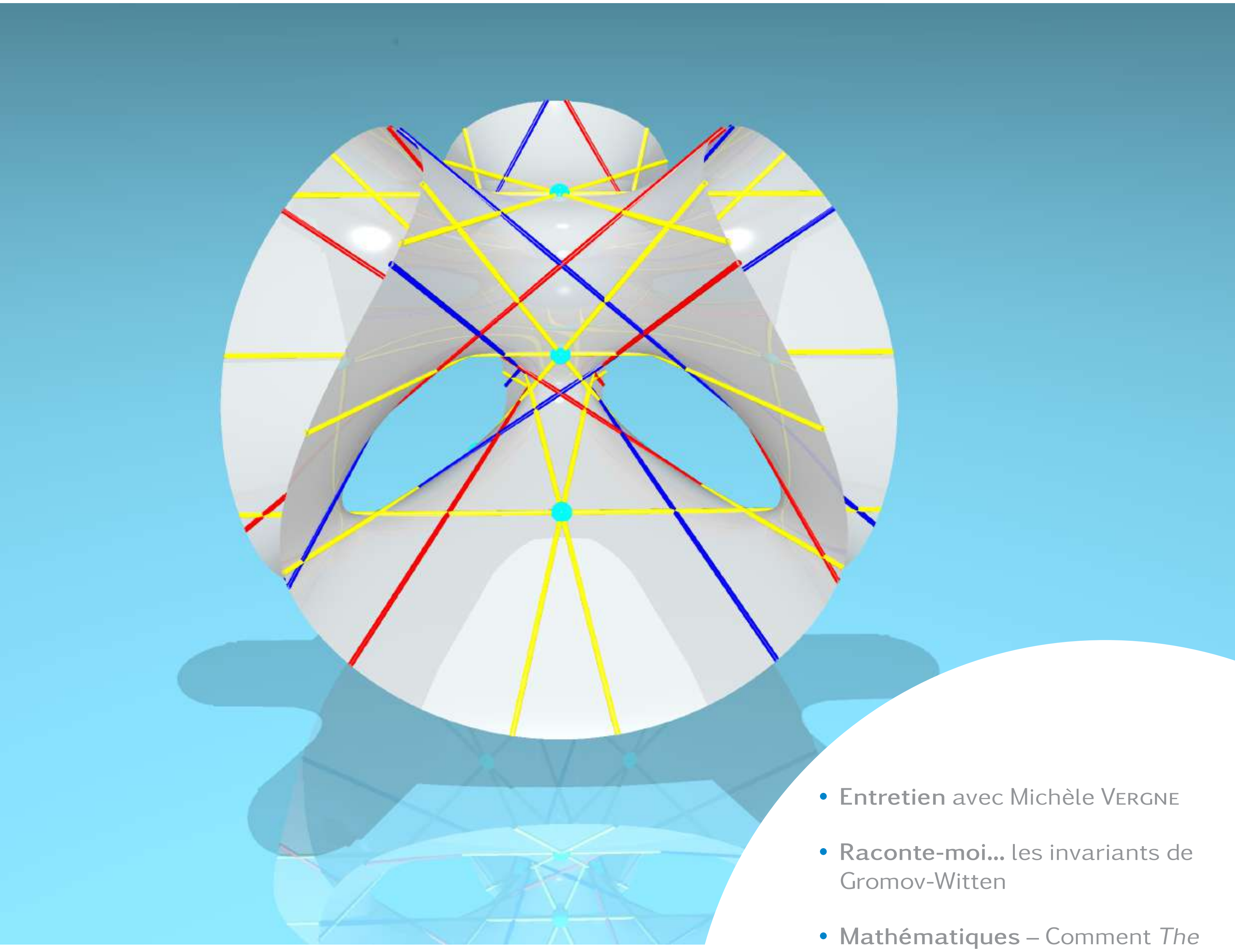
JUILLET 2020 – N° 165

la Gazette des Mathématiciens



- **Entretien** avec Michèle Vergne
- **Raconte-moi...** les invariants de Gromov-Witten
- **Mathématiques** – Comment *The Analyst* devint les *Annals of mathematics*
- **Mathématiques** – Jeux, évolution et réseaux informatiques

Société Mathématique de France
SMF

la Gazette des Mathématiciens

Comité de rédaction

Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire Ropartz
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris cedex 05
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96
gazette@smf.emath.fr – http://smf.emath.fr

Directeur de la publication : Fabien Durand

ISSN : 0224-8999

Société Mathématique de France

À propos de la couverture. La couverture représente la surface de Clebsch, qui est le lieu d'annulation d'un polynôme de degré 3 dans $\mathbb{R}P^3$. Elle contient exactement 27 droites réelles. Il s'avère que ce nombre est un invariant de GW de la surface complexe pour le genre 0. Les 27 droites réelles sont les parties réelles des 27 droites complexes que compte l'invariant (image basée sur un travail précédent d'Alain Esculier). (crédit : Anton Betten).

la Gazette des Mathématiciens

N° 165

Éditorial

Si pour une raison étrange vous êtes dans l'obligation fort douloureuse de ne lire qu'un seul article de cette *Gazette*, choisissez sans aucune hésitation l'interview de Michèle Vergne. La simplicité, la profondeur et l'honnêteté qui se dégagent des réponses sont captivantes. La célèbre mathématicienne retrace avec finesse et pertinence son parcours, de son statut de *fille d'immigrés (de Haute Corrèze)* à Paris jusqu'à son plaisir toujours présent de faire des mathématiques, en passant par toutes les personnes qui l'ont marquée, mais aussi ses déceptions et ses enthousiasmes. Comme à mon habitude, voici quelques questions pour vous appâter : quel mathématicien est considéré par l'académicienne comme un *enfant gâté* ? Quel autre est qualifié de *féministe convaincu (bien en avance sur son temps)* ? Quel est *le plus beau et le plus inutile* des théorèmes de M. Vergne, selon elle ?

Mikhaïl Gromov, dans une autre superbe interview, mais en 2009 et dans les *Newsletter de l'EMS*, affirmait avec une modestie surréaliste au sujet de son fameux article de 1985 qui a révolutionné la géométrie symplectique : *Le reste [de ses travaux] c'était simplement de comprendre ce qui était déjà connu et de faire en sorte que ça paraisse une sorte de découverte*. Cette bonne blague à part, en 1988 le physicien théoricien Edward Witten se saisissait de l'article de 1985 au prisme de la théorie des cordes. Cette fusion baroque a engendré l'un des concepts les plus profonds de la géométrie, les invariants de Gromov-Witten. Un Raconte-moi nous immerge dans ce fascinant univers mêlant topologie et holomorphie. Pour être un peu malhonnête mais vendeur, on pourrait dire que l'affaire commence par le fait que par deux points passe une unique droite...

Un article sur la théorie des jeux commence par rappeler une phrase de Bertrand Russell, qui résonne avec cette association entre mathématiques et physique : *Les mathématiques sont nées le jour où l'on s'est rendu compte qu'il y avait quelque chose de commun entre un couple de faisans et une paire de claques*. Les auteurs mettent en scène cette remarque cocasse et nous embarquent dans un voyage où la théorie des jeux agit magiquement sur des domaines aussi disparates que le réseau internet et l'évolution. L'article est rythmé par des exemples simples et sympathiques, où le couple le plus fameux de l'informatique, j'ai nommé Alice et Bob bien sûr, se donne rendez-vous mais a oublié où (il est vrai qu'ils communiquent sans relâche depuis bien longtemps), puis passe le témoin à des joueurs de foot un peu binaires mais *rationnels*, *égoïstes* et *intelligents*.

Savez-vous qu'*Annals of mathematics* trouve ses origines dans une éclipse totale de Soleil de 1869 vue au fin fond de l'Iowa ? Que c'est une femme qui présentait les articles intéressants du *Journal de Crelle* dans la revue qui allait se muer en la plus célèbre revue de mathématiques ? Que dans ses débuts, *Annals* pouvait publier des articles sur la construction des câbles ? N'hésitez pas à faire un plongeon, avec l'article que nous publions ici, dans une épopée américaine d'un autre type. Aux antipodes d'*Annals*, vous pourrez lire en fin de numéro une tribune appelant à l'existence d'une revue libre, électronique, et moins élitiste que les revues actuelles.

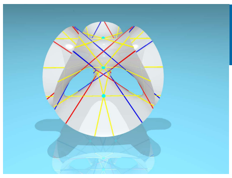
Le rapport moral de la SMF pour l'année 2019-2020 apporte un recul important sur les activités de la SMF, nombreuses et parfois méconnues. Il permet de réaliser à quel point notre association est un maillon indispensable des mathématiques en France et dans le monde, des programmes scolaires aux congrès internationaux, en passant par le CIRM, les publications, ou encore les animations à destination du grand public. J'en profite pour remercier chaleureusement Stéphane Seuret pour sa coopération heureuse avec la *Gazette* ces dernières années, et souhaite la bienvenue à Fabien Durand.

Nous publions enfin un carnet riche en mathématiques et en souvenirs autour de Lucien Szpiro, décédé à l'âge de 78 ans en avril dernier. Ce témoignage d'un ancien élève puis ami décrit l'imbrication d'un mathématicien avec son domaine, ses intuitions, ses succès, sa façon de transmettre sa vision des mathématiques.

Au nom de l'équipe de la *Gazette*, je vous souhaite une bonne lecture déconfinée et estivale.

Damien Gayet

la Gazette des Mathématiciens



N° 165

Sommaire

la Gazette des Mathématiciens

Société Mathématique de France SMF

Nº 165

Mot du président

Chères et chers collègues,

Comme chaque année au mois de juin le Conseil d'Administration de la SMF renouvelle un tiers de ses membres, soit huit personnes, puis élit son président. Je suis très honoré de la confiance que m'a accordée le CA de la SMF lors de ce vote. Je tiens à remercier Stéphane Seuret à qui je succède à la présidence de la SMF. Il m'a fait découvrir le fonctionnement interne de la SMF, ses activités, son personnel et ses équipes. La très grande qualité de cet environnement humain a grandement concouru à ma décision de me lancer dans ce qui ressemble pour moi à une grande aventure. Je remercie également les membres sortants du CA pour avoir consacré trois années à la SMF.

La période que nous venons de traverser fut éprouvante pour toutes et tous, parfois dramatique malheureusement. Notre vie quotidienne a été totalement bouleversée. Nos activités d'enseignement et de recherche ont dû être complètement revisitées. Ceci a demandé aux acteurs du monde éducatif un surcroît de travail très important. La vertu d'avoir été contraint.e.s d'enseigner à distance pendant 3 mois, par le biais de nombreux outils numériques, est que le corps enseignant, les élèves, les étudiants, nos familles peuvent désormais se faire une idée assez précise des qualités de ce type d'enseignement. Il faudra recueillir des témoignages, faire des enquêtes et les analyser. La SMF y participe déjà. Mais il me semble d'ores et déjà que le constat minimal est que cela doit être réservé à des situations exceptionnelles et très particulières. Il en va de même pour l'utilisation partielle, hybride, de ces dispositifs. Pour autant les enseignants n'ont jamais rejeté les outils numériques et les utilisent avec tact et parcimonie depuis de nombreuses années en les intégrant dans leurs cours à la lumière de retours d'expériences basés sur le long terme. Le « long terme » n'est pas à la mode il est vrai. Je pense ici à la réforme dite LPPR. Je suis convaincu que de nouvelles et intéressantes pratiques issues de ce confinement vont se mettre en place et se disséminer petit à petit, de collègues à collègues, sans brutalité. La SMF saura en faire écho.

Au CIRM le coup d'arrêt fut brutal. En cette fin de mois de juin, ce sont au moins 43 événements qui ont été annulés et 2180 inscrits qui n'auront pu venir. Certains colloques ont pu être déplacés en 2021, d'autres ont été réalisés en visio-conférences de qualité grâce aux équipes techniques et à son directeur, Patrick Foulon. De multiples scénarios de reprises d'activité ont été imaginés tout au long de la crise sanitaire. La reprise (partielle ?) des activités du CIRM est dépendante de l'évolution de la crise sanitaire. Ce sera le nouveau directeur, Pascal Hubert, déjà très impliqué, qui devra réactiver ce bel endroit que nous apprécions tant.

Compte tenu des circonstances, le troisième congrès de la SMF qui devait avoir lieu à Nancy a dû être annulé. Je remercie néanmoins les organisateurs pour le travail préparatoire accompli.

Sous la présidence de Stéphane Seuret de grands changements, de grandes modernisations, ont été opérés : une refonte totale du système informatique et une réorganisation de la maison d'édition. La SMF s'est ainsi dotée d'outils performants permettant un meilleur pilotage de ses actions et de ses finances. Ainsi certaines mutations peuvent être envisagées. La SMF réfléchit à un nouveau modèle économique reposant sur l'idée de Science Ouverte (mouvement qui cherche à rendre la recherche scientifique et les données qu'elle produit accessibles à toutes et à tous et dans tous les niveaux de la société). Il ne faut pas oublier que la SMF a des salarié.e.s et qu'un tel changement ne doit pas les affecter. Le modèle Subscribe to Open prôné par l'EMS semble pouvoir allier ces deux impératifs. Un premier projet de cette nature devrait voir le jour d'ici à la fin de l'année.

La SMF est sur de très nombreux fronts, sans doute absente sur certains ou pas assez incisive. La SMF appartient à ses adhérents. Si vous avez des critiques, des idées, vous pouvez les faire remonter. Vous connaissez certainement au moins une personne dans le Conseil d'administration. Soyez constructifs, voire engagé.e.s. Nous sommes à votre écoute.

J'ai conscience que le Président de la SMF doit porter la voix de la communauté mathématique française. Je serai vigilant et travaillerai avec enthousiasme pour vous représenter. Ce premier semestre nous a éreintés psychologiquement et physiquement, alors je vous souhaite d'excellentes vacances d'été.

Le 3 juillet 2020

Fabien Durand, président de la SMF

Rapport moral

1. Affaires générales

1.1 – Situation générale

L'année 2019 a été une année de consolidation pour la SMF, durant laquelle les chantiers de rénovation menés lors des mandats précédents ont été achevés et ont commencé à porter leurs fruits.

Tout d'abord, après plusieurs mois de négociations et échanges avec le ministère de l'intérieur et le ministère de l'enseignement supérieur, nos nouveaux statuts ont été validés par le Conseil d'État le 10 septembre 2019 et publiés au *Journal Officiel* le 18 octobre 2019. Cela nous permet d'être à jour légalement et de proposer dorénavant un vote électronique pour le conseil d'administration.

Le CIRM a terminé son extension, qui a été inaugurée le 16 octobre 2019. Rappelons que la SMF a contribué à hauteur de 800 000 euros pour le projet 2R-CIRM d'extension du bâtiment de l'Annexe et de 1 200 000 euros pour la rénovation du restaurant. Cela permet au CIRM depuis juillet 2019 d'accueillir, en plus des conférences classiques, simultanément un deuxième événement d'une quarantaine de personnes, toujours dans des conditions aussi exceptionnelles.

Ensuite, le système informatique et le site web qui ont été entièrement repensés en 2018 (voir Section 1.5), ont continué à évoluer pour s'adapter aux besoins de nos adhérents et abonnés, et également aux personnels de la SMF. Les effets de cette refonte sont multiples. Tout d'abord, nos données sont maintenant stockées dans des serveurs virtuels sécurisés et accessibles de partout, ce qui est fondamental pour notre fonctionnement (les informations sont mieux partagées, et le télétravail est maintenant possible). La fréquentation de notre site a bondi depuis cette refonte, comme notre nombre d'adhérents. Enfin, le nombre de soumissions à nos revues a augmenté de plus de 50 pour cent en un an. Notons également que la récente réorganisation de notre secteur édition nous permet à présent d'avoir une régularité de sortie de nos publications.

Cette année encore, la SMF a été active dans la vie de la communauté mathématique avec de nombreuses interventions, courriers et manifestes autour de l'enseignement et de la formation des enseignants, du financement de la recherche, des droits humains et des publications. La SMF, souvent accompagnée des sociétés savantes avec lesquelles elle collabore, a été auditionnée au Sénat, à l'Assemblée nationale, à Matignon ou dans des cabinets ministériels, notamment sur les sujets d'enseignement et autour de la loi de programmation pluri-annuelle de la recherche. Même si les effets ne se font pas ressentir immédiatement, cela nous permet de porter la voix des mathématiques auprès de nos responsables politiques.

Enfin, nous continuons à développer nos activités de diffusion, avec en 2019 les premières sessions du nouveau cycle « Mathématiques étonnantes » et les 2 premières semaines SMF-CIRM, financées en partie par la SMF. De plus, en 2019 la SMF a été contactée pour succéder à la Fondation des Sciences Mathématiques de Paris pour la gestion du programme MathC2+, qui propose des soutiens financiers pour des stages en mathématiques de collégien.ne.s et lycéen.ne.s. Cela viendra compléter en 2020 l'éventail de nos actions, nous permettant à présent de promouvoir les mathématiques à tous les niveaux entre la classe de quatrième et l'après-thèse.

Après les investissements conséquents consentis les dernières années, cette année 2019, plus stable, a permis d'évaluer la bonne santé financière de notre association, malgré les changements dans le monde de l'édition et les difficultés qui s'annoncent suite à la crise sanitaire de 2020.

En effet, depuis début mars le fonctionnement de la SMF est impacté par les mesures de confinement. Tout d'abord à Paris, où l'IHP est fermé, ce qui a forcé tous les personnels à s'adapter en quelques jours au télétravail. La cellule de diffusion à Luminy a également fermé ses portes, l'accès au campus étant très limité et les réceptions et envois de colis impossibles. Enfin, le CIRM n'accueille plus de conférences depuis le 16 mars, et malgré le télétravail et le remarquable dévouement de tous les personnels du CIRM, n'a pas encore repris ses activités à l'heure actuelle. Des mesures de chômage partiel (validées par Pôle Emploi) ont été prises, adaptées à tous les personnels et leurs tâches. Il est encore trop tôt pour mesurer les conséquences financières, bien réelles et importantes, que cette crise engendrera, et toutes les équipes et les bénévoles sont mobilisés pour faire fonctionner la SMF et le CIRM au mieux durant cette période difficile.

1.2 – Adhérents

La SMF comptait au 31 décembre 2019 1841 adhérent.e.s, à comparer à 1783 en 2018, 1829 en 2017 et 1830 en 2016.

Ainsi, pour la première fois depuis de nombreuses années, notre nombre d'adhérents augmente, nous ramenant à la situation de 2015. C'est une grande satisfaction, que l'on peut attribuer à plusieurs facteurs :

– la SMF n'augmente pas le montant des cotisations de ses adhérents, et cette politique sera prolongée jusqu'en 2021. De plus, nos adhérents jouissent d'un accès électronique gratuit aux manuscrits des exposés Bourbaki ;
– depuis trois ans, les doctorant.e.s bénéficient de 3 années d'adhésion gratuite. Nous avons dorénavant environ 125 doctorants.e.s profitant de cette opportunité, dont il faudrait encore étendre la publicité ;
– nous avons travaillé sur la publicité de nos actions sur l'enseignement, la recherche, la diffusion, etc. et peut-être que cela a contribué à motiver des collègues pour l'adhésion à la SMF.

Cette hausse a cependant nécessité la forte mobilisation du Bureau et des personnels. Nous espérons que cette tendance se maintiendra dans les années à venir.

1.3 – Activités avec d'autres sociétés savantes

La SMF continue à travailler de concert avec les sociétés savantes (SMAI et SFdS) et les associations liées aux mathématiques (Animath, APMEP,...) et mène avec elles de nombreuses activités qui seront décrites plus loin dans ce rapport moral.

Depuis 2018, la SMF collabore avec un collectif de sociétés savantes dont l'objectif est de porter la parole scientifique plus haut dans la vie politique française et les médias. Autour d'un « noyau dur » de 9 sociétés, dont la SMF fait partie, sont regroupées une cinquantaine de sociétés, qui ensemble essaient de rédiger des lettres, manifestes, et rapports communs. Les tribunes écrites par ce collectif ont d'autant plus d'impact qu'elles sont ratifiées par des représentants de domaines variés, allant des sciences humaines et sociales aux sciences plus fondamentales. Nous nous sommes exprimés notamment sur le financement de la recherche en Europe, pour le soutien de collègues en difficulté à l'étranger, sur la situation précaire de nombreux chercheurs en France, et surtout sur la loi de programmation pluri-annuelle de la recherche, qui a été un grand enjeu de l'année 2019. Une réunion physique des sociétés a eu lieu en novembre 2019, et il est prévu en 2020 de créer une association regroupant les sociétés savantes académiques. La diversité des sociétés membres, ainsi que leurs effectifs importants (plus de 45 000 scientifiques cumulés en France), donnera un poids sans précédent à nos prises de position.

Cette action collective n'empêche évidemment pas la SMF d'agir plus spécifiquement au sein des mathématiques, comme ce rapport le démontre.

1.4 – Refonte du système informatique et du site web

En décembre 2018, et au terme d'un projet long de plus de 30 mois, la SMF a effectué sa transformation numérique. Les bénéfices pour l'association sont multiples, et ont déjà été évoqués dans les rapports moraux précédents.

Une association telle que la nôtre doit investir régulièrement pour maintenir son système à jour techniquement, et le faire évoluer au gré des demandes des utilisateurs (personnels et bénévoles de la SMF, abonnés, adhérents, visiteurs de notre site) et des nouvelles normes de sécurité, de diffusion, et d'usage. Ces investissements sont plus nombreux et plus importants qu'auparavant, il faut dorénavant les prévoir explicitement dans nos budgets.

1.5 – Droits humains

La SMF, en collaboration avec la SMAI et la SFdS, a poursuivi sa mobilisation pour soutenir les universitaires de Turquie et plus particulièrement notre collègue Tuna Altinel, enseignant-chercheur à l'université Claude Bernard Lyon 1 au sein de l'Institut Camille Jordan. Dès l'annonce de la confiscation de son passeport à son arrivée à Istanbul en avril 2019, la SMF et la SMAI ont adressé une lettre au président de la République pour alerter sur sa situation. Tuna Altinel, déjà poursuivi en tant que signataire de la pétition *Academics for peace*, a été emprisonné en mai 2019 au motif de « propagande pour une organisation terroriste ». La SMF a adopté une motion de soutien et relayé les différentes actions de son comité de soutien : pétition, rassemblements, envois de cartes postales,... Placé en liberté provisoire après 81 jours de prison, Tuna Altinel a été acquitté pour son premier procès en septembre 2019 dans une vague d'acquittements des universitaires pour la paix qui a également permis ceux des quatre premiers signataires dont Kivanç Ersoy, après une dizaine d'audiences depuis 2016. Un acquittement a également été prononcé dans le deuxième procès de Tuna Altinel en janvier 2020 mais le procureur a malheureusement intenté un pourvoi en cassation demandant l'annulation de ce jugement en février 2020.

1.6 – Parité

Dans l'année écoulée, la SMF a répertorié différentes actions concernant la parité entreprises d'une part dans les laboratoires ou les instituts de recherche et d'autre part dans les comités de sélection. Ces deux volets de la lutte contre les inégalités ont beaucoup évolué ces derniers temps. En effet, cette année, de nombreux laboratoires ont mis en place des commissions chargées de prendre en main la question de la parité et certains ont même mené des études assez précises de l'évolution de la place des mathématiciennes au sein de leur laboratoire. Au niveau des universités ont été créées les cellules de lutte contre les violences sexuelles ou sexistes. En amont du recrutement, certains comités ont instauré des chartes, d'autres ont utilisé des vidéos pédagogiques pour lutter contre les biais qui peuvent orienter les choix des membres d'un jury. Les interviews des différents acteurs ont montré qu'ils comptaient sur la SMF pour rester vigilante au sujet de cet enjeu primordial qu'est l'égalité entre les femmes et les hommes. Un débat « Mobilité et parité » a été animé par le Président de la SMF lors de la « Journée parité » le 10 juillet 2019 à l'IHP.

2. Gazette

B. Adamczewski a quitté le comité de rédaction de la *Gazette* après le numéro d'avril 2020. Nous rappelons que Boris avait été chargé de refondre la *Gazette* pour la rendre plus accessible, plus agréable, plus sélective et plus dynamique. De très nombreux témoignages de lectrices et lecteurs démontrent que cette transformation a bien été effectuée. Nous l'en remercions chaleureusement.

Cette année écoulée est dans la continuité des précédentes, avec, en particulier et de façon notable, des images de couvertures détonnantes. On a vu par exemple la *Gazette* sélectionnée pour le présentoir de la bibliothèque... du MSRI à Berkeley. Parmi les nouveautés, les interviews de personnalités travaillant en France et qui ont marqué leur domaine se poursuivent, avec celle de D. Ruelle et B. Malgrange. La prochaine sera celle d'une mathématicienne. Notons également dans un autre style l'interview de J. Pesenti à New-York, docteur en géométrie algébrique de Paris 11 et... chef de l'intelligence artificielle chez Facebook.

Les articles de mathématiques ont été nombreux, avec toujours l'idée de varier le plus largement possible les thèmes et de les rendre lisibles par toute notre communauté. On a donc vu, entre autres, de la génétique, de la géométrie algébrique, des équations stochastiques, de la mécanique des fluides ou encore de la géométrie classique et de l'histoire des mathématiques. Le comité fait beaucoup d'efforts pour réduire la difficulté des articles, et espère que cet esprit, qui transparaît maintenant dans les articles, diffusera en amont chez les autrices et auteurs.

La vie de la communauté n'a pas été oubliée avec les rapports des deux instances du CNU, un point dynamique sur la section 41 du CNRS, un dossier sur le mythique CIRM avec une interview de son directeur, une synthèse sur la maintenant incontournable journée parité à l'IHP, des tribunes vivifiantes, entre autres. Nous avons publié les carnets de collègues décédés : J.-M. Fontaine, J.-P. Wintenberger, C. Mauduit et P. Dehornoy.

Pour terminer, nous saluons l'arrivée dans le comité de deux nouveaux éléments : la Lilloise M. Maïda, qui vient combler un manque important du comité côté probabilités, et le Nantais G. Rivière, analyste et dynamicien.

3. Conseil scientifique

Le Conseil scientifique a été renouvelé partiellement début 2019 : il a vu l'arrivée de G. Besson comme secrétaire (Géométrie, Grenoble), de J. Delon (Mathématiques appliquées, Paris Descartes) et de D. Picard (Probabilités, Paris Diderot) ainsi que le départ d'A. Desolneux, S. Jaffard et C. Prieur.

Plus récemment, c'est G. Giacomin, F. Pène et S. Salmon qui ont remplacé M.-C. Arnaud, V. Bonnaillie-Noël et J. Garnier.

Le fonctionnement du Conseil s'effectue essentiellement par courrier. Mais une réunion s'est tenue le 18 mars 2019 à l'IHP, pour discuter de l'ensemble de ses activités et réfléchir aux critères qu'il utilise lors de ses décisions. La première moitié de cette réunion a eu lieu avec l'intervention, en vidéo conférence, de F. Bayart, responsable des publications de la SMF. Elle a permis de discuter des critères de renouvellement des membres des comités de rédaction avec l'objectif de développer une stratégie internationale. Un autre point d'attention a été le montage de dossiers de candidatures par le Conseil scientifique et la SMF aux prix mathématiques internationaux. La SMF est souvent sollicitée et souhaiterait soutenir des candidats issus de l'ensemble de la communauté mathématique française, notamment en mettant en valeur des chercheuses et chercheurs dont les travaux n'ont pas encore la reconnaissance méritée. Enfin, en période normale le conseil scientifique de la SMF est appelé à se prononcer sur le parrainage des colloques lorsqu'il est souhaité par les organisateurs. Des critères simples, en particulier les questions liées à la parité, permettent de donner une réponse, positive ou négative, rapide. En 2020, la réunion physique annuelle n'a pas pu avoir lieu en raison du confinement, le travail du conseil a pu toutefois se poursuivre.

4. Le pôle de Luminy

4.1 – La maison de la SMF

Son rôle est de prendre en charge les publications de la SMF envoyées par les imprimeurs (réception, stockage, expédition, vente au numéro, lien entre le routeur et la SMF). Elle gère également l'envoi des exemplaires aux auteurs, à l'American Mathematical Society et s'occupe des réclamations.

La maison de la SMF travaille en étroite collaboration avec les secteurs des publications, des publicités et de la comptabilité.

L'équipe de la maison de la SMF est constituée de deux salariés : C. Munusami, responsable de l'équipe et M.-F. Koussémon. Cette dernière présente la SMF aux nouveaux congressistes du CIRM en début de semaine, tient un stand de vente des publications de la SMF chaque mardi et jeudi et contribue enfin à une présentation de qualité de nos ouvrages dans l'enceinte du CIRM. Depuis septembre 2018, elle a entièrement en charge la gestion éditoriale des *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* pour laquelle elle utilise le logiciel OJS (Open Journal System) développé par PKP (Public Knowledge Project). Cette activité pour M.-F. Koussémon a consolidé le lien entre la cellule de Luminy et le siège de la SMF à Paris.

En 2019, les ventes d'ouvrages sur place se montent à 6500 euros (5500 euros en 2018), ce qui confirme l'augmentation sensible détectée de janvier à avril 2019. Il faut s'attendre à une forte chute en 2020 compte tenu de la situation sanitaire.

Fin 2019, environ deux tiers des abonnements pour 2020 étaient déjà saisis par C. Munusami. La cellule tient à remercier vivement le personnel de Paris qui est venu prêter main forte à Marseille pour les travaux d'inventaire, et plus particulièrement M. Rodrigues.

Nous mettons toujours à disposition du CIRM, pendant les travaux d'extension effectués en 2017-2019, une salle au rez-de-chaussée.

4.2 – CIRM 2019

Fréquentation

Concernant le nombre de visiteurs, le CIRM demeure le plus grand centre d'accueil de conférences en mathématiques dans le monde. Le nombre total de participants en 2019 a atteint le chiffre record de 4735 (contre 3421 en 2018). Le CIRM est resté ouvert durant 50 semaines et a permis l'organisation de 95 événements.

Le nombre total de participants provenant d'institutions étrangères a été de 53%, encore en augmentation par rapport à l'année passée (52%). Sur ce total, le nombre de mathématiciennes au CIRM a atteint 20% de participantes en 2019, soit en légère baisse.

Le Conseil scientifique, présidé par F. Dal'bo (Rennes), a été largement renouvelé début 2019. Il compte 20 membres, est à parité avec 10 femmes et très international puisqu'il compte la moitié d'experts étrangers. Ceci est, pour l'instant, unique dans le cadre des conseils scientifiques des instituts partenaires à l'international.

Le CIRM bénéficie toujours du soutien renforcé (depuis 2012) de l'INSMI [1], d'une dotation du MESRI, de dotations des collectivité locales (Région et Ville) ainsi que de financements des laboratoires d'excellence CARMIN et ARCHIMEDE qui apportent un complément financier important et nécessaire lui permettant de concurrencer les meilleurs centres d'accueil internationaux (qui reçoivent souvent des financements plus importants). Le laboratoire d'excellence CARMIN a été renouvelé suite à l'acceptation du dossier préparé conjointement par les quatre instituts partenaires (CIMPA, CIRM, IHES et IHP). De nouvelles collaborations entre le CIRM et le CIMPA sont prévues dès 2020.

Bilan des activités scientifiques 2019

Sur un total de 50 semaines d'activités, le centre a accueilli :

- deux semestres de Chaire Jean-Morlet dont les rencontres apparaissent parmi les catégories qui suivent;
- 38 conférences et écoles de recherche;
- 2 sessions longue durée de 6 semaines (CEMRACS) et 5 semaines (mois thématique);
- 14 conférences nouveaux programmes;
- 2 semaines du Programme Interface;
- 3 programmes pluri-annuels;
- 13 workshops;
- 23 recherches en binôme.

La Chaire Jean-Morlet. [2] La Chaire Jean-Morlet (dont on rappelle que le poste et le salaire dépendent d'Aix-Marseille Université) continue d'attirer des leaders scientifiques du monde entier, en proposant des programmes de grande qualité. Le nombre croissant de chercheurs étrangers visitant le CIRM a dépassé les 70% dans ce programme cette année. Entre 2013 et fin 2019, la Chaire a accueilli 2650 participants. Les binômes ont sorti plus de 80 publications (articles), 4 ouvrages ont déjà paru dans la collection SMF-Springer « Jean-Morlet Series » et 2 sont en cours de publication.

- Semestre 1 : janvier à juin 2019 - T. Grava (SISSA et université de Bristol) et A. Bufetov (CNRS, Aix-Marseille Université-I2M), titulaire d'une Bourse ERC Consolidator. Thème : l'intégrabilité et l'aléatoire en physique mathématique.
- Semestre 2 : juillet 2019 à décembre 2019 - M. Pollicott (Université de Warwick), titulaire d'une Bourse ERC Advanced et S. Vaienti (CPT, université de Toulon). Thème : formalisme thermodynamique, applications aux probabilités, à la géométrie et aux fractales.

Comme souvent, le financement de la Chaire Jean-Morlet a été complété par des soutiens étrangers conséquents : NSF, CMI, SISSA, EPSRC. Le soutien de la NSF cette année pour la Chaire a atteint plus de 55 000 dollars.

LabEx CARMIN. Ont été soutenus cette année :

- 7 écoles et rencontres jeunes chercheurs;
- 5 semaines du mois thématique;
- 4 événements Chaire Jean-Morlet;
- 2 écoles CIRM-IHP;
- 2 semaines du Programme Interface;
- la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle (5 conférences filmées chaque semaine) qui compte aujourd'hui plus de 1500 vidéos dont 313 indexées et chapitrées. Le fonds ainsi constitué contient des exposés de recherche avec indexation par mots clés, des films et interviews grand public et des films thématiques. Toutes ces vidéos sont dotées de DOI et sont téléchargeables.

LabEx ARCHIMEDE. Ont été soutenus cette année :

- 20 rencontres labellisées au total parmi lesquelles 9 conférences et écoles, le mois thématique de 5 semaines et la Chaire Jean-Morlet.

Une offre scientifique élargie. Dans le cadre de son extension immobilière, de nouveaux programmes ont été proposés dans les appels d'offres :

- programme pluriannuel Mathématiques;
- programme pluriannuel Mathématiques en Interactions;
- programme Interface avec l'industrie;
- semaines soutenues par la SMF;
- International Research in Groups (IRIGS).

