Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Tome 149
Fascicule 3

2021

Daniel Vargas-Montoya — Algébricité modulo p, séries hypergéométriques et structures de Frobenius fortes 439-477
Nicolas Martin — Behaviour of some Hodge invariants by middle convolution 479-500
Juan C. Morelli — A persistently singular map of $\mathbb{T}^n$ that is C^1 robustly transitive 501-519
Jishnu Ray, Feng Wei & Gergely Zábrádi — Multivariable (φ, Γ)-modules and representations of products of Galois groups: The case of the imperfect residue field 521-546

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Pages 439-546

Bull. Soc. Math. France
149 (3), 2021, p. 439-546

Sommaire

Daniel Vargas-Montoya — Algébricité modulo p, séries hypergéométriques et structures de Frobenius fortes ... 439-477
Nicolas Martin — Comportement d'invariants de Hodge par convolution intermédiaire ... 479-500
Juan C. Morelli — Une application C^1 robustement transitive dans $\mathbb{T}^n$ avec singularités persistantes ... 501-519
Jishnu Ray, Feng Wei & Gergely Zábrádi — (φ, Γ)-modules multivariables et représentations du produit du groupe de Galois: le cas des corps résiduels imparfaits ... 521-546

Bull. Soc. Math. France
149 (3), 2021, p. 439-546

Contents

Daniel Vargas-Montoya — Algebraicity modulo p, hypergeometric series and strong Frobenius structure 439-477
Nicolas Martin — Behaviour of some Hodge invariants by middle convolution 479-500
Juan C. Morelli — A persistently singular map of $\mathbb{T}^n$ that is C^1 robustly transitive 501-519
Jishnu Ray, Feng Wei & Gergely Zábrádi — Multivariable (φ, Γ)-modules and representations of products of Galois groups: The case of the imperfect residue field 521-546

Bull. Soc. Math. France
149 (3), 2021, p. 439-477

ALGÉBRICITÉ MODULO p, SÉRIES HYPERGÉOMÉTRIQUES ET STRUCTURES DE FROBENIUS FORTES

PAR DANIEL VARGAS-MONTOYA

RÉSUMÉ. — Ce travail est consacré à l'étude de l'algébricité modulo p des G-fonctions de Siegel. Notre but est de souligner la pertinence de la notion de structure de Frobenius forte, classiquement étudiée dans la théorie des équations différentielles p-adiques, pour l'étude d'une conjecture d'Adamczewski et Delaygue concernant le degré d'algéricité de réductions modulo p de G-fonctions. Nous rendons d'abord explicite un résultat de Christol en montrant que si $f(z)$ est une G-fonction qui annule un opérateur différentiel dans $\mathbb{Q}(z)[d/dz]$ d'ordre n qui est muni d'une structure de Frobenius forte de période h pour le nombre premier p et que $f(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$, alors la réduction de f modulo p est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ et son degré d'algébricité est majoré par p^{n^2h}. En généralisant une approche introduite par Salinier, nous montrons ensuite qu'un opérateur fuchsien à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$, dont le groupe de monodromie est rigide et dont les exposants sont rationnels, possède, pour presque tout nombre premier p, une structure de Frobenius forte de période h, où h est majorée explicitement et indépendamment de p. Une version légèrement différente de ce résultat a été démontré récemment par Crew en suivant une approche différente fondée sur la cohomologie p-adique. Nous utilisons ces deux résultats pour résoudre la conjecture mentionnée dans le cas des séries hypergéométriques généralisées.

Texte reçu le 8 mai 2020, modifié le 3 novembre 2020, accepté le 16 mars 2021.

DANIEL VARGAS-MONTOYA, Institut Camille Jordan, Université Claude Bernard Lyon 1, Batîment Braconnier, 21 Avenue Claude Bernard, 69100 Villeurbanne • *E-mail :* `vargas@math.univ-lyon1.fr`

Classification mathématique par sujets (2010). — 11E95, 12H25.

Mots clefs. — Structure de Frobenius forte, réduction modulo p, algébricité modulo p, équations différentielle p-adique, rigidité.

This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union's Horizon 2020 research and innovation programme under the Grant Agreement No 648132.

doi:10.24033/bsmf.2834

Abstract (*Algebraicity modulo p, hypergeometric series and strong Frobenius structure*). — This work is devoted to study of algebraicity modulo p of Siegel's G-functions. Our goal is emphasize the relevance of the notion of strong Frobenius structure, classically studied in the theory of the p-adic differential equations, for the study of a Adamczewski–Delaygue's conjecture concerning the degree of algebraicity modulo p of G-functions. For this, we first make a Christol's result explicit by showing that if $f(z)$ is a G-function which is a solution of a differential operator in $\mathbb{Q}(z)[d/dz]$ of order n which has a strong Frobenius structure with period h for the prime number p and that $f(z)$ belongs to $\mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, then the reduction of $f(z)$ modulo p is algebraic over $\mathbb{F}_p(z)$ and its degree of algebraicity is bounded by p^{n^2h}. By generalizing an approach introduced by Salinier, we then show that a Fuchsian operator with coefficients in $\mathbb{Q}(z)$, whose monodromy group is rigid and whose exponents are rational has for almost all prime numbers p a strong Frobenius structure with period h, where h is explicitly bounded and does not depend on p. A slightly different version of this result has been demonstrated recently by Crew following a different approach based on the p-adic cohomology. We use these two results to solve the mentioned conjecture in the case of generalized hypergeometric series.

1. Introduction

Etant donnés un corps K et une série formelle de plusieurs variables $g(z_1,\dots,z_n)=\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n} a(i_1,\dots,i_n)z_1^{i_1}\cdots z_n^{i_n}\in K[[z_1,\dots,z_n]]$, on définit la *diagonale* de g comme la série formelle d'une variable

$$f(z)=\sum_{j\geq 0} a(j,j,\dots,j)z^j\in K[[z]].$$

Lorsque K est de caractéristique nulle, cette opération est transcendante, dans le sens où la diagonale d'une série formelle algébrique (i.e., algébrique sur le corps des fractions rationnelles $K(z_1,\dots,z_n)$) est généralement transcendante sur le corps $K(z)$. Un exemple très simple, voir [1], est donné par la diagonale de la fraction rationnelle $\frac{4}{(2-z_1-z_2)(2-z_3-z_4)}$ qui est égale à

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2^{4n}}\binom{2n}{n}^2 z^n\in\mathbb{Q}[[z]].$$

En revanche, lorsque K est un corps de caractéristique non nulle, Furstenberg [18] a montré que la diagonale d'une série formelle rationnelle est toujours algébrique. Deligne [13] a ensuite étendu ce résultat au cas des diagonales de séries formelles algébriques. Il souligne également la conséquence remarquable suivante : si $f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)z^n\in\mathbb{Z}[[z]]$ est la diagonale d'une série formelle algébrique, alors pour tout nombre premier p, la réduction modulo p de f, c'est-à-dire la série formelle

$$f_{|p}(z)=\sum_{n\geq 0}(a(n) \bmod p)z^n\in\mathbb{F}_p[[z]]\,,$$

est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$. Un problème naturel consiste alors à étudier la façon dont le degré d'algébricité de $f_{|p}$ varie avec p. Deligne suggère dans [13] qu'il existe une constante c indépendante de p telle que $\deg(f_{|p}) < p^c$. Il prouve également que c'est bien le cas pour les diagonales de fonctions algébriques de deux variables. Le cas général n'est traité que plus récemment par Adamczewski et Bell dans [1]. Ces auteurs montrent également, qu'on ne peut, en général, espérer mieux qu'une majoration polynomiale en p. Lorsque $K = \overline{\mathbb{Q}}$, les diagonales de séries formelles algébriques forment une sous-classe de celle des G-fonctions introduite par Siegel [23] en 1929. Rappelons que $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une G fonction si les a_n sont des nombres algébriques et s'il existe un nombre réel $C > 0$ tel que :

1. la fonction f annule un opérateur différentiel L à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}(z)$;
2. la valeur absolue de chaque conjugué de Galois de a_n est inférieure à C^{n+1} pour tout $n \geq 0$;
3. il existe une suite D_m d'entiers strictement positifs tels que $D_m < C^m$ et $D_m a_n$ est un entier algébrique pour tout $n \leq m$.

Cette définiton implique qu'il existe un corps de nombres K tel que $f(z) \in K[[z]]$. Considérons un tel K. Soient ϑ_K l'anneau des entiers de K et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de ϑ_K tel que les coefficients de f appartiennent à $\vartheta_{K,\mathfrak{p}}$, la localisation de ϑ_K en $\mathfrak{p}$. Notons $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p}$ le corps résiduel de $\vartheta_{K,\mathfrak{p}}$, c'est-à-dire $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p} = \vartheta_{K,\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}\vartheta_{K,\mathfrak{p}} = \vartheta_K/\mathfrak{p}$. On peut alors réduire f modulo $\mathfrak{p}$ et poser

$$f_{|\mathfrak{p}}(z) = \sum_{n\geq 0}(a_n \bmod \mathfrak{p})z^n \in \boldsymbol{k}_\mathfrak{p}[[z]]$$

et formuler la conjecture suivante [4].

Conjecture 1.1 (Adamczewski-Delaygue). — *Soient K un corps de nombres et $f(z) \in K[[z]]$ une G-fonction. Supposons que l'ensemble $\mathcal{S}$ des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de ϑ_K tel que $f \in \vartheta_{K,\mathfrak{p}}[[z]]$ soit infini. Alors, on a :*

(i) *$f_{|\mathfrak{p}}$ est algébrique sur $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p}(z)$ pour presque tout $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$;*
(ii) *il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\mathfrak{p}$ vérifiant* (i), *$\deg(f_{|\mathfrak{p}}) < p^c$, où p désigne la caractéristique du corps $\boldsymbol{k}_\mathfrak{p}$.*

Les résultats de Deligne [13] et d'Adamczewski et Bell [1] mentionnés précédemment montrent que cette conjecture est vérifiée pour les diagonales de séries algébriques et l'article [3] fournit également d'autres familles d'exemples parmi les séries hypergéométriques généralisées ou les sommes multiples de produits de coefficients binomiaux. C'est en paticulier le cas de la série hypergéométrique $f_1(z) ={}_2 F_1(1/2, 1/2; 2/3, z)$ qui n'est pas la diagonale d'une série formelle algébrique car elle n'est pas globalement bornée. Par contre, d'après la proposition 8.5 de [3], en considérant l'ensemble $\mathcal{S} = \{p \in \mathcal{P} : p \equiv 1 \mod 3\}$, on obtient que pour tout $p \in \mathcal{S}$, f_1 peut se réduire modulo p et $f_{1|p}(z) = A_p(z)f_{1|p}(z)^p$ où $A_p(z) \in \mathbb{F}_p(z)$. Ainsi, $f_{1|p}(z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ et $\deg(f_{1|p}) < p$.

Notons que la méthode utilisée dans [1] est spécifique aux diagonales de séries formelles algébriques, tandis que les résultats de [3] se fondent sur une analyse minutieuse de la valuation p-adique des coefficients et ne concernent pas toutes les séries hypergéométriques généralisées. Dans cet article, notre objectif est justement de prouver une version explicite de la conjecture 1.1 pour les séries hypergéométriques généralisées à paramètres rationnels et de sortir ainsi du cadre des G-fonctions globalement bornées. Il s'agit du théorème 1.2 ci-dessous. Rappelons que ces séries sont de la forme

$$ {}_nF_{n-1}(\underline{\alpha},\underline{\beta},z)=\sum_{j\geq 0}\frac{(\alpha_1)_j\cdots(\alpha_n)_j}{(\beta_1)_j\cdots(\beta_{n-1})_j j!}z^j $$

où $\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n),\underline{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1},1)\in(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0})^n$ et, pour $x\in\mathbb{R}$, $(x)_n=x(x+1)\cdots(x+n-1)$ et $(x)_0=1$. Nous désignons par $\mathbb{Z}_{(p)}$ la localisation de l'anneau $\mathbb{Z}$ en l'idéal (p). Le corps résiduel de $\mathbb{Z}_{(p)}$ est alors $\mathbb{F}_p$.

Théorème 1.2. — *Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_{n-1},\beta_n=1\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}_{\leq 0}$ tels que pour tout i,j, $\alpha_i-\beta_j\notin\mathbb{Z}$. Soit $d_{\alpha,\beta}$ le plus petit commun multiple des dénominateurs des $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, $\beta_1,\dots,\beta_n$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$ et ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha},\underline{\beta},z)\in\mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Alors, pour tout $p\in\mathcal{S}$, la réduction modulo p de ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha},\underline{\beta},z)$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par $p^{n^2\phi(d_{\alpha,\beta})}$, où ϕ désigne l'indicatrice d'Euler.*

La notion de *structure de Frobenius forte*, introduite par Dwork [15], est classiquement utilisée dans la théorie des équations différentielles p-adiques. Dans cette article, nous montrons comment cette notion permet d'établir une stratégie générale pour attaquer la conjecture 1.1 (voir section 2). En particulier, la preuve du théorème 1.2 repose sur la notion de structure de Frobenius forte. L'idée de la démonstration est la suivante. Lorsque les paramètres α_i et β_j vérifient les hypothèses du théorème 1.2, on sait que les équations hypergéométriques correspondantes ont des groupes de monodromie rigides, que leurs singularités sont régulières et que leurs exposants sont rationnels. Ces trois propriétés peuvent être utilisées pour démontrer l'existence d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p dont la période est indépendante du nombre premier p. Dans le cas des équations hypergéométriques de Gauss, cette stratégie a été mise en œuvre par Salinier [22]. Notons qu'avant le travail de Salinier, Dwork avait déjà montré par une approche différente que, sous ces hypothèses, l'opérateur hypergéométrique de Gauss est muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p (voir [16, Chap. 7, 7.2.2]). Le théorème 3.8 montre de façon plus générale que les systèmes différentiels rigides sont munis d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p dont la période peut être majorée explicitement et indépendamment du nombre premier p. Notre démonstration de ce résultat généralise l'approche de Salinier au cas des systèmes différentiels rigides ou, de façon équivalente, au cas des équations différentielles sans paramètre accessoire (cf. [19]). Notons par ailleurs que Crew [11] a également obtenu récemment un résultat similaire en suivant une approche différente fondée sur la cohomologie p-adique. Nous précisons que nous n'avons pris connaissance de l'article [11] qu'après avoir démontré le théorème 3.8. Pour davantage de précisions, notamment sur le lien entre le théorème 3.8 et les résultats de Katz [19], Crew [11], et Esnault et Groechenig [17], nous renvoyons le lecteur à la discussion précédant et suivant le théorème 3.8. D'autre part, notre théorème 2.6 établit un lien entre l'existence, pour un nombre premier p, d'une structure de Frobenius forte de période h pour un opérateur différentiel d'ordre n et le degré d'algébricité modulo p des solutions (séries formelles) de cet opérateur en fonction de p, n et h. Il rend explicite des arguments donnés par Christol dans [9]. En utilisant la rigidité des équations hypergéométriques généralisées et en combinant les théorèmes 2.6 et 3.8, on obtient finalement le théorème 1.2. Au vu de la conjecture 1.1 et du théorème 2.6, nous insistons sur le fait que, dans le théorème 3.8, il est essentiel que la période des structures de Frobenius fortes puisse être majorée indépendamment de p.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous rappelons la notion de structure de Frobenius forte et nous énonçons le théorème 2.6. Dans la section 3, nous rappelons la notion d'opérateur différentiel rigide et énonçons le théorème 3.8. Les théorèmes 2.6 et 3.8 sont respectivement démontrés dans les sections 4 et 5. Enfin, dans la section 6, nous prouvons le théorème 1.2 et l'illustrons à l'aide de quelques exemples.

2. Structure de Frobenius forte et algébricité modulo p

Dans cette partie, nous rappelons la définition du corps des éléments analytiques E_p et celle de structure de Frobenius forte d'un opérateur différentiel, puis nous énonçons le théorème 2.6. Étant donné un nombre premier p, nous noterons $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Nous rappelons que la valuation de $\mathbb{Z}_p$ s'étend de manière unique à $\mathbb{C}_p$. Nous désignerons par π_p, un élément de $\mathbb{C}_p$ vérifiant $\pi_p^{p-1} = -p$.

2.1. Éléments analytiques. — Soit K un corps ultramétrique de caractéristique nulle muni de la valuation $|\cdot|$ et k son corps résiduel de caractéristique p. Pour $|x| \leq 1$ nous notons $\bar{x}$ l'élément de k qui représente la classe résiduelle de x. Nous supposons que K est complet pour la norme $|\cdot|$. Nous dirons que $\sigma : K \to K$ est un automorphisme de Frobenius si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. pour tout $x \in K$, $|\sigma(x)| = |x|$;
2. pour tout $x \in K$, $|x| \leq 1$, $|\sigma(x) - x^p| < 1$. Autrement dit, $\overline{\sigma} : k \to k$ donné par $\overline{\sigma}(\overline{x}) = \overline{\sigma(x)}$ est l'endomorphisme de Frobenius. Remarquons que $\overline{\sigma}$ est bien défini par le point 1.

Remarque 2.1. — La proposition 1.10.1 de [8] montre que le corps $\mathbb{C}_p$ possède un automorphisme de Frobenius, mais celui-ci n'est pas unique. Dans la suite, nous fixons un tel automorphisme que nous notons $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ et que nous appellerons l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{C}_p$.

Nous montrons à présent comment construire le corps des éléments analytiques. Nous désignons par $\mathcal{W}$ l'anneau d'Amice qui est l'ensemble des séries formelles

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n$$

telles que les a_n sont des éléments de K dont la valeur absolue est bornée et tend vers zéro lorsque n tend négativement vers l'ínfini. D'après la proposition 1.1 de [9], l'anneau $\mathcal{W}$ est un K-espace vectoriel complet pour la norme définie par $|f| = sup\{|a_n| : n \in \mathbb{Z}\}$. L'anneau $K[z]$ est contenu dans l'anneau $\mathcal{W}$ et ainsi, l'anneau $K[z]$ est muni de la norme de Gauss

$$\left|\sum a_j z^j\right|_{\mathcal{G}} = sup|a_j|.$$

De plus, d'après la proposition 1.2 de [9], tout élément non nul de $K[z]$ est inversible dans $\mathcal{W}$, ce qui implique que l'anneau des fractions rationnelles $K(z)$ est contenu dans $\mathcal{W}$. La norme de $\mathcal{W}$ induit une norme sur $K(z)$ qui s'exprime comme

$$\left|\frac{\sum a_j z^j}{\sum b_i z^i}\right|_{\mathcal{G}} = \frac{sup|a_j|}{sup|b_i|}.$$

Comme $\mathcal{W}$ est complet, le complété de $K(z)$ pour la norme de Gauss est également contenu dans $\mathcal{W}$.

Définition 2.2 (Éléments analytiques). — Le corps des éléments analytiques E_K est le complété du corps $K(z)$ pour la norme de Gauss dans $\mathcal{W}$. Dans le cas où $K = \mathbb{C}_p$, le corps des éléments analytiques est noté E_p et l'analogue de $\mathcal{W}$ est noté $\mathcal{W}_p$.

Remarque 2.3. — Pour tout $f \in K(z)$, on a

$$\left|\frac{d}{dz}(f)\right|_{\mathcal{G}} \leq |f|_{\mathcal{G}}.$$

Ainsi, la dériviation $\frac{d}{dz} : K(z) \to K(z)$ est une fonction continue pour la norme de Gauss et elle s'étend naturellement au corps E_K des éléments analytiques. On note encore son extension $\frac{d}{dz} : E_K \to E_K$.

Définition 2.4 (E_p-équivalence). — Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(E_p)$. Nous disons que A et B sont E_p-équivalentes s'il existe $H \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - HB.$$

2.2. Structure de Frobenius forte. — Nous définissons l'application $Frob_{z^p}$: $\mathbb{C}_p(z) \to E_p$ par

$$Frob_{z^p}\left(\frac{\sum a_i z^i}{\sum b_j z^j}\right) = \frac{\sum Frob(a_i) z^{pi}}{\sum Frob(b_j) z^{pj}}.$$

Cette application est une isométrie. Il s'agit donc d'une application continue qui s'étend au corps des éléments analytiques E_p. Nous la notons encore $Frob_{z^p}$: $E_p \to E_p$. C'est à nouveau une isométrie et, pour tout $e \in E_p$, on a

$$\frac{d}{dz}(Frob_{z^p}(e)) = pz^{p-1}\left(Frob_{z^p}(\frac{d}{dz}e)\right). \tag{1}$$

Soit A une matrice de taille n à coefficients dans E_p, nous considérons la matrice $F_{z^p}(A) := \frac{d}{dz}(z^p)A^{Frob_{z^p}} = pz^{p-1}A^{Frob_{z^p}}$, où $A^{Frob_{z^p}}$ est la matrice obtenue après avoir appliqué $Frob_{z^p}$ à chaque entrée de A.

Étant donné un opérateur différentiel d'ordre n

$$L := a_0(z)\frac{d}{dz^n} + a_1(z)\frac{d}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}[z][d/dz]\,, \tag{2}$$

on définit la *matrice compagnon* associée à L par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \frac{-a_n(z)}{a_0(z)} & \frac{-a_{n-1}(z)}{a_0(z)} & \frac{-a_{n-2}(z)}{a_0(z)} & \dots & \frac{-a_2(z)}{a_0(z)} & \frac{-a_1(z)}{a_0(z)} \end{pmatrix}.$$

DÉFINITION 2.5 (Structure de Frobenius forte). — Soit $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ un opérateur différentiel et soit A sa matrice compagnon. Nous disons que L a une structure de Frobenius forte de période h pour un nombre premier p s'il existe un entier strictement positif h tel que la matrice A et la matrice obtenue en appliquant h-fois F_{z^p} à A sont E_p-équivalentes. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(z))$, cela revient à dire qu'il existe $H \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H = AH - p^h z^{p^h-1} H A(z^{p^h}). \tag{3}$$

Le plus petit entier $h \geq 1$ ayant cette propriété est appelé *la période* de la structure de Frobenius associée au couple (L, p).

Par exemple, d'après [20, Chap. 22, Theorem 22.2.1] ou [5, Chap. V, p. 111], les *équations de Picard-Fuchs* sont munies d'une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p. Le résultat qui suit montre le lien entre l'existence d'une structure de Frobenius forte pour p de l'opérateur différentiel L et l'algébricité modulo p de ses solutions.

Voir aussi la discussion p. 351 de [20] et les références associées.

Théorème 2.6. — *Soit $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$ d'ordre n. Soit p un nombre premier pour lequel l'opérateur différentiel L a une structure de Frobenius forte de période h et $f(z) = \sum_{n\geq 0} a(n)z^n \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ une solution de L. Soit $f_{|p}$ la réduction de f modulo $p\mathbb{Z}_{(p)}$. Alors la série formelle $f_{|p}$ est une série algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{n^2h}.*

Notons que nous pourrions aussi énoncer ce théorème dans le cas d'un opérateur à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}[z]$, la démonstration s'obtiendrait de la même façon. Le théorème 2.6 nous dit que pour montrer le point 1 de la conjecture 1.1 il suffit de voir que f annule un opérateur muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p dans $\mathcal{S}$.

Remarque 2.7. — Si $L \in \mathbb{Q}[z][d/dz]$ est un opérateur différentiel muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p et $f \in \mathbb{Q}[[z]]$ est une solution de L, alors f est une G fonction. En effet, l'hypothèse faite sur L implique que le rayon de convergence au point générique est égal à 1 pour presque tout p. Cela découle des propositions 4.1.2, 4.6.4 et 4.7.2 de [8]. D'après la proposition 5.1 et le théorème 6.1 de [14, Chap. III], on obtient alors que les singularités de L sont régulières à exposants rationnels. Enfin, en combinant cette propriété avec le théorème 4.2 [14, Chap. VII] et la proposition 1.1 de [14, Chap. VIII], on obtient que f est une G fonction.

3. Structure de Frobenius forte et rigidité

Notre troisième résultat, le théorème 3.8, concerne les opérateurs différentiels à coefficients dans $\mathbb{Q}[z]$ dont le groupe de monodromie est rigide. Nous commençons par rappeler la notion de système différentiel rigide. Étant donné le système différentiel

$$\frac{d}{dz}y = Ay, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z)), \tag{4}$$

nous disons que $\gamma \in \mathbb{C}$ est un point *singulier* du système différentiel (4) si γ est un pôle de A. L'infini est un point singulier de (4) si zéro est un point singulier du système différentiel obtenu après avoir appliqué le changement de variable $z \mapsto 1/z$ au système (4). Nous disons que $\gamma \in \mathbb{C}$ est un point *singulier régulier* du système différentiel (4) si γ est un point singulier et s'il existe une matrice $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que la matrice $(z-\gamma)A_\gamma$ n'a pas de pôle en γ et qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(\{z-\gamma\}))$ telle que $\frac{d}{dz}P = AP - PA_\gamma$, où $\mathbb{C}(\{z-\gamma\})$ est le corps des séries de Laurent convergentes au voisinage de γ. L'infini est un point singulier régulier de (4) si zéro est un point singulier régulier du système différentiel obtenu après avoir appliqué le changement de variable $z \mapsto 1/z$ au système (4). Le système différentiel (4) est *fuchsien* si tous ses points singuliers sont singuliers réguliers. Soit x un point non singulier du système différentiel (4), d'aprés la théorie classique de Cauchy

$$Sol(A)_x = \{y \in \mathbb{C}(\{z-x\})^n \text{ et } \frac{d}{dz}y = Ay\}$$

est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $F = \{y_1, \dots, y_n\}$ une base de $Sol(A)_x$, S l'ensemble de points singuliers de (4) et $\gamma \in S$. Les coordonnées des vecteurs $y_1, \dots, y_n$ peuvent être prolongées analytiquement le long du lacet τ, où $[\tau] \in \Pi_1(\mathbb{C}\backslash S, x)$ et τ est un lacet autour de γ tel que le groupe engendré par $[\tau]$ est $\mathbb{Z}$. Ainsi, on obtient un nouvel ensemble $\widetilde{F}$ qui sera encore une base de $Sol(A)_x$. Alors la matrice de *monodromie locale en* γ, notée $M(A, \gamma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, est la matrice de changement de base de F vers $\widetilde{F}$. Le théorème de monodromie complexe nous garanti que si $[\tau] = [\alpha]$, on obtient encore l'ensemble $\widetilde{F}$ en prolongeant les coordonnées des vecteurs $y_1, \dots, y_n$ le long du lacet α. Écrivons $S = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Le *groupe de monodromie* de (4) est le groupe engendré par les matrices $M(A, \gamma_1), \dots, M(A, \gamma_r)$ qui satisfont à la relation $M(A, \gamma_1) \cdots M(A, \gamma_r) = Id$. D'après la construction, le groupe de monodromie dépend de la base F. Si nous prenons une autre base F_1 de $Sol(A)_x$ alors ces deux groupes de monodromie sont conjugués. Ainsi le groupe de monodromie est unique à conjugaison près.

Soit

$$\frac{d}{dz}y = A'y, \quad A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z)) \tag{5}$$

un système différentiel. Supposons que les systèmes (4) et (5) sont fuchsiens et que zéro est un point singulier régulier de (4) et de (5). On dit que A et A' sont *localement équivalentes en zéro* si les matrices de monodromie locale en zéro de (4) et (5) sont conjuguées. D'après le théorème 5.1 de [21], cela revient à dire qu'il existe P une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{C}(\{z\})$ telle que

$$\frac{d}{dz}P = AP - PA',$$

où $\mathbb{C}(\{z\})$ est le corps des séries de Laurent qui convergent. Soit x_0 un point singulier régulier de (4) et de (5) On dit que A et A' sont *localement équivalentes en* x_0 si, après application du changement de variable $z \mapsto z - x_0$ à (4) et (5), les nouveaux systèmes sont localement équivalents en zéro. On dit que A et A' sont *localement équivalentes*, si elles sont localement équivalentes en tous points.

Définition 3.1 (Système rigide). — Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ et $\frac{d}{dz}y = Ay$ un système différentiel fuchsien. Un tel système est dit *rigide* si, pour tout système $\frac{d}{dz}y = A'y$ fuchsien tel que A et A' sont localement équivalentes, il existe

$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que
$$\frac{d}{dz}P = AP - PA'.$$
Autrement dit, les matrices A et A' sont $\mathbb{C}(z)$-*équivalentes.*

En général pour un corps quelconque K, nous disons que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(K(z))$ sont $K(z)$-*équivalentes* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K(z))$ telle que $\frac{d}{dz}P = AP - PA'$.

Définition 3.2 (Groupe rigide). — Soient $g_1, \ldots, g_r \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et G le groupe engendré par ces matrices. Le r-uplet $g_1, \ldots, g_r$ est dit irréductible si G agit de manière irréductible sur $\mathbb{C}^n$. Le groupe G est dit rigide si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. le r-uplet $g_1, \ldots, g_r$ est irréductible ;
2. on a $g_1 \cdots g_r = Id$;
3. pour tout r-uplet $\widetilde{g_1}, \ldots, \widetilde{g_r}$ tel que $\widetilde{g_1} \cdots \widetilde{g_r} = Id$, où $\widetilde{g_i}$ est conjugué à g_i, il existe une matrice $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\widetilde{g_i} = Ug_iU^{-1}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Proposition 3.3. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ et $\frac{d}{dz}y = Ay$ fuchsien. Si le groupe de monodromie de $\frac{d}{dz}y = Ay$ est rigide alors le système $\frac{d}{dz}y = Ay$ est rigide.*

En effet, cette proposition découle de la proposition suivante qui est un cas particulier du théorème 6.15 de [21].

Proposition 3.4. — *Soient $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$. Si $\frac{d}{dz}y = Ay$ et $\frac{d}{dz}y = A'y$ sont deux systèmes fuchsiens dont les groupes de monodromie sont conjugués, alors les matrices A et A' sont $\mathbb{C}(z)$-équivalentes.*

Soient $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$ et A sa matrice compagnon. Si L est un opérateur fuchsien, alors le système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$ est fuchsien (cf. remarque 5.4).

Définition 3.5 (Opérateur rigide). — Soient $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$ fuchsien et A sa matrice compagnon. L'opérateur L est rigide si le système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$ est dit rigide.

Le calcul de la matrice de monodromie locale n'est pas facile. Par contre, dans le cas où γ est un point singulier régulier nous pouvons la calculer à conjugaison près. Nous ferons cela dans le lemme suivant. Avant, nous rappelons la notion *d'exposants en* γ. Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ un point singulier régulier du système (4). Cela veut dire qu'il existe une matrice $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que les matrices A et A_γ sont localement équivalentes en γ et la matrice $(z-\gamma)A_\gamma$ n'a pas de pôle en γ. Les exposants en γ sont les valeurs propres de la matrice $[(z-\gamma)A_\gamma](\gamma)$. Dans le cas que $\gamma = \infty$, γ est un point singulier régulier s'il existe une matrice $A_\infty \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que les matrices A et A_∞ sont localement équivalentes en γ et la matrice zA_∞ n'a pas de pôle en γ. Les exposants en l'infini sont les valeurs propres de la matrice $[zA_\infty](\gamma)$. Notons que cette définition dépend de la matrice A_γ. Par contre, d'après le lemme 2.4 de [14, Chap V], si A'_γ est telle que A et A'_γ sont localement équivalentes en γ et $(z-\gamma)A'_\gamma$ n'a pas de pôle en γ, alors les valeurs propres de $[(z-\gamma)A_\gamma](\gamma)$ et les valeurs propres de $[(z-\gamma)A'_\gamma](\gamma)$ sont égales modulo $\mathbb{Z}$.

