expliquer les différences entre les membres d'une même fratrie. Pour Galton ces différences proviennent non de différences dans la nature du matériel héréditaire transmis, ainsi que le prédisent les lois de Mendel, mais de variations aléatoires dans la valeur des proportions $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, etc., qui donnent la contribution de chacun des ancêtres à la stirpe de l'individu, et ne sont que des valeurs moyennes; en pratique elles peuvent s'écarter de ces valeurs (mais leur somme restera égale à 1).

Application aux traits discrets Pour Galton, l'hérédité de traits discrets comme la couleur des yeux ou celle du pelage des bassets [19], est également déterminée par la loi (1). On ne peut bien sûr pas calculer une couleur comme moyenne des couleurs ancestrales; seule l'interprétation de cette loi comme portant sur la composition de la stirpe permet de traiter le cas de ces caractères. Galton suppose implicitement qu'ils se développent à partir d'un seul des germes de la stirpe, pris au hasard. Les coefficients qui apparaissent dans (1) donnent alors la probabilité qu'un individu ait les yeux de la même couleur que chacun de ses ancêtres. Bien après la redécouverte des lois de Mendel en 1900, les biométriciens continueront à essayer de défendre cette conception de l'hérédité des traits discrets.

2.2 – La contribution de Pearson

Quand Galton publie son article de 1897 [19], Karl Pearson se saisit immédiatement de cette loi qu'il appelle *Galton's Law of Ancestral Heredity*. Dans un article [24] publié en janvier 1898 et dédié à Galton *(A New Year's Greeting to Francis Galton)*, il l'écrit sous une forme similaire à l'équation (1), et l'interprète comme la régression de Y_1 sur l'ensemble des valeurs du trait chez ses ancêtres, donc comme une espérance conditionnelle. Ainsi pour Pearson, les coefficients $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$, etc., qui apparaissent dans la loi de Galton sont fixés. Si la valeur de Y_1 n'est pas totalement déterminée par les autres Y_i, cela provient de l'existence d'une variance résiduelle. La lecture de Pearson change d'emblée le sens de la loi de Galton.

La ré-interprétation va plus loin. Pearson introduit discrètement un paramètre libre en considérant la loi plus générale :

$$Y_1 = \frac{1}{2}\gamma r(Y_2 + Y_3) + \frac{1}{4}\gamma r^2(Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7) \\ + \frac{1}{8}\gamma r^3(Y_8 + \cdots + Y_{15}) + \cdots$$

tout en conservant la contrainte $\sum_{i\geqslant 1}\gamma r^i = 1$, c'est-à-dire $(1+\gamma)r = 1$ [5]. Cette variante correspond à des proportions différentes de celles supposées par Galton dans la constitution du matériel héréditaire, ce que Galton et Pearson à sa suite appellent « la taxe sur l'héritage ». En introduisant ainsi un « degré de liberté » dans la loi de Galton, Pearson permet, en ajustant la valeur de r, de rendre compte de corrélations observées dans une grande variété de mesures biologiques.

Si les lois des Y_i sont gaussiennes, de même espérance μ et variance σ^2, s'il n'y a ni homogamie, ni hétérogamie (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de corrélation, positive ou négative, entre les phénotypes des individus qui forment un couple), cette équation suffit à décrire la loi jointe des Y_i. Pearson montre que la corrélation entre deux individus ancêtre l'un de l'autre et distants de ℓ générations est

$$r_\ell = c\left(\frac{r(1+\gamma)}{2}\right)^\ell = c\left(\frac{1}{2}\right)^\ell,$$

où c dépend de r :

$$c = \frac{r^2 - 3r + 2}{r^2 - 2r + 2}. \qquad (2)$$

On vérifie que c prend toutes les valeurs entre 0 et 1 quand r va de 1 à 0; en pratique on peut donc choisir une valeur arbitraire pour c. De plus, c est le coefficient de la régression sur le parent-moyen M cher à Galton.

2.3 – Postérité

Le contraste entre Mendel et Galton, tous deux à la recherche des lois de l'hérédité, est frappant. La pauvreté de Mendel fut en grande partie la cause de ce qu'il ne put diffuser et faire reconnaître son

5. Étonnamment, Pearson fait ici une erreur de calcul dans [24], qu'il corrige deux ans plus tard dans [25].

travail; l'aisance financière de Galton lui laissa au contraire tout loisir de donner une large publicité à ses théories. Galton fut considéré comme un des plus grands scientifiques de son temps. Sa réputation est restée importante dans certains milieux; de façon générale, on le présente comme pionnier des statistiques. C'est indubitable, mais il faut préciser : des statistiques descriptives. Comme dit plus haut, Galton estime les coefficients de régression graphiquement. Il n'y a en définitive que peu de mathématiques dans son œuvre. Outre la définition du coefficient de régression, on lui doit celle de la corrélation (dite aujourd'hui corrélation de Pearson), qu'il définit comme le coefficient de régression d'une grandeur sur une autre, les deux grandeurs ayant été exprimées en nombre d'écart-types [6] [10]. Il est également un pionnier de la biométrie, et le premier à s'intéresser de façon systématique aux corrélations entre apparentés, ouvrant une voie de recherche féconde.

La version que donne Pearson de la loi énoncée par Galton permet d'obtenir des résultats compatibles avec les corrélations observées entre apparentés, et avec les prédictions obtenues sous le modèle polygénique que Fisher proposera en 1918 – le tout évoque la conception classique selon laquelle une nouvelle théorie scientifique inclut la précédente comme cas particulier. Mais comme on l'a vu Pearson réinterprète la loi de Galton : tout d'abord, il lit l'égalité énoncée par Galton comme une espérance conditionnelle; ensuite il introduit discrètement un paramètre qui permet d'obtenir des corrélations différentes selon le trait étudié, ce qui contredit l'idée première de Galton. Enfin, les traits discrets sont beaucoup mieux expliqués par les lois de Mendel, et les espoirs de Galton d'expliquer du même coup le phénomène de l'atavisme resteront vains.

Mais Galton reste également dans l'histoire comme le fondateur de l'eugénisme. Dès la première page d'*Hereditary Genius* [13], son premier livre sur l'hérédité, le décor est planté :

> De même qu'il est facile d'obtenir des races de chiens ou de chevaux particulièrement douées sur le plan de la course, ou sur tout autre plan, il serait faisable, par des mariages judicieux pendant plusieurs générations consécutives, de produire une race d'hommes extrêmement douée.

L'eugénisme se préoccupe donc du moyen d'améliorer les qualités d'une population, en éliminant le mauvais matériel héréditaire (déficients mentaux, pauvres, vagabonds, alcooliques, voleurs...) au profit du bon. Galton considère également comme nécessaire de préserver « la pureté de la race » ou de n'y introduire que des individus de valeur génétique supérieure, sous peine de décadence [13, p. 343]. Cette question restera une des grandes préoccupations des eugénistes – on se référera par exemple aux travaux de Pearson sur l'immigration des juifs en Angleterre [27], qui envisage la question sous l'angle de la valeur génétique de ceux-ci. Il paraît impossible d'absoudre Galton et les eugénistes de leur responsabilité dans le succès que connut l'idée d'« hygiène raciale ».

3. Enfin Fisher vint

3.1 – Biométriciens et mendéliens

La redécouverte des lois de Mendel en 1900 survient alors qu'une controverse scientifique oppose d'un côté les biométriciens Karl Pearson et Raphael Weldon, et de l'autre, William Bateson. Cette controverse porte sur la nature des mécanismes de l'évolution et de la spéciation (la formation de nouvelles espèces). Pour Bateson, celle-ci est un phénomène discontinu : une nouvelle espèce apparaît quand « une mutation » crée des individus qui ne peuvent plus s'hybrider avec l'ancienne espèce. Pour Weldon, qui entraîne à sa suite son collègue Pearson, l'évolution est un phénomène graduel et continu; la spéciation nécessite que deux populations soient isolées l'une de l'autre et évoluent dans des directions différentes. La querelle n'est pas que scientifique, c'est également un affrontement de personnalités, une détestation réciproque de Weldon et Bateson.

Dès sa redécouverte, Bateson se fait le champion du mendélisme, qui est la théorie rêvée pour la modélisation de phénomènes discontinus dans l'hérédité; de leur côté, les biométriciens rejettent ces idées qu'ils jugent incapables d'expliquer l'hérédité des traits continus. Le mendélisme devient sinon l'enjeu principal de la controverse, du moins le plus visible; le compromis paraît longtemps impossible et on est sommé de choisir son camp.

Du même coup, les premiers généticiens seront également souvent critiques à l'égard des théories

6. En fait, Galton utilise là aussi l'écart interquartiles pour standardiser les mesures.

eugénistes soutenues par les biométriciens : Bateson ne rejette pas en bloc toutes les thèses des eugénistes, mais il leur demande [2] avec malice si, plutôt que de prôner la stérilisation des criminels, il ne conviendrait pas de s'attaquer « aux fournisseurs de l'armée et à leurs complices, les patriotes de salle de rédaction » ; en 1925, Thomas Hunt Morgan insiste sur le rôle de l'environnement dans les traits comportementaux ou cognitifs, et affirme que les preuves apportées par les eugénistes dans ce domaine sont très insuffisantes (cf. [22, pp. 198-207]).

Cette hostilité réciproque entre biométriciens et généticiens eut pour effet qu'il fallut attendre 1918 pour que Ronald Aylmer Fisher fasse la synthèse entre les deux théories dans *The Correlation between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance* [6].

Fisher, né en 1890, était encore au moment de la rédaction de cet article un jeune mathématicien à peu près inconnu. Ce n'est que plus tard qu'il accédera à la notoriété, contribuant largement à forger et à diffuser les méthodes statistiques d'analyses de données, mais aussi à une approche mathématique de la sélection naturelle. Il sera toute sa vie un eugéniste convaincu.

3.2 – Le modèle de Fisher

Fisher suppose qu'un grand nombre r de « facteurs mendéliens » indépendants contribuent à la valeur du phénotype (par exemple la stature), qui en est la somme. Chacun de ces facteurs mendéliens est de la forme

$$X = \begin{cases} u & \text{si le génotype est } AA \\ u+\gamma_1 & \text{si le génotype est } Aa \\ u+\gamma_1+\gamma_2 & \text{si le génotype est } aa. \end{cases} \tag{3}$$

En notant $X_{(1)},\dots,X_{(r)}$ ces facteurs indépendants, le phénotype est

$$Y = X_{(1)} + \cdots + X_{(r)} + E = G + E,$$

où $G = X_{(1)} + \cdots + X_{(r)}$ est l'effet total du génome ; sa loi est approximativement normale. Le terme E, indépendant de G, est supposé normal également ; il est la résultante des effets environnementaux. E permettra de tenir compte, par exemple, des différences dans l'alimentation ; Fisher les assimile à des erreurs de mesure. La distribution statistique des facteurs mendéliens, leur transmission à la descendance, se déduisent des lois de Mendel. Un point crucial ici est que Fisher abandonne l'hypothèse de dominance qui correspondrait à $\gamma_1 = 0$.

Composante additive et composante de dominance

Le but de Fisher étant de calculer la corrélation entre apparentés (entre parents et enfants, ou entre frères, par exemple), il commence par s'intéresser à la corrélation entre parent et enfant pour un unique facteur mendélien X de la forme (3). Notons p et $q = 1-p$ les fréquences des allèles A et a ; sous l'hypothèse d'indépendance des allèles parentaux (que nous appelons aujourd'hui le modèle d'Hardy-Weinberg), les trois génotypes d'un individu pris au hasard dans la population ont pour fréquences p^2, $2pq$ et q^2. Dans le cadre mendélien, les probabilités conjointes pour les génotypes parent-enfant sont les suivantes :

Tableau 2 – Probabilités conjointes des génotypes parent-enfant. Par exemple, le parent est Aa et l'enfant aa avec probabilité pq^2. Ces probabilités sont calculées à partir des lois de Mendel sous l'hypothèse d'indépendance des génotypes des deux parents.

	AA	Aa	aa
AA	p^3	p^2q	0
Aa	p^2q	pq	pq^2
aa	0	pq^2	q^3

Notons X^p et X^e les valeurs de X chez le parent et l'enfant. Leur covariance peut se calculer directement à partir des probabilités de la table 2. Elle se factorise de façon miraculeuse en

$$\operatorname{cov}(X^p, X^e) = pq\,(p\gamma_1 + q\gamma_2)^2. \tag{4}$$

Ceci incite à considérer le cas particulier des facteurs mendéliens additifs, c'est-à-dire le cas $\gamma_2 = \gamma_1$; on calcule alors $\operatorname{cov}(X^p, X^e) = pq\gamma_1^2$, $\operatorname{var}(X) = 2pq\gamma_1^2$, et on a $\operatorname{cor}(X^p, X^e) = \frac{1}{2}$.

Pour traiter le cas général, Fisher décompose les facteurs mendéliens en une partie additive et un facteur résiduel. Soit d'abord X_a un facteur mendélien additif (c'est-à-dire $\gamma_2 = \gamma_1$), centré et réduit (c'est-à-dire $E(X_a) = 0$ et $\operatorname{var}(X_a) = 1$). Ces trois conditions définissent X_a de façon unique, au signe près. Soit ensuite X_d centré, réduit, avec $\operatorname{cov}(X_a, X_d) = 0$; là encore, X_d est unique au signe près. On a ensuite

$$X = \mu + \alpha X_a + \delta X_d$$

avec $\mu = E(X)$, $\alpha = \mathrm{cov}(X, X_a)$ et $\delta = \mathrm{cov}(X, X_d)$. On a bien sûr $\mathrm{var}(X) = \alpha^2 + \delta^2$; la variance de X a été décomposée en variance additive et en variance dite de dominance (le terme est pauvrement choisi). Le calcul explicite de α et δ mène à

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 2pq(p\gamma_1 + q\gamma_2)^2 \\ \delta^2 &= p^2q^2(\gamma_2 - \gamma_1)^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Finalement, chacun des r facteurs mendéliens considérés s'écrit $X_{(i)} = \mu_i + \alpha_i X_{ia} + \delta_i X_{id}$, et leur somme est

$$G = \mu + \alpha_1 X_{1a} + \cdots + \alpha_r X_{ra} + \delta_1 X_{1d} + \cdots + \delta_r X_{rd},$$

où $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_r = E(G)$. En posant $\tau_a = \sum_i \alpha_i^2$ et $\tau_d = \sum_i \delta_i^2$, on a $\mathrm{var}(G) = \tau = \tau_a + \tau_d$.

Corrélation entre apparentés

Revenons à la corrélation entre apparentés, et d'abord à la corrélation parent-enfant. La variance du phénotype Y est

$$\mathrm{var}(Y) = \mathrm{var}(G) + \mathrm{var}(E) = \tau + \sigma^2 = \tau_a + \tau_d + \sigma^2.$$

On note avec des exposants p et e les différents termes du modèle chez le parent et l'enfant considérés. D'après les équations (4) et (5) on a, pour chacun des facteurs mendéliens impliqués,

$$\mathrm{cov}(X^p, X^e) = \frac{1}{2}\alpha^2.$$

Les facteurs mendéliens étant supposés deux à deux indépendants, on a alors

$$\mathrm{cov}(G^p, G^e) = \frac{1}{2}(\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_r^2) = \frac{1}{2}\tau_a.$$

En supposant l'indépendance des effets environnementaux E^p et E^e, on calcule

$$\mathrm{cor}(Y^p, Y^e) = \frac{1}{2}h^2, \text{ où } h^2 = \frac{\tau_a}{\tau_a + \tau_d + \sigma^2}$$

est l'*héritabilité restreinte* ; c'est le rapport de la variance génétique additive sur la variance totale du phénotype. L'*héritabilité large* est

$$H^2 = \frac{\tau_a + \tau_d}{\tau_a + \tau_d + \sigma^2}.$$

La pertinence de la décomposition en variance additive et variance de dominance apparaît pleinement ici : seule la variance additive apparaît dans la corrélation des phénotypes entre parent et enfant. On généralise facilement les calculs précédents à d'autres formes d'apparentement. Fisher envisage les ascendances directes – un individu et ses grands-parents, arrière-grands-parents, etc. ; il envisage également le cas des germains (frères ou sœurs), des cousins germains, des doubles cousins germains, dressant à chaque fois une table analogue à la table 2.

De façon plus moderne, on peut décrire les différentes relations d'apparentement entre deux individus par deux coefficients ϕ et ψ :

- on tire chez le premier individu un allèle d'un gène (parmi les deux allèles qu'il porte) ; on fait la même chose chez le deuxième individu ; le coefficient d'apparentement ϕ est la probabilité pour que les deux allèles obtenus soient hérités d'un ancêtre commun ;
- ψ est la probabilité pour que les deux individus aient deux allèles hérités d'un ancêtre commun.

TABLEAU 3 – Valeurs de ϕ et ψ pour quelques relations d'apparentement. Les germains sont les membres d'une fratrie. Les doubles cousins germains partagent les mêmes grands-parents paternels et maternels.

Relation	ψ	ϕ
Parent/enfant	0	$\frac{1}{4}$
Grand-parent/petit-enfant	0	$\frac{1}{8}$
Germains	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
Cousins germains	0	$\frac{1}{16}$
Doubles cousins germains	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$

Si X et X' sont les facteurs mendéliens associés à un même gène chez les deux individus considérés, on calcule

$$\mathrm{cov}(X, X') = 2\phi\alpha^2 + \psi\delta^2.$$

La covariance entre les composantes génétiques chez les deux individus est donc

$$\mathrm{cov}(G, G') = 2\phi\tau_a + \psi\tau_d,$$

et on a, toujours en supposant l'indépendance des effets environnementaux,

$$\begin{aligned} \mathrm{cor}(Y, Y') &= 2\phi\frac{\tau_a}{\tau_a + \tau_d + \sigma^2} + \psi\frac{\tau_d}{\tau_a + \tau_d + \sigma^2} \\ &= 2\phi h^2 + \psi(H^2 - h^2). \end{aligned}$$

3.3 – Estimer l'héritabilité : études familiales et études de jumeaux

Les héritabilités h^2 et H^2 peuvent donc être estimées à partir de la corrélation observée entre les phénotypes des apparentés « par exemple, entre germains d'une part, entre parents et enfants d'autre part. » Une des limitations les plus évidentes du modèle de Fisher est l'hypothèse d'absence de corrélation entre les effets environnementaux : si l'on considère deux individus apparentés de phénotypes Y et Y' avec

$$Y = G + E \text{ et } Y' = G' + E',$$

en l'absence de corrélation gène-environnement, la covariance de Y et Y' est

$$\text{cov}(Y, Y') = \text{cov}(G, G') + \text{cov}(E, E').$$

Les calculs qui précèdent et les procédures d'estimation de l'héritabilité qui en découlent supposent le terme $\text{cov}(E, E')$ nul ; s'il est positif, ce qui est plausible, l'estimation de $\text{cov}(G, G')$ est biaisée vers le haut, et celle de l'héritabilité également.

Les études de jumeaux sont la solution classique pour minimiser ce problème. Dans le cas de jumeaux monozygotes, on a $\phi = \frac{1}{2}$ et $\psi = 1$, d'où on tire la valeur de la corrélation phénotypique $r_{MZ} = \text{cor}(Y, Y')$:

$$r_{MZ} = h^2 + (H^2 - h^2) + \rho_{MZ}(1 - H^2)$$

où ρ_{MZ} est la corrélation entre les environnements des jumeaux monozygotes. De même, la corrélation phénotypique entre jumeaux dizygotes est

$$r_{DZ} = \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{4}(H^2 - h^2) + \rho_{DZ}(1 - H^2),$$

où ρ_{DZ} est la corrélation entre les environnements des jumeaux dizygotes. Si on suppose que ces termes de corrélations environnementales sont égaux, $\rho_{MZ} = \rho_{DZ}$, on a

$$2(r_{MZ} - r_{DZ}) = h^2 + \frac{3}{2}(H^2 - h^2).$$

Si on suppose en outre que le terme de dominance est nul, c'est-à-dire $H^2 = h^2$, on a $2(r_{MZ} - r_{DZ}) = h^2$. Cette formule est connue sous le nom de *formule de Falconer.*

S'il y a un terme de dominance non nul, $2(r_{MZ} - r_{DZ}) = H^2 + \frac{1}{2}(H^2 - h^2)$ surestime l'héritabilité large. En outre, l'hypothèse $\rho_{MZ} = \rho_{DZ}$ est très critiquable : il y a beaucoup de raisons, biologiques, comportementales ou sociales, qui peuvent être cause qu'elle n'est pas vérifiée ; si $\rho_{MZ} > \rho_{DZ}$, on a là encore un biais positif. La présence de biais dus à la présence d'environnement partagé entre apparentés reste donc possible (et même probable, particulièrement quand on s'intéresse à des traits comportementaux ou cognitifs).

3.4 – Postérité

L'intérêt historique de l'article de 1918 n'est pas limité à la génétique quantitative : Fisher y introduit le terme de variance pour désigner le carré de l'écart-type, et met pour la première fois l'emphase sur l'intérêt de sa décomposition additive qui donnera plus tard naissance à l'analyse de variance, une de ses contributions les plus célèbres aux statistiques.

En génétique, le modèle polygénique additif de Fisher reste hégémonique dans l'étude des traits quantitatifs. L'héritabilité est notamment très utilisée en génétique animale, et plus spécialement dans le cadre de l'élevage, car elle permet de prédire le succès d'une procédure de sélection artificielle.

Définie comme un rapport de variance, elle éclipse la plupart du temps la question de la corrélation entre apparentés. Elle est souvent mal interprétée : pour exprimer que l'héritabilité de la stature est de 80% dans une certaine population, on dira que « la stature est à 80% génétique ». Personne ne peut pourtant prétendre qu'il aurait 80% de sa stature s'il ne s'était jamais alimenté ! L'héritabilité, comme tout rapport de variance, n'a de sens qu'au niveau de la population. Fisher avait pourtant mis ses lecteurs en garde dès l'introduction de son article :

> Il est souhaitable d'une part que les idées élémentaires à la base du calcul des corrélations soient clairement comprises, et facilement exprimées dans le langage ordinaire, et d'autre part que les phrases peu rigoureuses sur le « pourcentage de causalité », qui obscurcissent la distinction essentielle entre l'individu et la population, soient soigneusement évitées.

La plus importante innovation méthodologique récente, due à Peter Visscher et son équipe [31], consiste à estimer une héritabilité à partir de données génétiques couvrant le génome d'un grand nombre d'individus non apparentés. Très rapidement, voici comment fonctionne la méthode. Il y a sur le génome des millions de sites polymorphes ; si l'on dispose du génotype de deux individus en plusieurs centaines de milliers, voire plusieurs millions de tels sites, on peut calculer une corrélation génotypique entre ces deux individus. Cette corrélation joue le même rôle que le coefficient 2ϕ pour des individus apparentés. On peut alors analyser un grand échantillon d'individus pris au hasard dans la population comme s'il s'agissait de membres d'une seule (immense) famille, en utilisant les corrélations génotypiques comme on utiliserait les coefficients 2ϕ.