1. Institut national des sciences mathématiques et de leurs interactions.
2. www.chairejeanmorlet.com

Le programme Interface – Formation de haut niveau en immersion pour les acteurs du monde économique – a organisé 3 sessions 2019 (sur 2 semaines) portant sur « Optimisation stochastique pour les grands systèmes » et « Apprentissage Machine ». Son comité de pilotage a été présidé par M. Esteban (Ceremade), avec comme Vice-président J.-P. Tual (Industrie-Gemalto). Des représentants des tutelles, des sociétés savantes, des labex et quatre industriels ont participé à ce comité.

Il est important de noter que le nombre total de participants a surpassé la projection prévisionnelle de 4666 participants attendus. Parmi ceux-ci, près de 1000 l'ont été dans les nouveaux programmes.

Immobilier : projet 2R-CIRM

Le projet 2R-CIRM a été inscrit dans le CPER[3] en juin 2015. La maîtrise d'ouvrage a été confiée au CNRS. Suite à un concours d'architectes lancé en décembre 2015, un projet a été retenu en juin 2016. Le permis de construire pour le projet a été déposé en mars et obtenu en août 2017. Les travaux ont débuté en avril 2018. La partie hôtelière du bâtiment a été livrée au premier trimestre 2019. La passerelle destinée à accueillir les conférences a été ouverte en août 2019. Le bâtiment 2R-CIRM comprend :

- une nouvelle salle de conférences de près de 100 places ;
- une salle de quarante places ;
- 49 chambres dont trois pour personnes à mobilité réduite.

Le coût global (construction ; prestations intellectuelles ; études ; aléas et frais divers) a été chiffré à 3,257 M€ HT dont 800 K€ financés par la SMF. Ce montant n'inclut pas tous les équipements. Le projet a été inauguré par les financeurs et tutelles le 16 octobre 2019.

Immobilier : projet Extension du Restaurant

La maîtrise d'ouvrage a été portée par la SMF. Pour assurer la synergie complète des projets du CIRM, il a été décidé de confier la maîtrise d'œuvre au même cabinet d'architecture que pour le projet 2R-CIRM. Il s'agit du cabinet AWA (architecte J. Wafflart). Le permis de construire a été déposé en juillet et obtenu en décembre 2017. Le restaurant 'nouvelle formule' a ouvert en avril 2019. Le budget prévisionnel global a été, pour la SMF, d'environ 1140 k€ pour la construction. L'équipement et la cuisine provisoire ont été financés par le prestataire/partenaire EUREST à hauteur de 377 k€.

Agenda d'Accessibilité Programmée

Le budget AD'AP a pu être réduit de 340 k€ à 200 k€ grâce à la prise en compte globale de l'accessibilité dans les projets évoqués ci-dessus. Le projet a obtenu la validation de la Préfecture en février 2017.

À ce jour, la partie hôtelière et le restaurant sont fonctionnels. Il reste toutefois, comme dans toute opération immobilière, de nombreuses réserves à lever. Pendant toute la période des travaux, il convient de signaler la forte implication des équipes du CIRM et de EUREST et la sympathie compréhensive de la très grande majorité des participants.

De la préparation à la valorisation des événements scientifiques : une offre digitale riche et visible

- Tous les événements scientifiques ont leur propre mini-site dédié bilingue (français-anglais).
- Cinq conférences par semaine sont filmées et mises en ligne sur YouTube (plus de 30 000 vues par mois) et enrichies, indexées et cataloguées sur la Bibliothèque Mathématique Audiovisuelle (30 000 vues par an).
- Le succès des réseaux sociaux permet une diffusion des informations rapide et visible dans le monde entier.

Réunions, visites et échanges internationaux

- Participation à la session annuelle du consortium européen Ercom[4] en mars 2019 à Cambridge. Le nouveau Chair est D. Abrahams de l'Isaac Newton Institute de Cambridge. Le mandat de P. Foulon comme Vice-Chair a été renouvelé.
- Ercom soutient une politique d'échange de savoir et de savoir-faire inter-centres et suit de

3. Contrat de Plan État-Région.
4. European Research Centers on Mathematics.

près les efforts des centres dans la promotion des femmes en mathématiques.

En conclusion, l'année 2019 a été scientifiquement très riche et les extensions 2r-cirm et Restaurant ont définitivement ouvert de nouvelles perspectives et permis d'élargir l'offre scientifique du cirm.

5. Secteur grand public

La smf a poursuivi ses efforts dans ce secteur, malgré un contexte général évidemment difficile (réforme des retraites, crise sanitaire) menant à un nombre très élevé de reports puis d'annulations. Grâce à plusieurs cycles de conférences, événements, ou partenariats, la Société continue à promouvoir les mathématiques en général et la recherche en particulier auprès du grand public et de publics non spécialisés. Ces initiatives sont des occasions privilégiées de défendre la parité. Nous nous efforçons d'en développer le caractère national et de toucher un public toujours plus large, notamment nos collègues enseignants du secondaire.

Mathématiques étonnantes. Ce cycle de conférences inauguré en avril 2019 est destiné à promouvoir l'unité des mathématiques. Rappelons que chaque événement réunit deux conférenciers représentant les deux bouts d'une interaction entre domaines des mathématiques, entre mathématiques et une autre science, ou, le plus souvent, entre mathématiques et applications. Le cycle s'adresse aux étudiants de L3, aux enseignants du secondaire intéressés et aux chercheurs et ingénieurs non spécialistes mais ayant un certain niveau de formation mathématique. Il est piloté par un comité de mathématiciens représentant diverses thématiques et institutions.

Les conférences se répartissent entre différentes institutions partenaires : Aromaths (Sorbonne Université), le département de mathématiques d'Orsay (Université Paris-Sud), et depuis décembre 2019, les Soirées Mathématiques de Lyon. La contribution accordée par la Fondation Blaise Pascal a été renouvelée.

Trois conférences ont été organisées d'octobre à janvier. Une conférence exceptionnelle était prévue en mai dans le cadre de l'année des mathématiques en clôture du grand forum des mathématiques vivantes à Lyon.

Un texte, un mathématicien. Ce cycle de conférences est organisé depuis quinze ans en partenariat avec la Bibliothèque nationale de France et l'association *Animath* et destiné à un public de lycéens ainsi qu'au grand public. Il est piloté par un comité scientifique présidé par S. Cantat.

Nous avons eu une excellente conférence d'O. Benoist en février 2020 qui a rencontré un succès mérité. Les trois autres conférences programmées, à savoir celles de J. Delon, M. Théret, et de V. Beffera ont dû être annulées, y compris dans leurs éditions décentralisées. Nous avons choisi, avec la BnF, de reporter ces exposés au printemps 2021.

En collaboration avec *Animath* la Société s'efforce de diversifier son public scolaire, notamment en participant aux actions comme les *labomaths* (de l'Éducation nationale) ou l'année des mathématiques (du cnrs). Nous cherchons à faire davantage connaître les nombreuses vidéos en ligne en nous adressant aux collègues du secondaire et en renouvelant leur présentation sur le site web de la Société.

Une question, un chercheur. Ce cycle de conférences est organisé en partenariat avec la Société Française de Physique, l'Institut Henri Poincaré, l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques et l'Institut d'Astrophysique de Paris. Il vise plus particulièrement les élèves de classes préparatoires et les étudiants de licence.

Nous avons eu une conférence mathématique par A.-L. Dalibard, ainsi qu'une conférence de physique par J.-F. Cohadon. Ces conférences ont rencontré leur public remplissant largement l'amphithéâtre Hermite de l'ihp. Leurs vidéos sont disponibles sur le site web.

Concours smf junior Le concours a eu lieu en novembre 2019 et a regroupé plus de 200 étudiant.e.s répartis en une centaine d'équipes. Après report pour cause de gilets jaunes, la cérémonie de remise des prix du deuxième concours smf junior a eu lieu le 2 février 2019. Au total, sept prix ont été décernés.

Ce concours est organisé tous les deux ans par la smf en direction des étudiants de Master. Sa prochaine édition est prévue à l'automne 2020. Cette compétition se veut une initiation à la recherche : elle invite les équipes candidates à se confronter en dix jours à dix problèmes sans solution publiée.

Des mathématiciens primés par l'Académie des sciences. Chaque année, la SMF et la SMAI organisent une ou deux journées d'exposés destinés à un large public, donnés par les lauréats récents de prix de mathématiques décernés par l'Académie des sciences. Après la journée de décembre 2018 à Rennes, l'édition de cette année devait se tenir à Bordeaux. D'abord retardée du fait d'une nouvelle organisation de la remise des prix par l'Académie, elle devait se tenir en mars 2020 avant son annulation.

Participation à des manifestations. La SMF participe, comme les autres sociétés savantes (plus particulièrement la SMAI, la SFdS et la SIF), à diverses manifestations importantes à destination du grand public. Le forum emploi-maths a eu lieu en octobre 2019 à la Cité des sciences, le salon de l'orientation de l'ONISEP en décembre 2019. Une journée sciences et médias devait se tenir en janvier à la BnF avant d'être reportée d'abord en mai puis à l'année prochaine.

Le Salon Culture et Jeux Mathématiques, désormais porté par Animath et piloté par un consortium dont la SMF est membre, devait se tenir en mai comme d'habitude place Saint-Sulpice à Paris. Il sera organisé de façon « dématérialisée » pour maintenir cette vitrine des mathématiques au sens large, même si rien n'assure qu'il aura le même impact.

Réflexion sur les 150 ans de la SMF. En 2022, la SMF aura 150 ans. Ce sera l'occasion d'un congrès exceptionnel. Du point de vue « grand public », on a commencé à en envisager les aspects rétrospectifs, éventuellement appuyés sur des études historiques ou sociologiques, aussi bien que prospectifs, notamment au travers de débats. Un partenariat avec la *Gazette* et l'ouverture du forum de discussion sur le site web de la Société sont en discussion.

6. Rencontres, colloques et concours SMF Junior

Congrès SMF. Il s'agit d'un événement ayant lieu les années paires, et il n'y a donc pas eu de congrès SMF en 2019. L'édition suivante était prévue à Nancy du 25 au 29 mai 2020, mais a été reportée à l'automne en raison des conditions sanitaires. Informations à venir sur `https://smf2020.math.cnrs.fr`.

Congrès AMS-EMS-SMF. Cette conférence aura lieu du 5 au 9 juillet 2021 à Grenoble. La liste des conférenciers pleiniers a été établie, et un appel à l'organisation de sessions spéciales a eu lieu. Au niveau local, G. Besson et H. Gaussier sont responsables de l'organisation.

États de la recherche. Deux sessions des états de la recherche ont eu lieu en 2019. La première, intitulée *Fondements mathématiques de la cryptographie asymétrique* et organisée par D. Stehlé, a eu lieu à Aussois du 17 au 22 mars 2019. Elle comportait un mini-cours (Luca de Feo, Versailles) et une dizaine d'exposés pléniers.

L'autre session de 2019, intitulée *Du quantique au classique* et organisée par S. Nonnenmacher et J. Sabin, s'est déroulée au CIRM du 22 au 26 avril 2019. Elle comportait 6 mini-cours de trois heures (G. Aubrun (Univ. Lyon I), F. Faure (Univ. de Grenoble), Y. Pautrat (Univ. Paris-Sud), M. Porta (U. Tübingen), G. Rivière (Univ. de Nantes) et N. Rougerie (Univ. Grenoble Alpes)).

Deux états de la recherche sont prévus pour 2020, mais l'un d'eux qui devait avoir lieu en juin a été reporté à une date ultérieure non précisée à ce jour.

Semaines CIRM-SMF. En 2016, la SMF avait porté l'initiative de soutenir financièrement à hauteur de 50% (avec un maximum de 20 séjours financés par conférence) deux semaines de conférences au CIRM faisant une large place aux jeunes et comportant des mini-cours. Les deux premières conférences CIRM-SMF ont eu lieu en 2019 (*Groupes et géométries* du 21 au 25 janvier, semaine organisée par B. Duchesne et T. Haettel, puis *Fluides inhomogènes : modèles asymptotiques et évolution d'interfaces* du 23 au 27 septembre, semaine organisée par F. Charve, R. Danchin, B. Haspot et S. Monniaux).

Après avoir constaté l'absence de candidatures spontanées, et un recoupement trop important avec le format des États de la recherche sus-mentionnés, la SMF a décidé de modifier légèrement le fonctionnement des semaines CIRM-SMF et de nommer un comité scientifique commun dont le rôle sera de trouver des organisateurs pour les deux types d'événements.

7. Enseignement

Pour traiter les questions relatives à l'enseignement, la SMF s'appuie sur les réflexions et les suggestions de la commission enseignement. La SMF est membre de la CFEM [5]. Elle travaille en collaboration avec l'APMEP [6]. Comme la précédente, cette année a été très marquée par la réforme du baccalauréat et celle de la formation des enseignants.

7.1 – Commission Enseignement

La commission s'est réunie le 27 juin 2019 et le 31 janvier 2020. Entre les réunions, une grande partie du travail est réalisée via des échanges de courriel.

- Le renouvellement se poursuit : 3 départs et 3 arrivées.
- La commission enseignement conduit une réflexion sur l'usage des outils numériques dans l'enseignement.
- Pour la réforme du baccalauréat et la réforme de la formation des enseignants : participation à la rédaction des textes publiés par la SMF.

7.2 – Réforme de la voie générale du lycée

La SMF continue à suivre la réforme du lycée et publie des textes, individuellement, ou en commun avec d'autres sociétés savantes ou associations. En janvier 2020, M. Lahaye, conseiller à la pédagogie de J.-M. Blanquer a reçu des représentants de l'APMEP (S. Planchenault), de l'ADIREM (A. Cortella) et de la SMF (L. Nyssen).

Deux communiqués ont été écrits en commun avec l'APMEP, l'ADIREM, la SMAI, la SFdS, l'UPS, l'ARDM, Femmes & Mathématiques et la CFEM. Le premier portait sur la répartition territoriale de l'option *Mathématiques expertes* en Terminale et le second sur les aménagements de la spécialité *Mathématiques* en classe de Première. Avec la SMAI et la SFdS nous avons rédigé une lettre ouverte à la CPU, pour l'alerter sur l'impact de cette réforme dans la formation des mathématiciens et des scientifiques en général.

7.3 – Réforme de la formation des enseignants

La formation des enseignants est également un dossier que la SMF suit attentivement. Elle consulte des enseignants-chercheurs et des formateurs impliqués dans les parcours *Mathématiques* des masters MEEF sur tout le territoire.

Deux textes ont été écrits : un communiqué sur les conditions de recrutement et d'exercice des étudiants en pré-professionnalisation avec un contrat AED, et une synthèse sur les problèmes posés par la réforme de la formation des enseignants, tant par son contenu que par le rythme de sa mise en place.

7.4 – Participation de la SMF à divers événements et réunions

- Septembre 2019 : réunion avec le directoire du jury de l'agrégation, organisée par la SMF et la SMAI. Elle a permis de recueillir des informations du directoire du jury, d'échanger entre les participants, et de présenter les nouveautés du site web.
- 2 octobre 2019 : participation à la journée de lancement de l'année des mathématiques.
- Octobre 2019 : participation aux journées de l'APMEP. À cette occasion L. Nyssen a participé à une table ronde *Formation initiale, formation continue : quels impacts des réformes actuelles et en préparation ?*
- Novembre 2019 : participation au salon de l'orientation de l'ONISEP, où la SMF a partagé un stand avec la SMAI, la SFdS, Femmes & Mathématiques.
- Janvier 2020 : réunion avec le directoire du jury du CAPES. Il a été question des épreuves de la session 2020 du concours, et aussi de la nouvelle version, annoncée pour 2022.
- Au cours de l'année : participation de la SMF aux réunions de l'ADIREM et de la CFEM.
- L'élaboration de la nouvelle brochure *Zoom* sur les métiers des mathématiques, de la statistique et de l'informatique se poursuit. La SMF en est partenaire financier, avec la SFdS et la SIF.

5. Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques.
6. Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public.

8. Publications

La SMF gère 9 revues internationales et collections de livres. Elle prend en charge l'ensemble du processus de publication, depuis la soumission, l'édition d'épreuves, jusqu'à la diffusion dans le monde entier. La SMF développe également des politiques adaptées à la transformation numérique du monde des publications scientifiques. Rappelons que la SMF, maison d'édition indépendante, ne bénéficie d'aucun soutien financier récurrent de la part d'une institution ou d'une société privée pour cette activité.

8.1 – Chaîne éditoriale, diffusion

Grâce à l'implication des deux responsables du suivi éditorial des publications, O. Boubakeur pour la plupart des revues et M.-F. Koussémon pour les *Annales Scientifiques de l'ÉNS*, et grâce aux nouvelles procédures mises en place (planification, calendrier de production,...), nos publications sont globalement sorties sans retard en 2019. Toutefois, le planning reste extrêmement serré et il convient de rester vigilant pour que cette situation perdure.

Une des satisfactions de l'année est la hausse des soumissions, en particulier pour le *Bulletin*, les *Mémoires*, et *Astérisque*. Il est toujours difficile d'analyser ces fluctuations, mais il est raisonnable de les attribuer pour partie au nouveau site internet qui permet une soumission directe, pour partie à la politique générale de la SMF, et pour partie à la qualité du travail effectué tout au long de la chaîne éditoriale. Ainsi, un backlog raisonnable a été reconstitué pour les *Mémoires*.

La SMF a publié 4 livres en 2019, un dans chacune de ses collections. Plusieurs ouvrages sont déjà au stade de la composition pour 2020, et de nombreux projets émergent pour le futur. Il est certain que la SMF continuera de publier dans les années futures de nombreux ouvrages de grande qualité. La SMF remercie vivement les comités de rédaction actuels et passés pour la qualité, la rigueur de leur travail, et leur implication.

Les abonnements électroniques sont assez stables, mais les abonnements en version papier poursuivent leur baisse. Cela nous a conduit à diminuer le nombre d'exemplaires imprimés pour chaque revue afin de conserver des coûts raisonnables et de ne pas accumuler un trop gros stock. Les *Annales Scientifiques de l'ÉNS* sont désormais diffusées par l'AMS aux États-Unis, sans que l'on en sente pour le moment l'effet sur les ventes. Le contrat de diffusion signé avec CPS, pour la Chine, commence à porter ses fruits puisque six nouvelles institutions chinoises se sont abonnées à notre bouquet de revues.

À noter que la SMF continue sa politique de diffusion et de présentation de ses publications, que ce soit à la cellule de diffusion à Marseille, mais aussi lors de divers stands, par exemple lors des séminaires Bourbaki, à la BNF, ou encore lors des ventes spéciales via le site internet de la SMF. Par exemple, l'offre spéciale consacrée aux *Cours Spécialisés* a connu un grand succès en septembre dernier.

La crise du coronavirus et le confinement impactent bien évidemment depuis mi-mars grandement le fonctionnement des publications de la SMF. Il n'est plus possible d'envoyer de livres ou de revues papier. O. Boubakeur et M.-F. Koussémon poursuivent leur tâche en télétravail, et il a été décidé de prendre de l'avance sur la composition des ouvrages puisque leur impression est différée de quelques mois. Cela nous permet de continuer à sortir avec ponctualité les versions électroniques de nos revues.

8.2 – Projets en cours et à venir

La SMF a décidé de s'inscrire dans le mouvement général vers la Science Ouverte, à travers deux initiatives fortes. La première concerne le consentement à publier. Jusqu'alors, la SMF ne faisait pas signer aux auteurs de ces articles de consentement à publier, ce qui ne protégeait ni la SMF, ni les auteurs. Il a été décidé de remédier à cela en prenant une décision forte : si les auteurs autorisent la SMF à exploiter leur travail dans un cadre commercial, les droits sur leur œuvre leur sont laissés, avec une licence de libre diffusion leur autorisant notamment de déposer, sans délais, la version auteur acceptée sur un site d'archive ou sur leur page web. De plus, le copyright est maintenant certifié par une procédure en ligne avec une signature numérique.

Par ailleurs, la SMF souhaite ouvrir ses collections *Cours Spécialisés* et *Panoramas et Synthèses*. Les livres papier seront toujours vendus, mais les versions électroniques seront disponibles, dès publication, sur le site internet de la SMF. Cela implique bien sûr d'inventer un nouveau modèle économique et de trouver des financements, à la fois pour la mise en place de cette initiative (par exemple, pour couvrir les frais de rétronumérisation) et pour sa pérennité. Nous avons demandé et obtenu une subvention de la part de la Fédération de Mathématiques Jacques Hadamard, et nous sommes en train de finaliser notre projet pour l'appel d'offres du Fonds National pour la Science Ouverte.

Un autre projet important que nous espérons finaliser dans l'année à venir est le changement de logiciel de gestion de la base éditoriale, le logiciel utilisé actuellement manquant de fonctionnalité utile.

Enfin, le contrat de traduction de certains de nos livres par Springer, qui ne correspondait plus à nos priorités actuelles, a été dénoncé et prendra fin en avril 2021.

9. Rapport financier année 2019

Pour l'année 2019, l'ensemble SMF-CIRM affiche un résultat net comptable de +107 k€. Pour comparaison, le bilan de 2018 était de -20 k€.

Le total du chiffre d'affaires s'élève à 2469 k€ pour 2019 dont 537 k€ de chiffre d'affaires pour la SMF et 1932 k€ pour le CIRM. Pour comparaison, le chiffre d'affaires était de 2033 k€ en 2018 dont 571 k€ de chiffre d'affaires pour la SMF et 1462 k€ pour le CIRM.

Même si la SMF rattrape progressivement ses retards de publications, il en subsiste, ce qui explique les variations du chiffre d'affaires d'une année sur l'autre (les produits des publications livrées en retard sont affectés à l'année suivante). En ce qui concerne le CIRM la progression du chiffre d'affaires s'explique par la montée en puissance des capacités d'accueil du centre grâce aux travaux d'extension débutés en 2018 et achevés en avril 2019 (le CIRM n'a cependant pas atteint sa pleine capacité sur l'exercice). Les résultats de l'année 2018 avaient aussi subi les répercussions de la grève SNCF de 2018 ainsi que des travaux réalisés sur l'exercice.

Les paragraphes qui suivent sont destinés à présenter de manière plus détaillée les finances des activités de la SMF, puis celles des activités du CIRM de manière plus globale.

9.1 – La SMF

La vocation de la SMF est de mener à bien des missions que nous répartissons en trois catégories :

– assurer des services aux membres ;
– produire, vendre et diffuser des livres et des revues ;
– communiquer sur les mathématiques auprès du grand public.

Le total des produits s'élève à 867 k€ (921 k€ en 2018) :

– les produits d'exploitation totalisent 847 k€ (917 k€ en 2018), avec un chiffre d'affaires de 537 k€ hors cotisations (contre 571 k€ en 2018),
– auxquels s'ajoutent 2,5 k€ de produit financier et 17 k€ de résultats exceptionnels provenant d'un fond dédié.

Le total des ventes est de 455 k€ (contre 503 k€ en 2018), le total des cotisations est de 86 k€ (contre 80 k€ en 2018) et le montant total des subventions est de 18 k€ (identique à 2018). Le total des charges est de 881 k€ (960 k€ en 2018).

La SMF présente un résultat négatif de 14,7 k€ en 2019. En 2018, ce résultat était négatif de 39 k€. Dans la suite, nous détaillons ces comptes poste par poste.

Produits d'exploitation et produits financiers

1. *Ventes de revues et de livres*. Le montant global est de 455 k€, contre 503 k€ en 2018. Ces variations dans les ventes s'expliquent en partie par la comptabilisation des retards de publications ; la part des publications de 2017 livrées en retard (53 k€) venait s'ajouter aux ventes de 2018, et cette année le retard a entraîné la constatation d'un produit constaté d'avance de 32 k€.
2. *Cotisations*. Le montant global est de 86 k€, contre 80 k€ en 2018. Ce montant a augmenté, ce qui laisse espérer que l'érosion des cotisations constatée en 2016 et 2018, est stoppée en 2019.
3. *Subventions*. La SMF a touché 18 k€ de subventions de l'INSMI (montant identique à celui de 2018).
4. *Recettes diverses*. Le montant global est de 79,8 k€, contre 68,2 k€ en 2018 ; ces recettes proviennent de la facturation des frais de ports et de refacturations variées pour des actions avec des associations partenaires (sociétés savantes, *Animath*...).
5. *Transfert de charges*. Cela correspond au reversement des salaires des personnels du CIRM détachés à la SMF et d'autres charges du

CIRM. Le montant global est de 181 k€ contre 194 k€ en 2018.

6. *Produits financiers*. Ces produits correspondent à la rémunération des fonds placés. Le montant global est de 2,5 k€, en baisse par rapport à 2018 (4,4 k€).
7. *Variation de stocks*. La production stockée sur l'exercice s'élève à 17,5 k€, en baisse par rapport à 2018 (35 k€).

Charges d'exploitation

1. *Masse salariale*. Le montant des salaires et indemnités hors charges de l'ensemble du personnel (SMF +CIRM) est de 312 k€, contre 378 k€ en 2018. Il faut ajouter 109 k€ de charges (138 k€ en 2018).
2. *Frais de fabrication et composition*. Le montant global des dépenses de fabrication et composition des revues et collections est de 145 k€ (147 k€ en 2018). Tous ouvrages confondus, les frais de fabrication s'élèvent à 108 k€, contre 106 k€ en 2018. Les frais de composition sont de 37 k€, contre 41 k€ en 2018.
3. *Honoraires, assurances, loyers*. Les honoraires pour le commissaire aux comptes et l'expert comptable s'élèvent à 16,6 k€, les frais d'assurances sont de 1,8 k€, et les loyers versés à l'IHP et à Luminy représentent 15,4 k€.
4. *Affranchissements et routage*. Tous envois confondus, le montant global des affranchissements est de 77,5 k€, contre 81 k€ en 2018.
5. *Impôts et taxes*. Ce poste est de 12,9 k€, contre 17,9 k€ en 2018, dont 9,3 k€ correspondent à la taxe sur les salaires.
6. *Frais bancaires et téléphone*. Le montant global est de 5,5 k€.
7. *Achat de fournitures*. Il y a eu 6,7 k€ d'achats de fournitures contre 6,1 k€ en 2018.
8. *Vie de l'Association*. Cette ligne inclut les soutiens aux opérations scientifiques, les frais de déplacement, et divers « frais de mission ». Le montant global est de 15,2 k€, contre 13,5 k€ en 2018.
9. *Entretien, réparation, maintenance*. Le montant global est de 37,4 k€, contre 25 k€ en 2018. Le nouveau site web de la SMF a nécessité le développement de nouvelles fonctionnalités, ce qui explique que les frais de maintenance informatique (22,5 k€, contre 10,7 k€ en 2018) ont doublé.
10. *Dépenses diverses*. Cette « ligne » inclut entre autres la sous-traitance générale (12,3 k€), la publicité (0,7 k€), la formation (2,6 k€).
11. *Amortissements sur immobilisations*. Cela correspond essentiellement à l'amortissement du site internet. Le montant global est de 45,9 k€ contre 17,4 k€ en 2018. Cette augmentation importante est due à l'amortissement du nouveau site web de la SMF (130 k€ amortis sur 5 ans, soit un amortissement de 26 k€ cette année correspondant à l'augmentation de cette ligne).
12. *Provisions diverses*. Le montant total est de 0,4 k€, contre 0,5 k€ en 2018, ce qui correspond à des factures impayées.
13. *Dépréciation du stock*. La dépréciation du stock s'élève à 19,1 k€ sur l'exercice (contre 27,7 k€ en 2018).

9.2 – Le CIRM

Depuis 2000, le CIRM est une Unité Mixte de Service placée sous la responsabilité conjointe du CNRS-INSMI et de la SMF. Une convention signée le 7 décembre 2010 a eu pour objet de fixer la répartition des domaines d'intervention entre l'unité CNRS et la SMF : par l'intermédiaire du CNRS, le CIRM apporte le contenu scientifique des rencontres mathématiques. Par ailleurs le CIRM confie à la SMF l'organisation et la gestion des rencontres mathématiques.

L'exercice 2019 du CIRM est excédentaire de 122 k€, il était excédentaire de 19 k€ en 2018. L'année 2019 a vu la livraison des travaux prévus dans le projet 2R-CIRM qui avait débuté en 2018. Ces livraisons entrainent la réouverture de l'annexe (bâtiment CNRS dont la SMF assure la gestion hôtelière) ainsi que l'inauguration du bâtiment pont augmentant les capacités d'accueil scientifique du CIRM. De manière conjointe, l'extension du restaurant sous maîtrise d'ouvrage portée par la SMF s'est achevée en 2019. Afin de financer ces opérations, rappelons qu'en novembre 2017, la SMF a signé trois contrats de prêt pour un montant total de 1000 k€ et une durée de allant de 6 à 7 ans. Ces contrats se sont accompagnés de l'ouverture d'un compte à terme d'un montant de 500 k€ à fin de garantie. La SMF confirme ainsi sa volonté de réinvestir les marges faites sur la gestion hôtelière du cirm dans la rénovation et l'extension des bâtiments.

Les produits d'exploitation s'élèvent à 2357 k€ en 2019 (contre 1859 k€ en 2018), auxquels il faut rajouter 1,5 k€ de produits financiers (4 k€ en 2018) et 132 k€ de « produits exceptionnels » (147 k€ en 2018). Ces produits dits exceptionnels, correspondent à l'étalement des subventions d'investissement perçues lors de précédents travaux et investissements au cirm.

Les produits comprennent à la fois des ressources propres, 1 932 k€ de chiffre d'affaires (1 463 k€ en 2018) ainsi que des subventions de différents organismes (menesr, Aix-Marseille université, Conseil Régional, Ville de Marseille) s'élevant à 420 k€ (390 k€ en 2018). Les causes de cette augmentation du chiffre d'affaires sont les suivantes :

– la grève sncf de 2018 a eu un impact négatif sur la fréquentation du cirm et a causé des annulations de séjours en 2018,
– les travaux débutés en 2018 sont maintenant achevés et l'augmentation des capacités du cirm commence à se manifester.

Les charges d'exploitation s'élèvent à 2367 k€ en 2019 contre 1990 k€ en 2018.

9.3 – Conclusion

L'ensemble cirm-smf affiche un résultat positif de 107 k€, contre un résultat négatif de 20 k€ en 2018. La smf est quant à elle, déficitaire de 14,7 k€ et le cirm excédentaire de 122 k€.

Il est difficile d'évaluer les conséquences de l'épidémie de Covid-19 encore en cours sur les activités de la smf pour l'année 2020. Le cirm est impacté avec la fermeture du centre et l'annulation de la totalité de ses conférences en mars et avril 2020. Cette situation laisse craindre une baisse du chiffre d'affaires en 2020. Toutefois, les charges d'exploitation du cirm sont en grande partie variables notamment en ce qui concerne le sous-traitant eurest qui assure l'ensemble des prestations hôtelières et de restauration. De plus, le cirm a eu recours au chômage partiel concernant 3 employés. Enfin, les échéances d'emprunt ont été reportées de six mois. En ce qui concerne la maison d'édition de la smf, ses activités sont impactées dans une moindre mesure (la majorité des abonnements 2020 a déjà été vendue) mais la vente des livres est arrêtée ce qui devrait également faire baisser le chiffre d'affaires en 2020. La smf a eu recours au chômage partiel pour les 2 employés de la cellule ainsi que le personnel du siège (3 personnes).

Ce rapport moral se veut le bilan de l'ensemble des activités au sein de la smf depuis un an. Le personnel de la smf et de très nombreux bénévoles y ont contribué, nous les remercions tous : membres du Bureau, du Conseil d'administration et du Conseil scientifique de la smf, directeurs et membres des comités de rédaction, ainsi que tous ceux qui interviennent, ponctuellement ou plus régulièrement, et qui offrent leurs compétences sans compter leur temps avec une très grande générosité.
Ce rapport a été rédigé par F. Bayart, G. Besson, H. Biermé, J. Buzzi, R. Danchin, D. Dos Santos Ferreira, P. Foulon, D. Gayet, S. Monniaux, M. Puel, L. Nyssen, S. Seuret, avec l'aide de S. Albin, O. Boubakeur, M.-F. Koussémon, C. Munusami, M. Rodrigues et C. Ropartz. Remercions enfin F. Petit pour sa relecture attentive (de ce rapport mais aussi des épreuves de la *Gazette* et autres textes tout au long de l'année).

Jeux, évolution et réseaux informatiques

Dans cet article, nous relevons l'ambitieux défi de vous montrer, en quelques pages, qu'il existe d'insoupçonnables points communs entre la théorie des jeux, l'évolution et le routage dans les réseaux informatiques.

• T. Brihaye
• M. Hallet
• B. Quoitin

1. Quelques mots de Bertrand Russel

Bertrand Russell aurait dit :

> Les mathématiques sont nées le jour où l'on s'est rendu compte qu'il y avait quelque chose de commun entre un couple de faisans et une paire de claques [4].

Derrière cette élégante boutade, il se trouve une idée intéressante : les mathématiques seraient une science qui permet d'extraire les points communs entre des objets dissemblables. Habitués par cette évidence que sont les nombres, on oublie parfois de s'émerveiller des incroyables efforts d'abstraction qui ont été nécessaires à leurs créations.

Dans ce texte, nous utiliserons cette citation de Russell comme un fil conducteur. En effet, nous présenterons différents objets qui semblent fort différents, que ce soit d'un point de vue syntaxique ou sémantique, et nous montrerons qu'ils possèdent en fait d'intrigants points communs. Dans la section 2, nous présenterons des éléments de la *théorie (dite classique) des jeux*, dans laquelle on cherche à prédire le comportement de joueurs, supposés *intelligents*, *rationnels* et *égoïstes*. Dans la section 3, nous nous tournerons vers la *théorie des jeux évolutionnaires* dont le but est d'étudier l'évolution d'une population d'individus qui ne sont a priori pas intelligents, ni rationnels, ni égoïstes. Nous verrons que de façon étonnante, il existe des liens forts entre les solutions rationnelles de la théorie classique des jeux, et les notions de stabilité de la théorie des jeux évolutionnaires. Dans la section 4, nous ferons le grand écart en nous tournant vers un problème de réseaux informatiques. En particulier, nous rappellerons les principes de fonctionnement du réseau Internet. La dernière section sera l'occasion de revenir sur les mots de Bertrand Russel qui ont ouvert cette introduction, en mettant en évidence différents points communs entre les précédentes sections de cet article.

2. Théorie des jeux

Dans cette section, nous ferons une brève introduction à la théorie des jeux. En quelques mots, on peut dire que la théorie des jeux est une branche des mathématiques qui s'intéresse aux interactions stratégiques entre différents agents rationnels (appelés joueurs). Ses fondements mathématiques remontent au début du XX^{e} siècle avec, entre autres, des contributions d'Ernst Zermelo et d'Émile Borel. On retiendra ensuite les contributions majeures d'Oskar Morgenstern et John von Neumann en 1944, ainsi que celles de John F. Nash, lauréat du Prix Nobel d'économie en 1994, ainsi que du Prix Abel en 2015. Le lecteur intéressé par ce sujet pourra consulter [11].