Lemme 3.6. — *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ et $\gamma \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ un point singulier régulier du système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$. Alors il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\exp(2\pi iC)$ est conjuguée à la matrice de monodromie locale de A en γ et satisfaisant aux deux propriétés suivantes :*

(a) *si λ, β sont deux valeurs propres différentes de C, alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$,*

(b) *l'ensemble des exposants de A en γ et l'ensemble des valeurs propres de C sont égaux modulo $\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Sans perdre de généralité supposons que $\gamma = 0$. Soit $A_0(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que les matrices $A(z)$ et $\frac{1}{z}A_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro et A_0 n'a pas de pôle en zéro. Comme $A_0(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[z]])$, le lemme 8.2 et le corollaire 8.3 de [14, chap. III] nous assure l'existence d'une matrice $W_0(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[z]])$ telle que les matrices $\frac{1}{z}A_0(z)$ et $\frac{1}{z}W_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro et les valeurs propres de $C := W_0(0)$ satisfont aux conditions **(a)** et **(b)** de l'énoncé. D'après le théorème 5.1 de [21], on obtient que la matrice de monodromie locale du système $\frac{d}{dz}y = \frac{1}{z}W_0(z)y$ en 0 est conjuguée à $\exp(2\pi iC)$. Puisque $\frac{1}{z}A_0(z)$ et $\frac{1}{z}W_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro, alors toujours par le théorème 5.1 de [21], la matrice de monodromie locale en zéro du système $\frac{d}{dz}y = \frac{1}{z}A_0(z)y$ est conjuguée à $\exp(2\pi iC)$. Finalement, comme $A(z)$ et $\frac{1}{z}A_0(z)$ sont localement équivalentes en zéro alors, d'après le théorème 5.1 de [21], la matrice de monodromie locale en zéro de $\frac{d}{dz}y = A(z)y$ est conjuguée à $\exp(2\pi iC)$ et comme nous l'avons déjà écrit, C satisfait aux conditions **(a)** et **(b)**. $\square$

Remarque 3.7. — Soit K un corps algébriquement clos. Il suit de la démonstration du lemme 8.2 et du corollaire 8.3 de [14, Chap.III] que, si $A_0 \in \mathcal{M}_n(K(z))$, alors $W_0 \in \mathcal{M}_n(K(z))$ et les matrices $\frac{1}{z}A_0(z)$ et $\frac{1}{z}W_0(z)$ sont $K(z)$-équivalentes. De plus, la matrice $C := W_0(0)$ vérifie les conditions du lemme 3.6.

D'après Katz [19, Theorem 9.4], si L est un opérateur rigide alors le module différentiel défini par L est un sous-module différentiel d'un module différentiel associé à une équation de *Picard-Fuchs*. Or les équations de Picard-Fuchs sont munies d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p (voir par exemple [20, Theorem 22.2.1]). Ainsi, on peut s'attendre à ce qu'un opérateur rigide soit muni d'une structure de Frobenius forte pour presque tout p. Le théorème 3.8 montre que c'est bien le cas et que, de plus, la période h des structures de Frobenius fortes peut être majorée explicitement et indépendamment du nombre premier p. Comme nous l'avons déjà mentionné, ce dernier point est essentiel au vu de la conjecture 1.1 et du théorème 2.6. Comme nous l'a indiqué Gilles Christol, il semble que l'on puisse obtenir l'existence d'une structure de Frobenius forte pour n'importe quel sous module N d'un module différentiel M associé à une équation de Picard-Fuchs. En effet, d'après le théorème 4.2.6 [12], M est semi-simple et donc N est semi-simple et on peut le décomposer comme somme directe finie de sous-modules simples N_i. Rappelons que d'après le Theorem 22.2.1 de [20], M a une structure de Frobenius forte pour presque tout p. Soit p l'un de ces nombres premiers et h la période de la structure de Frobenius forte correspondante. En notant ϕ le Frobenius, on a donc que $\phi^h(M)$ et M sont isomorphes. Donc, pour tout $m \geq 1$, $\phi^{mh}(N_i)$ est sous module simple de $\phi^h(M)$ et on obtient l'existence de deux entiers m et m' tels que $\phi^{mh}(N_i)=\phi^{m'h}(N_i)$. Autrement dit, N_i est muni d'une structure de Frobenius forte pour p. On en déduit que N est muni d'une structure de Frobenius forte pour p car l'application ϕ respecte les sommes directes. Malheureusement, cet argument ne permet pas de majorer précisément la période h de cette structure de Frobenius forte, ni même de la majorer indépendamment de p. L'intérêt principal du théorème 3.8 est qu'il permet justement de majorer la période des structures de Frobenius fortes des opérateurs rigides indépendamment de p. Le théorème 3.8 a également été obtenu sous une forme légèrement différente, mais essentiellement équivalente, par Crew [11]. Il nous semble néanmoins utile de présenter la démonstration proposée ici qui est écrite dans un langage différent et plus élémentaire, notamment exempt de toute considération cohomologique. Notons qu'un cas particulier du théorème 1.5 de [17] implique aussi qu'un opérateur différentiel satisfaisant aux conditions du théorème 3.8 a une structure de Frobenius forte pour presque tout p. Mais ce dernier résultat ne donne pas explicitement de renseignement sur la période des structures de Frobenius associées et ne permet donc pas d'utiliser le théorème 2.6 comme nous le faisons.

Avant d'énoncer le théorème 3.8, considérons L défini comme en (2) et supposons que les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels. Soit s la valuation de $a_0(z)$. Considérons les ensembles suivants : $\mathfrak{A}_1$ est formé du terme constant du polynôme $\frac{a_0(z)}{z^s}$, le coefficient leader de $a_0(z)$ et du discriminant de $a_0(z)$, $\mathfrak{A}_2$ est formé des dénominateurs des exposants aux points singuliers réguliers de L et $\mathfrak{A}_3 = \left\{\frac{a_i(z)}{a_0(z)}\right\}_{1\leq i\leq n}$. Soit d le plus petit commun multiple des dénominateurs des exposants de L en les points singuliers réguliers. On pose $h_1 = \phi(d)$, où ϕ est la fonction indicatrice de Euler, h_2 la dimension du corps de décomposition du polynôme $a_0(z)$ sur $\mathbb{Q}$, et finalement $h = h_1h_2$.

THÉORÈME 3.8. — *Soit $L \in \mathbb{Q}[z][d/dz]$ un opérateur différentiel défini comme en* (2). *Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées.*

1. *Les points singuliers de L sont réguliers, c'est-à dire que L est fuchsien.*
2. *Les exposants aux points singuliers réguliers sont des nombres rationnels.*
3. *Le groupe de monodromie de L est rigide.*

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers tels que $a_0(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[z]$, tout élément de $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ ait une norme p-adique égale à 1 et tout élément de $\mathfrak{A}_3$ ait une norme de Gauss inférieure ou égale à 1. Alors pour tout $p \in \mathcal{S}$, l'opérateur différentiel a une structure de Frobenius forte de période h.

Dans [11], Crew montre que, sous les hypothèses 1, 2 et 3 du théorème, si p est un nombre premier tel que L définit un isocristal *surconvergent* et vérifiant certaines autres hypothèses (les conditions C_1 et C_3 dans [11]), alors L a une structure de Frobenius forte pour p. Sa preuve repose sur des outils de cohomologie p-adique et le fait que la surconvergence lui permet (Theorem 1 et Theorem 2 de [11]) de définir la rigidité p-adique en termes de la cohomologie p-adique. Il montre aussi que la période h obtenue ne dépend pas de p. L'intérêt de notre approche est son aspect plus élémentaire puisqu'elle repose sur les aspects classiques de la théorie des équation différentielles (à la fois sur $\mathbb{C}(z)$ et p-adique) et que nous donnons une description précise de l'ensemble des nombres premiers p qui munissent L d'une structure de Frobenius forte.

REMARQUE 3.9. — Comme nous l'avons déjà mentionné, si L est muni d'une structure de Frobenius forte pour p, alors son rayon de convergence au point générique est égal à 1. Cela implique que L définit un isocristal surconvergent. Donc, sous les hypothèses du théorème 3.8, on obtient a posteriori que si $p \in \mathcal{S}$, alors L définit bien un isocristal surconvergent.

4. Démonstration du théorème 2.6

Cette partie est consacrée à l'algebricité modulo p des solutions des équations différentielles possédant une structure de Frobenius forte pour le nombre premier p. Nous démontrons le théorème 2.6.

Rappelons tout d'abord que l'ensemble $\mathcal{W}_p$ est composé des séries de la forme

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n,$$

dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{C}_p$ et telles que la famille $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée et tend vers 0 lorsque n tend négativement vers l'infini. L'anneau $\mathcal{W}_p$ est complet pour la norme

$$|f| = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|.$$

Par construction, E_p est un sous-corps de $\mathcal{W}_p$ et on note ϑ_{E_p} les éléments de E_p dont la norme est inférieure ou égale à 1.

Nous commençons par montrer les deux lemmes suivants.

LEMME 4.1. — *Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de ϑ_{E_p}. Il existe un isomorphisme de corps*

$$\phi : \vartheta_{E_p}/\mathfrak{m} \to \overline{\mathbb{F}}_p(z).$$

Démonstration. — Soient $\vartheta_{\mathbb{C}_p}$ l'anneau des entiers de $\mathbb{C}_p$ et $\mathfrak{M}$ son idéal maximal. Soit $x \in \vartheta_{\mathbb{C}_p}$, comme x est la limite d'éléments dans la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, il existe une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$ et $y \in K$ tels que $|x - y| < 1$. Ainsi, $|y| \leq 1$ et dans $\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M}$, $\overline{x} = \overline{y}$. Comme le corps résiduel de K est une extension finie de $\mathbb{F}_p$, on a $\overline{y} \in \overline{\mathbb{F}}_p$. On définit

$$\omega : \vartheta_{\mathbb{C}_p} \to \overline{\mathbb{F}}_p$$

par $\omega(x) = \overline{y}$. Notons que $\omega(x)$ ne dépend pas de y et est un homomorphisme d'annaux. D'après le lemme de Hensel, ω est surjectif et si $x \in \mathfrak{M}$, alors $\omega(x) = 0$. Ainsi,

$$\omega : \vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M} \to \overline{\mathbb{F}}_p$$

est un isomorphisme tel que $\omega(\overline{x}) = \overline{x}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$. Soit $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{W}_p$ dont la norme est inférieure ou égale à 1. Comme la norme est ultramétrique, $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ est un anneau et, si J désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{W}_p$ dont la norme est strictement inférieure à 1, alors J est un idéal de $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ et le quotient de $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$ par J est isomorphe à $\overline{\mathbb{F}}_p((z))$. En effet, soit $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \in \vartheta_{\mathcal{W}_p}$. Alors, pour tout entier n, $|a_n| \leq 1$ et par définition de l'anneau $\mathcal{W}_p$ il existe un nombre naturel N tel que, pour tout $n < -N$, $|a_n| < 1$. Ainsi, on a

$$\overline{f(z)} := \sum_{n\geq -N} \overline{a_n} z^n \in (\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M})((z)).$$

Considérons l'application $\widetilde{\omega} : \vartheta_{\mathcal{W}_p}/J \to \overline{\mathbb{F}}_p((z))$ définie par

$$\widetilde{\omega}(\overline{f}) = \sum_{n\geq -N} \omega(\overline{a_n}) z^n.$$

Si $f \in \mathbb{Z}_p[[z]]$, alors $\widetilde{\omega}(\overline{f}) = \overline{f}$. Comme ω est un isomorphisme il en est de même pour $\widetilde{\omega}$. Construisons à présent l'isomorphisme ϕ. Comme ϑ_{E_p} est un anneau local et un sous-anneau de $\vartheta_{\mathcal{W}_p}$, si $\mathfrak{m}$ désigne l'idéal maximal de ϑ_{E_p}, alors $\mathfrak{m} \subset J$. Ainsi, $\widetilde{\omega}$ peut se restreindre à $\vartheta_{E_p}/\mathfrak{m}$.

Par construction, si $h \in \vartheta_{E_p}$, $\overline{h} \in (\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M})(z)$, d'où $\overline{h}s = t$, où $s, t \in (\vartheta_{\mathbb{C}_p}/\mathfrak{M})[z]$ sont différents du polynôme nul. Nous pouvons donc définir, $\phi(\overline{h}) = \widetilde{\omega}(t)/\widetilde{\omega}(s) \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$. □

Le lemme suivant est démontré dans [2, Proposition 6.2] dans le cas où $L=\mathbb{C}$. En utilisant le même argument, on obtient le lemme suivant.

Lemme 4.2. — *Soit K un corps, L une extension de K et $f_1,\dots,f_n\in K[[z]]$. S'il existe des polynômes $a_1(z),\cdots,a_n(z)\in L[z]$, non tous nuls, tels que*

$$a_1(z)f_1+\cdots+a_n(z)f_n=0,$$

alors il existe des polynômes $c_1(z),\cdots,c_n(z)\in K[z]$, non tous nuls, tels que

$$c_1(z)f_1+\cdots+c_n(z)f_n=0.$$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.6.

Démonstration du théorème 2.6. — Fixons un nombre premier p. Supposons que A est la matrice compagnon de l'opérateur différentiel

$$L:=\frac{d^n}{dz^n}+a_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(z)\frac{d}{dz}+a_n(z), \tag{6}$$

où les $a_i(z)$ sont des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Comme A a une structure de Frobenius forte de période h, il existe $H\in\mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}H=AH-H(p^hz^{p^h-1}A(z^{p^h})).$$

Soit $g\in\mathcal{W}_p$ tel que $Lg=0$, alors le vecteur $\vec{y}=(g,g',\dots,g^{(n-1)})^T$ est solution du système

$$\frac{d}{dz}Y=AY. \tag{7}$$

Ainsi, le vecteur $\vec{y}(z^{p^h})$ est solution du système

$$\frac{d}{dz}Y=p^hz^{p^{h-1}}A(z^{p^h})Y.$$

Par conséquent, le vecteur $H\vec{y}(z^{p^h})$ est solution du système (7). Comme $E_p\subset\mathcal{W}_p$, on trouve que $H\vec{y}(z^{p^h})$ est un vecteur à coefficients dans $\mathcal{W}_p$, dont le premier coefficient est une solution de l'équation associéé à l'opérateur (6). Soit $V:=\{(g,g',\dots,g^{n-1}) : g\in\mathcal{W}_p, Lg=0\}$. Il s'agit d'un $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel. Nous avons donc construit un endomorphisme

$$\begin{aligned}\psi:V&\to V\\ \vec{y}&\mapsto H\vec{y}(z^{p^h}).\end{aligned}$$

Comme $\dim_{\mathbb{C}_p}V=r\le n$, le théorème de Cayley-Hamilton assure l'existence de $c_0,\dots,c_{r-1}\in\mathbb{C}_p$ tels que

$$\psi^r+c_{r-1}\psi^{r-1}+\cdots+c_1\psi+c_0=0. \tag{8}$$

Comme par hypothèse $f(z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$ et L est annulée par $f(z)$, alors le vecteur $\vec{w} = (f, f', \ldots, f^{(n-1)})$ est dans V. Considérons à présent Z, le E_p-espace vectoriel engendré par les éléments de l'ensemble $\{f^{(j)}(z^{p^{ih}}) : j \in \{0, \ldots, n-1\}, i \in \mathbb{N}\}$. L'égalité (8) montre que Z a pour dimension au plus nr. Comme $f(z), \ldots, f(z^{p^{nrh}}) \in Z$, il existe $j \leq nr$ et $b_0, \ldots, b_j \in E_p$ tels que

$$b_j f(z^{p^{jh}}) + b_{j-1} f(z^{p^{(j-1)h}}) + \cdots + b_0 f(z) = 0.$$

Soit b_l tel que $|b_l| = \max\{|b_0(z)|, \ldots, |b_j(z)|\}$ et soit $c_i(z) = b_i(z)/b_l(z)$. Alors, pour tout $i \in \{0, \ldots, j\}$, $|c_i| \leq 1$ et

$$c_j f(z^{p^{jh}}) + c_{j-1} f(z^{p^{(j-1)h}}) + \cdots + c_0 f(z) = 0.$$

On pose $d_i(z) = \overline{c_i(z)}$, alors on a

$$d_j(z)(f_{|p}(z^{p^{jh}})) + d_{j-1}(z)(f_{|p}(z)^{p^{(j-1)h}}) + \cdots + d_0(z) f_{|p}(z) = 0. \tag{9}$$

et $d_0(z), \ldots, d_j(z)$ ne sont toutes nulles car $1 = \max |c_0(z)|, \ldots, |c_j(z)|$. Soient $\widetilde{\omega}$ l'homomorphisme construit dans le lemme 4.1 et $t_i(z) = \widetilde{\omega}(d_i(z))$. Puisque $\widetilde{\omega}$ est un isomorphisme alors $t_0(z), \ldots, t_j(z)$ ne sont pas toutes nulles. Comme $\widetilde{\omega}(f_{|p}) = f_{|p}$ car $f \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$, alors (9) implique que

$$t_j(z)(f_{|p}(z^{p^{jh}})) + t_{j-1}(z)(f_{|p}(z^{p^{(j-1)h}})) + \cdots + t_0(z) f_{|p}(z) = 0.$$

Finalement, le lemme 4.2 assure l'existence des polynômes $r_0(z), \ldots, r_j(z) \in \mathbb{F}_p(z)$, non tous nuls, tels que

$$r_j(z)(f_{|p}(z)^{p^{jh}}) + r_{j-1}(z)(f_{|p}(z^{p^{(j-1)h}})) + \cdots + r_0(z) f_{|p}(z) = 0.$$

Comme les coefficients de $f_{|p}(z)$ sont dans $\mathbb{F}_p$, la dernière expression devient

$$r_j(z)(f_{|p}(z))^{p^{jh}} + r_{j-1}(z)(f_{|p}(z))^{p^{(j-1)h}} + \cdots + r_0(z) f_{|p}(z) = 0.$$

Et puisque $j \leq nr \leq n^2$, nous obtenons que le degré de $f_{|p}$ sur $\mathbb{F}_p(z)$ est majoré par $p^{n^2 h}$, comme souhaité. □

Remarque 4.3. — La démonstration montre plus précisément que le degré d'algébricité de $f_{|p}(z)$ est borné par p^{nrh}, où r désigne la dimension du $\mathbb{C}_p$-espace vectoriel V.

5. Démonstration du théorème 3.8

Nous rappelons que $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ est l'automorphisme de Frobenius de $\mathbb{C}_p$ choisi dans la remarque 2.1. À présent, nous présentons les différentes étapes de la démonstration du théorème 3.8. Celles-ci seront démontrées dans la partie 5.3.

Premier pas. — Le premier pas est consacré au calcul des groupes de monodromie locale de L à conjugaison près. Plus précisément, soit A la matrice compagnon de L et soient $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_r = \infty$ les points singuliers réguliers de L. Pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, soit $M(A, \gamma_j)$ la matrice de monodromie locale de A en γ_j. À l'aide du lemme 3.6 nous allons montrer qu'elle est conjuguée à une matrice de la forme $\exp(2\pi i C_j)$, où $C_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ satisfait aux conditions suivantes :

(a) Si λ, β sont deux valeurs propres différentes de C_j, alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$.
(b) L'ensemble des exposants de L en γ_j et l'ensemble des valeurs propres de C_j sont égaux modulo $\mathbb{Z}$.

Deuxième pas. — Nous montrerons que pour $p \in \mathcal{S}$ et tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Nous rappelons que l'ensemble de nombres premiers $\mathcal{S}$ et l'entier h sont définis comme dans le théorème 3.8.

Troisième pas. — Nous montrerons que pour tout $p \in \mathcal{S}$, la matrice $B = p^h z^{p^h - 1} A(z^{p^h})$ est E_p-équivalente à la matrice A. La matrice B est dans $\mathcal{M}_n(E_p)$. La démonstration de ce troisième pas se décompose selon les 3 étapes suivantes :

(i) Soit m entier strictement positif tel que $-m$ n'est pas une singularité de L. Nous montrerons que B est E_p-équivalente à

$$G = \frac{\gamma_1 + m}{(z+m)(z-\gamma_1)} F_1 + \cdots + \frac{\gamma_{r-1} + m}{(z+m)(z-\gamma_{r-1})} F_{r-1} - \frac{1}{z+m} F_r,$$

où $F_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p)$ pour $j \in \{1, \ldots, r\}$.

Dans la démonstration de **(ii)** nous utiliserons un isomorphisme de corps $\kappa : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}$. L'isomorphisme κ s'étend naturellement en un isomorphisme de corps entre $\mathbb{C}_p(z)$ et $\mathbb{C}(z)$, que nous notons encore $\kappa : \mathbb{C}_p(z) \to \mathbb{C}(z)$. La matrice $M^\kappa \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}(z))$ désigne la matrice que l'on obtient en appliquant κ à chaque entrée de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p(z))$.

(ii) Nous montrerons d'une part que la matrice de monodromie locale de G^κ en $\kappa(\gamma_j)$, $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$, est conjuguée à la matrice $\exp(2\pi i p^h C_j)$. D'autre part, nous prouvons que la matrice de monodromie locale en $-m$ est l'identité.

D'après le deuxième pas, les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Ainsi, il découle du premier pas que pour $j \in \{1, \ldots, r\}$, les matrices $M(A, \gamma_j)$ et $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$ sont conjuguées.

(iii) Comme la monodromie de $\frac{d}{dz} y = Ay$ est rigide, les conjugaisons des matrices $M(A, \gamma_j)$ et $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$ entraînent qu'il existe $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(A, \gamma_j) = U M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j)) U^{-1}$ pour $1 \leq j \leq r$. Il suit donc que les groupes de monodromie des systèmes $Ay = \frac{d}{dz} y$ et $G^\kappa y = \frac{d}{dz} y$ sont isomorphes. D'après la correspondance de Riemann Hilbert, théorème 6.15

de [21], on obtient qu'il existe $H_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}H_1 = AH_1 - H_1 G^{\kappa}.$$

On pose $H = H_1^{\kappa^{-1}}$, ainsi $H \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p(z)) \subset \mathrm{GL}_n(E_p)$ et

$$\frac{d}{dz}H = A^{\kappa^{-1}}H - HG.$$

Remarquons que $A^{\kappa^{-1}} = A$ car A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$. Par conséquent, A et G sont E_p-équivalentes. Or, d'après **(i)**, on sait que G est E_p-équivalente à B. Par transitivité on conclut que A et B sont E_p-équivalentes.

5.1. Disque non singulier et singulier régulier. — Dans cette partie nous énonçons et démontrons le théorème 5.1 ci-dessous. Ce résultat nous permettra dans la démonstration du théorème 3.8 de passer de la théorie des équations différentielles p-adiques à la théorie des équations différentielles classiques.

Pour tout $\gamma \in \mathbb{C}_p$, nous désignons par D_γ le disque ouvert de centre γ et de rayon 1 et par D_∞ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ dont la norme est strictement supérieure à 1 et $\infty \in D_\infty$. Nous notons $\vartheta_{\mathbb{C}_p}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{C}_p$ dont la norme est inférieure ou égale à 1 et si $\alpha, \gamma \in \vartheta_{\mathbb{C}_p}$ alors $D_\alpha = D_\gamma$ si, et seulement si $|\alpha - \gamma| < 1$. Et, $D_\alpha \cap D_\gamma = \emptyset$ si, et seulement si $|\alpha - \gamma| = 1$. Nous notons $E(D_\gamma)$ le complété pour la norme de Gauss des fractions rationnelles qui n'ont pas de pôle dans la boule D_γ.

Pour énoncer le théorème 5.1 nous aurons besoin de rappeler quelques notions de la théorie des équations différentielles p-adiques. Pour cela nous reprenons l'exposition de [7].

Soient $A \in \mathcal{M}_n(E_p)$ et $\gamma \in \vartheta_{\mathbb{C}_p}$. Nous dirons que la matrice A est *non singulière dans le disque* D_γ, respectivement à l'infini, s'il existe une matrice A_γ, respectivement A_∞, E_p-équivalente à A et qui appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$, respectivement à $z^2\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$. Nous dirons que la matrice A est *singulière régulière dans le disque* D_γ, respectivement à l'infini, s'il existe un point β de D_γ et une matrice A_γ, respectivement A_∞, E_p-équivalente à A tels que $(z-\beta)A_\gamma$ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$, respectivement zA_∞ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$.

Théorème 5.1. — *Soient $B \in \mathcal{M}_n(E_p)$ et $S = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}\} \subset \vartheta_{\mathbb{C}_p}$ tel que pour tout $i \neq j$, $|\gamma_i - \gamma_j|_p = 1$. Supposons que pour tout $\gamma \in S \cup \{\infty\}$, la matrice B est singulière régulière dans le disque D_γ et que pour tout $\gamma \notin S \cup \{\infty\}$ la matrice B est non singulière dans le disque D_γ. Soit m un entier strictement positif tel que $-m \notin S$. Pour tout $\gamma \in S$, soient β_γ un point de D_γ et B_γ une matrice E_p-équivalente à B tels que $(z-\beta_\gamma)B_\gamma$ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$. Soit B_∞ une matrice E_p-équivalente à B, telle que zB_∞ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$.*

Alors B est E_p-équivalente à une matrice G de la forme

$$G = \frac{\beta_{\gamma_1}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_1})}G_1 + \cdots + \frac{\beta_{\gamma_{r-1}}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_{r-1}})}G_{r-1} - \frac{1}{z+m}G_r, \tag{10}$$

où, pour $j \in \{1,\ldots,r-1\}$, G_j est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ semblable à $[(z-\beta_\gamma)B_\gamma](\beta_\gamma)$, G_r est une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ semblable à $[-zB_\infty](\infty)$ et $\sum_{\gamma\in S\cup\{\infty\}} G_\gamma$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Le théorème 5.1 est démontré dans [7, théorème 4.2] dans le cas où le disque D_∞ est non singulier.

Démonstration. — Considérons la matrice

$$V = -\frac{1}{z^2}B\left(\frac{1-zm}{z}\right),$$

obtenue en appliquant le changement de variables $z \mapsto \frac{1-zm}{z}$ au système $By = \frac{d}{dz}y$. Le disque D_∞ est non singulier pour la matrice V car le disque D_{-m} est non singulier pour la matrice B. Ainsi nous ramenons toutes les singularités à distance finie. Posons pour $j \in \{1,\ldots,r-1\}$, $\tau_j = 1/(\beta_{\gamma_j}+m)$ et $\tau_r = 0$. Notons que pour $j \in \{1,\ldots,r-1\}$, $|\beta_{\gamma_j}+m|_p = 1$ car D_{-m} est un disque non singulier pour la matrice B. Considérons l'ensemble $S' = \{\tau_1,\ldots,\tau_{r-1},0\}$. Nous allons appliquer le théorème 4.2 de [7] à la matrice V et à l'ensemble S'. Nous allons donc montrer que V et S' satisfont aux hypothèses du théorème 4.2 de [7]. D'après le changement de variables choisi, il nous reste à vérifier que :

1. $|\tau_i - \tau_j| = 1$ pour $i \neq j$;
2. Soit η tel que $|\eta| \leq 1$ et $|\tau_i - \eta| = 1$ pour $i \in \{1,\ldots,r\}$. Alors V est non singulière dans le disque D_η ;
3. Les disques singuliers réguliers de V sont exactement les disques D_{τ_j}, $1 \leq j \leq r-1$, et D_0.

Preuve du point 1. On a

$$\tau_i - \tau_j = \frac{1}{\beta_{\gamma_i}+m} - \frac{1}{\beta_{\gamma_j}+m} = \frac{\beta_{\gamma_j}-\beta_{\gamma_i}}{(\beta_{\gamma_i}+m)(\beta\gamma_j+m)}.$$

Par hypothèse $|\gamma_j - \gamma_i| = 1$ alors $|\beta_{\gamma_i} - \beta_{\gamma_j}| = 1$ et on a déjà vu que $|(\beta_{\gamma_j}+m)| = 1$ pour $j \in \{1,\ldots,r-1\}$, d'où $|(\beta_{\gamma_i}+m)(\gamma_j+m)| = 1$. Ainsi $|\tau_i - \tau_j| = 1$.

Preuve du point 2. Comme $|\tau_i - \eta| = 1$ pour tout $i \in \{1,\ldots,r\}$, alors on a $|\eta| = 1$ car $\tau_r = 0$. Supposons que V est singulière dans le disque D_η, alors la matrice B est singulière dans le disque $D_{\frac{1-\eta m}{\eta}}$. Donc, il existe $i \in \{1,\ldots,r-1\}$ tel que

$$\overline{\beta_{\gamma_i}} = \overline{\left(\frac{1-\eta m}{\eta}\right)}$$

et comme $\beta\gamma_i = \frac{1-\tau_i m}{\tau_i}$ il suit que

$$\overline{\left(\frac{1-\eta m}{\eta}\right)} = \overline{\left(\frac{1-\tau_i m}{\tau_i}\right)}.$$

Ainsi, on a $\overline{\eta} = \overline{\tau_i}$. Autrement dit $|\tau_i - \eta| < 1$, ce qui est une contradiction.

Preuve du point 3. Par hypothèse pour chaque $j \in \{1, \dots, r-1\}$, la matrice B est E_p-équivalentes à B_{γ_j}, où $(z-\beta_{\gamma_j})B_{\gamma_j}$ appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$. Ainsi, $B_{\gamma_j} = \frac{1}{z-\beta_{\gamma_j}} H_{\gamma_j}$, où H_{γ_j} appartient à $\mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$. Montrons que V est E_p-équivalente à

$$V_j = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z(m+\beta_{\gamma_j})} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right).$$

En effet, on sait qu'il existe $G_j \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz} G_j = BG_j - G_j B_{\gamma_j}.$$

On pose $T_j := G_j\left(\frac{1-zm}{z}\right) \in \mathrm{GL}_n(E_p)$, donc en appliquant la dérivée d'une composition on obtient que

(11)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz} T_j &= \left[B\left(\frac{1-zm}{z}\right) G_j\left(\frac{1-zm}{z}\right) - G_j\left(\frac{1-zm}{z}\right) B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)\right]\left(\frac{-1}{z^2}\right)\\ &= VT_j - T_j \cdot \left(\left(\frac{-1}{z^2}\right) B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)\right).\end{aligned}$$

Mais $B_{\gamma_j} = \frac{1}{z-\beta_{\gamma_j}} H_{\gamma_j}$ entraîne que $B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right) = \frac{z}{1-z(m+\beta_{\gamma_j})} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)$, d'où $\left(\frac{-1}{z^2}\right) B_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right) = V_j$ et ainsi

$$\frac{d}{dz} T_j = VT_j - T_j V_j.$$

Donc V et V_j sont E_p-équivalentes.

Comme $m + \beta_{\gamma_j} = 1/\tau_j$ pour $1 \leq i \leq j-1$, il vient que

$$V_j = -\frac{1}{z} \cdot \frac{\tau_j}{\tau_j - z} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right). \tag{12}$$

Enfin, comme B est E_p-équivalente à B_∞, où $B_\infty = \frac{1}{z} H_\infty$ avec H_∞ dans $\mathcal{M}_n(E(D_\infty))$ alors V est E_p-équivalente à

$$V_\infty := -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-zm} H_\infty\left(\left(\frac{1-zm}{z}\right)\right). \tag{13}$$

Pour finir, montrons que, pour tout $j \in \{1, \dots, r-1\}$, la matrice $(z-\tau_j)V_j$ est non singulière dans le disque D_{τ_j}. En effet, d'après (12), $(z-\tau_j)V_j = \frac{\tau_j}{z} H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)$. Soit $y \in D_{\tau_j}$, alors $\frac{1-ym}{y} \in D_{\gamma_j}$ et par conséquent, la matrice $H_{\gamma_j}\left(\frac{1-zm}{z}\right)$ n'a pas de pôle en y car H_{γ_j} appartient à $M(E(D_{\gamma_j}))$. Donc la matrice $(z-\tau_j)V_j$ est non singulière dans le disque D_{τ_j}. De manière similaire, on montre que la matrice zV_∞ est non singulière dans le disque D_0.