Visscher et ses collaborateurs ont montré que l'application de cette procédure produit des estimations plus petites, mais souvent du même ordre de grandeur que celles obtenues sur les données familiales. Un des avantages avancés est que la méthode s'affranchit des biais dus à l'environnement partagé dans les familles. Cependant d'autres biais restent possibles, notamment si les fréquences alléliques ne sont pas géographiquement constantes. En appliquant la méthode de Visscher sans plus de précautions aux coordonnées géographiques du lieu de naissance, on estime que leur héritabilité, dans la population française, est égale à 1, alors qu'il s'agit bien sûr d'une variable purement environnementale, dont l'héritabilité est nulle [5].

Mais les critiques qui peuvent être faites à la notion d'héritabilité ne s'arrêtent pas à la présence de biais d'estimation, ou à la question de l'environnement partagé : d'autres hypothèses du modèle additif sont très discutables, notamment l'indépendance des facteurs génétiques et environnementaux, et l'absence d'interactions entre différents gènes ou entre gènes et environnement (les effets de certains facteurs mendéliens peuvent être différents selon l'environnement). Or l'interaction entre gènes, ou entre gènes et environnement est la règle plutôt que l'exception. Dans ce contexte, l'interprétation de l'héritabilité, qui n'a de sens que dans un modèle où les effets des différents facteurs s'ajoutent, est hasardeuse.

Pour illustrer ce dernier point on peut considérer l'exemple de la tuberculose. L'héritabilité de cette maladie infectieuse a été estimée à $h^2 = 0,71$ [1] dans une population exposée à l'agent qui en est responsable, *Mycobacterium tuberberculosis*. Cette valeur élevée montre qu'il existe des facteurs génétiques qui modulent de façon importante la réponse à l'infection ; on sait pourtant qu'il serait erroné d'en conclure qu'il s'agit d'une « maladie génétique ».

De façon générale, le fait qu'un trait ait une héritabilité élevée n'exclut pas que des facteurs environnementaux jouent un rôle important voire primordial dans la construction de celui-ci. Nombre d'argumentaires à destination du grand public (concernant par exemple l'autisme, le QI, etc.), voire des chercheurs, sont pourtant fondés sur cette conception erronée.

Références

[1] L. Abel et al. « Genetics of human susceptibility to active and latent tuberculosis : present knowledge and future perspectives ». *The Lancet Infectious Diseases* **18**, nº 3 (2018), e64-e75.

[2] W. Bateson. « Commonsense in racial problems ». *The Eugenics review* **13**, nº 1 (1921), p. 325.

[3] W. Bateson. *Mendel's principle of heredity, A defence*. Cambridge : Cambridge University Press, 1902.

[4] M. Bulmer. « The development of Francis Galton's ideas on the mechanism of heredity ». *Journal of the History of Biology* **32**, nº 2 (1999), p. 263-292.

[5] C. Dandine-Roulland et al. « Accuracy of heritability estimations in presence of hidden population stratification ». *Scientific reports* **6** (2016).

[6] R. A. Fisher. « The Correlation between Relatives on the Supposition of Mendelian Inheritance ». *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* **52**, nº 2 (1919), p. 399-433.

[7] R. A. Fisher. « Has Mendel's work been rediscovered? » *Annals of science* **1**, nº 2 (1936), p. 115-137.

[8] F. Galton. « A Diagram Of Heredity ». *Nature* **57**, nº 1474 (1898), p. 293.

[9] F. Galton. « A theory of heredity ». *Contemporary Review* **27** (1875), p. 80-95.

[10] F. Galton. « Co-relations and their measurement, chiefly from anthropometric data ». *Proceedings of the Royal Society of London* **45**, nº 273-279 (1888), p. 135-145.

[11] F. Galton. « Eugenics : Its definition, scope, and aims ». *American Journal of Sociology* **10**, nº 1 (1904), p. 1-25.

[12] F. Galton. « Experiments in pangenesis, by breeding from rabbits of a pure variety, into whose circulation blood taken from other varieties had previously been largely transfused ». *Proceedings of the Royal Society* **19** (1871), p. 393-410.

[13] F. Galton. *Hereditary genius*. Macmillan et Company, 1869.

[14] F. Galton. « Hereditary talent and character ». *Macmillan's magazine* **12**, n° 157-166 (1865), p. 318-327.

[15] F. Galton. *Natural Inheritance*. London et New York : Macmillan et Co., 1889.

[16] F. Galton. « On blood-relationship ». *Nature* **6** (1872), p. 173-176.

[17] F. Galton. « On blood-relationship ». *Proceedings of the Royal Society* **20** (1872), p. 394-402.

[18] F. Galton. « Regression towards mediocrity in hereditary stature. » *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland* **15** (1886), p. 246-263.

[19] F. Galton. « The average contribution of each several ancestor to the total heritage of the offspring ». *Proceedings of the Royal Society of London* **61**, n° 369-377 (1897), p. 401-413.

[20] G. Mendel. « Versuche über Pflanzen-Hybriden ». *Actes Soc. Hist. Nat. Brünn* **3** (1865), p. 3-47.

[21] A. J. Meston. *The Galton Law of Heredity and How Breeders May Apply It*. Published by the author. Pittsfield, Mass., 1898.

[22] T. H. Morgan. *Evolution and Genetics*. Princeton : Princeton University Press, 1925.

[23] K. Pearson. « Mathematical contributions to the theory of evolution. III. Regression, heredity, and panmixia ». *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.* **187** (1896), p. 253-318.

[24] K. Pearson. « Mathematical contributions to the theory of evolution. On the law of ancestral heredity ». *Proceedings of the Royal Society of London* **62**, n° 379-387 (1898), p. 386-412.

[25] K. Pearson. « Mathematical Contributions to the Theory of Evolution. On the Law of Reversion ». *Proceedings of the Royal Society of London* **66**, n° 424-433 (1900), p. 140-164.

[26] K. Pearson. *The life, letters and labours of Francis Galton*. Cambridge : Cambridge University Press, 1914.

[27] K. Pearson et M. Moul. « The problem of alien immigration into Great Britain, illustrated by an examination of Russian and Polish Jewish children ». *Annals of Human Genetics* **1**, n° 1 (1925), p. 5-54.

[28] A. M. Pires et J. A. Branco. « A Statistical Model to Explain the Mendel—Fisher Controversy ». *Statistical Science* (2010), p. 545-565.

[29] J. B. Reid et J. J. Ross. « Mendel's genes : Toward a full molecular characterization ». *Genetics* **189**, n° 1 (2011), p. 3-10.

[30] R. G. Swinburne. « Galton's law—Formulation and development ». *Annals of science* **21**, n° 1 (1965), p. 15-31.

[31] J. Yang et al. « Common SNPs explain a large proportion of the heritability for human height ». *Nat Genet* **42**, n° 7 (2010), p. 565-569.

Hervé Perdry

Université Paris-Saclay

herve.perdry@u-psud.fr

Hervé Perdry est maîtres de conférence ; il est spécialiste en génétique humaine.

Je remercie chaleureusement Arnaud Bodin et Damien Gayet pour leurs commentaires qui ont permis d'améliorer considérablement ce texte avant sa publication. Les figures 1 et 2 utilisent une partie de la figure *Mendel seven characters* présente sur Wikimedia Commons, déposée dans le domaine public par Mariana Ruiz LadyofHats.

Un entretien avec Bernard Malgrange

Propos recueillis par Philippe Eyssidieux le 30 novembre 2018.

Commençons par le commencement, ton origine familiale.

Je suis né dans une famille de moyenne bourgeoisie parisienne [1]. Le père et les deux oncles de ma mère étaient des polytechniciens. Dans la famille de mon père, c'étaient au contraire des hommes de loi, juristes, avocats. Sauf mon père qui a fait Centrale. J'ai fait classiquement mes études dans les meilleurs endroits possibles : Montaigne, Louis-Le-Grand, à l'École normale.

Qu'est-ce qui t'a amené à faire des maths ?

Comme j'étais le premier de la classe en maths, mon prof d'hypotaupe m'a dit « Vous devriez faire Normale » alors que je pensais faire l'X. À l'École en première année, j'ai hésité entre les maths et la physique. En maths, il y avait de bons cours. Cartan était absent mais Serre, qui était deux ans avant nous, nous servait de prof comme aux générations qui ont suivi. À l'époque, en physique à la Sorbonne, il y avait De Broglie et Rocard et les cours n'étaient pas terribles. Alors finalement au bout d'un an j'ai choisi les maths.

J'ai ensuite décidé de faire une thèse avec Schwartz. Schwartz était à la mode, la théorie des distributions venait de sortir en 48 ou 49. Les mathématiciens français étaient très enthousiastes aussi bien Weil, Cartan, Serre, etc.

On s'est mis à faire des équations aux dérivées partielles avec Schwartz qui entre parenthèses ne connaissait pas beaucoup plus que nous, ses élèves, le sujet, alors qu'il connaissait bien les probabilités. Les équations aux dérivées partielles, ça date au moins de D'Alembert mais au XIX^e^ siècle on avait regardé les équations elliptiques, hyperboliques, paraboliques du second ordre, et puis les problèmes de Dirichlet, de Cauchy et de Neumann essentiellement. Sauf un truc un peu à part qui est la géométrie différentielle à la Darboux-Cartan mais qui était fondé sur le théorème de Cauchy-Kowalewski donc uniquement réel-analytique donc ça ne te disait rien pour les fonctions C^∞ ou moins régulières. Les gens commençaient quand j'ai fait ma thèse à sortir du second ordre mais restaient dans les problèmes aux limites elliptiques, hyperboliques, paraboliques. Petrowski et Gårding s'étaient mis à regarder des problèmes aux limites hyperboliques d'ordre supérieur tout à fait généraux. Il y avait évidemment le travail de Leray sur Navier-Stokes qu'on admirait comme un monstre lointain. Le sujet était assez ouvert et on s'intéressait à des équations qui n'étaient ni elliptiques ni hyperboliques ni paraboliques, leurs solutions élémentaires et à quelles conditions toutes les solutions sont C^∞. On était très peu nombreux sur ces questions, les connaissances qu'il y avait à avoir étaient extrêmement limitées contrairement à maintenant.

C'est de ce moment que date le théorème de Malgrange-Ehrenpreis ? [2]

C'est le premier chapitre de ma thèse. Ehrenpreis et moi l'avons démontré indépendamment et essentiellement de la même manière par une méthode de variables complexes. J'avais d'abord cherché à l'aborder par la division des distributions [3], sans succès. Par contre, très peu de temps après Hör-

1. En 1928.
2. Existence d'une solution fondamentale pour une équation aux dérivées partielles linéaire à coefficients constants. Plus précisément, pour P un polynôme réel à n indéterminées $T_1,\dots,T_n$, on note $P(D)$ l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants obtenu en substituant $\frac{\partial}{\partial x_i}$ à l'indéterminée T_i. Une solution fondamentale est une distribution E telle que $P(D)E=\delta$ avec δ la masse de Dirac en l'origine.
3. Soit T une distribution à support compact définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et f une fonction analytique réelle définie sur Ω, il existe une distribution S à support compact sur Ω telle que $fS=T$. Voir B. Malgrange. Division des distributions, Séminaire N. Bourbaki, 1960, exp. n° 203, p. 477-481.

mander a donné une démonstration complètement différente, ce qu'il appelle des intégrales d'énergie, des intégrations par parties pour montrer que si f est à support compact $P(D)f$ dans L^2 majore f dans L^2. La méthode était bien meilleure parce qu'elle s'applique à des équations à coefficients variables.

Si on parlait de tes cothésards à Nancy ?

On était trois ensemble pendant un an, Grothendieck, Lions et moi.

Lions et moi nous sommes dirigés vers les équations aux dérivées partielles. Lions étudiait des problèmes aux limites et puis plus tard il est passé dans les mathématiques appliquées. Il a créé une école considérable d'analyse appliquée, infiniment meilleure que ce qu'il y avait à l'époque. En EDP comme en probas, la frontière entre maths appliquées ou non est floue. Elle est très variable d'un pays à l'autre et d'une époque à l'autre. Les Allemands appelaient maths appliquées la mécanique dans les années 50. Au début du XIXe siècle du temps de Fourier, ce qu'on appelle maintenant maths appliquées s'appelait physique mathématique. Verdier disait à raison que la définition est sociologique et non pas mathématique.

Grothendieck à l'époque travaillait sur les espaces vectoriels topologiques. Il était très sympathique et avait déjà son côté un peu anarchiste. On était bons copains. Par la suite, j'ai regretté de ne pas l'avoir interrogé sur sa vie, comment il a vécu la guerre. Je le regrette mais maintenant évidemment je ne peux plus lui demander. C'est curieux dans les années 40 au début des années 50, on n'y pensait pas. Ça paraît étrange maintenant.

Il s'est mis très vite à autre chose que son sujet très limité. Il avait comme seconde thèse la théorie des faisceaux, sujet qui avait été donné par Cartan, fort judicieusement. Je me rappelle que dans le taxi en allant déjeuner chez Schwartz, Cartan corrigeait toutes les bêtises qu'il avait dites dessus pendant la soutenance. Un an après, il avait déjà publié Tôhoku [4] (Rires). Je me rappelle aussi une autre chose amusante. On avait un cours de Dieudonné sur le corps de classes alors, comme j'étais l'algébriste de service, j'étais chargé d'exposer les préliminaires donc j'ai enseigné la théorie de Galois à Grothendieck et à Lions. Ils comprenaient très bien mais ils ne savaient pas un mot d'algèbre. Je peux donc me vanter d'avoir eu Grothendieck comme élève en théorie de Galois.

Et l'élève a dépassé le maître (Rires). Comment as-tu poursuivi ?

La division des distributions a été faite simultanément par Hörmander et Łojaziewicz, 2-3 ans après ma thèse. Hörmander avait une méthode très brutale tandis que Łojaziewicz faisait une analyse beaucoup plus détaillée. Alors j'ai repris le travail de Łojaziewicz et je me suis aperçu que ça marchait pour des systèmes surdéterminés. On ne sait pas du tout traiter les systèmes surdéterminés (ayant plus d'équations que d'inconnues) d'équations aux dérivées partielles linéaires par les méthodes d'estimation a priori – sauf à coefficients constants. Encore maintenant, on est pratiquement à zéro dans ce sujet alors que quand il s'agit d'une équation ou d'un système carré on a des quantités énormes de résultats.

Je m'en suis servi aussi pour redémontrer le théorème d'Ehrenpreis sur les systèmes surdéterminés à coefficients constants. Mon idée d'utiliser la $\bar{\partial}$-cohomologie à conditions de croissance était nouvelle à l'époque et apportait une grande simplification par rapport aux méthodes d'Ehrenpreis. Ensuite, l'idée a été reprise et mon travail dépassé par les résultats définitifs de Hörmander que tu trouves dans le dernier chapitre de son livre d'analyse complexe [5].

Puis, il s'est trouvé tout à fait par hasard que les mêmes calculs m'ont permis de démontrer le théorème de préparation différentiable [6].

Je m'étais aperçu en faisant ces calculs de division des distributions en généralisant Łojaziewicz qu'il y avait des identités de la division (B. va au tableau et

4. A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique, II. Tohoku Math. J. (2) 9 (1957), nº 3, 119-221. Ce papier introduit la notion de catégorie abélienne, la suite spectrale de dérivation des foncteurs composés et beaucoup d'autres idées.

5. Voir L. Hörmander. An introduction to Complex Analysis in Several Variables. Second edition. North Holland (1973).

6. Soit f un germe à l'origine de fonction C^∞ des variables $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ tel qu'il existe un entier positif $k \in \mathbb{N}$ tel que $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial t}(0,0) = \ldots = \frac{\partial^{k-1} f}{\partial t^{k-1}}(0,0) = 0$ et $\frac{\partial^k f}{\partial t^k}(0,0) \neq 0$, on peut écrire $f(t,x) = c(t,x)(t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \ldots + a_0(x))$, les germes c et a_i étant C^∞ et $c(0,0) \neq 0$. Le théorème de division est l'énoncé que tout germe ϕ de fonction C^∞ satisfait à une identité de la division

$$\phi(t,x) = d(t,x)f(t,x) + b_{k-1}(x)t^{k-1} + \ldots + b_0(x)$$

les germes d et b_i étant C^∞ et uniquement déterminés. Pour les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes, ce résultat classique est dû à Weierstrass. Il entre dans les fondements de la géométrie analytique locale et les analogues en géométrie algébrique jouent aussi un tel rôle.

écrit). Si j'ai ϕ fonction C^∞ et f qui est un polynôme distingué en t de degré n [7] on peut écrire

$$\phi = f\psi + \sum_{i<n} t^i \chi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

donc exactement l'identité de Weierstrass à condition que mon diviseur f soit analytique. Je n'avais rien fait de ce résultat jusqu'au jour où je me suis rendu compte qu'il donnait le théorème de préparation différentiable en introduisant d'autres variables réelles indépendantes y_i et en prenant pour f le polynôme générique $f = t^n + \sum_{i>0} y_i t^{n-i}$ puis en appliquant les fonctions implicites aux équations $\chi_i = 0$.

Quelle était ta motivation ?

Thom disait en avoir besoin pour la théorie des singularités des applications différentiables. Gårding le conjecturait aussi mais Thom posait la question avec beaucoup d'insistance. On était dans le même bureau à Strasbourg où je venais d'être nommé après ma thèse. Il était parfois difficile de discuter avec Thom, il passait son temps à me poser des questions plus ou moins idiotes mais bon, des fois elles étaient très bonnes (Rires). Donc finalement c'était très bénéfique.

Est-ce que ça a beaucoup été utilisé ?

Oui. Mather l'a énormément utilisé pour sa théorie de la stabilité des applications différentiables. C'étaient les premiers travaux de Mather. Ensuite, il a fait des systèmes dynamiques.

Thom était intéressé par ces questions de stabilité, il avait traité quelques exemples, comme les formes normales pour les applications de deux variables génériques à la suite de Whitney. Celui-ci avait été le premier à trouver des exemples de ce genre qui avaient beaucoup impressionné Thom. Son premier travail de théorie des singularités est paru dans le même volume des *Annales de l'Institut Fourier* que ma thèse et d'ailleurs que GAGA [8] de Serre (B. farfouille dans le bureau et en sort le Tome 6 des *Annales de Fourier*.).

Les rédacteurs étaient Brelot, Chabauty et Louis Néel, le prix Nobel de physique, mais il n'y a pas de physique dans ce volume.

Il y avait encore les physiciens mais j'ai entendu Néel se plaindre ensuite en disant que les mathématiciens l'avaient foutu dehors. Brelot était parti à Paris mais continuait de s'occuper des *Annales* tout seul sans aucun referee. L'article de Serre est d'une clarté formidable, un modèle d'écriture.

Le théorème de préparation, c'est en lien avec ton livre *Idéaux de fonctions différentiables* à Bombay ?

Oui, il est dans le livre parce que j'ai employé les mêmes méthodes pour les deux. C'est un cours que j'ai fait à Bombay. Il a été rédigé par Raghavan Narasimhan qui en a même fait l'impression parce que l'imprimeur était nul. Il y a des bouquins beaucoup mieux qui sont parus ensuite sur le même sujet comme le Tougeron.

Comment t'es-tu intéressé à l'analyse algébrique et à la théorie globale des équations différentielles ?

Je m'étais intéressé aux singularités d'équations différentielles un peu par hasard parce que je m'étais aperçu qu'il y avait un théorème d'indice qui était facile et inconnu dans la littérature. Puis, je me suis aperçu qu'il y en avait un dans le cas formel mais ce n'était pas le même sauf avec des singularités régulières. Alors, je me suis mis à cette époque-là à m'intéresser aux équations différentielles en lisant des auteurs comme Wasow, Shibuya etc. Puis, au début des années 70, je me suis aperçu d'un petit truc cohomologique qui a l'air idiot mais qui a servi beaucoup en particulier à Ramis. Prends une série formelle d'une variable. D'après un théorème de Ritt, dans des secteurs assez petits, elle se développe en fonction holomorphe et puis tu peux changer de secteur donc tu peux te demander quelle est la différence d'un secteur à l'autre. Elle définit un 1-cocycle sur le cercle des directions à l'origine à valeurs dans le faisceau des fonctions plates à l'origine. Ce résultat qui n'est pas difficile à démontrer est très utile car il passe aux équations différentielles [9]. Ramis s'est aperçu qu'il fallait mettre des conditions de croissance là-dedans. C'est ainsi qu'a été dégagée la formulation moderne du phénomène de Stokes dont Birkhoff avait vu qu'il remplaçait la monodromie pour les singularités irrégulières.

Après, on a parlé avec Deligne et on a eu un échange de lettres fructueux dans les années 70-80

7. De la forme $t^k + a_{k-1}(x)t^{k-1} + \ldots + a_0(x)$.

8. Qu'on peut énoncer ainsi : sur une variété complexe projective, tout faisceau analytique cohérent provient d'un faisceau algébrique cohérent et leurs sections globales coïncident. Ce qui est la généralisation optimale du théorème classique de Chow qu'une sous-variété complexe-analytique de l'espace projectif est algébrique.

9. Pour plus de détails, voir B. Malgrange. Remarques sur les équations différentielles à points singuliers irréguliers, Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n°25, p. 1-10.

publié par la SMF [10]. De mon côté, j'ai surtout exploré le lien avec les D-modules [11]. Deligne avait démontré qu'il y avait un réseau pour les équations différentielles à singularités régulières et j'ai démontré le cas irrégulier [12]. Ce qui entraîne par GAGA que si la variété de base est projective, une connexion méromorphe est algébrique [13].

J'ai aussi regardé comment fonctionnait la transformation de Fourier des équations différentielles à singularités irrégulières. Deligne voulait absolument savoir comment ça marchait et il a tellement insisté que j'ai fini par écrire un bouquin pour donner une réponse théorique complète mais je dois dire que c'est très compliqué et sauf cas particulier à peu près inutilisable.

Qu'est-ce que tu as pensé de ces travaux de l'école de Sato sur les D-modules ? Comment ça a été reçu ?

Ah c'est très bien. C'est remarquable. Ça a été bien reçu par les algébristes. Les D-modules, c'est en revanche un mot qui est prohibé chez les spécialistes des équations aux dérivées partielles. Ce n'est pourtant pas difficile comme notion, c'est moi qui l'avais introduite dans un petit fascicule non publié sur l'involutivité à la Spencer-Quillen. J'avais écrit leur théorie en termes de D-modules et puis ça a été réutilisé par les Japonais, par les Russes comme Bernstein. Je pense que Kashiwara connaissait mes notes pour son mémoire de master publié récemment aux *Mémoires de la SMF* .

Comment as-tu eu l'idée de ton théorème sur les feuilletages singuliers [14] ?