2.1 – Un exemple pour commencer

Imaginez que l'on vous propose de gagner de l'argent en jouant avec un parfait inconnu. Le jeu est très simple : chacun des joueurs (vous et le parfait inconnu) a la possibilité de choisir entre deux lettres : la lettre a ou la lettre b. Ce choix devra se faire simultanément et sans aucune communication entre les joueurs. Les gains seront répartis selon les règles énoncées ci-dessous.

– Si les deux joueurs choisissent la lettre a, il reçoivent tous les deux 40 euros.
– Si les deux joueurs choisissent la lettre b, il

reçoivent tous les deux 20 euros.

– Si les deux joueurs choisissent des lettres différentes, le joueur qui a choisi la lettre *a* reçoit 10 euros, alors que celui qui a choisi la lettre *b* reçoit 60 euros.

Sachant que vous n'avez le droit de jouer qu'une seule fois à ce jeu, quelle lettre allez-vous choisir ? Avant de tenter de répondre à cette question, nous allons présenter un modèle de ce jeu.

Un modèle naturel pour ce jeu est donné par la matrice de la figure 1. Dans cette matrice le premier joueur (disons vous) choisit sa lettre en choisissant une ligne, alors que le second joueur (le parfait inconnu) choisit sa lettre en choisissant une colonne. Chaque entrée de la matrice est un couple de réels qui correspond aux gains des joueurs quand ils jouent la ligne et la colonne correspondantes. Le gain du premier (resp. second) joueur se trouve sur la première (resp. seconde) composante du couple. En particulier, on observe sur la figure 1 que si le premier joueur choisit la lettre *a* et que le second joueur choisit la lettre *b*, le premier joueur reçoit un gain de 10 euros alors que le second joueur reçoit un gain de 60 euros.

FIGURE 1 – Matrice associée au jeu introductif

Le premier joueur choisit une ligne, le second joueur choisit une colonne.

	a	b
a	(40, 40)	(10, 60)
b	(60, 10)	(20, 20)

Revenons à la question initiale : « Quelle lettre allez-vous choisir de jouer ? ». Pour y répondre, nous allons nous placer dans la peau du premier joueur, et imaginer un raisonnement interne qu'il pourrait tenir afin de choisir la lettre qu'il va jouer.

– *Le choix qui me semble optimal est que nous jouions tous les deux la lettre a. J'imagine que mon adversaire va penser comme moi. On repartira alors tous les deux avec* 40 *euros.*
– *Mais, si mon adversaire choisit a, et que moi je choisis b, je peux gagner* 60 *euros. C'est mieux que* 40*. Je vais plutôt jouer b.*
– *J'imagine que mon adversaire va arriver à la même conclusion, il est donc fort probable qu'il décide de jouer b. Sachant qu'il joue b, je préfère gagner* 20 *euros que* 10 *euros. Et donc jouer b aussi. En fait, quoi qu'il fasse, je préfère jouer b !*

En conclusion, il semblerait « *raisonnable* » pour chacun des joueurs de choisir la lettre *b*. Même si ce choix ne semble pas globalement optimal, c'est le seul équilibre prédit par la théorie des jeux. Intuitivement, un équilibre peut être vu comme un contrat qui jouit d'une certaine « *robustesse* ». Cette robustesse se traduit par le fait qu'aucun des joueurs n'a d'intérêt individuel à dévier des termes du contrat, s'il est le seul à le faire. En théorie des jeux, les objets d'études sont davantage les situations d'équilibres que les situations globalement optimales. Dans la suite de ce texte, nous allons formaliser une notion de jeu et d'équilibre et expliciter les hypothèses qui conduisent à cette conclusion.

Le jeu que l'on vient de décrire est en fait une variante du célèbre *dilemme du prisonnier*, énoncé en 1950 par Albert W. Tucker à Princeton, qui est probablement l'un des exemples les plus étudiés de la théorie de jeux. Dans sa version originale, le dilemme du prisonnier s'énonce de la façon suivante. Deux hommes viennent d'être arrêtés par la police pour un crime qu'ils ont commis en complicité. Les deux hommes sont mis en détention dans des cellules séparées. Ils n'ont donc plus la possibilité de communiquer. Le policier chargé de l'interrogatoire des deux prisonniers offre à chacun l'opportunité de dénoncer l'autre sous les conditions suivantes.

– Si un seul des deux prisonniers dénonce l'autre, celui qui a dénoncé est remis en liberté alors que l'autre obtient la peine maximale (10 ans) ;
– si les deux prisonniers se dénoncent entre eux, ils sont condamnés à une peine plus légère (5 ans) ;
– si les deux prisonniers refusent de dénoncer l'autre, la peine sera minimale (1 an), faute d'éléments au dossier.

Le but étant ici de minimiser le nombre d'années de prison. Si on fait le parallèle avec le dialogue mental tenu par notre joueur dans le jeu initial, nous arriverons à la conclusion qu'il est préférable pour chacun des prisonniers de dénoncer l'autre. Encore une fois, il ne s'agit pas d'une situation globalement optimale, mais d'un équilibre. Des situations similaires à celle induite par le dilemme du prisonnier se retrouvent dans de nombreux domaines tels que l'économie, la politique et la psychologie.

2.2 – Équilibre de Nash

Nous allons maintenant formaliser la notion de jeu sous forme stratégique qui nous permettra de définir le célèbre concept d'équilibre de Nash.

Définition 1 (Jeu sous forme stratégique). Un jeu sous forme stratégique à deux joueurs est la donnée de $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$, où A_1 (resp. A_2) est l'ensemble des actions (parfois aussi appelées stratgies) du joueur 1 (resp. joueur 2); $g_1 : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ (resp. $g_2 : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$) est la fonction de gain du joueur 1 (resp. joueur 2).

Étant donné un jeu sous forme stratégique $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$, le déroulement du jeu est le suivant. Chaque joueur choisit, de façon indépendante, et sans communiquer avec l'autre joueur, une action dans son ensemble d'actions. Le premier (resp. second) joueur choisit une action a_1 (resp. a_2). Ensuite chaque joueur reçoit son gain, qui dépend des deux actions choisies : le premier joueur reçoit $g_1(a_1, a_2)$, alors que le second joueur reçoit $g_2(a_1, a_2)$. Le but de chacun des joueurs est de maximiser son gain. Classiquement, la définition d'un jeu sous forme stratégique comporte n joueurs [11]. Dans cette section et la suivante, nous ne considérerons que les jeux à deux joueurs. Des jeux à n joueurs seront considérés dans la section 4.

Nous pouvons désormais illustrer la Définition 1 à l'aide de l'exemple introductif.

Exemple 1. Dans l'exemple de la figure 1, les ensembles d'actions des deux joueurs sont égaux : $A_1 = A_2 = \{a, b\}$. La fonction de gain du premier joueur est donnée par $g_1(a,a) = 40$, $g_1(a,b) = 10$, $g_1(b,a) = 60$, $g_1(b,b) = 20$. La fonction de gain du second joueur est donnée par $g_2(a,a) = 40$, $g_2(a,b) = 60$, $g_2(b,a) = 10$, $g_2(b,b) = 20$.

On dit qu'un jeu $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ est fini quand A_1 et A_2 sont tous les deux des ensembles finis. Dans ce cas, la représentation matricielle (telle que celle de la figure 1) reprend tous les éléments nécessaires à la description du jeu (tels que ceux donnés dans l'exemple 1). Dans la suite de ce texte, on ne rencontrera que des jeux finis pour lesquels on se contentera donc de fournir la matrice naturellement associée.

Un des buts de la théorie des jeux est de prédire le comportements des joueurs qui participent à un jeu donné. Ces prédictions se font sous une série d'hypothèses que sont censés respecter tous les joueurs qui participent au jeu étudié. Parmi ces hypothèses, on suppose que chaque joueur est intelligent, rationnel (il cherche à maximiser son gain) et égoïste (il ne se soucie pas du gain de ses adversaires). Au vu de ses hypothèses, il est clair que, bien que très puissante, la théorie des jeux n'est pas un cadre de travail universel qui permet de modéliser toutes les situations. L'applicabilité de la théorie des jeux à la réalité, et en particulier à la réalité économique, a donné naissance à l'économie expérimentale. Cette branche de l'économie a été récompensée en 2002 par le « prix Nobel » d'économie, décerné à Vernon Smith et Daniel Kahneman, pionniers dans l'application à la science économique des méthodes expérimentales utilisées en psychologie. Le lecteur intéressé par ces considérations pourra consulter [7].

Dans la suite de cette section, nous considérerons toujours que les hypothèses de la théorie des jeux sont satisfaites. Nous allons désormais introduire la célèbre notion d'équilibre de Nash. Informellement, un équilibre de Nash est la donnée d'un **profil de stratégies**, i.e. une action pour chaque joueur, tel qu'aucun joueur ne regrette son choix (il n'aurait pas pu faire mieux) au vu du choix de l'autre joueur. C'est en ce sens qu'un équilibre de Nash est considéré comme une solution rationnelle à un jeu.

Définition 2 (Équilibre de Nash). Soit $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique. Soit (a_1, a_2) un profil de stratégie. On dit que (a_1, a_2) est un **équilibre de Nash** si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. $\forall b_1 \in A_1 \; g_1(b_1, a_2) \leqslant g_1(a_1, a_2)$.
2. $\forall b_2 \in A_2 \; g_2(a_1, b_2) \leqslant g_1(a_1, a_2)$.

Comme souvent en mathématiques, il est aussi intéressant quand on rencontre un nouveau concept de comprendre sa négation. Un profil de stratégies (a_1, a_2) n'est pas un équilibre de Nash dès que l'un des deux joueurs possède une action qui lui permet de gagner strictement plus, au vu du choix de l'autre joueur. On dit alors que ce joueur possède une **déviation profitable**. Afin d'illustrer les concepts d'équilibre de Nash et de déviation profitable, nous allons revenir sur l'exemple introductif.

Exemple 2 (Retour au jeu introductif). On considère de nouveau la matrice de la figure 1. On peut facilement se convaincre que le profil de stratégies (a, a) n'est pas un équilibre de Nash. En effet, le premier joueur possède une déviation profitable, car s'il joue b (plutôt que a), alors que le second joueur ne modifie pas son action, il passera d'un gain de 40 euros à un gain de 60 euros. De la même façon, on voit que l'action b est également une déviation profitable pour le second joueur. Soulignons que pour qu'un profil de stratégies ne soit pas un équilibre de Nash il suffit qu'un seul des joueurs possède une déviation profitable. On peut montrer que le seul équilibre de Nash de ce jeu est le profil (b, b).

Deux questions naturelles que se pose un mathématicien quand il découvre un nouveau concept sont : « *Est-ce que ça existe toujours ?* » et « *Quand ça existe, est-ce que c'est unique ?* ». Nous allons répondre par la négative à ces deux questions à l'aide des deux exemples qui suivent.

Exemple 3 (Jeu du rendez-vous). À une époque où la téléphonie mobile n'était pas encore aussi envahissante, Alice et Bob avaient décidé de passer la soirée ensemble. Tous les deux étaient bien au fait de l'heure de rendez-vous ; malheureusement, ils avaient tous les deux oublié l'endroit du rendez-vous. Au vu de leurs habitudes, il ne pouvait s'agir que du Cinéma ou du Théâtre. Les deux amis préfèrent passer la soirée ensemble que seuls et n'ont pas de préférence pour l'activité réalisée. Cette situation est modélisée sur la matrice de la figure 2. On vérifiera que ce jeu comporte exactement deux équilibres de Nash : (C, C) et (T, T).

Figure 2 – Rendez-vous

	C	T
C	(1,1)	(0,0)
T	(0,0)	(1,1)

Nous allons maintenant passer au jeu du tir au but qui nous permettra d'illustrer qu'il existe des jeux sans équilibre de Nash.

Exemple 4 (Jeu du tir au but). Dans cet exemple, nous allons étudier les aspects stratégiques du tir au but. Que l'on apprécie ou non le football, il est indéniable que les tirs au but peuvent se révéler être d'une importance capitale lors d'une compétition internationale. Il n'est certainement pas nécessaire de rappeler aux supporters de l'équipe de France la victoire des Bleus aux tirs au but lors du quart de finale contre l'Italie de la coupe du monde 1998.

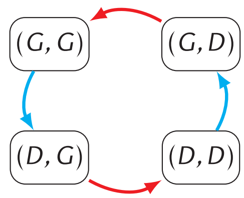
Dans cet exemple, nous allons modéliser un tir au but extrêmement simplifié dans lequel un tireur idéalisé affronte un gardien idéalisé. Le tireur n'a que deux choix : il peut tirer à gauche ou à droite. De la même façon, le gardien n'a que deux possibilités : plonger à gauche ou à droite. Pour simplifier les choses, quand on parle de gauche et de droite, on reste dans le référentiel du tireur, i.e. quand on dira que le tireur tire à gauche et que le gardien plonge à gauche, cela signifiera que le gardien a plongé du « bon côté [1] ». Nous venons d'expliquer en quoi notre tir au but était simplifié, nous allons maintenant décrire en quoi les deux joueurs sont idéalisés. Tout d'abord, le tireur ne manque jamais la cible et si le gardien plonge à l'opposé de son tir, il marque toujours. En ce qui concerne le gardien, s'il plonge du bon côté, il arrête toujours le ballon avant que celui-ci ne franchisse la ligne. Cette situation idéalisée est représentée dans la matrice de la figure 3, où le tireur est le premier joueur et le gardien le second joueur.

Figure 3 – Tir au but

	G	D
G	(0,1)	(1,0)
D	(1,0)	(0,1)

On se rend rapidement compte que quel que soit le profil de stratégies (a_1, a_2), exactement un des deux joueurs possède une déviation profitable. Par exemple, dans la situation (G, G), où le tireur a tiré à gauche, le gardien a plongé à gauche et donc arrêté la balle, c'est le tireur qui a une déviation profitable : tirer à droite. Sur la figure 4, on a représenté sous forme de graphe les déviations profitables des joueurs. Au vu de cela, on se rend rapidement compte que le jeu du tir au but ne possède pas d'équilibre de Nash.

Figure 4 – Tir au but - déviations profitables



Les déviations profitables du gardien (resp. tireur) sont en rouge (resp. bleu).

2.3 – Jouer au hasard

La conclusion de l'exemple sur le tir au but (exemple 4) a quelque chose de peu satisfaisant. Elle ne nous donne aucune indication concernant une manière rationnelle d'effectuer un tir au but. Imaginons une situation où vous allez être amené à jouer, en tant que tireur, un très grand nombre de fois (disons 10 000) le jeu du tir au but de la figure 3.

1. Ce qu'on appelle la gauche du gardien est donc en fait sa propre droite, vu que le gardien se trouve face au tireur.

Quel serait, d'après vous, une stratégie pertinente? Si on fait l'hypothèse que le gardien est intelligent, on se convainc facilement que tirer toujours du même côté n'est pas une bonne idée. De même, jouer une séquence trop régulière du type gauche, droite, gauche, droite... bien que légèrement plus subtil, ne permettra pas de marquer beaucoup de buts. Il faudrait arriver à jouer de façon imprévisible. On pourrait lancer un dé (parfaitement équilibré) et tirer à gauche chaque fois que l'on obtient 6 et tirer à droite le reste du temps. Après quelques tirs, le gardien réalisera que s'il plonge tout le temps à droite, il arrêtera la grande majorité de nos tirs. L'idéal serait plutôt de lancer une pièce (parfaitement équilibrée) et de tirer à gauche chaque fois que l'on obtient face et de tirer à droite quand on obtient pile. On peut montrer que cette façon de jouer (pour le tireur comme pour le gardien) correspond en fait à l'unique équilibre de Nash d'une version du jeu où l'on autorise les joueurs à utiliser du hasard pour jouer. Afin de formaliser cela, nous allons d'abord définir le concept de stratégie mixte. Pour ce faire, nous utiliserons la notation suivante. Étant donné un ensemble X, nous noterons $\Delta(X)$ l'ensemble des distributions de probabilités sur X.

Définition 3 (Stratégie mixte). Soit $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique. Une **stratégie mixte** du premier (resp. second) joueur est une distribution de probabilités sur A_1 (resp. A_2). On notera $\sigma_1 \in \Delta(A_1)$ (resp. $\sigma_2 \in \Delta(A_2)$) une stratégie mixte du premier (resp. second) joueur.

Quand les joueurs utilisent des stratégies mixtes, ils ne cherchent plus à maximiser leur gain, mais leur espérance de gain. Ce qui conduit naturellement à la définition d'équilibre de Nash en stratégies mixtes (que nous ne formaliserons que dans le cas où les ensembles d'actions sont finis). Soit $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique tel que A_1 et A_2 sont finis. Étant donné $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ un profil de stratégies mixtes, on notera $\tilde{g}_i(\sigma_1, \sigma_2)$ le gain espéré du joueur i lorsque le premier (resp. second) joueur joue la stratégie σ_1 (resp. σ_2). Formellement, on a :

$$\tilde{g}_i(\sigma_1, \sigma_2) = \sum_{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2} \sigma_1(a_1) \cdot \sigma_2(a_2) \cdot g_i(a_1, a_2).$$

Dans la définition de gain espéré, il est important de noter les événements « le premier joueur joue l'action a_1 » et « le second joueur joue l'action a_2 » sont des événements indépendants. Cette hypothèse est cohérente avec le fait que les deux joueurs jouent de façon indépendante, et sans communiquer entre eux.

Dans la suite de ce texte, nous nous autoriserons les deux abus de notations suivants. Premièrement, une stratégie $a_1 \in A_1$ peut clairement être vue comme une stratégie mixte : il suffit de l'assimiler à la distribution de Dirac, notée δ_{a_1}, qui associe une probabilité 1 à l'action a_1 et 0 à toutes les autres actions. Abusivement, nous écrirons parfois $\tilde{g}_i(a_1, \sigma_2)$ plutôt que $\tilde{g}_i(\delta_{a_1}, \sigma_2)$. De la même façon, nous nous autoriserons à écrire $\tilde{g}_i(\sigma_1, a_2)$. Deuxièmement, afin d'alléger les notations, au lieu de noter $\tilde{g}_i(\sigma_1, \sigma_2)$ l'espérance de gain induite par le profil de stratégies mixtes (σ_1, σ_2), nous la noterons abusivement $g_i(\sigma_1, \sigma_2)$. C'est en tenant compte de ce second abus de notations que nous définissons la notion d'équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Définition 4 (Équilibre de Nash en stratégies mixtes). Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A_1) \times \Delta(A_2)$ un profil de stratégies mixtes. On dit que (σ_1, σ_2) est un **équilibre de Nash en stratégies mixtes** si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. $\forall \tau_1 \in \Delta(A_1) \;\; g_1(\tau_1, \sigma_2) \leqslant g_1(\sigma_1, \sigma_2)$.
2. $\forall \tau_2 \in \Delta(A_2) \;\; g_2(\sigma_1, \tau_2) \leqslant g_2(\sigma_1, \sigma_2)$.

On peut désormais revenir sur l'exemple du tir au but.

Exemple 5 (Retour sur le tir au but). On considère à nouveau l'exemple du tir au but de la figure 3. Syntaxiquement, le jeu $\mathcal{G}$ reste le même, mais nous allons désormais envisager que les joueurs ont le droit de jouer « au hasard », en utilisant des stratégies mixtes. On considère la stratégie qui consiste à lancer une pièce (parfaitement équilibrée) et à tirer à gauche chaque fois que l'on obtient face et de tirer à droite quand on obtient pile. Formellement, cette stratégie est la distribution de probabilité qui associe $\frac{1}{2}$ à gauche et à droite. Si on note σ cette stratégie, on peut se convaincre que (σ, σ) est en fait le seul équilibre de Nash pour le tir au but.

Nous pouvons désormais énoncer le célèbre Théorème de Nash qui affirme que tout jeu fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes. Ce théorème contribua au fait que John Forbes Nash obtint le « Prix Nobel » en économie en 1994, conjointement avec Reinhard Selten et John Harsanyi.

Théorème 1 (Théorème de Nash [10]). *Tout jeu sous forme stratégique fini admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.*

Pour les curieux, précisons que la preuve du

Théorème de Nash repose essentiellement sur le théorème du point fixe de Kakutani.

3. Théorie des jeux évolutionnaires

La théorie des jeux évolutionnaires est souvent définie comme une application de la théorie des jeux à l'étude de l'évolution de populations. Bien que les deux théories partagent de nombreux objets (tel que le concept de stratégie) et que la théorie des jeux évolutionnaires soit clairement inspirée de la théorie (dite classique) des jeux, ces deux approches ont des différences fondamentales que nous tenterons de souligner dans cette section. La théorie des jeux évolutionnaires a été introduite dans [9]. Le lecteur désireux d'en savoir plus sur ce sujet pourra consulter [14].

3.1 – Retour à l'exemple introductif

Nous allons revenir à la matrice de la figure 1, mais en changeant complètement l'interprétation que nous allons donner à cet objet. Notre but est désormais d'étudier l'évolution d'une très grande population d'individus. Cette population est composée d'individus de deux espèces : les individus de type a et les individus de type b. On peut imaginer que chaque fois que deux individus se croisent ils « combattent » afin de s'approprier les ressources naturelles liées à la survie de leurs espèces respectives. Les individus n'opèrent pas de choix : un individu de type a se comporte toujours comme un individu de type a, sans réfléchir, et il en va de même pour un individu de type b. Quand un individu de type a rencontre un individu de type b, l'individu de type a reçoit un gain de 10, tandis que l'individu de type b reçoit un gain de 60. Ce gain est une mesure de la capacité de l'espèce à survivre et se reproduire. En théorie des jeux évolutionnaires, l'objet d'étude est l'évolution d'une population, plus précisément l'évolution des proportions des différentes espèces qui constituent une population initiale. L'évolution d'une population est modélisée, de façon déterministe, à l'aide d'un système d'équations différentielles. Ce système d'équations différentielles est lui-même induit par la matrice qui décrit le jeu (telle que la matrice de la figure 1 dans cet exemple introductif). Dans ce cadre, on peut par exemple se demander si une population composée exclusivement d'individus de type a peut survivre à une invasion (due par exemple à une mutation) d'une petite population d'individus de type b. Ces différentes idées vont être formalisées et discutées dans la suite de cette section.

3.2 – Dynamique de réplication

Comme mentionné auparavant, un des buts de la théorie des jeux évolutionnaires est d'étudier l'évolution d'une population composée de plusieurs espèces. Dans la suite de ce texte, nous supposerons que la population étudiée est composée de n espèces distinctes. L'évolution de la population est décrite à l'aide d'un système d'équations différentielles, connu sous le nom de *dynamique de réplication*. Afin de formaliser cette dynamique de réplication, nous allons préalablement introduire quelques concepts.

On considère une très grande [2] population d'individus composée de n espèces. Les interactions entre les individus de différentes espèces vont être modélisées à l'aide d'un jeu sous forme stratégique, noté $\mathscr{G}$. Intuitivement, on peut imaginer que l'on tire au hasard un couple d'individus dans notre population, et que l'on fait « jouer » ce couple au jeu $\mathscr{G}$. On ne peut pas vraiment dire que les deux individus jouent, car ils ne choisissent pas d'actions, vu qu'ils sont génétiquement programmés à jouer l'action qui correspond à leur espèce. Donc à chaque espèce correspond une action du jeu $\mathscr{G}$ et vice versa. Toujours en se référant au jeu $\mathscr{G}$, chaque individu obtiendra un certain gain à l'issue de cette rencontre, gain qui modélise la capacité de l'espèce à survivre et se reproduire. On imagine qu'à chaque instant, de très nombreuses paires d'individus sont tirées au hasard, et que c'est de ces nombreuses interactions que résultera l'évolution de la population.

Au vu de la description intuitive que l'on vient de donner, on se rend compte que le jeu $\mathscr{G}$ qui modélise les interactions entre individus ne peut pas être quelconque. En effet, les deux joueurs sont toujours des individus de la même population tirés au hasard, dont l'ensemble d'actions correspond aux différentes espèces qui constituent cette population. En particulier, les deux joueurs doivent toujours avoir le même ensemble d'actions. De plus, le fait qu'un individu soit considéré comme le premier ou comme le second joueur, n'aura aucune espèce d'importance pour décrire l'interaction entre les

2. On considère en fait que la population est infinie. Cela est dû au fait que l'on représente la proportion d'individus d'une espèce par un nombre réel de l'intervalle $[0,1]$, et que l'on souhaite que n'importe quel réel de $[0,1]$ représente une proportion de population. Cela n'a de sens que si la population est considérée infinie.

deux espèces qu'ils représentent. Pour ces raisons, nous allons nous focaliser sur les jeux sous forme stratégique (à deux joueurs) symétriques.

Définition 5 (Jeu symétrique). Soit $\mathscr{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ un jeu sous forme stratégique, on dira que $\mathscr{G}$ est **symétrique** si et seulement si $A_1 = A_2$ et pour tout profil de stratégies $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$, on a $g_1(a_1, a_2) = g_2(a_2, a_1)$. Dans ce cas, l'ensemble A_1 (égal à l'ensemble A_2) sera noté A et la fonction de gain g_1 (de laquelle on déduit facilement g_2) sera notée g.

Parmi les jeux que nous avons rencontrés jusqu'à présent, les jeux des figures 1 et 2 sont symétriques, alors que le jeu de la figure 3 n'est pas symétrique, bien que les deux joueurs aient le même ensemble d'actions.

Pour des motivations similaires à celles qui nous ont poussés à nous restreindre aux jeux symétriques, nous nous focaliserons également sur les équilibres de Nash symétriques.

Définition 6 (Équilibre de Nash symétrique). Soit $\mathscr{G}$ un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in \Delta(A) \times \Delta(A)$ un équilibre de Nash. On dit que (σ_1, σ_2) est un **équilibre de Nash symétrique** si et seulement si $\sigma_1 = \sigma_2$.

Dans les jeux des figures 1 et 2, tous les équilibres de Nash sont symétriques. Nous rencontrerons des équilibres de Nash non symétriques dans la section 3.3.

Nous avons maintenant toutes les notions nécessaires pour définir la dynamique de réplication, qui régit l'évolution des différentes espèces de la population étudiée. Avant d'établir formellement la dynamique de réplication, nous allons tenter d'en donner l'intuition.

Soit $\mathscr{G}$ un jeu sous forme stratégique symétrique. On suppose que l'ensemble $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ contient n stratégies. Cela signifie également que notre population est constituée de n espèces différentes. De plus, quel que soit $1 \leqslant i \leqslant n$, on suppose que tous les individus de l'espèce i sont génétiquement programmés à toujours jouer l'action a_i. Les gains qui mesurent la capacité de chaque espèce à survivre et se reproduire sont donnés par la fonction g. On pourrait dire que ce gain permet de mesurer une valeur sélective ou une valeur adaptative. Afin de décrire la dynamique de réplication, nous allons introduire quelques variables.

Soit $1 \leqslant i \leqslant n$, on notera p_i le nombre d'individus de l'espèce i. Si on souhaite étudier l'évolution des espèces, il est naturel de considérer que le nombre d'individus de chaque espèce dépend du temps. On notera t la variable temporelle, et donc $p_i(t)$ le nombre d'individus de l'espèce i à l'instant t. On notera $p(t)$ le nombre total d'individus à l'instant t.

Intuitivement, la variation de $p_i(t)$ est obtenue en multipliant $p_i(t)$ par l'*avantage* de l'espèce i (à l'instant t). Toujours intuitivement, l'avantage de l'espèce i est obtenu en faisant la différence entre la valeur sélective de l'espèce i et la valeur sélective de la population moyenne. Afin de formaliser cela, nous allons définir l'état de la population à l'instant t, noté $\sigma(t)$. L'**état de la population** à l'instant t est la donnée d'un n-uplet constitué du nombre d'individus de chaque espèce à l'instant t, normalisé par le nombre total d'individus à l'instant t. Formellement, on a

$$\sigma(t) = (\sigma_1(t), \ldots, \sigma_n(t)), \text{ où } \sigma_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)}.$$

On remarque que, quel que soit t, $\sigma(t) \in \Delta(A)$ peut être vu comme une stratégie mixte de $\mathscr{G}$. Dans ce cadre, une stratégie mixte représente une proportion des différentes espèces d'individus (à un instant donné) et ne doit plus être interprétée comme un choix aléatoire effectué par un joueur. En particulier, la quantité $g(a_i, \sigma(t))$ représente la valeur sélective de l'espèce i, face à la population moyenne à l'instant t et la quantité $g(\sigma(t), \sigma(t))$ représente la valeur sélective de la population moyenne. Ci-dessous les équations de la dynamique de réplication, où $1 \leqslant i \leqslant n$ et $\dot{\sigma_i}(t)$ représente la dérivée de la fonction $\sigma_i(t)$ par rapport à la variable temps (t).

Figure 5 – Dynamique de réplication

$$\dot{\sigma_i}(t) = (g(a_i, \sigma(t)) - g(\sigma(t), \sigma(t))) \cdot \sigma_i(t).$$

On voit donc que la variation de la proportion d'individus de type i est directement liée à la différence entre la valeur sélective de la population de type i et la valeur sélective de la population moyenne ; ainsi qu'à la proportion actuelle de la population de type i.

Étant donnée une condition initiale $\sigma(0) \in \Delta(A)$, on peut montrer que le système d'équations différentielles de la figure 5 admet toujours une solution unique. L'évolution des différentes espèces de population revient donc à étudier les solutions de la dynamique de réplication. On s'intéresse alors à l'étude de la stabilité du système. Nous allons formaliser quelques notions de stabilité qui nous seront utiles dans la suite.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction suffisamment dérivable. On considère l'équation différentielle ci-dessous.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)). \tag{1}$$

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation différentielle (1). Étant donné un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$, que l'on peut voir comme une condition initiale de (1), on dira que

– x_0 est un **point stationnaire** ssi

$$\varphi(x_0, t) = x_0, \text{ quel que soit } t \in \mathbb{R};$$

– x_0 est **stable au sens de Lyapunov** ssi pour tout U, voisinage de x_0, il existe V, voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in V \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \varphi(x, t) \in U.$$

Intuitivement, si une trajectoire démarre d'un point proche de x_0, elle restera proche de x_0.

– x_0 est **asymptotiquement stable** ssi x_0 est stable au sens de Lyapunov et s'il existe W, voisinage de x_0 tel que

$$\forall x \in W \quad \lim_{t \to +\infty} \varphi(x, t) = x_0.$$

Intuitivement, si une trajectoire démarre d'un point proche de x_0, elle aura tendance à se rapprocher (à la limite) de x_0.

Dans la section suivante, nous allons illustrer les concepts liés à la dynamique de réplication dans le cas simple des populations qui ne contiennent que deux espèces.

3.3 – Le cas deux espèces

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur l'étude des jeux symétriques où l'ensemble A n'est constitué que de deux éléments. On peut montrer que tout jeu symétrique où $|A| = 2$ peut être transformé en un jeu $\mathcal{G}(p,q)$ comme illustré à la figure 6 sans en changer les équilibres de Nash. Pour s'en convaincre, illustrons cette transformation sur le jeu de l'exemple introductif (figure 1). Vu que le jeu est symétrique, nous n'expliquerons la transformation que pour la fonction de gain du premier joueur. Pour ce faire, on retranche 60 (resp. 10) des premières composantes de la première (resp. seconde) colonne de la matrice de la figure 1. On obtient donc le jeu $\mathcal{G}(-20, 10)$, qui a exactement les mêmes équilibres de Nash que le jeu de départ.

Figure 6 – Deux actions

$$\mathcal{G}(p,q) \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & (p,p) & (0,0) \\ b & (0,0) & (q,q) \end{array}$$

Tout d'abord, on va étudier cette famille de jeu du point de vue de la théorie classique des jeux. On parle parfois de la version « statique » du jeu, que l'on oppose à la version « dynamique », étudiée en théorie des jeux évolutionnaires. En étudiant les équilibres de Nash des jeux $\mathcal{G}(p,q)$, on montre qu'il n'existe en fait que trois situations possibles, qui dépendent des signes [3] de p et de q.

1. Si p et q sont de signes opposés, le jeu comportera un unique équilibre de Nash (a,a) (resp. (b,b)) si $p > 0$ et $q < 0$ (resp. si $p < 0$ et $q > 0$). Remarquons que le cas où $p < 0$ et $q > 0$ est équivalent à l'exemple introductif (voir figure 1) dont le seul équilibre de Nash est (b,b).
2. Si p et q sont de même signe, avec $p,q > 0$, le jeu comportera trois équilibres : (a,a), (b,b) et $(\sigma^\star, \sigma^\star)$, où $\sigma^\star$ est la stratégie mixte qui associe la probabilité $\frac{q}{p+q}$ à l'action a.
3. Si p et q sont de même signe, avec $p,q < 0$, le jeu comportera aussi trois équilibres : (a,b), (b,a) et $(\sigma^\star, \sigma^\star)$. Dans le cadre de la théorie des jeux évolutionnaires, pour les raisons exposées précédemment, on ne retiendra que l'équilibre de Nash symétrique $(\sigma^\star, \sigma^\star)$.

On va maintenant s'attaquer à la dynamique de réplication induite par les matrices de la figure 6. Dans ce cadre, l'état de la population est donné par $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t))$ où $\sigma_1(t)$ représente la proportion de population de type a à l'instant t, alors que $\sigma_2(t)$ représente la proportion de population de type b, toujours à l'instant t. On a que $\sigma_1(t) + \sigma_2(t) = 1$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$. La connaissance de $\sigma_1(t)$ en chaque instant est donc suffisante pour décrire l'évolution de la population. Vu que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a que $\sigma_1(t) \in [0,1]$, on représentera l'ensemble des états de la population par l'intervalle $[0,1]$. En appliquant la dynamique de réplication (voir figure 5) au cas qui nous occupe, i.e. $\sigma_2(t) = 1 - \sigma_1(t)$, nous obtenons les équations (2).

3. Les cas où p ou q sont nuls ne sont pas considérés dans la discussion.

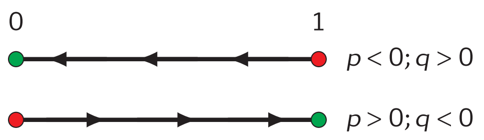
$$\begin{cases} \dot{\sigma_1}(t) = (p\sigma_1(t) - q\sigma_2(t)) \cdot \sigma_1(t) \cdot \sigma_2(t) \\ \dot{\sigma_2}(t) = -\dot{\sigma_1}(t) \end{cases} \tag{2}$$

On peut montrer que les points stationnaires du système d'équations différentielles de (2) dépendent des signes de p et q.