Par conséquent, le théorème 4.2 de [7] montre que V est E_p-équivalente à la matrice

$$F=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{z-\tau_j}G_j, \tag{14}$$

où, pour tout $j\in\{1,\dots,r-1\}$, G_j est une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ semblable à $[(z-\tau_j)V_j)](\tau_j)$, G_r est semblable à $(zV_r)(0)$ et $\sum_{i=1}^{r}G_j$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De (12) et (13) il suit que

$$[(z-\tau_j)V_j)](\tau_j)=H_{\gamma_j}(\gamma_j)\quad\text{et}\quad(zV_\infty)(0)=-H_\infty(\infty). \tag{15}$$

En particulier, le théorème 4.2 de [7] montre qu'il existe $T\in\mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz}T=VT-TF.$$

En posant $H_2=T\left(\frac{1}{z+m}\right)$, on a $H_2\in\mathrm{GL}_n(E_p)$ et

(16)
$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}H_2&=\left[V\left(\frac{1}{z+m}\right)T\left(\frac{1}{z+m}\right)-T\left(\frac{1}{z+m}\right)F\left(\frac{1}{z+m}\right)\right]\left(\frac{-1}{(z+m)^2}\right)\\&=\left[-(z+m)^2BH_2-H_2F\left(\frac{1}{z+m}\right)\right]\left(\frac{-1}{(z+m)^2}\right)\\&=BH_2-H_2\cdot\left(\frac{-1}{(z+m)^2}F\left(\frac{1}{z+m}\right)\right).\end{aligned}$$

Ainsi, B est E_p-équivalente à $G:=-\frac{1}{(z+m)^2}F(\frac{1}{z+m})$. Comme $\tau_j=1/(\beta_{\gamma_i}+m)$, l'égalité (14) donne que

$$G=\frac{\beta_{\gamma_1}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_1})}G_1+\cdots+\frac{\beta_{\gamma_{r-1}}+m}{(z+m)(z-\beta_{\gamma_{r-1}})}G_{r-1}-\frac{1}{z+m}G_r.$$

Finalement, d'après (15), G_j est semblable à $H_{\gamma_j}(\gamma_j)$ mais, $H_{\gamma_j}(\gamma_j)=[(z-\beta_{\gamma_j})B_{\gamma_j}](\beta_{\gamma_j})$ donc, G_j est semblable à $[(z-\beta_{\gamma_j})B_{\gamma_j}](\beta_{\gamma_j})$. Encore par (15), la matrice G_r est semblable à $-H_\infty(\infty)$, mais $H_\infty(\infty)=[zB_\infty](\infty)$ alors $-H_\infty(\infty)$ est est semblable $[zB_\infty](\infty)$. □

Remarque 5.2. — Il suit de la démonstration du théorème 4.2 de [7] que, l'infini est une singularité régulière apparente de F. Alors, $-m$ est une singularité régulière apparente de G et par conséquente, G a une base de solutions à coefficients dans $\mathbb{C}_p((z+m))$.

5.2. Lemmes préparatoires. — Afin de démontrer les trois pas précédents, nous aurons besoin des lemmes préparatoires suivants.

Le premier lemme est un résultat qui semble classique mais nous utiliserons les idées de la preuve dans la démonstration du théorème 3.8. On pose

$$L = \frac{d^n}{dz^n} + a_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z)\frac{d}{dz} + a_n(z) \in \mathbb{Q}(z)[d/dz], \tag{17}$$

Lemme 5.3. — *Considérons l'opérateur différentiel* (17) *et soit A la matrice compagnon associée à L. Si $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$ est un point singulier régulier de L, alors il existe $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$ telle que :*

1. *Les matrices A et $\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma$ sont $\mathbb{Q}(\gamma)(z)$-équivalentes. Et si γ est l'infini alors A et $\frac{-1}{z}A_\infty$ sont $\mathbb{Q}(z)$-équivalentes.*
2. *A_γ n'a pas de pôle en γ ;*
3. *Les valeurs propres de $A_\gamma(\gamma)$ sont les exposants de l'équation en γ.*

Remarque 5.4. — Ce lemme est encore valide quand $L \in \mathbb{C}(z)[d/dz]$, mais dans ce cas nous pouvons seulement affirmer que A et $\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma$ sont $\mathbb{C}(z)$-équivalentes et il en va de même pour l'infini. En particulier si L est fuchsien alors le système différentiel $\frac{d}{dz}y = Ay$ est fuchsien.

Démonstration. — Notons que $z^n\frac{d^n}{dz^n} = \delta(\delta-1)\cdots(\delta+n-1)$, où $\delta = z\frac{d}{dz}$. Ainsi, il existe $a_{1j}, \ldots, a_{jj} \in \mathbb{Z}$ tels que $\frac{d^j}{dz^j} = \frac{a_{1j}}{z^j}\delta + \cdots + \frac{a_{jj}}{z^j}\delta^j$. Soit

$$G_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{z} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{1}{z^2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{a_{1,n-1}}{z^{n-1}} & \frac{a_{2,n-1}}{z^{n-1}} & \frac{a_{3,n-1}}{z^{n-1}} & \ldots & \frac{a_{n-2,n-1}}{z^{n-1}} & \frac{1}{z^{n-1}} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[1/z])$$

la matrice exprimant $\{1, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\}$ en fonction de $\{1, \delta, \ldots, \delta^{n-1}\}$.

Soit γ un point singulier régulier de L. Nous commençons par considérer un nouvel opérateur

$$L_\gamma := \frac{d^n}{dz^n} + a_1(z+\gamma)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(z+\gamma)\frac{d}{dz}y + a_n(z+\gamma)$$

que l'on écrit sous la forme

$$\delta^n + q_1(z)\delta^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(z)\delta + q_n(z), \tag{18}$$

où $\delta = z\frac{d}{dz}$ et

$$(q_n(z), \ldots, q_1(z), 1) = (a_n(z+\gamma), \ldots, a_1(z+\gamma), 1)z^n G_{n+1}. \tag{19}$$

On rappelle que les exposants de (17) en γ sont les zéros du polynôme

$$\lambda^n + q_1(0)\lambda^{n-1} + \cdots + q_{n-1}(0)\lambda + q_n(0),$$

où $q_n(z), \ldots, q_1(z)$ sont définis dans (19).

Notons que $q_i(z) \in \mathbb{Q}(\gamma)(z)$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit

$$B_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -q_n(z) & -q_{n-1}(z) & \dots & -q_2(z) & -q_1(z) \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème de Fuchs, B_γ n'a pas de pôle en zéro. Montrons que les valeurs propres de $B_\gamma(0)$ sont les exposants en γ. En effet, le polynôme caractéristique de $B_\gamma(0)$ est $(-1)^n(\lambda^n + q_1(0)\lambda^{n-1} + \cdots + q_{n-1}\lambda + q_n(0))$. Posons

$$A_\gamma = B_\gamma(z-\gamma) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(\gamma)(z)). \tag{20}$$

Alors, A_γ n'a pas de pôle en γ et les valeurs propres de $A_\gamma(\gamma)$ sont les exposants en γ. Ainsi, elle appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q}\{z-\gamma\})$. Donc A_γ satisfait aux points 2 et 3 du lemme 5.3. Montrons qu'elle satisfait aussi le point 1.

Soit C_γ la matrice compagnon associée à l'équation L_γ. Montrons que

$$\frac{d}{dz}G_n = C_\gamma G_n - G_n \frac{1}{z} B_\gamma.$$

Soit f une solution quelconque de L_γ. On pose $(\mathbf{d}f) = (f, f', \dots, f^{(n-1)})^t$ et $(\boldsymbol{\delta} f) = (f, \delta f, \dots, \delta^{(n-1)} f)^t$. Alors, $\frac{d}{dz}(\mathbf{d}f) = C_\gamma(\mathbf{d}f)$ et $\delta(\boldsymbol{\delta} f) = B_\gamma(\boldsymbol{\delta} f)$. D'après la construction de la matrice G_n, nous avons que $(\mathbf{d}f) = G_n(\boldsymbol{\delta} f)$. En appliquant d/dz à cette dernière égalité, on a que

$$C_\gamma(\mathbf{d}f) = \left(\frac{d}{dz}G_n\right)(\boldsymbol{\delta} f) + G_n \frac{d}{dz}(\boldsymbol{\delta} f) = \left(\frac{d}{dz}G_n\right)(\boldsymbol{\delta} f) + G_n \frac{1}{z}\delta(\boldsymbol{\delta} f).$$

Mais $(\mathbf{d}f) = G_n(\boldsymbol{\delta} f)$ et $\delta(\boldsymbol{\delta} f) = B_\gamma(\boldsymbol{\delta} f)$. Donc,

$$C_\gamma G_n(\boldsymbol{\delta} f) = \left(\frac{d}{dz}G_n\right)(\boldsymbol{\delta} f) + G_n \frac{1}{z} B_\gamma(\boldsymbol{\delta} f).$$

Finalement, comme f est une solution quelconque de L_γ et que l'espace des solutions de L_γ est de dimension n sur $\mathbb{C}$, on obtient que

$$C_\gamma G_n = \frac{d}{dz}G_n + G_n \frac{1}{z} B_\gamma.$$

Notons que $A = C_\gamma(z-\gamma)$, alors en posant $H_\gamma := G_n(z-\gamma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(\gamma)(z))$, il vient

$$\frac{d}{dz}H_\gamma = AH_\gamma - H_\gamma \frac{1}{z-\gamma} A_\gamma.$$

Pour l'infini, considérons l'équation différentielle

$$\frac{d^n}{dz^n}y + b_1(z)\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}y + \cdots + b_{n-1}(z)\frac{d}{dz}y + b_n(z)y = 0, \tag{21}$$

où $(b_n(z), \ldots, b_1(z), 1) = (a_n(1/z), \ldots, a_1(1/z), 1)\frac{(-1)^n}{z^{2n}}W_n$ et

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -z^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2z^3 & z^4 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & * & * & \ldots & * & (-z^2)^n \end{pmatrix}$$

qui est la matrice qui exprime le vecteur $(1, D, \ldots, D^n)$ en fonction de $(1, \frac{d}{dz}, \ldots, \frac{d}{dz^n})$, où $D = -z^2\frac{d}{dz}$.

Comme l'infini est singulier régulier, alors zéro est un point singulier régulier de (21) et par définition les exposants à l'infini de (17) sont les exposants en zéro de (21). Notons $\widetilde{A}$ la matrice compagnon de (21). Il existe une matrice $\widetilde{A}_0$ qui n'a pas de pôle en zéro, les valeurs propres de $\widetilde{A}_0(0)$ sont les exposant en zéro de (21) et $\frac{1}{z}\widetilde{A}_0$ et $\widetilde{A}$ sont $\mathbb{Q}(z)$-équivalentes. Alors il existe $\widetilde{H}_0 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}\widetilde{H}_0 = \frac{1}{z}\widetilde{A}_0\widetilde{H}_0 - \widetilde{H}_0\widetilde{A}.$$

Ainsi, si $\widetilde{G} = \widetilde{H}_0(1/z) \in \mathbb{Q}(z)$ on a

$$\frac{d}{dz}\widetilde{G} = -\frac{1}{z}\widetilde{A}_0(1/z)\widetilde{G} - \widetilde{G}\cdot\left(\frac{-1}{z^2}\widetilde{A}(1/z)\right).$$

Soit f un solution de L et soit $g = f(1/z)$, on pose $(\mathbf{d}f) = (f, f', \ldots, f^{(n-1)})^t$, $(\mathbf{d}g) = (g, g', \ldots, g^{(n-1)})^t$. À l'aide des égalités $\mathbf{d}f = (W_n\mathbf{d}g)(1/z)$, $\frac{d}{dz}(\mathbf{d}f) = A\mathbf{d}f$ et $\frac{d}{dz}(\mathbf{d}g) = \widetilde{A}\mathbf{d}g$, on obtient que

$$\frac{d}{dz}W_n = -(\frac{1}{z^2}A(1/z))W_n - W_n\widetilde{A}.$$

Posons $T_\infty = W_n(1/z) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$, il vient donc

$$\frac{d}{dz}T_\infty = A(z)T_\infty - T_\infty\left(\frac{-1}{z^2}\widetilde{A}(1/z)\right).$$

Maintenant, en posant $H_\infty = \widetilde{G}T_\infty^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$, il vient

$$\frac{d}{dz}H_\infty = -\frac{1}{z}\widetilde{A}_0(1/z)H_\infty - H_\infty A.$$

Par conséquent, les matrices A et $-\frac{1}{z}\widetilde{A}_0(1/z)$ sont $\mathbb{Q}(z)$-équivalentes. On pose $A_\infty = \widetilde{A}_0(1/z)$, ainsi la matrice A_∞ satisfait aux conditions demandées. □

Notons que pour tout nombre premier p, γ appartient à la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, car il annule un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$. La démonstration précédente montre que $A_\gamma, H_\gamma \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(\gamma)(z))$ et $A_\infty, H_\infty \in$

$\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})(z)$, notamment $A_\gamma, H_\gamma \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ et ainsi les matrices A, $\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma$ sont E_p-équivalentes. On obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.5. — *Soient $L \in \mathbb{Q}(z)[d/dz]$, A, $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(\overline{\mathbb{Q}}(z))$, $\gamma \in \overline{\mathbb{Q}} \in \{\infty\}$ comme dans le lemme 5.3.*

1. *Soit p un nombre premier tel que le disque $D_\gamma \subset \mathbb{C}_p$ ne contient pas d'autres points singulier de L. Alors le disque D_γ est non singulier pour A_γ.*
2. *Soit p un nombre premier tel que tous les points singuliers de L à distance finie ont norme p-adique égale à 1. Supposons que l'infini est un point singulier régulier de L. Alors le disque D_∞ est non singulier pour la matrice A_∞.*
3. *Soit p un nombre premier tel que $\|A\|_p \leq 1$ et $|\gamma|_p = 1$, alors $\|A_\gamma\|_{p,} \leq 1$ et $\|\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$.*

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(E_p)$, $\|A\|_{\mathcal{G},p} = Max(|a_{ij}|_{\mathcal{G},p})$.

Démonstration. — Avec les notations de la preuve du lemme 5.3, l'équation (20) donne que

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -q_n(z-\gamma) & -q_{n-1}(z-\gamma) & \dots & -q_2(z-\gamma) & -q_1(z-\gamma) \end{pmatrix}.$$

et de (19) on a que

$$(q_n(z-\gamma), \dots, q_1(z-\gamma), 1) = (a_n(z), \dots, a_1(z), 1)(z-\gamma)^n G_{n+1}(z-\gamma). \tag{22}$$

Notons que $(z-\gamma)^n G_{n+1}(z-\gamma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}[z-\gamma])$.

1. Cela revient à montrer que $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(E(D_\gamma))$, c'est-à-dire que A_γ n'a pas de pôle en D_γ. En effet, soit $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ une singularité de A_γ. D'après le lemme 5.3, on a $\alpha \neq \gamma$ car A_γ n'a pas de pôle en γ. L'équation (22) donne que α est une singularité de A et d'après l'hypothèse, $\alpha \notin D_\gamma$, ainsi $A_\gamma \in \mathcal{M}_n(D_\gamma)$.
2. Rappelons que $A_\infty = \widetilde{A}_0(1/z)$. Notons que les singularités de (21) sont 0 et $1/\gamma$, avec γ une singularité de L. De l'hypothèse, $|1/\gamma|_p = 1$, ainsi D_0 ne contient pas d'autre point singulier de (21). Alors, du point 1 du corollaire, A_0 est non singulier dans le disque D_0 et ainsi A_∞ est non singulier dans le disque D_∞.

3. D'après l'hypothèse, $\|(a_n(z),\ldots,a_1(z),1)\|_{\mathcal{G},p}\leq 1$, $\|(z-\gamma)\|_{\mathcal{G},p}=1$ et notons que
$$G_{n+1}(z-\gamma)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{z-\gamma} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{(z-\gamma)^2} & \frac{1}{(z-\gamma)^2} & 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots\\ 0 & \frac{a_{1,n}}{(z-\gamma)^n} & \frac{a_{2,n}}{(z-\gamma)^n} & \frac{a_{3,n}}{(z-\gamma)^n} & \dots & \frac{a_{n-1,n}}{(z-\gamma)^n} & \frac{1}{(z-\gamma)^n}\end{pmatrix}.$$
Comme les a_{ij} sont entiers, on a $\|G_{n+1}(z-\gamma)\|_{\mathcal{G},p}\leq 1$ et l'équation (22) donne
$$\|(q_n(z-\gamma),\ldots,q_1(z-\gamma),1)\|_{\mathcal{G},p}\leq 1.$$
Ainsi, $\|A_\gamma\|_{\mathcal{G},p}\leq 1$. Finalement, comme $\|\frac{1}{z-\gamma}\|_{\mathcal{G},p}=1$, alors
$$\left\|\frac{1}{z-\gamma}A_\gamma\right\|_{\mathcal{G},p}=\left\|\frac{1}{z-\gamma}\right\|_{\mathcal{G},p}\|A_\gamma\|_{\mathcal{G},p}\leq 1. \qquad \square$$

Nous aurons besoin du lemme suivant pour la démonstration du deuxième pas du théorème 3.8.

Lemme 5.6. — *Soient $a_0(z)\in\mathbb{Q}[z]$, K le corps de décomposition de $a_0(z)$ sur $\mathbb{Q}$, h_2 la dimension de K comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel et s la valuation de $a_0(z)$. Considérons l'ensemble $\mathcal{S}'$ des nombres premiers tels que le coefficient dominant de $a_0(z)$ et le terme constant du polynôme $a_0(z)/z^s$ aient une norme p-adique égale à 1 et que $a_0(z)\in\mathbb{Z}_{(p)}[z]$. Alors pour tout $p\in\mathcal{S}'$, tout entier $m\geq 1$ et toute racine γ de $a_0(z)$, on a*
$$|\gamma^{p^{mh_2}}-\gamma|_p<\frac{1}{p}<|\pi_p|_p.$$

Remarque 5.7. — Notons que l'ensemble $\mathcal{P}\setminus\mathcal{S}'$ est fini.

Démonstration. — Si $\gamma=0$ il n'a rien à prouver. Supposons donc que $\gamma\neq 0$. Soit $p\in\mathcal{S}'$, alors $a_0(z)\in\mathbb{Z}_p[z]$ car $\mathbb{Z}_{(p)}\subset\mathbb{Z}_p$. Soient K_p le corps de décomposition de $a_0(z)$ sur $\mathbb{Q}_p$ et h_3 la dimension de K_p comme $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel. Il suit du théorème 6.1 de [14, Chap. I] que les racines non nulles de $a_0(z)$ ont une norme égale à 1. Soit $P(z)=a_0(z)/z^s$. Notons que $P_0(z)\in\mathbb{Z}_{(p)}[z]$. Comme $|P(0)|_p=1$ et toutes les racines de $P(z)$ ont norme égale à 1 alors $P(z)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$. Soit $\bar{P}(z)$ le polynôme qui est obtenu après avoir réduit les coefficients de $P(z)$ modulo l'idéal maximal de $\mathbb{Z}_{(p)}$. Comme $P(z)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$ et $P(z)$ est à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ alors le lemme de Hensel nous assure que $\bar{P}(z)$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$. Soient $L=\mathbb{Q}_p(\gamma)$ et $k=\mathbb{F}_p(\bar{\gamma})$. Comme $P(\gamma)=0$ et $P(z)$ est irréductible sur $\mathbb{Q}_p$ alors $[L:\mathbb{Q}_p]=deg(P(z))$. De même, comme $\bar{P}(\bar{\gamma})=0$ et $\bar{P}(z)$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$ alors $[k:\mathbb{F}_p]=deg(\bar{P}(z))$. Mais, $deg(P(z))=deg(\bar{P}(z))$ et ainsi, $[L:\mathbb{Q}_p]=$

$deg(P(z)) = [k : \mathbb{F}_p]$. Alors, d'après le petit théorème de Fermat, $\gamma^{p^{deg(P(z))}} \equiv \gamma \mod p$. Puisque L est un sous corps de K_p alors $deg(P(z))$ divise h_3 et ainsi, $\gamma^{p^{h_3}} \equiv \gamma \mod p$. Donc, pour tout entier $n \geq 1$, $\gamma^{p^{nh_3}} \equiv \gamma \mod p$. Finalement, comme K est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$, on obtient que $h_2 = h_3 r$, où r est un entier strictement positif. Ainsi, pour tout entier $m \geq 1$, $\gamma^{p^{mh_2}} \equiv \gamma \mod p$. Finalement, on obtient que pour tout entier $m \geq 1$,

$$|\gamma^{p^{mh_2}} - \gamma|_p < \frac{1}{p} < |\pi_p|. \qquad \square$$

L'importance du troisième pas repose sur le fait que nous allons passer de la théorie des équations différentielles p-adiques à la théorie des équations différentielles classiques, et pour cela nous utiliserons le théorème 5.1. Dans un premier temps, nous étudions les disques singuliers réguliers de B. D'après le lemme 5.3, on obtient que B est E_p-équivalente à $\frac{pz^{p-1}}{z^p-\gamma_j} A_{\gamma_j}(z^p)$. De plus, d'après le choix de p, le corollaire 5.5 nous garantit que la matrice $A_{\gamma_j}(z^p)$ est non singulière dans le disque D_{γ_j}. Ainsi, la matrice $(z-\gamma_j)(\frac{1}{z^p-\gamma_j})A_j(z^p)$ a comme singularités les racines p-ième de γ_j qui sont dans D_{γ_j}. Pour surmonter cette difficulté, nous considèrerons la transformation $z \mapsto (z+\gamma_j)^p - \gamma_j$.

Dans l'étude de cette transformation nous devons reprendre la construction de $Frob_{z^p}$ faite dans la partie 2. De manière plus générale, pour $\omega \in E_p$ vérifiant

$$|\omega - z^{p^h}| < 1 \tag{23}$$

pour un certain h, nous construisons $Frob_\omega : E_p \to E_p$ comme suit. Nous définissons $Frob_\omega : \mathbb{C}_p(z) \to E_p$ donné par

$$Frob_\omega\left(\frac{\sum_i a_i z^i}{\sum_j b_j z^j}\right) = \frac{\sum_j Frob(a_i)\omega^i}{\sum_j Frob(b_j)\omega^j},$$

où $(\sum_i a_i z^i)/(\sum_j b_j z^j) \in \mathbb{C}_p(z)$. Remarquons que $\sum_j Frob(b_j)\omega^j \neq 0$ car d'après (23), ω est transcendent. Le Frobenius $Frob_\omega$ est continu car c'est une isométrie (voir le lemme 5.9), il s'étend donc au corps des éléments analytiques E_p, noté encore $Frob_\omega : E_p \to E_p$. De plus, c'est à nouveau une isométrie. Soit A une matrice de taille n à coefficients E_p, on considère la matrice $F_\omega(A) := \frac{d}{dz}(\omega)A^{Frob_\omega}$, où A^{Frob_ω} est la matrice obtenue en appliquant $Frob_\omega$ à chaque entrée de A.

De la proposition 4.1.2 de [8] on sait que si $A \in \mathcal{M}_n(E_p)$ a norme inférieure ou égale à 1 alors le système $Ay = \frac{d}{dz}y$ a une basse de solution dans l'anneau des séries à coefficients dans E_p qui convergent pour $|x| < |\pi_p|$, donc en analogie avec la proposition 4.7.3 de [8], nous obtenons la proposition suivante.

Proposition 5.8. — *Soit $\omega \in E_p$ tel que $|\omega - z^{p^h}| < |\pi_p|$ et $A \in \mathcal{M}_n(E_p)$ de norme inférieure ou égale à 1. Alors $F_\omega(A)$ et $F_{z^{p^h}}(A)$ sont E_p-équivalentes.*

Nous allons utiliser la proposition 5.8 dans l'étape **(i)** du troisième pas afin de montrer que B est E_p-équivalente à $F_\omega(\frac{1}{z-\gamma_k}A_{\gamma_k})$, avec $\omega=(z+\gamma_j)^{p^h}-\gamma_j$, où $Frob(\gamma_k)=\gamma_j$.

Un des points importants de la démonstration de la proposition 4.7.3 de [8] est que $Frob_{z^{p^h}}$ est une isométrie. Pour appliquer la proposition 5.8 nous devons montrer que $Frob_\omega$ est une isométrie. Nous démontrons cela dans le lemme suivant.

Lemme 5.9. — *Soit h un entier strictement positif et $\omega\in E_p$ tels que $|\omega-z^{p^h}|<1$. Alors, il existe un endomorphisme isométrique, $Frob_\omega : E_p\to E_p$ tel que $Frob_\omega(z)=\omega$. De plus, pour tout e dans E_p, on a*

$$\frac{d}{dz}(Frob_\omega(e))=\frac{d}{dz}(\omega)Frob_\omega\left(\frac{d}{dz}e\right).$$

Démonstration. — Soit $Frob:\mathbb{C}_p\to\mathbb{C}_p$ l'automorphisme de Frobenius choisi dans la remarque 2.1. On a $\overline{\omega}=\overline{z}^{p^h}$ et $|\omega|=1$. Définissons $Frob_\omega:\mathbb{C}_p(z)\to E_p$ de la manière suivante. Étant donnés $P(z)=\sum_{i=0}^n a_iz^i$ et $Q(z)=\sum_{j=0}^m b_jz^j\in\mathbb{C}_p[z]$, on pose

$$Frob_\omega\left(\frac{P}{Q}\right)=\frac{\sum_{i=0}^n Frob(a_i)\omega^i}{\sum_{j=0}^m Frob(b_j)\omega^j}.$$

Notons que $\sum_{j=0}^m Frob(b_j)\omega^j\neq 0$ car ω est transcendant sur K. Montrons que $Frob_\omega$ est une isométrie. Soient $l\in\{0,\dots,n\}$ et $k\in\{0,\dots,m\}$ tels que $|a_l|=|P|$ et $|b_k|=|Q|$. Alors $P=a_lP_1$ et $Q=b_kQ_1$ avec $P_1=\sum_{i=0}^n c_iz^i$ où $c_i=\frac{a_i}{a_l}$, $Q_1=\sum_{j=0}^m d_jz^j$ et $d_j=\frac{b_j}{b_k}$. On pose $R=\frac{P_1}{Q_1}$.

Ainsi, on a $|P_1|=1=|Q_1|$, $|R|=1$ et

$$\overline{Frob_\omega(R)}=\left(\overline{\frac{\sum_i c_i^p z^{ip^h}}{\sum_j d_j^p z^{jp^h}}}\right)=\left(\overline{\frac{\sum_i c_i z^{ip^{h-1}}}{\sum_j d_j z^{jp^{h-1}}}}\right)^p=\overline{R(z^{p^{h-1}})}^p. \tag{24}$$

On obtient que

$$|Frob_\omega(R)-(R(z^{p^{h-1}}))^p|<1,$$

et comme $|R(z^{p^h-1})|=1$, alors $|Frob_\omega(R)|=1$ et $|Frob_\omega(P/Q)|=|P/Q|$.

Donc $Frob_\omega:\mathbb{C}_p(z)\to E_p$ est continue et isométrique. Elle peut se prolonger de manière unique au corps E_p en un endomorphisme isométrique. De la contruction de $Frob_\omega$ et de la dérivation de la composée, il suit que pour toute fraction rationnelle $P/Q\in\mathbb{C}_p(z)$, on a

$$\frac{d}{dz}(Frob_\omega(P/Q))=\frac{d}{dz}(\omega)Frob_\omega\left(\frac{d}{dz}(P/Q)\right).$$

Comme $Frob_\omega$ et $\frac{d}{dz}$ sont continues, on obtient que, pour tout $e \in E_p$, on a

$$\frac{d}{dz}(Frob_\omega(e)) = \frac{d}{dz}(\omega)Frob_\omega\left(\frac{d}{dz}e\right). \qquad \square$$

5.3. Démonstration des pas. — Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 3.8.

Démonstration du premier pas. — Soient $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{r-1}, \gamma_r = \infty$ les points singuliers de L et A sa matrice compagnon. D'après le lemme 5.3, on a que γ_j est un point singulier régulier du système $\frac{d}{dz}y = Ay$. Ainsi, d'après le lemme 3.6, il existe $C_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(A, \gamma_j)$ est conjuguée à $\exp(2\pi i C_j)$, où, si λ, β sont deux valeurs propres différentes de C_j alors $\lambda - \beta \notin \mathbb{Z}$ et si α_{ij} est un exposant de $\frac{d}{dz}y = Ay$ en γ_j alors il existe un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\alpha + m$ est une valeur propre de C. Mais, toujours d'après le lemme 5.3, les exposants de $\frac{d}{dz}y = Ay$ en γ_j sont les exposants de L en γ_j. Ainsi, C_j satisfait aux conditions **(a)** et **(b)** du premier pas. $\square$

Remarque 5.10. — D'après le lemme 5.3, nous pouvons réécrire le point **(b)** comme suit : l'ensemble des valeurs propres de $A_j(\gamma_j)$ et l'ensemble des valeurs propres de C_j sont égaux modulo $\mathbb{Z}$.

Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des nombres algébriques formé par les points $\gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}$, les différences $\gamma_i - \gamma_j$, $i \neq j$, et les dénominateurs des exposants des points $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$. Si $p \in \mathcal{S}$, alors les éléments de $\mathfrak{A}$ ont tous une norme p-adique égale à 1. En effet, comme $p \in \mathcal{S}$ et $\gamma_2, \ldots, \gamma_{r-1}$ sont les racines non nulles de $a_0(z)$ alors, d'après le théorème 6.1 de [14, Chap. I], leurs normes p-adique sont égales à 1. Le discriminant de $a_0(z)$ est donnée par $\prod_{i\neq j}(\gamma_i - \gamma_j)^2$. Si $p \in \mathcal{S}$, on a donc que $|\prod_{i\neq j}(\gamma_i - \gamma_j)^2|_p = 1$. De plus, comme la norme est ultramétrique, on obtient que $|\gamma_i - \gamma_j|_p \leq 1$ pour $i \neq j$. On en déduit donc que $|\gamma_i - \gamma_j|_p = 1$ pour $i \neq j$. Rappelons enfin que si $p \in \mathcal{S}$, alors $\|A\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$.

Désignons par $\alpha_{1,j}, \ldots, \alpha_{n,j}$ les exposants de L en γ_j. Notons d le plus petit commun multiple des dénominateurs des $\alpha_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq r$. Rappelons que $h_1 = \phi(d)$. On sait que si $p \in \mathcal{S}$, on a $|d|_p = 1$. Donc, p et d sont premiers entre eux et $p^{h_1} \equiv 1 \mod d$. Ainsi, pour tout $p \in \mathcal{S}$, on obtient que

$$p^{h_1} \equiv 1 \mod d.$$

Finalement, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, il vient

$$p^{h_1}\alpha_{i,j} \equiv \alpha_{i,j} \mod \mathbb{Z}.$$

D'après le lemme 5.6, on a

$$|\gamma_j^{p^h} - \gamma_j|_p < |\pi_p|, \tag{25}$$

pour tout $p \in \mathcal{S}$ et tout $j \in \{1, \ldots, r-1\}$. Comme $h = h_1 h_2$, on obtient que

$$p^h \alpha_{i,j} \equiv \alpha_{i,j} \mod \mathbb{Z}, \tag{26}$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, tout $j \in \{1, \ldots, r\}$ et tout $p \in \mathcal{S}$.