Il y avait un travail de Martinet-Moussu qui montrait le résultat formel. Si tu as un feuilletage qui a une singularité de codimension 3 alors formellement il a une intégrale première [15]. Je me suis dit qu'il fallait faire converger leur calcul. Je me suis aperçu qu'il y avait un théorème de voisinage privilégié au sens de Cartan-Grauert qui permettait de faire ça. De même, si on a une singularité en codimension 2, l'existence d'une solution formelle implique celle d'une solution convergente. Je ne sais plus comment ils avaient trouvé le théorème formel, c'était peut-être une idée de Reeb ou Martinet. C'est quand même très astucieux cette théorie des singularités de feuilletages. Des gens comme Cerveau, Moussu, Mattei, etc. ont fait des tas de trucs très astucieux. Mais ça reste un petit peu en l'air, ça ne s'est pas développé comme la géométrie algébrique. Il y a dans ce sujet tout un ensemble de résultats dont je ne sais pas s'ils forment une théorie, comme la théorie des schémas ou la théorie des motifs.

Parlons de la théorie de Galois différentielle.

Avant la théorie de Galois différentielle, j'avais appris la théorie de Ritt des équations différentielles algébriques. Comme je connaissais le formalisme de Cartan et les résultats de Guillemin-Sternberg comme quoi l'involutivité à la Cartan est une notion cohomologique, j'ai mis tout ça ensemble dans un petit bouquin pour démontrer proprement que si on prolonge suffisamment un système différentiel, génériquement, il devient involutif [16].

Dans le bouquin de Bryant, Chern, Goldschmidt et Griffiths, c'est énoncé de façon horrible. D'abord, ils ne disent pas si c'est sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$ c'est faux. Deuxièmement ils ne disent pas que c'est vrai génériquement alors que c'est trivialement faux sans généricité et puis troisièmement, ils ne disent pas que le système doit être réduit ou parfait au sens de Ritt, sans éléments nilpotents. Ritt insiste pourtant vraiment qu'on ne peut travailler que sur les idéaux réduits : le fait que toute suite croissante est stationnaire n'est vrai que pour les idéaux réduits. Alors, Ritt insiste beaucoup mais les géomètres différentiels n'ont jamais pris ça en compte. La théorie de Ritt et la théorie de Cartan des systèmes involutifs, c'est pourtant à peu près la même chose en vérité.

10. P. Deligne, B. Malgrange, J.-P. Ramis. Singularités irrégulières : correspondance et documents Volume 5 de Documents mathématiques, Société Mathématique de France (2007).

11. Il s'agit d'une formalisation algébrique des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires de plusieurs variables complexes.

12. Un germe de connexion méromorphe d'une variable est un espace vectoriel E de dimension finie sur le corps K de germes de fonctions méromorphes en l'origine d'une variable complexe t muni d'une connexion, c'est-à-dire d'une application $\mathbb{C}$-linéaire vérifiant $D(fv) = \frac{df}{dt}v + fDv$. Dans le cas régulier, un réseau est un sous-module $\mathscr{E}$ sous l'anneau $\mathscr{O}$ des germes de fonctions holomorphes stable par tD et engendrant E tel que $K \otimes_{\mathscr{O}} \mathscr{E} = E$.

13. Voir, dans le cas d'une variable, C. Sabbah. Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius, EDP Sciences (2002).

14. Soit ω une 1-forme différentielle holomorphe sur $\mathbb{C}^n$ telle que $\omega \wedge d\omega = 0$. Si $\{\omega = 0\}$ a codimension au moins 3, il existe localement des fonctions holomorphes f, g telles que $\omega = f dg$.

15. Une fonction, ou comme chez Martinet-Moussu une série formelle, constante sur les feuilles du feuilletage. Par exemple, si $\omega = f dg$, g est une intégrale première.

16. Voir B. Malgrange. Systèmes différentiels involutifs, Panoramas et Synthèses **19**, Société Mathématique de France (2005).

Ça s'est recollé avec d'autres préoccupations Galois-différentielles communes avec Ramis. Je me suis demandé si on pouvait l'étendre au cas non linéaire [17]. En un sens, le problème remonte à Painlevé et à Drach. L'idée de départ, c'est que la définition qui se généralise de Galois différentiel linéaire n'est pas la définition habituelle par les automorphismes. Tu prends le groupoïde d'holonomie, mais attention, il ne faut pas prendre un point base de ce groupoïde parce que, si tu prends l'adhérence de Zariski du groupe de monodromie, tu n'as pas le groupe de Galois différentiel. Le théorème que le groupe de Galois différentiel est la clôture de Zariski du groupe d'holonomie n'est vrai que pour les singularités régulières. Par exemple, si tu prends $y' = y$, la monodromie est triviale et tu ne vois pas le Galois différentiel qui est un $\mathbb{C}^*$. Si tu prends les singularités irrégulières, il faut prendre le groupoïde d'holonomie et sa clôture de Zariski dans un espace de jets adéquat. C'est ça qui se généralise aux équations non linéaires tout simplement.

Qu'est ce qu'il y a eu comme application à cette théorie ?

Alors justement, parce qu'il n'y a guère d'applications, c'est un peu en panne. Ce que voulait Painlevé a été démontré proprement par Casale : les propriétés de transcendance des solutions d'équations de Painlevé [18]. C'est le principal succès de la théorie mais il est isolé.

Ce qui bloque, c'est qu'on ne sait pas calculer. Hrushowski a démontré, dans le cas linéaire, qu'il y a un algorithme pour calculer le groupe de Galois différentiel. Mais dans le cas non linéaire ça ne marche pas.

Voici un problème ouvert dans cette veine. Si on ne sait pas le faire, on sait encore moins décrire le groupoïde de Galois différentiel d'un feuilletage. Je prends un champ de vecteurs de deux variables à coefficients polynômiaux et je voudrais décider si oui ou non il a une intégrale première rationnelle ou polynômiale. Je ne sais pas s'il y a un algorithme ou non. Tu as envie de dire qu'il y a un algorithme parce que tu as envie de dire qu'il y a une borne (ne dépendant que du degré des deux coefficients du champ) pour le degré d'une éventuelle intégrale première polynômiale [19].

Si tu prends un problème plus général, tu vois tout de suite que ça ne marche pas. Prends des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients polynômiaux et demande-toi s'il y a une solution polynômiale. Prends uniquement les équations en $x_i.d/dx_i$. Avoir une solution pour une telle équation revient à une équation diophantienne. Tu tombes alors sur le 10ᵉ problème de Hilbert.

Avant de conclure, y a-t'il un autre sujet que tu souhaites aborder ?

Il y a un autre papier dont je suis très fier, une interprétation de la fonction tau en termes d'espaces de lacets [20]. C'est un papier vache, j'ai cru pendant un mois que je m'étais trompé dans mes calculs. C'est dans le volume des *Annales de Fourier* dédié à Boutet de Monvel. Ça marche très bien pour les équations isomonodromiques à singularités régulières mais dans le cas irrégulier, personne ne sait faire.

Comment vois-tu l'évolution des maths de 1950 à nos jours ? Notamment de la communauté universitaire ?

Je ne sais pas du tout. Je constate que le rôle des maths appliquées et les connexions des maths avec d'autres disciplines informatique, physique ou même biologie a une importance manifestement de plus en plus grande maintenant. J'ai commencé ma thèse à une époque ou il y avait très peu de relations avec la physique du moins en France. On ne comprenait rien à la physique quantique. Les interactions avec l'informatique n'existaient pas pour la bonne raison que l'informatique n'existait pas. La communauté a aussi beaucoup grandi, sa taille en France a explosé dans les années 70. Puis internationalement, avec la Chine, l'Inde. L'administration aussi est devenue horriblement lourde.

---

17. La théorie linéaire attache à une équation différentielle linéaire un groupe algébrique et on formule dans le langage des extensions de corps différentiels une correspondance en tout point similaire à la correspondance de Galois. Voir M. Van der Put, M. Singer. Galois Theory of Linear Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **328**, Springer (2003). La théorie non linéaire attache un groupoïde à un feuilletage.

18. Par exemple, les solutions de $y'' = 6y^2 + t$ ne peuvent pas être construites en résolvant successivement des équations différentielles linéaires, des équations abéliennes (dont les solutions sont des fonctions abéliennes) et des équations différentielles d'ordre 1.

19. Ce qui réduit la recherche d'une intégrale première polynômiale à la résolution d'une famille finie de systèmes linéaires.

20. B. Malgrange. Déformations Isomonodromiques, Forme de Liouville, Fonction τ. Annales de L'Institut Fourier **54** (2004), 1371-1392.

À qui le dis-tu ! (Rires). Qu'est ce que tu as pensé de l'engagement politique de Schwartz ?

Je n'étais pas tout à fait d'accord avec lui. Maintenant, je constate qu'il faisait preuve de grande clairvoyance sur beaucoup de choses. Les causes qu'il a défendues étaient de bonnes causes. Sur l'Algérie, le Vietnam, les boat people. Il ne s'est jamais laissé entraîner à perdre son sens critique.

Bernard Malgrange, est né le 6 juillet 1928 à Paris. Ancien élève de l'École normale supérieure, il a été successivement professeur aux universités de Strasbourg, Orsay et Grenoble puis directeur de recherches au CNRS. Il a été élu membre correspondant de l'Académie des Sciences en 1977 puis membre en 1988. Il a été lauréat des prix Carrière (1961), Servant (1970) Cognacq-Jay (1972) de l'Académie des Sciences et du cours Peccot (1962). Il est l'auteur de plusieurs résultats importants comme le théorème de Malgrange-Ehrenpreis sur les équations aux dérivées partielles linéaires, le théorème de préparation différentiable en théorie des singularités, le théorème de Frobenius singulier en théorie des feuilletages et de contributions fondamentales dans plusieurs domaines des mathématiques notamment la théorie algébrique des équations différentielles, en particulier sur la transformée de Fourier des équations différentielles irrégulières, la théorie de Galois différentielle non linéaire et la géométrie des systèmes différentiels.

Nous remercions Charles Frances pour sa relecture attentive et ses suggestions.

La licence Science et Humanités : les raisons d'un engagement

• J.-Y. Briend

Je voudrais dans ce texte évoquer une expérience intéressante qui se poursuit depuis la rentrée de 2012 à l'université d'Aix-Marseille : la licence *sciences et humanités*. Cette formation transdisciplinaire assez unique en son genre est née des suites du mouvement social universitaire de 2009 contre les lois dites LRU et de mastérisation de la formation des enseignants. Je commencerai ce texte par quelques éléments personnels qui m'ont amené à m'investir fortement dans la conception et l'animation de cette licence, j'en donnerai ensuite une brève description, en insistant sur la place qu'y tiennent les mathématiques. Je terminerai par une explication du processus d'élaboration des cours qui, à mon avis, fait toute l'originalité et toute la force de cette formation, avant de donner quelques éléments quantitatifs.

Un enseignement de licence inadapté

Entre 2000 et 2014 j'ai presque sans discontinuer enseigné en première année de licence et en première année de master. Entre 2002 et 2004, j'ai constaté en licence une rupture dans ma capacité à transmettre. Les raisons en sont sans doute complexes et multiples. Les choses sont allées en empirant à partir de 2008 environ. Concomitamment, les étudiants de master semblaient de plus en plus déphasés par rapport à ce que l'on exigeait d'eux, et il semblait que tout intérêt pour les mathématiques les désertait peu à peu. Cette situation perdure dans mon établissement et je suis extrêmement inquiet pour l'avenir de nos formations de mathématiques. Comment en est-on arrivé là ? Je vais apporter trois éléments de réponse qui, s'ils ne font pas le tour de la question, me semblent cependant incontournables.

Un premier élément de réponse concerne le manque criant de moyens alloués à l'université dans notre pays. C'est un fait incontestable et il joue sans doute un rôle dans le marasme que nous vivons. Mais nous ne pouvons en rester là de notre analyse.

Un autre élément concerne les changements survenus dans la formation au cours des cycles primaires et secondaires. Pourquoi ma génération n'a-t-elle pas connu les énormes problèmes que semblent rencontrer les nouvelles face aux mathématiques ? Lorsque j'étais collégien ou lycéen, nous consacrions beaucoup de notre temps scolaire à la pratique des mathématiques. Il n'était pas question de problèmes soit-disant applicatifs, mais de problèmes de géométrie, d'arithmétique ou d'analyse, et l'on exigeait de nous très tôt d'être capables de *démontrer*. Les mathématiques n'étaient pas mises en contexte mais nous subissions une sorte d'apprentissage par osmose. Arrivés dans le supérieur, nous étions prêts à nous frotter aux choses sérieuses. Il est un fait que le nombre d'heures dévolues à l'enseignement des mathématiques a baissé depuis. Mais on a aussi assisté à une évolution étrange dans la conception des programmes, qui se veulent extrêmement ambitieux mais qui, mis en œuvre dans les classes, ne laissent plus le temps aux élèves de se former à la *pratique* de la preuve. Cela devrait avoir quelques conséquences sur notre enseignement de premier cycle universitaire. Tout d'abord, il me semble que la seule chose que l'on dût estimer acquise des étudiants entrant dans le supérieur, c'est la maîtrise du calcul littéral exigée en sortie de troisième. Ensuite, et puisque nous avons affaire à de jeunes adultes, nous ne pouvons proposer un enseignement qui ne justifie un tant soit peu son importance ou sa pertinence. Enfin, et si l'on s'entend sur le fait que les mathématiques sont une *pratique* avant que d'être un *corpus*, nous devons donner le temps à nos étudiants d'acquérir autonomie et sûreté dans la pratique de la démonstration.

Nous en venons alors à une autre explication possible à cette crise qui perdure : celle d'un certain conservatisme et d'une certaine condescendance à l'égard des étudiants qui sont souvent la marque du corps des enseignants-chercheurs. Au vu de ce qui précède et comme nous nous devons d'accueillir les étudiants qui sont produits par notre système scolaire, il est de nécessité de profondément revoir notre cursus de mathématiques, surtout à son début. Par mépris pour les étudiants qui nous arrivent en première année d'université, qui sont forcément les mauvais, puisque les bons sont tous partis en classe préparatoire (cela est démenti par les statistiques), on affirme qu'ils sont inaptes à l'abstraction comme au raisonnement. Par conservatisme, on choisit alors de ne pas changer nos enseignements, mais de les « adapter » en les vidant de tout contenu conceptuel et en les réduisant à une litanie enchaînant les technicités vides de sens. Les conséquences d'une telle manière sont immédiates. Ainsi par exemple, puisqu'un espace vectoriel c'est forcément $\mathbb{R}^n$, il est naturel pour un étudiant de master de décréter qu'une extension finie de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, en tant que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel, est muni d'une base canonique et d'un produit scalaire euclidien. Mais il y a pire : la technique même (à quoi, rappelons-le, nous avons réduit notre enseignement) n'est plus maitrisée. Ainsi voit-on arriver dans notre classe de préparation à l'agrégation des étudiants incapables de déterminer si une intégrale très simple converge ou de démontrer que $dim(E+F) = dim(E)+dim(F)-dim(E \bigcap F)$... À force de rabâcher que nos étudiants sont mauvais, on finit par les rendre mauvais, punition qu'ils sont loin de mériter.

Le troisième élément de réponse que je voudrais évoquer est celui de la place pour moi excessive que nous donnons à l'agrégation de mathématiques dans l'élaboration de nos formations. J'ai tendance à considérer que notre rôle n'est pas de préparer nos étudiants, sans le leur dire et tout au long de leur formation, au concours de l'agrégation. Nous devrions plutôt nous poser la question suivante : que veut-on que soit un étudiant qui réussisse la licence de mathématique ? Et pour ceux qui envisagent de passer l'agrégation, ou le certificat, nous devrions nous poser la question suivante : que voudrions-nous qu'ils deviennent *après* le concours, en tant qu'enseignants ? Dans l'esprit de beaucoup de nos concitoyens, un professeur agrégé de mathématiques est une référence dans cette discipline. Comme il l'enseigne, il est sensé avoir un profond recul vis-à-vis de ses contenus et de ses pratiques. Or on peut devenir professeur agrégé de mathématiques sans jamais avoir suivi, par exemple, le moindre cours de logique mathématique, et donc sans avoir jamais réfléchi à ce qu'est une preuve ou ce qu'est le statut d'un axiome etc. On peut donc envisager qu'un agrégé de mathématiques raconte n'importe quoi sur les théorèmes d'incomplétude de Gödel sans même que cela nous choque. J'ai pendant des années donné en première année de master un cours de géométrie projective. J'y démontrai le théorème de Desargues dans le cas où les triangles en perspective n'étaient pas coplanaires, par un argument d'incidence extrêmement simple. La réaction des étudiants était systématique et unanime : « Monsieur, cela n'est pas une preuve ! ». En les interrogeant sur la raison de cette réaction, il apparaissait très vite que pour eux *toute preuve doit passer par un calcul*. En réduisant l'enseignement des mathématiques en premier cycle à la préparation technique à un concours, on donne une image faussée et tronquée de ce que sont les mathématiques et, surtout, on fait perdre tout l'intérêt qu'étudiants et enseignants pourraient en attendre. Ne risque-t-on pas ainsi de tomber dans les travers de l'enseignement universitaire de la philosophie dénoncés par Arthur Schopenhaueur dans *Parerga et Paralipomena*[1] ?

Les conséquences de l'état déplorable de nos formations sont multiples. Nous connaissons tous les taux de réussite calamiteux, qui ne se limitent pas à la première année de la licence. Nous les avons compensés en nous voilant la face et en donnant la licence à des étudiants dont nous savions qu'ils seraient en échec en master, ce qui est cruel. Nous savons aussi combien cela est frustrant pour les enseignants comme pour les étudiants et qu'entre eux se creuse un fossé qui nie la caractéristique fondamentale de l'université qui est de mêler enseignement et recherche. Une autre conséquence grave est celle de la désaffection pour nos filières, qui ne sont plus le passage obligé pour la formation, si importante, des futurs enseignants.

1. Arthur Schopenhauer, *Parerga et Patlipomena*, en particulier le chapitre 3 de la partie I. Disponible aux éditions Coda, 2010.

L'architecture de la licence Sciences et Humanités et la place qu'y occupent les mathématiques

La licence sciences et humanités est organisée autour de cinq cours qui tous durent trois ans. Un sixième s'y est ajouté lors de l'élaboration des nouvelles maquettes il y a deux ans. En voici la liste, et une brève description.

Lumière, vision, couleur : on s'y intéresse aux théories de la lumière, centrées sur la physique, à la couleur en tant qu'objet des sciences chimiques ou des théories esthétiques et philosophiques, à la vision enfin, dans une perspective scientifique, avec l'étude du système perceptif (de l'œil au cerveau), mais aussi artistique, avec l'histoire de la représentation picturale.

Systèmes du monde : ce cours est centré sur la cosmologie et articule autour de l'histoire des théories du monde, de sa genèse et de sa structure, l'analyse de notions fondamentales comme le mouvement, l'espace et le temps. En suivant la progressive mathématisation de la physique, il aboutit à la cosmologie contemporaine, tout en mettant ces progrès en perspective avec des éléments d'histoire de l'art, de la littérature ou de la philosophie.

Figures du pouvoir : on cherche à y décrire les rapports de pouvoir à l'œuvre dans différentes sphères de la vie sociale (famille, travail, santé, action publique, rapports de genre, etc.) On s'y intéresse en particulier à ceux induits par la production des savoirs spécialisés. En croisant les outils des sciences sociales, auxquels ce cours est une initiation, et les apports d'un usage critique des mathématiques et des sciences de la nature, il s'agit de comprendre les logiques à l'œuvre dans la constitution des domaines d'expertise, en particulier ceux qui ambitionnent d'orienter le gouvernement des individus et des pays.

Nature et culture : il s'agit de mettre en question les notions de nature et de culture et les enjeux de leur opposition, qui sont abordés selon des points de vue construits à partir de champs disciplinaires variés (la biologie et les neurosciences, l'art et la littérature, la linguistique, la sociologie et l'anthropologie).

Approche critique de la langue : c'est le petit dernier dans nos cours. On y aborde d'une part la langue anglaise, mais aussi la langue française, afin d'amener les étudiants à un rapport à la fois serein, critique et renseigné sur leur langue quotidienne. Ce cours est né du constat qu'une des sources des difficultés rencontrées par nos étudiants était leur maîtrise insuffisante de la langue.

Logique, langage, calcul : nous allons nous étendre plus longuement sur celui-ci.

On peut le résumer en disant qu'on y pose la question : « qu'est-ce que les mathématiques ? » La question étant à la fois vague et extrêmement ouverte, elle convoque les réflexions des mathématiciens, certes, mais aussi des historiens de cette discipline, des philosophes, des logiciens ou des linguistes, voire celles de spécialistes de stylistique en littérature. Voici un extrait du petit résumé de ce cours de trois ans que vous pouvez trouver dans le *synopsis* [2] de la licence :

> Enseigner les mathématiques tout en stimulant l'interrogation philosophique sur leur nature, sur ce qu'elles nous disent du langage, de la connaissance, du monde, des pouvoirs et des limites de notre savoir, tel est l'objectif de ce cours. Que sont les objets mathématiques ? Quelle est leur réalité ? Pour répondre à ces questions, on mènera une réflexion théorique et historique sur la notion de démonstration et sur l'évolution de ces objets. [...] La méthode que nous avons choisie consiste en un va-et-vient entre le point de vue contemporain et le point de vue du passé. Pour chacun des thèmes choisis (comme le nombre, l'universalité de l'algèbre, le continu, les ensembles), pour chacun des grands chapitres de la connaissance mathématique moderne que nous avons voulu aborder, et pour les problèmes fondamentaux que nous avons choisi d'illustrer dans ces chapitres, nous montrerons également en contrepoint comment on a raisonné dans le passé, avec d'autres outils conceptuels et linguistiques, avec d'autres idées directrices, avec d'autres signes, bref, avec un regard totalement différent du nôtre.

2. Le lecteur ou la lectrice intéressé.e pourra en demander un exemplaire par email à l'auteur du présent texte.

Le cours commence en première année avec une interrogation sur le nombre, comprenant à la fois une introduction à la doctrine pythagoricienne, où *tout est nombre entier*, qui arrive à une impasse avec la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré à son côté, et un cours d'arithmétique élémentaire tout à fait classique, culminant avec la démonstration du théorème fondamental et le calcul des congruences. L'accent y est mis sur l'importance de considérer les nombres entiers en tant que tels et non comme cas particuliers des nombres réels, mais ce cours est surtout l'occasion d'une initiation sans compromis à la pratique de la preuve, depuis l'analyse de l'énoncé jusqu'à la rédaction finale, en passant par la recherche au brouillon. Les étudiants sont ensuite confrontés à la lecture d'un texte du passé, les *Éléments* d'Euclide et à la difficulté que pose une telle lecture si l'on ne veut pas tomber dans le piège d'anachronismes réducteurs.

Les cours se poursuivent avec une introduction à la logique et à la théorie de la science chez les philosophes de l'Antiquité, plus particulièrement Aristote, suivie d'une introduction à la méthode axiomatique, autour de la géométrie, en s'inspirant du début du livre de M.J. Greenberg intitulé *Euclidean and non-euclidean geometry, history and perspective*. La notion de modèle d'une axiomatique y est abordée de manière simple. La première année se conclut avec un cours sur les liens entre formalisation logique et langage naturel, dans le but d'initier les étudiants aux conventions souvent tacites en usage chez les mathématiciens, qui rédigent leurs preuves en langage naturel.