1. Si p et q sont de signes opposés, il y exactement deux points stationnaires : 0 et 1. Le point stationnaire 0 correspond au cas où toute la population est de type b ; et donc à l'équilibre de Nash (b, b). Symétriquement, le point stationnaire 1 correspond à l'équilibre de Nash (a, a).
2. Si p et q sont de même signes, il y a trois points stationnaires : 0, 1 et $\frac{q}{p+q}$.

La similitude avec l'analyse des jeux $\mathcal{G}(p, q)$ au sens de la théorie classique des jeux est assez évidente. Nous allons désormais pousser un peu plus loin notre étude de l'évolution des populations. Dans le cas où p et q sont de signes opposés, la dynamique des solutions est décrite sur la figure 7. Dans le cas où $p < 0$ et $q > 0$, en se référant au système d'équations différentielles (2), on peut facilement se convaincre que $\dot{\sigma_1}(t) \leqslant 0$, quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Ce qui correspond à l'image du haut de la figure 7, où l'état de population converge vers 0 (sauf si on démarre exactement en 1). Ce qui correspond à une évolution où le nombre d'individus de type a diminue, jusqu'à complètement disparaître. Cette situation est à mettre en parallèle avec l'unique équilibre de Nash (b, b) obtenu dans l'analyse du jeu statique, sous les mêmes conditions sur les signes de p et q. On remarque que le point 1 est également un point stationnaire, alors qu'il ne correspond pas à un équilibre de Nash. Il s'agit du cas extrême où la population n'est composée que d'individus de type a, dans ce cas, l'état de la population est constant : aucun individu de type b n'étant présent. Le cas où $p > 0$ et $q < 0$ est totalement symétrique et décrit sur l'image du bas de la figure 7.

Figure 7 – p et q sont de signes opposés

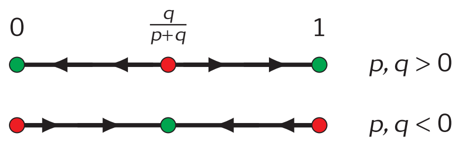


Si p et q sont de même signe, on obtient deux situations très différentes. Dans le cas où $p, q > 0$ (image du haut de la figure 8) on peut dire que $\frac{q}{p+q}$ est un point stationnaire *instable*. En effet si l'on démarre exactement en $\frac{q}{p+q}$, l'état de la population va rester constant. Cependant, si on démarre de n'importe quelle position (même arbitrairement proche de $\frac{q}{p+q}$), l'état de la population s'éloignera de $\frac{q}{p+q}$ pour converger vers 0 ou vers 1. Formellement, on a que $\frac{q}{p+q}$ est un point stationnaire qui n'est pas asymptotiquement stable.

Dans le cas où $p, q < 0$ (image du bas de la figure 8) on remarque que $\frac{q}{p+q}$ est un point stationnaire *stable*. En effet si l'on démarre de n'importe quel état initial, différent de 0 et de 1, l'état de la population va converger vers $\frac{q}{p+q}$. Formellement, $\frac{q}{p+q}$ est asymptotiquement stable.

Sur les figures 7 et 8, les points colorés en rouge sont stationnaires mais pas asymptotiquement stable, alors que les points colorés en vert sont asymptotiquement stables.

Figure 8 – p et q sont de même signe



Si on considère la théorie classique des jeux, la simple analyse des équilibres de Nash ne permet pas de distinguer la nature stable de $\frac{q}{p+q}$, quand $p, q < 0$, de sa nature instable, quand $p, q > 0$. Cette nuance peut en fait être apportée grâce au concept de *stratégie évolutivement stable*.

Définition 7 (Stratégie évolutivement stable). Soit $\mathcal{G}$ un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $\sigma \in \Delta(A)$. On dit que σ est une **stratégie évolutivement stable** si et seulement si elle satisfait aux deux conditions suivantes.

– (σ, σ) est un équilibre de Nash.
– $\forall \sigma'(\neq \sigma)\ g(\sigma', \sigma) = g(\sigma, \sigma) \Rightarrow g(\sigma', \sigma') < g(\sigma, \sigma')$.

Exemple 6 (Illustration du concept de stratégies évolutivement stables). Quand on regarde les deux jeux de la figure 9, on peut facilement se convaincre que (a, a), (b, b) et (c, c) sont des équilibres de Nash. Cependant, seules b et c sont des stratégies évolutivement stables.

Figure 9 – Stratégies évolutivement stables

	a	b
a	(1,1)	(1,1)
b	(1,1)	(2,2)

	c	d
c	(1,1)	(1,1)
d	(1,1)	(0,0)

Retournons maintenant à la discussion concernant les jeux $\mathcal{G}(p,q)$ de la figure 6 dans le cas où p et q sont de même signe.

- Quand $p,q>0$, nous avions identifié trois équilibres de Nash : (p,p), (q,q) et $(\sigma^\star,\sigma^\star)$. On peut montrer que p et q sont évolutivement stables alors que $\sigma^\star$ ne l'est pas. On peut par ailleurs constater que les points p et q sont (asymptotiquement) stables, alors que $\sigma^\star$ ne l'est pas.
- Quand $p,q<0$. nous avions identifié un unique équilibre de Nash symétrique : $(\sigma^\star,\sigma^\star)$. On peut montrer que la stratégie $\sigma^\star$ est évolutivement stable. On peut par ailleurs constater que dans ce cas l'état $\sigma^\star$ est en fait (asymptotiquement) stable.

3.4 – Équilibre et stabilité

Dans la section précédente, dans un cadre restreint, nous avons constaté des similitudes entre l'analyse classique et l'analyse évolutionnaire d'un même jeu. Un autre jeu sur lequel il est très intéressant de se pencher pour observer ces similitudes est le jeu *Pierre-Papier-Ciseaux* (voir [14]). Ces similitudes ne sont pas le cas du hasard comme l'illustrent les théorèmes suivants.

Théorème 2. *Soit $\mathcal{G}$ un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $\sigma^\star \in \Delta(A)$. Si $\sigma^\star$ est un point stable au sens de Lyapunov pour la dynamique de réplication induite par $\mathcal{G}$, alors $(\sigma^\star,\sigma^\star)$ est un équilibre de Nash du jeu $\mathcal{G}$.*

Théorème 3. *Soit $\mathcal{G}$ un jeu sous forme stratégique symétrique. Soit $\sigma^\star \in \Delta(A)$. Si $\sigma^\star$ est une stratégie évolutivement stable dans le jeu $\mathcal{G}$, alors $\sigma^\star$ est un point asymptotiquement stable pour la dynamique de réplication induite par $\mathcal{G}$.*

Il existe d'autres théorèmes de ce type liant la stabilité dynamique aux équilibres statiques (voir par exemple [14]).

3.5 – À propos des hypothèses

La théorie des jeux évolutionnaires est souvent définie comme une application de la théorie des jeux à l'étude de l'évolution de populations. Cette définition, bien que correcte, ne permet pas, selon nous, d'appréhender l'énorme différence conceptuelle qui sépare la théorie classique des jeux de la théorie des jeux évolutionnaires. Cette différence fondamentale réside dans les hypothèses qui soustendent les deux théories. Nous avons déjà évoqué l'importance des hypothèses de rationalité, d'égoïsme et d'intelligence des joueurs dans le cadre de la théorie classique des jeux. Dans le cadre de la théorie des jeux évolutionnaires, on abandonne complètement ces hypothèses. Les individus qui constituent les populations étudiées ne sont pas supposés rationnels, ni égoïstes, ni intelligents. Ils sont juste « génétiquement programmés » à jouer d'une certaine façon, sans aucun aspect stratégique.

Au vu de ces différences conceptuelles, les résultats du type de ceux énoncés dans la section 3.4 sont d'autant plus surprenants et font écho à la citation de Bertrand Russell du début de cet article.

Dans cette section, il ne sera pas question de faisans, encore moins de claques, mais bien de réseaux informatiques. Sur les pas de Russell, nous (re-)découvrirons les principes du réseau Internet, du calcul des chemins qui le traversent, et de problèmes de non-convergence, en vue d'établir d'intéressants parallèles avec la théorie des jeux...

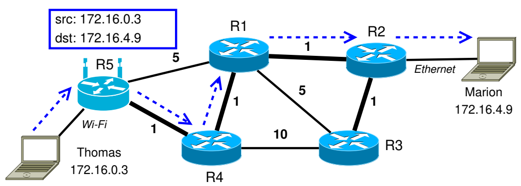
3.6 – Internet pour les nuls

Si l'objectif du réseau Internet est une évidence pour la plupart d'entre nous aujourd'hui – acheminer des données d'un ordinateur à un autre – les détails de son fonctionnement sont souvent méconnus. Ainsi, le réseau Internet est constitué d'ordinateurs spécialisés, appelés *routeurs*, qui font suivre à nos données des chemins prédéterminés, successions de liens de natures et technologies variées. L'*Internet Protocol* (ip) rend interopérables ces technologies en cachant les détails propres à chacune. Il régit, par exemple, la façon d'identifier chaque ordinateur à l'aide d'une adresse ip. Le protocole ip impose aussi le regroupement des données transmises en *paquets* de taille limitée, acheminés chacun indépendamment. Chaque paquet est préfixé par les adresses ip de la source et de la destination. L'adresse destination permet de déterminer vers où le paquet doit être acheminé tandis que l'adresse source permet au destinataire de répondre.

Acheminer un paquet le long d'un chemin consiste, pour chaque routeur intermédiaire, à diriger le paquet vers le routeur suivant, jusqu'à atteindre la destination. Chaque routeur dispose à cet effet d'une table d'acheminement qui, à chaque adresse destination, fait correspondre le routeur suivant. Le *routage* est le processus qui détermine les chemins empruntés par les paquets et les tables d'acheminement qui en découlent. La figure 10 illustre l'acheminement d'un paquet le long du chemin R5, R4, R1, R2.

On parle de *routage statique* lorsque le contenu des tables d'acheminement est fourni manuellement aux routeurs par les opérateurs de réseaux. Étant données la taille des réseaux et la fréquence à laquelle ils changent (évolution, pannes), cette approche est peu pratique.

FIGURE 10 – Réseau composé de 5 routeurs.



3.7 – Routage dynamique

Le *routage dynamique* [1] consiste à laisser les routeurs déterminer eux-mêmes dynamiquement et de manière distribuée le chemin menant à chaque destination.

Une approche classique, nommée *routage à états de liens*, consiste pour chaque routeur à d'abord découvrir la *topologie* du réseau et ensuite calculer indépendamment les chemins les plus courts ou de moindre coût vers tous les autres routeurs. La topologie du réseau est modélisée par le graphe dirigé pondéré $G = (V, E)$ dans lequel V représente l'ensemble des routeurs et $E \subseteq V \times V$ l'ensemble des liens entre ces derniers. La fonction $c(u, v) > 0$ donne le coût des arcs fixés par l'opérateur du réseau en fonction de la latence, du débit ou de la charge des liens. Un chemin est une suite $u_1 u_2 \dots u_n$ où $n > 1$ et $(u_i, u_{i+1}) \in E, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}$. Le coût d'un chemin $u_1 u_2 \dots u_n$ est alors défini comme la somme des coûts des arcs qui le composent, i.e. $\sum_{i=1}^{n-1} c(u_i, u_{i+1})$. Le réseau de la figure 10, peut être modélisé par un tel graphe. Chaque lien y est étiqueté avec un coût identique dans les deux directions. Le coût du lien (R4,R3) vaut 10 tandis que le chemin de plus faible coût menant de R4 à R3 est R4,R1,R2,R3, de coût égal à 3.

Un *protocole d'inondation* permet à l'ensemble des routeurs d'apprendre le graphe G. Ce protocole consiste pour chaque routeur à annoncer à l'ensemble de ses voisins la liste de ses voisins et du coût menant à chacun d'eux. Par exemple, dans le réseau de la figure 10, le routeur $R4$ annoncerait le paquet d'état de liens $\{(R5, 1), (R1, 1), (R3, 10)\}$. Cette information est répétée de routeur en routeur de sorte que chacun d'entre eux puisse reconstituer G. Une fois G connu d'un routeur u, ce dernier applique un algorithme tel que celui de Dijkstra [5] pour calculer les plus courts chemins vers tous les autres routeurs. Pour chaque destination, le *routeur suivant* à utiliser est le successeur de u le long du plus court chemin ainsi calculé.

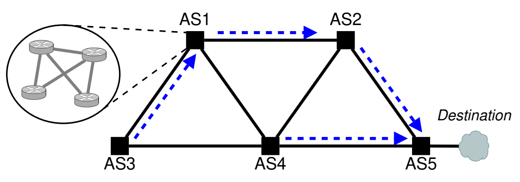
3.8 – Routage interdomaine et politiques

Plusieurs complications viennent s'ajouter lorsque l'on considère le routage à l'échelle d'Internet. Premièrement, Internet n'est pas un réseau unique, mais bien l'interconnexion d'une multitude de réseaux – plus de 65000 à l'heure d'écrire ces lignes – sous le contrôle d'entités administratives différentes, dénommées *domaines* ou *Systèmes Autonomes* (AS). Il s'agit de fournisseurs d'accès à Internet, d'entreprises, d'universités, etc. Il n'est pas souhaitable que chaque AS soit connecté directement à l'ensemble des autres AS. Par conséquent, il est généralement nécessaire de passer par un ou plusieurs AS intermédiaires pour joindre une destination.

Deuxièmement, tous les AS ne sont pas sur un pied d'égalité. La plupart d'entre eux paient un ou plusieurs autres AS pour pouvoir envoyer et recevoir des paquets vers et à partir de destinations distantes, au travers de leurs réseaux. Les AS ont donc intérêt à influencer le choix des chemins. Par exemple, il peut être intéressant de préferer une route plus longue, mais moins coûteuse qu'une autre route. Un AS pourrait aussi vouloir éviter une route car elle n'est pas viable économiquement ou parce qu'elle traverse un réseau concurrent par lequel il serait risqué de faire passer ses données.

Pour ces raisons, le routage dans l'Internet est organisé en deux niveaux. Au sein du réseau d'un AS, le routage **intradomaine** se charge de déterminer les routes vers les destinations internes à l'AS, en utilisant des techniques telles que décrites en section 3.7. Par opposition, le routage **interdomaine** se charge de déterminer les routes vers les destinations extérieures aux AS. Le routage interdomaine est effectué sur le graphe des AS, abstrayant par conséquent les détails internes à chaque AS (voir figure 11), ce qui lui permet de **passer à l'échelle** des centaines de milliers de destinations et millions de routeurs impliqués dans le calcul des routes.

Figure 11 – Internet, un graphe d'AS



3.9 – Le Border Gateway Protocol (BGP)

Le routage interdomaine nécessite la collaboration des routeurs de l'ensemble des AS. Le *Border Gateway Protocol* (BGP) a été standardisé à cet effet. Il définit comment les routeurs s'annoncent la joignabilité de destinations et comment les routes pour joindre celles-ci sont sélectionnées.

Dans la suite de l'article, nous présentons une version très simplifiée de BGP. Nous considérons que chaque AS est composé d'un unique routeur et, sans perte de généralité, une seule destination, confondue avec l'AS auquel elle est attachée et désignée par $v_\perp$. Nous considérons donc un graphe $G = (V, E)$ où V est l'ensemble des AS et $E \subseteq V \times V$ est l'ensemble des liens entre AS.

BGP est un protocole dit *à vecteur de chemins* : pour annoncer la joignabilité de $v_\perp$ à un voisin, un AS annonce son actuel meilleur chemin vers $v_\perp$. Les chemins ont un double rôle dans BGP : leur longueur peut servir de critère de sélection et leur contenu permet d'éviter des boucles de routage ; seuls les chemins simples, c'est-à-dire sans cycle, sont utilisables. Les chemins manipulés par BGP sont des séquences d'AS $\pi = v_1 v_2 \dots v_k$ de longueur $k \geqslant 1$ où $v_k = v_\perp$ et tels que $\forall i \in \{2, \dots, k\}, (v_{i-1}, v_i) \in E$. On note $|\pi|$ la longueur du chemin π. On note ϵ l'absence de chemin, un chemin non simple ou un chemin non permis par une politique de routage. Pour chaque $v \neq v_\perp$, posons R_v l'ensemble des chemins $\pi_{v,u}$ reçus par v de ses voisins u, et π_v le meilleur chemin parmi R_v.

Pour calculer les routes menant vers une destination, BGP procède de la façon suivante. Initialement, seul l'AS $v_\perp$ connaît la destination, donc pour chaque $v \neq v_\perp$, R_v est vide et par conséquent, $\pi_v = \epsilon$. $v_\perp$ annonce le chemin $v_\perp$ à ses voisins. Lorsqu'un AS v reçoit un nouveau chemin $\pi_{v,u} = u \dots v_\perp$ d'un voisin u, il remplace dans R_v l'ancien chemin reçu de u par $v\pi_{v,u}$ de sorte à toujours garder le dernier chemin de chaque voisin. Il sélectionne ensuite son nouveau meilleur chemin π_v. S'il a été modifié, il l'annonce à ses voisins, et ainsi de suite. Dans le cas où $\pi_{v,u} = \epsilon$ (u n'a pas de chemin), s'il contient déjà v (ce qui causerait une boucle) ou si ce chemin n'est pas permis par la politique de routage de v, alors le chemin de u est retiré de R_v.

Lorsque le contenu de R_v a changé, la meilleure route π_v est re-calculée en ordonnant R_v à l'aide de la relation d'ordre lexicographique suivante : soient deux chemins $\pi_1 = vv_1 \dots v_\perp$ et $\pi_2 = vu_1 \dots v_\perp$ de R_v, on a que $\pi_1 \prec_v \pi_2$ si et seulement si

$$
\begin{gathered}
(\lambda_v(\pi_1) < \lambda_v(\pi_2)) \\
\vee\ (\lambda_v(\pi_1) = \lambda_v(\pi_2) \wedge |\pi_1| < |\pi_2|) \\
\vee\ (\lambda_v(\pi_1) = \lambda_v(\pi_2) \wedge |\pi_1| = |\pi_2|) \wedge v_1 < u_1)
\end{gathered}
$$

où λ_v est une fonction qui associe une valeur scalaire à un chemin π, permettant à l'AS v d'exprimer sa préférence locale pour ce chemin. Deux chemins π_1 et π_2 sont donc d'abord comparés entre eux sur base de λ_v. S'ils ont une préférence locale égale, ils sont ensuite comparés sur base de leur longueur. Finalement, s'ils sont de même longueur, ils sont comparés sur base de l'identifiant du voisin ayant annoncé le chemin. Cette dernière règle assure qu'il n'y a jamais qu'une meilleure route. Cette façon de procéder permet de définir une relation d'ordre total strict sur R_v. Si R_v est non vide, alors π_v la meilleure route de v est celle qui est classée première par la relation $\prec_v$. Sinon, $\pi_v = \epsilon$.

À l'issue du calcul de sa meilleure route π_v et, si cette dernière a changé, v l'annonce à son tour à ses voisins. Ce processus se poursuit jusqu'à ce qu'aucun routeur ne change sa meilleure route. On dit alors que le protocole de routage a convergé.

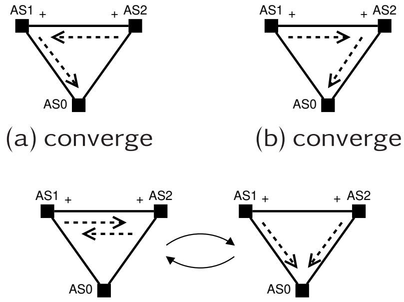
À titre d'illustration, la figure 11 montre un ensemble possible de chemins menant à l'AS5. AS4 suit le chemin 4, 5 alors que AS3 utilise 3, 1, 2, 5. Ce dernier n'est pas un plus court chemin, ce qui pourrait être dû, par exemple, à une préférence accordée par AS3 aux chemins passant par AS1 ou parce que le chemin 3, 4, 5 n'est pas permis.

3.10 – Convergence de BGP

Le procédé mis en œuvre par BGP pour construire les routes interdomaines peut ne jamais converger, soit car aucune solution stable n'existe, soit parce qu'une telle situation ne peut être atteinte.

Pour illustrer ce phénomène, considérons le système BGP le plus simple susceptible de ne pas converger, DISAGREE, illustré à la figure 12. Il est composé de 3 AS, tous connectés entre eux, cherchant à déterminer leur meilleure route vers AS0. AS1 (resp. AS2) préfère passer par AS2 (resp. AS1), ce qui se traduit par $\lambda_1(1,0) < \lambda_1(1,2,0)$ et $\lambda_2(2,0) < \lambda_2(2,1,0)$. Ce système peut mener à trois situations différentes : convergence (figures 12(a) et (b)) et oscillation (figure 12(c)).

Figure 12 – DISAGREE : trois issues possibles



(a) converge (b) converge

(c) oscille

Considérons d'abord les cas où le système converge. Ces deux solutions étant symétriques, nous ne discutons que celle de la figure 12 (a). Afin d'atteindre cette solution, nous prenons l'hypothèse supplémentaire que le temps de propagation des messages n'est pas égal sur tous les liens : il vaut une unité sur les liens (AS0, AS1) et (AS1, AS2) contre 10 unités pour (AS0, AS2).

Au démarrage du système en $t = 0$, AS0 annonce la joignabilité de la destination à AS1 et AS2. Cette information parvient à AS1 au temps $t = 1$. Comme il s'agit de sa seule route, AS1 sélectionne le chemin $1,0$ et l'annonce à AS2. Au temps $t = 2$, AS2 reçoit le chemin annoncé par AS1 et le sélectionne comme meilleure route. AS2 l'envoie à ses voisins. Au temps $t = 3$, AS1 reçoit le chemin d'AS2 mais le considère non faisable (car causerait un cycle). Finalement, au temps $t = 10$, AS2 reçoit le chemin $2,0$ mais ne change pas sa meilleure route car il préfère $2,1,0$. Le système a convergé.

Tableau 1 – Convergence de DISAGREE

t	u	R_u (π_u en gras)	Annonces
0	AS0		$(0) \to$ AS1 $(0) \to$ AS2
1	AS1	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(1,0) \to$ AS2
2	AS2	$(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(2,1,0) \to$ AS1
3	AS1	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	
10	AS2	$(2,0),(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{0})$	

Supposons à présent que les temps de propagation soient tous égaux à 1 unité. La trace correspondante est donnée dans le tableau 2. En $t = 0$, AS0 s'annonce à AS1 et AS2. Ceux-ci reçoivent cette annonce simultanément au temps $t = 1$, sélectionnent respectivement les chemins $1,0$ et $2,0$ et les annoncent à leurs voisins. Au temps $t = 2$, ils reçoivent simultanément ces annonces : AS1 sélectionne $1,2,0$ car il le préfère à $1,0$ et symétriquement AS2 sélectionne $2,1,0$. Au temps $t = 3$, AS1 et AS2 reçoivent respectivement les chemins $2,1,0$ et $1,2,0$ qui sont non faisables. Ils ne disposent donc plus que de leur route directe, et la sélectionnent à nouveau. Il s'agit de la même situation qu'en $t = 1$. Le système oscille.

Tableau 2 – Oscillation de DISAGREE

t	u	R_u	Annonces
0	AS0		$(0) \to$ AS1 $(0) \to$ AS2
1	AS1	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(1,0) \to$ AS2
	AS2	$(\mathbf{2},\mathbf{0})$	$(2,0) \to$ AS1
2	AS1	$(1,0),(\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{0})$	$(1,2,0) \to$ AS2
	AS2	$(2,0),(\mathbf{2},\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(2,1,0) \to$ AS1
3	AS1	$(\mathbf{1},\mathbf{0})$	$(1,0) \to$ AS2
	AS2	$(\mathbf{2},\mathbf{0})$	$(2,0) \to$ AS1
(...)			

La convergence du protocole BGP a fait l'objet de nombreuses études. Dans un article considéré comme fondateur, Griffin et al [6] posent les questions suivantes : (1) un système BGP admet-il au moins un état stable ; (2) la solution est-elle unique ; et (3) le système converge-t-il toujours vers un état stable. Ils donnent également une condition suffisante pour la convergence, l'absence d'une **Dispute Wheel**, un « *ensemble de dépendances circulaires entre les politiques de routage, qui ne peuvent être satisfaites simultanément* ». Sami *et al.* [13] montreront plus tard que l'existence de multiples états stables est une condition suffisante pour empêcher la convergence d'un système BGP.

4. Le point commun entre un couple de faisans et une paire de claques

Comme Russel l'a suggéré, quand on crée des mathématiques, on cherche à faire des liens entre des notions qui sont à première vue différentes. Dans cet esprit, au sein de cette section, nous tenterons de répondre aux questions suivantes : comment peut-on lier la théorie des jeux avec le routage dans les réseaux ? Peut-on définir certains types de liens entre les jeux afin de maintenir la convergence des dynamiques ? Y a-t-il toujours un lien entre les équilibres statiques et dynamiques ?

Dans les sections précédentes, nous avons tenté de résumer de multiples résultats de recherches établis par de nombreux chercheurs pendant plusieurs décennies. A contrario, le contenu de cette section s'inspire essentiellement d'un article récent auquel nous avons participé [3].

4.1 – Le routage internet, un jeu sur graphe

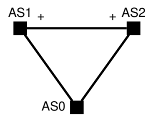
Nous allons premièrement montrer qu'on peut modéliser le routage Internet par un jeu sur graphe. On a vu que la topologie d'un réseau est constituée d'un graphe dirigé (V,E) où V est l'ensemble des AS et E les arêtes entre ces derniers. Le but des AS est d'amener leurs paquets vers un certain nœud destination, et leurs *actions* correspondent à leur choix du voisin par lequel ils veulent faire passer ce paquet.

Un jeu stratégique

Une première idée pour modéliser ce routage en un jeu est de le voir comme un jeu sous forme stratégique. Pour rappel, un jeu sous forme stratégique à deux joueurs est la donnée de $\mathcal{G} = (A_1, A_2, g_1, g_2)$ où A_i est l'ensemble des actions du joueur i, et $g_i : A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ sa fonction de gain. Dans le cadre qui nous intéresse, le jeu ne sera pas limité à deux joueurs, on définira donc $A_1, \dots, A_n$ et $g_1, \dots, g_n$ les actions et les fonctions de gain des n joueurs.

Pour plus de simplicité, regardons ce qu'il se passe sur le système DISAGREE dont on a déjà parlé à la section précédente, et représenté à la figure 13, à gauche. Parmi les trois AS, seuls AS1 est AS2 ont des actions : ils représenteront nos joueurs (respectivement joueur 1 et joueur 2), tandis que AS0 représente la cible. Les deux joueurs peuvent soit continuer (C) en envoyant leur paquet à l'autre joueur, ou stopper (S) en envoyant leur paquet à la cible. Comme vu à la section 2, on peut représenter les fonctions de gain par une matrice comme à la droite de la figure 13.

FIGURE 13 – Matrice associée à DISAGREE



	C	S
C	$(-\infty, -\infty)$	$(2, 1)$
S	$(1, 2)$	$(1, 1)$

Rappelons que le but des joueurs est d'atteindre la cible. Dès lors, le profil de stratégie (C, C), qui correspond à ϵ dans le Tableau 2, a un gain de $-\infty$ pour chaque joueur car ils n'atteignent pas leur objectif. De plus, on avait vu que les deux AS préféraient leur chemin indirect vers la cible. Cela est représenté dans la matrice de gain. Par exemple le profil de stratégie (C, S), correspond à la situation représentée à la figure 12 (b). On voit que dans ce cas le joueur 1 a son chemin préféré, auquel on donne donc un gain de 2, alors que le joueur 2 a un gain de 1, car il préfère le profil (S, C) représenté à la figure 12 (a), qui donne un gain de 2 au joueur 2 et un gain de 1 au joueur 1.

On remarque que les deux équilibres des Nash du jeu sont (C, S) et (S, C), qui correspondent aux deux solutions stables obtenues à la figure 12.

Un jeu sur graphe

Cependant, cette manière de définir le jeu s'éloigne de la vision du réseau, qui peut être assimilé à un graphe. Modélisons le routage par un jeu sur graphe en nous basant sur le jeu sous forme stratégique que l'on vient de définir. Soit (V, E) un graphe dirigé tel que $V = \{v_1, \dots, v_n, v_\perp\}$. Alors $v_\perp$ représentera la cible et v_i le nœud du joueur i. Pour plus de simplicité, on note $\overline{V} = V \setminus \{v_\perp\}$.

Les actions d'un joueur correspondent au choix du voisin à qui il veut envoyer son paquet. Pour un joueur i et un profil de stratégies $\mathbf{s} = (a_1, \dots, a_n)$, on peut construire un unique chemin $\pi(i, \mathbf{s})$ de manière récursive : $\pi(i, \mathbf{s}) = v_i \ \pi(\mathbf{s}(i), \mathbf{s})$, autrement dit, une route qui démarre en v_i et suit le profil de stratégies $\mathbf{s}$. Pour notre exemple DISAGREE, de la figure 13, si $\mathbf{s} = (C, S)$, on a $\pi(1, \mathbf{s}) = v_1 v_2 v_\perp$ tandis que $\pi(2, \mathbf{s}) = v_2 v_\perp$.

Notons Π_v l'ensemble de tous les chemins simples de v à $v_\perp$ et $\tilde{\Pi}_v$ l'ensemble des chemins commençant en v et menant à une boucle. Pour tout $\mathbf{s}$ et v nœud du joueur i, $\pi(i,\mathbf{s}) \in \Pi_v \cup \tilde{\Pi}_v$. On définira donc la fonction de gain g_{v_i} du joueur i non plus directement sur le profil de stratégies, mais sur le chemin qui en découle. On aura donc pour chaque $v \in \overline{V}$, $g_v : \Pi_v \cup \tilde{\Pi}_v \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. En particulier, pour $\pi \in \tilde{\Pi}_v$, $g_v(\pi) = -\infty$. De plus, comme dit précédemment, un AS v peut filtrer une route π par exemple s'il ne la trouve pas économiquement viable ou si elle passe par un réseau concurrent. Ces routes auront dès lors également un gain de $-\infty$. Notons que la fonction g_v correspond exactement à la relation $\prec_v$ de la section 3.9. En effet $g_v(\pi_1) < g_v(\pi_2) \Leftrightarrow \pi_1 \prec_v \pi_2$.

Un jeu $\mathscr{G}$ sera donc la donnée de $(V, E, (g_v)_{v\in\overline{V}})$.

Revenons à l'exemple DISAGREE. On a donc $\mathscr{G}^{DIS} = (V, E, (g_v)_{v\in\overline{V}})$ tel que $V = \{v_1, v_2, v_\perp\}$ où v_1 représente AS1, v_2 représente AS2 et $v_\perp$ représente AS0. $E = \{(v_1,v_2),(v_2,v_1),(v_1,v_\perp),(v_2,v_\perp)\}$ et g_v est la fonction de gain associée à la matrice de la figure 13. Par exemple, $g_{v_1}(v_1 v_2 v_\perp) = g_1(C,S) = 2$ tandis que $g_{v_2}(v_2 v_\perp) = g_2(C,S) = g_2(S,S) = 1$.

4.2 – BGP, une dynamique d'évolution

Nous allons maintenant montrer que, en plus des liens *statiques* que nous venons d'expliciter entre le routage et la théorie des jeux, nous pouvons également lier les aspects dynamiques de ces deux domaines. Intéressons-nous de plus près à présent à BGP, et voyons comment on peut voir cette démarche comme une dynamique d'évolution.

Comme décrit à la section 3.8, initialement, la destination commence par annoncer son chemin vers elle-même à ses voisins. Dès qu'un nœud reçoit l'annonce d'une route, il choisit sa meilleure route parmi celles disponibles puis l'annonce à son tour à ses voisins, et ainsi de suite. Lorsqu'une nouvelle route lui est annoncée, un AS peut reconsidérer sa route actuelle afin de choisir la meilleure des deux routes proposées, et ainsi envoyer à ses voisins sa nouvelle meilleure route. On dit que le protocole, ou dynamique, s'arrête lorsque plus aucun AS ne veut changer sa route choisie. Comme on l'a vu précédemment, une question principale est de savoir si cette dynamique va s'arrêter ou non.

Comment adapter ce protocole au modèle théorique de théorie des jeux, et plus précisément cette idée de convergence ? Au lieu de déterminer le ou les équilibres de Nash du jeu comme à la section 2, pour n'importe quel profil de stratégie $\mathbf{s}$, on va permettre aux joueurs de changer leur stratégie pour l'améliorer pour le round suivant, et ainsi de suite jusqu'à ce que plus aucun joueur ne souhaite changer sa stratégie.

Nous avons vu au Tableau 2 que plusieurs changements peuvent se faire en même temps. Lorsqu'un joueur change son choix, il tente de s'améliorer mais ce n'est pas toujours ce qui se passe. Par exemple, on voit qu'au temps 2, AS1 décide de prendre sa route vers AS2, et AS2 décide de prendre sa route vers AS1, ce qui les amène à un chemin qui n'atteint plus la cible.

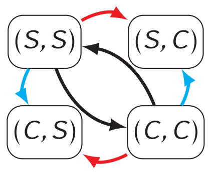
Dans ce contexte, on modélisera cette possibilité de manière simplifiée par de la concurrence, c'est-à-dire le fait que plusieurs joueurs peuvent changer en même temps. On appelle dynamique de routage $\to$ la dynamique qui respecte les conditions suivantes : pour deux profils de stratégies $\mathbf{s}$ et $\mathbf{s}'$, on aura $\mathbf{s} \to \mathbf{s}'$ si tous les joueurs qui changent leur stratégie de $\mathbf{s}$ à $\mathbf{s}'$ le font dans le but de s'améliorer.

Illustrons cette dynamique sur l'exemple DISAGREE de la figure 13. Soit $\mathbf{s} = (S,S)$, le profil de stratégie où les deux joueurs décident d'aller immédiatement vers la cible. Les deux joueurs se disent, au même moment, qu'il serait plus intéressant pour eux de changer de stratégie. En effet, sans savoir que l'autre change aussi, ils s'imaginent avoir un gain de 2 au lieu de 1. Or, ce changement $\mathbf{s} \to \mathbf{s}'$ mène vers $\mathbf{s}' = (C,C)$ qui leur apporte à tous les deux un gain de $-\infty$. Une autre possibilité de changement, toujours en commençant en $\mathbf{s} = (S,S)$, est que uniquement le joueur 1 décide de changer sa stratégie. On aura alors $\mathbf{s} \to \mathbf{s}''$, avec $\mathbf{s}'' = (C,S)$.