Démonstration du deuxième pas. — Soit $p \in \mathcal{S}$ et montrons que les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Soit M la forme de Jordan de C_j, alors $C_j = UMU^{-1}$, où $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soient $\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{r,j}$ les valeurs propres de C_j. Soit $J_{\lambda_{i,j}}$ un bloc de Jordan de M qui correspond à la valeur propre $\lambda_{i,j}$. Ainsi, $J_{\lambda_{i,j}} = \lambda_{i,j} I_{n_{\lambda_{i,j}}} + N_{\lambda_{i,j}}$, où $I_{n_{\lambda_{i,j}}}$ est la matrice identité de taille $n_{\lambda_{i,j}}$ et $N_{\lambda_{i,j}}$ est une matrice carrée nilpotente de taille $n_{\lambda_{i,j}}$. D'après le premier pas, $\lambda_{i,j} = \alpha + m$, où α est un exposant de L en γ_j et m un entier. Ainsi,

$$\exp(2\pi i J_{\lambda_{i,j}}) = \exp(2\pi i \alpha) \exp(2\pi i N_{\lambda_{i,j}}). \tag{27}$$

Les valeurs propres de $p^h C_j$ sont $p^h \lambda_{1,j}, \ldots, p^h \lambda_{r,j}$. Puisque $p^h C_j = U(p^h M)U^{-1}$, alors $p^h M$ est constituée des blocs de Jordan de M multipliés par p^h. Ainsi, la matrice $p^h J_{\lambda_{i,j}} = p^h(\lambda_{i,j} I_{n_{\lambda_{i,j}}} + N_{\lambda_{i,j}})$ est un bloc de la matrice $p^h M$. Montrons que $p^h \lambda_{i,j} \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}$. Comme on l'a déjà dit $\lambda_{i,j} = \alpha + m$, où α est un exposant de L en γ_j et m un entier. Alors $p^h \lambda_{i,j} = p^h \alpha + p^h m$ et il suit de (26) que $p^h \alpha = \alpha + m'$, où m' est un entier. Donc, $p^h \lambda_{i,j} = \alpha + m' + p^h m$. Comme $m' + p^h m$ est un entier, on a $p^h \lambda_{i,j} \equiv \alpha \mod \mathbb{Z}$. Par conséquent, on obtient que

$$\begin{aligned} \exp(p^h 2\pi i J_{\lambda_{i,j}}) &= \exp(2\pi i p^h \lambda_{i,j}) \exp(2\pi i p^h N_{\lambda_i}) \\ &= \exp(2\pi i \alpha) \exp(2\pi i N_{\lambda_{i,j}}). \end{aligned} \tag{28}$$

D'après (27) et (28), on a $\exp(2\pi i J_{\lambda_{i,j}}) = \exp(p^h 2\pi i J_{\lambda_{i,j}})$. Il suit donc que les matrices $\exp(2\pi i M)$ et $\exp(2\pi p^h M)$ sont conjuguées. Finalement, comme $\exp(2\pi i C_j) = U exp(2\pi i M) U^{-1}$ et $\exp(2\pi i p^h C_j) = U \exp(2\pi i p^h M) U^{-1}$, les matrices $\exp(2\pi i C_j)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. □

Démonstration du troisième pas. — Soit $p \in \mathcal{S}$ et soit $B = p^h z^{p^h - 1} A(z^{p^h})$. Nous allons montrer que A et B sont E_p-équivalentes. Dans cette partie, nous verrons B comme une matrice à coefficients dans E_p. Pour chaque point singulier $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_{r-1}, \gamma_r = \infty$ de L, nous notons A_i la matrice construite dans le lemme 5.3 et correspondant au point γ_i.

Démonstration du point **(i)**. Nous allons appliquer le théorème 5.1. Pour cela nous commençons par montrer que les seuls disques singuliers réguliers de B sont $D_{\gamma_1}, \ldots, D_{\gamma_{r-1}}, D_\infty$. Par construction de l'ensemble $\mathfrak{A}$, on a $|\gamma_j - \gamma_k|_p = 1$ pour $j \neq k$. Donc $\overline{\gamma_j} \neq \overline{\gamma_k}$ pour $j \neq k$ et $D_{\gamma_j} \cap D_{\gamma_k} = \emptyset$ pour $j \neq k$. Montrons dans un premier temps que si le disque D_α de centre α et de rayon 1 est singulier alors il existe $j \in \{1, \ldots, r-1\}$ tel que $D_\alpha = D_{\gamma_j}$. Comme D_α est un disque singulier de B, il existe $t \in D_\alpha$ tel que t est une singularité de B, alors t^{p^h} est une singularité de A et il existe $i \in \{1, \ldots, r-1\}$ tel que $t^{p^h} = \gamma_i$. D'après l'inégalité (25), on a $\overline{\gamma_i} = \overline{\gamma_i}^{p^h}$. Ainsi, on obtient que

$$\bar{t}^{p^h} = \overline{\gamma_i}^{p^h}.$$

Il suit que $\bar{t} = \overline{\gamma_i}$. Ainsi $|t - \gamma_i| < 1$ et comme la norme est ultramétrique, on obtient que

$$|\alpha - \gamma_i| = |\alpha - t + t - \gamma_i| < 1$$

et $D_\alpha = D_{\gamma_i}$.

Montrons dans un deuxième temps que, pour chaque $j \in \{1, \ldots, r-1\}$, il existe une matrice B_j à coefficients dans E_p telle que $(z-\gamma_j)B_j$ est à coefficients dans $E(D_{\gamma_j})$ et B est E_p-équivalente à B_j. Cela impliquera que la matrice B est singulière régulière dans les disques D_{γ_j}. D'après la remarque qui suit la preuve du lemme 5.3, il existe $H_j \in \mathrm{GL}_n(E_p)$ telle que

$$\frac{d}{dz} H_j = A H_j - H_j \frac{1}{z - \gamma_j} A_j.$$

Posons $Q_j := H_j(z^{p^h}) \in \mathrm{GL}_n(E_p)$. On a

$$\frac{d}{dz} Q_j = \frac{d}{dz}(H_j)(z^{p^h}) p^h z^{p^h - 1}$$

et ainsi

$$\frac{d}{dz} Q_j = B Q_j - Q_j \left(\frac{p^h z^{p^h-1}}{z^{p^h} - \gamma_j} \right) A_j(z^{p^h}). \tag{29}$$

Alors la matrice B est E_p-équivalente à $\left(\frac{p^h z^{p^h-1}}{z^{p^h} - \gamma_j} \right) A_j(z^{p^h})$.

Notons que $Frob(\gamma_k) = \gamma_j$ car $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ fixe $\mathbb{Q}$ et ainsi les singularités de $Frob(A) = A$ sont $\{Frob(\gamma_1), \ldots, Frob(\gamma_{r-1}), \infty\} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{r-1}, \infty\}$. De plus, d'après (20), on a $Frob(A_k) = A_j$. Nous allons appliquer la proposition 5.8 à la matrice $\frac{1}{z-\gamma_k} A_k$, avec $\omega = [(z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j]$. Montrons d'abord que $|\omega - z^{p^h}|_p < |\pi_p|_p$. Comme $\omega = (z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j$, on a

$$\omega - z^{p^h} = (\gamma_j - \gamma_j^{p^h}) + \sum_{k=0}^{p^h-1} (-1)^k \binom{p^h}{k} z^{p^h-k} \gamma_j^k.$$

D'après le théorème de Lucas, on a $\binom{p^h}{k} \equiv 0 \mod p$ pour $0 \leq k \leq p^h - 1$ et ainsi $|\binom{p^h}{k}|_p \leq |p|_p$. Or $\gamma_j \in \mathfrak{A}$, donc on a $|\gamma_j|_p = 1$ et

$$\left| \sum_{k=0}^{p^h-1} (-1)^k \binom{p^h}{k} z^{p^h-k} \gamma_j^k \right|_p \leq |p|_p < |\pi_p|_p.$$

L'inégalité (25) donne alors que $|\gamma_j^{p^h} - \gamma_j|_p < |\pi_p|_p$. Il suit

$$|\omega - z^{p^h}|_p < |\pi_p|_p < 1. \tag{30}$$

Comme $p \in \mathcal{S}$, on a $\|A\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$ et $|\gamma_j|_p = 1$ donc le corollaire 5.5 entraîne que $\|\frac{1}{z-\gamma_j} A_j\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$. Comme $Frob : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}_p$ est un automorphisme isométrique, on a $\|\frac{1}{z-\gamma_k} A_k\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$.

Maintenant, la proposition 5.8 appliqué à $\frac{1}{z-\gamma_k} A_k$ implique que les matrices

$$\frac{d}{dz}(z^{p^h}) \left(\frac{1}{z-\gamma_k} A_k\right)^{Frob_{z^{p^h}}} \quad \text{et} \quad B_j = \frac{d}{dz}(\omega) \left(\frac{1}{z-\gamma_k} A_k\right)^{Frob_\omega}$$

sont E_p-équivalentes. D'après la construction de $Frob_{z^{p^h}}$, on a

$$\frac{d}{dz}(z^{p^h}) \left(\frac{1}{z-\gamma_k} A_k\right)^{Frob_{z^{p^h}}} = \frac{p^h z^{p^h-1}}{z^{p^h} - \gamma_j} A_j(z^{p^h}).$$

Notons que

$$\frac{d}{dz}(\omega) = p^h [(z - Frob(\gamma_j))^{p^h-1}],$$

et donc

$$B_j = \frac{p^h}{z-\gamma_j} A_j((z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j). \tag{31}$$

D'après (29), il découle que la matrice B et B_j sont E_p-équivalentes. De plus, on a $(z-\gamma_j)B_j = p^h A_j((z-\gamma_j)^{p^h} + \gamma_j)$. Maintenant, si $y \in D_{\gamma_j}$ alors $(y - \gamma_j)^{p^h} + \gamma_j \in D_{\gamma_j}$ et comme A_j est non singulière dans le disque D_{γ_j}, on obtient que $(z-\gamma_j)B_j \in \mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$.

Finalement, montrons que D_∞ est un disque singulier régulier de B. Pour cela, nous posons

$$B_r := \frac{d}{dz}(z^{p^h})(\frac{1}{z^{p^h}}) A_r(z^{p^h}) \tag{32}$$

D'après le lemme 5.3, il existe $H_r \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz} H_r = A H_r - H_r \frac{1}{z} A_r.$$

Posons $Q_r := H_r(z^{p^h})$, alors on a

$$\frac{d}{dz} Q_r = B Q_r - Q_r B_r.$$

Ainsi la matrice B est E_p-équivalente à B_r. D'après le lemme 5.3, A_r n'a pas de pôle à l'infini et le corollaire 5.5 donne que A_r n'a pas de singularité dans le disque D_∞. Ainsi le disque D_∞ est non-singulier pour zB_r, autrement dit $zB_r \in \mathcal{M}_n(E(D_\infty))$. D'après le lemme 5.3, les matrices A et $\frac{1}{z-\gamma_j} A_j$ sont $\mathbb{Q}(z)(\gamma_j)$-équivalentes. Puisque $\frac{1}{z-\gamma_j} A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(z)(\gamma_j))$, à la suit de la remarque 3.7, il existe $W_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p(z))$ telle que W_j n'a pas de pôle en γ_j, $C_j = W_j(\gamma_j)$ et $\frac{1}{z-\gamma_j}A_j$ et $\frac{1}{z-\gamma_j}W_j$ sont $\mathbb{C}_p(z)$-équivalentes. D'où, B_j et $R_j = \frac{p^h}{z-\gamma_j}W_j((z-\gamma_j)^{p^h}+\gamma_j)$ sont E_p-équivalentes. Montrons que W_j n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j}. En effet, soit $P(z)/Q(z) \in \mathbb{C}_p(z)$ une entrée de W_j. Écrivons $P(z) = \sum_{i=0}^{r} a_i(z-\gamma_j)^i$, $Q(z) = \sum_{l=0}^{s} b_l(z-\gamma_j)^l \in \mathbb{C}_p[z-\gamma_j]$. Soient $a \in \{a_0, \dots, a_r\}$ tel que $|a| = \max\{|a_0|, \dots, |a_r|\}$ et $P_1(z) = \frac{1}{a}P(z)$. Notons que $|P_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. Soient $b \in \{b_0, \dots, b_s\}$ tel que $|b| = \max\{|b_0|, \dots, |b_s|\}$ et $Q_1(z) = \frac{1}{b}Q(z)$. Notons que $|Q_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. Alors $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a}{b}\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ et $|P_1(z)/Q_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. Notons que les fractions rationnelles $\frac{P(z)}{Q(z)}$ et $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ ont les mêmes pôles. Par conséquent, γ_j n'est pas un pôle de $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$. Alors, $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \sum_{n\geq 0} c_n(z-\gamma_j)^n$. Puisque $|P_1(z)/Q_1(z)|_{\mathcal{G}} = 1$ alors, pour tout $n \geq 0$, $|c_n| \leq 1$. Ainsi, la réduction de $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ est égale à $\sum_{n\geq 0}\overline{c_n}(z-\overline{\gamma_j})^n$. D'où, $\overline{\gamma_j}$ n'est pas un pôle de la réduction de la fraction rationnelle $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$. Par conséquent, la fraction rationnelle $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j} et ainsi, la fraction rationnelle $\frac{P_(z)}{Q_(z)}$ n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j}. Par conséquent, la matrice W_j n'a pas de pôle dans le disque D_{γ_j}. Alors, $(z-\gamma_j)R_j \in \mathcal{M}_n(E(D_{\gamma_j}))$. Ainsi, d'après le théorème 5.1, la matrice B est E_p-équivalente à

$$G = \frac{\gamma_1+m}{(z+m)(z-\gamma_1)}F_1 + \cdots + \frac{\gamma_{r-1}+m}{(z+m)(z-\gamma_{r-1})}F_{r-1} - \frac{1}{z+m}F_r,$$

où $F_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}_p)$ pour $j \in \{1, \dots, r\}$ telles que pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$, F_j est semblable à $[(z-\gamma_j)R_j](\gamma_j)$, F_r est semblable à $[-zR_r](\infty)$ et $\sum F_i$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$. De plus, il suit que pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$, $[(z-\gamma_j)R_j](\gamma_j) = p^hC_j$ et de (32) que $[-zR_r](\infty) = -p^hC_r$. Raison pour laquelle F_j est semblable à p^hC_j pour $j \in \{1, \dots, r-1\}$ et F_r semblable à $-p^hC_r$.

Démonstration du point **(ii)**. Rappelons que $\kappa : \mathbb{C}_p \to \mathbb{C}$ est un isomorphisme de corps. En appliquant l'isomorphisme κ, il vient

$$\begin{aligned} G^\kappa &= \frac{\kappa(\gamma_1)+m}{(z+m)(z-\kappa(\gamma_1))}F_1^\kappa + \cdots + \frac{\kappa(\gamma_{r-1})+m}{(z+m)(z-\kappa(\gamma_{r-1}))}F_{r-1}^\kappa - \frac{1}{z+m}F_r^\kappa \\ &= -\frac{1}{z+m}\left(\sum_{j=1}^{r} F_j^\kappa\right) + \sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{z-\kappa(\gamma_j)}F_j^\kappa. \end{aligned}$$

Notons que la matrice G^κ est à coefficients dans $\mathbb{C}(z)$ et comme $F_j^\kappa \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice G^κ est fuchsienne, avec $\gamma_0 = -m, \kappa(\gamma_1), \dots, \kappa(\gamma_{r-1})$ et l'infini comme singularités.

Montrons que la matrice de monodromie de G^κ en γ_0 est l'identité. En effet, comme $\sum_{j=0}^{r} F_j$ est une matrice diagonale à coefficients dans $\mathbb{Z}$, la matrice $[(z+m)G^\kappa](-m) = -\sum_{j=1}^{r} F_j^\kappa$ est également diagonale et à coefficients entiers, puisque tout homomorphisme de corps de caractéristique zéro fixe $\mathbb{Z}$. Ainsi, les exposants de G^κ en γ_0 sont des entiers. Donc, d'après le lemme 3.6, il existe une matrice $C_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que la matrice de monodromie locale de G^κ en γ_0 est conjuguée à $\exp(2\pi i C_0)$ et telle que l'ensemble des valeurs propres de C_0 est réduit à un élément, $\{s\}$, où s est entier. Écrivons $C_0 = P(D+N)P^{-1}$, où $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, D est diagonale et N est nilpotente. Le théorème 8.6 de [14, Chap. III] nous assure que $TP(X^D X^N)P^{-1}$ est une solution de G^κ, où $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}((z+m)))$. Mais, d'après la remarque 5.2, il suit que G^κ a une basse de solutions à coefficients dans $\mathbb{C}((z+m))$. Donc, $X^N = Id_n$. Ainsi, $C_0 = PDP^{-1}$, $D = sId_n$ et $\exp(2\pi i C_0)$ est conjuguée à Id_n. Par conséquent, la matrice de monodromie locale de G^κ en γ_0 est conjuguée à Id_n. Cela montre que la matrice de monodromie locale de G^κ en γ_0 est l'identité.

Notons que la matrice $(z-\kappa(\gamma_j))G^\kappa$ n'a pas de pôle en $\kappa(\gamma_j)$ et que $[(z-\kappa(\gamma_j))G^\kappa](\gamma_j) = F_j^\kappa$. Montrons que les valeurs propres de F_j^κ sont les valeurs propres de C_j multipliées par p^h. En effet, comme remarqué précédemment, F_j est semblable à $p^h C_j$. Écrivons $C_j = UMU^{-1}$, où M est la forme de Jordan de C_j et $U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p)$. On note que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$. En effet, d'après le lemme 5.3, les valeurs propres de $A_j(\gamma_j)$ sont les exposants de L en γ_j qui sont des nombres rationnels et donc la remarque 5.10 implique que les valeurs propres de C_j sont des nombres rationnels. Ainsi, F_j est semblable à $p^h M$ et, comme $p^h M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, on obtient que F_j^κ est semblable à $p^h M$. Notre affirmation en découle.

La remarque 5.10 entraîne que les valeurs propres de $p^h C_j$ sont de la forme $p^h\beta + s$, où s est un entier et β une valeur propre de $A_j(\gamma_j)$. Montrons que deux valeurs propres distinctes de $p^h C_j$ ne diffèrent pas d'un entier. En effet, supposons que $\lambda' - \beta' \in \mathbb{Z}$, où λ' et β' sont deux valeurs propres de $p^h C_j$. Alors $\lambda' = p^h\lambda$ et $\beta' = p^h\beta$, où λ et β sont deux valeurs propres de C_j. Alors, $p^h(\lambda-\beta) \in \mathbb{Z}$. D'après le premier pas, il existe des entiers m_λ et m_β, et λ_1 et β_1 des exposants de L en γ_j, tels que $\lambda = \lambda_1 + m_\lambda$ et $\beta = \beta_1 + m_\beta$. Alors $p^h(\lambda_1-\beta_1) \in \mathbb{Z}$. Il découle de (26) que $p^h\lambda_1 \equiv \lambda_1 \mod \mathbb{Z}$ et $p^h\beta_1 \equiv \beta_1 \mod \mathbb{Z}$. Ainsi, $p^h(\lambda_1-\beta_1) \equiv \lambda_1-\beta_1 \mod \mathbb{Z}$. Mais comme $p^h(\lambda_1-\beta_1) \in \mathbb{Z}$, on obtient que $\lambda_1 - \beta_1 \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $\lambda - \beta = (\lambda_1-\beta_1) - (m_\beta - m_\lambda) \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, d'après le premier pas, $\lambda = \beta$ et ainsi $\lambda' = \beta'$. Alors, on a :

(**a′**) deux valeurs propres de $p^h C_j$ distinctes ne diffèrent pas d'un entier.

Ainsi, deux valeurs propres différentes de F_j^κ ne diffèrent pas d'un entier. D'après la proposition 3.12, le lemme 3.42 et le théorème 5.1 de [21], la matrice de monodromie locale de G^κ en $\kappa(\gamma_j)$, $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$, est conjuguée à $\exp(2\pi i F_j^\kappa)$. Comme F_j^κ est semblable à $p^h C_j$, on obtient que les matrices $\exp(2\pi i F_j^\kappa)$ et $\exp(2\pi i p^h C_j)$ sont conjuguées. Cela donne que $M(G^\kappa, \kappa(\gamma_j))$ est conjuguée à $\exp(2\pi i p^h C_j)$. D'après le deuxième pas, $\exp(2\pi i p^h C_j)$ et $\exp(2\pi i C_j)$

sont conjuguées et d'après le premier pas, les matrices $\exp(2\pi i p^h C_j)$ et $M(A,\gamma_j)$ sont conjuguées. Donc $M(G^\kappa,\kappa(\gamma_j))$ est conjuguée à $M(A,\gamma_j)$.

Notons que $\{\kappa(\gamma_1),\dots,\kappa(\gamma_{r-1})\}=\{\gamma_1,\dots,\gamma_{r-1}\}$. Comme le groupe de monodromie de A est rigide, les groupes de monodromie de A et G^κ sont conjugués.

Démonstration du point **(iii)**. D'après ce qui précède, il existe $U\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M(A,\gamma_j)=UM(G^\kappa,\kappa(\gamma_j))U^{-1}$ pour $1\le j\le r$. D'après la proposition 3.4, il existe $H_1\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}(z))$ telle que

$$\frac{d}{dz}H_1 = AH_1 - H_1G^\kappa.$$

On pose $H=H_1^{\kappa^{-1}}$, ainsi $H\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}_p(z))\subset \mathrm{GL}_n(E_p)$ et comme $\frac{d}{dz}$ et κ^{-1} commutent, on a

$$\frac{d}{dz}H = A^{\kappa^{-1}}H - HG.$$

Remarquons que $A^{\kappa^{-1}}=A$, puisque A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{Q}(z)$. Par conséquent, A et G sont E_p-équivalentes. D'après le point **(ii)**, G est E_p-équivalentes à B, alors par transitivité on obtient que A et B sont E_p-équivalentes. $\square$

Remarque 5.11. — La preuve précédente montre en réalité que pour tout entier $h'\ge 1$ tel que pour tout $p\in\mathcal{S}$ les équations (25) et (26) sont vérifiées, alors L a une structure de Frobenius forte de période h'.

6. L'opérateur hypergéométrique généralisé

Dans cette partie, nous étudions les structures de Frobenius forte des opérateurs hypergéométriques généralisés. Nous démontrons notamment le théorème 1.2.

Considérons l'opérateur différentiel hypergéométrique défini par

$$\mathcal{H}(\underline{\alpha},\underline{\beta}) : -z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n)y+(\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1), \tag{33}$$

où $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ sont des nombres rationnels tels que $\alpha_i-\beta_j\notin\mathbb{Z}$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Cet opérateur est fuchsien et a 1, 0 et l'infini comme seules singularités. Les exposants à l'infini sont $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, les exposants en 0 sont $1-\beta_1,\dots,1-\beta_n$, et les exposants en 1 sont $0,1,\dots,n-2,-1+\sum(\beta_i-\alpha_i)$. Nous rappelons la définition suivante (voir [6]).

Définition 6.1. — Supposons que $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n\in\mathbb{C}^*$ vérifient $a_i\neq b_j$ pour tout $i,j\in\{1,\dots,n\}$. Un groupe hypergéométrique associé aux paramètres $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ engendré par des matrices $h_0, h_1, h_\infty \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que h_1 est une réflexion et

$$h_\infty h_1 h_0 = Id,$$
$$det(z - h_\infty) = \prod (z - a_i),$$
$$det(z - h_0^{-1}) = \prod (z - b_j).$$

D'après un résultat de Levelt (voir le théorème 3.5 de [6]), un groupe hypergéometrique tel que $a_i \neq b_j$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ est rigide. D'autre part, il est connu que le groupe de monodromie de l'opérateur hypergéométrique $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est un groupe hypergéométrique associé aux paramètres $a_i = exp(2\pi i \alpha_i)$ et $b_i = exp(2\pi i \beta_i)$ (voir [6]). Ainsi, le groupe de monodromie de (33) est rigide. Donc, grâce au théorème 3.8, $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ a une structure de Frobenius forte pour presque tout nombre premier p. En appliquant le théorème 3.8 on a le théorème suivant.

Théorème 6.2. — *Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers p tels que $|\alpha_i|_p, |\beta_j|_p \leq 1$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Alors, pour tout $p \in \mathcal{S}$, l'opérateur hypergéométrique $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ possède une structure de Frobenius forte de période $h = \varphi(d_{\alpha,\beta})$, où φ est l'indicatrice d'Euler et $d_{\alpha,\beta}$ est le plus petit commun multiple des dénominateurs de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$.*

Démonstration. — En développant l'équation (33), on obtient

$$(1 - z)\delta^n + [S_{n,1}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,1}(\underline{\alpha})]\delta^{n-1} + \cdots + S_{n,n}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,n}(\underline{\alpha}),$$

où $\underline{\beta} - 1 = (\beta_1 - 1, \ldots, \beta_n - 1)$ et $S_{n,k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} X_1 \cdots X_{i_k}$.

En écrivant cette équation en fonction de l'opérateur $\frac{d}{dz}$, il vient

$$L_{\underline{\alpha},\underline{\beta}} := a_0(z) \frac{d}{dz^n} y + a_1(z) \frac{d}{dz^{n-1}} y + \cdots + a_n(z).$$

Soit A la matrice compagnon de ce nouvel opérateur. D'après l'équation (19), on a

$$\begin{aligned}\big(S_{n,n}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,n}(\underline{\alpha}), \ldots, S_{n,1}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,1}(\underline{\alpha}), 1 - z\big)\, G_{n+1}^{-1}\\ = (a_n(z), \ldots, a_1(z), a_0(z)).\end{aligned}$$

Ainsi $a_0(z) = (1 - z)z^n$ et le discriminant de $a_0(z)$ est 1. Dans ce cas, on obtient que $\mathfrak{A}_1 = \{1\}$, alors que l'ensemble $\mathfrak{A}_2$ est donné par les dénominateurs des α_i, des $1 - \beta_j$ et le dénominateur de $-1 + \sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \alpha_i)$. Finalement $\mathfrak{A}_3 = \left\{ \frac{a_i(z)}{a_0(z)} \right\}_{1 \leq i \leq n}$. Comme $p \in \mathcal{S}$, on obtient que pour tout élément de $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ est de norme p-adique est égale à 1. A présent, montrons que, pour tout $p \in \mathcal{S}$, $\left| \frac{a_i(z)}{a_0(z)} \right|_{\mathcal{G}} \leq 1$. En effet, si $p \in \mathcal{S}$, alors

$$\big\| \big(S_{n,n}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,n}(\underline{\alpha}), \ldots, S_{n,1}(\underline{\beta} - 1) - zS_{n,1}(\underline{\alpha}), 1 - z\big) \big\|_{\mathcal{G},p} \leq 1.$$

On vérifie aisément que, pour tout nombre premier p, $\|G_{n+1}^{-1}\|_{\mathcal{G},p} \leq 1$. En particulier, il en est de même pour $p \in \mathcal{S}$. Ainsi, la norme de Gauss du vecteur $(a_n(z), \ldots, a_1(z), a_0(z))$ est inférieure ou égale à 1 pour tout $p \in \mathcal{S}$. D'autre part, pour tout $p \in \mathcal{S}$, $|a_0(z)|_{\mathcal{G}} = 1$. On obtient donc que $\left|\frac{a_i(z)}{a_0(z)}\right|_{\mathcal{G}} \leq 1$, pour tout $p \in \mathcal{S}$.

Finalement, comme $|\alpha_i|_p, |\beta_j|_p \leq 1$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, alors p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$. Ainsi, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})} \equiv 1 \mod d_{\alpha,\beta}$$
$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})} \equiv 1 \mod d_{\alpha,\beta}$$

et donc

$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\alpha_i \equiv \alpha_i \mod \mathbb{Z}$$
$$p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\beta_j \equiv \beta_j \mod \mathbb{Z}.$$

Il suit que

$$\begin{gathered} p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\alpha_i \equiv \alpha_i \mod \mathbb{Z}, \\ p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}(1-\beta_j) \equiv 1-\beta_j \mod \mathbb{Z} \qquad \text{et} \\ p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}\left(-1+\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\right) \equiv -1+\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i) \mod \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

De plus, ici les zéros de $a_0(z)$ sont $\gamma_1 = 0$ et $\gamma_2 = 1$, d'où $|\gamma_i^{p^{\varphi(d_{\alpha,\beta})}} - \gamma_i| = 0 < |\pi_p|$ pour $i \in \{1, 2\}$. Donc, d'après la remarque 5.11, pour tout $p \in \mathcal{S}$ l'opérateur différentiel $L_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ possède une structure de Frobenius forte de période $\varphi(d_{\alpha,\beta})$. Ainsi, pour tout $p \in \mathcal{S}$, l'opérateur différentiel $\mathcal{H}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ a une structure de Frobenius forte de période $\varphi(d_{\alpha,\beta})$. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 1.2.

Démonstration du théorème 1.2. — Soit $p \in \mathcal{S}$. Alors p ne divise pas $d_{\alpha,\beta}$, de sorte que $|\alpha_i|_p, |\beta_j|_p \leq 1$ pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. D'après le théorème 6.2, on obtient que

$$-z(\delta+\alpha_1)\cdots(\delta+\alpha_n) + (\delta+\beta_1-1)\cdots(\delta+\beta_n-1)$$

possède une structure de Frobenius forte pour p de période h. Par hypothèse, on a également ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[z]]$. Le théorème 2.6 implique donc que la réduction de ${}_nF_{n-1}(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, z)$ modulo p est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{n^2h}. Enfin, la démonstration du théorème 6.2 montre que l'on peut prendre $h = \phi(d_{\alpha,\beta})$. □

Pur conclure, nous appliquons le théorème 1.2 aux deux séries hypergéométriques $f_2(z) = {}_3F_2\left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}; \frac{1}{3}, 1, 1, z\right)$ et $f_3(z) = {}_2F_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}; \frac{5}{12}, 1, z\right)$.

À ce jour, on ne sait toujours pas si $f_2(z)$ est une diagonale de fraction rationnelle et on ne peut donc pas appliquer les résultats de [1]. D'autre part, les résultats de [3] ne s'appliquent pas non plus à la série $f_2(z)$ (voir [3, Example 8.6]). Notons que $f_2(z)$ est globalement bornée puisqu'on vérifie aisément que $f_2(27^2 z) \in \mathbb{Z}[[z]]$. Ainsi, $f_2(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$ pour tout $p \neq 3$. Notons que dans ce cas, on a $d_{\alpha,\beta} = 9$, où $\alpha = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$ et $\beta = \left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$. Le théorème 1.2 nous garanti donc que, pour tout nombre premier $p \neq 3$, $f_{2|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{54}.

On sait que la série $f_3(z)$ n'est pas la diagonale d'une fraction rationnelle car elle n'est pas globalement bornée (voir proposition 1 de [10]). Ainsi, on ne peut pas non plus lui appliquer les résultats de [1]. D'autre part, les résultats de [3] ne peuvent pas lui être appliqués non plus (voir la section 8 de [3]). Par contre, le théorème 1.2 s'applique. En effet, soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des nombres premiers tels que $f_3(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$. Cet ensemble est infini car si p est un nombre premier congruent à 1 modulo 12, alors $p \in \mathcal{S}$. Dans ce cas, on vérifie que $d_{\alpha,\beta} = 12$, où $\alpha = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ et $\beta = \left(\frac{5}{12}, 1, \right)$. D'après le théorème 1.2, si $p > 3$ appartient à $\mathcal{S}$, alors $f_{3|p}$ est algébrique sur $\mathbb{F}_p(z)$ de degré majoré par p^{16}.