La deuxième année commence par poser la question du calcul et de ses limites. Les étudiants y découvrent des éléments d'histoire de l'algèbre, mais aussi d'histoire de la philosophie, avec G.W. Leibniz et la problématique de la *Mathesis Universalis*. Le cours de mathématiques introduit un modèle possible de l'axiomatique du calcul usuel : celui d'anneau. Le but est d'initier les étudiants à la pratique de l'algèbre commutative, en particulier à l'usage du quotient par un idéal qui, à la fin du cours, permet de montrer que l'on peut calculer avec les racines d'un polynôme même si l'on n'a pas la possibilité de calculer explicitement ces racines. On y fait une expérience intéressante concernant la justification de la formalisation évoquée plus haut. En partant de la notion d'équation, qui pour eux fait sens, on conclut à la nécessité d'introduire une écriture unique et maniable pour celles-ci et les étudiants en arrivent très vite à la formalisation d'un polynôme comme collection finie de coefficients. Ils voient ainsi l'intérêt de vider de leur contenu sémantique des notions vagues mais chargées de sens (équation, inconnue, variable) pour clarifier la situation par le choix d'une écriture, donc d'une forme, en introduisant au passage une nouvelle notion, unificatrice, celle d'indéterminée, qui prendra, selon les contextes, le rôle d'inconnue ou de variable, reprenant de ce fait un peu des sens qu'elle a perdus, mais en en précisant considérablement les instanciations. On peut enfin énoncer le théorème d'impossibilité d'Abel-Ruffini de la résolution d'une équation au-delà du degré 5.

Le second semestre se poursuit avec l'étude du problème du continu, le pur calcul algébrique ayant montré ses limites. Un long cours d'introduction à l'analyse en une variable réelle, autour des notions de limite et de continuité, se poursuit en parallèle d'un atelier de lecture sur le problème philosophique du continu, autour de textes de Poincaré, de Dedekind, de Russell et de Bergson, avec un retour final à quelques passages de la physique d'Aristote, montrant la pérennité du problème. Les étudiants sont enfin confrontés à un premier cours de théorie naïve des ensembles, même si une partie du langage ensembliste a été introduit et utilisé dès la première année. La troisième année va marquer l'acmé du cours *Logique, langage, calcul*. Elle commence par une introduction aux travaux de G. Frege sur les rapports entre logique et mathématiques, une initiation aux paradoxes de la théorie des ensembles, autour du procédé diagonal, et un cours sur la calculabilité. Le second semestre présente les bases du calcul des prédicats et, surtout, la preuve et la discussion des théorèmes d'incomplétude de Gödel. Le cours se termine par un questionnement sur la notion de sens en linguistique, bouclant l'année par un regard de biais sur les travaux de Frege et ceux de Gödel.

On voit ainsi se dessiner sur trois ans les liens profonds qui unissent, au travers de questions fondamentales ou de théorèmes d'impossibilité, les différents champs des mathématiques. Les étudiants en rencontrent et pratiquent d'autres dans les cours de la licence : les statistiques et les probabilités dans *Figures du pouvoir*, le calcul vectoriel et le calcul différentiel élémentaires dans les cours *Systèmes du monde* et *Vision, lumière*, couleur. Il est à noter que l'un des buts de la licence Sciences et humanités, dès sa conception, est de rendre possible la poursuite d'études dans les divers masters disciplinaires. Pour cela, les étudiants se voient proposer la possibilité de suivre leur troisième année dans une filière de spécialisation. S'ils souhaitent poursuivre en master de mathématique, ils doivent alors suivre les cours Logique, langage, calcul et Systèmes du monde, ainsi que deux ou trois cours de deuxième et troisième années de la licence de mathématiques, ceux dispensant les bases en analyse et algèbre linéaire indispensables à une poursuite sereine en mathématiques.

L'élaboration des cours

À la fin de l'été 2009, nous avons commencé à réfléchir à ce que pourrait être la formation universitaire de nos rêves. Autour de la table étaient rassemblés des physiciens, des chimistes, des biologistes, des philosophes, des historiens des sciences, des sociologues et des anthropologues et je dois avouer que notre première idée était qu'un tel cursus n'était pas vraiment possible au sein de l'institution qui nous employait. La première étape importante a été de s'entendre sur une méthode de travail inspirée du concept de *transdisciplinarité*. Nous avons décidé de nous forcer à dialoguer de manière pérenne en ne proposant pas une formation pluridisciplinaire classique où des cours de mathématiques suivraient des cours d'histoire ou de sociologie à la manière de ce qui se pratique dans l'enseignement secondaire, mais en menant un dialogue entre disciplines qui arrive jusque dans la salle de cours. Nous avons donc décidé d'organiser le cursus autour de cinq grandes questions (dont l'orientation est bien évidemment intimement liée aux centres d'intérêts des membres de l'équipe fondatrice) qui donneront naissance à cinq cours qui, chacun, dureront les trois années du cursus. Une telle organisation, outre aider au dialogue entre les disciplines, permet de penser le cursus de manière globale, sur les trois ans, en proposant une progression et une cohérence que j'ai peu vues ailleurs.

L'élaboration d'un tel programme s'est faite au cours d'un lent et difficile travail de dialogue. Avant même d'entrer dans les détails d'une organisation, il a fallu trouver un terrain commun pour l'échange et s'entendre sur des termes dont le sens pouvait être subtilement différent selon les disciplines qui les employaient. Lors de réunions parfois un peu houleuses, chacun a dû quitter la position confortable consistant à croire que sa propre discipline n'a plus à justifier ni ses pratiques ni ses rapports aux autres pans du savoir. L'une des modalités les plus intéressantes de notre méthode consiste en la présentation systématique de toute proposition pédagogique devant l'équipe de la licence. Présenter le contenu d'un cours d'analyse à une audience formée d'historiens, de philosophes, de sociologues, de physiciens ou de neuroscientifiques vous soumet à un feu roulant de questions et de critiques (amicales et bienveillantes) qui pousse votre argumentaire dans ses derniers retranchements et vous oblige à trouver ce qui, le plus exactement et le plus économiquement possible, vous permettra de justifier votre propos.

Quel intérêt le mathématicien peut-il trouver à participer à un tel travail d'élaboration ? Tout d'abord, en se confrontant aux collègues de disciplines parfois éloignées, il doit réfléchir à des arguments précis et convaincants concernant l'intérêt d'enseigner telle ou telle partie des mathématiques. Il doit en quelque sorte répondre à la question suivante : « En quoi un enseignement des mathématique est-il si précieux ? » La réponse par les applications des mathématiques n'est curieusement pas celle qui convainc le mieux les collègues. Pour beaucoup d'entre eux, un enseignement des mathématiques doit avant tout permettre de former les jeunes au raisonnement juste et à sa rédaction. Cela mène inévitablement à se poser deux autres questions fondamentales : « Qu'est-ce que faire des mathématiques ? » et « Qu'est-ce qui, dans un cursus de mathématiques, est important, et qu'est-ce qui est secondaire ? » L'organisation des cours par grande question (que l'on pourrait imaginer importer dans une licence de mathématiques standard) permet de se libérer de l'organisation en chapitres qui se suivent sans réelle cohérence, et de mettre l'accent sur la pratique des mathématiques comme venant avant la nécessité d'introduction d'un formalisme. Elle permet enfin de rééquilibrer le corpus enseigné pour aborder des questions importantes, en particulier pour les futurs enseignants, et trop souvent laissées de côté en France, dans une tradition très marquée par les classes préparatoires : celle des liens entre la logique et les mathématique, celle de l'axiomatique, ou celle des liens entre le formel et l'informel, mais aussi celle de l'*articulation* des mathématiques avec leurs applications, en physique ou en sciences sociales par exemple.

Nous pouvons donc dire que le dialogue interdisciplinaire aide chacun à approfondir son rapport à sa propre discipline et, qu'à ce titre, il est extrêmement précieux. Il contraint à une ascèse permettant de retrouver l'importance de questions fondamentales qui traversent l'histoire de notre discipline depuis l'Antiquité.

Un enseignement renouvelé et un plaisir retrouvé

Les réflexions menées lors de la conception des cours, mais aussi les cours eux-mêmes, m'ont permis de profondément renouveler mon exercice d'enseignant, tout en m'y redonnant plaisir. Le choix fait de forcer les étudiants, dès le début, à « mettre les mains dans le cambouis » de la pratique de la preuve, sans autre prérequis que ce que doit maîtriser un élève entrant au lycée, permet de redonner goût et intérêt pour les mathématiques aux étudiants qui s'en étaient éloignés, en particulier chez ceux venant de filières littéraires. L'introduction progressive et raisonnée du formalisme permet de les mener assez loin dans des pratiques que même nos étudiants de mathématiques des filières classiques maîtrisent mal, comme par exemple les démonstrations avec des « epsilon » et des « delta » en analyse. Se dire que de futurs enseignants du primaire, des étudiants qui se spécialiseront en histoire, en philosophie ou en biologie ont pu pratiquer, en mathématiques, le raisonnement analytique a quelque chose d'éminemment satisfaisant. Il est à noter que tout cela s'est fait principalement grâce à une attitude d'écoute et d'attention à l'égard des difficultés des étudiants, alliée à une exigence sans compromis quant aux objectifs pratiques fixés et à une rigueur épistémologique sans cesse rappelée, le tout sans aucun recours aux artifices de la didactique et des innovations pédagogiques dont on nous rebat les oreilles depuis quelques décennies. Il s'instaure ainsi un dialogue permanent entre les étudiants et l'enseignant, dialogue au cours duquel les premiers font montre d'une maturité remarquable et où le second se voit forcé de faire face aux questions fondamentales, bien que souvent malencontreusement qualifiées de naïves, que lui posent les étudiants. Il me semble qu'une telle expérience permet à l'universitaire de réellement pratiquer l'enseignement comme il pratique la recherche, ce qui peut le sauver d'une forme de schizophrénie assez répandue de nos jours, dans un monde marqué par le productivisme et la primauté donnée au quantitatif. L'enseignement n'est plus, pour l'enseignant-chercheur, un mal nécessaire qui entrave son développement et son activité de recherche, mais il en est une composante fondamentale qui justifie la nécessité, dans l'enseignement supérieur, de mêler toujours enseignement et recherche.

L'on en revient presque à une conception antique de la pratique de l'exercice mathématique, vu comme exercice spirituel transformant celui qui le pratique. Cela n'est sans doute pas un hasard si l'auteur de ces lignes a beaucoup lu Pierre Hadot [3] au cours des années qui viennent de s'écouler.

Appendice : quelques données quantitatives et qualitatives

La licence *Sciences et humanités* a ouvert ses portes en septembre 2012. Elle a donc accueilli cette année sa huitième promotion. Les deux premières promotions comptaient entre 30 et 40 étudiants et, à partir de la troisième, nous avons accueilli chaque année 60 nouveaux étudiants. Les origines géographiques sont beaucoup plus variées que celles des formations standard de notre université, puisqu'une proportion non négligeable d'étudiants proviennent d'académies lointaines. Je me contenterai des données de la promotion 2019 : sur 61 entrants, 33 proviennent de l'académie d'Aix-Marseille, 6 de celle de Nice, 3 de celle de Montpellier et les autres viennent de plus loin, parfois des antipodes. Concernant les séries du bac, 30 proviennent de série S, 15 de série ES, 9 de série L et le reste se répartit entre séries technologiques ou professionnelles. Enfin, deux étudiants sont en reprise d'études.

Le tableau suivant récapitule les taux de réussite obtenus aux trois années depuis la création de la licence.

Année	Licence 1	Licence 2	Licence : voie générale	Licence : spécialité
2012-2013	77%			
2013-2014	60%	80%		
2014-2015	46%	83%	100%	92%
2015-2016	83%	83%	88%	81%
2016-2017	69%	73%	61%	78%
2017-2018	81%	87%	91%	81%
2018-2019	71%	80%	60%	59%

3. Nous recommanderons en particulier *Qu'est-ce que la philosophie antique ?*, paru en 1995 aux éditions Gallimard (Folio), et *La philosophie comme éducation des adultes*, paru en 2019 aux éditions Vrin.

Dans ce tableau, la « voie générale » correspond aux étudiants de troisième année n'ayant pas choisi de spécialisation disciplinaire, tandis que la « spécialité » correspond à ceux qui ont choisi de se spécialiser dans une discipline donnée en vue de l'entrée dans un master (mathématiques, sciences cognitives, anthropologie etc.). Notons que certaines fluctuations étranges peuvent être dues à un nombre anormalement élevé de réorientations ou d'ajournements rattrapés par compensation au second semestre pour ce qui concerne les premières années, ou encore à des effectifs faibles dans la voie générale en troisième année. Concernant le devenir des étudiants, les données nous manquent, faute de moyens pour mettre en place un véritable suivi. Beaucoup de nos étudiants choisissent d'aller suivre une spécialisation dans les domaines des neurosciences ou de l'écologie. Concernant les sciences plus en rapport avec les mathématiques, deux de nos anciennes étudiantes ont été reçues au capes, et au moins trois se sont dirigés vers un master de mathématiques. Nous avons également trois étudiants actuellement en thèse de physique et un quatrième qui devrait l'an prochain faire une thèse de physique théorique. Les flux sont donc assez faibles, mais eu égard au très large spectre des disciplines rencontrées, cela reste représentatif de l'état actuel de la répartition des étudiants par discipline. Chaque année, un certain nombre de nos étudiants passe le concours de professeur des écoles. Enfin, certains suivent des voies tout à fait inattendues pour nous, allant se former à la charpente de marine ou fondant une compagnie de théâtre.

Une telle formation doit avoir un soutien institutionnel. Lorsque nous avons commencé à évoquer auprès de nos universités (à l'époque, les trois universités d'Aix-Marseille n'étaient pas encore réunies pour devenir le mastodonte que l'on connaît aujourd'hui) les premières réactions ont été assez circonspectes mais, face à notre ténacité et à la solidité de notre projet, celui-ci a peu a peu obtenu le soutien nécessaire à l'ouverture de la formation sous statut expérimental. À la mise en place de l'initiative d'excellence aixo-marseillaise, ses responsables nous ont contactés pour nous demander de faire partie du « collège d'excellence ». Cela nous a permis, pendant quelques années, de disposer de financements complémentaires dont l'élément fondamental a été la mise à disposition d'une personnelle administrative qui a été motrice dans les succès que nous avons rencontrés. Ce financement n'étant pas pérenne, nous nous retrouvons depuis deux ans dans la même situation désastreuse que les autres licences de notre université, à tenter de proposer une formation de qualité avec des dotations très insuffisantes. L'épuisement nous guette. Nous restons cependant convaincus qu'une formation de ce type, de par son succès et sa pertinence, ne doit pas disparaître, mais plutôt continuer à évoluer, tâche à laquelle nous travaillons sans relâche.

Je conclurai ce texte par quelques remarques concernant l'investissement en temps et énergie qu'a constitué la mise en place d'une telle formation : il est considérable, bien entendu. Mais, portés par un élan collectif hors du commun, nous avons tous, au cours des années écoulées, à la fois énormément appris et profondément changé. Je crois qu'aucun de nous ne regrette la moindre des heures passées autour de ce projet.

... les complexes cubiques CAT(0)

• A. Genevois

Les complexes cubiques CAT(0) sont des espaces géométriques, de nature combinatoire, dont la géométrie peut être considérée comme à courbure négative ou nulle. Introduits par M. Gromov en 1987 comme une manière particulièrement simple de construire des espaces intéressants, les complexes cubiques CAT(0) ont ensuite pris leur essor à partir de 1995 grâce au travail de M. Sageev, et jouissent aujourd'hui d'une place prépondérante dans l'étude des groupes par la géométrie.

Nous reviendrons plus loin sur ces applications à la théorie des groupes. Avant cela, commençons par préciser ce qu'est un complexe cubique et ce que nous entendons par sa géométrie.

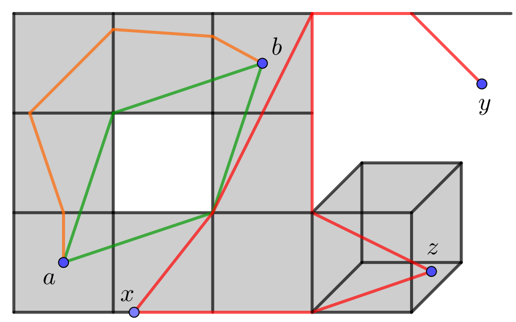
1. Faire de la géométrie avec des cubes

Un *complexe cubique* est un espace obtenu à partir d'une collection de cubes de diverses dimensions que l'on recolle le long de faces. La figure 1 est un exemple de complexe cubique. Afin de définir une métrique sur un tel complexe X, nous allons d'abord identifier chaque cube de dimension n avec le cube unité $[0,1]^n$ muni de sa distance euclidienne

$$((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) \mapsto \sqrt{|x_1-y_1|^2+\cdots+|x_n-y_n|^2}.$$

Ensuite, nous prendrons comme distance entre deux points $a,b \in X$ la longueur minimale d'une *ligne brisée* reliant a et b, c'est-à-dire d'une courbe qui va intersecter chaque cube de X en un segment de droite. Par exemple, les deux points a et b de la figure 1 sont à distance $\sqrt{10}$ l'un de l'autre. À noter qu'une ligne brisée de longueur minimale entre deux points, qui a la bonne idée de toujours exister et que l'on appelle *géodésique*, n'est pas toujours unique, comme l'illustre la figure 1.

Figure 1 – En orange, une ligne brisée quelconque. En vert, deux géodésiques. En rouge, un triangle géodésique $[x,y,z]$.



Et il ne nous en faut pas plus pour faire de la géométrie dans un complexe cubique ! Nous avons une distance, et les géodésiques joueront le rôle des segments de droites dans la géométrie euclidienne. Par exemple, un triangle dans un complexe cubique sera donné par trois points a, b et c, et trois géodésiques $[a,b]$, $[b,c]$ et $[a,c]$.

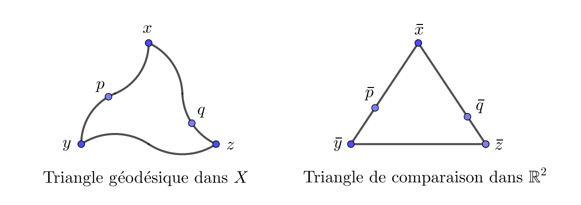
L'on remarquera que la géométrie euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$ est une géométrie cubique : si l'on pense $\mathbb{R}^n$ comme un complexe cubique construit en recollant une infinité de copies de $[0,1]^n$, alors la métrique cubique coïncide avec la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^n$ et les géodésiques cubiques coïncident avec les segments de droites qui nous sont familiers.

2. Géométrie courbée

Nous souhaitons maintenant caractériser les complexes cubiques dont la géométrie semble être à courbure négative ou nulle. Pour cela, nous nous intéressons au comportement des triangles. (Puisque toute figure géométrique peut être décomposée en une union de triangles, il semble raisonnable de penser que la géométrie des triangles est intimement liée à la géométrie globale.)

Donnons-nous donc un complexe cubique que l'on notera X (ou bien n'importe quel espace géométrique où les notions de distance et de géodésique font sens) et un triangle Δ, i.e., trois points $x, y, z \in X$ et trois géodésiques $[x,y]$, $[y,z]$, $[x,z]$. Maintenant, dessinons un *triangle de comparaison* $\overline{\Delta}$ dans le plan euclidien $\mathbb{E}^2$, c'est-à-dire un triangle $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ tel que la distance dans $\mathbb{E}^2$ entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ (resp. $\bar{x}$ et $\bar{z}$, $\bar{y}$ et $\bar{z}$) coïncide avec la distance dans X entre x et y (resp. x et z, y et z). (Il se trouve qu'un tel triangle existe toujours, et qu'il est unique à isométrie près.)

Figure 2



La condition qui nous intéresse impose que, quels que soient les points $p, q \in \Delta$, les points de comparaison $\bar{p}, \bar{q} \in \overline{\Delta}$ correspondant vérifient l'inégalité

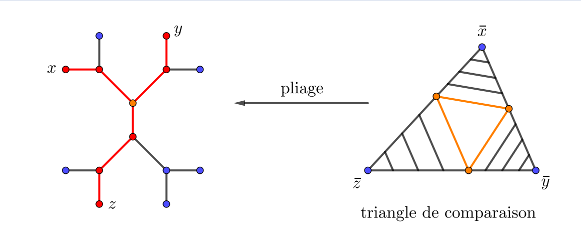
$$d_X(p,q) \leqslant d_{\mathbb{E}^2}(\bar{p}, \bar{q}).$$

Lorsque cette condition est vérifiée par tous les triangles de X, on dit que X est un *espace CAT(0)*, terminologie promue par M. Gromov en l'honneur des mathématiciens H. Cartan, A. Alexandrov et V. Toponogov.

L'on dit souvent qu'un espace est CAT(0) lorsque ses triangles sont « plus fins » que les triangles de la géométrie euclidienne. Afin de comprendre le lien entre géométrie CAT(0) et courbure, considérons trois triangles géodésiques, disons équilatéraux de côté 1, dessinés sur la sphère (l'archétype de la surface à courbure positive), sur le plan (l'archétype de la surface à courbure nulle), et sur une selle de cheval (l'archétype de la surface à courbure négative). Maintenant, découpons un triangle de même forme sur une feuille de papier et essayons de le recoller sur les trois triangles précédents. Sur la sphère, on s'apercevra que notre triangle de papier est d'aire trop petite pour recouvrir entièrement le triangle sphérique : il faudrait déchirer le papier pour parvenir à identifier les côtés des deux triangles. Sur le plan, les deux triangles sont bien sûr rigoureusement identiques, et le recollement ne pose aucun problème. Enfin, sur la selle, on s'apercevra que le triangle de papier peut être recollé entièrement sur le triangle courbé, mais il sera nécessaire de froisser le papier car l'aire du triangle courbé sera inférieure à l'aire du triangle papier. C'est cette différence entre la courbure positive et la courbure négative ou nulle qui est exprimée formellement dans la définition des espaces CAT(0) : il est toujours possible de recouvrir un triangle géodésique par un triangle euclidien de même forme, quitte à devoir le replier sur lui-même.

Une manière plus formelle de justifier la pertinence de la définition d'espace CAT(0) est d'observer qu'une variété riemannienne simplement connexe est CAT(0) si, et seulement si, sa courbure sectionnelle est négative ou nulle en tout point. L'intérêt des espaces CAT(0) est d'étendre cette notion de courbure à des espaces qui peuvent être très différents de variétés, et où l'arsenal analytique de la géométrie différentielle n'est plus disponible. Un exemple probant est celui des arbres (qui sont également des exemples de complexes cubiques).