4.3 – Un graphe de dynamique

Afin d'avoir une vision globale de la dynamique d'un jeu sur graphe, nous allons représenter cette dynamique, elle aussi, par un graphe. Il sera important de distinguer ces deux graphes.

FIGURE 14 – Graphe de dynamique de DISAGREE



Changements du joueur 1 (resp. joueur 2) en bleu (resp. rouge). Changements des deux joueurs en noir.

Nous retrouverons, premièrement, le graphe du jeu, noté (V,E) avec V les nœuds qui représentent les AS, et E les arêtes qui représentent les liens entre deux AS. Deuxièmement, pour $\mathbf{S}$ l'ensemble des profils de stratégie du jeu, nous introduisons le graphe de la dynamique $(\mathbf{S},\to)$, dont les nœuds représentent les profils de stratégies, et $\to$ représente la dynamique de routage. Une arête $(\mathbf{s},\mathbf{s}')$ sera dans le graphe si $\mathbf{s}\to\mathbf{s}'$ comme vu précédemment.

Afin d'illustrer ce nouveau graphe de dynamiques, reprenons l'exemple DISAGREE à la figure 13. Dans ce jeu, il y a quatre profils de stratégie : $(S,S),(S,C),(C,S)$ et (C,C). On a expliqué que l'on pouvait par exemple passer de (S,S) à (C,C) à l'aide de la dynamique de routage, ainsi que de (S,S) à (C,S). Un raisonnement similaire peut être fait afin d'obtenir le graphe illustré à la figure 14.

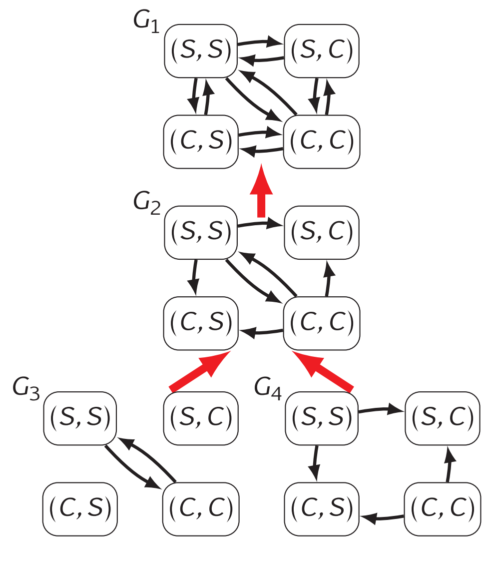
Dès lors, déterminer si la dynamique termine pour un certain jeu revient à déterminer si le graphe de dynamique est acyclique. On voit facilement que le graphe de dynamique de la figure 14 n'est pas acyclique, ce qui implique que la dynamique de routage ne termine pas sur DISAGREE, ce qui avait été vu à la figure 12.

4.4 – Simulation de graphe de dynamique

Il est naturel de se demander si deux jeux qui se « ressemblent » vont nécessairement avoir des comportements dynamiques « semblables ». En d'autres termes, on se demande si leurs graphes de dynamiques respectifs sont « semblables ». Ces idées peuvent être formalisées à l'aide du concept de *simulation*.

Intuitivement, on dira que le graphe (de dynamique) $G=(\mathbf{S},\to)$ simule le graphe (de dynamique) $G'=(\mathbf{S}',\to')$ si tout ce qui peut être fait dans le graphe G' peut être fait dans le graphe G. On peut montrer que cette relation de simulation ainsi définie est un préordre (i.e. une relation binaire transitive et symétrique). Illustrons ce concept sur un exemple.

FIGURE 15 – Exemple de préordre de simulation sur graphe



On note G' ➡ G lorsque G simule G'.

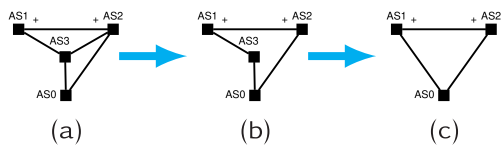
On voit clairement qu'il s'agit d'une relation de préordre : G_2 simule à la fois G_3 et G_4, mais ces deux derniers sont incomparables. De plus, comme G_1 simule G_2, il simule également G_3 et G_4.

Sur l'exemple, on voit également que s'il y a un cycle dans un graphe G', tous les graphes G qui le simulent auront également un cycle. Cette propriété est vraie en général. En effet, puisque ce graphe G doit être capable de faire *tout ce que* le graphe G' sait faire, en particulier il doit comporter un cycle. L'inverse n'est bien entendu pas vrai.

4.5 – Mineurs de jeux

À l'aide de la simulation, nous venons de définir une manière de comparer deux graphes (de dynamique). Afin d'opérer une comparaison similaire sur les jeux, nous allons introduire le concept de *mineur de jeux*. Cette notion est inspirée de la notion de mineur de graphes [8]. Pour ce faire, nous allons définir deux actions possibles à savoir supprimer une arête ou supprimer un nœud.

FIGURE 16 – Jeu dont Disagree est un mineur



On note $\mathscr{G}'$ ➡ $\mathscr{G}$
lorsque $\mathscr{G}$ est un mineur de $\mathscr{G}'$.

Regardons sur un exemple. Prenons le jeu de la figure 16 (a). On voit que pour passer au jeu de la figure 16 (b), on a enlevé l'arête (AS2, AS3) puis, pour passer au jeu DISAGREE que l'on connaît (figure 16 (c)), on a *enlevé* le nœud AS3 tout en prolongeant de la sorte les deux arêtes (AS1, AS3) et (AS3, AS0) en une unique arête (AS1, AS0).

Ces deux opérations (sous certaines conditions) sont les opérations autorisées dans la définition de mineur de jeu. On dira qu'un jeu $\mathscr{G}'$ est un mineur d'un jeu $\mathscr{G}$ s'il peut être obtenu par une succession de suppressions d'arêtes et de nœuds.

La notion de mineur est intéressante dans le cadre de la terminaison de dynamique, car nous avons le résultat suivant :

Théorème 4. *Soit deux jeux $\mathscr{G}$ et $\mathscr{G}'$ dont les ensembles de profils de stratégies sont respectivement $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}'$. Si $\mathscr{G}'$ est un mineur de $\mathscr{G}$, alors $(\boldsymbol{S}, \to)$ simule $(\boldsymbol{S}', \to)$. Et donc, si la dynamique termine pour $\mathscr{G}$, alors elle termine pour $\mathscr{G}'$.*

4.6 – Liens avec les équilibres

Nous avons vu, à la section 3.4, qu'il existait des liens très forts entre les notions d'équilibres au point de vue statique, et les notions de stabilité au point de vue évolutionnaire. Il en est de même dans le cas présent. Lorsqu'une dynamique termine, on peut voir les états terminaux comme une situation *stable* au point de vue dynamique. Et on remarque que ces états correspondent exactement aux équilibres de Nash.

Des résultats précis de ce type avec d'autres dynamiques peuvent être trouvés dans [12], [2].

5. Conclusion

Durant tout cet article, nous avons brassé de nombreux sujets concernant la théorie des jeux, la théorie des jeux évolutionnaires et les réseaux informatiques. Malgré les évidentes différences entre les objets rencontrés, nous espérons avoir fait émerger des similitudes entre eux, dans l'esprit de notre fil rouge : la citation de Russel qui reliait mathématiques, couple de faisans et paire de claques.

Références

[1] D. Bertsekas et R. Gallager. *Data Networks (2^{nd} Ed.)* Prentice-Hall, Inc., 1992.

[2] T. Brihaye et al. « Dynamics and Coalitions in Sequential Games ». In : *Proceedings of the 8^{th} International Symposium on Games, Automata, Logics and Formal Verification (GandALF)*. Sept. 2017, p. 136-150.

[3] T. Brihaye et al. « Dynamics on Games : Simulation-Based Techniques and Applications to Routing ». In : *Proceedings of the 39^{th} IARCS Annual Conference on Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science (FSTTCS)*. Leibniz International Proceedings in Informatics (LIPIcs). 2019, 35 :1-35 :14.

[4] L. De Brabandere et C. Ribesse. *Petite Philosophie des mathématiques vagabondes*. Eyrolles, 2011. isbn : 2212552408.

[5] E. W. Dijkstra. « A note on two problems in connexion with graphs ». *Numerische mathematik* **1**, nº 1 (1959), p. 269-271.

[6] T. Griffin, F. B. Shepherd et G. T. Wilfong. « The stable paths problem and interdomain routing ». *IEEE/ACM Trans. Netw.* **10**, nº 2 (2002), p. 232-243.

[7] D. Kahneman et A. Tversky. « Prospect theory : An analysis of decisions under risk ». *Econometrica* (1979), p. 263-291.

[8] L. Lovász. « Graph minor theory ». *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43**, nº 1 (2006), p. 75-86.

[9] J. Maynard Smith et G. R. Price. « The Logic of Animal Conflict ». *Nature* **246**, nº 5427 (1973), p. 15-18. doi : 10.1038/246015a0.

[10] J. F. Nash Jr. « Equilibrium points in *n*-person games ». *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **36** (1950), p. 48-49. issn : 0027-8424.

[11] M. J. Osborne et A. Rubinstein. *A course in game theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1994, p. xvi+352. isbn : 0-262-65040-1.

[12] S. L. Roux et A. Pauly. « A Semi-Potential for Finite and Infinite Sequential Games (Extended Abstract) ». In : *Proceedings of the 7^{th} International Symposium on Games, Automata, Logics and Formal Verification (GandALF)*. Sept. 2016, p. 242-256.

[13] R. Sami, M. Schapira et A. Zohar. « Searching for Stability in Interdomain Routing ». In : *Proceedings of the 28^{th} IEEE International Conference on Computer Communications (INFOCOM)*. Avr. 2009, p. 549-557.

[14] J. W. Weibull. *Evolutionary game theory*. MIT Press, Cambridge, MA, 1995, p. xxii+265. isbn : 0-262-23181-6.

Thomas Brihaye

Département de mathématique, université de Mons

thomas.brihaye@umons.ac.be

Thomas Brihaye est professeur dans le département de mathématiques de l'université de Mons (Belgique) et chef du service de mathématiques effectives. Il occupe ce poste depuis 2007, après un postdoc cnrs d'un an effectué au laboratoire spécification et vérification de l'Éns de Cachan. Ses recherches se situent à la frontière entre les mathématiques et l'informatique. Il s'intéresse en particulier aux modèles issus de la théorie des jeux et leurs applications en informatique.

Marion Hallet

Département de mathématique, université de Mons, département d'informatique, université libre de Bruxelles

marion.hallet@umons.ac.be

Marion Hallet est doctorante dans le département de mathématiques de l'université de Mons ainsi que dans le département d'informatique de l'université libre de Bruxelles (Belgique). Sa recherche, à la frontière entre les mathématiques et l'informatique, porte sur des problèmes de dynamique de jeux.

Bruno Quoitin

Département d'Informatique, université de Mons

bruno.quoiti@umons.ac.be

Bruno Quoitin est professeur dans le département d'informatique de l'université de Mons (Belgique) depuis 2009. Il y dirige le service de réseaux et télécommunications. Sa recherche porte sur les problèmes de routage et d'efficience énergétique dans les réseaux de capteurs sans fil.

Les auteurs remercient Benjamin Monmege pour sa relecture attentive et ses commentaires judicieux.

Des frontières de la civilisation à l'*Institute for Advanced Study* : comment *The Analyst* devint les *Annals of mathematics*

• D. Kent

Introduction

Les *Annals of mathematics* comptent, comme on le sait bien, parmi les journaux mathématiques les plus prestigieux à l'échelle internationale ; ils paraissent tous les deux mois et sont publiés conjointement par le département de mathématiques de l'université de Princeton et par l'*Institute for Advanced Study*. Les modestes débuts des *Annals*, qui eurent lieu dans les prairies centrales faiblement peuplées des États-Unis au cours de la seconde moitié du xixe siècle, sont en revanche demeurés bien plus confidentiels. Non seulement il s'agit là d'un cadre improbable pour retracer les origines d'un journal de mathématiques modernes, mais de plus le journal comporte à ses débuts des caractéristiques proprement inattendues.

1. Le contexte américain des publications mathématiques au cours du xixe siècle

Tout au long du xixe siècle, qui marque le début des activités scientifiques aux États-Unis, les praticiens [*practitioners*] dans les domaines de la chimie, de la géologie, de la biologie, des mathématiques, de la philosophie naturelle, etc., travaillèrent de concert pour mettre en place des sociétés savantes, créer des opportunités professionnelles et fournir des débouchés en termes de publications, afin de favoriser la science en général. Portés par ces efforts, des journaux tels que les *Transactions of the American Philosophical Society* (créé à Philadelphie en 1771) et les *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences* (fondé à Boston en 1785) virent le jour dans des centres urbains de la côte est, dans le but de faire circuler les écrits produits par des praticiens des sciences [*scientific practitioners*]. Des initiatives pour développer une telle infrastructure professionnelle se prolongèrent ensuite à des domaines scientifiques plus spécialisés. Les praticiens des mathématiques comptent parmi ceux qui consacrèrent le plus d'efforts à la mise en place de publications périodiques spécialisées.

Fondé en 1804 à New York, le *Mathematical Correspondent* fut le premier journal américain dédié aux mathématiques. Son rédacteur en chef, George Baron, conçut sa revue sur le modèle du *Ladies' Diary*, un journal britannique de questions/-réponses [*puzzle journal*]. Parmi les problèmes proposés dans *The Correspondent* figurent des opérations de conversion monétaire, des énigmes ainsi que la résolution d'équations. En proie à la maladie et aux querelles, Baron mit fin à son entreprise éditoriale dès 1806. Durant le restant du xixe siècle, des textes de mathématiques parurent dans un large éventail de périodiques américains, dont des journaux scientifiques généralistes, des publications dans les domaines du commerce et de l'industrie, des magazines féminins, ainsi que des journaux mathématiques spécialisés [17].

Au cours de la première moitié du xixe siècle, une formation officielle dans les sciences en général et les mathématiques en particulier demeurait rare aux États-Unis. L'académie militaire américaine fondée à *West Point* en 1802 est l'institution la plus ancienne visant à la formation des ingénieurs. Le *Rensselear Polytechnic* fut pour sa part mis sur pied en 1823. Plus tardivement, alors que les élites éduquées envisageaient avec beaucoup de scepticisme la professionnalisation des activités scientifiques, les universités de Yale et d'Harvard créèrent des écoles scientifiques, respectivement la *Sheffield School* (1843) et la *Lawrence Scientific School* (1846). À cette époque, rien ne permettait de définir l'identité d'un scientifique américain et, encore moins, celle d'un mathématicien américain.

Parmi les auteurs d'articles mathématiques dans des journaux scientifiques généralistes au cours du xviii^e^ siècle, on compte par exemple un membre du personnel de l'académie militaire, un ingénieur civil, un astronome, un actuaire, plusieurs enseignants du secondaire, des ecclésiastiques et des négociants [**p. 435**, 20]. Au milieu du xix^e^ siècle, les praticiens des mathématiques étaient principalement affiliés à des écoles secondaires ou des *rural colleges* [1] nouvellement créés ; la plupart d'entre eux étaient autodidactes en mathématiques, avec une formation officielle dans d'autres disciplines, telles que le droit ou la théologie. Cette population de praticiens a pu être estimée à environ 360 en 1850 [27].

Dans ce contexte, la création de revues mathématiques américaines fut favorisée par des initiatives locales dues à un groupe de mathématiciens-éditeurs étroitement liés les uns aux autres. Ces individus ambitieux imaginèrent des périodiques en mathématiques dont les objectifs auraient été de fédérer des lecteurs ayant une activité mathématique au-delà même de la revue, et de faire circuler en définitive des mathématiques de niveau recherche auprès de leur public. Leurs efforts constants pour publier des journaux mathématiques nous éclairent sur leur intérêt constant à soutenir une offre éditoriale spécialisée en mathématiques aux États-Unis, en dépit des obstacles récurrents pour mener pareille entreprise à bien. [2] Au cours du xix^e^ siècle, des éditeurs optimistes tels que Robert Adrain, Charles Gill, Benjamin Peirce ou encore J.D. Runkle, furent confrontés à la tâche ardue de correspondre avec des contributeurs. Les distances séparant les praticiens des mathématiques les uns des autres étaient souvent importantes ; peu d'entre eux furent d'ailleurs des mathématiciens accomplis. Certains abonnés s'appuyaient sur leurs propres contributions pour se former aux mathématiques et, souvent, il fallait compter une quantité de travail considérable pour que des soumissions deviennent publiables. Les difficultés liées à la création et à la pérennisation d'un journal spécialisé en mathématiques s'accentuaient en raison des contraintes d'emplacement géographique – dont la présence à proximité de bibliothèques et d'un équipement pour composer des textes mathématiques –, sans oublier des problèmes financiers récurrents. La plupart des périodiques américains en mathématiques cessèrent de paraître après quelques tirages seulement.

2. Joel E. Hendricks, un éditeur en mathématiques ?

Un journal fait curieusement exception à ce tableau, dominé par quelques publications périodiques intermittentes : *The Analyst : A monthly Journal of Pure and Applied Mathematics*. Parmi les périodiques américains spécialisés en mathématiques, *The Analyst* se distingue par sa longévité, par la personnalité de son éditeur et par sa localisation géographique. *The Analyst* parut pratiquement tous les mois entre 1874 et 1884 ; il fut édité par Joel E. Hendricks depuis la localité pour le moins inattendue de Des Moines dans les plaines de l'Iowa.

Les premiers journaux américains en mathématiques sont dus à l'intervention de figures marginales et peu connues, qu'il est parfois difficile d'identifier, faute de sources. Les copies des publications elles-mêmes peuvent être inaccessibles, tandis que les indices permettant de documenter leur budget, les données relatives aux abonnements ainsi que leur circulation demeurent rares. On peut dire malgré tout qu'au cours du xix^e^ siècle, les éditeurs de journaux américains appartenaient en général à des réseaux de praticiens des mathématiques implantés sur la côte est et liés à des institutions d'enseignement, des sociétés savantes ou encore à des entreprises éditoriales antérieures ; l'appartenance à ces réseaux pouvait également être favorisée par des liens sociaux plus personnels. Ainsi, certains de ces éditeurs, tels George Baron ou encore William Marrat – qui était à la tête du *Monthly scientific Journal* [3] – s'impliquèrent dans la publication de périodiques mathématiques du fait d'une expérience antérieure dans le domaine de l'édition. Joel Hendricks n'avait en revanche de lien ni avec les réseaux de praticiens des mathématiques de la côte est, ni avec la moindre entreprise éditoriale.

1. C'est-à-dire des établissements de premier cycle universitaire éloignés des grands centres urbains.
2. L'expérience de ces aspirants-rédacteurs en chef reflète les initiatives entrepreneuriales déployées par toute une série de revues scientifiques ailleurs. Par exemple, les débuts du *Edinburgh Philosophical Journal*, du *Philosophical Magazine*, du *Silliman's Journal*, et même de *Nature*, sont également soumises aux aléas du marché. Pour en savoir plus sur les publications du xix^e^ siècle en dehors des États-Unis, voir [1], [2], [3], [5] [4], [18], [19], et [21].
3. William Marrat était un éditeur anglais et un enseignant autodidacte en mathématiques qui vécut à New York entre 1817 et 1820.

Hendricks naquit en 1818 et suivit par intermittence l'école jusqu'à l'âge de douze-treize ans. Encore tout jeune homme, il enseigna à l'école de 1836 à 1840, tout en travaillant comme apprenti charron dans l'Ohio. Les soirs, il lisait des textes dédiés à l'astronomie et à la navigation, tels que le *Practical Navigator* de Nathanael Bowditch. En 1840, Hendricks entra dans une école de médecine. Il abandonna au bout de deux ans, sans avoir obtenu le moindre diplôme. Après son mariage en 1843, il ouvrit un cabinet médical. De 1850 à 1860, il exerça comme examinateur scolaire et comme fonctionnaire du gouvernement du comté. Son travail d'éducateur dans des écoles l'incita à s'impliquer dans la création d'une petite académie, dont il devint le premier président.

Au cours des années 1860, les États-Unis furent marqués par une période notable de transition et de bouleversements. Tout au long du XIXe siècle, l'expansion géographique due à l'annexion de territoires ainsi qu'à des conflits frontaliers – avec la ratification de 29 nouveaux états, pour un total de 45 en 1900 – amena la nation américaine à s'implanter à l'ouest au terme de décennies de guerres indiennes ininterrompues. Qui plus est, le terrain politique devint plus instable, avec l'extension de l'autorité du gouvernement fédéral et la multiplication des marques d'expression démocratique. Durant la première moitié du XIXe siècle, le pays fut parcouru tant par la ferveur religieuse que par le renouveau social, comme en attestent le second grand réveil, la montée en puissance des abolitionnistes et l'agitation des prohibitionnistes, tandis que les transcendantalistes Ralph Waldo Emerson et Henry David Thoreau développèrent une version américaine du romantisme européen. L'issue de la guerre américano-mexicaine accéléra les efforts pour relier le territoire de la Californie au reste des États-Unis.

Des milliers de kilomètres de câbles télégraphiques et de lignes de chemin de fer accélérèrent la croissance à l'ouest, tandis que l'industrialisation offrit une prospérité et une expansion sans précédent aux États-Unis. Les efforts significatifs de construction qui accompagnèrent l'expansion des États-Unis vers l'ouest s'accompagna d'une croissance rapide de la demande en géomètres-arpenteurs. Dans ce contexte, Hendricks fut affecté en 1861 à un poste d'arpenteur gouvernemental [*government survey*] dans le Colorado, alors qu'il avait 43 ans. Un peu plus tard cette même année, les tensions grandissantes, notamment sur la question de l'esclavage, conduisirent à la guerre de Sécession, laquelle se solda par des pertes américaines sans précédent et par des destructions majeures.

Hendricks déménagea à Des Moines dans l'Iowa en 1864, pour y travailler dans l'arpentage ferroviaire. Les compagnies ferroviaires construisaient alors des lignes de chemin de fer à travers l'Iowa, notamment pour relier la nouvelle capitale Des Moines à la métropole Chicago, située dans l'Illinois. Grâce à ce travail, Hendricks amassa une fortune confortable qui, plus tard, allait permettre à son entreprise éditoriale d'échapper à la pression menaçante d'un effondrement financier. Hendricks obtint en 1865 un diplôme de maîtrise à titre honoraire. Fortuné et lettré, Hendricks côtoyait les élites de Des Moines, une ville des prairies de l'Iowa devenue florissante en raison des nouvelles liaisons ferroviaires.

Au mois d'août 1869, une éclipse totale de soleil fut observée sur une zone qui traversa le continent américain, en partant de l'Alaska et en passant par l'Iowa et l'Illinois. Cet événement attira du personnel de l'*U.S. Coast Survey* [4], de l'*Hydrographic Office*, du *Surgeon General's Office* [5], de l'*Army Medical Museum* [6] et du *Naval Observatory* ; notons à ce propos la présence à Des Moines de Simon Newcomb [7] – accompagné de ses collègues mathématiciens William Harkness, M. Yarnell, Asaph Hall et J.R. Eastman [16]. Des professeurs et des étudiants issus de *colleges* et d'universités du *Midwest* ainsi que de la côte est se joignirent aux groupes d'observateurs. Des comptes rendus dans des journaux et des événements mondains furent dédiés aux scientifiques de passage, qui rencontrèrent le maire de Des Moines ainsi que d'autres dignitaires locaux. Ces festivités permirent vraisemblablement à Joel Hendricks, en tant qu'habitant de Des Moines, d'entrer en contact avec Newcomb ainsi qu'avec d'autres scientifiques qui avaient des connaissances et de l'expérience dans la publication de périodiques mathématiques.

4. C'est-à-dire l'institut fédéral chargé de la topographie côtière.
5. Autrement dit, l'état-major des services de santé de l'armée fédérale.
6. Fondé en 1862.
7. Qui deviendra plus tard le très influent directeur de l'almanach nautique [**p. 20-27**, 6].

3. Relever le défi aux confins de la civilisation

Hendricks fut élu au conseil municipal en 1872 et, peu après, il projeta de publier un périodique en mathématiques. Hendricks fit circuler l'information au sujet de ce projet éditorial et sollicita les avis de praticiens expérimentés dans le domaine des mathématiques. En novembre 1873, l'astronome et mathématicien George William Hill répondit franchement à Hendricks [8], estimant que les 16 pages de journal envisagées par Hendricks seraient de « peu d'intérêt pour le mathématicien de niveau avancé ». À en croire Hill, « la science américaine est restée provinciale étant donné que nos hommes de sciences ont pris l'habitude de consacrer tout leur temps [...] à résoudre des problèmes comme des écoliers, au lieu de prendre modèle sur leurs amis européens » [9]. Il savait que le Journal de Crelle et le Journal de Liouville, exemplaires à ses yeux, disposaient d'un soutien gouvernemental qui rendait possible la publication de mémoires conséquents et « d'intérêt majeur », donnant aux scientifiques continentaux « l'avantage sur nous pour le moment ». Il serait cependant « heureux de voir un journal comparable s'implanter aux États-Unis ». En dépit de cet espoir, Hill mit en garde Hendricks : « [la ville de] Des Moines n'est pas le bon endroit pour cela. Elle est située trop à l'ouest, aux confins de la civilisation ». [10] Hill doutait que Des Moines disposât des compétences et des équipements suffisants pour relever le défi d'« imprimer des formules mathématiques complexes ». Il présuma en outre que l'Iowa n'avait aucune « bibliothèque d'envergure en mathématiques ... très nécessaire à la bonne tenue d'un périodique ». [11].

Hendricks reconnut qu'une localisation dans le *Midwest* « c'est-à-dire loin d'une institution universitaire d'envergure » le mettait au défi de rendre ce périodique pérenne [**p.1**, 10]. Il fit malgré tout paraître en 1874 le premier volume de *The Analyst : A Monthly Journal of Pure and Applied Mathematics* qui allait plus tard devenir les *Annals of mathematics*. La revue d'Hendricks s'adressait à un lectorat constitué de lycéens, d'étudiants de premier cycle mais aussi de professeurs. Il conçut un journal qui contenait aussi bien des mathématiques scolaires que « des découvertes nouvelles et intéressantes en astronomie théorique et pratique, en mécanique et en ingénierie ». [**p.1**, 10]. Contre l'avis d'Hill, *The Analyst* posait des problèmes et en publiait les solutions. Le journal comprenait également des exposés mathématiques sur des thèmes tels que les séries trigonométriques, la résolution des équations différentielles du premier ordre, la force de gravité et la résolution de l'équation générale du cinquième degré. Hendricks recherchait des abonnés qui désiraient apprendre ou qui, comme Hill, seraient en mesure de proposer des contributions. On compta environ 150 contributeurs.

3.1 – Des bibliothèques inadaptées

Malgré la localisation géographique de la revue, Hendricks mobilisa des correspondants ayant accès à des bibliothèques. Fraîchement diplômée de Vassar College, Christine Ladd proposa des notes consacrées à des articles issus du Journal de Crelle – elle rejoignit ensuite l'université Johns Hopkins et fut ainsi la première femme remplissant toutes les conditions pour accéder au grade de docteur en mathématiques. G.W. Hill produisit lui-même régulièrement des courts résumés d'articles mathématiques pour *The Analyst*. Hendricks correspondit avec James Dwight Dana et Benjamin Silliman « tous deux professeurs à Yale », Edward Olney « qui professait les mathématiques à l'université du Michigan », ainsi que le chimiste John W. Draper, lequel fut pionnier en astrophotographie. Parmi les institutions partenaires, nous pouvons mentionner la *Boston public library*, l'*U.S. Coast and Geodetic Survey* [12], l'*U.S. Magnetic Observatory*, ainsi que la *Société physico-mathématique* de Kazan. Hendricks s'entoura de correspondants internationaux, dont Carl Pelz de la *Technische Hochschule* de Graz, J.W.L. Glashier du *Trinity College* (Cambridge), Gio-

8. Hill est connu pour avoir produit de manière indépendante une œuvre mathématique importante, marquée par des contributions significatives en mécanique céleste et sur les équations différentielles ordinaires. Dans le *Dictionary of American Biography*, E.W. Brown inclut la traduction en anglais de la citation suivante d'Henri Poincaré : « Dans [l']œuvre [de Hill en mécanique céleste] [...] [,] il est permis d'apercevoir le germe de la plupart des progrès que la Science a faits depuis ». Henri Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome I, Paris, éditions Gauthier-Villars, 1892, introduction, p. 3.

9. « *[t]he provincial character of American science [had] resulted largely from the habit of our scientific men of forever busying themselves with [...] [s]olving problems like school boys instead of imitating the example of our European friends.* »

10. « *Des Moines is just not the place for it. It is too far west, on the very borders of civilization.* »

11. Toutes les citations de ce paragraphe sont tirées de la lettre de G.W. Hill à J.E. Hendricks datée du 10 novembre 1873 et conservée à l'*Iowa State Historical Society*.

12. C'est-à-dire l'institut fédéral de géodésie.

vanni Schiaparelli de l'observatoire de Milan et Camille Flammarion, qui se spécialisa dans l'astronomie et créa par la suite un observatoire privé à Juvisy-sur-Orge.

3.2 – Une formation mathématique médiocre

Non seulement Hendricks s'appuya sur des résumés, des critiques de livres et des synopsis de revues provenant de contributeurs côtiers ayant accès à des bibliothèques et à des publications étrangères, mais de plus il fit appel à des mathématiciens pour favoriser l'instruction du public, contrôler la qualité de la revue et évaluer la pertinence des soumissions en vue d'une publication. Simon Newcomb, qui était professeur de mathématiques au sein de la marine américaine ainsi qu'à l'université Johns Hopkins, avait observé l'éclipse de 1869 à Des Moines, où il eut probablement l'occasion de rencontrer Hendricks lors d'une fête organisée par le maire pour les scientifiques de passage. Lorsqu'en 1882, Hendricks demanda à Newcomb de faire valoir son expertise dans le cadre d'un débat couvert par les pages de *The Analyst*, Newcomb était devenu directeur du Bureau de l'almanach nautique. C'est pour nous l'occasion de fournir un exemple parlant et bien documenté du genre de disputes mathématiques qui agitaient le lectorat de *The Analyst*.

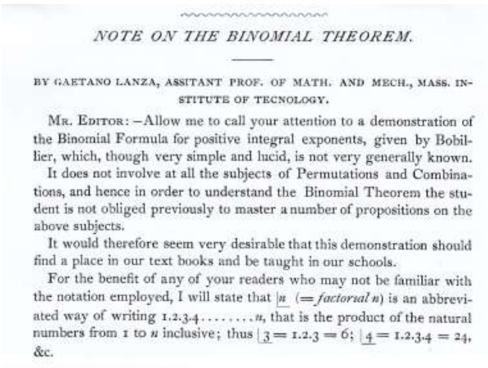
La discussion débuta par un article intitulé « Une étude des relations mathématiques du zéro et de l'infini » [*An investigation of the mathematical relations of zero and infinity*], paru dans *The Analyst* en juillet 1881 et écrit par Charles H. Judson, professeur de mathématiques à l'université Furman de Greenville, en Caroline du Sud [13]. À la fin de l'article, Hendricks ajouta la note suivante : « Nous admettons qu'il soit difficile de construire une droite, qui est une longueur [sans largeur], et des points qui sont sans longueur ; mais nous ne voyons pas en quoi le professeur Judson a remédié à cette difficulté dans sa manière de traiter le sujet [des infinitésimaux] » [**p. 113**, 13]. L'article de Judson suscita néanmoins des discussions sur les quantités infinitésimales et DeVolson Wood, ingénieur civil et professeur de mathématiques, écrivit un texte répondant directement à l'article de Judson. L'article de Wood, intitulé simplement « Limites » parut dans le numéro de mai 1882 de *The Analyst* [26]. Wood cherchait à savoir « si une variable atteint sa limite » . Il s'opposa à un argument, issu de l'*Algebra* de Newcomb [**p. 212**, 15], selon lequel il serait impossible d'aller de A à B en commençant par A et en parcourant à chaque fois la moitié de la distance restante. Quelques pages après la fin de l'article de Wood, Hendricks ajouta une note disant que Wood avait « (sans doute involontairement) déformé l'argument du professeur Newcomb », qui était « incontestablement exact » [11]. Ceci laissa Wood sceptique ; il fit paraître une lettre dans *The Analyst*, afin de clarifier sa référence à Newcomb [24]. Hendricks accompagna cette lettre d'une note d'éditeur dans laquelle il soutint les conclusions de Newcomb, estimant qu'elles étaient « incontestablement vraies » [12]. Wood fit alors parvenir à Hendricks un compte rendu du chapitre de Newcomb sur les limites. Hendricks le transmit directement à Newcomb lui-même pour évaluation.

En réponse, Newcomb prévint que « les rédacteurs en chef de journaux comme le vôtre peuvent être tentés d'imprimer des documents qui n'intéressent personne d'autre que leur auteur ». Et Newcomb d'expliciter son propos : « le problème auquel je me heurte avec l'article du professeur Wood est que je ne peux ni voir où il veut en venir, [ni cerner] ce qu'il pense être une erreur dans le traitement habituel des limites ». Finalement, Newcomb estima « qu'il ne vaut pas la peine de publier le papier du professeur Wood ».Hendricks suivit les conseils de Newcomb. L'article de Wood ne parut pas dans *The Analyst*, alors même que sa lettre de récrimination y fut reproduite. Pour sa défense, Wood déclara que « l'objection de Newcomb à ma définition d'une limite est sans valeur » [25].

3.3 – Typographes non qualifiés

Pour remédier à l'absence de typographes qualifiés, Hendricks engagea sa fille pour mettre au point des caractères typographiques à domicile. Ensemble, ils se montrèrent très ingénieux pour relever ces défis d'ordre logistique. La page de garde différait d'un numéro à l'autre, en fonction des caractères typographiques disponibles pour la composer. Ces problèmes d'ordre typographique furent à l'origine d'autres innovations. Ainsi, dans une « Note sur la formule du binôme de Newton » [*Note on the Binomial Theorem*] présentée par Gaetano Lanza, professeur-assistant de mathématiques et de mécanique au *Massachusetts Institute of Technology*, les factorielles furent représentées de manière non standard en soulignant les caractères ; l'éditeur précisa d'ailleurs en note qu'il ne disposait pas de caractère typographique pour les points d'exclamation.