Remerciements. — L'auteur tient à remercier chaleureusement Gilles Christol pour ses commentaires sur une version préliminaire de cet article. Il remercie également l'arbitre pour sa lecture attentive ainsi que ses différentes remarques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] B. Adamczewski & J. P. Bell – « Diagonalization and rationalization of algebraic Laurent series », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **46** (2013), p. 963–1004.

[2] B. Adamczewski, J. P. Bell & E. Delaygue – « Algebraic independence of G-functions and congruences “à la Lucas” », arXiv1603.04187 [math.NT].

[3] ———, « Algebraic independence of G-functions and congruences “à la Lucas” », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* **52** (2019), p. 515–559.

[4] B. Adamczewski & E. Delaygue – 2019, communication personnelle.

[5] Y. André – *G-functions and geometry*, Aspects of Math. **E**, no. 13, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1989.

[6] F. Beukers & G. Heckeman – « Monodromy for the hypergeometric fonction ${}_nF_{n-1}$ », *Invent. Math.* **95** (1989), p. 325–354.

[7] G. Christol – « Décomposition des matrices en facteurs singuliers. Applications aux équations différentielles », *Groupe de travail d'analyse ultramétrique* **7–8** (1979–1981), no. 5, p. 1–17.

[8] ———, *Modules différentielles et équations différentielles p-adiques*, Queen's papers in pure and applied mathematics, no. 66, 1983.

[9] ______, « Fonctions et éléments algébriques », *Pacific J. of Math.* **125** (1986), p. 1–37.

[10] ______, « Fonctions hypergéométriques bornées », *Groupe de travail d'analyse ultramétrique* **14** (1986–1987), no. 8, p. 1–16.

[11] R. Crew – « Rigidity and Frobenius structure », *Documenta Mathematica* **22** (2017), p. 287–296.

[12] P. Deligne – « Théorie de Hodge : II », *Publications mathématiques de l'I.H.É.S* **40** (1971), p. 5–57.

[13] ______, « Intégration sur un cycle évanescent », *Invent. Math.* **76** (1983), p. 129–143.

[14] B. Dwork, G. Gerotto & F. Sullivan – *A introduction to G-functions*, Annal of Mathematics Studies, no. 133, Princeton University Press, 1994.

[15] B. M. Dwork – « On p-adic differential equations I. The Frobenius strcuture of differential equations », *Bull. Soc. Math. France, Mém.* **39–40** (1974), p. 27–37.

[16] ______, *Lectures on p-adic differential equations*, Grundlehren der Math. Wissenschaften, no. 253, Springer-Verlag, New York, 1982.

[17] H. Esnault & M. Groechenig – « Rigid connections and F-isocrystals », arXiv :1707.00752 [math.AG].

[18] H. Furstenberg – « Algebraic functions over finite fields », *J. Algebra* **7** (1967), p. 271–277.

[19] N. Katz – *Rigid local systems*, Annals of Math. Studies, no. 139, Univ. Pres, Princeton, 1996.

[20] K. Kedlaya – *p-adic differential equations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 125, University Press, Cambridge, 2010.

[21] M. van der Put & M. F. Singer – *Galois theory of linear equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, no. 328, Springer, 2003.

[22] A. Salinier – « Structure de Frobenius forte de l'équation différentielle hypergéométrique », *C. R. Acad. Sci. Paris* **305** (1987), p. 393–396.

[23] C. Siegel – *Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen*, Abhandlungen Akad. Berlin, 1929.

Bull. Soc. Math. France
149 (3), 2021, p. 479-500

BEHAVIOUR OF SOME HODGE INVARIANTS BY MIDDLE CONVOLUTION

by Nicolas Martin

Abstract. — Following a paper of Dettweiler and Sabbah, this article studies the behaviour of various Hodge invariants by middle additive convolution with a Kummer module. The main result gives the behaviour of Hodge numerical data at infinity. We also give expressions for Hodge numbers and degrees of some Hodge bundles without making the hypothesis of scalar monodromy at infinity, which generalizes the results of Dettweiler and Sabbah.

Résumé (*Comportement d'invariants de Hodge par convolution intermédiaire*). — Suivant les travaux de Dettweiler et Sabbah, cet article s'intéresse au comportement d'invariants de Hodge par convolution intermédiaire additive par un module de Kummer. Le résultat principal précise le comportement de données numériques de Hodge à l'infini. Nous explicitons également le comportement des nombres de Hodge et des degrés de certains fibrés de Hodge sans faire l'hypothèse de monodromie scalaire à l'infini, généralisant ainsi les résultats de Dettweiler et Sabbah.

The initial motivation to study the behaviour of various Hodge invariants by middle additive convolution is Katz's algorithm [5], which makes it possible to reduce a rigid irreducible local system $\mathscr{L}$ on a punctured projective line to a rank-one local system. This algorithm is a successive application of tensor products with a rank-one local system and middle additive convolutions with a Kummer local system and terminates with a rank-one local system. We assume

Texte reçu le 25 août 2018, modifié le 11 octobre 2020, accepté le 16 mars 2021.

Nicolas Martin, Centre de mathématiques Laurent Schwartz, École polytechnique, Université Paris-Saclay, F-91128 Palaiseau cedex, France • *E-mail :* nicolas.martin@polytechnique.edu

Mathematical subject classification (2010). — 14D07, 32G20, 32S40.

Key words and phrases. — D-modules, middle convolution, rigid local system, Katz algorithm, Hodge theory.

doi:10.24033/bsmf.2835

that the monodromy at infinity of $\mathscr{L}$ is scalar, so this property is preserved throughout the algorithm.

If we assume that the eigenvalues of the local monodromies of $\mathscr{L}$ have absolute value 1, such a local system underlies a variation of polarized complex Hodge structure unique up to a shift of the Hodge filtration [12, 1], and this property is preserved at each step of Katz's algorithm. The work of Dettweiler and Sabbah [2] is devoted to computing the behaviour of Hodge invariants at each step of the algorithm.

Our purpose in this article is to complement the previous work of Dettweiler and Sabbah without assuming that the monodromy at infinity is scalar, and to do that we take up the notation introduced in [2, §2.2] and recalled in §1.1. More precisely, our main result consists in making explicit the behaviour of the nearby cycle local Hodge numerical data at infinity by middle additive convolution with the Kummer module $\mathcal{K}_{\lambda_0}$. Considering a regular holonomic $\mathscr{D}_{\mathbb{A}^1}$-module M verifying various assumptions, whose singularities at finite distance belong to $\boldsymbol{x} = \{x_1, \dots, x_r\}$, we denote by $\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M) = M *_{\mathrm{mid}} \mathcal{K}_{\lambda_0}$ this convolution and show the following theorem (see §1.1 for the notation and assumptions). In the following, we set $\gamma_0 \in (0,1)$ such that $\exp(-2i\pi\gamma_0) = \lambda_0 \neq 1$.

Theorem 1. — *Let $\mathscr{M}^{\min}$ be the $\mathscr{D}_{\mathbb{P}^1}$-module minimal extension of M at infinity. Given $\gamma \in [0,1)$ and $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$, we have:*

$$\nu^p_{\infty,\lambda,\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda\lambda_0,\ell}(M) & \text{if } \gamma \in (0, 1-\gamma_0) \\ \nu^{p}_{\infty,\lambda\lambda_0,\ell}(M) & \text{if } \gamma \in (1-\gamma_0, 1) \\ \nu^{p}_{\infty,\lambda_0,\ell+1}(M) & \text{if } \lambda = 1 \\ \nu^{p-1}_{\infty,1,\ell-1}(M) & \text{if } \lambda = \overline{\lambda_0},\ \ell \geq 1 \\ h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}^{\min}) & \text{if } \lambda = \overline{\lambda_0},\ \ell = 0. \end{cases}$$

This result has applications beyond Katz's algorithm since it enables us to give another proof of a theorem of Fedorov [3], which completely determines the Hodge numbers of the variations of Hodge structures corresponding to hypergeometric differential equations; this work is developed in [7].

In addition, we get general expressions for Hodge numbers h^p of the variation and degrees δ^p of some Hodge bundles (recalled in §1.1), which generalize those of Dettweiler and Sabbah. The results are the following.

Theorem 2. — *The local invariants $h^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))$ are given by:*

$$h^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma\in[0,\gamma_0)} \nu^p_{\infty,\lambda}(M) + \sum_{\gamma\in[\gamma_0,1)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}\, M) - \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M).$$

THEOREM 3. — *The global invariants* $\delta^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))$ *are given by:*

$$\delta^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \\ \delta^p(M) + \sum_{\gamma\in[\gamma_0,1)} \nu^p_{\infty,\lambda}(M) - \sum_{i=1}^{r}\Big(\mu^p_{x_i,1}(M) + \sum_{\gamma\in(0,1-\gamma_0)} \mu^{p-1}_{x_i,\lambda}(M)\Big).$$

1. Hodge numerical data and modules of normal crossing type

1.1. Hodge invariants. — In this section, we recall the definition of local and global invariants introduced in [2, §2.2] (all references to [2] are made to the published paper). Let Δ be a disc centred at 0 with coordinate t and let $(V, F^\bullet V, \nabla)$ be a variation of the polarizable Hodge structure on $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ of weight 0. We denote by M the corresponding $\mathscr{D}_\Delta$-module minimal extension at 0.

Nearby cycles. — For $a \in (-1, 0]$ and $\lambda = e^{-2i\pi a}$, the nearby cycle space at the origin $\psi_\lambda(M)$ is equipped with the nilpotent endomorphism $\mathrm{N} = -2i\pi(t\partial_t - a)$, and the Hodge filtration is such that $\mathrm{N}F^p\psi_\lambda(M) \subset F^{p-1}\psi_\lambda(M)$. The monodromy filtration induced by N enables us to define the spaces $\mathrm{P}_\ell\psi_\lambda(M)$ of primitive vectors, equipped with a polarizable Hodge structure (see [9, §3.1.a] for more details). The nearby cycle local Hodge numerical data are defined by

$$\nu^p_{\lambda,\ell}(M) := h^p(\mathrm{P}_\ell\psi_\lambda(M)) = \dim \mathrm{gr}^p_F \mathrm{P}_\ell\psi_\lambda(M),$$

with the relation $\nu^p_\lambda(M) := h^p\psi_\lambda(M) = \sum_{\ell\geq 0}\sum_{k=0}^{\ell} \nu^{p+k}_{\lambda,\ell}(M)$. We set

$$\nu^p_{\lambda,\mathrm{prim}}(M) := \sum_{\ell\geq 0} \nu^p_{\lambda,\ell}(M) \quad\text{and}\quad \nu^p_{\lambda,\mathrm{coprim}}(M) := \sum_{\ell\geq 0} \nu^{p+\ell}_{\lambda,\ell}(M).$$

Vanishing cycles. — For $\lambda \neq 1$, the vanishing cycle space at the origin is given by $\phi_\lambda(M) = \psi_\lambda(M)$ and comes with N and F^p, as before. For $\lambda = 1$, the Hodge filtration on $\phi_1(M)$ is such that $F^p\mathrm{P}_\ell\phi_1(M) = \mathrm{N}(F^p\mathrm{P}_{\ell+1}\psi_1(M))$. Similarly to nearby cycles, the vanishing cycle local Hodge numerical data is defined by

$$\mu^p_{\lambda,\ell}(M) := h^p(\mathrm{P}_\ell\phi_\lambda(M)) = \dim \mathrm{gr}^p_F \mathrm{P}_\ell\phi_\lambda(M).$$

Degrees δ^p. — For a variation of polarizable Hodge structure $(V, F^\bullet V, \nabla)$ on $\mathbb{A}^1 \setminus \boldsymbol{x}$, we denote by M the underlying $\mathscr{D}_{\mathbb{A}^1}$-module minimal extension at each point of $\boldsymbol{x}$. The Deligne extension V^0 of (V, ∇) on $\mathbb{P}^1$ is contained in M, and we set

$$\delta^p(M) = \deg \mathrm{gr}^p_F V^0.$$

In this paper, we are mostly interested in the behaviour of the nearby cycle local Hodge numerical data at infinity by middle convolution with the Kummer module $\mathcal{K}_{\lambda_0} = \mathscr{D}_{\mathbb{A}^1}/\mathscr{D}_{\mathbb{A}^1}\cdot(t\partial_t - \gamma_0)$, with $\gamma_0 \in (0, 1)$ such that $\exp(-2i\pi\gamma_0) = \lambda_0$.

This operation is denoted by MC_{λ_0}. Note that $\mathcal{K}_{\lambda_0}$ is equipped with the trivial Hodge filtration with jump at zero: $F^p\mathcal{K}_{\lambda_0} = \mathcal{K}_{\lambda_0}$ for $p \leq 0$ and $F^p\mathcal{K}_{\lambda_0} = 0$ for $p \geq 1$.

Assumptions. — As in [2, Assumption 1.2.2(1)], we assume in what follows that M is an irreducible regular holonomic $\mathscr{D}_{\mathbb{A}^1}$-module, not isomorphic to $(\mathbb{C}[t], \mathrm{d})$ and not supported on a point.

1.2. Modules of normal crossing type. — Let us consider X a polydisc in $\mathbb{C}^n$ with analytic coordinates $x_1, \dots, x_n$, D the divisor $\{x_1 \cdots x_n = 0\}$ and M a coherent $\mathscr{D}_X$-module of normal crossing type (notion defined in [11, §3.2]). For every $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, we define the sub-object

$$M_\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} \bigcup_{k_i \geq 0} \ker(x_i\partial_{x_i} - \alpha_i)^{k_i}$$

of M. There exists a finite set $A \subset [-1,0)^n$ such that $M_\alpha = 0$ for $\alpha \notin A + \mathbb{Z}^n$. If we set $M^{\mathrm{alg}} := \bigoplus_\alpha M_\alpha$, the natural morphism $M^{\mathrm{alg}} \otimes_{\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\langle\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_n}\rangle} \mathscr{D}_X \to M$ is an isomorphism.

To be precise, only the case $n = 2$ will occur in this paper. In the situations that we will consider, it will be possible to make the above decomposition explicit and then apply the general theory of Hodge modules of M. Saito. For a complete review of the six operations' formalism for $\mathscr{D}$-modules, see [8].

2. Proof of Theorem 1

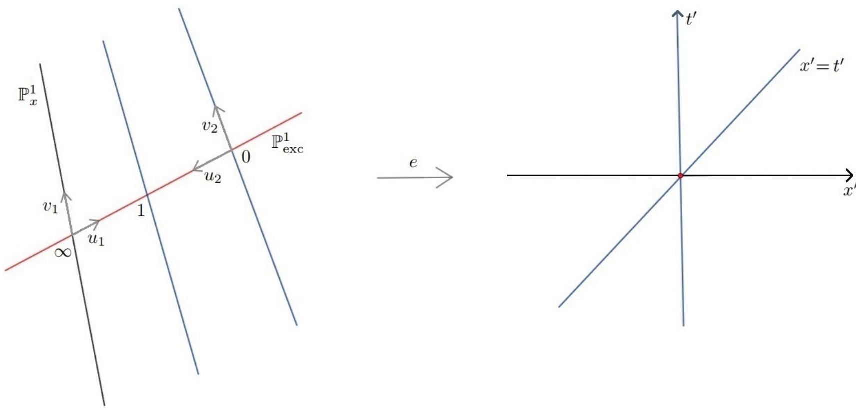
Steps of the proof. — Let us begin by listing the different steps of the proof:

1. We write the middle convolution $\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)$ as an intermediate direct image by the sum map. By changing coordinates and projectivizing, we can consider the case of a proper projection.
2. We use a property of commutation between nearby cycles and projective direct image in the theory of Hodge modules, in order to carry out the local study of a nearby cycle sheaf.
3. To be in a normal crossing situation and use the results of the theory of Hodge modules, we perform a blow-up and make completely explicit the nearby cycle sheaf previously introduced (Lemma 2.3).
4. We take the monodromy and the Hodge filtrations into account, using the degeneration at E_1 of the Hodge to de Rham spectral sequence and the Riemann–Roch theorem (following [2]) to get the expected theorem.

Geometric situation. — Let $s : \mathbb{A}^1_x \times \mathbb{A}^1_y \to \mathbb{A}^1_t$ be the sum map. We can change the coordinates so that s becomes the projection onto the second factor and projectivize to get $\widetilde{s} : \mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_t \to \mathbb{P}^1_t$. We set $x' = 1/x$ and $t' = 1/t$ as coordinates on a neighbourhood of $(\infty, \infty) \in \mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_t$, $M_{\lambda_0} = M \boxtimes \mathcal{K}_{\lambda_0}$ and

$\mathscr{M}_{\lambda_0} = (M_{\lambda_0})_{\min(x'=0)}$ the minimal extension of M_{λ_0} along the divisor $\{x' = 0\}$. A reasoning similar to that of [2, Prop 1.1.10] gives $\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M) = \widetilde{s}_+\mathscr{M}_{\lambda_0}$. With some abuse of notation, we still denote by M the push-forward in the sense of $\mathscr{D}$-modules by the inclusion $\mathbb{A}^1_x \hookrightarrow \mathbb{P}^1_x$ and we denote by M' its restriction to the affine chart centred at ∞. A similar abuse of notation is made for M_{λ_0}.

Let us specify the geometric situation that we will consider in the following, in which we blow up the point (∞,∞) in $\mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_t$. We set $X = \mathrm{Bl}_{(\infty,\infty)}(\mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_t)$, $e : X \to \mathbb{P}^1_x \times \mathbb{P}^1_t$ and $j : \mathbb{A}^1_x \times \mathbb{A}^1_t \hookrightarrow X$ the natural inclusion. There are two charts of the blow-up: one given by coordinates $(u_1, v_1) \mapsto (t' = u_1v_1, x' = v_1)$ and the other one by $(u_2, v_2) \mapsto (t' = v_2, x' = u_2v_2)$. The strict transform of the line $\{t' = 0\}$ is called $\mathbb{P}^1_x$, and the exceptional divisor is called $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$. We denote by $0 \in \mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ the point given by $u_2 = 0$, $1 \in \mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ the point given by $u_2 = 1$ and $\infty \in \mathbb{P}^1_x \cap \mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$. We have the following picture:



On $\mathbb{A}^1_x \times \mathbb{A}^1_t$, we have

$$\begin{aligned} M_{\lambda_0} = M \boxtimes \mathcal{K}_{\lambda_0} &= M[t] \otimes \left(\mathbb{C}[x,t,(t-x)^{-1}], \mathrm{d}_{(x,t)} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}(t-x)}{t-x}\right) \\ &= \left(M[t,(t-x)^{-1}], \nabla_{(x,t)} + \gamma_0 \frac{\mathrm{d}(t-x)}{t-x}\right). \end{aligned}$$

On the affine chart centred at (∞,∞), we have

$$M_{\lambda_0} = \left(M'[t', t'^{-1}, (x'-t')^{-1}], \nabla_{(x',t')} + \gamma_0\left(-\frac{\mathrm{d}x'}{x'} - \frac{\mathrm{d}t'}{t'} + \frac{\mathrm{d}(x'-t')}{x'-t'}\right)\right).$$

Notation 2.1. — Let us set $N_{\lambda_0} = e^+M_{\lambda_0}$, $\mathscr{N}_{\lambda_0} = (N_{\lambda_0})_{\min(x'\circ e=0)}$ and $T^\lambda = \psi_{t'\circ e,\lambda}\mathscr{N}_{\lambda_0}$ equipped with a nilpotent endomorphism denoted by N.

Lemma 2.2. — $\mathscr{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}] = e_+\mathscr{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$.

Proof. — By definition of the minimal extension, $\mathscr{N}_{\lambda_0}$ is the image of the map $j_\dagger j^+ N_{\lambda_0} \longrightarrow j_+ j^+ N_{\lambda_0}$. For $i \neq 0$, $H^i e_+ \mathscr{N}_{\lambda_0}$ is supported on (∞, ∞), thereby $H^i e_+ \mathscr{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}] = 0$. As the kernel of $H^0 e_+ \mathscr{N}_{\lambda_0} \longrightarrow M_{\lambda_0}$ is similarly supported on (∞, ∞), we deduce that $e_+ \mathscr{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ is a submodule of M_{λ_0}.

We have $e_+ j_+ j^+ N_{\lambda_0} = (e \circ j)_+ (e \circ j)^+ M_{\lambda_0}$ and, as e is proper, we can write $e_+ j_\dagger j^+ N_{\lambda_0} = e_\dagger j_\dagger j^+ N_{\lambda_0} = (e \circ j)_\dagger (e \circ j)^+ M_{\lambda_0}$. Then $\mathscr{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ is the image of the map $e_+ j_\dagger j^+ N_{\lambda_0}[t'^{-1}] \longrightarrow e_+ j_+ j^+ N_{\lambda_0}[t'^{-1}]$. Outside of (∞, ∞), $\mathscr{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ and $e_+ \mathscr{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ are submodules of M_{λ_0}, which are isomorphic. Now, we can consider the intersection of these two submodules of M_{λ_0}, with two morphisms from the intersection of each of them. The kernel and the cokernel of these two morphisms are a priori supported on (∞, ∞), but as t' is invertible, they are zero. Therefore, $\mathscr{M}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ and $e_+ \mathscr{N}_{\lambda_0}[t'^{-1}]$ are isomorphic. □

Let us fix $\gamma \in [0, 1)$ and $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$. As $\widetilde{s}$ and e are proper, the nearby cycle functor is compatible with $(\widetilde{s} \circ e)_+$ [10, Prop 3.3.17], so we get

$$\psi_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \psi_{t',\lambda}(\widetilde{s}_+ \mathscr{M}_{\lambda_0}) = \psi_{t',\lambda}(\widetilde{s}_+ e_+ \mathscr{N}_{\lambda_0}) = \widetilde{s}_+ e_+ T^\lambda.$$

Lemma 2.3. — *We set $(M')_\gamma = \ker(x'\partial_{x'} - \gamma)^r$ acting on $\psi_{x'} M'$ for $r \gg 0$ and $(M')^\lambda = (M')_\gamma[x', x'^{-1}]$. Let us set*

$$T_0^\lambda = \left((M')^{\lambda\lambda_0}[(x'-1)^{-1}], \nabla + \gamma_0 \left(-\frac{\mathrm{d}x'}{x'} + \frac{\mathrm{d}x'}{x'-1}\right)\right)$$

in the chart $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}} \setminus \{\infty\}$ (with the coordinate x' instead of u_2) and denote similarly its meromorphic extension at infinity, with the action of the nilpotent endomorphism $x'\partial_{x'} - (\gamma + \gamma_0)$. For the extension by zero (instead of meromorphic), we use the notation $(T_0^\lambda)'$. Then:

(Case 1) *For $\lambda \notin \{1, \overline{\lambda_0}\}$, T^λ is supported on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ and $T^\lambda = T_0^\lambda$.*

(Case 2) *For $\lambda = 1$, T^λ is supported on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ and is isomorphic to the minimal extension of T_0^1 at $x' = 0$.*

(Case 3) *For $\lambda = \overline{\lambda_0}$, T^λ is supported on $\mathbb{P}^1_x \cup \mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ and comes in an exact sequence*

$$0 \to (T_0^{\overline{\lambda_0}})' \to T^\lambda \to T_1 \to 0$$

compatible with the nilpotent endomorphism, where T_1 is supported on $\mathbb{P}^1_x$ and is isomorphic to the meromorphic extension of M at infinity with the action by 0 of the nilpotent endomorphism.

Proof. — We make a local study of the problem, reasoning in the three following charts:

(i) in the chart (u_2, v_2), called *Chart 1*;
(ii) in the neighbourhood of $\mathbb{P}^1_x \setminus \{\infty\}$, called *Chart 2*;
(iii) in the neighbourhood of ∞, called *Chart 3*.

The cases of Charts 1 and 2 do not contain any significant problem and are treated in [6, 4.2.4]. In Chart 1, we find

$$\psi_{v_2,\lambda}\mathscr{N}_{\lambda_0} = \begin{cases} T_0^\lambda & \text{if } \lambda \neq 1 \\ (T_0^\lambda)_{\min(\{0\})} & \text{if } \lambda = 1. \end{cases}$$

In Chart 2, in which one can use the coordinates (x, t'), we find

$$\psi_{t',\lambda}\mathscr{M}_{\lambda_0} = \begin{cases} 0 & \text{if } \lambda \neq \overline{\lambda_0} \\ M & \text{if } \lambda = \overline{\lambda_0}. \end{cases}$$

Let us make the case of Chart 3 precise. For $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$, we set

$$(N_{\lambda_0})_{\boldsymbol{\alpha}} = \bigcup_{r_1 \geq 0} \ker(u_1\partial_{u_1} - \alpha_1)^{r_1} \cap \bigcup_{r_2 \geq 0} \ker(v_1\partial_{v_1} - \alpha_2)^{r_2}.$$

By writing the expression of the connection in coordinates (u_1, v_1), we get that $(N_{\lambda_0})_{(-\gamma_0,\alpha-\gamma_0)}$ can be identified with $(M')_\alpha$ with actions of $u_1\partial_{u_1}$ and $v_1\partial_{v_1}$ respectively expressed as $-\gamma_0\mathrm{Id}$ and $x'\partial_{x'} - \gamma_0\mathrm{Id}$. Here, $\psi_{t'\circ e,\lambda}\mathscr{N}_{\lambda_0} = \psi_{g,\lambda}\mathscr{N}_{\lambda_0}$, where $g = u_1v_1$, and we are in the situation of a calculation of nearby cycles of a coherent $\mathbb{C}[u_1, v_1]\langle\partial_{u_1}, \partial_{v_1}\rangle$-module of normal crossing type along $D = \{g = 0\}$, where $g = u_1v_1$ is a monomial function. The general question is developed in [11, §3.a] (see also [9, §13.3]); let us make it precise in the particular case at hand. We consider the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i_g"] \arrow[dr, "g"'] & X \times \mathbb{C}_z \arrow[d, "p_2"] \\ & \mathbb{C}_z \end{tikzcd}$$

where i_g is the graph embedding.

Then we can see that $(i_g)_+\mathscr{N}_{\lambda_0} = \mathscr{N}_{\lambda_0}[\partial_z] = \bigoplus_{k \geq 0} (\mathscr{N}_{\lambda_0} \otimes \partial_z^k)$ is a left $\mathbb{C}[u_1, v_1, z]\langle\partial_{u_1}, \partial_{v_1}, \partial_z\rangle$-module equipped with the following actions:

(i) action of $\mathbb{C}[u_1, v_1]$: $f(u_1, v_1) \cdot (m \otimes \partial_z^k) = (f(u_1, v_1)m) \otimes \partial_z^k$.
(ii) action of ∂_z : $\partial_z(m \otimes \partial_z^k) = m \otimes \partial_z^{k+1}$.
(iii) action of ∂_{u_1} : $\partial_{u_1}(m \otimes \partial_z^k) = (\partial_{u_1}m) \otimes \partial_z^k - v_1m \otimes \partial_z^{k+1}$.
(iv) action of ∂_{v_1} : $\partial_{v_1}(m \otimes \partial_z^k) = (\partial_{v_1}m) \otimes \partial_z^k - u_1m \otimes \partial_z^{k+1}$.
(v) action of z : $z \cdot (m \otimes \partial_z^k) = u_1v_1m \otimes \partial_z^k - km \otimes \partial_z^{k-1}$.

Let us denote by S_u (or S_v) the operator defined by $S_u(m\otimes\partial_z^k) = (u_1\partial_{u_1}m)\otimes\partial_z^k$ (or $S_v(m \otimes \partial_z^k) = (v_1\partial_{v_1}m) \otimes \partial_z^k$). With $E = z\partial_z$, we get the relations

$$u_1\partial_{u_1}(m \otimes \partial_z^k) = (S_u - E - (k+1))(m \otimes \partial_z^k)$$

and

$$v_1\partial_{v_1}(m \otimes \partial_z^k) = (S_v - E - (k+1))(m \otimes \partial_z^k).$$

Letting $V^\bullet(\mathscr{N}_{\lambda_0}[\partial_z])$ denote the V-filtration with respect to z, we have $T = \psi_{g,\lambda}\mathscr{N}_{\lambda_0} = \mathrm{gr}_V^\gamma(\mathscr{N}_{\lambda_0}[\partial_z])$. We have the decompositions $\mathscr{N}_{\lambda_0}^{\mathrm{alg}} = \bigoplus_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^2}(\mathscr{N}_{\lambda_0})_{\boldsymbol{\alpha}}$ and $(T^\lambda)^{\mathrm{alg}} = \bigoplus_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2} T_{\boldsymbol{\beta}}$, and by arguing in a way similar to [9, Lemma 13.2.26] (with left modules), we show that the only indices $\boldsymbol{\beta}$ that appear are those such that $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} + (\gamma + k + 1)(1,1)$ for $\boldsymbol{\alpha}$ in the decomposition of $\mathscr{N}_{\lambda_0}^{\mathrm{alg}}$ and $k \in \mathbb{Z}$. In particular, we cannot have $\alpha_2 \in \mathbb{Z}$ and having a minimal extension along $\{v_1 = 0\}$ does not play any role here. In other words, we can identify in this part $\mathscr{N}_{\lambda_0}$ and N_{λ_0}.

More precisely, for $\beta_1, \beta_2 \geq -1$, from [11, Th. 3.3] (or [9, Cor. 13.2.32]) we deduce the following expressions for $T_{\boldsymbol{\beta}}$:

$$T_{\boldsymbol{\beta}} = \begin{cases} 0 & \text{if } \beta_1 \neq -1,\ \beta_2 \neq -1 \\ \mathrm{coker}(S_u - E \in \mathrm{End}((N_{\lambda_0})_{\gamma,\beta_2+\gamma+1}[E])) & \text{if } \beta_1 = -1,\ \beta_2 \neq -1 \\ \mathrm{coker}(S_v - E \in \mathrm{End}((N_{\lambda_0})_{\beta_1+\gamma+1,\gamma}[E])) & \text{if } \beta_1 \neq -1,\ \beta_2 = -1 \\ \mathrm{coker}((S_u - E)(S_v - E) \in \mathrm{End}((N_{\lambda_0})_{\gamma,\gamma}[E])) & \text{if } \boldsymbol{\beta} = (-1,-1). \end{cases}$$

In what follows, we will work with the point of view of quivers. A good reference can be found in Chapters 3.1.b and 9.4 of [9]. Let $A \subset (-1, 0]$ be the (finite) set of those $\alpha \in (-1, 0]$ such that $(M')_\alpha \neq 0$ and let us look at the different cases for $\boldsymbol{\beta} \in [-1, 0]^2$:

(i) For $\beta_2 \neq -1$, we have $T_{(-1,\beta_2)} \neq 0$, if and only if $\gamma = -\gamma_0$ and $\beta_2 \in A$.

(ii) For $\beta_1 \neq -1$, we have $T_{(\beta_1,-1)} \neq 0$, if and only if $\gamma = \alpha - \gamma_0$ with $\alpha \in A \bmod \mathbb{Z}$ and $\beta_1 = -\alpha \bmod \mathbb{Z}$.

(iii) $T_{(-1,-1)} \neq 0$, if and only if $\gamma = -\gamma_0$ and $0 \in A$.