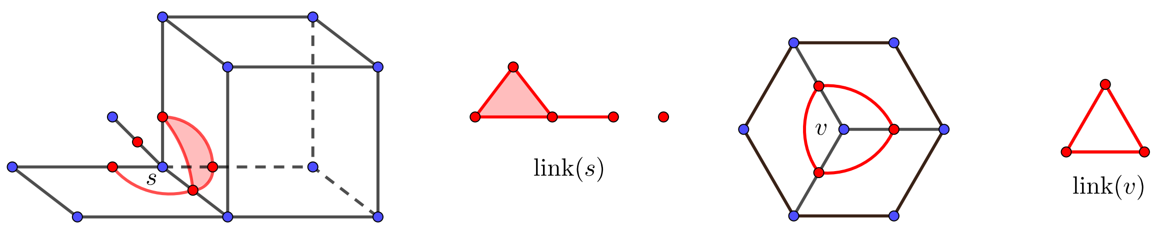
Figure 3 – Un arbre est un espace CAT(0)



Nous savons aujourd'hui que la géométrie des espaces CAT(0) est très riche, qu'elle apporte beaucoup d'informations sur l'espace considéré. Mais montrer qu'un espace géométrique donné est CAT(0) n'est généralement pas une tâche aisée : il faut en effet vérifier la condition CAT(0) sur **tous** les triangles de notre espace. C'est ici que les complexes cubiques rentrent dans l'arène. M. Gromov a en effet remarqué qu'il existait un critère très simple pour déterminer si un complexe cubique est ou non CAT(0). Le critère est le suivant :

Théorème (Gromov, 1987). *Un complexe cubique est CAT(0) si, et seulement si, il est simplement connexe et le* link *de chaque sommet est un complexe simplicial de drapeau (i.e. toute collection de $n+1$ sommets deux à deux adjacents engendre un simplexe de dimension n).*

Figure 4 – Un link de drapeau et un link qui n'est pas de drapeau



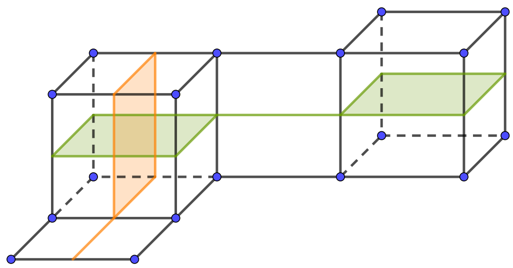
Le link d'un sommet x peut se voir comme une petite sphère centrée en x, muni de la structure cellulaire induite par X ; cf. la figure 4. Cette condition sur le link permet typiquement d'éviter le second complexe illustré par la figure 4, que l'on peut penser comme un coin de sphère et donc courbé positivement. Grossièrement, nous sommes en train d'interdire au complexe cubique de contenir des morceaux de sphères de dimension quelconque. Autrement dit, la condition sur les links impose au complexe cubique d'être localement à courbure négative ou nulle ; ensuite, la simple connexité permet de passer du local au global (c'est une idée très répandue en géométrie, connue sous le nom de théorème de Cartan-Hadamard en géométrie riemannienne).

3. L'art de couper en deux

En résumant le paragraphe précédent, les complexes cubiques CAT(0) sont donc des espaces géométriques à courbure négative ou nulle qu'il est facile de construire et de reconnaître. Avec les années, les mathématiciens se sont aperçus qu'il s'agit en fait de bien plus que d'exemples particuliers d'espaces CAT(0) : les complexes cubiques CAT(0) ont une géométrie qui leur est propre, avec des outils très puissants à disposition, permettant de démontrer des résultats qui nous sont toujours inaccessibles pour les espaces CAT(0). Le concept clef de l'histoire est la notion d'*hyperplan*, introduite par M. Sageev.

Étant donné un cube $[0,1]^n$, un *mi-cube* est un sous-espace de la forme $[0,1]^p \times \{1/2\} \times [0,1]^q$ (où $p+q+1=n$). C'est un sous-espace de codimension 1 qui coupe naturellement notre cube en deux morceaux identiques. Dans un complexe cubique CAT(0), un *hyperplan* est un sous-espace minimal (pour l'inclusion) qui intersecte chaque cube soit trivialement soit selon un mi-cube.

Figure 5 – Un complexe cubique CAT(0) et deux de ses hyperplans



L'observation clef est alors que la géométrie d'un complexe cubique CAT(0) est complètement encodée dans la combinatoire de ses hyperplans. Cette connexion est plus probante lorsque nous remplaçons la métrique CAT(0) par la *métrique combinatoire* : c'est tout simplement la distance qui, étant donnés deux sommets, donne la plus petite longueur d'un chemin d'arêtes entre ces deux sommets (où, par convention, toutes les arêtes ont longueur 1). Autrement dit, nous oublions la structure cellulaire du complexe cubique et nous ne nous intéressons plus qu'à son 1-squelette. Cela peut sembler brutal, mais les métriques CAT(0) et combinatoire se trouvent être bi-Lipschitz équivalentes, i.e.

$$d_{\mathrm{CAT}}(x,y) \leqslant d_{\mathrm{comb}}(x,y) \leqslant \dim(X) \cdot d_{\mathrm{CAT}}(x,y)$$

pour tous sommets x et y, si bien que les géométries par rapport à ces deux métriques sont sensiblement similaires. Le lien entre géométrie et hyperplans transparaît alors à travers le résultat suivant :

Théorème (Sageev, 1995). *Soit X un complexe cubique CAT(0). Les assertions suivantes sont vérifiées :*

– *un hyperplan sépare X en deux sous-espaces convexes, appelés* demi-espaces ;
– *un chemin d'arêtes entre deux sommets est de longueur minimale si, et seulement si,*

il ne traverse chaque hyperplan qu'au plus une fois ;
– la distance combinatoire entre deux sommets coïncide avec le nombre d'hyperplans qui les séparent.

Ainsi, les complexes cubiques CAT(0) contiennent naturellement des sous-espaces de codimension 1 qui les séparent. En fait, les années passant, les mathématiciens se sont aperçus que cette propriété caractérisait les complexes cubiques CAT(0).

Plus précisément, donnons-nous un ensemble S. Un *mur* est la donnée d'un couple $\{M, M^c\}$ où $M \subsetneq S$ est non vide. Autrement dit, un mur est un découpage de S en deux morceaux non vides, que l'on appelle *demi-espaces*. Naturellement, nous dirons que le mur $\{M, M^c\}$ sépare deux points $x, y \in S$ si $x \in M$ et $y \in M^c$ ou bien $x \in M^c$ et $y \in M$. La seule condition que nous nous imposons est que, pour toute paire de points $(x, y) \in S^2$, le nombre de murs séparant x et y doit être fini. La donnée d'un ensemble S et d'une collection de murs vérifiant la condition précédente est ce que l'on appelle un *espace à murs*. D'après ce que nous venons de voir, un complexe cubique CAT(0) est naturellement un espace à murs, les murs correspondant aux paires de demi-espaces délimités par les hyperplans. Réciproquement, il se trouve qu'un complexe cubique CAT(0) peut toujours être associé à un espace à murs, de sorte qu'il existe une équivalence entre complexes cubiques CAT(0) et espaces à murs. D'où le slogan de ce paragraphe : complexes cubiques CAT(0), ou l'art de couper en deux. Cette *cubulation* des espaces à murs a été fondamentale dans l'essor de la théorie, et aide à comprendre pourquoi les complexes cubiques apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques.

4. Applications en théorie des groupes

Jusqu'à présent, nous avons parlé de géométrie. Mais s'il y a un domaine où la théorie des complexes cubiques CAT(0) s'est particulièrement illustrée, c'est la théorie des groupes.

Une idée centrale de ce que l'on appelle la *théorie géométrique des groupes* est que, si un groupe G admet une action sur un espace géométrique X (autrement dit, si nous nous donnons un morphisme $G \to \mathrm{Isom}(X)$), alors il existe une connexion entre les propriétés algébriques de G et les propriétés géométriques de X. Bien sûr, l'information qu'il sera possible de déduire sur G dépendra grandement de la nature de l'action et de la nature de l'espace. Mais il se trouve que beaucoup de groupes intéressants admettent des actions non triviales sur des complexes cubiques CAT(0), ce qui découle notamment de la cubulation des espaces à murs. Ainsi, puisque de puissants outils sont à notre disposition pour étudier la géométrie de ces complexes, il n'est pas surprenant que chercher à faire agir un groupe donné sur un complexe cubique CAT(0) s'avère être une stratégie fructueuse pour étudier ledit groupe.

Un exemple où la connexion entre groupe et complexe cubique est très forte est celui des *groupes d'Artin à angles droits*. Étant donné un graphe Γ, le groupe d'Artin à angles droits A_Γ est défini par la présentation

$$\langle\, u \text{ sommet de } \Gamma \mid uv = vu \text{ si } u, v \text{ sont deux sommets adjacents de } \Gamma \,\rangle.$$

Par exemple, si deux sommets de Γ sont toujours reliés par une arête, A_Γ coïncide avec le groupe abélien $\mathbb{Z}^n$ (où n est le nombre de sommets de Γ). Au contraire, si Γ ne contient aucune arête, A_Γ est un *groupe libre*.

À un groupe d'Artin à angles droits A_Γ est associé un complexe cubique S_Γ, dit *complexe de Salvetti*, et qui est construit de la manière suivante. Considérons une collection de cercles, un pour chaque sommet de Γ, tous recollés le long d'un point commun ; c'est un *bouquet de cercles*. Pour chaque collection (maximale) $u_1, \ldots, u_k$ de sommets de Γ deux à deux adjacents, nous allons recoller un tore $\mathbb{T}^k = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ de dimension k sur notre bouquet de cercles en faisant coïncider les k cercles associés à $u_1, \ldots, u_k$ respectivement aux k cercles associés aux facteurs de notre tore. Un peu de topologie algébrique montre que A_Γ est isomorphe au groupe fondamental du complexe cubique S_Γ.

L'observation clef est que S_Γ vérifie la condition sur le link évoquée plus haut, de sorte que le revêtement universel de S_Γ est un complexe cubique CAT(0), sur lequel A_Γ agit (par isométries) d'après ce que nous enseigne la topologie algébrique. Cette action des groupes d'Artin à angles droits sur des complexes cubiques CAT(0) s'est avérée un outil formidable dans l'étude de ces groupes.

Depuis une vingtaine d'années, les travaux dédiés aux complexes cubiques CAT(0) et aux groupes agissant sur eux s'accumulent, améliorant notre compréhension de jour en jour. Prenons le temps de regarder de plus près certains d'entre eux qui se sont particulièrement illustrés ces dernières années.

Conjecture virtuellement Haken et complexes cubiques spéciaux. La classification des surfaces fermées est connue des mathématiciens depuis le milieu du xixe siècle. Par la suite, les mathématiciens se sont naturellement tournés vers la classification des 3-variétés fermées, c'est-à-dire des espaces topologiques compacts dont chaque point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Ce problème s'est avéré bien plus difficile que la classification des surfaces, donc également plus intéressant. Une des stratégies possibles, proposée par W. Haken dans les années 60, est la suivante.

Aujourd'hui, nous disons qu'une 3-variété M est *de Haken* si elle contient une surface Σ plongée *incompressible* (i.e. l'inclusion $\Sigma \subset M$ induit une injection $\pi_1(\Sigma) \hookrightarrow \pi_1(M)$). L'observation fondamentale de W. Haken est qu'une telle variété admet une *hiérarchie* : par des découpages bien choisis le long de surfaces, nous obtenons une collection de boules. Autrement dit, toute variété de Haken peut être obtenue à partir de boules par des recollements le long de surfaces. Cette décomposition est particulièrement utile pour démontrer des théorèmes, puisqu'il suffit de démontrer qu'une propriété (P) est vérifiée par les boules, puis que recoller deux variétés vérifiant (P) le long d'une surface vérifie encore (P), afin de déduire que toute variété de Haken vérifie notre propriété (P).

La question qui s'est alors naturellement posée est de savoir si toute 3-variété fermée est de Haken. Malheureusement, ce n'est pas le cas. Malgré tout, en 1968, F. Waldhausen s'est demandé si cela ne pouvait pas être vrai quitte à considérer un revêtement fini si nécessaire. Ce problème est connu comme la *conjecture virtuellement Haken* :

Conjecture. *Toute* 3*-variété fermée admet un revêtement fini contenant une surface plongée incompressible.*

Grâce aux travaux de G. Perelman sur la conjecture de Poincaré, de grands progrès ont été réalisés vers la preuve de cette conjecture. Mais un cas restait non résolu : celui des variétés hyperboliques, que nous allons considérer maintenant.

Donnons-nous donc une 3-variété hyperbolique fermée M. Une première étape, et pas des moindres, a été de démontrer que M contient des surfaces immergées incompressibles (Kahn-Markovich, 2012). A priori, une telle sous-surface $\Sigma \subset M$ n'est pas plongée : elle peut s'intersecter elle-même. Ce que nous souhaiterions faire, c'est prendre un revêtement fini de M convenable afin de déplier Σ ; de supprimer cette auto-intersection ; bref, de la rendre plongée. D'un point de vue algébrique, cela revient exactement à démontrer que le sous-groupe $\pi_1(\Sigma)$ du groupe fondamental $\pi_1(M)$ est *séparable*. Rappelons que, étant donné un groupe G, un sous-groupe H est *séparable* si, quel que soit l'élément $g \notin H$, il existe un sous-groupe d'indice fini dans G qui contient H mais qui ne contient pas g. Nous sommes donc rendu à un problème purement algébrique.

Dans un article de 2008, F. Haglund et D. Wise ont isolé une condition simple et élégante permettant, à partir d'un groupe G agissant d'une manière particulière sur un complexe cubique CAT(0), de construire un morphisme injectif $G \hookrightarrow A$ vers un groupe d'Artin à angles droits. Parmi les nombreuses informations intéressantes qu'il nous est possible de déduire sur G, cela nous permet justement de montrer que certains sous-groupes de G sont *séparables*. Ainsi, une stratégie est de démontrer que le groupe fondamental $\pi_1(M)$ de notre variété agit sur un complexe cubique CAT(0) d'une bonne manière, afin de conclure grâce à la théorie des complexes cubiques spéciaux.

La construction d'une telle action a été faite de la manière suivante (Bergeron-Wise, 2012). Fixons une sous-surface immergée $\Sigma \subset M$, et regardons ce qui se passe dans le revêtement universel. Le groupe $\pi_1(M)$ agit par isométries sur le revêtement universel $\widetilde{M} = \mathbb{H}^3$ dans lequel Σ se relève en une copie $\widetilde{\Sigma}$ du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$. Par un argument de dimension, $\widetilde{\Sigma}$ sépare $\mathbb{H}^3$, ou dit d'une autre manière, $\widetilde{\Sigma}$ définit un mur dans $\mathbb{H}^3$. Ainsi, en prenant tous les translatés de $\widetilde{\Sigma}$ sous l'action de G comme collection de murs, nous obtenons un espace à murs sur lequel G agit. D'où, par cubulation, une action de G sur un complexe cubique CAT(0).

Il reste à démontrer que cette action est suffisamment bonne pour ce que nous souhaitons en faire. Ce que sont parvenus à faire N. Bergeron et D. Wise, c'est de montrer que, si nous partons avec suffisamment de sous-surfaces immergées dans M, alors l'action obtenue est proprement discontinue et cocompacte. Mais ce n'était pas suffisant, et obtenir les conditions manquantes a nécessité le travail de nombreux mathématiciens sur plusieurs années, jusqu'à aboutir à une preuve complète en 2013 par I. Agol.

La preuve de la conjecture virtuellement Haken a véritablement mis les complexes cubiques CAT(0) sous les feux des projecteurs. Une notoriété on ne peut plus méritée !

Pour en savoir plus

Pour une introduction générale à la théorie géométrique des groupes, nous renvoyons à [5]. Ensuite, pour plus d'information sur la géométrie CAT(0), nous renvoyons à [3]; et plus spécifiquement à [8, 9] pour les complexes cubiques CAT(0). Des applications ont également pu être trouvées dans des domaines plus appliqués, tels que la phylogénétique et la robotique; voir par exemple [1] et [7]. Comme souvent en mathématiques, les stratégies qui fonctionnent bien ne tardent pas à être généralisées. Les complexes cubiques CAT(0) n'échappent pas à la règle. Pour les lecteurs les plus hardis, nous proposons les références [4, 2, 6] pour plus d'informations sur certaines de ces généralisations.

Références

[1] L. Billera, S. Holmes et K. Vogtmann. « Geometry of the space of phylogenetic trees ». *Adv. in Appl. Math.* **27**, n° 4 (2001), p. 733-767. issn : 0196-8858. doi : 10.1006/aama.2001.0759. url : https://doi-org.revues.math.u-psud.fr/10.1006/aama.2001.0759.

[2] B. Bowditch. « Coarse median spaces and groups ». *Pacific J. Math.* **261**, n° 1 (2013), p. 53-93.

[3] M. Bridson et A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. **319**. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin, 1999, p. xxii+643. isbn : 3-540-64324-9. doi : 10.1007/978-3-662-12494-9. url : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-662-12494-9.

[4] I. Chatterji, C. Druţu et F. Haglund. « Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint ». *Adv. Math.* **225**, n° 2 (2010), p. 882-921. issn : 0001-8708. doi : 10.1016/j.aim.2010.03.012. url : https://doi-org.revues.math.u-psud.fr/10.1016/j.aim.2010.03.012.

[5] M. Clay et D. Margalit, éd. *Office hours with a geometric group theorist*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017, p. xii+441. isbn : 978-0-691-15866-2.

[6] A. Genevois. « Cubical-like geometry of quasi-median graphs and applications in geometric group theory ». *PhD thesis, arXiv :1712.01618* (2017).

[7] R. Ghrist et V. Peterson. « The geometry and topology of reconfiguration ». *Adv. in Appl. Math.* **38**, n° 3 (2007), p. 302-323. issn : 0196-8858. doi : 10.1016/j.aam.2005.08.009. url : https://doi-org.revues.math.u-psud.fr/10.1016/j.aam.2005.08.009.

[8] M. Sageev. « CAT(0) cube complexes and groups ». In : *Geometric group theory*. Vol. 21. IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, p. 7-54.

[9] D. Wise. *From riches to raags : 3-manifolds, right-angled Artin groups, and cubical geometry*. **117**. CBMS Regional Conference Series in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 2012, p. xiv+141. isbn : 978-0-8218-8800-1. doi : 10.1090/cbms/117. url : https://doi-org.revues.math.u-psud.fr/10.1090/cbms/117.

Anthony Genevois

Université Paris-Saclay

anthony.genevois@universite-paris-saclay.fr

Anthony Genevois est post-doctorant de mathématiques, spécialisé dans l'étude des propriétés algébriques des groupes via des méthodes géométriques et combinatoires.

Maths déconnantes

ou quand la SMF touche le fond

• S. Dijols
• P. Mathieu

« *Les paysages sont désolés, pourtant les hommes n'ont pas d'excuses.* »

Nekfeu.[1]

Rapport après rapport, le GIEC (Goupe Intergouvernemental d'Experts sur l'évolution du Climat) tente d'alerter sur l'ampleur et les dangers du dérèglement climatique. Les analyses de la Plateforme Intergouvernementale sur la Biodiversité et les Services Écosystémiques (IPBES) ne sont pas moins inquiétantes. La principale source du réchauffement climatique est l'exploitation déraisonnée de sources d'énergies carbonées, au premier rang desquelles le pétrole.

La communauté de l'Enseignement supérieur et de la recherche est concernée à plusieurs titres par la crise écologique en cours et elle tente de se mobiliser au travers d'une multitude d'initiatives (Atecopol[2], Labos1.5[3], ...). Les mathématiques sont évidemment aussi concernées. Dans sa recommandation du 10 octobre 2019, l'INSMI « invite tous les laboratoires de mathématiques à engager une réflexion concernant l'impact de leur activité professionnelle sur l'environnement »[4].

C'est dans ce contexte préoccupant que la SMF est fière de nous annoncer la prochaine conférence du cycle « Mathématiques étonnantes » au titre engageant de « Topologie en sous-sol ». L'annonce précise qu'il y sera question de mathématiques « au service de l'exploitation pétrolière »[5]. Le CNRS et Total sont de la partie[6].

Et l'on s'interroge sur la part d'ingénuité irresponsable ou de pur cynisme de la démarche. Devant l'irréversibilité des saccages imposés à notre monde – et la relative inertie sociétale sur ces questions – nos jeunes chercheur.e.s se diraient-ils qu'il ne faut plus se gêner ? Nos théorèmes, tels de mystérieux talismans, nous affranchiraient-ils de toute considération sur les conséquences de nos travaux ?

Un mot sur Total, fleuron du secteur étatico-privé, voilà une grande entreprise qui ne recule devant aucun compromis au service du bien commun. La liste des contributions humanitaires de Total est sans fin. En voici une parmi d'autres : dans son enthousiasme à propager les bienfaits de notre civilisation pétrolière, Total n'hésite pas à plonger en « Ultra Deep Water » (Ça veut juste dire profond : 3401m d'après le site de l'entreprise[7]), un exploit *monstre* de technologie destructive au service du déséquilibre écologique des grands fonds marins. Plus près de nous, matheuses et matheux, Total se trouve actuellement au centre d'une polémique avec le projet d'implantation de son service Recherche et Innovation au cœur du campus de l'X[8]. Gageons que l'entreprise se félicite déjà du soutien que la SMF lui apporte, en particulier en terme d'image, au travers d'actions telles que la conférence étonnante sus-mentionnée.

1. Écrire *in* Les étoiles vagabondes : expansion. Seine zoo records, 2019.
2. https ://atecopol.hypotheses.org/
3. https ://labos1point5.org/
4. `http://www.cnrs.fr/insmi/spip.php?article3389`
5. `https://smf.emath.fr/conference-sous-sol`
6. Les oratrices/eurs de cette conférence sont affilié.e.s respectivement à Total (RD) et au CNRS-Sorbonne université.
7. `https://www.ep.total.com/en/innovations/research-development/wells`
8. `http://polytechniquenestpasavendre.fr/`

Que faire ? Ré-écouter les échanges de Grothendieck au CERN en 1972[9] pour se préparer à recevoir l'annonce d'une prochaine conférence SMF-Monsanto sur les applications prometteuses de telle ou telle théorie au service de la destruction de la biodiversité, fantasmer sur la réécriture du modèle *proie-prédateur* en un conceptuel $\emptyset - \emptyset$, ou bien espérer que notre société savante saura se montrer à la hauteur des enjeux des crises écologiques ?

Vous pouvez retrouver ce texte sur l'équipe Frama : `https://framateam.org/signup_user_complete/?id=a8nku851mideufdaede4sxxora` pour commenter, échanger, discuter ...

Réponse à la tribune de Sarah Dijols et Pierre Mathieu

- J. Buzzi
- S. Seuret

Ce court article souhaite apporter quelques éléments de contexte suite à la conférence « Topologie en sous-sol » organisée dans le cadre du cycle « Mathématiques étonnantes » porté par la SMF, et à la tribune de Sarah Dijols et Pierre Mathieu publiée dans cette *Gazette*.