Gaetano Lanza, Note on the Binomial Theorem, note d'éditeur, The Analyst, volume 1, numéro 10, octobre 1874, p. 177.



NOTE ON THE BINOMIAL THEOREM.

BY GAETANO LANZA, ASSITANT PROF. OF MATH. AND MECH., MASS. INSTITUTE OF TECNOLOGY.

Mr. Editor: —Allow me to call your attention to a demonstration of the Binomial Formula for positive integral exponents, given by Bobillier, which, though very simple and lucid, is not very generally known.

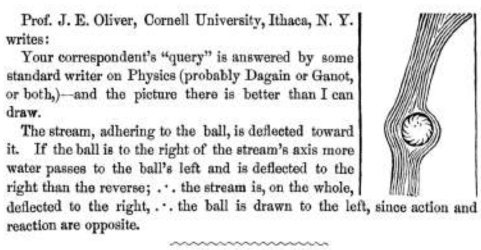
It does not involve at all the subjects of Permutations and Combinations, and hence in order to understand the Binomial Theorem the student is not obliged previously to master a number of propositions on the above subjects.

It would therefore seem very desirable that this demonstration should find a place in our text books and be taught in our schools.

For the benefit of any of your readers who may not be familiar with the notation employed, I will state that $\underline{|n}$ (= *factorial n*) is an abbreviated way of writing 1.2.3.4........*n*, that is the product of the natural numbers from 1 to *n* inclusive; thus $\underline{|3} = 1.2.3 = 6$; $\underline{|4} = 1.2.3.4 = 24$, &c.

En outre, Hendricks réduisit les dépenses liées à l'insertion de diagrammes mathématiques en chargeant sa fille de produire des gravures pour représenter par exemple un ballon au milieu d'un cours d'eau, des diagrammes géométriques ou encore des schémas faisant figurer les contreventements et entretoises d'un pont en treillis.

Gravure réalisée par la fille de Joel E. Hendricks pour représenter les déviations d'un ballon le long d'un cours d'eau, The Analyst, volume 1, numéro 2, février 1874, p. 29



Prof. J. E. Oliver, Cornell University, Ithaca, N. Y. writes:

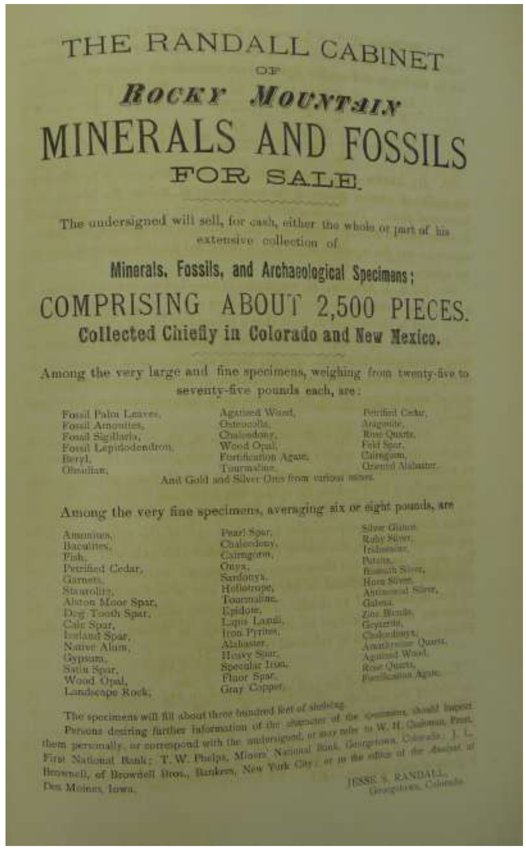
Your correspondent's "query" is answered by some standard writer on Physics (probably Dagain or Ganot, or both,)—and the picture there is better than I can draw.

The stream, adhering to the ball, is deflected toward it. If the ball is to the right of the stream's axis more water passes to the ball's left and is deflected to the right than the reverse; ∴ the stream is, on the whole, deflected to the right, ∴ the ball is drawn to the left, since action and reaction are opposite.

3.4 – Aspects financiers

Hendricks espérait qu'un prix modique favoriserait la diffusion de *The Analyst* ; il fixa donc le prix d'un volume à 2,00 $ par an. À titre de comparaison, un volume du Journal de Liouville se vendait à New York pour 5,00 $-or et le Journal de Crelle pour 12,00 $-or. Parmi les facteurs ayant vraisemblablement contribué à ce faible coût, on peut mentionner des dépenses de main-d'œuvre très réduites, l'absence de distribution internationale, auxquelles s'ajoutèrent quelques recettes de publicité. Plusieurs numéros de *The Analyst* comprenaient des annonces d'une page entière pour une société d'instruments scientifiques de Philadelphie, l'orgue à tuyaux Beatty et un cabinet de minéralogie des Rocheuses.

Publicité pour un cabinet de minéralogie des Rocheuses, figurant dans l'un des numéros de The Analyst



Les anciens employeurs de Hendricks, à savoir *The Chicago*, *Rock Island* et *Pacific RailRoad*, firent également paraître régulièrement des publicités dans *The Analyst*. Ces liens personnels et ces dons privés permirent au journal de se maintenir dans la durée. Le secrétaire de l'état de l'Iowa s'arrangea pour que les commandes de papier destinées à l'état de l'Iowa intègrent les demandes en papier nécessaires à la parution de *The Analyst*. Il arrivait même qu'un donateur ou un auteur financent spécialement 4 ou 8 pages supplémentaires au-delà des 16 pages habituelles, pour y inclure soit un article exceptionnellement long, soit un article additionnel dans un objectif de rééquilibrage des sujets traités.

4. Surpris par le succès

Le succès rencontré par le journal fut rendu public dans le volume de novembre 1878. Hendricks rappela qu'à ses débuts, ce projet éditorial s'était fait « contre l'avis des amis... presque unanimes à nous en dissuader » [7]. Il se réjouit de ses effets inattendus, puisque « ni la domiciliation du journal ni la faible notoriété de son éditeur n'empêchèrent *The Analyst* de recevoir [un tel] patronage et [de tels] soutiens »[7].

En septembre 1883, Hendricks annonça qu'il cesserait de diriger *The Analyst* après la parution du sixième et dernier numéro du dixième volume [**p. 159**, 8]. Il assura à ses lecteurs qu'il devait interrompre cette activité en raison de sa santé déclinante. Le soutien des abonnés et l'intérêt des contributeurs restèrent forts. Hendricks reçut un flot de demandes pour savoir si le journal allait continuer ; en fait, il avait espéré pouvoir annoncer une publication de substitution dans le numéro de novembre. Malgré la volonté exprimée par de potentiels éditeurs compétents et estimés, aucune disposition ne fut prise pour poursuivre la publication, alors que le dernier numéro de *The Analyst* était sous presse. Cependant, d'après sa correspondance, Hendricks se montra confiant, estimant « que le travail ne sera pas abandonné, mais poursuivi de manière pérenne par une équipe éditoriale qui en assurera l'intérêt et le succès » [9]. Pour son travail, Hendricks fut élu membre de l'*American Association for the Advancement of Science* en 1885 et membre de la *New York Mathematical Society* (précurseur de l'*American Mathematical Society*) en 1891. Joel Hendricks mourut à Des Moines en 1893.

En 1884, William Thornton, professeur d'ingénierie à l'université de Virginie, et Ormond Stone, directeur de l'observatoire Leander McCormick, se chargèrent de publier un journal dans la continuité de l'entreprise éditoriale menée par Joel Hendricks [23]. Stone accepta d'emblée de soutenir financièrement les *Annals of mathematics* nouvellement créées pour une durée de dix ans, en s'appuyant sur « ses revenus personnels » [23]. Six numéros des *Annals* furent publiés tous les deux mois, de mars 1884 à janvier 1885. Un nouveau numéro parut en septembre 1885, suivi d'un numéro environ tous les deux mois, avec des interruptions marquées par des périodes de publication plus irrégulières, sans doute en raison de l'instabilité financière. Stone et Thornton firent paraître des articles variés – portant, par exemple, sur l'étude des coniques, la construction de câbles flexibles ou encore la résolution des équations du quatrième degré – auxquels s'ajoutaient des exercices accompagnés de leurs solutions, à l'exemple de ceux qui figuraient dans *The Analyst*. En 1895 cependant, la ligne éditoriale changea lorsque l'université de Virginie prit en charge les frais de publication. Entre-temps, le professeur de mathématiques William Echols, qui y exerçait, rejoignit Stone et Thornton au sein du comité éditorial. Le dixième volume – le premier à paraître après l'arrivée d'Echols au sein du comité éditorial – contenait la dernière série de solutions d'exercices publiées dans la revue.

En 1896, Echols fut nommé rédacteur en chef des *Annals*, désormais financées par l'université. Le volume suivant marqua une autre transition fondamentale pour la revue. Les *Annals* furent alors conçues comme un journal de recherche dans le style de l'*American Journal of Mathematics*. Avec l'aide de sept rédacteurs en chef adjoints, Echols continua à diriger les *Annals* jusqu'en juin 1899, date à laquelle l'université de Harvard accepta d'éditer la revue à compter du premier numéro du douzième volume, dont la parution était prévue pour octobre 1899. À cette époque, les professeurs de mathématiques de Harvard W.E. Byerly, W.F. Osgood et Maxime Bôcher rejoignirent le comité éditorial. Pendant plus d'une décennie, les *Annals* furent dirigées sans discontinuer par un groupe très soudé, composé de cinq à six éditeurs qui augmentèrent la part d'articles de recherche contenant des résultats inédits. En 1911, elle fut reprise par l'université de Princeton.[13] Stone continua à en être le rédacteur en chef, partageant ce titre avec Bôcher, Oswald Veblen, G.D. Birkhoff, L.P. Eisenhart, Elijah Swift et J.H.M. Wedderburn. En 1932, Einar Hille et Solomon Lefschetz prirent la tête du comité éditorial, soutenus par le département de mathématiques de Princeton et par neuf professeurs issus d'autres universités, dont Harvard. À partir de janvier 1933, les *Annals* furent dirigées conjointement par l'université de Princeton et l'*Institute for Advanced Study* alors nouvellement créé. John von Neumann rejoignit Hille et Lefschetz à la tête du comité éditorial des *Annals*, qui était en passe de devenir une re-

13. Nous n'avons pas encore pu accéder à d'éventuelles archives concernant le transfert du journal à l'université de Princeton. Des sources primaires additionnelles permettraient sans aucun doute d'avoir une image plus complète des débuts de la publication des *Annals of mathematics* à Princeton et de mieux comprendre comment elle est devenue un journal scientifique de pointe.

vue de recherche toujours plus élitiste. De nos jours encore, les *Annals of Mathematics* sont publiées tous les deux mois par le département de mathématiques de l'université de Princeton en partenariat avec l'*Institute for Advanced Study*.

Conclusion

Les *Annals of mathematics* furent donc, à leurs débuts, un journal connu sous le nom de *The Analyst* et en grande partie consacré à la résolution de problèmes scolaires. Dans le style de la plupart des périodiques mathématiques américains du xixe siècle, *The Analyst* fut créé à l'initiative d'un éditeur privé. Malgré une domiciliation improbable dans le Midwest, Joel Hendricks sut atténuer les difficultés qui avaient entravé les efforts antérieurs pour publier des journaux spécialisés en mathématiques aux États-Unis. Grâce à sa fortune personnelle, il parvint à dégager des bénéfices indépendamment de la revue et son entreprise éditoriale fut facilitée grâce aux membres de sa famille. Les circonstances de la vie lui donnèrent le temps d'entretenir une vaste correspondance avec les auteurs, les relecteurs ainsi qu'avec ses nombreux soutiens.

Le journal conserva une solide liste d'abonnés, en combinant des problèmes accompagnés de leurs solutions et des articles de niveau plus avancé. Cette combinaison permit à Hendricks de s'adresser à des lecteurs variés ; les textes de niveau élémentaire visaient en particulier des professionnels utilisant des mathématiques dans un cadre universitaire ou dans une agence gouvernementale à finalité scientifique. *The Analyst* exprimait également la volonté de disposer d'une revue pérenne, susceptible de survivre aux divers changements de direction. Les *Annals of Mathematics* atteignirent cet objectif grâce au maintien d'une publication en continu, d'abord à l'université de Virginie, puis à Harvard et enfin à Princeton où, avec l'appui de l'*Institute for Advanced Study*, le journal devint, au cours des années 1930, une revue toujours plus à la pointe de la recherche en mathématiques.

Références

[1] E. Ausejo et M. (Hormigón. *Messengers of Mathematics : European Mathematical Journals (1800-1946)*. Madrid : Siglo XXI de España Editores, 1993.

[2] M. Baldwin. *Making "Nature" : The History of a Scientific Journal*. Chicago : University of Chicago Press, 2015.

[3] T. Crilly. « The *Cambridge Mathematical Journal* and its Descendants : The Linchpin of a Research Community in the Early and Mid-Victorian Age ». *Historia Mathematica* **31** (2004), p. 455-497.

[4] S. E. Despeaux. « International mathematical contributions to British scientific journals, 1800-1900 ». *Historia Mathematica* **31** (2004), p. 455-497.

[5] S. E. Despeaux. « The Development of a Publication Community : Nineteenth-Century Mathematics in British Scientific Journals ». Thèse de doct. University of Virginia, 2002.

[6] S. Dick. « A History of the American Nautical Almanac Office ». In : *Proceedings : Nautical Almanac Office Sesquicentennial Symposium*. Washington, DC : U.S. Naval Observatory, p. 11-54.

[7] J. Hendricks. « Announcement ». *The Analyst* **5**, nº 6 (1878), p. 192.

[8] J. Hendricks. « Announcement ». *The Analyst* **10**, nº 5 (1883), p. 159-160.

[9] J. Hendricks. « Announcement ». *The Analyst* **10**, nº 6 (1883), p. 166.

[10] J. Hendricks. « Introductory Remarks ». *The Analyst* **1**, nº 1 (1874), p. 1-2.

[11] J. Hendricks. « Note by the Editor ». *The Analyst* **9**, nº 3 (1882), p. 90.

[12] J. Hendricks. « Untitled ». *The Analyst* **9**, nº 4 (1882), p. 113.

[13] C. H. Judson. « An investigation of the mathematical relations of zero and infinity ». *The Analyst* **8**, nº 4 (1881), p. 105-113.

[14] D. Kent. « A connected effort? Ambitious American editors pursue periodical mathematical publication, 1804-1878 ». *Revue d'Histoire des Mathématiques* **25** (2019), p. 195-233.

[15] S. Newcomb. *Algebra for Schools and Colleges*. New York : H. Holt et Co., 1881.

[16] U. S. N. Observatory. *Reports on observations of the total eclipse of the sun, August, 7, 1869*. Washington, DC : Government Printing Office, 1870.

[17] T. Preveraud. « (Re)composer l'espace américain de circulations mathématiques par l'étude des questions-réponses dans les journaux (1804-1883) : Étude préliminaire et perspectives ». 2019 draft of a chapter to appear in CIRMATH volume.

[18] G. Schubring. « The German mathematical community ». In : *Möbius and his band. Mathematics and Astronomy in Nineteeth-century Germany*. Oxford : Oxford University Press, p. 21-33.

[19] J. Secord. *Visions of Science : Books and Readers at the Dawn of the Victorian Age*. Oxford : Oxford University Press, 2014.

[20] T. Timmons. « A Prosopographical Analysis of the Early American Mathematics Publication Community ». *Historia Mathematica* **31** (2004), p. 429-454.

[21] J. R. Topham. « The scientific, the literary and the popular : Commerce and the reimagining of the scientific journal in Britain, 1813–1825 ». *Notes and Records : the Royal Society Journal of the History of Science* **70**, nº 4 (2016), p. 305-324. doi : `10.1098/rsnr.2016.0027`. eprint : `https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsnr.2016.0027`. url : `https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsnr.2016.0027`.

[22] « Volume Information ». *Annals of Mathematics* **1**, nº 1 (1884), p. iii-iv.

[23] « Volume Information ». *Annals of Mathematics* **12**, nº 1/6 (1898), p. iii-iv.

[24] D. V. Wood. « Correspondence ». *The Analyst* **9**, nº 4 (1882), p. 113.

[25] D. V. Wood. « Correspondence ». *The Analyst* **9**, nº 5 (1882), p. 152.

[26] D. V. Wood. « Limits ». *The Analyst* **9**, nº 3 (1882), p. 79-81.

[27] D. Zitarelli. « The bicentennial of American mathematical journals ». *The College Mathematics Journal* **36** (2005), p. 2-15.

Deborah Kent

Drake University, département de mathématiques

`deborah.kent@drake.edu`

Deborah Kent est actuellement *Associate Professor* en mathématiques, spécialisée en histoire des sciences mathématiques aux États-Unis durant le xixᵉ siècle et la première moitié du xxᵉ siècle. Elle s'intéresse tout particulièrement à la circulation des savoirs en mathématiques entre la France et les États-Unis dans et à travers les périodiques scientifiques.

Ce texte a été traduit de l'anglais (américain) par Christophe Eckes.

Un entretien avec Michèle Vergne

Propos recueillis par Paul-Émile Paradan.

Dans les années 60, ce n'était pas naturel d'envisager une carrière scientifique pour une femme. Qu'est-ce qui t'a décidée à faire des mathématiques ?

Mes parents sont originaires de Corrèze, mes grands-parents maternels étaient des paysans. Après avoir obtenu son certificat d'études à 12 ans, et un diplôme d'études approfondies à 14 ans, mon père commence à travailler. Peu à peu, il gravit des échelons sociaux et il nous procure à moi et à mes sœurs une vie aisée à Paris. Nous accédons à la bourgeoisie, aux lycées parisiens, aux leçons de piano, Comédie-Française... C'est un hasard si je ne suis pas restée en Corrèze comme la plus grande partie de ma famille maternelle, et je me suis toujours considérée comme une fille d'immigrés (de Haute-Corrèze).

Le père de ma mère était respecté par les autres paysans pour son coup d'œil et son intégrité : on lui faisait évaluer des animaux, des bois, des terres, et sa présence garantissait le respect de l'accord oral entre les parties. Il a eu deux filles, ma mère et ma tante, et il a sans doute insisté pour qu'elles poursuivent leurs études jusqu'à 14 ans : le brevet élémentaire. Rappelons qu'il était interdit aux jeunes filles de passer le baccalauréat jusqu'en 1924. Ma mère et ma tante avaient sûrement les capacités pour l'obtenir, mais pourquoi entreprendre des études ?

Mes parents n'avaient aucune idée des études supérieures. Mon père n'a eu que des filles (à son grand malheur) et il estimait que le plus important pour elles était de trouver un bon mari. J'admirais ma tante (veuve), une minuscule petite femme, qui dirigeait la ferme et était dehors à cinq heures du matin, après avoir jeté quelques choux dans une marmite pour la soupe. Je m'étais bien jurée de ne pas être comme ma mère, qui passait sa vie dans l'attente du retour de mon père à la maison.

J'ai fréquenté une école religieuse, puis je suis allée au lycée Jules-Ferry, un établissement réservé aux jeunes filles qui nous donnait entre autres des cours de couture. J'étais une bonne élève, sauf en couture, déterminée à gagner ma vie et à ne dépendre de personne. Heureusement, ma mère me faisait les points de croix donnés en devoir à la maison. À cette époque, je n'aimais guère mes professeurs, toutes des femmes, car l'humiliation était partie prenante de leur méthode d'éducation. Par exemple, en se moquant de la plus mauvaise rédaction, ou en passant sous l'eau l'aquarelle que j'avais réalisée lors du cours de dessin. Ce que j'aimais, c'était travailler seule dans ma chambre, étudier les livres avant les cours, pour (croire) en savoir plus que le professeur. Je n'avais pas alors de sujet préféré.

Heureusement, en première, j'ai eu une professeure de mathématiques bienveillante, Madame Lignon. Passer du temps à résoudre un problème de mathématiques, comprendre peu à peu le problème, y revenir les jours suivants jusqu'à ce que tout s'éclaire, c'était un très grand plaisir. C'est elle qui a indiqué à mes parents que je pouvais envisager de faire Maths Sup, Maths Spé et le concours de l'École normale supérieure de Jeunes Filles. C'est ce que j'ai donc fait. J'ai aussi été très soutenue par le professeur de Maths-Sup Madame Ayrault, exaltée surtout par les questions hors programme, théorie de Galois, etc.

En 1962, lorsque nous avons été reçues premières exaequo avec Monique Jalabert à l'Éns de Jeunes Filles , nous avons donné un interview pour la télévision. Je me rappelle encore certaines des questions posées : « Avez vous l'impression d'être un monstre ? D'être moins coquette que les autres jeunes filles ? Épouseriez-vous un garçon qui ait moins de diplômes que vous ? »

Ne sachant pas ce qu'était la recherche en mathématiques, j'ai d'abord envisagé de devenir professeur de mathématiques dans l'enseignement secondaire. C'est Pierre Samuel, un féministe convaincu (bien en avance sur son temps), qui a encouragé et soutenu les jeunes filles de l'Éns. Il nous a incitées à demander à certains professeurs de nous encadrer, ou à partir à l'étranger. Je me suis tournée vers Claude Chevalley, Claire Delaroche et Nicole Berline sont devenues élèves de Dixmier, tandis que Monique Lejeune est partie à Harvard, et Nicole Moulis aux Pays-Bas.

Pierre Samuel m'a aussi encouragée à profiter d'une bourse de voyages de la Fondation Singer-Polignac. Après une thèse de 3e cycle avec Claude Chevalley, je suis donc partie un an, en « hippie », autour du monde avec mon ami d'alors Pierre Bouvier. Il était à l'époque facile, si on était dûment recommandé, de rentrer au CNRS sans avoir écrit un seul article de recherche. Ainsi, en revenant de ce long voyage, je suis rentrée au CNRS, encore une fois avec le soutien indéfectible de Pierre Samuel.

À cette période, j'avais beaucoup de passions : m'installer dans une ferme en Corrèze et élever des moutons avec mon cousin, partir en Algérie avec mon ami pour construire un pays nouveau. Me résoudre à penser que ce que j'avais de mieux à faire dans ma vie, c'était de la recherche mathématique m'a pris encore beaucoup de temps.

Penses-tu que la misogynie que tu as connue dans les années 70 est toujours présente dans notre société (ou la communauté scientifique) ?

Je n'ai pas souffert de misogynie lors de mes études primaires, secondaires et classes prépas. Au lycée, nous n'avions que des professeurs femmes, et certaines étaient plus malveillantes envers leur propre sexe que ne l'auraient été des hommes (enfin, je n'en sais rien). Jeune, je n'ai été soutenue et encouragée que par peu de personnes, à l'exception de Madame Lignon et de Pierre Samuel. Je me rappelle la méfiance de Claude Chevalley lors de notre premier rendez-vous : « Si vous voulez vraiment faire des mathématiques, il faut que ce soit la chose qui passe avant tout ».

Certainement, je doutais beaucoup de moi-même, et voir d'autres hommes douter également de moi me semblait naturel. La misogynie des années 60, c'étaient des plaisanteries, des taquineries ; si on les prenait mal, c'était faire beaucoup d'histoires pour rien.

Le mouvement féministe m'a d'abord exaspérée : moi, j'étais un homme. Néanmoins, aux États-Unis, j'ai sans doute bénéficié de mon genre pour être recrutée au MIT, et cette position m'a permis de devenir une meilleure mathématicienne plus rapidement. Je dis devenir, car au moment où l'on m'a recrutée, je n'avais pas produit le meilleur possible, mais tous mes collègues du MIT m'incluaient dans leur groupe et je devenais meilleure. Je dois admettre que j'ai parfois apprécié d'être la seule femme dans un cercle d'hommes.

Aujourd'hui, même si la misogynie ne s'étale plus au grand jour, il me semble qu'elle est toujours aussi violente.

Après avoir formé de nombreuses mathématiciennes, l'École normale de jeunes filles fusionne en 1985 avec l'École normale de la rue d'Ulm. Penses-tu que cela a eu une répercussion négative sur la place des femmes dans la recherche scientifique en France ?

Je pense que oui. De manière générale, je trouve le système des concours et des grandes écoles regrettable. Pourquoi l'avenir de quelqu'un devrait se jouer une fois pour toutes lors d'un concours où il faut résoudre un problème plus vite que son voisin ? Et si les problèmes à résoudre prenaient une vie, qui réussirait ? Celui qui va le plus vite, ou celui (celle) qui est le plus obstiné. Mais ce n'est pas simple de trouver un autre système, et je n'ai rien d'autre à proposer à la place.

Tu évoques, au début de ta carrière, tes difficultés à communiquer avec d'autres mathématiciens (et mathématiciennes). Maintenant, on constate que tu as eu une trentaine de collaborateurs. Tu as donc résolu ces difficultés ?

Oui. Au début, je travaillais toute seule, comme dans un tunnel, car j'avais trop peur de poser des questions, et de montrer ainsi mes limites.

Le premier groupe dans lequel je me suis sentie bien, c'est au MIT avec celui d'Irving Segal. Ce mathématicien et astronome était un petit homme diabolique qui contestait beaucoup de dogmes établis, comme le Big Bang, etc. Autour de lui flottait une « camaraderie chevaleresque » : l'amitié entre nous était sacrée, les ennemis de l'un devenant les ennemis de tous. Avec Birgit Speh, Hans Jakobsen et Bent Orsted, on se retrouvait souvent chez lui, où il jouait du piano ou bien se mettait à faire de la cuisine. Une anecdote donne une idée du personnage : un fois où je lui disais penser pouvoir résoudre un problème sur lequel il travaillait, il me répondit « I know you are smart, but I do not think you are that smart ». Cela n'empêche, l'atmosphère de ce groupe était très gaie.

L'un des sujets de réflexions du groupe d'Irving Segal était la représentation métaplectique du groupe métaplectique. À cette époque, j'ai déterminé avec Masaki Kashiwara la décomposition des produits tensoriels de cette représentation. Cette collaboration avec Masaki est issue d'un mélange d'admiration, et d'amitié amoureuse mais elle m'a fait souffrir. Comment ne pas avoir du plaisir à travailler avec lui ? C'est la personne la plus intelligente et la plus charmante que je connaisse, avec un seul défaut : il est si fort !

Un grand plaisir pendant ma carrière a été ma collaboration avec Nicole Berline : elle a commencé aux USA à la fin des années 70 et continue encore aujourd'hui. Nicole était toujours prête à se lancer dans de nouvelles aventures. Nous nous sommes lancées dans des domaines où ni l'une ni l'autre n'avaient d'idée précise. Les formules de caractères des groupes font intervenir la fonction $\hat{A}$, cela ressemble aux formules d'indice, mais aussi au Jacobien de l'application exponentielle, et donc aux développements asymptotiques du noyau de la chaleur. Nous voilà parties en route, peu importe si nous ne trouvons rien, nous nous serons promenées dans de beaux paysages.

Nous avons rencontré Ezra Getzler au début des années 80, il venait d'arriver à Harvard comme étudiant, mais avait déjà écrit un article en Australie sur le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer. Raoul Bott nous l'a présenté, j'avais dû lui parler de notre démonstration avec Nicole via l'intégration du noyau du Laplacien du fibré des repères contre un polynôme harmonique, inspirée de Bismut. La démonstration de Ezra Getzler du théorème de l'indice était remarquablement simple : avec une nouvelle graduation le symbole de l'opérateur devenait le symbole de l'oscillateur harmonique, un opérateur essentiel dans l'étude de la représentation métaplectique. Le genre $\hat{A}$ apparaît alors immédiatement. Ezra a toujours eu des idées catégoriques, sur tout et pas seulement les mathématiques. J'avais du mal à l'époque à supporter ses humeurs d'enfant gâté, mais nous avons partagé nos idées, et nous avons écrit un livre ensemble qui nous a pris beaucoup de temps et de travail. Il me semble que les exigences de rigueur, de perfection, et de vision profonde, ont profité de nos trois personnalités très différentes.

Il y a aussi eu des collaborations très heureuses sur des périodes longues, entamées par la nécessité de poursuivre notre travail avec de vrais spécialistes d'un domaine. Notamment, avec Welleda Baldoni (qui elle aussi n'a peur de rien) et Nicole Berline, nous avons collaboré avec Matthias Beck, Jesus de Loera, Matthias Koeppe, puis Michael Walter, spécialistes de l'optimisation discrète et de sa complexité. Nous avons échangé avec eux nos méthodes théoriques de calculs. Les nôtres reposaient essentiellement sur des techniques de résidus, élaborées avec Michel Brion et Andras Szenes, mais eux nous ont fait comprendre que le temps étant fini, on peut (ou on doit selon les circonstances) préférer des méthodes robustes et un peu fausses à des calculs exacts qui prennent un temps infini. Nous avons appris beaucoup de choses et ce fut très gai de se retrouver à Davis, Pise, Oberwolfach ou Palo-Alto.

Bien sûr, collaborer avec Michel Duflo a été aussi un très grand plaisir. D'un autre genre : il sait immédiatement reconnaître si une idée ne conduit nulle part ! Je lui ai souvent proposé des idées vagues, et les discussions qui s'ensuivaient me permettaient de savoir si cela valait le coup de persévérer.

Je pourrais aussi citer les collaborations avec Shrawan Kumar, Andras Szenes, Michel Brion, Arzu Boysal... Toutes m'ont enrichie.

Discuter de problèmes avec mes étudiant(e)s m'a été aussi très utile (j'espère vraie la réciproque).

Tu as passé une dizaine d'années au MIT dont cinq comme professeur. Quelles sont les forces et les faiblesses de notre système universitaire face au modèle américain ?

Je me suis trouvée très bien au MIT. Il y a une atmosphère d'usine. Les étudiants et étudiantes, et leurs professeurs-es ne doivent pas être intelligents (enfin, si un peu), mais ils travaillent dur. Ils sont d'origines très diverses, et la beauté de leur diversité est frappante. La bibliothèque centrale est ouverte 24 h sur 24, 365 jours par an. Dans le sous sol, on peut trouver des machines pour manger, boire un café ou un coca-cola jour et nuit. L'administration pense que les chercheurs sont utiles, et cherche à ce que les étudiants réussissent. Le défaut : l'éducation n'est pas gratuite !

Quelles ont été tes influences mathématiques ?

Je me sens triste, je suis si vieille, tant de gens qui étaient des si grands mathématiciens, et si aimables chacun dans leur genre, ont disparu : Claude Chevalley, Roger Godement, Bert Kostant, et bien d'autres.

Au début de ma thèse, Claude Chevalley me semblait déprimé. C'était très difficile de parler de mathématiques avec lui et il m'encourageait à suivre la vague initiée par Alexander Grothendieck. Je lui ai obéi et je suis allée suivre le séminaire Grothendieck à l'IHÉS. Le souvenir de cette période est pour moi encore douloureux : je prends le RER seule, je m'assois à l'écart, les autres étudiants semblent comprendre de quoi il s'agit, et je repars seule alors que je n'ai rien compris.

Le thème de recherches proposé par Claude Chevalley, Dieu seul sait pourquoi, était les déformations des algèbres de Lie nilpotentes : en dimensions 6, 7, 8, etc. Finalement, Jacques Dixmier m'a sauvé la vie, en s'intéressant à mes calculs sans fin, et en me recommandant à Jean Lascoux, un physicien ami de Louis Michel.

J'ai ainsi atterri, à un moment crucial pour moi, au centre de physique théorique de l'École polytechnique, qui se trouvait alors Montagne Sainte-Geneviève. Jean Lascoux m'a trouvé un minuscule bureau que je partageais avec Monique Nahas. Ainsi, j'ai commencé à m'intéresser à la physique des particules, donc aux représentations unitaires des groupes de Lie. Monique Nahas, qui avait fait sa thèse sur les déformations du groupe de Poincaré, m'a fait découvrir les travaux de Wigner, Bargmann, Stone-von Neumann, Weyl et Gelfand-Graev : enfin, des mathématiques que je comprenais. Quelle beauté, la classification complète par Bargmann des représentations unitaires irréductibles de $SL(2,R)$, et le théorème d'unicité de Stone-von Neumann.

Jean Lascoux était au courant de tout ce qui était à la mode. Je ne sais pas comment il faisait, car à l'époque, il n'y avait pas internet, très peu de congrès et les préprints étaient rares. Les travaux de Kirillov et de Kostant sur le dual unitaire des groupes de Lie étaient des généralisations sans précédents du théorème d'unicité de Stone-von Neumann. On arrivait à avoir une « big picture » (le mot favori de Bert Kostant) pour l'étude des représentations unitaires de groupes de Lie généraux en lien étroit avec les développements de la physique quantique.

Au début des années 70, nous avons organisé un séminaire sur ces questions, avec Michel Duflo, Monique Nahas, Mustapha Rais, Nicole Berline (alias Conze), Jacques Dixmier, Rudolf Rentschler, Pierre Renouard, etc. Je ne m'en rendais pas compte alors, mais ce séminaire a sans doute décidé des questions qui m'intéresseraient toute ma vie.

Certains mathématiciens m'ont influencée à travers leur personnalité unique, que ce soit Roger Godement qui avait un style incomparable, à la fois sarcastique et attentif, Bert Kostant qui a été le précurseur de nombreux développements en théorie de Lie, ou bien Victor Guillemin qui m'a toujours séduite par son enthousiasme.

Certaines œuvres de mathématiciens m'ont beaucoup influencée, même si pour certains j'ai très peu discuté avec eux. Voici une liste non exhaustive. Les œuvres complètes d'Harish-Chandra : je dis complètes, car ses conférences ou articles commencent en général ainsi : « d'après le lemme 85 de mon article précédent ». Tous les articles de Michael Atiyah (certains co-écrits avec Isadore Singer, Raoul Bott ou Graeme Segal) sur l'indice et la K-théorie topologique. L'étude des articles de Jean-Michel Bismut (tâche difficile que je n'ai faite que superficiellement) nous a donné beaucoup d'idées à Nicole Berline et à moi-même. Quelques articles de Witten, notamment : « Two dimensional gauge theories revisited », dont j'ai mis longtemps à comprendre la portée. Le travail d'Alexander Barvinok sur l'optimisation discrète.

Peux-tu nous faire part des impasses mathématiques que tu as traversées ?

J'ai toujours eu des phases cycliques, des périodes « superwoman » et des périodes où je me sens une moins que rien. J'ai accepté maintenant que c'est aussi le moteur de mon besoin de travailler.