We deduce from these relations that:

(Cases 1+2) If $\gamma \neq -\gamma_0$, then T^λ is supported on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ and, according to (ii), is determined by the only data of $\mathrm{coker}(S_v - E \in \mathrm{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,\gamma}[E]))$ equipped with an action of $E - \gamma$, which we can identify with $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,\gamma}$ where the action of $E - \gamma$ can be identified with $S_v - \gamma$. Consequently, T^λ is determined by $(M')_{\gamma+\gamma_0}$ with an action of $x'\partial_{x'} - (\gamma + \gamma_0)$.

(Case 3) If $\gamma = -\gamma_0$, then T^λ is determined by two data:

- Firstly by the data, according to (i), by $\mathrm{coker}(S_u - E \in \mathrm{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,\alpha-\gamma_0}[E]))$ for $\alpha \in A \bmod \mathbb{Z}$, $\alpha \notin \mathbb{Z}$, supported on $\mathbb{P}^1_x$ and equipped with an action of $E + \gamma_0$. We can identify it with $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,\alpha-\gamma_0}$ where the action of $E + \gamma_0$ is identified with $S_u + \gamma_0$, which we identify with $(M')_\alpha$ with an action by 0.
- Secondly by the data of the bi-quiver

$$\begin{tikzcd} T_{(-1,-1)} \arrow[r, shift left, "v_1"] \arrow[d, shift left, "u_1"] & T_{(-1,0)} \arrow[l, shift left, "\partial_{v_1}"] \\ T_{(0,-1)} \arrow[u, shift left, "\partial_{u_1}"] & \end{tikzcd}$$

As u_1^{-1} acts on $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0+1,-\gamma_0}[E]$ and v_1^{-1} on $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,-\gamma_0+1}[E]$, it can be assumed that $T_{(-1,-1)}$, $T_{(0,-1)}$ and $T_{(-1,0)}$ are all three cokernels of maps of $\mathrm{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,-\gamma_0}[E])$. Now we set $C_{uv} = \mathrm{coker}(S_u - E)(S_v - E)$, $C_u = \mathrm{coker}(S_u - E)$ and $C_v = \mathrm{coker}(S_v - E)$, and the previous bi-quiver can be identified with the following

$$\begin{tikzcd} C_{uv} \arrow[r, shift left, two heads, "\varphi_v"] \arrow[d, shift left, two heads, "\varphi_u"] & C_u \arrow[l, shift left, "S_v - E"] \\ C_v \arrow[u, shift left, "S_u - E"] & \end{tikzcd}$$

where $\varphi_u : C_{uv} \to C_v$ is induced by the inclusion $\mathrm{im}(S_u - E)(S_v - E) \subset \mathrm{im}(S_v - E)$, and the same for φ_v. As $S_u - E \in \mathrm{End}((N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,-\gamma_0}[E])$ is injective (because S_u is identified on $(M')_0$ with $-\gamma_0\mathrm{Id}$) and

$$\mathrm{im}(S_u - E : C_v \to C_{uv}) = \frac{\mathrm{im}(S_u - E)}{\mathrm{im}(S_u - E)(S_v - E)} = \ker \varphi_v,$$

we deduce the following exact sequence:

$$0 \to C_v \to C_{uv} \to C_u \to 0.$$

Therefore, we have an exact sequence of bi-quivers:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C_v \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left, "S_u - E"] & 0 \arrow[l, shift left] \arrow[r] & C_{uv} \arrow[r, shift left, two heads, "\varphi_v"] \arrow[d, shift left, two heads, "\varphi_u"] & C_u \arrow[l, shift left, "S_v - E"] \arrow[r] & C_u \arrow[r, shift left, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, shift left] & C_u \arrow[l, shift left, "S_v - E"] \arrow[r] & 0 \\ & C_v \arrow[u, shift left, "\mathrm{Id}"] & & C_v \arrow[u, shift left, "S_u - E"] & & 0 \arrow[u, shift left] & & \end{tikzcd}$$

- The left bi-quiver is a quiver representing the extension by zero supported on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ and identified with $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,-\gamma_0}$, where the action of $E + \gamma_0$ can be identified with $S_v + \gamma_0$, in other words, $(M')_0$ with the action of $x'\partial_{x'}$. This is the following bi-quiver:

$$\begin{tikzcd} (M')_0 \arrow[r, shift left] \arrow[d, shift left, "-x'\partial_{x'}"] & 0 \arrow[l, shift left] \\ (M')_0 \arrow[u, shift left, "\mathrm{Id}"] & \end{tikzcd}$$

- The right bi-quiver is a quiver representing the meromorphic extension supported on $\mathbb{P}^1_x$ and identified with $(N_{\lambda_0})_{-\gamma_0,-\gamma_0}$ where the action of $E + \gamma_0$ is equal to 0, in other words $(M')_0$ with the action by 0. This is the following bi-quiver:

$$\begin{tikzcd} (M')_0 \arrow[r, shift left, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, shift right] & (M')_0 \arrow[l, shift left, "x'\partial_{x'}"] \\ 0 \arrow[u, shift right] & \end{tikzcd}$$

- It is possible to make the central bi-quiver explicit in terms of $(M')_0$, insofar as we can identify C_{uv} with $((M')_0)^2$ with an action of
$$E+\gamma_0=\left(\begin{array}{c|c}\gamma_0\mathrm{Id} & \gamma_0(x'\partial_{x'}-\gamma_0\mathrm{Id})\\ \hline \mathrm{Id} & x'\partial_{x'}-\gamma_0\mathrm{Id}\end{array}\right),$$
and we get the following bi-quiver:
$$\begin{tikzcd}((M')_0)^2 \arrow[r, shift left, two heads, "p_v"] \arrow[d, shift left, two heads, "p_u"] & (M')_0 \arrow[l, shift left, "(x'\partial_{x'}-\gamma_0\mathrm{Id},-\mathrm{Id})"] \\ (M')_0 \arrow[u, shift left, "(-\gamma_0\mathrm{Id},-\mathrm{Id})"] & \end{tikzcd}$$
where $p_u=p_1+(x'\partial_{x'}-\gamma_0)p_2$ and $p_v=p_1-\gamma_0p_2$, with p_1 the projection onto the first factor and p_2 onto the second factor.

  Finally, for $\lambda=\overline{\lambda_0}$ we have an exact sequence
$$0\to(T_0^{\overline{\lambda_0}})'\to T^\lambda\to T_1\to 0$$
where $(T_0^{\overline{\lambda_0}})'$ is the extension by zero of $T_0^{\overline{\lambda_0}}$ at infinity equipped with the nilpotent endomorphism $x'\partial_{x'}$, and T_1 is supported on $\mathbb{P}^1_x$ and given by the meromorphic extension of M at infinity equipped with the nilpotent endomorphism 0.

By gluing the expressions obtained for the different values of λ in each of the three charts, we get the announced result of the lemma. □

By construction, the complex $K^\bullet=\widetilde{s}_+e_+T^\lambda$ has cohomology in degree zero only. More precisely, as $\widetilde{s}\circ e:\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}\cup\mathbb{P}^1_x\to\{\mathrm{pt}\}$ this amounts to saying that $\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}\cup\mathbb{P}^1_x,\mathrm{DR}^{\mathrm{an}}\,T^\lambda)$ is a two-term complex with a kernel reduced to zero. If we take the monodromy filtration $\mathrm{M}_\bullet$ into account, we have the following more precise result:

Lemma 2.4. — *$H^j(\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_\ell K^\bullet)=0$ for $j\neq 0$ and $\ell\in\mathbb{Z}$.*

Proof. — (Cases 1+2) If $\lambda\neq\overline{\lambda_0}$, then T^λ is supported on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ and localized at infinity. Consequently, we can see T^λ as a $\mathbb{C}[x']\langle\partial_{x'}\rangle$-module, which is a $\mathbb{C}[x']$-module with a connection $\nabla_{\partial_{x'}}$. The question is to show that the morphism
$$\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_\ell T^\lambda\xrightarrow{\nabla_{\partial_{x'}}}\mathrm{gr}^{\mathrm{M}}_\ell T^\lambda$$
has a kernel reduced to zero. With N the nilpotent endomorphism, let us set
$$\overline{T}^\lambda=\left((M')^{\lambda\lambda_0},\overline{\nabla}_{\partial_{x'}}=\frac{\partial}{\partial x'}+\frac{\gamma}{x'}\mathrm{Id}+\frac{\mathrm{N}}{x'}\right)$$

where $\overline{T}^{\lambda}$ is minimally extended at 0 if $\lambda = 1$, and

$$1_{\gamma_0} = \left(\mathbb{C}[x', (x'-1)^{-1}], \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\gamma_0}{x'-1}\mathrm{Id}\right)$$

so that $T^{\lambda} = \overline{T}^{\lambda} \otimes 1_{\gamma_0}$. For $m \in \overline{T}^{\lambda}$ and $m' \in \mathbb{C}[x', (x'-1)^{-1}]$, we have

$$\nabla_{\partial_{x'}}(m \otimes m') = \overline{\nabla}_{\partial_{x'}}(m) \otimes m' + m \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\gamma_0}{x'-1}\mathrm{Id}\right) m'.$$

Now, we have $\mathrm{gr}_{\ell}^{\mathrm{M}} T^{\lambda} = \mathrm{gr}_{\ell}^{\mathrm{M}} \overline{T}^{\lambda} \otimes 1_{\gamma_0}$ and we want to show that

$$\ker\left(\mathrm{gr}_{\ell}^{\mathrm{M}} \overline{T}^{\lambda} \otimes 1_{\gamma_0} \xrightarrow{\nabla_{\partial_{x'}}} \mathrm{gr}_{\ell}^{\mathrm{M}} \overline{T}^{\lambda} \otimes 1_{\gamma_0}\right) = 0.$$

For $m \in \mathrm{gr}_{\ell}^{\mathrm{M}} \overline{T}^{\lambda}$, let us notice the equality

$$\nabla_{\partial_{x'}}\left(m \otimes \frac{1}{(x'-1)^k}\right) = \overline{\nabla}_{\partial_{x'}}(m) \otimes \frac{1}{(x'-1)^k} - \frac{km}{(x'-1)^{k+1}} + \frac{\gamma_0 m}{(x'-1)^{k+1}},$$

from which we deduce, as $\gamma_0 \notin \mathbb{Z}$, that $m \otimes (x'-1)^{-k}$ has a pole at 1 of order $k+1$ if $m \neq 0$. Therefore, if an element $m \otimes m'$ is such that $\nabla_{\partial_{x'}}(m \otimes m') = 0$, then $m = 0$.

(Case 3) If $\lambda = \overline{\lambda_0}$, we have the exact sequence $0 \to T_0 \to T^{\lambda} \to T_1 \to 0$, where $T_0 = (T_0^{\overline{\lambda_0}})'$ is supported on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$, and T_1 is supported on $\mathbb{P}^1_x$. Equivalently, we can think in terms of primitive parts instead of graded parts, as we shall do.

The reasoning of the previous case applies in the same way to $K_0^{\bullet} = \widetilde{s}_+ e_+ T_0$, yielding that the complexes $\mathrm{P}_{\ell} K_0^{\bullet}$ are concentrated in degree 0 for all $\ell \in \mathbb{N}$. As N is zero on T_1, we have $\mathrm{N}(T^{\lambda}) \subset T_0$. Let us show we have equality and, to this end, let us go back to the description of T^{λ} at the neighbourhood of ∞ in terms of bi-quivers:

$$\begin{tikzcd} ((M')_0)^2 \arrow[r, shift left, two heads, "p_v"] \arrow[d, shift left, two heads, "p_u"] & (M')_0 \arrow[l, shift left, "(x'\partial_{x'} - \gamma_0 \mathrm{Id}, -\mathrm{Id})"] \\ (M')_0 \arrow[u, shift left, "(-\gamma_0 \mathrm{Id}, -\mathrm{Id})"] & \end{tikzcd}$$

The action of $E + \gamma_0$ on $((M')_0)^2$ is given by

$$E + \gamma_0 = \left(\begin{array}{c|c} \gamma_0 \mathrm{Id} & \gamma_0(x'\partial_{x'} - \gamma_0 \mathrm{Id}) \\ \hline \mathrm{Id} & x'\partial_{x'} - \gamma_0 \mathrm{Id} \end{array}\right),$$

whose rank is equal to the dimension of $(M')_0$, and thus

$$(E + \gamma_0)((M')_0)^2 = \{(\gamma_0 m, m) \in ((M')_0)^2 \mid m \in (M')_0\} \simeq (M')_0.$$

Now, a calculation shows that the following diagram

$$\begin{tikzcd}
((M')_0)^2 \arrow[r, two heads, "p_2\circ(E+\gamma_0)"] \arrow[d, shift left, "p_u"] & (M')_0 \arrow[d, shift left, "-x'\partial_{x'}"] \\
(M')_0 \arrow[u, shift left, "(-\gamma_0\mathrm{Id},-\mathrm{Id})"] \arrow[r, two heads, "-x'\partial_{x'}"] & (M')_0 \arrow[u, shift left, "\mathrm{Id}"]
\end{tikzcd}$$

is commutative, so the image by N of the bi-quiver representing T^λ gives the bi-quiver representing T_0, in other words $\mathrm{N}(T^\lambda) = T_0$. Consequently, we are in the situation of a minimal extension quiver:

$$\begin{tikzcd}
T^\lambda \arrow[r, two heads, shift left, "\mathrm{N}"] & T_0. \arrow[l, hook, shift left]
\end{tikzcd}$$

We deduce from [4, Prop. 2.1.1(iii)] that $\mathrm{P}_\ell T^\lambda \simeq \mathrm{P}_{\ell-1}T_0$ for $\ell \geq 1$, and thus the complexes $\mathrm{P}_\ell K^\bullet$, are concentrated in degree 0 for all $\ell \geq 1$. Moreover, as the total complex $K^\bullet$ is concentrated in degree 0, the complex $P_0K^\bullet$ is also concentrated in degree 0. We have the same property for graded parts instead of primitive parts. □

Now, with these two lemmas, we are able to show the main theorem. We can equip T^λ with a Hodge filtration by the properties of nearby cycles, and $(M')^{\lambda\lambda_0}$ as well, in such a way that the formula of Lemma 2.3 is compatible with the Hodge filtrations. Note that these two objects are not variations of polarized Hodge structures but variations of mixed Hodge structures. However, one can adapt the arguments of [2] to the generalized context below.

Remark 2.5. — Let us begin by making the Hodge filtration more explicit. In the chart (u_2, v_2), let us consider the $\mathcal{D}$-module $e^+(M' \boxtimes \mathbb{C}[t', t'^{-1}])$, on which u_2 and v_2 act in an invertible way. This is

$$e^*(M' \boxtimes \mathbb{C}[t', t'^{-1}]) = \mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, v_2, v_2^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[x', x'^{-1}]} M',$$

on which the action of the connection is induced by

$$u_2\partial_{u_2}(1 \otimes m) = v_2\partial_{v_2}(1 \otimes m) = x'\partial_{x'}(1 \otimes m).$$

We consider the localized Hodge filtration

$$\widetilde{F}^p M' = \mathbb{C}[x', x'^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[x']} F^p M',$$
$$\widetilde{F}^p(M' \boxtimes \mathbb{C}[t', t'^{-1}]) = (\widetilde{F}^p M') \boxtimes \mathbb{C}[t', t'^{-1}]$$

and its pull-back

$$\widetilde{F}^p e^*(M' \boxtimes \mathbb{C}[t', t'^{-1}]) = \mathbb{C}[u_2, u_2^{-1}, v_2, v_2^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[x', x'^{-1}]} \widetilde{F}^p M'.$$

In order to compute nearby cycles along v_2, we make use of the V-filtration $V^\bullet(e^+(M' \boxtimes \mathbb{C}[t', t'^{-1}]))$ along v_2, which we will compare with the V-filtration of M' along x' denoted by $V^\bullet(M')$. The above relations link the Bernstein polynomial with respect to v_2 with that with respect to x' and lead to the identification

$$\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}[u_2]}V^a(e^+(M'\boxtimes\mathbb{C}[t',t'^{-1}]))=\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1},v_2]\otimes_{\mathbb{C}[x']}V^aM'.$$

For $\lambda=e^{-2i\pi a}$, let us define the functor $\widetilde{\psi}_{v_2,\lambda}$ as the functor $\psi_{v_2,\lambda}$ followed by localization $\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}[u_2]}\bullet$. We thus find an isomorphism of filtered $\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1}]\langle u_2\partial_{u_2}\rangle$-modules

$$\begin{aligned}(\widetilde{\psi}_{v_2,\lambda}e^+(M'\boxtimes\mathbb{C}[t',t'^{-1}]),\widetilde{F}^\bullet\widetilde{\psi}_{v_2,\lambda}e^+(M'\boxtimes\mathbb{C}[t',t'^{-1}]))\\ \simeq\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}(\psi_{x',\lambda}M',F^\bullet\psi_{x',\lambda}M'),\end{aligned}$$

since, for $a\in(-1,0]$, the filtration induced by $\widetilde{F}^\bullet M'$ on gr_V^aM' is equal to that induced by $F^\bullet M'$, and where the action of $u_2\partial_{u_2}$ on the right-hand side is induced by $u_2\partial_{u_2}(1\otimes m)=0$.

Considering instead the pull-back of M_{λ_0} amounts to twisting $e^+(M'\boxtimes\mathbb{C}[t',t'^{-1}])$ by the pull-back connection $e^+(\mathbb{C}[x',x'^{-1}]\boxtimes\mathcal{K}_{\lambda_0})$. This leads to also inverting the action of u_2-1 and to localizing the $\widetilde{F}$-filtration along the divisor $u_2=1$. On the other hand, it twists the monodromies around $u_2=0$ and $v_2=0$ by λ_0. The localization of the Hodge filtration $F^\bullet T^\lambda$ is by definition the localization of the filtration induced by $\widetilde{F}^\bullet N_{\lambda_0}$ on $\psi_{v_2,\lambda}N_{\lambda_0}$. As a consequence, if we set $\widetilde{T}^\lambda=\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1},(u_2-1)^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}[u_2]}T^\lambda$, which we endow with the localized filtration $\widetilde{F}^\bullet\widetilde{T}^\lambda=\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1},(u_2-1)^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}[u_2]}F^\bullet T^\lambda$, we obtain an isomorphism (the notation of Lemma 2.3)

$$(\widetilde{T}^\lambda,\widetilde{F}^\bullet\widetilde{T}^\lambda)\simeq(T_0^\lambda,\widetilde{F}^\bullet T_0^\lambda),\tag{1}$$

where $\widetilde{F}^\bullet T_0^\lambda$ is defined by $\widetilde{F}^pT_0^\lambda=\mathbb{C}[u_2,u_2^{-1},(u_2-1)^{-1}]\otimes_{\mathbb{C}}(F^p\psi_{x',\lambda\lambda_0}M')$.

Proof of Theorem 1. — (Case 1) Let us begin with the case $\lambda\notin\{1,\overline{\lambda_0}\}$ and, as a first step, without taking the monodromy filtration into account. As $\widetilde{s}\circ e:\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}\to\{\mathrm{pt}\}$, we have $\psi_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=\widetilde{s}_+e_+T^\lambda=\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},\mathrm{DR}\,T^\lambda)$. Setting $\boldsymbol{x}=\{0,1,\infty\}$ and $\mathrm{DR}\,T^\lambda=i_*\mathscr{V}$, where $i:\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}\setminus\boldsymbol{x}\hookrightarrow\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}$ denotes the open inclusion, and $\mathscr{V}$ is a non-constant local system on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}\setminus\boldsymbol{x}$, we have $\boldsymbol{H}^m(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},\mathrm{DR}\,T^\lambda)=H^m(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},i_*\mathscr{V})$. This quantity is zero for $m=0$, because there is no section supported on a point, and $\mathscr{V}$ has no global section since one of its local monodromies does not have 1 as an eigenvalue. Using the Poincaré duality theorem, we also have $H^2(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},i_*\mathscr{V})=0$ if we argue with the dual $\mathscr{V}^\vee$. Then

$$\nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=\dim\mathrm{gr}^p_F\psi_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=\dim\mathrm{gr}^p_F\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},\mathrm{DR}\,T^\lambda).$$

Adapting [2, Prop. 2.3.3] (we use the formula given at the end of their proof, without using $\nu^{p-1}_{\infty,1,\mathrm{prim}}(T^\lambda)$) we have

$$
\begin{aligned}
(2)\qquad \nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \delta^{p-1}(T^\lambda) - \delta^p(T^\lambda) - h^p(T^\lambda) - h^{p-1}(T^\lambda)\\
&\quad + \sum_{x\in\boldsymbol{x}}\Bigg(\underbrace{\sum_{\mu\neq 1}\nu^{p-1}_{x,\mu}(T^\lambda)}_{=h^{p-1}(T^\lambda)} + \underbrace{\mu^p_{x,1}(T^\lambda)}_{=0}\Bigg).\\
&= \delta^{p-1}(T^\lambda) - \delta^p(T^\lambda) - h^p(T^\lambda) + 2h^{p-1}(T^\lambda)
\end{aligned}
$$

since we remark that for each of the three singular points of T^λ, we have a single eigenvalue for the local monodromy (different from 1) and only one term $\nu^{p-1}_{x,\mu}(T^\lambda)$ is non-zero and, hence, equal to $h^{p-1}(T^\lambda)$.

Now, as $\lambda\lambda_0 \neq 1$, we have $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1_x, \mathrm{DR}(M')^{\lambda\lambda_0}) = 0$. The same reasoning with $(M')^{\lambda\lambda_0}$ instead of T^λ, which has two singularities, gives

$$
(3)\quad 0 = \delta^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0}) - \delta^p((M')^{\lambda\lambda_0}) - h^p((M')^{\lambda\lambda_0}) + h^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0}).
$$

In accordance with Lemma 2.3, we have

$$
T^\lambda = (M')^{\lambda\lambda_0} \otimes \left(\mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x'-1)^{-1}], \mathrm{d} + \gamma_0\left(-\frac{\mathrm{d}x'}{x'} + \frac{\mathrm{d}x'}{x'-1}\right)\right),
$$

and then we can infer, according to [2, 2.2.12], that $h^p(T^\lambda) = h^p((M')^{\lambda\lambda_0})$. Let us apply the formula for the twist by a unitary rank-one connection given in [2, Prop. 2.3.2]:

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \delta^p(T^\lambda) &= \delta^p((M')^{\lambda\lambda_0}) - h^p((M')^{\lambda\lambda_0})\\
&\quad + \sum_{\alpha\in[\gamma_0,1)} \nu^p_{\infty,e^{-2i\pi\alpha}}((M')^{\lambda\lambda_0}) + \sum_{\alpha\in[1-\gamma_0,1)} \underbrace{\nu^p_{1,e^{-2i\pi\alpha}}((M')^{\lambda\lambda_0})}_{=0 \text{ because } \alpha\neq 0}.
\end{aligned}
$$

The remaining sum can be expressed as

$$
\sum_{\alpha\in[\gamma_0,1)} \nu^p_{\infty,e^{-2i\pi\alpha}}((M')^{\lambda\lambda_0}) = \begin{cases} h^p((M')^{\lambda\lambda_0}) & \text{if } \gamma\in(0,1-\gamma_0)\\ 0 & \text{if } \gamma\in(1-\gamma_0,1),\end{cases}
$$

so we deduce that

$$
(5)\qquad \delta^p(T^\lambda) = \begin{cases} \delta^p((M')^{\lambda\lambda_0}) & \text{if } \gamma\in(0,1-\gamma_0)\\ \delta^p((M')^{\lambda\lambda_0}) - h^p((M')^{\lambda\lambda_0}) & \text{if } \gamma\in(1-\gamma_0,1).\end{cases}
$$

We are now able to apply the formula (2):

(i) For $\gamma \in (0, 1-\gamma_0)$, we have:

$$\begin{aligned}\nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \delta^{p-1}(T^\lambda) - \delta^p(T^\lambda) - h^p(T^\lambda) + 2h^{p-1}(T^\lambda)\\ &= \delta^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0}) - \delta^p((M')^{\lambda\lambda_0})\\ &\quad - h^p((M')^{\lambda\lambda_0}) + 2h^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0})\\ &= h^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0}) \quad \text{(according to (3))}.\end{aligned}$$

(ii) For $\gamma \in (1-\gamma_0, 1)$, we have:

$$\begin{aligned}\nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \Big(\delta^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0}) - h^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0})\Big)\\ &\quad - \Big(\delta^{p}((M')^{\lambda\lambda_0}) - h^{p}((M')^{\lambda\lambda_0})\Big)\\ &\quad - h^p((M')^{\lambda\lambda_0}) + 2h^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0})\\ &= \delta^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0}) - \delta^p((M')^{\lambda\lambda_0}) + h^{p-1}((M')^{\lambda\lambda_0})\\ &= h^{p}((M')^{\lambda\lambda_0}) \quad \text{(according to (3))}.\end{aligned}$$

We deduce from the isomorphism given in 1 that $h^p(T^\lambda) = \nu^p_{\infty,\lambda\lambda_0}(M)$, and then

$$h^p((M')^{\lambda\lambda_0}) = \nu^p_{\infty,\lambda\lambda_0}(M).$$

To sum up, we have

$$\nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases}\nu^{p-1}_{\infty,\lambda\lambda_0}(M) & \text{if } \gamma \in (0, 1-\gamma_0)\\ \nu^{p}_{\infty,\lambda\lambda_0}(M) & \text{if } \gamma \in (1-\gamma_0, 1).\end{cases} \tag{6}$$

Let us now take the monodromy filtration $M_\bullet$ into account. We know that it induces a filtration $W_\bullet$ on the cohomology $H^\bullet(K^\bullet)$ defined by $W_\ell H^m(K^\bullet) = \mathrm{Im}(H^m(M_\ell(K^\bullet)) \to H^m(K^\bullet))$, which verifies $\chi(\mathrm{gr}^M_\ell K^\bullet) = \chi(\mathrm{gr}^W_\ell H^\bullet(K^\bullet))$, by a classical argument of degeneration of the spectral sequence (see [6, Lemma 4.2.6] for more details). Lemma 2.4 states that $\mathrm{gr}^M_\ell K^\bullet$ is concentrated in degree 0, so that the previous equality of Euler characteristics gives $\dim H^0(\mathrm{gr}^M_\ell K^\bullet) = \dim(\mathrm{gr}^W_\ell H^0(K^\bullet)) = \dim \mathrm{gr}^W_\ell \psi_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))$. It remains to observe that $W_\bullet$ coincides here with $M_\bullet$, because $W_\bullet$ verifies the two properties that characterize the monodromy filtration [9, Lemma 3.1.1]. The same reasoning holds with primitive parts instead of graded parts, hence we have the equality

$$\dim \mathrm{P}_\ell \psi_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}_\ell T^\lambda).$$

Now, let us fix $\ell \geq 0$ and consider the Hodge filtration of the complex $\mathrm{P}_\ell K^\bullet$. As the connection sends the p-th piece of the filtration to the $(p-1)$-th piece of the filtration, we have $H^j(\mathrm{gr}^p_F \mathrm{P}_\ell K^\bullet) = 0$ for $j \neq 0$ and $p \in \mathbb{Z}$ similarly to

Lemma 2.4. Using the previous argument again, with the Hodge filtration this time, we have

$$\nu^p_{\infty,\lambda,\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \mathrm{gr}^p_F \mathrm{P}_\ell \psi_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \dim \mathrm{gr}^p_F \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}_\ell T^\lambda).$$

As $\mathrm{DR}\,\mathrm{P}_\ell T^\lambda$ is again of the form $i_*\mathscr{V}$, we can apply the same reasoning as for T^λ and get a formula similar to (2) for $\mathrm{P}_\ell T^\lambda$:

$$\text{(7)}\quad \nu^p_{\infty,\lambda,\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \delta^{p-1}(\mathrm{P}_\ell T^\lambda) - \delta^p(\mathrm{P}_\ell T^\lambda) - h^p(\mathrm{P}_\ell T^\lambda) + 2h^{p-1}(\mathrm{P}_\ell T^\lambda).$$

On the one hand, we have

$$\mathrm{P}_\ell T^\lambda = \mathrm{P}_\ell(M')^{\lambda\lambda_0} \otimes \left(\mathbb{C}[x', x'^{-1}, (x'-1)^{-1}], \mathrm{d} + \gamma_0\left(-\frac{\mathrm{d}x'}{x'} + \frac{\mathrm{d}x'}{x'-1}\right)\right),$$

and, on the other hand, we have a formula similar to (3) with $\mathrm{P}_\ell(M')^{\lambda\lambda_0}$:

$$0 = \delta^{p-1}(\mathrm{P}_\ell(M')^{\lambda\lambda_0}) - \delta^p(\mathrm{P}_\ell(M')^{\lambda\lambda_0}) - h^p(\mathrm{P}_\ell(M')^{\lambda\lambda_0}) + h^{p-1}(\mathrm{P}_\ell(M')^{\lambda\lambda_0}).$$

So we can repeat the reasoning as without the monodromy filtration and get

$$\nu^p_{\infty,\lambda,\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \begin{cases} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda\lambda_0,\ell}(M) & \text{if } \gamma \in (0, 1-\gamma_0) \\ \nu^{p}_{\infty,\lambda\lambda_0,\ell}(M) & \text{if } \gamma \in (1-\gamma_0, 1). \end{cases}$$

(Case 2) Let us look at the case $\lambda = 1$, which differs from the previous one locally at the neighbourhood of 0 where we have a minimal extension.

We claim that, for every $\ell \geq 0$, the primitive Hodge module $\mathrm{P}_\ell T^1$ decomposes as $\mathrm{P}^1_\ell T^1 \oplus \mathrm{P}^2_\ell T^1$, where $\mathrm{P}^2_\ell T^1$ is supported at the origin, and $\mathrm{P}^1_\ell T^1$ is smooth near the origin. Since the question is local at the origin, it is enough to consider the quiver associated to T^1 at the origin. By the minimal extension property, it takes the form

$$H \rightleftarrows \mathrm{N}(H)$$

where H denotes the nearby cycles of T^1 at the origin. As a filtered vector space, it is identified with $(M')_{\gamma_0}$ according to Remark 2.5.

Let us set $G = \mathrm{N}(H)$. The action of the nilpotent operator on T^1 is induced by that of N on H and G. Since N sends $M_\ell H$ to $M_{\ell-1} G$, we deduce that the local quiver of $\mathrm{P}_\ell T^1$ is

$$\mathrm{P}_\ell H \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \mathrm{P}_\ell G.$$

We define $\mathrm{P}^2_\ell T^1$ by the quiver

$$0 \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \mathrm{P}_\ell G$$

and $\mathrm{P}^1_\ell T^1$ is the smooth extension of $\mathrm{P}_\ell T^1$ at the origin, locally defined by the quiver

$$\mathrm{P}_\ell H \quad \underset{0}{\overset{0}{\rightleftarrows}} \quad 0$$

thereby proving the claim.