Ce cycle, créé en 2019 par la SMF, est destiné aux étudiant.e.s et élèves des grandes écoles, aux professeurs du second degré, aux chercheurs et ingénieurs de tout domaine. Les conférenciers, en duo, font découvrir une interaction inattendue entre différents domaines des mathématiques, entre les mathématiques et d'autres sciences, ou entre les mathématiques et des applications industrielles ou technologiques, entre autres. Plusieurs conférences sont organisées chaque année, et nous tenons à ce qu'elles n'aient lieu pas qu'à Paris. Une caractéristique importante et originale de ce cycle est qu'il met en avant l'interaction, en laissant une part égale aux deux aspects de la problématique soulevée lors de la conférence.

Il nous a semblé utile de donner quelques éclairages sur la position et les actions de la SMF vis-à-vis des enjeux possiblement soulevés par les travaux autour des mathématiques.

Le comité scientifique du cycle « Mathématiques étonnantes » est à la recherche de collaborations originales et de duos de conférenciers acceptant de se prêter à cet exercice difficile. Il n'est pas aisé de sortir des applications « évidentes » des mathématiques, et nous souhaitons mettre en avant l'importance de notre science dans de nombreux domaines, parfois inattendus pour les étudiants. La contrepartie de l'omniprésence des mathématiques dans le monde actuel est qu'elles contribuent également à des développements dont on peut questionner la pertinence ou les aspects éthiques.

La conférence « Topologie en sous-sol » a été proposée par des membres du comité scientifique du cycle « Mathématiques étonnantes » et la thématique a été discutée au sein du Bureau de la SMF en novembre 2019. Les questions éthique et écologique ont été soulevées.

Le but n'est pas ici de fermer le débat ou de développer la position de chacun.e. Le Bureau et le comité scientifique de « Mathématiques étonnantes » n'ont pas de point de vue définitif sur la question. Cependant, sur l'extraction pétrolière qui est l'application mentionnée dans la conférence « Topologie en sous-sol », rappelons que les ondelettes sont nées vers la fin des années 1970 des remarquables idées de l'ingénieur Jean Morlet qui travaillait chez Elf sur un sujet comparable à celui de cet exposé. Les ondelettes ont aujourd'hui de nombreuses applications à la santé (en imagerie médicale en particulier), au traitement des données, au compressive sensing, et ont valu à Yves Meyer son prix Abel. C'est le propre de la recherche de développer des outils pour résoudre un problème particulier et qui vont débloquer ensuite d'autres problématiques.

Les orateurs n'ont évidemment pas fait la promotion de Total, et il nous semblait intéressant de par-

9. `https://www.youtube.com/watch?v=ZW9JpZXwGXc`

ler de ce sujet – en réalité, les applications en sont potentiellement nettement plus larges que celles développées dans cet exposé. –

Les questions autour d'éventuels conflits d'intérêts et problèmes éthiques ou environnementaux des manifestations organisées ou simplement parrainées par la SMF, ont été mises explicitement à l'ordre du jour du conseil d'administration de la SMF de janvier 2020 (avant la diffusion du texte de Sarah Dijols et Pierre Mathieu), et seront de nouveau débattue lors du prochain conseil, car nous n'avons pas eu le temps de clore la discussion.

Le débat nous semblait dépasser celui d'une conférence ponctuelle, car la même problématique générale se pose pour Orange, Renault, les banques, les assurances, Google, ... Plus généralement, la question du sponsoring d'événements ou du mécénat d'actions est importante. Cette interrogation doit porter sur toutes les activités de la SMF, ainsi que sur les nôtres à titre individuel : le financement de l'enseignement et de la recherche, privée et publique, par des intérêts privés contestables ou des États critiquables devient de plus en plus important.

Il n'est pas facile de trancher sur ce qui est « acceptable » ou ne l'est pas, le seuil de tolérance de chacun.e étant différent selon le type d'action : un exposé est différent d'un article dans la *Gazette*, différent lui-même d'un mécénat pour des actions spécifiques ou bien de dons faits à l'association, etc. Nous réfléchissons ensemble à tous ces aspects, Bureau, personnels de l'association, Conseil d'Administration et Conseil Scientifique de la SMF. Les réactions de tous les collègues et adhérents sont écoutées et respectées. Il est très sain que mathématiciennes et mathématiciens s'interrogent, individuellement et collectivement, sur les conséquences de nos enseignements, notre recherche, nos actions.

Cependant, pour revenir au problème soulevé dans la tribune précédente, les activités problématiques doivent donner lieu à des débats informés et inclusifs et non pas être évités selon un principe que n'aurait pas renié Tartuffe. Ainsi, lors de la conférence « Topologie en sous-sol », des spectateurs ont posé des questions sur l'éthique des recherches menées. La SMF est un lieu où ces débats et réflexions doivent pouvoir être menés.

Pour rappel, la SMF est une association reconnue d'utilité publique, indépendante, sans financement récurrent de l'état français ou d'entreprises privées, et ne donne aucun droit de regard à quelque intérêt privé que ce soit.

Enfin, il nous a semblé pertinent de replacer cette conférence dans l'ensemble des actions de la SMF et de notre promotion des mathématiques : nous organisons plusieurs cycles de conférences destinés aux jeunes, nous publions des livres et des revues, nous portons des débats et des lettres d'informations. Nous allons renforcer notre rôle en participant à l'action MathC2+ qui coordonne le financement de stages de mathématiques pour des élèves de 4ème à la 1ère. Il est important de promouvoir l'ensemble des facettes des mathématiques ; nous nous efforçons de montrer tout ce à quoi les mathématiques mènent, de donner une image positive, variée, originale, de notre science. La différence est subtile, mais claire, avec faire la promotion des utilisations des mathématiques, qui, comme le souligne la tribune précédente, peuvent être détournées ou utilisées à mauvais escient. Comme expliqué plus haut, la SMF respecte au mieux l'ensemble des contraintes, et fait son possible pour rester du bon côté, celui qui ouvre le débat et met en avant notre science.

Ainsi, la tribune et ses quelques allusions peu flatteuses nous semblent disproportionnés au regard de l'ensemble de nos actions et des personnels et bénévoles qui les portent.

La SMF n'ignore pas les problématiques que soulèvent ces exposés « doubles », au regard de leurs applications. Mais les ignorer n'est pas constructif. C'est le rôle de la SMF de favoriser la discussion, et non pas de taire les problèmes. La *Gazette* est un lieu d'échanges, et le forum de notre site web, qui sera bientôt ouvert, permettra également de débattre de ces questions.

Jérôme Buzzi

Responsable événements et communication de la SMF

Stéphane Seuret

Président de la SMF

Un vote électronique pour les élections au conseil d'administration de la SMF

Comme chaque année, la SMF procédera à une élection pour renouveler un tiers de son conseil d'administration, soit 8 personnes. Pour la première fois, à l'instar de ses consœurs, la SMAI, la SFdS et l'IHP, cette élection sera électronique et réalisée sur la plateforme Belenios de INRIA : `belenios.loria.fr`.

Le processus étant nouveau pour la SMF et pour la plupart d'entre nous sans doute, il convient d'expliquer le fonctionnement de ce vote. Pour bien le comprendre il peut être utile de le comparer au processus habituel auquel nous nous soumettons régulièrement pour les grandes élections (présidentielle, parlementaire, ...). Tout d'abord vous recevez une carte de vote, c'est-à-dire une autorisation de vote, vous permettant de vous présenter devant l'urne. Puis votre bulletin est mis dans l'urne en échange d'une signature sur le registre des détenteurs d'une carte de vote.

C'est également comme cela que se déroule une élection sur la plateforme Belenios avec en guise de carte de vote et de signature des codes secrets envoyés par la plateforme et à renseigner au moment du vote.

Voici quelques détails sur le déroulement du vote. Chaque membre ayant acquitté sa cotisation avant le 5 mai recevra les courriers électroniques mentionnés ci-dessus à l'adresse qu'il aura déclaré à la SMF lors de son adhésion :

- l'un contiendra une autorisation de vote sous la forme d'un code;
- l'autre contiendra un login, qui sera l'adresse électronique déclarée à la SMF, et une signature électronique sous la forme d'un code secret personnel.

Ces courriers vous indiqueront la période d'ouverture du vote et vous inviteront à vous rendre sur la plateforme Belenios pour procéder au vote pendant cette période, à savoir du 12 mai 14h00 au 12 juin 14h00.

Vous êtes donc invité.e.s à vérifier vos adresses électroniques indiquées sur votre compte SMF. Il est possible que ces courriers arrivent dans vos « indésirables ». Ces mails vous seront envoyés durant la semaine précédant la période de vote indiquée ci-dessus. Si après le 12 mai 2020 vous n'avez toujours pas reçu ces mails vous devrez alors vérifier vos « indésirables » et s'ils ne s'y trouvent pas, envoyer un mail à : smf@smf.emath.fr et nous vous les ferons parvenir à nouveau. Notez qu'il est possible de voter plusieurs fois mais que seul votre dernier vote sera pris en compte.

Le vote se déroulera de la façon suivante.

Les courriers électroniques reçus contiendront un lien pour participer à l'élection. Cliquez sur ce lien. La page web de l'élection s'ouvrira. Vous pourrez choisir d'afficher la page en français ou en anglais avec l'icône correspondante affichée sur cette première page (fr/en). Vous devrez accepter les cookies pour pouvoir voter. Sur cette page web, cliquez sur « Commencer/Start ».

- Étape 1/6 : votre « code de vote/credentials » est contenu dans l'email dont le sujet sera « Élections CA SMF ». Copiez-le et collez-le à l'endroit indiqué.
- Étape 2/6 : votez.
- Étape 3/6 : cliquez sur « Continuer/Continue ». Il faut alors rentrer le « Nom d'utilisateur » et le « Mot de passe » qui sont contenus dans le mail reçu de « Belenios ». Puis cliquez sur « se connecter/login ».
- Étape 4/6 : cliquez sur « je dépose mon bulletin dans l'urne/I cast my vote ».
- Étape 5/6 : confirmez.
- Étape 6/6 : vous avez voté! Merci beaucoup. Vous devez recevoir un email de confirmation de « Belenios ». Il vous permettra de vérifier que votre bulletin est bien dans l'urne ainsi que tous les autres bulletins cryptés.

Si vous souhaitez plus d'informations sur le protocole utilisé, n'hésitez pas à vous rendre sur `http://www.belenios.org/documentation.html`.

-87-

Comment on doit faire un exposé
à un Colloque International

par J. Bass (Paris VI)

REMARQUE PRELIMINAIRE :

On suppose pour fixer les idées que l'orateur parle en français devant un auditoire comportant des étrangers

1) Faire d'abord l'hypothèse que l'auditoire est déjà parfaitement au courant de ce qui va lui être dit.

2) Ne jamais s'occuper des réactions de l'auditoire.

3) Faire en sorte que, si quelqu'un arrive de deux minutes en retard, il n'y ait pour lui aucun espoir de se rattraper (divers procédés pour y arriver sont indiqués dans la suite).

4) Passer très vite sur l'introduction, puis commencer à écrire énormement de formules.

5) Ne jamais définir les symboles utilisés.

6) Employer beaucoup d'abréviations, de néologismes, de sigles, particuliers au français, et si possible à l'orateur.

7) Ecrire alternativement à gauche et à droite, en haut, en bas et au milieu du tableau. Effacer au fur et à mesure.

8) S'excuser périodiquement d'une erreur d'ailleurs sans importance.

9) Se tromper au moins une fois, et ne pas réussir à retrouver, dans ses notes, la bonne page.

10) Consulter fréquemment ses notes. Y passer le temps nécessaire.

-88-

11) Parler vite.

12) Ne pas parler trop fort, pour ne pas gêner l'auditoire. Baisser la voix à la fin des phrases et sur les syllabes muettes. Faire soigneusement les liaisons et ne pas séparer les mots.

13) Ne jamais écrire les noms propres au tableau. Les prononcer à la manière usuelle en France. C'est évidemment la prononciation internationale (2)

14) Ne pas faire attention à l'heure.

15) Etre persuadé d'avance que ces règles ne s'appliquent pas à vous.

16) Et surtout ne pas lire cette note.

---

(1) Ces recommandations ont été rédigées à la suite de nombreuses expériences, anciennes et récentes.

(2) Exemple : Gôss pour Gauss.

Christian Mauduit

1959 - 2019

- P. Arnoux
- J. Cassaigne
- S. Ferenczi
- P. Hubert
- J. Rivat

Christian est né à Marseille le 10 novembre 1959, de souche gréco-marseillaise, et mort à Marseille le 13 août 2019. Élève de l'École des Mines de Saint-Étienne, il en sort en 1982 avec un diplôme d'ingénieur civil. Mais une rencontre fortuite, au célèbre restaurant Étienne, avec le non moins célèbre Momo, alias Mohammed Mebkhout, doyen de la faculté des sciences et l'un des fondateurs du campus de Luminy, a déjà décidé de sa vocation : il fera des mathématiques, et si possible à Luminy. Il passe son Diplôme d'études approfondies en 1981, en logique et algèbre, très probablement avec Jean-Pierre Soublin.

Mais c'est la théorie des nombres qui l'attire le plus, « il aimait la simplicité des énoncés, les conjectures qui s'énoncent en quelques mots, compréhensibles par tous quasiment sans pré-requis... simplicité derrière laquelle se cachait la profondeur du sujet » (Martine Olivi). Il était donc logique, même si les détails de la rencontre sont oubliés, qu'il s'adresse à Gérard Rauzy, dont « il apprécie le calme, la réserve et les talents pédagogiques » (idem), et en qui il trouvera le maître idéal. Un lien profond les unira durant quinze ans, marqué par le vouvoiement mutuel (alors que tous les autres étaient tutoyés), un goût commun pour les plaisirs de la vie, et des opinions politiques à la gauche de la gauche de la gauche (Gérard n'a jamais renié son lambertisme, et Christian a toujours été fidèle au parti communiste).

Avec Gérard Rauzy et à Luminy, Christian soutient successivement trois thèses, un doctorat de troisième cycle intitulé *Automates finis et équirépartition modulo un* en 1984, un doctorat (nouvelle formule) intitulé *Répartition modulo un des suites automatiques* en 1986, et une habilitation à diriger des recherches intitulée *Substitutions et ensembles normaux* en 1989. Il passe aussi l'agrégation de mathématiques, en 1983.

Toute sa vie, Christian se sentira triplement étranger à ce qu'on peut appeler l'establishment mathématique français : il n'était pas passé par l'École normale supérieure, préférait l'arithmétique à la géométrie algébrique, et, ceci expliquant peut-être cela, a subi plus de rejets que ne justifiait un talent reconnu dès 1990 par la médaille de bronze du cnrs. Dans les années 1980, il a expérimenté diverses solutions temporaires, dont un stage d'agrégation agité dans un collège près de Toulon dangereusement proche d'une autoroute (ses élèves, racontait-il, étaient venus le voir en procession pour lui demander de faire preuve d'autorité, ce qu'il avait refusé), mais aussi une année passée à Paris chez ibm (vers 1986), qui a élargi ses compétences à l'informatique et aussi aux systèmes dynamiques grâce à la fréquentation du brillant séminaire de Paris 13, animé à l'époque par Jean-François Méla, Bernard Host, François Parreau et Martine Quéffelec.

Enfin, en 1986, il est recruté au cnrs. Mais alors se place un épisode semble-t-il un peu oublié, celui des « reçu-collés ». Le gouvernement Chirac, conseillé par le sinistre recteur Durand, voulait se débarrasser du cnrs, et, pour commencer, a réussi à faire annuler, pour un vice de forme quelconque, l'élection du Comité national : de ce fait, tous les recrutements étaient invalidés, et aucun recrutement nouveau ne les a remplacés. Christian a milité au sein du collectif des admissibles, mais seul le retour de la gauche au pouvoir en 1988 a permis de confirmer enfin les recrutements de 1986.

Christian a donc pu revenir à Marseille comme cr2 à Luminy... mais pas pour longtemps, car déjà la course aux postes de professeur, pas trop difficile à l'époque, allait commencer. Après un recrutement en informatique à Luminy (1990) cassé par le cnu (pour des raisons ayant peu à voir avec le dossier du candidat), c'est à Lyon 1 que Christian devient professeur en 1990, sous l'égide de Jean-Louis Nicolas. Sa période lyonnaise est fructueuse, lui permettant de rencontrer aussi les géomètres de l'ens et de prendre ses premiers élèves en thèse. Mais ce Marseillais ne pouvait pas rester à l'écart des grands projets de Gérard Rauzy, et dès 1993 il obtient sa mutation à Luminy (Université Aix-Marseille 2 puis Université de la Méditerranée, puis Aix-Marseille université) dans le cadre de la nouvelle unité cnrs qui sera successivement le Laboratoire de mathématiques discrètes, l'Institut de mathématiques de Luminy puis finalement, après regroupement d'unités, l'Institut de mathématiques de Marseille. Il y restera jusqu'à sa mort (à part une délégation cnrs à l'unité mixte internationale de Rio de Janeiro en 2011-2012), gravissant les échelons jusqu'à la classe exceptionnelle et au couronnement que représente l'Institut Universitaire de France, où il est nommé en 2014.

Dès son installation à Luminy, et même pendant son passage à Lyon, Christian a été l'un des acteurs de la belle aventure que fut la création d'un institut de mathématiques à Luminy, voulue par Gérard Rauzy, réalisée en 1992 avec le Laboratoire de mathématiques discrètes, et qui a effectivement placé Marseille dans la liste des grands laboratoires de province (on ne parlait pas d'excellence à l'époque mais on la pratiquait). Pendant que Gérard intriguait au plus haut niveau, profitant du passage au pouvoir de vieux compagnons de lutte, Christian ferraillait sur le terrain, sachant se montrer très convaincant dans les commissions de spécialistes pour recruter les meilleurs. Christian aurait dû, tôt ou tard, succéder à Gérard à la direction de l'institut, hélas la chute de ce dernier en 1994 sous les coups d'une conjuration d'imbéciles en a décidé autrement. Il est cependant plaisant de constater que l'avatar actuel de l'institut est dirigé, en la personne de Pascal Hubert, par la génération suivante de la lignée (Pisot)-Rauzy-Mauduit.

Sa production scientifique commence par un coup d'éclat, avec dès 1989 une publication dans l'un des trois grands journaux, *Inventiones mathematicae* [5]. Au moment présent, il est crédité par *MathSciNet* de 106 publications, y compris dans les deux autres grands journaux, *Annals of Mathematics* [8] et *Acta Mathematica* [6]; notons que 42 d'entre elles (dont une série abondamment citée sur la construction de suites pseudo-aléatoires) sont co-signées avec Andras Sarközy, 20 avec Joël Rivat, ... et 2 avec Paul Erdős lui-même, Christian tenait à faire partie du groupe privilégié des « Erdős 1 ».

C'était avant tout un spécialiste de la théorie des nombres, mais, à travers l'étude des suites de symboles sur un alphabet fini, il a apporté aussi de belles contributions à l'étude des systèmes dynamiques et à la combinatoire des mots avec ses applications à l'informatique théorique. En complément de leur intérêt théorique, beaucoup des questions étudiées sont directement liées à la construction de suites de nombres pseudo-aléatoires et ont des applications importantes en simulation numérique et en cryptographie.

Parmi ses résultats les plus spectaculaires, on compte la résolution, en 2009 et 2010 avec Joël Rivat, de deux questions formulées en 1968 par le mathématicien russe Alexandre Gelfond [4] concernant la somme des chiffres des nombres premiers et des valeurs polynomiales. Ils ont démontré en particulier qu'il y a en moyenne autant de nombres premiers dont la somme des chiffres décimaux est paire que de nombres premiers pour lesquels elle est impaire. Plus récemment, toujours avec Joël Rivat [7], il a développé une méthode originale et puissante pour montrer qu'une suite, ou le système dynamique associé, satisfait à une fameuse conjecture due à Sarnak [9] (2011), c'est-à-dire que cette suite (ou toutes celles qui produisent les mêmes mots finis) vérifie une relation d'orthogonalité asymptotique avec la fonction de Möbius, et cette méthode a été utilisée par de nombreux auteurs pour différents types de suite. Notons aussi deux résultats spectaculaires (avec Michael Drmota et Joël Rivat) : d'une part, si on lit la suite de Morse le long des carrés, on obtient le développement d'un nombre normal en base 2 [1] (dans cette nouvelle suite, chaque mot fini de longueur n apparaît avec fréquence 2^{-n}), d'autre part les nombres premiers sont bien répartis simultanément dans deux bases indépendantes [2].

Christian a toujours été en pointe dans le domaine de la coopération internationale, dont il comprenait le rôle important dans la recherche et la formation. Nul mieux que lui ne savait trouver des crédits auprès d'organismes variés, et les utiliser en priorité pour les jeunes, les mandarins étant suffisamment connus pour se faire inviter ; grâce à cette inlassable activité, de nombreux étudiants et chercheurs ont ainsi pu s'ouvrir à la communauté internationale des mathématiciens. L'actuelle équipe Géométrie, dynamique, arithmétique et combinatoire de l'Institut de mathématiques de Marseille, première bénéficiaire (après ses prédécesseurs) de cette manne de voyages, suit toujours son exemple et mérite bien le titre de « l'équipe sur laquelle le soleil ne se couche jamais ». De l'Albanie à l'Irak, bien des pays ont vu passer Christian ; mais pour certains, des liens durables ont été établis. Il y a eu d'abord la Pologne, dans les années 1990 où il fallait beaucoup de coups de téléphone pour régler les détails (un administrateur provisoire du département de mathématiques de Luminy démissionna pour ne pas payer la note). Il y a eu le Japon et la Chine, avec la fameuse école d'été de Wuhan (1996, à l'époque on y voyait beaucoup de rats mais pas de coronavirus), qui vit naître le livre *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, signé Pytheas Fogg [3], et devenu une référence incontournable (Christian y a contribué tout en désapprouvant le choix du nom d'auteur), et où l'on doit entièrement à Christian le rapprochement des deux écoles mathématiques, la Chine et les Nippons comme il aimait à dire ; au gré des fluctuations de l'économie, ce furent d'abord les Chinois, puis maintenant les Japonais, qui vouèrent à Christian une profonde reconnaissance. Christian a été nommé professeur honoraire de l'université de Wuhan en 1997. Ensuite, l'Autriche et la Hongrie constituaient des destinations naturelles pour un arithméticien. La Tunisie occupe une place à part : Christian et son premier élève Mohamed Mkaouar ont fondé une école de théorie des nombres à Sfax, qui collabore toujours activement avec Luminy. Mais c'est le Brésil qui était devenu sa seconde patrie, au point que quand on lui adressait la parole dans le grec de son enfance il avait tendance à répondre en portugais !