Dans la lignée des représentations associées à des orbites, je me suis beaucoup intéressée avec Hugo Rossi, aux domaines bornés homogènes sous un groupe G qui avaient été classifiés par Ernest Vinberg et Ylia Piatetski-Shapiro. J'avais compris avec Hugo Rossi comment classifier les fibrés en lignes qui admettaient une section holomorphe de carré intégrable, mais il eut été très beau d'obtenir un analogue L^2 du théorème de Borel-Weil-Bott, dans la lignée des théorèmes de Wilfried Schmid. Mon rêve d'alors était de produire explicitement des solutions harmoniques de carré sommable. Je ne suis arrivée à rien sur ce sujet, mais avant de renoncer, il m'a fallu beaucoup de temps. Comment je m'en suis sortie ? Grâce à ma fille ! Lorsque j'étais enceinte, j'étais déprimée, je n'arrivais à rien, et je pensais que ma vie mathématique allait se terminer en ayant un enfant dont je devrais bien m'occuper. Et bien, cela a été le contraire. J'ai fait, sans regrets, une croix sur ces problèmes impossibles, et ce tout petit bébé m'a donné du courage pour commencer une nouvelle vie mathématique : théorie de l'indice, cohomologie équivariante, etc.

Il y a eu aussi un autre moment très difficile. On savait depuis le travail de thèse de Gert Heckman en 1980 qu'il y a un lien très fort entre multiplicités de représentations et géométrie des variétés symplectiques. Je partageais avec Victor Guillemin cet enthousiasme pour ces belles relations qui restaient un peu floues. En 1982, Victor Guillemin et Shlomo Sternberg ont proposé, et démontré dans un cas significatif, une très belle relation désignée par le motto $[Q,R]=0$: « quantization commutes with reduction ». Inspirée par la formule de localisation non abélienne de Witten, je donnai une démonstration de cette formule dans le cas d'un tore, mais je ne la croyais pas vraie en général. Je me trompais : Eckhard Meinrenken publia assez rapidement après moi une démonstration dans le cas général. J'essayai de retrouver son théorème, mais ce fut en vain. Prouver $[Q,R]=0$ avec mes méthodes était devenu une obsession. Je m'acharnais, je n'arrivais à rien : « Tout ce que j'ai fait avant est trop facile, je ne suis pas capable de faire des choses vraiment dures, j'ai fait semblant mais je ne suis pas une vraie mathématicienne… ». Toutes ces idées noires m'angoissaient et m'empêchaient de travailler.

Je ne me souviens plus comment cet épisode dépressif s'est terminé. Je crois que j'ai commencé à changer d'obsession lors d'un exposé de Michel Brion. Comprendre les formules relatives à $[Q,R]=0$ dans le cas des orbifolds m'a amené à lui proposer une formule de Riemann-Roch dans le cas des variétés toriques singulières, puis polytopes, puis optimisation discrète. Bref, une nouvelle vie commençait avec des nouveaux problèmes. Il est difficile de renoncer à un problème sur lequel on a beaucoup travaillé, car c'est faire un constat d'échec. Comme dans le cas précédent, c'est grâce à quelqu'un d'autre, Michel Brion, que je suis sortie de cette impasse.

Mais dans ce cas, je n'ai pas vraiment renoncé à comprendre cette question. Plus tard, Paul-Émile Paradan a donné une démonstration de $[Q,R]=0$ que je comprenais, et finalement dans un cadre beaucoup plus général : l'indice de l'opérateur de Dirac au lieu de l'opérateur $\overline{\partial}$. Cette démonstration est plus logique que celle de Meinrenken. On voit clairement pourquoi, contrairement à ma première intuition, un miracle peut faire marcher les choses.

Deux mots sur ta maman ?

Ma mère s'est suicidée lorsque j'avais 31 ans. Il y a un avant et un après. Avant, j'étais un monstre d'insouciance et d'égoïsme. Après ? Je n'avais plus le droit de vivre. Une amie argentine, Graciela Chichilnisky, m'a littéralement exfiltrée de France, elle était sûre d'elle, elle me dictait ma conduite : je devais revivre, je devais quitter ma famille, prendre congé du CNRS, demander un poste de visiting professor au MIT, habiter avec elle, etc. Je pars aux USA un an plus tard sans l'intention de revenir. Peu à peu, grâce à elle, et à son jeune fils, j'ai retrouvé le goût de vivre. Elle avait raison, partir aux USA m'a changée. J'y ai rencontré Victor Kac, un exilé lui aussi, il voulait des enfants, je me suis laissée convaincre. Mais la légèreté m'a définitivement quittée.

Après plus de cinquante années d'activité, est-ce que tu as toujours le même plaisir à faire de la recherche ?

Oui, c'est toujours le même plaisir. Peut-être je n'ai plus la même curiosité pour les choses nouvelles. Mais j'aime par-dessus tout travailler.

Ton parcours scientifique a commencé avec des questions de classification d'algèbres de Lie nilpotentes. Tu as abordé ensuite des domaines divers comme la théorie des représentations, la théorie de l'indice d'Atiyah-Singer, la cohomologie équivariante et ses formules de localisation, le comptage de points dans les polytopes. Est-ce que tu as des regrets concernant d'autres domaines que tu aurais aimé étudier ?

J'ai l'impression que tous ces domaines sont reliés par un certain fil, ce n'est pas vraiment moi qui ai choisi ce parcours, mais des hasards. Je n'aime pas apprendre pour apprendre, donc non, je n'ai pas de regrets et j'espère que quelques idées viendront encore à ma rencontre.

Quels sont tes résultats préférés ?

Et bien, célébrons les 50 ans d'un de mes premiers résultats en commun avec Michel Duflo, que je trouve beau. Le stabilisateur générique de la représentation coadjointe d'un groupe de Lie est commutatif ! Bien que ce résultat soit très facile à démontrer, il a des grandes implications, comme le montrera Michel Duflo, pour les formules de caractères des représentations unitaires irréductibles de groupes.

Mais le plus beau et le plus inutile de mes théorèmes, c'est la formule de Poisson-Plancherel. C'est une formule qui généralise Poisson où il y a un côté et un autre côté dual. Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe G, cette formule relie une mesure supportée sur le noyau de l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G (un réseau dans le cas d'un tore) à une mesure sur $\mathfrak{g}^*$ supportée sur les orbites coadjointes dites intégrales (le réseau dual dans le cas d'un tore) et pondérées par la mesure de Plancherel. Cela évoque un peu la formule des traces, ou bien les formules de Duistermaat-Guillemin reliant longueur des géodésiques et valeurs propres du Laplacien.

Paul Malliavin, lors de la présentation qu'il a faite de mes travaux pour convaincre l'Académie de m'élire comme membre, a choisi cet article sur la formule de Poisson-Plancherel sans que je lui mentionne que c'était mon article préféré. Sans doute, avec infiniment plus de raisons que moi, il pensait que la formule de Poisson était un bijou mathématique, mais j'ai été très touchée de voir qu'il pensait que mon article était une belle contribution dans cette lignée.

Enfin, un résultat beau et utile, c'est cette formule de localisation pour les intégrales de formes équivariantes fermées, obtenues avec Nicole Berline. À vrai dire, comme l'ont compris certains mais peut-être pas tout le monde, ce n'est pas seulement la formule de localisation qui est importante, mais aussi et surtout, la formule de « délocalisation ». Cela nous a permis de donner des formules pour les indices des opérateurs transversalement elliptiques, puis avec Corrado de Concini et Claudio Procesi de relier indices et fonctions splines, et d'obtenir des limites semi-classiques « exactes ».

Qu'est-ce que tu aimes faire en dehors des mathématiques ?

Rien. Bon, pour être plus soft, j'aime aussi voir ma fille, mes amis, ma famille, faire des promenades, lire.

Tu es membre de l'Académie des Sciences depuis vingt ans. Est-ce que cette reconnaissance de la qualité de tes recherches t'apporte un apaisement ?

Lorsque j'ai appris mon élection, j'ai eu un moment difficile, il me semblait que je n'étais pas à la hauteur. Maintenant, je suis contente d'être là, telle que je suis.

Quels conseils donnerais-tu à un(e) jeune mathématicien(ne) ?

L'activité de recherche est difficile : il y a de la souffrance car la plupart du temps cela ne marche pas. Il faut être obstinée, ambitieuse, mais il faut aussi savoir renoncer. Cependant, ce travail nous procure de grandes émotions : découvrir des vérités, c'est une joie que peu connaissent.

Michèle Vergne,

Date de Naissance : 29 août 1943.

Études

1962-1964 : Éns de Jeunes Filles.
1966 : doctorat de troisième cycle (dir. C. Chevalley).
1971 : doctorat d'état (dir. J. Dixmier).

Emplois

1967 - 1977 : Chargée de Recherches, cnrs.
1977 - 1981 : Professeur associée, mit.
1981 - 1986 : Professeur, mit.
1986 - 2008 : Directrice de recherche, cnrs.

Distinctions

Conférence au Congrès International des Mathématiciens, Varsovie, 1983.
Prix Ampère de l'Académie des Sciences, 1997.
Élue membre de l'Académie des Sciences, 1998.
Conférence plénière au Congrès International des Mathématiciens, Madrid, 2006.
Docteur honoris causa de l'université de Genève, 2017.

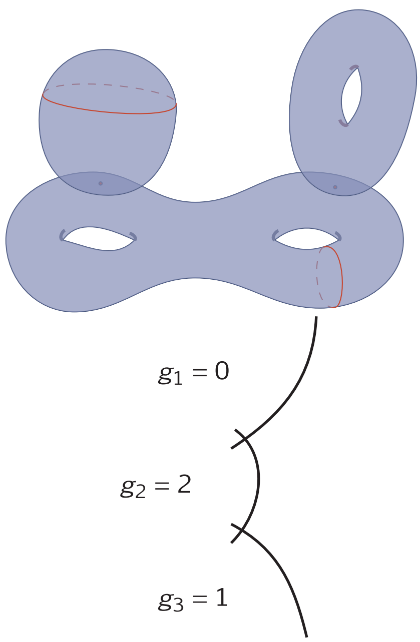
... les invariants de Gromov-Witten

• É. Mann

1. Géométrie énumérative

La géométrie énumérative est une branche des mathématiques où l'on compte des objets géométriques et plus précisément ici des courbes complexes (c'est-à-dire des surfaces réelles, cf. figure 1) qui ont certaines propriétés d'incidence comme passer par des points.

Figure 1 – En haut, nous avons le dessin heuristique d'une surface réelle et en bas sa représentation comme courbe complexe



La question la plus naïve est de voir ces courbes comme des droites. Ainsi, la première question est : combien y a-t-il de droites qui passent par 2 points ? Évidemment, la réponse est qu'il n'y en a qu'une seule, mais en fait cette question est mal formulée pour plusieurs raisons.

1. D'abord, pourquoi 2 points ? Si nous n'avons qu'un seul point, nous avons un nombre infini de droites et si nous avons trop de points (au dessus de 3) non alignés nous n'avons aucune droite. Nous voyons qu'il faut poser un nombre précis de conditions pour que ce nombre soit fini et non nul. Si nous bougeons nos 2 points, nous avons toujours une unique droite sauf si bien sûr les deux points se rencontrent ! Intuitivement, nous obtenons alors une condition sur les points qu'on appelle 2 points *généraux* c'est-à-dire sans aucune particularité.

2. Ensuite, ces droites appartiennent à quel espace ? Nous pouvons nous poser la question dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, un espace projectif ou une variété quelconque. Pour compter de manière satisfaisante les objets, nous voyons vite que nous avons besoin du corps des nombres complexes [1]. Par exemple, une courbe $x^2+y^2=-1$ n'a pas de points réels alors qu'elle en possède dans $\mathbb{C}$. Dans la suite, nous allons garder l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ comme exemple. Pour des raisons techniques, nous aurons besoin de compacité dans la suite mais le lecteur, peu familier avec l'espace projectif, peut le remplacer simplement par $\mathbb{C}^r$.

3. La dernière question est celle du comptage à proprement parler. Nous savons que pour avoir de beaux résultats sur les racines des polynômes, il faut les compter avec leurs multiplicités. Dans notre cas de comptage de courbes, nous avons aussi à prendre en compte leurs multiplicités, pour cela nous utilisons la théorie de l'intersection « à la Fulton » que nous n'allons pas trop développer ici.

1. Nous pouvons aussi compter sur le corps des nombres réels mais ce nombre va dépendre de la position des points et c'est une toute autre histoire.

Remarquons que la droite est une courbe de degré 1 et nous avons fixé 2 points. Une généralisation naturelle est de considérer une courbe de degré d.

Question. Combien de points devons-nous fixer pour avoir un nombre fini et non nul de courbes de degré d passant par ces points dans le plan projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$?

La réponse est $3d-1$ points. Ceci se comprend de la manière suivante. Nous comptons le nombre d'applications

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} &\to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ [x:y] &\mapsto [f_0(x,y) : f_1(x,y) : f_2(x,y)] \end{aligned}$$

où f_1, f_2, f_3 sont des polynômes homogènes de degré d c'est-à-dire qu'ils sont de la forme

$$a_0 x^d + a_1 x^{d-1} y + \cdots + a_d y^d.$$

Au final, nous avons donc $d+1$ degrés de liberté (i.e., les $a_0, \ldots, a_d$) pour chaque polynôme et donc au total $3(d+1)$ paramètres. Cependant, nous devons soustraire 1 à ce nombre car dans l'espace projectif $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, nous pouvons multiplier toutes les coordonnées par un scalaire sans rien changer. De plus, comme nous nous intéressons à l'image de ces applications, nous pouvons reparamétrer la source de ces applications, c'est-à-dire les applications $f, g : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sont équivalentes s'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"', "\sim"] & \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \\ \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Nous savons que les automorphismes de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont les homographies (c'est le groupe $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$) et que ce groupe est de dimension 3.

Au final, nous obtenons le décompte du nombre de degrés de liberté qui est

$$3(d+1) - 1 - 3 = 3d - 1.$$

Ainsi, pour avoir un nombre fini de courbes de degré d, il faut fixer $3d-1$ conditions. Remarquez que depuis le début, nous n'avons compté que des courbes de genre 0. La même question en genre supérieur est beaucoup plus délicate.

Nous appelons $N(d)$ le nombre de courbes de genre 0 de degré d dans le plan projectif complexe, qui passent par $3d-1$ points généraux. Ces nombres sont des exemples d'invariants de Gromov-Witten pour le plan projectif. Des résultats classiques nous donnent les premières valeurs de $N(1), N(2), N(3)$ et $N(4)$.

d	1	2	3	4	5	$\cdots$
N(d)	1	1	12	620	?	$\cdots$

Après le degré 5, nous ne savions rien jusqu'à ce que Kontsevich découvre la formule suivante à la suite des travaux de Witten et de Candelas-Ossa-Green-Park.

$$N(d) = \sum_{\substack{k,\ell \in \{1,\ldots,d-1\} \\ k+l=d}} N(k)N(\ell)k^2\ell\left(\ell\binom{3d-4}{3k-2} - k\binom{3d-4}{3k-1}\right) \quad (1)$$

La surprise de cette formule est que non seulement, elle permet de calculer tous les nombres $N(d)$ mais aussi qu'elle est récursive, et donc déterminée seulement par $N(1) = 1$, c'est-à-dire le nombre de droites passant par 2 points distincts.

Premiers pas vers une définition plus générale et plus rigoureuse. En première approximation, la définition des nombres $N(d)$ est correcte mais elle a quelques faiblesses.

1. Dans $N(d)$, la courbe de départ est de genre 0 et nous voudrions généraliser au genre supérieur et nous voudrions également remplacer $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ par une variété lisse et projective X. Du coup, nous considérons des applications $f : C \to X$ de degré d fixé et C est une courbe de genre g.
2. Au lieu de passer par des points, nous pourrions demander que la courbe, ou plutôt son image par f, passe par des sous-variétés fixées. Pour ce faire, nous considérons des courbes C avec des points marqués, notés $x_1, \ldots, x_n$. Nous choisissons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des classes de cohomologie qui représentent via la dualité de Poincaré des sous-variétés en position générale dans X et nous demandons que pour chaque i dans $\{1, \ldots, n\}$, $f(x_i)$ soit un point sur la sous-variété de classe α_i.

Au final, pour définir les invariants de Gromov-Witten qui seront des nombres rationnels, il nous faut une variété lisse et projective X, des entiers (g, n, d) et n classes de cohomologie de X notées $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Remarquons que pour que le problème d'incidence soit bien posé, c'est-à-dire qu'on n'ait pas une infinité de possibilités ou trop de contraintes (cf. la discussion en (1)), il y a une condition entre ces données pour que les invariants soient finis et non nuls.

Le cas de $N(d)$ correspond à $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $g = 0$, $n = 3d-1$, les classes α_i sont toutes égales à la classe du point dans la cohomologie de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Remarquons que dans cet exemple, le degré d fixe aussi n, ceci est la condition entre ces données dont on vient de parler quelques lignes plus haut.

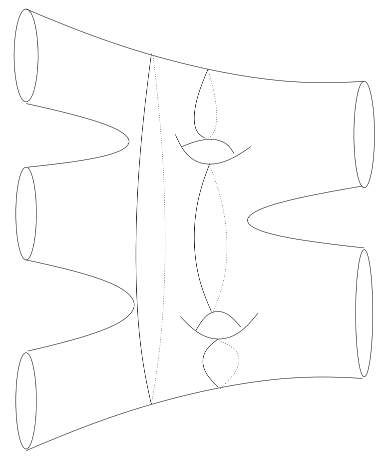
Dans le paragraphe suivant, nous allons donner d'autres motivations qui viennent de la physique et aussi une définition plus rigoureuse de ces nombres.

2. Définition des invariants de Gromov-Witten

Avant de donner une définition plus précise de ces invariants en mathématiques, rappelons les motivations provenant de la théorie des cordes. Dans cette théorie, il y a deux nouvelles idées par rapport à la physique classique.

1. L'espace-temps $\mathbb{R}^4$ est remplacé par un espace $\mathbb{R}^4 \times X$ où X est une variété de « taille » tellement petite qu'on ne la verra jamais ($\sim 10^{-33}$ cm).
2. Les particules ne sont pas ponctuelles mais des « petits » cercles qu'on appelle des cordes. Ainsi, quand une corde se déplace dans $\mathbb{R}^4 \times X$, elle dessine un cylindre et quand deux cordes se rencontrent, elles dessinent un pantalon. Au final ces pantalons peuvent se recoller et on obtient des surfaces réelles (cf. figure 2). Comme les trajectoires dans $\mathbb{R}^4$ sont décrites par la physique classique, le but est de comprendre ces trajectoires dans la variété X.

Figure 2 – Ce dessin représente 3 cordes qui se rencontrent en une seule corde puis elles se reséparent en 3 cordes et elles finissent avec 2 cordes



Le lien avec la partie de géométrie énumérative du paragraphe précédent se fait naturellement en imaginant ces trajectoires de cordes comme des applications d'une surface réelle dans X. Dans l'exemple précédent, la variété X était $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Cette idée a donné naissance aux invariants de Witten qui étaient définis seulement en physique des cordes.

En mathématiques, Mikhaïl Gromov a défini des invariants en considérant des applications holomorphes d'une surface réelle dans une variété X. Cette idée a été développée avec des outils de géométrie symplectique. Au milieu des années 1990, en généralisant les idées mathématiques de Gromov et celles de Witten, plusieurs mathématiciens ont défini, de façon rigoureuse, ces nombres rationnels, appelés invariants de Gromov-Witten. Il y a deux approches : l'une avec la géométrie symplectique (Yongbin Ruan, Gang Tian, Jun Li, Kenji Fukaya, Kaoru Ono...) et l'autre avec la géométrie algébrique (Maxim Kontsevich, Yuri Manin, Kai Behrend, Barbara Fantechi, William Fulton, Rahul Pandharipande...).

Dans ces deux approches (symplectique ou algébrique), les mathématiciens construisent un espace appelé « espace de modules des applications stables » qui traduit la discussion de la fin du paragraphe 1.

Les points de cet espace sont les données $(C, x_1, \ldots, x_n, f)$ où $(C, x_1, \ldots, x_n)$ est une courbe complexe nodale (c'est-à-dire avec des singularités localement du type $xy = 0$ cf. la figure 1) de genre g (vue comme surface réelle, c'est un tore avec g

trous) avec $x_1, \dots, x_n$ des points marqués distincts, et f est une application de C dans $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ de degré d. Nous notons cet espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}, d)$. Le fait que $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ soit compact et que nous ayons rajouté des singularités nodales implique que cet espace est compact (c'est pour cette raison qu'il y a une barre dans la notation $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d)$). La compacité de cet espace de module n'est pas évidente. En effet, quelle est la limite quand 2 points marqués se rencontrent ? La réponse de Gromov était très belle dans [6], il a expliqué qu'il fallait rajouter un $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Plus précisément, si x_1 et x_2 se rencontrent au point p de la courbe C alors la limite est la courbe C à laquelle on colle un $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ au point p de C et les points p, x_1 et x_2 sur le $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sont $\{0, 1, \infty\}$. Cette idée est connue sous le terme « d'ajout de bulles » (cf. figure 3).

À partir de cet espace, nous avons des applications d'évaluation. Plus précisément, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous définissons

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_i : \overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d) &\to \mathbb{P}^k_{\mathbb{C}} \\ (C, x_1, \dots, x_n, f) &\mapsto f(x_i). \end{aligned}$$

Si nous avons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des classes de cohomologie sur $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$, nous pouvons les tirer en arrière sur l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d)$ via les applications ev_i puis les intégrer dessus. Au final, nous définissons les invariants de Gromov-Witten par l'intégrale

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{g,n,d} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d)]} \mathrm{ev}_1^* \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{ev}_n^* \alpha_n \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

1. Ces invariants sont des nombres rationnels même si les α_i sont des classes à coefficients entiers car l'espace d'intégration n'est pas une variété, mais une orbifold c'est-à-dire localement le quotient d'un ouvert de $\mathbb{C}^k$ par un groupe fini.
2. Remarquons que cette intégrale est nulle dès que la dimension de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}, d)$ n'est pas égale à la somme des degrés cohomologiques des α_i. Ceci modélise la question du nombre de conditions nécessaires pour que nous ayons un nombre fini et non nul de courbes vérifiant des conditions d'incidence (cf. la discussion intuitive au §1.(1)).
3. Pour définir une telle intégrale, il faut que l'espace d'intégration soit compact et lisse. La compacité est vraie mais pas la lissité ce qui cause de sérieux soucis. Cependant, dans [1], Behrend-Fantechi ont expliqué comment définir proprement cette intégrale, c'est-à-dire sur quel cycle nous devons intégrer : cette classe est appelée la *classe fondamentale virtuelle*. Leur réponse repose sur la déformation au cône normal et la théorie de l'intersection. Remarquons que l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, d)$ est lisse en genre 0 et quand X est un espace projectif ou une grassmanienne. Dès que le genre est strictement positif, l'espace de modules n'est jamais lisse et donc le calcul fait intervenir cette classe virtuelle ; les calculs deviennent beaucoup plus compliqués.

Dans l'exemple de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, notons $[\mathrm{pt}]$ la classe du point qui est dans le $H_0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Ce groupe est isomorphe au $H^4(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ par dualité de Poincaré. La « vraie » définition de $N(d)$ correspond aux choix $g = 0, n = 3d - 1$ et $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{3d-1} = [\mathrm{pt}]$ et nous avons :

$$N(d) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,3d-1}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, d)]} \prod_{i=1}^{3d-1} \mathrm{ev}_i^*[\mathrm{pt}].$$

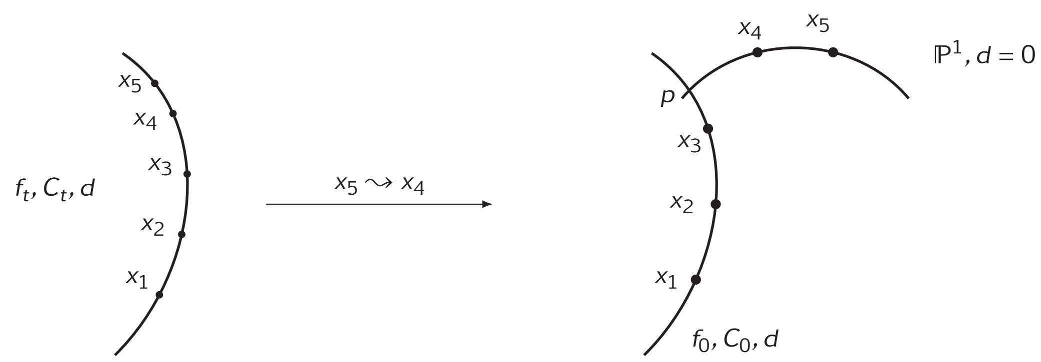
Si nous prenons cette égalité comme la définition de $N(d)$ alors la théorie de l'intersection nous dit que ce nombre $N(d)$ est bien égal à celui défini dans le §1. L'exemple $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ est assez particulier car tous les invariants de genre 0 peuvent se déduire des invariants ci-dessus. Cependant les invariants de genre supérieur sont très délicats à calculer. Il faut utiliser des méthodes avancées qui seront décrites plus bas.

Quelles sont les propriétés d'invariance de ces nombres ? La réponse est qu'ils sont invariants par déformation lisse et propre. Plus précisément, considérons une famille de variétés paramétrées par une base B, par exemple $B = \mathbb{C}$ et la famille de variétés est notée $(X_t)_{t \in \mathbb{C}}$. Les conditions de lissité et de propreté signifient que les variétés X_t sont lisses projectives avec des cohomologies isomorphes. Ainsi cette invariance par déformation lisse et propre se formule en disant que les invariants de Gromov-Witten de X_t ne dépendent pas de t.

3. Comment calculer ces invariants de Gromov-Witten

Une fois que nous avons défini ces invariants, nous voulons les calculer. Il y a plusieurs techniques pour les calculer.

Figure 3 – On a une famille d'applications stables $(f_t, C_t)_{t\in\mathbb{C}}$ où x_5 tend vers x_4 quand $t \to 0$. À la limite, on a une formation de « bulle » qui est le $\mathbb{P}^1$ avec les points marqués x_4, x_5. L'application f_0 est constante sur cette bulle et donc $f_0(\mathbb{P}^1) = f_0(p)$.



Faire une série génératrice, appelée potentiel de Gromov-Witten. Pour ce faire nous mettons ces nombres dans une série génératrice et nous cherchons des équations différentielles vérifiées par cette série génératrice.

Prenons l'exemple de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, rappelons que la cohomologie de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ à coefficients complexes est un espace vectoriel de dimension 3 qui se décompose en trois sous-espaces vectoriels de dimension 1 qui sont $\oplus_{i=0}^{2} H^{2i}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$. Choisissons une base « naturelle » $([1],[H],[\mathrm{pt}])$ [2] où $[1] \in H^0(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ est la classe de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $[H]$ est la classe d'une droite dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et $[\mathrm{pt}]$ la classe d'un point dans $H^4(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$.

Notons t_0, t_1, t_2 les coordonnées associées à cette base. Ainsi, un point de cet espace vectoriel est de la forme $t_0[1] + t_1[H] + t_2[\mathrm{pt}]$ avec t_0, t_1, t_2 dans $\mathbb{C}$. Nous définissons alors une fonction, appelée potentiel de Gromov-Witten, sur cette cohomologie :

$$\mathscr{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(t_0, t_1, t_2) = \sum_{d\in\mathbb{N}} \sum_{n\geqslant 0} \sum_{\substack{k_0,k_1,k_2 \mid \\ k_0+k_1+k_2=n}} \frac{t_0^{k_0} t_1^{k_1} t_2^{k_2}}{k_0!k_1!k_1!} \langle \underbrace{[1],\dots,[1]}_{k_0}, \underbrace{[H],\dots,[H]}_{k_1}, \underbrace{[pt],\dots,[pt]}_{k_2} \rangle_{0,n,d}.$$

où le crochet $\langle \cdot, \cdots, \cdot \rangle_{0,n,d}$ est défini par (2). On peut simplifier la forme du potentiel en utilisant les propriétés suivantes.

1. Si $d = 0$, on compte les applications constantes. L'espace de modules est simplement $\overline{\mathscr{M}}_{0,n} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ où $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}$ est l'espace des modules quand X est un point. On en déduit [3] que

$$\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n,d=0} := \begin{cases} \int_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 & \text{si } n = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Si $d > 0$, avoir un $[H]$ dans l'invariant de GW en i-ième position, signifie que le i-ième point marqué doit appartenir à une droite. Or on sait que dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, une droite coupe une courbe de degré d en d points, ainsi on a la formule récursive suivante

$$\langle [H], \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n+1,d} = d.\langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n,d} \quad (3)$$

3. Si $d > 0$, avoir un $[1]$ dans l'invariant de GW en i-ième position, signifie intuitivement que l'image du i-ième point marqué doit appartenir à la classe $[1]$ qui est, rappelons-le, $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Ainsi, cette condition d'incidence n'apporte aucune condition et on peut l'oublier. On a donc

$$\langle [1], \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n+1,d} = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle_{0,n,d} \quad (4)$$

En utilisant les trois propriétés ci-dessus, cette

2. Le lecteur attentif aura vu que nos notations sont homologiques : espace total, droite et point alors que nous regardons la cohomologie. Ceci permet d'avoir une idée intuitive des conditions d'incidences et la dualité de Poincaré nous identifie pour $i \in \{0,1,2\}$, $H^i(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = H_{4-i}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$.

3. Cet argument n'est pas spécifique à $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ et fonctionne pour toute variété X.

série génératrice peut se réécrire plus simplement :

$$\mathscr{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(t_0,t_1,t_2) = \frac{t_1^2 t_0}{2} + \frac{t_0^2 t_2}{2} + \sum_{d\in\mathbb{N}^*} N(d) e^{dt_1} \frac{t_2^{3d-1}}{(3d-1)!}. \quad (5)$$

Les deux premiers termes correspondent à $d = 0$, la propriété (3) nous dit qu'on peut oublier les classes [1] et la formule (4) nous permet de garder uniquement les classes [pt] avec devant le coefficient d^{k_1} ce qui donne une exponentielle après la sommation.

Cette fonction satisfait à l'équation différentielle appelée équation WDVV (pour Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde)

$$\partial_{t_2}\partial_{t_2}\partial_{t_2}\mathscr{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} + \left(\partial_{t_1}\partial_{t_1}\partial_{t_1}\mathscr{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}\right).\left(\partial_{t_1}\partial_{t_2}\partial_{t_2}\mathscr{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}\right) = \left(\partial_{t_1}\partial_{t_2}\partial_{t_2}\mathscr{F}_0^{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}\right)^2.$$

Remarquons que la formule spectaculaire (1) a été trouvée simplement en identifiant les termes devant $e^{dt_1} t_2^{3d-1}$ dans l'équation ci-dessus. Même si cette technique fonctionne très bien en genre 0, elle a ses limites notamment pour calculer ces invariants de genre supérieur.

Utiliser une déformation plate pour dégénérer X en morceaux plus simples. Comme ces nombres sont invariants par déformation lisse, il est naturel de se poser la question sur une déformation un peu plus générale par exemple une déformation plate. Cette dernière est une généralisation de la situation suivante : la famille d'hyperboles $xy = t$ pour $t \in \mathbb{C}^*$ dégénère quand $t = 0$ en l'union de 2 droites $xy = 0$. Ainsi, nous essayons de déformer X en une variété singulière Y avec 2 morceaux Y_1 et Y_2 qui se recollent le long d'une hypersurface, c'est-à-dire $Y = Y_1 \cup Y_2$. En théorie, nous imaginons que Y_1 et Y_2 sont plus simples c'est-à-dire que nous arrivons à calculer leurs invariants de Gromov-Witten. Remarquons que la variété Y n'est plus lisse et donc la théorie générale de Gromov-Witten ne s'applique plus. Cependant, dans [8], Jun Li a démontré que sous certaines hypothèses, on peut retrouver les invariants de Gromov-Witten de X en connaissant ceux de Y_1 et Y_2. Nous obtenons une formule qui s'appelle la formule de dégénérescence.

Faire une récurrence en recollant les courbes. Supposons que nous avons deux applications stables $(C_1, x_1, \ldots, x_4, f_1)$ et $(C_2, y_1, \ldots, y_3, f_2)$ telles que $f_1(x_1) = f_2(y_3)$ (cf. figure 4). Nous pouvons les recoller en identifiant les points marqués (par exemple ici x_1 et y_3) et nous obtenons une application stable, notée $f_1 \cup f_2$ de degré $d_1 + d_2$ d'une courbe de genre $g_1 + g_2$ vers $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Du coup, nous pouvons espérer calculer les invariants en genre supérieur en cassant les courbes en morceaux de genre et de degré plus petit. Nous obtenons alors une récurrence sur le degré et le genre. Cette idée forte a donné beaucoup d'algorithmes : la récursion topologique de Chekhov-Eynard-Orantin (voir [2]) et la théorie cohomologique des champs.

Utiliser une formule de localisation. Supposons que nous ayons un groupe G qui agisse sur X (par exemple si X est une variété torique et $G = (\mathbb{C}^*)^n$). Alors nous pouvons faire agir le groupe sur l'espace de modules et l'intégrale (2) se calcule via les points fixes de cette action sur $\overline{\mathscr{M}}_{g,n}(X,d)$ (cf. Graber-Pandharipande [5]).

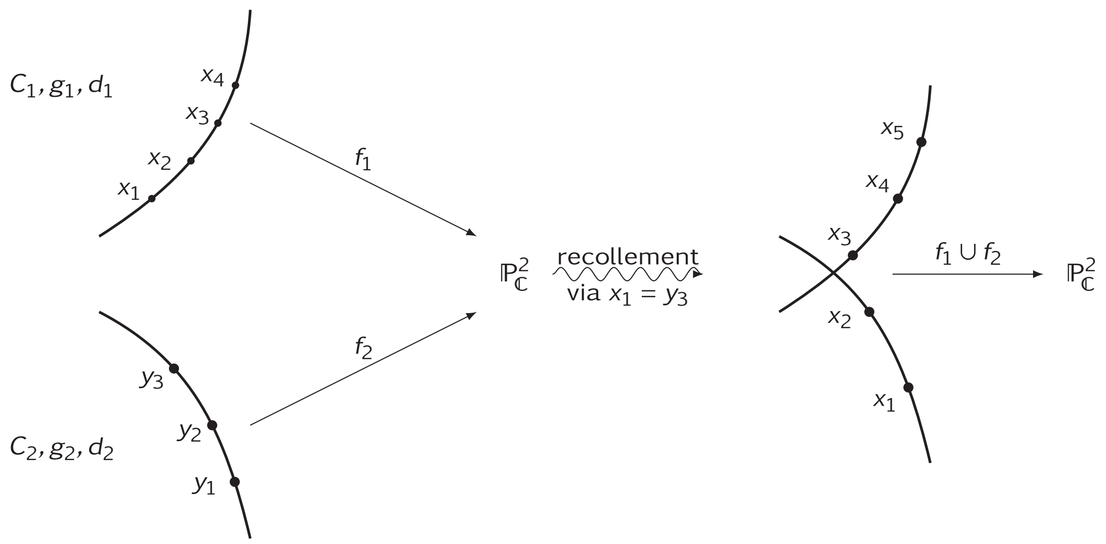
4. Autres domaines en lien avec les invariants de Gromov-Witten

À part calculer les invariants de Gromov-Witten, il y a aussi beaucoup de liens entre ces nombres et d'autres domaines des mathématiques. Ces relations viennent pour la plupart des idées de la physique des cordes.