By its definition, this decomposition underlies a decomposition of pure Hodge modules, so that we have

$$\begin{aligned}\nu^p_{\infty,1,\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \dim \mathrm{gr}^p_F \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}(\mathrm{P}^1_\ell T^1 \oplus \mathrm{P}^2_\ell T^1)) \\ &= \dim \mathrm{gr}^p_F \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}^1_\ell T^1) + \dim \mathrm{gr}^p_F \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}^2_\ell T^1),\end{aligned}$$

and, therefore, two dimensions to calculate. The first one can be obtained by considering that $\mathrm{DR}\,\mathrm{P}^1_\ell T^1$ is again of the form $i_*\mathscr{V}$, where $\mathscr{V}$ is a non-constant local system on $\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}} \setminus \boldsymbol{x}$ but with only two singular points (0 and 1). For each of them, the unique eigenvalue of the monodromy is different from 1. This gives $H^0(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}, i_*\mathscr{V}) = 0$ and $H^2(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}, i_*\mathscr{V}) = 0$ by the Poincaré duality theorem. Consequently, we have

$$\dim H^1(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}, i_*\mathscr{V}) = -\chi(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}}, i_*\mathscr{V}) = -\underbrace{\chi(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}} \setminus \{0,1\})}_{=0}\,\mathrm{rk}\,(\mathscr{V}) = 0.$$

Finally:

$$\dim \mathrm{gr}^p_F \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}^1_\ell T^1) = 0.$$

Let us now try to determine $\dim \mathrm{gr}^p_F \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}^2_\ell T^1)$. We know that $\mathrm{P}^2_\ell T^1$ is supported at 0 and given by $(\mathrm{P}_\ell G)[\partial_{x'}]$. Applying Remark 2.5, the Hodge filtration is given by

$$F^p((\mathrm{P}_\ell G)[\partial_{x'}]) = \sum_{k \geq 0} \partial^k_{x'} \cdot F^{p+1+k}(\mathrm{P}_\ell G).$$

We deduce that $\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}^2_\ell T^1)$ is given by the cokernel of

$$(\mathrm{P}_\ell G)[\partial_{x'}] \xrightarrow{\partial_{x'}} (\mathrm{P}_\ell G)[\partial_{x'}],$$

which can be identified with $\mathrm{P}_\ell G$ equipped with the filtration

$$F^p \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}^2_\ell T^1) = F^p(\mathrm{P}_\ell G).$$

Finally, we have

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{gr}^p_F \boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathrm{P}^2_\ell T^1) &= \dim \mathrm{gr}^p_F(\mathrm{P}_\ell G) \\ &= \dim \mathrm{gr}^p_F(\mathrm{P}_{\ell+1} H) \\ &= \nu^p_{\infty,\lambda_0,\ell+1}(M).\end{aligned}$$

Summing the two dimensions, we get

$$\nu^p_{\infty,1,\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = 0 + \nu^p_{\infty,\lambda_0,\ell+1}(M) = \nu^p_{\infty,\lambda_0,\ell+1}(M).$$

(Case 3) If $\lambda=\overline{\lambda_0}$, we again take the exact sequence $0\to T_0\to T^\lambda\to T_1\to 0$ and we have

$$\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=\dim\mathrm{gr}^p_F\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},\mathrm{DR}\,T_0)+\dim\mathrm{gr}^p_F\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1_x,\mathrm{DR}\,T_1).$$

The case of the left term can be treated in the same way as $\gamma\in(1-\gamma_0,1)$ in Case 1, which gives $\dim\mathrm{gr}^p_F\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},\mathrm{DR}\,T_0)=\nu^p_{\infty,1}(M)$. Concerning the right term, we have

$$\dim\mathrm{gr}^p_F\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1_x,\mathrm{DR}\,T_1)=\dim\mathrm{gr}^p_F\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1,\mathrm{DR}\,\mathscr{M})=h^pH^1(\mathbb{A}^1,\mathrm{DR}\,M),$$

where $\mathscr{M}$ is the meromorphic extension of M at infinity. By [2, Lemma 2.2.8 and Remark 2.3.5], we have

$$h^pH^1(\mathbb{A}^1,\mathrm{DR}\,M)=h^pH^1(\mathbb{P}^1,\mathrm{DR}\,\mathscr{M}^{\min})+\nu^{p-1}_{\infty,1,\mathrm{prim}}(M),\tag{8}$$

and we get

$$\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=\nu^p_{\infty,1}(M)+h^pH^1(\mathbb{P}^1,\mathrm{DR}\,\mathscr{M}^{\min})+\nu^{p-1}_{\infty,1,\mathrm{prim}}(M).\tag{9}$$

Now, we have seen in the proof of Lemma 2.4 that we are in the situation of a minimal extension quiver

$$\begin{tikzcd} T^\lambda \arrow[r, shift left, two heads, "\mathrm{N}"] & T_0 \arrow[l, shift left, hook'] \end{tikzcd},$$

with $\mathrm{P}_\ell T^\lambda\simeq\mathrm{P}_{\ell-1}T_0$ for $\ell\geq 1$. As N is strictly compatible with the Hodge filtration, with a shift $F^\bullet\to F^{\bullet-1}$, we deduce that $\mathrm{gr}^p_F\mathrm{P}_\ell T^\lambda\simeq\mathrm{gr}^{p-1}_F\mathrm{P}_{\ell-1}T_0$ for $\ell\geq 1$, and so

$$\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0},\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=\dim\mathrm{gr}^{p-1}_F\boldsymbol{H}^1(\mathbb{P}^1_{\mathrm{exc}},\mathrm{DR}\,\mathrm{P}_{\ell-1}T_0)=\nu^{p-1}_{\infty,1,\ell-1}(M).$$

It remains to treat the case $\ell=0$, for which we have

$$\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0},0}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))+\sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=0}^{\ell}\nu^{p+k}_{\infty,\overline{\lambda_0},\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))$$

and

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=0}^{\ell}\nu^{p+k}_{\infty,\overline{\lambda_0},\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))&=\sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=0}^{\ell}\nu^{p-1+k}_{\infty,1,\ell-1}(M)\\&=\sum_{\ell\geq 0}\sum_{k=0}^{\ell}\nu^{p-1+k}_{\infty,1,\ell}(M)+\sum_{\ell\geq 0}\nu^{p+\ell}_{\infty,1,\ell}(M)\\&=\nu^{p-1}_{\infty,1}(M)+\nu^p_{\infty,1,\mathrm{coprim}}(M),\end{aligned}$$

so we deduce that

$$\begin{aligned}\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0},0}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))=h^pH^1(\mathbb{P}^1,\mathrm{DR}\,\mathscr{M}^{\min})&+\nu^{p-1}_{\infty,1,\mathrm{prim}}(M)-\nu^p_{\infty,1,\mathrm{coprim}}(M)\\&+\nu^p_{\infty,1}(M)-\nu^{p-1}_{\infty,1}(M).\end{aligned}$$

Yet, a general calculation [2, (2.2.5∗)] immediately shows that

$$\nu^p_{\infty,1,\mathrm{coprim}}(M) - \nu^{p-1}_{\infty,1,\mathrm{prim}}(M) = \nu^p_{\infty,1}(M) - \nu^{p-1}_{\infty,1}(M),$$

and we conclude that $\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0},0}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = h^p H^1(\mathbb{P}^1, \mathrm{DR}\,\mathscr{M}^{\min})$, which ends the proof of Theorem 1. $\square$

3. Proof of Theorems 2 and 3

Proof of Theorem 2. — Applying identity (2.2.2∗∗) of [2], we have

$$h^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\lambda\in S^1} \nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)),$$

so it suffices to sum expressions from Theorem 1 (recall that $\lambda = \exp(-2i\pi\gamma)$):

$$\sum_{\lambda\neq 1,\overline{\lambda_0}} \nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma\in(0,\gamma_0)} \nu^p_{\infty,\lambda}(M) + \sum_{\gamma\in(\gamma_0,1)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M) \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\nu^p_{\infty,1}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\ell\geq 0}\sum_{k=0}^{\ell} \nu^{p+k}_{\infty,\lambda_0,\ell+1}(M)\\ &= \nu^p_{\infty,\lambda_0}(M) - \nu^p_{\infty,\lambda_0,\mathrm{coprim}}(M)\\ &= \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0}(M) - \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M)\end{aligned} \tag{11}$$

For $\lambda = \overline{\lambda_0}$, the following equality has already been proved in §2, formulas (8) and (9):

$$\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \nu^p_{\infty,1}(M) + h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}\,M) \tag{12}$$

$\square$

Proof of Theorem 3. — We set $\gamma^p = \delta^p - \delta^{p-1}$. According to identity (2.3.5∗) of [2], we have

$$h^p H^1(\mathbb{A}^1, \mathrm{DR}\,M) = -\gamma^p(M) - h^p(M) + \sum_{i=1}^{r}\Biggl(\sum_{\mu\neq 1} \mu^{p-1}_{x_i,\mu}(M) + \mu^p_{x_i,1}(M)\Biggr).$$

It then follows from Theorem 2 that

$$\begin{aligned}h^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) + h^p(M) = -\gamma^p(M) - \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M) + \sum_{\gamma\in[0,\gamma_0)} \nu^p_{\infty,\lambda}(M)\\ + \sum_{\gamma\in[\gamma_0,1)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M) + \sum_{i=1}^{r}\Biggl(\sum_{\mu\neq 1} \mu^{p-1}_{x_i,\mu}(M) + \mu^p_{x_i,1}(M)\Biggr).\end{aligned} \tag{13}$$

According to [2, Prop. 3.1.1], we have

$$h^p(\mathrm{MC}_{\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))) = h^{p-1}(M).$$

We can write the same formula as above with $\overline{\lambda_0}$ instead of λ_0 and then we apply it to $\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)$ instead of M:

$$\begin{aligned}(14)\quad h^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) + h^{p-1}(M) = {} & -\gamma^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu^{p-1}_{\infty,\overline{\lambda_0},\mathrm{prim}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ & + \sum_{\gamma\in[0,1-\gamma_0)} \nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) + \sum_{\gamma\in[1-\gamma_0,1)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ & + \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{\mu\neq 1} \mu^{p-1}_{x_i,\mu}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) + \mu^p_{x_i,1}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))\right).\end{aligned}$$

It follows from Theorem 1 that

$$(15)\qquad \sum_{\gamma\in[0,1-\gamma_0)} \nu^p_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma\in(\gamma_0,1)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M) + \nu^p_{\infty,1}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)),$$

$$(16)\qquad \sum_{\gamma\in[1-\gamma_0,1)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \sum_{\gamma\in(0,\gamma_0)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M) + \nu^{p-1}_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)).$$

Moreover, according to [2, Theorem 3.1.2(2)], we have

$$\begin{aligned}(17)\quad & \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{\mu\neq 1} \mu^{p-1}_{x_i,\mu}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) + \mu^p_{x_i,1}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))\right) = \\ & \qquad \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{\gamma\in(0,1-\gamma_0)} \mu^{p-2}_{x_i,\lambda}(M) + \sum_{\gamma\in[1-\gamma_0,1]} \mu^{p-1}_{x_i,\lambda}(M)\right).\end{aligned}$$

Substituting (15), (16) and (17) in formula (14), we get:

$$\begin{aligned}(18)\quad h^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = {} & -\gamma^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) \underbrace{- h^{p-1}(M) + \sum_{\gamma\neq 0,\gamma_0} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M)}_{=-\nu^{p-1}_{\infty,1}(M)-\nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0}(M)} \\ & + \underbrace{\nu^p_{\infty,1}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))}_{=\nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0}(M)-\nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M)} \\ & + \nu^{p-1}_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu^{p-1}_{\infty,\overline{\lambda_0},\mathrm{prim}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ & + \sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{\gamma\in(0,1-\gamma_0)} \mu^{p-2}_{x_i,\lambda}(M) + \sum_{\gamma\in[1-\gamma_0,1]} \mu^{p-1}_{x_i,\lambda}(M)\right).\end{aligned}$$

We already made $\nu^p_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M))$ explicit in the proof of Theorem 2 but we can remark that

$$\begin{aligned}\nu^{p-1}_{\infty,\overline{\lambda_0}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu^{p-1}_{\infty,\overline{\lambda_0},\mathrm{prim}}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) &= \sum_{\ell\geq 1}\sum_{k=1}^{\ell} \nu^{p-1+k}_{\infty,\overline{\lambda_0},\ell}(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) \\ &= \sum_{\ell\geq 0}\sum_{k=0}^{\ell} \nu^{p-1+k}_{\infty,1,\ell}(M) = \nu^{p-1}_{\infty,1}(M).\end{aligned}$$

Finally, we get

$$\begin{aligned}h^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = -\gamma^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) - \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M) \\ + \sum_{i=1}^{r}\Bigg(\sum_{\gamma\in(0,1-\gamma_0)} \mu^{p-2}_{x_i,\lambda}(M) + \sum_{\gamma\in[1-\gamma_0,1]} \mu^{p-1}_{x_i,\lambda}(M)\Bigg).\end{aligned}$$

If we substitute (13) in the previous formula, we have

$$\begin{aligned}\gamma^p(\mathrm{MC}_{\lambda_0}(M)) = \gamma^p(M) + \sum_{\gamma\in[\gamma_0,1)} (\nu^p_{\infty,\lambda}(M) - \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M)) \\ - \sum_{i=1}^{r}\Bigg((\mu^p_{x_i,1}(M) - \mu^{p-1}_{x_i,1}(M)) + \sum_{\gamma\in(0,1-\gamma_0)} (\mu^{p-1}_{x_i,\lambda}(M) - \mu^{p-2}_{x_i,\lambda}(M))\Bigg).\end{aligned}$$

Summing these equalities for $p' \leq p$ gives the announced formula. □

Remark 3.1. — If we add the assumption that the scalar monodromy at infinity is in fact equal to $\lambda_0\mathrm{Id}$ as in [2], we have $\nu^p_{\infty,\lambda,\ell}(M) = 0$, except if $\lambda = \lambda_0$ and $\ell = 0$. Thus, we have

$$\sum_{\gamma\in[0,\gamma_0)} \nu^p_{\infty,\lambda}(M) + \sum_{\gamma\in[\gamma_0,1)} \nu^{p-1}_{\infty,\lambda}(M) = \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0}(M) = \nu^{p-1}_{\infty,\lambda_0,\mathrm{prim}}(M) = h^{p-1}(M)$$

and

$$\sum_{\gamma\in[\gamma_0,1)} \nu^p_{\infty,\lambda}(M) = h^p(M),$$

and consequently we retrieve the results 3.1.2(1) and 3.1.2(3) of [2].

Acknowledgements. — The author would first of all like to thank Claude Sabbah to whom this work owes a lot. The author is also indebted to Michel Granger and Christian Sevenheck for their careful reading and constructive comments on this work. Thanks are also due to Michael Dettweiler for helpful discussions.

BIBLIOGRAPHY

[1] P. Deligne – "Un théorème de finitude pour la monodromie", *Progr. Math.* **67** (1987), p. 1–19.

[2] M. Dettweiler & C. Sabbah – "Hodge theory of the middle convolution", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **49** (2013), no. 4, p. 761–800.

[3] R. Fedorov – "Variations of Hodge structures for hypergeometric differential operators and parabolic Higgs bundles", *International Mathematics Research Notices, Volume 2018, Issue 18* (2018), p. 5583–5608.

[4] M. Kashiwara & T. Kawai – "The Poincaré lemma for variations of polarized Hodge structure", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **23** (1987), p. 345–407.

[5] N. Katz – *Rigid local systems*, Annals of Mathematics Studies 139, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[6] N. Martin – "Convolution intermédiaire et théorie de Hodge", Dissertation, École polytechnique, 2018, Available at `http://nicolas.martin.ens.free.fr/articles.html`.

[7] ———, "Middle multiplicative convolution and hypergeometric equations", *Journal of Singularities* **23** (2021), p. 194–204.

[8] Z. Mebkhout – "Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les D-modules cohérents", *Travaux en Cours, Hermann* **35** (1989).

[9] C. Sabbah & C. Schnell – "The MHM project, Version 2", book in progress. Available at `http://www.cmls.polytechnique.fr/perso/sabbah/MHMProject/mhm.html`, 2019.

[10] M. Saito – "Modules de Hodge polarisables", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **24** (1988), p. 849–995.

[11] ———, "Mixed Hodge Modules", *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **26** (1990), no. 2, p. 221–333.

[12] C. Simpson – "Harmonic bundles on noncompact curves", *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), p. 713–770.

Bull. Soc. Math. France
149 (3), 2021, p. 501-519

A PERSISTENTLY SINGULAR MAP OF $\mathbb{T}^n$ THAT IS C^1 ROBUSTLY TRANSITIVE

BY JUAN C. MORELLI

ABSTRACT. — We exhibit a C^1 robustly transitive endomorphism displaying critical points on the n-dimensional torus.

RÉSUMÉ (*Une application C^1 robustement transitive dans $\mathbb{T}^n$ avec singularités persistantes*). — Nous présentons un endomorphisme avec points critiques sur le tore à n dimensions qui est C^1 robustement transitif.

1. Introduction

Whenever we think about dynamical systems' properties the concepts of *stability* and *robustness* almost inevitably come to mind. Loosely speaking, we can say that stability implies the same dynamics for maps sufficiently close to each other, and robustness implies the same behavior relative to a specific property for maps sufficiently close to each other.

This work in particular is focused on the study of robust transitivity, by *transitive* meaning the existence of a forward dense orbit of a point. This may at first sight seem an unexciting topic since a fair amount of results concerning robust transitivity are known. Nonetheless, the class of maps aimed for, the

Texte reçu le 5 septembre 2020, modifié le 9 mars 2021, accepté le 15 avril 2021.

JUAN C. MORELLI, Universidad de La República, Facultad de Ingenieria, IMERL, Julio Herrera y Reissig 565. C.P. 11300, Montevideo, Uruguay • *E-mail :* `jmorelli@fing.edu.uy`

Mathematical subject classification (2010). — 37C20; 57R45, 57N16.

Key words and phrases. — Transitivity, singularity, stability, robustness, high dimension.

 0037-9484/2021/501/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2836

singular endomorphisms about which little to nothing is known, as well as taking on the high dimensional context, are undoubtedly a fresh approach to the subject.

To set ideas in order we list up the most relevant known results about the topic.

We begin by summing up the most studied case: robust transitivity of diffeomorphisms. The image provided by known results is fairly complete. In the setting of surfaces, it is shown in [15] that robust transitivity implies the diffeomorphism to be Anosov and that the only surface that supports them is $\mathbb{T}^2$. Later on, in the arbitrary dimensional setting it is proven in [5] that robust transitivity implies a dominated splitting on the tangent spaces (i.e., weak hyperbolicity).

Going further, next comes robust transitivity of regular endomorphisms (not globally but locally invertible). The image we have about these is somewhat less complete; yet we know that volume expansion is a necessary but not sufficient condition for C^1 robust transitivity according to [11], who also give a sufficient condition for the case of manifold $\mathbb{T}^n$.

Carrying on, finally, there is the least studied case, robust transitivity of singular maps (nonempty critical sets). Until 2013 nothing had ever been written on the topic. Then, [2] showed the first example of a C^1 transitive singular map of $\mathbb{T}^2$. The second example was given only in 2016 by [9], who exhibited a C^1 robustly transitive map of $\mathbb{T}^2$ with a persistent critical set. Nothing more than these two examples was known at the time. Even so, there have been recent further advances on robust transitivity of singular surface endomorphisms: in 2018 [10] presented an example on $\mathbb{T}^2$, whose robust transitivity depends on the class of differentiability, and in 2019 [12] and [13] set the *state of the art* proving that partial hyperbolicity is a necessary condition, that the only surfaces that support them are $\mathbb{T}^2$ and the Klein bottle, and that they belong to the homotopy class of a linear map with an eigenvalue of modulus larger than 1. Finally, with respect to singular endomorphisms in high dimensions, the only known result was given by [14] who extended the result that appeared in [10] to $\mathbb{T}^n$.

In the spirit of generalizing known results in low to higher dimensions, the survey contained in our paper shows that the example exhibited in [9] can also be extended to $\mathbb{T}^n$, resulting in the first known example of a persistently singular endomorphism that is robustly transitive in the C^1 topology and supported on a manifold of dimension larger than 2.

The main result can be stated as:

THEOREM 1.1. — *Given $n \geq 2$, there exists a persistently singular endomorphism supported on $\mathbb{T}^n$ that is C^1 robustly transitive.*

By persistently singular endomorphism we mean a map f satisfying that there exists a C^1 neighborhood $\mathcal{U}_f$ of f such that every map g belonging to $\mathcal{U}_f$ displays critical points.

1.1. Sketch of the construction. — Start from an endomorphism induced by a diagonal expanding matrix with integer coefficients, with all but one direction strongly unstable and one central direction. Perturb the map to add a blending region that mixes everything getting the transitivity and then introduce artificially the critical points preserving the transitivity property. This entire construction is done in a robust way.

The author wants to remind the readers that the contents to follow are an adaptation of the surfaces' construction exhibited by [9, Section 2.2] to arbitrary dimensions. The proofs to some of the claims in our lemmas and theorems were, consequently, also inspired by [9]. Moreover, many of them can be adapted in a straightforward manner cleverly enough, but for the sake of a self-contained article all proofs will be explicitly provided here. Finally, if readers wish to get a lighter approach to our construction by considering the low-dimensional context first, they are invited to read the cited article.

2. Preliminaries

Some basic definitions are recalled at the beginning. If readers wish to gain more insight on the geometrical or dynamical background they can refer to [6] or [7].

Let M be a differentiable manifold of dimension m and $f : M \to M$ a differentiable endomorphism. The *orbit* of $x \in M$ is $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}$. The map f is **transitive** if there exists a point $x \in M$ such that $\overline{\mathcal{O}(x)} = M$ and f is C^k**-robustly transitive** if there exists a neighborhood $\mathcal{U}_f$ of f in the C^k topology such that g is transitive for all g belonging to $\mathcal{U}_f$.

The proposition ahead is well known and of most practical use.

Proposition 2.1. — *If f is continuous then are equivalent:*

1. *f is transitive.*
2. *For all U, V open sets in M, there exists $n \in \mathbb{N}$ such that $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*
3. *There exists a residual set R (countable intersection of open and dense sets) such that for all points $x \in R : \overline{\mathcal{O}(x)} = M$.*

2.1. Normally Hyperbolic (sub)manifolds. — We continue defining normally hyperbolic submanifolds in the sense of [1]. These kind of submanifolds for a given map are persistently invariant under perturbation, it allows defining dynamical systems within them. This will be the main usage we will make of them ahead in the paper. Their formal definition is as follows.

Let $f : M \to M$ be a C^1 diffeomorphism, $N \subset M$ a C^1 closed submanifold such that $f(N) = N$ (we say that N is *invariant*).

Definition 2.2. — We say that f is *normally hyperbolic at N* if there exists a splitting of the tangent bundle of M over N into three Df-invariant subbundles such that $TM_{|N} = E^s \oplus E^u \oplus TN$ and there exists a constant $0 < \lambda < 1$ such that for all $x \in N$ the following hold:

- $\|D_x f_{|E^s_x}\| < \lambda$, $\|(D_x f)^{-1}_{|E^u_x}\| < \lambda$,
- $\|D_x f_{|E^s_x}\| \cdot \|(D_{f(x)} f)^{-1}_{|T_{f(x)}N}\| < \lambda$,
- $\|(D_x f)^{-1}_{|E^u_x}\| \cdot \|(D_{f^{-1}(x)} f)_{|T_{f^{-1}(x)}N}\| < \lambda$.

The first condition implies that the behavior of the differential map Df is hyperbolic over $M \setminus N$ while the other two describe the domination property relative to stable subspaces E^s and unstable subspaces E^u. Our interest in these submanifolds comes from [1, Theorem 2.1] which states that:

THEOREM 2.3. — *Given M, N and f as in the definition above, there exists a C^1 neighborhood $\mathcal{U}_f$ of f such that all $g \in \mathcal{U}_f$ admit a C^1 invariant submanifold N_g which is unique such that g is normally hyperbolic at N_g. Moreover, N and N_g are diffeomorphic and there exists an embedding from N to N_g which is C^1 close to the canonical inclusion $i : N \to M$.*

2.2. Blenders. — A brief overview of the concept of a *blender* is given here. In most situations it is easy to think of blenders as higher dimensional horseshoes or as sets exhibiting the dynamics of Smale's horseshoe. Blenders force the robust intersection of topologically 'thin' sets, giving rise to rich dynamics.

According to [3],

> A blender is a compact hyperbolic set whose unstable set has dimension strictly less than one would predict by looking at its intersection with families of submanifolds.

They also provide with a prototypical example of a blender: let R be a rectangle with two rectangles R_1 and R_2 lying inside, horizontally, and such that their projections onto the base of R overlap (Figure 2.1). Consider now a diffeomorphism f such that $f(R_1) = f(R_2) = R$. Then, $\Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(R)$ gives rise to a blender (Cantor) set for f. Observe that f admits a fixed point inside each of R_1 and R_2 and that all vertical segments between the projection of these points intersect Ω (this is due to the overlapping of the projections of R_1 and R_2, which holds at every preiteration). Observe as well that this construction is robust in two senses: on the one hand, f can be slightly perturbed with persistence of the property. On the other hand, the vertical segment can also be slightly perturbed and still intersect Ω.

Notice that Ω is a fractal object with topological dimension zero. Nonetheless, every close-to-vertical line in between the fixed points of f inside $R_1 \cup R_2$ intersects Ω; hence, one would expect Ω to be at least of topological dimension 1. This is the characteristic trait of blender sets.

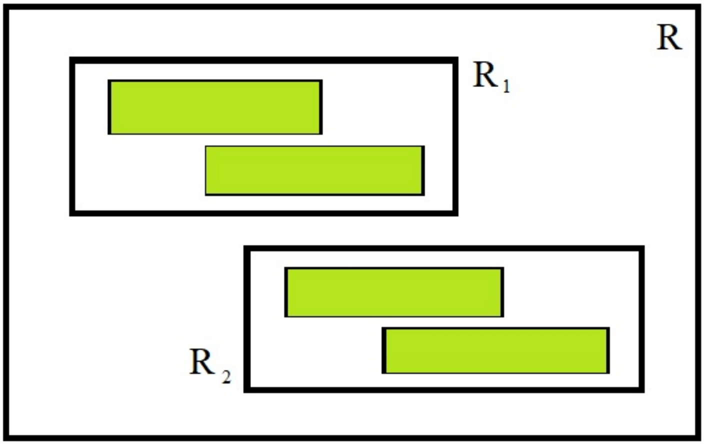


FIGURE 2.1. A protoblender over R; $f^{-1}(R)$ is darker

To finish with the preliminaries regarding blenders, their importance lies in the fact that they are a magnificent tool for producing rich dynamics, particularly robustly transitive dynamics. For more insight on blenders and their applications the reader may go to [4].

2.3. Iterated function systems. — Let $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ be two families of diffeomorphisms of M. Denote by $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} := \{f \circ g \,|\, f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$; and for $k \in \mathbb{N}$ denote $\mathcal{F}^0 = \{\mathrm{Id}_M\}$ and $\mathcal{F}^{k+1} = \mathcal{F}^k \circ \mathcal{F}$. Then, the set $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}^k$ has a semigroup structure that is denoted by $\langle \mathcal{F} \rangle^+$ and is said to be generated by $\mathcal{F}$. The action of the semigroup $\langle \mathcal{F} \rangle^+$ on M is called the *iterated function system* associated with $\mathcal{F}$. We denote it by $\mathrm{IFS}(\mathcal{F})$. For $x \in M$, the *orbit* of x by the action of the semigroup $\langle \mathcal{F} \rangle^+$ is $\langle \mathcal{F} \rangle^+(x) = \{f(x), f \in \langle \mathcal{F} \rangle^+\}$. A sequence $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ is a branch of an orbit of $\mathrm{IFS}(\mathcal{F})$, if for every $n \in \mathbb{N}$, there exists $f_n \in \langle \mathcal{F} \rangle^+$ such that $f_n(x_n) = x_{n+1}$.

DEFINITION 2.4. — An $\mathrm{IFS}(\mathcal{F})$ is *minimal* if for every $x \in M$ the orbit $\langle \mathcal{F} \rangle^+(x)$ has a branch that is dense on M.

An $\mathrm{IFS}(\mathcal{F})$ is C^r *robustly minimal* if for every family $\hat{\mathcal{F}}$ of C^r perturbations of $\mathcal{F}$ and every $x \in M$ the orbit $\langle \hat{\mathcal{F}} \rangle^+(x)$ has a branch that is dense on M.

As is shown in [8], every boundaryless compact manifold admits a pair of diffeomorphisms that generate a C^1 robustly minimal IFS. Ahead, we provide a construction of such a pair of maps on S^1 with the additional properties of being mostly contracting and having a bounded C^1 distance to the identity. For the rest of the article we consider S^1 as the quotient of $[-1, 1]$ under the identification $1 \sim -1$.

Lemma 2.5. — *Given $k > 0$, there exists a family $\mathcal{F} = \{g_1, g_2\}$ in* $\mathrm{Diff}^1(S^1)$ *such that* $\max_{i\in\{1,2\}}\{\|\mathrm{Id} - g_i\|\} < k$, $\max_{i\in\{1,2\}}\{\|g_i'\|\} < 2$ *and IFS($\mathcal{F}$) is C^1 robustly minimal.*

Proof. — Let $a \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ and $g_a : [-1,1] \to [-1,1]$ be a real function given by

$$g_a(x) = \begin{cases} \left(\frac{2-3a}{2-2a}\right)(x+1) - 1, & \text{if } x \in [-1, -a] \\ \frac{3}{2}x, & \text{if } x \in [-a, a] \\ \left(\frac{2-3a}{2-2a}\right)(x-1) + 1, & \text{if } x \in [a, 1] \end{cases}$$

Then g_a is a continuous piece-wise linear function that descends to S^1 as shown in Figure 2.2. Fix $a_0 \in \left(0, \frac{1}{26}\right)$ such that $\|x - g_{a_0}(x)\| < \frac{k}{2}$ and define $g := g_{a_0}$. Let $g_1 : S^1 \to S^1$ be a smooth approximation of g such that $\|g_1\| \leq \frac{3}{2}$ and g_1 is a contraction on the complement of $(-2a_0, 2a_0)$. Furthermore, let $g_2 : S^1 \to S^1$ be such that $g_2(x) = g_1(x - \frac{2}{13})$.

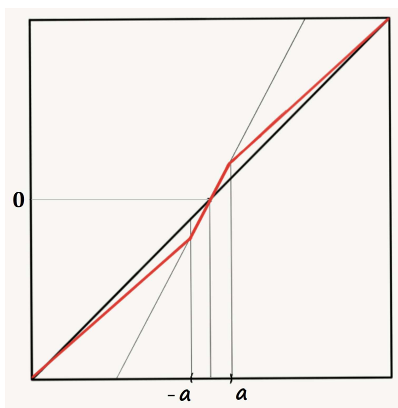


Figure 2.2. $\tilde{g}_a : S^1 \to S^1$ is almost a contraction on S^1

We claim that $\mathcal{F} = \{g_1, g_2\}$ is a family satisfying the announced properties.

To show minimality it is only needed to see that given any point p in S^1, the orbit $\langle\mathcal{F}\rangle^+(p)$ is dense in S^1. Define $A := \{x \in S^1 \mid g_1$ is a contraction at $x\}$ and $B := \{x \in S^1 \mid g_2$ is a contraction at $x\}$. We have $A \cup B = S^1$. Let W be an open set in S^1, then either $g_1^{-1}(W)$ or $g_2^{-1}(W)$ is larger than W, so $\langle\mathcal{F}\rangle^{-1}(W)$ is strictly larger than W. Keep taking preimages until finding n such that $\langle\mathcal{F}\rangle^{-n}(W) = S^1$, so $\langle\mathcal{F}\rangle^n(p) \in W$. To show robustness, observe that both g_1 and g_2 are Morse–Smale diffeomorphisms. Since these are structurally stable the proof above is robust.