Enseignant remarquable (il a réussi une année à conserver une assistance nombreuse pour ses derniers cours qu'il avait pourtant placés après l'examen final), Christian mettait un point d'honneur à ne pas faire son service d'enseignement de manière classique, mais à consacrer en fait beaucoup plus de temps et d'efforts à des activités pédagogiques originales et variées. Outre son passage à la direction de l'IREM à Marseille (2006-2011), il a beaucoup travaillé à populariser les mathématiques auprès du jeune public en s'impliquant dans de nombreuses actions pédagogiques régionales : association MATh.en.JEANS depuis le début des années 90, association Maths pour tous (prix d'Alembert 2014), École de la deuxième chance de Marseille, conférences et animations grand public, stages Hippocampe de l'IREM.

Il introduisit en 1997 un cours baptisé MATh.en.JEANS dans la formation des étudiants de premier cycle universitaire, dédié à l'apprentissage des activités de recherche. Il avait également participé à la création du master de didactique des mathématiques, où il faisait des cours très appréciés d'initiation à la recherche mathématique, sur divers problèmes arithmétiques ou combinatoires ouverts, aux enseignants du secondaire qui suivaient le master. Quand il s'est créé l'an dernier une commission inter-IREM internationale, c'est tout naturellement vers lui que ses membres se sont tournés pour qu'il en prenne la présidence.

Il savait aussi exporter ces activités : le moment le plus impressionnant de ses nombreux séjours au Brésil a été le projet Hippocampe à Rio avec les adolescents d'une école de la favela Complexo da Maré ; « dans cette courte période de trois jours on les a vus se transformer, c'était incroyable » (Stefanella Boatto) ; et cela valait aussi pour les nombreux employés subalternes de l'IMPA (Institut de Mathématiques Pures et Appliquées) qui, pour la toute première fois, voyaient des efforts et des attentions consacrés à ces classes défavorisées dont ils se sentaient proches.

Christian était aussi membre de l'équipe de direction du Centre international de mathématiques pures et appliquées (CIMPA) et organisait des écoles d'été dans plusieurs pays d'Asie et d'Amérique du Sud.

Il a dirigé ou co-dirigé huit thèses de doctorat. En 2018, il a reçu les insignes de chevalier de l'Ordre des Palmes académiques.

Que retiendrons-nous de Christian ? À première vue, l'image d'un « bon folâtre », comme disait Villon, toujours prêt à rire et à faire la fête, avec « son éternel sourire espiègle » (Cyril Banderier). Plus profondément, bien sûr, il était inquiet et tourmenté, avec une vie privée… compliquée et une mère dont l'état de santé le stressait beaucoup, et ce stress a probablement joué un rôle dans sa fin prématurée. Mais, quand Christian apparaissait quelque part, en général un peu plus tard que prévu (« on n'attend pas Christian »), la vie s'accélérait brusquement, il avait toujours de grands projets, qu'il s'agisse de découvrir un restaurant, un pays ou un théorème. Il passait à la vitesse supérieure au carnaval de Rio, comme l'écrivait l'un des auteurs en 2018 : « Pendant quinze jours, Christian a frétillé comme jamais. Il me donne des rendez-vous imprécis dans des endroits improbables auxquels j'arrive avec un très grand retard, ce qui curieusement ne nous empêche jamais de nous retrouver. On met des bouchons d'oreille pour pouvoir se mettre juste devant les haut-parleurs, chose qui m'a toujours laissé perplexe. Il insiste pour me faire manger des galettes de tapioca fourrées au poulet de synthèse et à la Vache qui rit en tube, que nous attendons longtemps avant de partir en courant pour les manger en se faufilant entre des bus en marche. Il m'emmène ensuite dans des boîtes où il faut reconnaître que Christian est d'une efficacité hors-norme. Associé avec son compère Michel, grand reporter d'un journal de la Haute-Marne, il arrive à rentrer gratuitement partout et à nous faire photographier avec les plus belles danseuses ».

Il nous a tous appris énormément, en mathématiques où il avait une grande culture (il avait entre autres un don pour la recherche bibliographique ; il fut, pensons-nous, le premier à retrouver, en 1989, le rôle précurseur de Prouhet dans la construction de la suite qu'on commence maintenant à attribuer à Prouhet-Thue-Morse) et dans la vie courante où il connaissait beaucoup de trucs (dans toute situation un peu délicate, nous pensons d'abord « que ferait Christian ? » et c'est souvent la voie vers la solution). En particulier, outre un usage raisonné de l'huile d'olive, il nous a appris qu'on peut, non, qu'on doit, s'amuser en faisant son travail, et que pour faire de grands théorèmes il n'est nul besoin de se prendre au sérieux ni d'être pompeux ou constipé.

Nous sommes de tout cœur avec ses enfants, Galien, Eliabel et Orion, et avec toutes les femmes qui ont partagé sa vie. Et nous laissons le mot de la fin à Jun-ichi Tamura, tant pis pour le pathos car il est sincère : « Please wait for a while, Christian, I will come soon. There, we can meet together. Please enjoy a dish of full basturma with hot pimento. Please taste Japanese sake, please ask any questions as many as you like, please, Christian... »

Références

[1] M. Drmota, C. Mauduit et J. Rivat. « Normality along squares ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **21**, nº 2 (2019), p. 507-548.

[2] M. Drmota, C. Mauduit et J. Rivat. « Prime numbers in two bases ». *Duke Mathematical Journal* (à paraître).

[3] N. P. Fogg. « Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics, Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit, and A. Siegel ». *Lecture Notes in Mathematics* **1794** (2002).

[4] A. O. Gelfond. « Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données ». *Acta Arith.* **13** (1967/68), p. 259-265.

[5] C. Mauduit. « Caractérisation des ensembles normaux substitutifs ». *Invent. Math.* **95**, nº 1 (1989), p. 133-147.

[6] C. Mauduit et J. Rivat. « La somme des chiffres des carrés ». *Acta Math.* **203**, nº 1 (2009), p. 107-148.

[7] C. Mauduit et J. Rivat. « Prime numbers along Rudin-Shapiro sequences ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17**, nº 10 (2015), p. 2595-2642.

[8] C. Mauduit et J. Rivat. « Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers ». *Ann. of Math. (2)* **171**, nº 3 (2010), p. 1591-1646.

[9] P. Sarnak. « Three lectures on the Möbius function, randomness and dynamics » (2011). url : `http://publications.ias.edu/sarnak/paper/512`.

Souvenirs de Patrick Dehornoy

1952-2019

Patrick Dehornoy était mathématicien, professeur à Caen, théoricien des ensembles, expert ès tresses, membre de l'IUF, ancien directeur adjoint de l'INSMI, et bien d'autres choses encore. Quelques collègues et amis lui rendent hommage.

De la théorie des ensembles à la loi d'autodistributivité

Serge Grigorieff, professeur émérite, université de Paris

Au regard de sa bibliographie, il est patent que l'algèbre, particulièrement la théorie des tresses, est le centre du travail de Patrick Dehornoy. Cependant, c'est en logique et en théorie des ensembles, que Patrick a débuté sa carrière de chercheur avec des travaux qui sont, aujourd'hui encore, une référence [4, 1, 7]. Et, tout au long des années, il est resté passionné par ce sujet, organisant au CIRM le bisannuel « International Set Theory Workshop », ce de 1990 à 2004, avant d'en passer la direction à d'autres. Ce qui lui a permis d'échanger avec le haut de gamme des spécialistes du sujet et de rester pleinement au fait de ses avancées.

Quelques mots (techniques...) sur ces travaux de Patrick permettront de voir comment ceux-ci l'ont mené à cette loi d'autodistributivité gauche si présente dans ses travaux sur les tresses, cf. [3]. Et aussi de rendre hommage au souci qu'il a constamment montré, cf. [2, 5], de faire connaître la beauté des grands cardinaux de théorie des ensembles et leur intérêt pour répondre à certaines questions des mathématiques usuelles dont on sait que, sans supposer l'existence de ces cardinaux, elles ne sont ni prouvables ni réfutables (un phénomène pressenti par Gödel il y a plus de 60 ans).

Le travail de Patrick en théorie des ensembles, avec l'axiomatisation ZFC (ZF pour Zermelo et Fraenkel, 1922, C pour l'axiome du choix), tourne autour des ultrapuissances itérées de modèles de ZFC. Si M_0 est un tel modèle, à partir d'un ultrafiltre U sur un ensemble I, on obtient un autre modèle $M_1 = M_0^I/U$ de ZFC qui satisfait aux mêmes propriétés que M_0. Ceci en quotientant l'ensemble M_0^I des fonctions de I dans M_0 par l'équivalence $f =_{M_1} g \iff \{i \mid f(i) = g(i)\} \in U$ et en y définissant une appartenance $\in_{M_1}$ pareillement en remplaçant $=$ par $\in$ (ces $=$ et $\in$ sont au sens de M_0). Un plongement φ s'impose alors : celui qui à un élément x de la structure de départ M_0 associe la classe d'équivalence de la fonction constante sur I de valeur x. Plongement non trivial si U ne l'est pas. Cela étant, dans un modèle de ZFC, les ordinaux jouent un rôle central, ils en forment une sorte de colonne vertébrale. Une propriété puissante, dans ce cadre d'ultrapuissances, est d'avoir dans M_1 la même notion d'ordinal que dans M_0 (à isomorphisme près). Ceci revient à demander que l'appartenance $\in_{M_1}$ de M_1 soit une relation bien fondée au sens de M_0 (pas seulement de M_1). C'est le cas si l'ultrafiltre U est une mesure, c'est-à-dire est clos par intersection dénombrable. Car si $(f_n)_{n=0,1,\ldots}$ est une suite de fonctions $I \to M_0$ telle que $f_{n+1} \in_{M_1} f_n$ pour tout n, alors $X_n = \{i \in I \mid f_{n+1}(i) \in f_n(i)\} \in U$ pour tout n. Puisque U est une mesure on a $X = \cap_{n=0,1,\ldots} X_n \in U$, et, pour tout tout i de X, on a donc $f_{n+1}(i) \in f_n(i)$ pour tout n.

Ainsi, l'appartenance au sens de M_0 ne serait pas bien fondée, contredisant les axiomes de ZFC.

Mais là, on arrive à un chapitre fort complexe, celui des grands cardinaux. En effet, ces cardinaux mesurables (c'est-à-dire supportant un ultrafiltre qui soit une mesure) sont gigantesques, très loin des objets usuels. Et la théorie ZFC ne permet pas de prouver leur existence! Celle-ci est un axiome qu'on doit rajouter à la théorie. Hélas, comme pour la théorie ZFC elle-même, la cohérence de cet axiome n'est pas démontrable, et n'est même pas démontrable en admettant celle de ZFC. La seule « garantie » qu'on ait de la cohérence de ZFC (resp. avec cet axiome) est que depuis plus de 100 (resp. 60) ans que l'on travaille avec, aucune contradiction n'est apparue!

Comme M_1 est inclus dans M_0, il est a priori plus petit, mais cette inclusion, restriction de l'identité, n'est pas l'objet mathématique intéressant. C'est le plongement φ de M_0 sur une partie propre de M_1 qui l'est, et celui-ci montre M_0 comme plus petit que M_1 ! En itérant, on a un modèle M_2 qui est l'ultrapuissance de M_1 par l'ultrafiltre $\varphi(U)$ sur $\varphi(I)$ et un plongement ψ de M_1 dans M_2. Voyant φ comme l'union de ses restrictions à des ensembles dans M_0 de plus en plus gros, on peut appliquer ψ à chacune de ces restrictions et, par union, appliquer ψ à φ lui-même. Comme φ envoie x sur φx, son image $\psi\varphi$ envoie ψx sur $\psi(\varphi x)$. On a donc $\psi(\varphi x) = (\psi\varphi)(\psi x)$. Ce qui est une autodistributivité gauche. C'est là que Patrick a rencontré, tout au début de sa carrière, cette loi qui intervient si fortement dans ses travaux en algèbre.

C'est alors qu'il préparait sa thèse de 3e cycle (1975) puis sa thèse d'État (1978), sur le domaine de la théorie des ensembles, sur lequel je travaillais alors, que j'ai connu Patrick. Nous avons à cette époque beaucoup échangé et je me souviens avoir été impressionné tant par sa capacité de travail, qui ne se démentira pas par la suite (voir sa bibliographie) que par la diversité des autres activités qu'il menait avec une réelle maîtrise : piano, navigation... Je me souviens aussi que son goût pour ce qui est algébrique l'avait conduit à s'adresser à Jean-Louis Verdier pour le sujet de seconde thèse de sa thèse d'État (pratique aujourd'hui révolue...). Je le vois encore, lors de sa soutenance, déclarer avec humour après l'exposé de sa seconde thèse « qu'il avait bien travaillé », ce en dépliant sur les tables du premier rang occupées par le jury un très long listing informatique (ces feuilles à picots pliées en accordéon) contenant les calculs algébriques sophistiqués qu'il avait menés sur des algèbres de Lie. Eh, non, à cette époque on ne disposait pas encore de logiciel de calcul formel..., Patrick avait dû écrire lui-même les programmes qui lui étaient nécessaires.

Puis, la séparation géographique, lui à Caen, moi à Lyon puis Paris, ne nous a pas permis de beaucoup nous voir. Ce jusqu'en 2015, quand Patrick m'a demandé d'être relecteur du livre de théorie des ensembles qu'il avait décidé d'écrire. Pendant un peu plus de deux ans, au fur et à mesure qu'il en écrivait les chapitres, j'ai donc eu le grand plaisir de le rencontrer pour en discuter.

Des huit livres que Patrick a écrits, le premier et l'avant-dernier concernent la logique : l'un présente la théorie classique de la calculabilité (208 pages, paru en 1993), l'autre est ce livre sur la théorie des ensembles (650 pages, paru en 2017). J'ai pu constater avec ce livre son souci d'accompagner le développement – forcément technique – de la théorie par de très nombreuses digressions donnant les intuitions, le pourquoi des choses, les limites des résultats présentés... Ce qui rend son livre remarquablement éclairant. Il faut souligner aussi l'audace de Patrick qui n'hésite pas à présenter la théorie jusqu'à ses résultats les plus sophistiqués, amenant le lecteur à l'état actuel du sujet.

Ce livre a été aussi pour lui une occasion forte de présenter les raisons d'étudier les grands cardinaux, un point qui lui tenait très à cœur. En effet, comme dit plus haut, ils sont indispensables pour dépasser le « on ne peut ni prouver ni réfuter à partir de ZFC » certaines questions des mathématiques usuelles. C'est ainsi, qu'entre autres exemples, il développe au chapitre XIV §3.1 de son livre une question simple à exprimer (mais à prouver, pas du tout) sur les tables de Laver, lesquelles sont des structures combinatoires finies définies par une induction... qui est une loi d'autodistributivité gauche.

Terminons par une autre illustration de son humour. Ayant été relecteur de son livre, il m'en a offert un exemplaire avec une dédicace... écrite en russe.

Un homme excellant dans tant de domaines

Philippe Toffin, maître de conférences retraité, université de Caen

Patrick fut nommé professeur de mathématiques à l'université de Caen en 1983. Nos bureaux étaient voisins, et très rapidement il m'invita chez lui. Je fis la connaissance de son épouse Arlette et de leurs trois enfants Julien, Charlotte et Pierre. Ils avaient acheté près d'Évreux une maison quasiment terminée que le propriétaire précédent avait vendue pour des raisons que j'ignore. Patrick avait décidé de bâtir un garage et un auvent pour leurs deux voitures. Je me souviens d'un certain nombre de week-ends où il monta les murs en parpaing, puis de maçon se transforma en charpentier. Il avait fait la connaissance d'un homme de l'art qui, devant l'habileté et la sûreté que montrait Patrick devant ses machines, accepta de lui donner accès à son atelier durant les week-ends.

Patrick et Arlette m'emmenèrent plusieurs années de suite au ski : dans ce domaine comme dans tant d'autres, Patrick regardait attentivement et se lançait. Rapidement les bosses n'avaient plus de secret pour lui.

Patrick avait pris des cours de piano dans sa jeunesse. La musique était très importante pour lui et Arlette, et leurs enfants suivirent des cours. J'ai des souvenirs vraiment émus de soirées où toute cette famille trouvaient une belle unité autour du piano que jouait Patrick.

Lorsque je venais chez Patrick et Arlette le week-end, il était entendu que je disparaissais le dimanche matin parce que j'allais à la messe : je n'ai jamais ressenti aucune gêne pour répondre aux questions des enfants que mon absence matinale provoquait.

En mathématiques Patrick et moi n'avions pas la même spécialité, mais je dus me mettre à la théorie des ensembles pour les TD alors que lui faisait le cours, au niveau maîtrise. En découvrant cette matière, mon regard sur les mathématiques changea profondément. Ce sont vraiment les mots de Patrick qui m'ont aidé à voir que la théorie des ensembles était à la fois une activité mathématique comme une autre et aussi qu'elle était le soubassement de toutes les mathématiques. Patrick avait un art consommé de comprendre ma difficulté en certains endroits, de faire surgir le concept d'un environnement seulement intuitif et d'éclairer de façon inattendue ce qui était ressenti comme un flou douloureux.

Patrick déploya une très grande énergie pour la reconnaissance des mathématiques à l'extérieur de l'université de Caen. Ces efforts aboutirent à la création du laboratoire LMNO – Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme – CNRS UMR 6139. Pour comprendre comment cela a été possible, il faut revenir des années en arrière. Il fallait d'abord un séminaire : il y eut un séminaire Stern-Dehornoy « Logique et Complexité », puis un séminaire Logique et Algorithmique dirigé par Patrick qui donnait lieu chaque année à un volume d'exposés sur des thèmes allant de la théorie des ensembles jusqu'à la théorie des nombres. En vue d'une reconnaissance extérieure, le laboratoire de Caen fut nommé SDAD (Structures Discrètes et Analyse Diophantienne) et trouva place dans la nomenclature du CNRS comme unité de recherche FRE 2271 (FRE = Formation de Recherche en Evolution). Le CNRS exigea des unités beaucoup plus importantes. C'est ainsi que Patrick, avec de très grands efforts auprès de ses collègues, obtint la création du laboratoire LMNO regroupant la quasi-totalité des mathématiciens.

Patrick eut un rôle essentiel dans l'informatisation du secrétariat des mathématiques. Les secrétaires qui jusque-là tapaient des textes mathématiques à l'aide de machines à écrire évoluées se mirent, avec l'aide et les nombreux encouragements de Patrick, à les entrer dans ces ordinateurs très modernes qu'étaient les fameux « MacIntosh ».

La propriété de la maison comprenait un jardin qui a été nettement agrandi par l'acquisition d'une terre voisine. Dans ce qui est devenu un très beau parc, il y a une petite construction non fermée qui évoque une sorte de cloître, avec de la belle musique qui se met en route dès que l'on arrive. Patrick était très discret sur les questions ultimes. Cet endroit simple et beau est une invitation à s'arrêter dans nos vies très agitées et bousculées, faire silence en nous, accueillir tout ce qui se présente à nous.

Pour Patrick, l'une des valeurs capitales qu'il partageait avec Arlette était la famille. Tout ce qu'il vivait quotidiennement était orienté dans cette direction. Il a connu sa première petite-fille Mélissa, chez Pierre et Chen. Il est parti malheureusement trop tôt pour avoir la grande joie de connaître les deux autres petits-enfants : son premier petit-fils, Gaspard, fils de Julien et Elsa, et sa seconde petite-fille, Ophélie, chez Pierre et Chen.

L'ordre de Dehornoy sur les groupes de tresses

Christian Kassel, directeur de recherche émérite
CNRS, université de Strasbourg

Patrick Dehornoy, dont j'ai fait la connaissance en septembre 1971 à notre entrée à l'ÉNS, s'est passionné très tôt pour la théorie des ensembles. À 26 ans, sous la direction de Kenneth McAloon (Paris 7), il a soutenu une thèse d'État [1] intitulée *Ultrapuissances itérées et changement de cofinalité* [2]. Comme il était d'usage à l'époque, Patrick avait également préparé une « deuxième thèse » ; elle portait sur des algèbres commutatives d'opérateurs différentiels linéaires engendrées par deux opérateurs L et M liés par une relation de la forme $M^2 = p(L)$, où p est un polynôme de degré 3. Sur ce sujet que lui avait proposé Jean-Louis Verdier, Patrick a obtenu des résultats (publiés dans [6]) qui ont nécessité de longs calculs algébriques sur ordinateur. Je me rappelle le moment de la soutenance où il a présenté ses calculs imprimés, déroulant de manière théâtrale des mètres de papier listing d'un bout à l'autre de la salle ! En 1983, après quelques années comme chercheur au CNRS, Patrick a été nommé professeur à l'université de Caen ; il y a passé le reste de sa carrière et joué un rôle décisif dans la structuration des mathématiques.

Dans les années 1980, les théoriciens des ensembles étudiant les grands cardinaux étaient tombés sur des structures algébriques très particulières, les « systèmes autodistributifs ». Ce qui faisait défaut était une description fine et complète des ensembles autodistributifs *libres*. Patrick a donné une telle description vers 1990 et en a dérivé un résultat stupéfiant sur les groupes de tresses, jetant ainsi un pont inattendu entre la théorie des ensembles et la topologie.

Les groupes de tresses, alors au cœur de la théorie émergente des groupes quantiques, sont des groupes sans torsion pour lesquels il était naturel de se demander s'ils étaient ordonnables. On savait qu'ils ne possèdent pas d'ordre total invariant par multiplication à la fois à gauche et à droite, alors que d'autres groupes sans torsion comme les groupes libres sont eux bi-ordonnables. Dans ce domaine le résultat le plus spectaculaire de Patrick est la construction d'un ordre total sur les groupes de tresses, invariant par multiplication d'un seul côté (disons à gauche) ; de plus, cet ordre, qui porte désormais son nom, est un bon ordre [3] lorsqu'on le restreint au sous-monoïde des tresses positives.

La construction de Patrick est extrêmement complexe et ingénieuse ; je le sais pour avoir inclus un chapitre sur l'ordre de Dehornoy dans une monographie consacrée aux groupes de tresses. Ce qui m'a posé le plus de difficultés est la rédaction en détail de la démonstration du fait que deux tresses quelconques sont comparables pour l'ordre ; la preuve de Patrick utilise la « réduction des poignées », un algorithme dont il était très fier et dont il s'agit d'établir la convergence, ce qui n'est pas facile. J'ai passé des heures à le tarabuster pour me faire expliquer toutes les subtilités de la chose ; pour lui tout cela était évident, mais pas pour moi.

Dans les années 1990, Patrick a pris son bâton de pèlerin pour intéresser les théoriciens des groupes, les topologues, les informaticiens... à ses travaux, en organisant par exemple une série d'ateliers et de conférences interdisciplinaires, prélude au GDR Tresses qui depuis 2000 réunit celles et ceux qui de près ou de loin s'intéressent aux groupes de tresses et à leurs avatars. En 2002 Patrick a été nommé membre senior de l'IUF et en 2005 l'Académie des Sciences lui a décerné le Prix Langevin « pour avoir établi un lien fondamental entre la théorie des ensembles et les groupes de tresses ».

En dehors des mathématiques Patrick avait des intérêts multiples et beaucoup de cordes à son arc : excellent pianiste, polyglotte, sportif, il s'était également improvisé architecte, maçon [4], charpentier ou encore plombier pour agrandir sa belle maison d'Arnières-sur-Iton. Ma famille et moi y avons souvent profité de la généreuse hospitalité de Patrick et Arlette.