Symétrie miroir. La symétrie miroir en mathématiques a des formulations très variées. Un des exemples surprenants est qu'à partir de la théorie des singularités du polynôme de Laurent $x + y + (xy)^{-1}$, nous pouvons calculer les invariants de Gromov-Witten de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Conjecture de Witten. La conjecture de Witten, que Kontsevich a démontrée dans [7], établit que le potentiel de Gromov-Witten du point (c'est-à-dire où nous avons remplacé $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ par un point dans (5)) est la fonction tau de la hiérarchie KdV (Korteweg–de Vries). Une hiérarchie est une suite infinie d'équations aux dérivées partielles dont les flots commutent deux à deux et la fonction tau d'une hiérarchie encode d'une certaine façon les solutions à ces équations. Ce résultat est très spectaculaire car il relie les invariants de Gromov-Witten du point à des constantes qui apparaissent dans une solution du système intégrable historique KdV.

Figure 4 – On peut recoller les applications stables ci-dessus car $f_1(x_1) = f_2(y_3)$.



Le lecteur attentif remarquera que la géométrie énumérative du point doit être assez facile. C'est effectivement le cas mais ici Witten rajoute des choses. En effet, il n'y a qu'une seule application de $C \to \mathrm{pt}$, du coup l'espace de modules est simplement donné par la courbe C de genre g avec n points marqués, noté $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Sur cet espace, il y a des fibrés en droite complexes naturels, notés $\mathcal{L}_1, \ldots, \mathcal{L}_n$, qui sont les espaces cotangents à la courbe aux points marqués. Ces fibrés donnent naissance à des classes de cohomologie, notées $\psi_1, \ldots, \psi_n$, sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Nous obtenons des nombres rationnels en intégrant les puissances de ces premières classes de Chern sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ c'est-à-dire

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{k_1} \cup \cdots \cup \psi_n^{k_n}.$$

Dans le cas des classes ψ, il n'y a plus d'interprétation énumérative évidente mais nous avons une structure plus riche. En genre zéro, on peut calculer ces nombres et nous avons

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,n}} \psi_1^{k_1} \cup \cdots \cup \psi_n^{k_n} = \binom{k_1, \ldots, k_n}{n} \delta_{n-3, k_1+\cdots+k_n}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker.

Un autre exemple historique est le cas $g = 1, n = 1$, en effet $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$ est l'espace de module des courbes elliptiques avec un point marqué et il est isomorphe à l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(4,6)$ [4]. En utilisant l'intégration sur les champs algébriques, on a $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \psi_1 = 1/24$.

Correspondance Landau-Ginzburg vs Calabi-Yau. Cette correspondance, imaginée par Witten, prédit une relation entre les invariants de Gromov-Witten d'une variété de Calabi-Yau et des invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten d'un polynôme. Dans [3], Alessandro Chiodo et Yongbin Ruan ont démontré cette correspondance dans le cas suivant. D'un côté, nous prenons les invariants de Gromov-Witten d'une quintique dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$ donnée par les zéros d'un polynôme homogène de degré 5 : par exemple $W = x_0^5 + \cdots + x_4^5$ où $[x_0 : \cdots : x_4]$ sont les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^4_{\mathbb{C}}$. Nous obtenons alors une série génératrice associée à ces invariants de Gromov-Witten.

D'un autre côté, nous calculons des invariants qui comptent le nombre de courbes (orbifold) complexes munies de fibrés en droites, qui vérifient certaines conditions. Ces invariants sont appelés les invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten et nous construisons une autre série génératrice avec ces invariants.

Cette correspondance prédit que les deux séries génératrices construites à partir de ces deux familles d'invariants sont égales après un changement de variable bien choisi.

4. C'est-à-dire le quotient de $\mathbb{C}^2 - \{0,0\}$ par l'action de $\mathbb{C}^*$ donnée par $\lambda(x,y) = (\lambda^4 x, \lambda^6 y)$.

Théorie cohomologique des champs. Une théorie cohomologique de champs est la donnée d'un espace vectoriel de dimension finie, noté V, et d'une famille $\varphi = (\varphi_{g,n})_{g,n}$ d'applications

$$\varphi_{g,n} : V \otimes \cdots \otimes V \to H^*(\overline{\mathscr{M}}_{g,n})$$

qui vérifient certaines conditions, notamment des conditions de recollements sur les courbes.

Par exemple, la théorie de Gromov-Witten produit pour chaque variété lisse et projective, notée X, une théorie cohomologique de champs, notée φ^X avec $V = H^*(X)$. En particulier, la théorie de Gromov-Witten (avec les classes ψ cf. conjecture de Witten) où X est un point produit un exemple particulièrement simple mais important (voir plus bas).

Une question naturelle est de savoir si étant données deux variétés projectives lisses X_1 et X_2, nous pouvons relier les théories cohomologiques des champs φ^{X_1} avec φ^{X_2}. Dans [4], Alexander Givental a prédit une telle relation dans certains cas et Constantin Teleman l'a démontrée dans [9].

Plus précisément, Givental a trouvé un groupe, noté G, qui agit sur les théories cohomologiques des champs, c'est-à-dire pour tout $h \in G$, et pour toute théorie cohomologique des champs φ, on peut construire une autre théorie cohomologique des champs notée $h\varphi$. Le résultat spectaculaire de Givental-Teleman est que si la théorie cohomologique des champs φ est « semi-simple » avec un espace vectoriel de dimension r (par exemple celle provenant de la théorie de Gromov-Witten de $\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{C}}$ est semi-simple) alors nous pouvons trouver un élément dans le groupe de Givental qui envoie la théorie cohomologique des champs de r points sur φ. Cette construction est complexe mais assez explicite pour pouvoir faire des calculs en particulier, ceci permet de calculer les invariants de Gromov-Witten de $\mathbb{P}^k_{\mathbb{C}}$ en genre supérieur.

Références

[1] K. Behrend et B. Fantechi. « The intrinsic normal cone ». *Invent. Math.* **128**, nº 1 (1997), p. 45-88.

[2] L. Chekhov, B. Eynard et N. Orantin. « Free energy topological expansion for the 2-matrix model ». *J. High Energy Phys.*, nº 12 (2006), p. 053, 31.

[3] A. Chiodo et Y. Ruan. « Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations ». *Invent. Math.* **182**, nº 1 (2010), p. 117-165.

[4] A. B. Givental. « Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians ». In : vol. 1. 4. Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary. 2001, p. 551-568, 645.

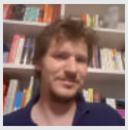
[5] T. Graber et R. Pandharipande. « Localization of virtual classes ». *Invent. Math.* **135**, nº 2 (1999), p. 487-518.

[6] Gromov. « Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds ». *Invent. Math.* **82**, nº 2 (1985), p. 307-347.

[7] M. Kontsevich. « Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function ». *Comm. Math. Phys.* **147**, nº 1 (1992), p. 1-23.

[8] J. Li. « A degeneration formula of GW-invariants ». *J. Differential Geom.* **60**, nº 2 (2002), p. 199-293.

[9] C. Teleman. « The structure of 2D semi-simple field theories ». *Invent. Math.* **188**, nº 3 (2012), p. 525-588.



Étienne Mann

larema, Université d'Angers

etienne.mann@univ-angers.fr

L'auteur travaille en géométrie algébrique et plus précisément sur les invariants de Gromov-Witten et la symétrie miroir. Ces dernières années, il essaie d'utiliser des idées de géométrie algébrique dérivée pour traiter plus géométriquement ces questions.

Accès ouvert, prestige et limites artificielles

• G. Lévy

Chères lectrices et lecteurs de la *Gazette*,

Je voudrais profiter de cette tribune pour partager avec vous des interrogations qui me taraudent depuis un moment. Pour faire court, le point qui m'ennuie est le prestige des revues et la limitation du nombre d'articles publiables par unité de temps qui en découle. L'on a vu sur les dernières années, outre des conversions heureuses en accès ouvert (je pense à *Algebraic Combinatorics*, qui prospère et dont la version originale de Springer semble s'essouffler depuis la scission de janvier 2017), des créations tout aussi heureuses et qui publient des articles de très bonne facture, nourris des réflexions d'éminents collègues, je vise ici les Annales Henri Lebesgue (AHL).

Tout va très bien me direz-vous, la revue tient bon financièrement (grâce au LabEx éponyme), elle reçoit une quantité tout à fait honnête d'articles et en rejette une grosse partie pour ne garder que 'le meilleur', sa grande sélectivité lui assurant une crédibilité auprès de la communauté mathématique. C'est la preuve irréfutable que l'accès ouvert est compatible avec le plus haut niveau de la recherche internationale et autres poncifs, les superlatifs manquent.

Vous l'aurez compris, si je suis sincèrement ravi de voir la cause de l'accès ouvert (section publications en l'espèce) gagner en popularité au travers de réussites érigées en exemples, quelques points me chatouillent et me font penser qu'il reste un saut conceptuel à franchir. En l'état, les AHL sont une revue purement électronique, dont la partie technique (secrétariat d'édition, mise aux normes, maintien du site web) est assurée par le Centre Mersenne, à un prix modique comparé à ce qui se fait dans le commerce.

L'année de leur création, les AHL ont publié une dizaine d'articles, puis une quinzaine l'an dernier. C'est peu, c'est affreusement peu, d'autant plus que la revue se veut généraliste. On est deux solides ordres de grandeur en dessous de ce qui mérite d'être publié en mathématiques en un an, en France ou dans le monde. Nous perpétuons une sélection au prestige et au niveau supposé, rejetant des articles méritants *dans l'absolu* au seul motif que l'on manque d'espace pour publier. L'argument peut s'entendre sur le plan financier, le travail fourni par Mersenne étant de qualité sur chaque article, mais est totalement inepte techniquement.

Outre l'encouragement à une lecture en diagonale des dossiers de recherche que cette sélection constitue, ne retenant que le nombre d'articles publiés et le nombre d'étoiles attribuées à chaque revue, elle instille l'idée que l'accès ouvert – hors revues prédatrices – est réservé à une petite élite, un noyau de stars. C'est, à mon sens, un sous-entendu parfaitement nocif. Qui plus est, en cas de rejet, le même article sera envoyé à une, deux, trois revues différentes, multipliant inutilement le temps passé à relire la même chose par des personnes différentes (ou pas, d'ailleurs, il arrive que le même article soit envoyé à la même relectrice par plusieurs canaux successifs).

La portabilité des avis de relecture est une timide tentative d'amélioration de la situation, mais ressemble à mon avis plus à un pansement sur une jambe de bois. Même en rattrapant un peu du temps perdu, la nouvelle relectrice devra passer du temps hors de sa recherche pour se plonger dans l'article et se faire sa propre opinion. Cette course à l'échalote est ridicule et nous en sommes, collectivement, les premiers responsables. Nous sommes les premiers acteurs du darwinisme de la recherche. Nous acceptons de perdre un temps fou là où il devrait suffire d'une seule passe pour décider si oui ou non, tel article contient assez de matière et d'idées pour mériter une diffusion dans une revue sérieuse, quelle qu'elle soit. Pourtant, nous pestons lorsque notre article doit passer entre plusieurs mains avant d'atterrir dans une revue dont le prestige ne nous satisfait pas.

Voilà, à mon sens, ce dont nous manquons : une revue disciplinaire purement électronique, à la capacité de publication illimitée, au nom neutre, sans glorification excessive, dont le mot d'ordre serait quelque chose comme « Publier tout ce qui vaut la peine de l'être » (et dans ce slogan, chaque mot compte). Tout ce qui présente un intérêt au moins commun, de l'article de thèse honnête jusqu'à la révolution digne d'un Nobel ou d'une Fields, devrait avoir sa place dans le même havre, peu importe le nombre d'articles déjà acceptés dans les douze derniers mois. C'est en tout cas l'opinion que je défends ici.

Paru dans la *Gazette* numéro 15, décembre 1980 ; dans le Bulletin de l'IMU de juin 1981 est précisé : « English, French, German and Russian are the official languages of the Congress ».

PRELIMINARY ANNOUNCEMENT

The Organizing Committee is pleased to announce that the next International Congress of Mathematicians will be held in Warsaw, August 11-19, 1982.

The Chairman of the Organizing Committe is Professor Czesław Olech.

The First Announcement containing more detailed information will appear in summer 1981.

AVIS PRELIMINAIRE

Le Comité Organisateur a le plaisir d'annoncer le prochain Congrès International des Mathématiciens qui aura lieu à Varsovie, Pologne, de 11 à 19 Août 1982.

Professeur Czesław Olech est nommé Président du Comité Organisateur.

Le Premier Avis contenant une information plus détaillée sera publié en été 1981.

VORANKÜNDIGUNG

Der Organisationskomitèe hat die Ehre Sie zu Benachrichtigen, dass der nachfolgende Internationale Mathematikerkongress in Warschau Polen, in den Tagen von 11 bis 19 August 1982 stattfinden wird.

Der Vorsitzender des Organisationskomitees ist Professor Czesław Olech.

Die erste Ankündigung des Kongresses mit detaillierten Informationen wird im Sommer 1981 geliefert.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ СООБЩЕНИЕ

Организационный Комитет сообщает, что очередной Международный Конгресс математиков состоится в Польше в г. Варшаве с 11 по 19 августа 1982 года.

Председателем Организационного Комитета является проф. Чеслав Олех.

Первое сообщение, содержащее более подробную информацию, будет разослано летом 1981 года.

129

Souvenirs de Lucien Szpiro

1941 - 2020

• E. Ullmo

Lucien Szpiro vient de mourir. Je suis assailli de souvenirs.

Première rencontre – probablement mai 1989 : je finis alors mon dea avec Michel Raynaud sur les points entiers algébriques. J'assiste à un nouvel exposé au séminaire d'arithmétique et de géométrie algébrique (saga) à Orsay dont le contenu me dépasse largement. Un chercheur au charisme évident pose une question simple. Les objets particulièrement techniques de l'exposé semblent lui paraître naturels et familiers. Au vu de la réponse de l'orateur, on voit que la formulation d'apparence naïve de la question est au cœur du problème. Je comprends toujours très peu, mais j'ai l'intuition que je pourrais progresser si l'on m'expliquait les maths sous cet angle. Je ne sais pas qui a posé la question.

Deuxième rencontre – un peu plus tard : je cherche un directeur de thèse. Michel Raynaud, qui a déjà plusieurs étudiants, m'oriente vers Lucien Szpiro : « un chercheur très actif qui travaille sur des sujets en plein développement ». J'ai rendez-vous à l'ihp où il exerce ses fonctions de directeur de recherche au cnrs. Je suis intimidé et inquiet sur mes capacités. Il me reçoit, je reconnais immédiatement le chercheur charismatique de l'exposé au saga. Mon anxiété ne faiblit pas, mais j'ai l'impression que la chance me sourit. Je veux faire une thèse avec lui !

L'entretien se passe bien. Il semble connaître mon sujet de dea. Il me pose heureusement peu de questions sur mes connaissances mathématiques. Il semble me faire confiance. Il me parle de ses centres d'intérêt mathématiques et de la manière dont il exerce le métier de mathématicien. Beaucoup d'informations à digérer rapidement. Je comprends que je dois apprendre la « théorie d'Arakelov ». J'apprends qu'il s'agit d'une « théorie des intersections sur les surfaces arithmétiques » et que l'on peut faire de la géométrie diophantienne avec elle. Il me dit que l'intuition vient de la situation analogue sur les corps de fonctions, cela ne m'aide pas vraiment. Il y a un séminaire régulier auquel je dois participer, suivi d'un déjeuner. Les rendez-vous suivants auront lieu soit à l'ihp, soit dans un café près de l'église Saint-Sulpice. Il prépare un exposé Bourbaki sur la deuxième preuve par Vojta et Faltings de la conjecture de Mordell. Il souhaite que je lise aussi le papier et que l'on se réunisse avec Marguerite Flexor, semaine après semaine, pour en discuter. Ce n'est pas dit explicitement, mais je ressors en pensant que je suis probablement son étudiant. En plus, il y a visiblement tout un groupe de gens qui travaille sous son impulsion !

Si je suis son étudiant, je dois essayer de comprendre ses mathématiques. Je réalise que ses premières amours mathématiques sont pour l'algèbre commutative. Il a démontré avec Christian Peskine une conjecture d'Auslander – un énoncé très fin sur les modules de type fini sur les anneaux locaux de type fini sur un corps. Toujours avec Peskine, il a développé la théorie des liaisons sur les variétés algébriques. Cela semble très loin de ses préoccupations du moment. Je retiens qu'il est possible de changer de sujet et que les collaborations s'avèrent souvent fructueuses. Lucien me dira plus tard que son travail avec Peskine sur la conjecture d'Auslander était son travail de thèse sous la direction de Pierre Samuel. Celui-ci leur avait suggéré de répartir leurs travaux de sorte que chacun ait une contribution personnelle bien identifiée. Après leur proposition que l'un signe les pages paires et l'autre les pages impaires, la suggestion de Pierre Samuel a été abandonnée.

Je me concentre alors sur la compréhension de la « conjecture de Szpiro ». C'est plus dans mes cordes, mais il faut apprendre la théorie des courbes elliptiques pour comprendre. Je trouve tout ce qu'il faut dans un livre de Silverman. C'était le sujet du séminaire Szpiro qui s'est tenu à l'IHP en 1988 et qui vient d'être publié dans *Astérique* 183. Une courbe elliptique est une courbe algébrique de genre 1. Elle est munie d'une loi de groupe additive sur l'ensemble de ses points. Comme variété complexe, c'est un tore complexe, quotient de $\mathbb{C}$ par un réseau $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ de $\mathbb{C}$. On peut écrire l'équation affine d'une courbe elliptique E dans le plan sous la forme

$$y^2 = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = P(x).$$

Si la courbe elliptique E est définie sur $\mathbb{Q}$, on peut trouver une telle équation avec les a_i dans $\mathbb{Z}$ et imposer que la valeur absolue Δ du discriminant de $P(x)$ soit minimale parmi les choix d'une équation de E à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Cela définit le discriminant minimal $\Delta_{\min}(E)$. Le conducteur $f(E)$ est alors essentiellement le produit des nombres premiers qui divisent $\Delta_{\min}(E)$. La conjecture de Szpiro, formulée dans les années 1980, prévoit que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\epsilon)$ telle que pour toute courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$ on ait :

$$|\Delta_{\min}(E)| \leqslant C(\epsilon) f(E)^{6+\epsilon}.$$

Quelques années plus tôt, Szpiro avait établi la validité d'une telle relation entre discriminants et conducteurs des courbes elliptiques sur les corps de fonctions. Encore une fois l'intuition vient des corps de fonctions ! Comme David Masser et Joseph Oesterlé l'ont remarqué quelques années plus tard, en appliquant cet énoncé à la courbe de Frey

$$y^2 = x(x-a)(x+b)$$

avec a, b, $c = a+b$ des entiers premiers entre eux, on peut en déduire une formulation très simple d'une conjecture maintenant au centre des préoccupations des arithméticiens : la conjecture « abc ».

La conjecture de Mordell, démontrée par Faltings en 1983, a toujours été au centre des intérêts de Szpiro. Quand je commence à essayer de comprendre les travaux de Vojta et Faltings, je mesure tout ce qu'il me faut rattraper pour pouvoir suivre mon maîre. Le séminaire Szpiro des années 79/80, publié dans *Astérisque* 86 en 1981, traite le cas des corps de fonctions.

Soit K le corps des fractions rationnelles d'une courbe B projective lisse sur un corps algébriquement clos k (par exemple $k = \mathbb{C}$, $B = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et $K = \mathbb{C}(z)$). Soit X_K une courbe projective lisse sur K (donnée par exemple par l'équation $y^2 = x^6 + z^2 x + z$). On peut naturellement associer à X_K une famille $X = (X_b)_{b \in B}$ de courbes algébriques sur k (dans notre exemple, obtenues en donnant à z diverses valeurs dans $B = P^1(\mathbb{C})$). Dans cette situation X est une surface algébrique munie d'un morphisme algébrique surjectif $f : X \to B$. L'étude de la courbe X_K passe alors par celle de la surface X. Si les fibres de f au-dessus des points de la courbe B ne sont pas isomorphes entre elles, on dit que X_K n'est pas isotriviale. L'ensemble fini des points b de B tels que la fibre X_b de f au-dessus de b n'est pas lisse est appelé lieu singulier de X_K (dans l'exemple précédent la fibre X_0 au-dessus du point $z = 0$, d'équation $y^2 = x^6$, n'est pas lisse). La conjecture de Mordell prévoit que si X_K est de genre au moins 2 et est non isotriviale, l'ensemble $X_K(K)$ de ses points rationnels sur K est fini.

Parshin et Arakelov ont prouvé cette conjecture pour k de caractéristique 0. Leur preuve passe par celle de la conjecture de Shafarevich qui prévoit que si S est un ensemble fini de points de B, il y a au plus un nombre fini de courbes X_K, non isotriviales, de genre g donné dont le lieu singulier est contenu dans S. Szpiro prouve les conjectures de Mordell et de Shafarevich pour les corps k de caractéristique $p > 0$ en prouvant des théorèmes d'annulation de cohomologie et des propriétés de positivité du « dualisant relatif » qu'il est difficile de décrire de manière non technique.

Au début des années 1980, Szpiro est convaincu qu'il faut s'inspirer du cas des corps de fonctions – K comme ci-dessus – pour comprendre celui des corps de nombres. L'analogie avec la situation précédente se présente sous la forme suivante. On part d'une courbe algébrique $X_{\mathbb{Q}}$ sur le corps des rationnels. On peut écrire une équation polynomiale de $X_{\mathbb{Q}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On lui associe une surface arithmétique

$$f : X \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Du point de vue de la géométrie algébrique, $\mathbb{Z}$ (ou plus précisément la droite affine $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{Z}$) est une variété algébrique de dimension 1 dont les points fermés sont les nombres premiers p (associés aux corps finis $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). La surface arithmétique X est alors pensée comme une famille de courbes dont les fibres au-dessus d'un nombre premier p sont des courbes X_p sur $\mathbb{F}_p$ obtenues essentiellement en réduisant modulo p l'équation de $X_{\mathbb{Q}}$.

L'obstacle principal pour adapter les techniques développées pour les corps de fonctions est que $\mathbb{Z}$ n'est pas une variété projective. Il manque le « point à l'infini ». Pour la même raison, on ne peut pas, a priori, construire une théorie des intersections sur la surface arithmétique X de manière purement géométrique. Le théorème de Bézout qui dit que deux courbes C et C' de degrés d et d' dans l'espace projectif de dimension 2 se coupent en dd' points (comptés avec multiplicité) n'a pas d'équivalent dans le plan affine complexe où deux droites parallèles ne se rencontrent pas. La situation projective permet aussi de définir l'auto-intersection $(C.C)$ d'une courbe C avec elle-même. On vérifie pour cela que l'intersection d'une courbe C avec tout diviseur $div(f)$ d'une fonction méromorphe est nul. Un lemme « de déplacement » assure que, pour un f convenable, $C + div(f)$ n'a pas de composante commune avec C. Cela permet de définir $(C.C) = (C.C + div(f))$ de manière non ambigüe.

Szpiro se rend compte qu'un article d'Arakelov, « Intersection theory of divisors on an arithmetic surface » paru en 1974 dans les Math. USSR Izvestija, a le potentiel pour surmonter cette difficulté essentielle. Il fait alors la promotion des idées d'Arakelov, convainc ses collègues qu'il y a une nouvelle direction à prendre et développe un nouveau sujet maintenant central en géométrie arithmétique : la théorie d'Arakelov. On compactifie la situation en ajoutant des « structures à l'infini » – fibrés inversibles métrisés, diviseurs compactifiés, fonctions de Green sur la surface de Riemann $X_{\mathbb{C}}$ déduite de $X_{\mathbb{Q}}$ par extension des scalaires de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{C}$. Les degrés des objets ainsi que les nombres d'intersection deviennent des nombres réels mais l'intuition géométrique est préservée. Je ferai aussi partie des convertis et grâce à lui, tout cela sera au centre de mes travaux de thèse et des années qui ont suivi. On peut faire de l'arithmétique avec des idées géométriques ! Une congruence modulo un nombre premier p peut s'interpréter comme une intersection locale au-dessus du point p de $\mathbb{Z}$!

Une illustration de l'élégance des mathématiques de Szpiro est donnée par son étude de la théorie d'Arakelov en dimension 1. On étudie les anneaux d'entiers des corps de nombres de manière géométrique, avec l'intuition des surfaces de Riemann. Les points fermés d'un anneau d'entiers O_K d'un corps de nombres K sont les idéaux premiers non nuls de O_K. Szpiro donne de nouvelles preuves des grands théorèmes classiques de la théorie des nombres : la finitude du groupe des classes d'idéaux modulo les idéaux principaux, le théorème des unités (qui décrit la structure des éléments inversibles de O_K) et les théorèmes d'Hermite et d'Hermite–Minkowski. Je me souviens du plaisir que j'ai eu à lire ces preuves à l'époque et je suis encore plus convaincu aujourd'hui que ce sont les preuves les plus compréhensibles, les plus économiques et les plus naturelles de ces énoncés. La référence à conserver pour les futures générations d'étudiants qui apprennent les bases de la théorie des nombres.

Une illustration de la profondeur des mathématiques de Szpiro est donnée par sa vision de la positivité et des propriétés numériques du dualisant relatif en théorie d'Arakelov et de leur importance pour la géométrie diophantienne. Les questions de positivité en géométrie algébrique complexe sont classiques et centrales. On cherche à réaliser une variété projective X dans l'espace projectif $\mathbb{P}^N$ à l'aide d'un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur X. Il faut pour cela que le fibré $\mathscr{L}$, ou ses puissances tensorielles, ait beaucoup de sections globales. Si l'on dispose d'une base de sections globales $(s_0, s_1, \ldots, s_N)$ d'une puissance tensorielle $\mathscr{L}^{\otimes n}$ de $\mathscr{L}$ telle que pour tout point x de X les s_i ne s'annulent pas tous en x, on obtient un morphisme de X dans $\mathbb{P}^N$ par l'application

$$\begin{aligned}\psi : X &\longrightarrow \mathbb{P}^N\\ x &\longmapsto [s_0(x), s_1(x), \ldots, s_n(x)].\end{aligned}$$

Si le morphisme ψ est en fait un plongement, on dit que $\mathscr{L}$ est ample. Supposons X de dimension 2. Le théorème de Hilbert–Samuel assure que si l'auto-intersection de $\mathscr{L}$ est positive, alors $\mathscr{L}^{\otimes n}$ a des sections globales pour n assez grand. Si de plus l'intersection de $\mathscr{L}$ avec toute courbe est positive, le théorème de Nakai–Moishezon assure que $\mathscr{L}$ est ample. Les propriétés de positivité du fibré inversible canonique K_X sur X des formes différentielles holomorphes de degré maximal sont alors classiquement à la base de l'étude des propriétés géométriques de X.

Szpiro explique la notion d'amplitude arithmétique et ce que doivent être les analogues des théorèmes de Hilbert-Samuel et de Nakai–Moishezon pour les surfaces arithmétiques dans le contexte de la théorie d'Arakelov. On dispose dans ce cadre d'un fibré inversible canonique sur X – qui peut se décrire en terme de formes différentielles relatives du morphisme $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ – le « dualisant relatif ω_X », qui joue le rôle du K_X de la géométrie classique. Il étudie un nouvel invariant arithmétique fondamental d'une courbe algébrique sur $\mathbb{Q}$, l'auto-intersection ω_X^2 du dualisant relatif. Il montre comment des bornes supérieures précises sur ω_X^2 entraînent la conjecture de Mordell et comment la positivité stricte de ω_X^2 entraine la conjecture de Bogomolov, qui prévoit la discrétion des points algébriques (à valeurs dans la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$) d'une courbe algébrique de genre au moins 2 pour la topologie de Néron-Tate de sa jacobienne. La conjecture de Bogomolov sera démontrée quelques années plus tard par Zhang et l'auteur de ce texte en utilisant un travail en commun avec Szpiro établissant un énoncé d'équidistribution des points de petite hauteur sur les variétés arithmétiques.

Szpiro convainc aussi Faltings de l'importance des idées initiées par Arakelov. Faltings développe alors la théorie des intersections sur les surfaces arithmétiques et obtient entre autres un théorème de l'indice de Hodge et la non négativité de l'invariant ω_X^2. En 1983 il annonce la preuve de la conjecture de Mordell. Il écrit à Szpiro une lettre l'informant de sa trouvaille, qui résume en deux pages les étapes de la preuve, qui s'obtient en même temps que deux énoncés majeurs de la géométrie arithmétique : la conjecture de Shafarevich (qui on l'a vu était au centre des préoccupations de Szpiro) et la conjecture de Tate.

Le séminaire Szpiro des annnées 1983/1984 qui a eu lieu à l'Éns Ulm est centré sur la preuve de Faltings de la conjecture de Mordell. On y trouve des précisions importantes sur la preuve de Faltings, par Deligne, Illusie, Moret-Bailly et Raynaud entre autres. Ce séminaire, publié dans *Astérisque* 127, est la référence pour qui veut comprendre en détail cet ensemble d'idées. On y trouve aussi la lettre de Faltings à Szpiro. Ce sera aussi mon livre de chevet pour de nombreuses années.

Après ma première rencontre officielle avec Szpiro, je réalise l'étendue du chemin à parcourir pour ingurgiter les bases de mon tout nouveau domaine de recherche. Il me reçoit semaine après semaine. Sa vision du sujet et ses explications non techniques de ce que signifient vraiment les objets et leurs propriétés m'orientent et me donnent du courage pour me plonger dans la littérature nécessaire. Que de temps gagné ! Il me met en confiance – on a le droit de se tromper, d'avancer des stratégies sans issue. Il est crucial de prendre du plaisir. Nous travaillons aussi avec Marguerite Flexor à la compréhension du texte de Faltings qui donne un énoncé de finitude pour les points rationnels des sous-variétés algébriques des variétés abéliennes, qui contient la conjecture de Mordell comme cas particulier. Le texte est ardu, mais je découvre l'efficacité du travail mathématique en collaboration. Après une période de brouillard complet, j'ai même l'impression que ma contribution à la compréhension du texte est parfois utile à Szpiro.

L'aide que je reçois de Szpiro ne se limite pas aux mathématiques. Il convainc ses collègues de l'impa à Rio de m'accueillir pour mon service militaire dans le cadre de la coopération. Cette année et demie au Brésil est un miracle pour moi, sur un plan personnel et familial. Je finis un travail sur les « points entiers de hauteur bornée sur les surfaces arithmétiques ». Szpiro me rend visite à Rio pour discuter de mon travail. Il arrive le jour même de la naissance de mon premier fils. Il a prévu de rester un mois. Ma vie est un peu compliquée et Szpiro n'est pas convaincu de la validité de mon résultat. Cela ne colle pas avec son intuition. Il m'explique pourquoi et il me faut de longues séances de travail pour que nous soyons convaincus que mon résultat n'est pas en contradiction avec sa vision. Le fruit de ces discussions fournit un éclairage nouveau qui fait évoluer largement ma compréhension et permet un niveau de rédaction acceptable. Je pourrai soutenir ma thèse à mon retour en France ! Szpiro me soutient alors sans réserve et j'obtiens grâce à lui un poste de maître de conférences à Orsay.

À partir de ce moment nos relations évoluent vers le mode amical. Szpiro devient Lucien et je découvre de nombreuses autres facettes de sa personnalité. En toute chose, il recherche le meilleur, a un avis éclairé et est d'une exigence extrême. C'est vrai bien sûr pour les mathématiques mais aussi pour les restaurants, le vin, les voyages, la musique, les clubs de jazz, le cinéma. Il s'intéresse à la politique, la sociologie, la psychologie, au tennis, aux échecs – il y joue au Luxembourg – ou à la marche à pied en montagne. Discuter avec Lucien est un plaisir sans cesse renouvelé. Avoir son aide et son amitié à toutes les étapes de ma vie en a changé le cours.

Lucien Szpiro a été une source d'inspiration pour une génération de géomètres arithméticiens. Les mathématiques étaient pour lui une activité sociale et un projet collectif. Il a toujours su fédérer autour de lui des groupes de scientifiques pour comprendre et faire des mathématiques en commun. La participation féminine était bienvenue et les mathématiciennes ont été au cœur des séminaires Szpiro des années 1980. Renée Elkik, Marguerite Flexor et Mireille Martin-Deschamps ont participé activement et ont présenté et rédigé la version écrite de nombreux exposés. Lucien a par ailleurs encadré 17 thèses dont celles de Laurent Moret-Bailly, Shou-Wu Zhang, Ahmed Abbes, Carlo Gasbarri et la mienne. Il a guidé et soutenu les uns et les autres pendant plus de 50 années d'activité au sein de la communauté mathématique. Son humanisme, son humour, son talent pour la discussion et son plaisir pour l'activité mathématique dans toutes ses dimensions vont nous faire cruellement défaut. Mes pensées vont à Beth, son épouse.

Instructions aux auteurs

Objectifs de la *Gazette des Mathématiciens*. Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (`http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/`).

Articles scientifiques. Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

Soumission d'article. Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique (`gazette@smf.emath.fr`), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier TEX le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe LATEX *gztarticle* fournie par les distributions TEX courantes (TEX Live et MacTEX – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiKTEX), et sinon téléchargeable depuis la page `http://ctan.org/pkg/gzt`. Sa documentation détaillée se trouve à la page `http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf`. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution TEX à jour.

Classe LATEX : Denis Bitouzé (`denis.bitouze@lmpa.univ-littoral.fr`)

Conception graphique : Nathalie Lozanne (`n.lozanne@free.fr`)

Impression : Jouve – 1 rue du docteur Sauvé 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe Caignaert.