Étudiants, Patrick et moi avions entrepris plusieurs voyages ensemble, le plus mémorable étant celui qui nous a menés par voie de terre jusqu'en Inde. Il m'a aussi fait découvrir les plaisirs de la voile ; avec lui comme *skipper*, on se sentait toujours en totale sécurité. En près d'un demi-siècle nous avons passé ensemble des moments inoubliables ; Patrick a été pour moi un ami bien plus qu'un collègue.

La théorie de Garside

François Digne, professeur émérite, université de Picardie Jules Verne

Quand la *Gazette* m'a demandé un texte sur Patrick, je me suis plongé dans les centaines de mails échangés entre 1996 et 2019. J'en extrais

1. Doctorat d'État, remplacé par l'HDR dans les années 1980.
2. Les travaux de Patrick en théorie des ensembles sont bien expliqués dans le texte attenant de Serge Grigorieff.
3. Rappelons qu'un ordre total sur une ensemble E est un *bon ordre* si toute partie de E a un élément minimal.
4. Il avait utilisé la composition du béton donnée dans l'Encyclopedia Universalis !

ci-dessous quelques passages. Ce texte est donc constitué essentiellement de souvenirs personnels d'une amitié de 23 ans.

Notre premier contact remonte à 1996, à la suite de l'article [8] qu'il avait écrit pour la *Gazette* (j'étais à l'époque dans le comité éditorial).

> Nous ne nous connaissons pas directement je crois, mais Marc Hindry m'a dit qu'il t'avait confié le papier que j'ai envoyé à la *Gazette*, et donc, tu dois savoir que je me suis intéressé de près aux tresses dans les derniers temps. Je pense qu'il faudrait que nous en discutions directement.

Comme c'est expliqué dans [8], Patrick, venant de la théorie des ensembles, était arrivé à s'intéresser aux tresses à partir de l'étude des systèmes autodistributifs, c'est-à-dire des lois de composition vérifiant la condition $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ (a \circ c)$, et du fait que le monoïde des tresses positives à n brins agit sur S^n si S est un système autodistributif. Cette action s'étend partiellement en une action du groupe de tresses. À partir de cette action Patrick construit son ordre sur le groupe de tresses (voir par exemple le chapitre 2 de [12]).

Les groupistes de leur côté ont commencé à s'intéresser aux tresses à partir de l'étude des représentations des groupes réductifs finis. Depuis les travaux de Deligne et Lusztig en 1975, le passage obligé pour étudier ces représentations est la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig. Au milieu des années 90 Broué et Michel ont généralisé ces variétés qui au départ sont associées aux éléments du groupe de Weyl, en associant des variétés analogues aux éléments du monoïde de tresses (monoïde d'Artin-Tits). Avec Jean Michel nous avions alors étudié les formes normales des éléments des groupes d'Artin-Tits telles qu'elles apparaissent dans les travaux de Thurston, de Deligne et de Charney.

Ma première rencontre avec Patrick a eu lieu en septembre 1996 lors de journées « Algorithmique des tresses » à Strasbourg organisées par Christian Kassel. L'idée de cette rencontre était de rassembler les différentes communautés s'intéressant aux tresses (groupistes, topologues de la basse dimension, combinatoriciens...). Ce fut le début de contacts de plus en plus personnels : journées groupes de tresses, invitations réciproques à plusieurs colloques, création du gdr tresses en 2001, à l'initiative de Patrick qui en fut le premier directeur. Rencontres et discussions ont suivi lors des réunions régulières de ce gdr. Ce fut l'occasion de quelques discussions animées ; je me souviens de l'une d'elles, autour de quelques verres de bon vin, à l'occasion d'un colloque du gdr dans l'île de Berder : quelle était la bonne terminologie ? Jusque-là on parlait de « petits groupes gaussiens » (« small Gaussian groups » ou « thin Gaussian groups »). Quels étaient les axiomes à prendre ou à laisser dans la définition ? Cette rencontre au sommet (Patrick, David Bessis, Jean Michel, Luis Paris, et moi) fixa le vocabulaire. Ce seront des « groupes de Garside » et la définition précise sera :

un monoïde de Garside est une paire (M, Δ) telle que

- M est un monoïde simplifiable et atomique ;
- M est un treillis pour la divisibilité à gauche et pour la divisibilité à droite ;
- Δ (appelé élément de Garside) a les mêmes diviseurs à gauche et à droite ;
- ces diviseurs sont en nombre fini et engendrent M.

On dit alors que le groupe des fractions de M est un groupe de Garside. Le monoïde se plonge dans son groupe comme un groupe de fractions et tout élément a une forme normale comme produit de diviseurs de Δ avec certaines conditions. L'intérêt de ces formes est en particulier qu'elles sont algorithmiquement calculables et qu'elles pemettent de résoudre le problème des mots et le problème de la conjugaison dans le groupe, à la suite des idées de Garside [13], reprises et généralisées par Elrifai et Morton puis par Birman, Gonzales et Gebhardt. Les groupes de tresses associés à des groupes de Coxeter finis sont des groupes de Garside, ainsi que certains groupes de tresses associés à des groupes de réflexions complexes. Ceci a été utilisé (ainsi que l'extension de la notion aux catégories) pour la solution du problème du $K(\pi, 1)$ par Bessis ainsi que pour prouver l'automaticité de ces groupes par Charney.

C'est donc lors de ce colloque en 2001 qu'est née la « théorie de Garside », bien que Patrick ait réfuté plusieurs fois le mot « théorie », jugeant qu'il ne s'agit pas d'une théorie mais que c'est simplement une certaine propriété des mots dans un monoïde, propriété généralisée plus tard aux (petites) catégories, permettant d'obtenir les formes normales en question. Le mot théorie est néanmoins resté.

Puis ce fut le projet en 2008 de l'anr « TheoGar » sur les théories de Garside (pilotée par Luis Paris) qui, après 6 mois de discussions, corrections, formulaires administratifs à faire et à refaire, a pu démarrer en 2009. Le projet annonçait la rédaction d'un livre « Finally, we intend to write a book that would be a reference on the subject ». Je ne suis pas sûr qu'en écrivant cette phrase nous savions à quoi nous nous engagions. L'écriture de notre livre « à dix mains » Foundations of Garside Theory [11] nous a occupés 7 ans. L'idée initiale d'écrire un livre date de 2007 et la version finale a été envoyée à l'éditeur en décembre 2014. Ce travail a donné lieu à bien d'autres discussions, souvent sur des détails de rédaction ou de bibliographie. Patrick a fait un travail considérable. Il a réécrit tous les chapitres de la première à la 700e page pour obtenir une homogénéité de style et de notations : « Mais oui, il faut t'y faire avec moi : je passe mon temps à reprendre les trucs pour les améliorer et les peaufiner ». « Si ça reste dur [à lire], c'est que je n'ai pas encore atteint à la qualité espérée ». Sous son impulsion les axiomes ont été de plus en plus dépouillés et les notions généralisées, pour aboutir à la notion de famille de Garside dans une catégorie. Un monoïde de Garside est devenu un cas particulier de catégorie (à un objet) possédant une famille de Garside finie, à savoir les diviseurs de l'élément de Garside.

Nos échanges de mails sont remplis d'apostrophes, avec une pointe d'humour potache ; par exemple quand l'idée du livre germait : « Je ne sais pas si on arrivera à se mettre d'accord sur quelque chose, mais, a priori, ca me paraît un projet sympa, et une excellente occasion de se fâcher durablement avec vous tous... »

Il y a eu bien d'autres moments partagés avec Patrick au fil de ces années : jogging dans la neige à Banff, dans les calanques à Luminy, autour de l'île de Tatihou ou de l'île de Berder, autour de chez lui à Arnières... Nos rencontres sont devenues familiales avec Arlette et mon épouse Claude. Des similitudes nous rapprochaient : la montagne, la musique, la course à pied, le vélo, nos enfants d'âges voisins. Lui qui avait fait beaucoup de montagne mais avait un peu raccroché, s'étant mis au vélo, je l'ai entraîné à l'ascension en famille de la Grande Ruine dans le massif des Écrins. Tous les ans nous nous retrouvions au festival de musique à la basilique de Saint-Denis. Nous l'avons emmené à un concert de jazz, lui qui était plutôt musique classique. Lui essayait de me persuader de me mettre à l'orgue : il avait acheté récemment un orgue de salon électronique dont les programmes permettent de jouer sur de nombreux orgues du monde entier, un exemple d'un de ses traits de caractère, toujours renouveler et élargir ses intérêts : laisser l'alpinisme pour le vélo en montagne puis le VTT, se mettre au triathlon, après le piano essayer l'orgue, apprendre le chinois après le russe, construire un cloître dans son jardin, passer de la théorie des ensembles à l'algorithmique des tresses...

Patrick Dehornoy et l'informatique fondamentale

Pierre-Louis Curien, directeur de recherche émérite

CNRS, université de Paris

J'ai commencé à fréquenter Patrick Dehornoy dans son univers mathématique au milieu des années 2000, lorsque, prenant son bâton de pèlerin, il était venu expliquer dans notre séminaire de théoriciens des langages de programmation son approche à la réécriture, nourrie de son expérience avec l'autodistributivité. Il avait parallèlement soumis par mon intermédiaire un joli article à la revue *Mathematical Structures in Computer Science*, et avait été si heureux des remarques du rapporteur (un « réécrivain » hollandais) qu'il m'avait demandé si je pouvais le mettre en contact avec ce dernier. Et de fil en aiguille, l'article est paru sous les deux noms de Patrick Dehornoy et de Vincent Van Oostrom [10]. Moins d'une dizaine d'années plus tard, à l'issue de son mandat à la direction de l'institut en charge des mathématiques du CNRS (l'INSMI), j'ai été ravi quand Patrick m'a fait part de son souhait de demander un accueil en délégation dans mon laboratoire *Preuves, Programmmes et Systèmes* (PPS), à l'université Paris Diderot. Séjour qui a été suivi par un accueil en qualité de chercheur associé. Patrick ne nous a donc plus quittés. Il avait jusqu'à son décès son bureau à l'IRIF [5]. Il participait régulièrement à notre groupe de travail *Catégories supérieures, polygraphes et homotopie*. Il a prêté son concours à plusieurs événements coorganisés avec nos collègues de Lyon et Marseille. Ainsi, en janvier 2014, il a donné un mini-cours intitulé *Garside calculus* dans le cadre d'une semaine *Algèbre et Calcul* à Lyon. C'est là que j'ai été saisi la première fois, scotché même, par ses talents de conférencier : énergie, précision, clarté lumineuse. Il a aussi été dans le comité scientifique du colloque *Catégories pour la théorie de l'homotopie et la réécriture* qui s'est tenu au CIRM en septembre 2017. Dès les premiers temps de son séjour à Paris Diderot, sous son impulsion, nous avions organisé un groupe de lecture du

5. Institut de Recherche en Informatique Fondamentale, né de la fusion de deux laboratoires : PPS et LIAFA.

« livre bleu » (*Foundations of Garside Theory* [11]), qui était alors en voie d'achèvement. Nous avons ainsi baigné dans les « règles de domino », les « retournements », et autres techniques, qui, toujours plus affinées, se retrouvent dans le travail qu'il a mené chez nous avec Yves Guiraud sur la normalisation quadratique [9]. Plus généralement, ces années nous ont permis de bénéficier de son attitude toujours généreuse et à l'écoute, et de sa volonté d'expliquer et de partager ses passions mathématiques, tel un grand chef cuisinier heureux de voir le sourire sur les visages des convives au moment de la dégustation.

Ces dernières années, ma relation avec Patrick avait pris un tour de plus en plus amical. J'ai eu la chance de les voir régulièrement, son épouse Arlette et lui, jusque dans les dernières semaines [6]. Son besoin d'activité était intact, qu'il s'agisse de corriger des pages Wikipedia sur les tresses, de fignoler des détails de finition dans la chambre d'ami qu'il avait refaite peu avant de tomber malade, ou de confectionner un cake délicieux : perfectionniste en toutes choses ! Le 17 juillet, il m'écrivait ceci : « Je prends un grand plaisir à rédiger un article sur les "règles de domino" qui unifie des types de normalisation divers. J'aime toujours autant mettre au point des lemmes esthétiques et compliqués. » C'est tout lui ! [7]

Une conférence dédiée à la mémoire de Patrick Dehornoy sera organisée à Caen du 9 au 11 septembre 2020. Le site web de la conférence `https://conf.lmno.cnrs.fr/Braids2020/` inclura une page de témoignages, contenant les versions complètes des témoignages ci-dessus ainsi que d'autres témoignages.

Références

[1] P. Dehornoy. « An application of ultrapowers to changing cofinality ». *J. Symbolic Logic* **48**, nº 2 (1983), p. 225-235. issn : 0022-4812. doi : 10.2307/2273541. url : https://doi.org/10.2307/2273541.

[2] P. Dehornoy. « Deux malentendus sur la théorie des ensembles ». *Les 5 minutes Lebesgue* (2018).

[3] P. Dehornoy. « From large cardinals to braids via distributive algebra ». *J. Knot Theory Ramifications* **4**, nº 1 (1995), p. 33-79. issn : 0218-2165. doi : 10.1142/S0218216595000041. url : https://doi.org/10.1142/S0218216595000041.

[4] P. Dehornoy. « Iterated ultrapowers and Prikry forcing ». *Ann. Math. Logic* **15**, nº 2 (1978), p. 109-160. issn : 0003-4843. doi : 10.1016/0003-4843(78)90018-9. url : https://doi.org/10.1016/0003-4843(78)90018-9.

[5] P. Dehornoy. « La théorie des ensembles cinquante ans après Cohen ». *Grenoble, Colloquium mathalp* (2018).

[6] P. Dehornoy. « Opérateurs différentiels et courbes elliptiques ». *Compositio Math.* **43**, nº 1 (1981), p. 71-99. issn : 0010-437X. url : http://www.numdam.org/item?id=CM_1981__43_1_71_0.

[7] P. Dehornoy. « Turing complexity of the ordinals ». *Inform. Process. Lett.* **23**, nº 4 (1986), p. 167-170. issn : 0020-0190. doi : 10.1016/0020-0190(86)90130-4. url : https://doi.org/10.1016/0020-0190(86)90130-4.

[8] P. Dehornoy. « Une autre application de la théorie des ensembles ». *Gaz. Math.* nº 69 (1996), p. 3-20. issn : 0224-8999.

[9] P. Dehornoy et Y. Guiraud. « Quadratic normalization in monoids ». *Internat. J. Algebra Comput.* **26**, nº 5 (2016), p. 935-972. issn : 0218-1967. doi : 10.1142/S0218196716500399. url : https://doi.org/10.1142/S0218196716500399.

[10] P. Dehornoy et V. van Oostrom. « Using groups for investigating rewrite systems ». *Math. Structures Comput. Sci.* **18**, nº 6 (2008), p. 1133-1167. issn : 0960-1295. doi : 10.1017/S0960129508007160. url : https://doi.org/10.1017/S0960129508007160.

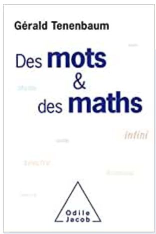
[11] P. Dehornoy et al. *Foundations of Garside theory*. **22**. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015, p. xviii+691. isbn : 978-3-03719-139-2. doi : 10.4171/139. url : https://doi.org/10.4171/139.

[12] P. Dehornoy et al. *Why are braids orderable?* **14**. Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]. Société Mathématique de France, Paris, 2002, p. xiv+190. isbn : 2-85629-135-X.

[13] F. A. Garside. « The braid group and other groups ». *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **20** (1969), p. 235-254. issn : 0033-5606. doi : 10.1093/qmath/20.1.235. url : https://doi.org/10.1093/qmath/20.1.235.

6. Son décès est survenu le le 4 septembre 2019.

7. La version complète de ce témoignage, intitulée *Patrick Dehornoy au prisme de l'informatique fondamentale*, et comprenant un développement technique, mais accessible, sur les ponts entre la théorie de la réécriture et les techniques développées par Patrick Dehornoy, est disponible sur le site de la smf : https://smf.emath.fr/publications/la-gazette-des-mathematiciens-164-avril-2020.



Des mots et des maths
Gérald Tenenbaum
Odile Jacob, 2019. 205 p. ISBN : 978-2-7381-4900-8

Il est parfois avancé que les mathématiques ne sont pas une science *mais un langage*. B. Mandelbrot, dans un entretien avec F. Arrabal, attribue l'origine de cette affirmation à Josiah Willard Gibbs : « "Les mathématiques sont un langage" est une boutade très précisément attribuable. Le très grand physicien Josiah Willard Gibbs, gloire de Yale, parlait très peu. Mais il assista à une réunion de faculté où on dissertait des langues vivantes obligatoires. Il a essayé de faire accepter les mathématiques comme langue vivante. Son effort a foiré, mais la boutade reste. Je crois qu'elle a beaucoup de vrai et beaucoup de faux. » (F. Arrabal, Intelligence, génie et humour du mathématicien Mandelbrot, `https://frama.link/Vhzu3GXR`).
Un langage est composé de mots : que sont les mots des mathématiques ? Lorsque des spécialistes, des experts, dans un domaine communiquent entre eux, ils utilisent nécessairement un vocabulaire spécialisé (un jargon ?). Ce vocabulaire peut contenir à la fois des mots nouveaux, le plus souvent incompréhensibles par l'individu non initié, et des mots « courants » mais employés avec un sens spécifique, le plus souvent... incompréhensible par l'individu non initié qui, même involontairement, pensera plutôt à la signification courante dudit mot. Les mathématiques ne font pas exception à la règle et l'on y emploie les deux sortes de mots. C'est ce que Gérald Tenenbaum se propose d'explorer dans un livre délicieux intitulé *Des mots et des maths*. L'auteur a choisi une présentation alphabétique d'une trentaine de mots, qu'il explique et qu'il enrichit des nombreux commentaires que sa vaste culture lui suggère : d'*Absolu* à *Zéro*, cette promenade ravira les destinataires du livre (venant des mathématiques – ou venant d'ailleurs). Par exemple dans le chapitre *A comme Anneau ou l'éternel retour* l'auteur s'interroge sur le choix par Hilbert de ce mot (*Ring* en allemand) en indiquant deux sens du terme (l'anneau des entiers relatifs, puis les anneaux d'entiers algébriques) mais aussi en parlant des anneaux de Saturne, et en citant aussi bien Brassens que Nietzsche. Au passage, on remarquera que le mot est « le même » en allemand, en français et en anglais, contrairement au mot *corps* étudié un peu plus loin dans le livre pour lequel l'anglais préfère utiliser *field* (ce qui fait que pour traduire le mot *corps* en anglais, il faut être attentif au contexte, y compris mathématique). Le mot *compact*, introduit par Fréchet, a lui un sens qui peut être assez différent de son sens courant : l'auteur compare la compacité d'un ensemble de deux points et celle de l'ensemble de Cantor, il parle aussi de *foule compacte* agglutinée autour d'un tribun improvisé que la police ne pourra pas *exfiltrer*, jouant ainsi sur le sens mathématique du mot *filtre*. On pourrait ajouter qu'une manière de réconcilier le comptage policier et celui des organisateurs lors d'une manifestation, est de dire que la foule des manifestants est... compacte – avec la caution des mathématiciens les moins politisés. L'entrée *dérivée*, où l'auteur cite Rimbaud, est l'occasion d'un bel aphorisme que nous ne résistons pas à citer ici : *Ainsi, en mathématiques, intégrer apparaît comme l'inverse naturel de dériver. Dans notre monde inégalitaire, cela donne à penser : il suffirait de s'en donner la peine pour que l'intégration mette à l'abri de la dérive*. Naturellement des mots comme *existence, forme, identité, impossible* contiennent aussi des commentaires beaux et profonds : indiquons sans rien dévoiler que dans le chapitre *I comme Identité, du pareil au même* sont cités à la fois Lautréamont, Cicéron, Poe, Lalande, Proust, Cronos et Jankélévitch. L'entrée *I comme Inconnue, désigner pour dévoiler* conduit l'auteur,

entre autres développements, à s'interroger sur le féminin utilisé pour ce mot, alors qu'on aurait pu dire « un indéterminé » ou « un (nombre) inconnu ». Le chapitre *I comme infini, ou penser sans limites* cite Rousseau, Handke, Wenders, Pascal (bien sûr), Zénon, Hegel, Cantor, Aristote, sans oublier Baudelaire :

Que tu viennes du ciel ou de l'enfer, qu'importe,
Ô beauté, monstre énorme, effrayant, ingénu !
Si ton œil, ton souris, ton pied, m'ouvrent la porte
D'un Infini que j'aime et n'ai jamais connu.

Une mention spéciale pour le mot *normal*. Dans le chapitre *N comme Normal, de l'aplomb à l'usage*, l'auteur revient sur l'origine mathématique de ce mot : la *normale* est la perpendiculaire à la tangente en un point d'une courbe ; du latin *norma* l'équerre, puis l'angle *droit* va représenter la *règle* avec l'ambiguïté de ce mot qui a deux sens (l'ensemble des préceptes – la *norme*, ou bien la pratique usuelle ?), ces deux sens dont le mot *normal* a hérité y compris en mathématiques (que l'on pense aux sous-groupes distingués – *normal subgroups* en anglais – mais aussi aux nombres *normaux*)... D'ailleurs un président de la République qui se disait « normal » voulait-il se définir comme un « Français moyen » ou comme un « Français... distingué » ?
Mais ce sont tous les mots qu'il faudrait ainsi citer, avec les commentaires mathématiques, historiques, linguistiques, littéraires, philosophiques..., desquels l'humour est loin d'être absent (citons seulement le titre du dernier chapitre *Z comme Zéro surgi hors de la nuit*). On peut même être tenté d'en ajouter d'autres (mais, sans la verve et la culture de l'auteur, l'exercice risque d'être un peu plat). Notons aussi que ce livre, s'il aborde certaines différences entre les langues, ne parle pas de l'importation brutale (et inconsciente ?) de mots anglais en français qui se fait souvent sans le « Sprachgefühl » indispensable : on commence à entendre *l'espace vectoriel est généré par* au lieu du seul correct *l'espace vectoriel est engendré par* ; on entend beaucoup *premier à* (prime to) au lieu du traditionnel *premier avec* ; un dernier exemple particulièrement hideux est l'utilisation en logique ou en informatique théorique de *satisfiable* au lieu du seul correct *satisfaisable* (j'ai même entendu à plusieurs reprises *la clause est satisfiée* au lieu de *la clause est satisfaite* !).
En résumé, il est vivement conseillé de lire et de relire ce livre, de le méditer, voire de (tenter de) l'étendre : en plus du grand plaisir que procure sa lecture, il peut contribuer à une salutaire – voire indispensable – réflexion lors du choix ou de la création de mots nouveaux en mathématiques.

Jean-Paul Allouche
cnrs, Institut de Mathématiques de Jussieu-prg, Paris

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.