The last two properties claimed by the lemma are straightforward from the construction. □

Having stated all the preliminary facts needed to construct the example map satisfying the claim of Theorem 1.1, we now proceed to it in two steps. In Section 3, we define a $\mathbb{T}^n$ endomorphism (which we name f) that is C^1 robustly transitive. To achieve this goal, we use the result given by Lemma 2.5 to create a blending region for f supported on a strict subset X of $\mathbb{T}^n$.

Once this construction is finished, we move on into Section 4, where the second step of the construction takes place by artificially introducing critical points inside the complement of X in $\mathbb{T}^n$. The surgery is done in such a way that the critical point existence is robust and the blending region is unaffected, resulting in a new map (which we call F) that satisfies the claim of Theorem 1.1.

3. A regular endomorphism f of $\mathbb{T}^n$

3.1. Construction of f. — Consider the n-dimensional torus $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/[-1,1]^n$ and endow it with the standard Riemannian (Euclidean) metric. Let $\widehat{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ be the diagonal matrix suggested below, with a unit in the last entry and all of the other elements being equal to 14,

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 14 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 14 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

The matrix $\widehat{A}$ induces a regular endomorphism A on the torus defined by

$$A : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad A(x_1, \dots, x_n) = (14x_1, 14x_2, \dots, 14x_{n-1}, x_n). \tag{2}$$

Remark 3.1. —
1. The construction could be carried on with any $\lambda \in \mathbb{Z}$ such that $|\lambda| \gg 1$; the choice of 14 is made for the sake of simplicity and to enable a better understanding of the contents to follow.
2. The construction can, in fact, be carried on with any $\lambda \in \mathbb{Z}$ such that $|\lambda| > 1$, since there would be a power of $\widehat{A}$ such that the first entry would be larger than 14. It follows that the construction holds for any linear map in the isotopy class of maps with an eigenvalue of modulus larger than 1.
3. Observe that A is a map modulo 2 even when we do not state it explicitly. The same convention applies for all maps of $\mathbb{T}^n$ defined along this work.

For the rest of the construction, consider a decomposition of the n-torus given by $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{n-1} \times S^1$; the map A becomes $A : \mathbb{T}^{n-1} \times S^1 \to \mathbb{T}^n$, $A(x,y) = (14x, y)$.

Define in $\mathbb{T}^{n-1}$ the following cubes: $K_0 = \left[\frac{-1}{28}, \frac{1}{28}\right]^{n-1}$, $K_1 = \left[\frac{3}{28}, \frac{5}{28}\right]^{n-1}$ and $K = (K_0 \cup K_1)$. Take $\varepsilon = \frac{1}{1400}$ and define the cubes $K_0^\varepsilon = \left[\frac{-1}{28} - \varepsilon, \frac{1}{28} + \varepsilon\right]^{n-1}$, $K_1^\varepsilon = \left[\frac{3}{28} - \varepsilon, \frac{5}{28} + \varepsilon\right]^{n-1}$ and $K^\varepsilon = (K_0^\varepsilon \cup K_1^\varepsilon)$.

Set a smooth function $\hat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, given in Figure 3.1, and let $u : \mathbb{T}^{n-1} \to \mathbb{R}$ be defined by $u(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \hat{u}(x_i)$, which is smooth and satisfies $u_{|K} = 1$ and $u_{|(K^\varepsilon)^c} = 0$. Furthermore, $\|\tilde{u}'\| := \max\{|\tilde{u}'(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ exists and $\|\nabla u\| \leq \|\tilde{u}'\|$.

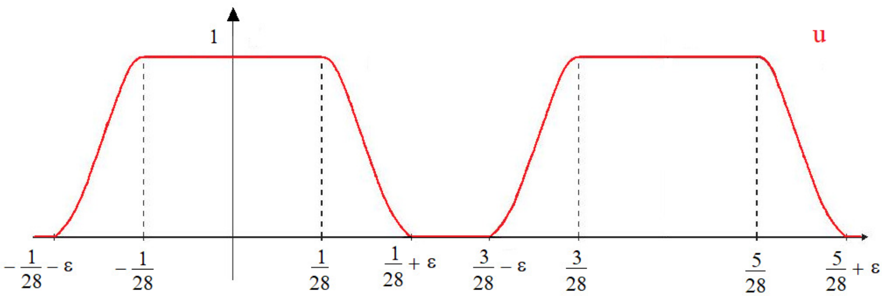


FIGURE 3.1. Graph of $\hat{u}$

Finally, fix a real number $0 < \kappa < 3$ and let $\mathcal{F} = \{g_1, g_2\}$ be the family given by Lemma 2.5 for the second factor S^1, satisfying the properties claimed in the lemma for $k = \frac{\kappa}{\|\hat{u}'\|}$.

Define

$$\hat{f} : K^\varepsilon \times S^1 \to \mathbb{T}^n, \quad \hat{f}(x, y) = \begin{cases} (14x, g_1(y)) & \text{if } x \in K_0^\varepsilon \\ (14x, g_2(y)) & \text{if } x \in K_1^\varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

and extend $\hat{f}$ to

$$f : \mathbb{T}^{n-1} \times S^1 \to \mathbb{T}^n, \tag{4}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} u(x) \cdot \hat{f}(x, y) + (1 - u(x)) \cdot A(x, y) & \text{if } x \in K^\varepsilon \\ A(x, y) & \text{if } x \notin K^\varepsilon \end{cases}$$

REMARK 3.2. — The following properties are straightforward to check:

1. Calling $\hat{f}(x, y) = (14x, \hat{f}_2(y))$, then $f(x, y) = (14x, u(x) \cdot \hat{f}_2(y) + (1 - u(x)) \cdot y)$.
2. $\|Dg_1\| = \|Dg_2\| = \frac{3}{2}$, hence $\|D\hat{f}_2\| < 2$.
3. By construction of f, $\|\mathrm{Id}_{S^1} - \hat{f}_2\| \leq \frac{\kappa}{\|u'\|}$.
4. The restriction $f_{|(K \times S^1)} = \hat{f}$.
5. The restriction $f_{|(K^\varepsilon \times S^1)^c} = A$.
6. $K \times S^1$ is a proto-blender for f relative to $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^{n-1} \times S^1$.

3.2. Dynamics of f. — The most evident dynamical feature f has is a strongly dominant expanding direction along the first coordinates. It follows that there exists a family of unstable cones for f in the orthogonal subspace of the last canonical vector $\vec{e_n}$, whereas $\vec{e_n}$ itself can be regarded as a central direction. We pause here to check the existence of the unstable cone field for f.

Recall that for $x \in M$, we call *cone* of parameter a, index $n-k$ and vertex x to

$$C_a^u(x) = \left\{(v_1, \dots, v_n) \in T_xM \mid \frac{\|(v_{k+1}, \dots, v_n)\|}{\|(v_1, v_2, \dots, v_k)\|} < a\right\}$$

and that f admits an *unstable cone* of parameter a and vertex $x \in M$, if there exists $C_a^u(x) \subset T_xM$ such that $\overline{D_xf(C_a^u(x))} \setminus \{0\} \subset C_a^u(f(x))$.

Lemma 3.3. — *The map f defined by (4) admits an unstable cone of parameter κ, index 1, and vertex (x, y) at every $(x, y) \in \mathbb{T}^{n-1} \times S^1$.*

Proof. — The differential of f at (x, y) is given by

$$D_{(x,y)}f = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ \nabla u(x) \cdot (\hat{f}_2(y) - y) & u(x) \cdot D_y\hat{f}_2 + (1 - u(x)) \cdot y \end{pmatrix}.$$

Then for all vectors (v_1, v_2) of the tangent space of $\mathbb{T}^n$ at (x, y) it is

$$D_{(x,y)}f(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 14v_1 \\ [\nabla u(x) \cdot (\hat{f}_2(y) - y)]v_1 + [u(x) \cdot D_y\hat{f}_2 + (1 - u(x)) \cdot y]v_2 \end{pmatrix}.$$

Considering now all vectors (v_1, v_2) in $C_\kappa^u(x, y)$ and let $(w_1, w_2) := Df_{(x,y)}(v_1, v_2)$ we see that it is unstable by computing

$$\begin{aligned} \frac{\|w_2\|}{\|w_1\|} &= \frac{\big\|[\nabla u(x) \cdot (\hat{f}_2(y) - y)]v_1 + [u(x) \cdot D_y\hat{f}_2 + (1 - u(x)) \cdot y]v_2\big\|}{14|v_1|} \\ &\leq \frac{\|\nabla u(x)\| \cdot \|\hat{f}_2(y) - y\|}{14} + \frac{(|u(x)| \cdot \|D_y\hat{f}_2\| + |1 - u(x)| \cdot \|\mathrm{Id}\|) \cdot \kappa}{14} \\ &\leq \frac{\kappa}{14} + \frac{4\kappa}{14} < \kappa, \end{aligned}$$

where in the first inequality we apply the triangle inequality and that $(v_1, v_2) \in C_\kappa^u(x, y)$ and in the second inequality we use:

- $(v_1, v_2) \in C_\kappa^u(x, y)$,
- $\|\nabla u(x)\| \cdot \|\hat{f}_2(y) - y\| < |\hat{u}'(x)| \cdot \|\hat{f}_2(y) - y\| \leq \kappa$ by Remark 3.2,
- $\|D\hat{f}_2\| < 2$ by Remark 3.2,
- $\|\mathrm{Id}\| \leq 2$,
- $\max_{x \in \mathbb{R}}\{|u(x)|, |1 - u(x)|\} \leq 1$. ◻

Lemma 3.4. — *For all $v \in C_\kappa^u(x, y)$ it holds that $\|D_xf(v)\| > 4\|v\|$.*

Proof. — Let $v=(v_1,v_2)\in C^u_\kappa(x,y)$ and recall that $0<\kappa<3$, then

$$\left(\frac{\|D_{(x,y)}f(v_1,v_2)\|}{4\cdot\|(v_1,v_2)\|}\right)^2 \geq \frac{(14\cdot\|v_1\|)^2}{16\cdot(\|v_1\|^2+|v_2|^2)} \geq \frac{196}{16\big(1+\big(\frac{|v_2|}{\|v_1\|}\big)^2\big)} > \frac{196}{160} > 1.$$

□

Remark 3.5. — Recall that if $B_k(x,r)$ denotes a ball of dimension k, then the kth dimensional *inradius* of a compact set X is defined as $\mathrm{ir}_k(X) := \max_{x\in X}\{r>0 \mid B_k(x,r)\subset X\}$.

Since the definition of an unstable cone is independent from the construction of f, κ can be chosen small enough such that for all disks γ satisfying that the tangent space $T\gamma\subset C^u_\kappa(\gamma)$ at all times, then inradius and diameter of γ can be identified. For the rest of the article we assume that κ is small enough such that this identification holds.

Observe that if X is a manifold and Y an open subset such that $\mathrm{ir}(Y)\geq \mathrm{diam}(X)$ then $Y=X$.

Corollary 3.6. — *For all disks γ such that for all t, where γ is defined, it holds that $T_t\gamma\subset C^u_\kappa(\gamma(t))$, the inradius satisfies $\mathrm{ir}_k(f(\gamma))\geq 4\,\mathrm{ir}_k(\gamma)$ for all $k\leq n-1$.*

Corollary 3.7. — *There exists a C^1 neighborhood $\mathcal{U}_f$ of f such that all g in $\mathcal{U}_f$ admit an unstable cone of parameter κ, index 1 and vertex (x,y) at every $(x,y)\in\mathbb{T}^n$ for which Corollary 3.6 holds.*

We now highlight some other relevant dynamical features that the map f possesses. All of them are straightforward to check:

Remark 3.8. —
1. $K^\varepsilon\subset[-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^{n-1}$.
2. $f(K^\varepsilon_0\times S^1)\cap f(K^\varepsilon_1\times S^1)\supset[-\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^{n-1}\times S^1$.
3. The set $K^\varepsilon\times S^1$ is a protoblender for f relative to $[\frac{-1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]^{n-1}\times S^1$.
4. The points $(0,\dots,0,1)$ and $(\frac{2}{13},\dots,\frac{2}{13},\frac{15}{13})$ are saddle fixed points for f, and the points $(0,\dots,0)$ and $(\frac{2}{13},\dots,\frac{2}{13})$ are repelling fixed points for f.

For the sake of simplicity, from now on the points $(0,\dots,0)$ and $(\frac{2}{13},\dots,\frac{2}{13})$ in $\mathbb{T}^{n-1}$ will be referred to as 0 and $\frac{2}{13}$ when there is no risk of confusion.

5. The local unstable manifold at $(0,1)$ is $W^u_{\mathrm{loc}}(0,1)=(-\varepsilon,\varepsilon)^{n-1}\times\{1\}$.
6. If $B\subset(1-a_0,1+a_0)\subset S^1$ satisfies $B:=W^s_{\mathrm{loc}}(1)$ for g_1, then the local stable manifold for f at $(0,1)$ is $W^s_{\mathrm{loc}}(0,1)=\{0\}\times B$.

We now prove that both the local stable and unstable manifolds at $(0,1)$ are dense in $\mathbb{T}^n$. This will yield that f is C^1 transitive.

Lemma 3.9. — *The unstable set $W^u(0,1)$ is forward f-dense in $\mathbb{T}^n$.*

Proof. — Let $V = V_1 \times V_2$ be any open set in $\mathbb{T}^n = \mathbb{T}^{n-1} \times S^1$. We show that there exists a point in $W^u_{\mathrm{loc}}(0,1) = (-\varepsilon, \varepsilon)^{n-1} \times \{1\}$ with a forward iterate in V.

Let f be $f(x,y) = (14x, f_2(x,y))$. Since $f_1(x) = 14x$ expands, there exists a natural number k such that $f^k(W^u_{\mathrm{loc}}(0,1)) \supset \mathbb{T}^{n-1} \times \{f_2^k(0,1)\}$. Since $\mathrm{IFS}(\mathcal{F})$ is minimal, there exists a point in the orbit of $\langle \mathcal{F} \rangle^+(f_2^k(0,1))$ that intersects V_2 at, let's say, $f_2^{k+j}(0,1)$. This implies $f^{k+j}(W^u_{\mathrm{loc}}(0,1)) \cap \mathbb{T}^{n-1} \times V_2 \neq \emptyset$ which in turn yields $f^{k+j}(W^u_{\mathrm{loc}}(0,1)) \cap V \neq \emptyset$. □

Lemma 3.10. — *The stable set $W^s(0,1)$ is backwards f-dense in $\mathbb{T}^n$.*

Proof. — Let $V = V_1 \times V_2$ be any open set in $\mathbb{T}^{n-1} \times S^1$ and let $W^s_{\mathrm{loc}}(0,1) = \{0\} \times B$ where $B = W^s_{\mathrm{loc}}(1)$ for g_1. Let $p = (p_1, \dots, p_{n-1}, p_n) \in V$ and let $\gamma : (-r,r)^{n-1} \to V$ be a well-defined disk with $\gamma(t_1, \dots, t_{n-1}) = (p_1 + t_1, \dots, p_{n-1} + t_{n-1}, p_n)$. Since for all $t \in (-r,r)^{n-1}$ and all $v \in T_{\gamma(t)}V$ the differential $D_t\gamma(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0)$, it holds that $T_t\gamma \subset C^u_\kappa(\gamma(t))$ at all times. By Corollary 3.6, for all $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ir}_{n-1}(f^k(\gamma)) \geq 4^k \,\mathrm{ir}_{n-1}(\gamma)$. Since $\mathrm{diam}(\mathbb{T}^{n-1}) \leq \sqrt{n}$, there exists $k_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $k \geq k_0$, $f^k(\gamma) \supset \mathbb{T}^{n-1} \times \{f_2^k(p)\}$. Again, since $\mathrm{IFS}(\mathcal{F})$ is minimal there exists a branch of the orbit $\langle \mathcal{F} \rangle^+(f_2^{k_0}(p))$ that enters B at, say $\langle \mathcal{F} \rangle^j(f_2^{k_0}(p))$. In turn, $f^{k_0+j}(\gamma) \cap \{0\} \times B \neq \emptyset$. Therefore, there exists a point in V (in γ) with a forward iterate entering in $W^s_{\mathrm{loc}}(0,1)$. □

Theorem 3.11. — *The map f defined by (4) is transitive.*

Proof. — According to Lemmas 3.9 and 3.10 the open set $U \times B$ is an open neighborhood of (p, a_1) that is dense under forward and backward iteration by f. Hence, it holds that for all open sets A and B in $\mathbb{T}^n$, there exists a natural number k such that $f^k(A) \cap B \neq \emptyset$, which yields transitivity for f. □

We now turn our attention to additionally proving robustness in Theorem 3.11. We begin with a series of considerations about the perturbation that are required to understand its dynamics.

Start with a small C^1 neighborhood $\mathcal{V}_f$ of f. Notice first that after item (2) at Remark 3.8, all maps in $\mathcal{V}_f$ preserve the blending region $K \times S^1$. As well, by Corollary 3.7, all maps in $\mathcal{V}_f$ admit a field of unstable cones for which Corollary 3.6 holds.

Recall that $\{0\} \times S^1$ and $\{\frac{2}{13}\} \times S^1$ are f-invariant disjoint submanifolds to which the restriction of f configures a minimal iterated function system.

Let G be an arbitrary map in $\mathcal{V}_f$, by item (4) at Remark 3.8, G admits two saddle fixed points we name $(0,1)'$ and $(\frac{2}{13}, \frac{15}{13})'$ which are the continuation points of the saddles of f. Recall that $f_{|\{0\} \times S^1} = g_1$ is a Morse–Smale diffeomorphism, so bcause of their stability there exists $\varepsilon > 0$ such that for every $g : \{0\} \times S^1 \to \{0\} \times S^1$ satisfying $\|g - g_1\| < \varepsilon$, there exists a homeomorphism H such that $H \circ g_1 = g \circ H$.

Notice that $f([\frac{-1}{2\cdot 14^2}, \frac{1}{2\cdot 14^2}]^{n-1} \times S^1) = K_0 \times S^1$. It follows that the preimage map $f^{-1} : K_0 \times S^1 \to [\frac{-1}{2\cdot 14^2}, \frac{1}{2\cdot 14^2}] \times S^1$ is a diffeomorphism satisfying that $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-n}(K_0 \times S^1) = \{0\} \times S^1$, which yields that f^{-1} is normally hyperbolic at $\{0\} \times S^1$. Apply Theorem 2.3 to see that $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G^{-n}(K_0 \times S^1) = N$ is a unique G-invariant submanifold of $\mathbb{T}^n$ and that there exists a C^1 diffeomorphism $h_1 : \{0\} \times S^1 \to N$ that can be set as close to the canonical inclusion as desired by choosing G close enough to f. Then take $\mathcal{V}_f$ and reduce it as much needed to satisfy $\|g_1 - h_1^{-1} \circ G_{|N} \circ h_1\| < \varepsilon$. In turn there exists a homeomorphism $H_1 : \{0\} \times S^1 \to N$ such that $H_1 \circ g_1 = G_{|N} \circ H_1$ by the stability argument about g_1 right above. Observe that $H_1 = h_1 \circ H$ and that $(0, 1)' \in N$. An identical argument yields that at $(\frac{2}{13}, \frac{15}{13})'$ there exists a G-invariant submanifold N' which is C^1-diffeomorphic to $\{\frac{2}{13}\} \times S^1$ and a conjuating homeomorphism $H_2 : \{\frac{2}{13}\} \times S^1 \to N'$ such that $H_2 \circ g_2 = G_{|N'} \circ H_2$.

We proved that $G_{|N}$ is conjugate to g_1 and that $G_{|N'}$ is conjugate to g_2.

Remark 3.12. — Since $N = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G^{-n}(K_0 \times S^1)$ for every continuous $(n-1)$-disk γ that crosses K_0 intersecting it in every side of its boundary, $\gamma \cap N \neq \emptyset$.

Remark 3.13. — The maps $G_{|N}$ and $G_{|N'}$ do not configure an IFS since they are not defined on the same support, but it comes from Lemma 2.5 and the conjugations stated above that if $\pi : \mathbb{T}^{n-1} \times S^1 \to S^1$, $\pi(x, y) = y$, is the canonical projection then $\pi(\{G_{|N}$ is a contraction or $G_{|N'}$ is a contraction$\}) = S^1$.

We proceed now to prove a last series of lemmas that will lead to the proof of robust transitivity for the map defined by (4). We start by showing that Remark 3.13 yields that any neighborhood of $(0, 1)'$ has a preimage by a power of the perturbation G that projects surjectively onto the second factor S^1.

Lemma 3.14. — *For every small open neighborhood U of $(0, 1)'$ in $\mathbb{T}^n$ and any open subset $U' \subset U$, there exists $m_0 \in \mathbb{N}$ such that $\pi(G^{-m}(U')) = S^1$ for all $m \geq m_0$.*

Proof. — First notice that if $\pi : \mathbb{T}^{n-1} \times S^1 \to S^1$ is the canonical projection onto the second factor, $\|(\pi \circ G) - (\pi \circ f)\| < \|G - f\|$ holds. By Remark 3.2 and Definition 3 we conclude that $(\pi \circ f)_{|K_0 \times S^1} = g_1$ and that $(\pi \circ f)_{|K_1 \times S^1} = g_2$. Thereafter, since g_1 and g_2 are Morse–Smale diffeomorphisms, $\mathcal{V}_f$ can be reduced until $(\pi \circ G)_{|K_0 \times S^1}$ is conjugate to g_1 and $(\pi \circ G)_{|K_1 \times S^1}$ is conjugate to g_2. The same accounts for the local inverse image map G^{-1}.

Let then U be any small open neighborhood of $(0, 1)'$ and let $U' \subset U$ be any open subset. Recall that G preserves the blending region $K \times S^1$, so the set $G^{-1}(U')$ contains a preimage component in $K_0 \times S^1$ and another one in $K_1 \times S^1$. By the conjugations above and the proof of Lemma 2.5, $\pi(G^{-1}(U'))$ is a curve with strictly larger length than $\pi(U')$ in either one of those components. Call X_1 the component that has strictly larger projection and consider $G^{-1}(X_1) \subset$

$G^{-2}(U')$. Find again a component of $G^{-1}(X_1)$ in $K_0 \times S^1$ and another one in $K_1 \times S^1$, project them onto S^1 and choose as X_2 the one that projects with strictly larger length. Repeat the process until finding, via the same argument as in Lemma 2.5, a natural number m_0 such that $\pi(G^{-m}(U')) = S^1$ for all $m \geq m_0$. □

We are now in the position to state and prove the last two lemmas required for the proof of robust transitivity. For the local stable and unstable manifolds of G at $(0,1)'$, let ρ be a transversal curve to $\mathbb{T}^{n-1}$ centered at $(0,1)'$ contained in the local stable manifold of $G_{|N}$ in N. It holds that $W^s_{\text{loc}}((0,1)') := \{\rho(t)\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)} \subset N$ with $\rho(0) = (0,1)'$. In the same fashion there exists an $(n-1)$-disk λ which is transversal to N such that $W^u_{\text{loc}}((0,1)') := \{\lambda(t)\}_{t\in(-\varepsilon,\varepsilon)^{n-1}}$ with $\lambda(0) = (0,1)'$.

Lemma 3.15. — *$W^u_{\text{loc}}((0,1)')$ is forward G-dense in $\mathbb{T}^n$.*

Proof. — Let $U = U_1 \times U_2$ be a small open neighborhood of $(0,1)'$ in $\mathbb{T}^n$ and suppose that λ is not forward G-dense in U. This means that there exists an open subset $U' \subset U$ such that for all $n \in \mathbb{N}$, $G^n(\lambda) \cap U' = \emptyset$. Apply Lemma 3.14 to find m_0 such that $\pi(G^{-m}(U')) = S^1$ for all $m \geq m_0$ and consider the preimage $G^{-m_0-1}(U')$ contained in $K_0 \times S^1$. Since $(0,1)'$ is a saddle for G which only contracts in $G_{|N}$, there exists $k_0 \geq m_0 + 1$ such that $G^{-k_0}(U') \cap \lambda \neq \emptyset$. This gives a contradiction. Consequently, λ is forward G-dense in U. By expansion in the first factor we have that λ is forward G-dense in $\mathbb{T}^{n-1} \times U_2$. Since $(\frac{2}{13}, \frac{15}{13})'$ is a saddle for G which contracts only in $G_{|N'}$ and Remark 3.12 gives that by this point for some $m \in \mathbb{N}$, $G^m(\lambda) \cap N' \neq \emptyset$, λ is forward G-dense in $\mathbb{T}^{n-1} \times \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (G_{|N'})^k(U_2)$ and by an analogous argument it is also forward G-dense in $\mathbb{T}^{n-1} \times \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (G_{|N})^j(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (G_{|N'})^k(U_2))$ which is the whole manifold $\mathbb{T}^n$. □

For the next lemma, let $(0,0)'$ be the source fixed point of G continuated from the source at $(0,0)$ of f and let $G := (G_1, \ldots, G_n)$.

Lemma 3.16. — *$W^s_{\text{loc}}((0,1)')$ is backwards G-dense in $\mathbb{T}^n$.*

Proof. — Let $U = U_1 \times U_2$ be any open set in $\mathbb{T}^{n-1} \times S^1$ and $\gamma : (-r,r)^{n-1} \to U$ be a well-defined $(n-1)$-disk such that $T\gamma$ belongs to $C^u_\kappa(\gamma)$, the cone field of G at γ, at all times. Therefore by Corollary 3.6, for all $m \in \mathbb{N}$, $\text{ir}_{n-1}(G^m(\gamma)) \geq 2^m \, \text{ir}_{n-1}(\gamma)$. Since $\text{diam}(\mathbb{T}^{n-1}) \leq \sqrt{n}$, Remark 3.5 provides existence of $m_0 \in \mathbb{N}$ such that for all $m \geq m_0$, $G^m(\gamma) \supset \mathbb{T}^{n-1} \times G^m_n(\gamma)$. Furthermore, Remark 3.12 ensures that for all $m \geq m_0$, both $G^m(\gamma) \cap N \neq \emptyset$ and $G^m(\gamma) \cap N' \neq \emptyset$.

To finish, if $(0,0)' \notin G^{m_0}(\gamma)$, since $(0,1)'$ is attracting for $G_{|N}$ then $G^{m_0+j}(\gamma) \cap \rho \neq \emptyset$ for some $j \in \mathbb{N}$. If, on the contrary, $(0,0)' \in G^{m_0}(\gamma)$ then $G^{m_0}(\gamma) \cap N' \neq \{(\frac{2}{13}, \frac{15}{13})'\}$ since κ is small and there is a large distance between $(0,0)'$ and $(\frac{2}{13}, \frac{15}{13})'$, due to the geometry of $\mathcal{F}$ at Lemma 2.5 together with the conjugations explained right after Theorem 3.11. In the latter case, since $(\frac{2}{13}, \frac{15}{13})'$ is a sink for $G_{|N'}$ it holds that $G^{m_0+j}(\gamma) \cap W^s_{\mathrm{loc}}((\frac{2}{13}, \frac{15}{13})') \neq \emptyset$ and consequently by attraction of $(0,1)'$ for $G_{|N}$ $G^{m_0+j+k}(\gamma) \cap \rho \neq \emptyset$. In either case, there exists $m \in \mathbb{N}$ such that $G^m(\gamma) \cap \rho \neq \emptyset$ which means that $G^{-m}(\rho) \cap \gamma \neq \emptyset$ which gives the claim of the lemma since $\gamma \subset U$. □

Remark 3.17. — Lemma 3.16 admits a simple geometrical explanation relying on the following fact from Euclidean spaces: if $\vec{v}$ is a vertical vector and $\mathcal{H}$ is a horizontal hyperplane, then $\vec{v}$ and $\mathcal{H}$ intersect in a robust way. Given, then, that N and N' are C^1 close to S^1 they can be regarded as 'vertical' submanifolds. Since $T\gamma \subset C^u_\kappa(\gamma)$ and C^u_κ is 'horizontal' they are orthogonal in the universal cover $\mathbb{R}^n$, but γ grows unboundedly in all directions inside the hyperplane so they must intersect in the quotient $\mathbb{T}^n$. Once they intersect, robustness of Lemma 2.5 finishes the proof.

Theorem 3.18. — *The map f defined by (4) is robustly transitive.*

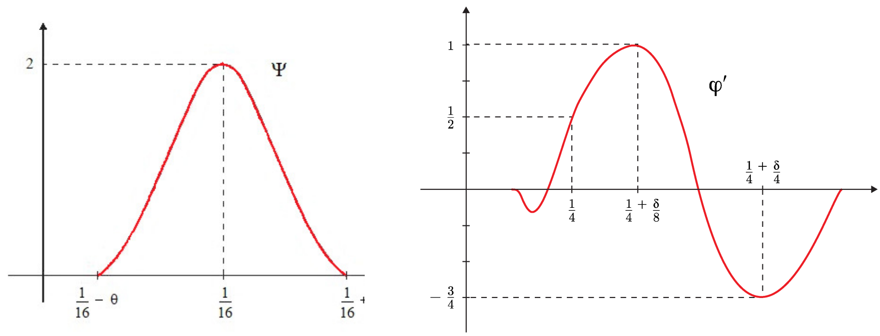
Proof. — Let $\mathcal{V}_f$ be a C^1 neighborhood of f as described above and $G \in \mathcal{V}_f$. Since G satisfies Lemma 3.15 and Lemma 3.16, G also satisfies Theorem 3.11. Since G is an arbitrary map in $\mathcal{V}_f$, f is C^1 robustly transitive. □

4. A singular endomorphism F of $\mathbb{T}^n$

Now that we have defined a robustly transitive endomorphism f given by a blending region contained in $K \times S^1$, we proceed to the second step of the construction by (robustly) artificially introducing critical points in the complement of $K^\varepsilon \times S^1$. The technique used to introduce the critical points is inspired by the construction carried on in [9, Section 2.2]. Once the surgery over f is performed, a map F satisfying Theorem 1.1 arises.

As a short set of preliminaries, we first provide the definitions of the singularities of any map $h : M \to M$; recall that M denotes a real manifold of dimension m. We say that $x \in M$ is a *critical point* or *singularity* for h if the differential map at x, $D_x h$ is not surjective. Observe that x is a singularity for h if and only if the rank of the Jacobian matrix satisfies $\mathrm{rk}(D_x h) < m$, if and only if the determinant $\det(D_x h) = 0$. The *critical set* of h is $S_h = \{x \in M \mid \mathrm{rk}(D_x h) < m\}$. We say that h is a *singular endomorphism* if the critical set S_h is nonempty, and we say that h is a *persistently singular endomorphism* if there exists a neighborhood $\mathcal{U}_h$ of h in the C^1 topology such that all $g \in \mathcal{U}_h$ satisfy $S_g \neq \emptyset$.

4.1. Construction of F. — *Sketch of the construction.* We choose a point not in $K^\varepsilon \times S^1$ and set a ball centered at this point, inside the complement of $K^\varepsilon \times S^1$. By means of standard surgical procedures, we perturb f to introduce a set of critical points inside the ball and with the additional property that the resulting critical set is persistent. Since the surgery does not affect the blending region in $K \times S^1$, the robust transitivity of the map f defined by (4) is inherited by the new map. We call the new map F, and it satisfies the claim in the title of the article.



(a) (b)

FIGURE 4.1. Graphs of ψ and φ' (taken from [14])

Let $p = (\frac{1}{4}, 0, \ldots, 0, \frac{1}{4}) \in \mathbb{T}^n$. Our goal is to define a ball of center p to perform a perturbation in order to obtain the map F we seek. To achieve this goal we need to fix a series of technical parameters; the choice to set all of them at the same time and at the beginning of the construction is in expectance of avoiding darkness and that it will be clear how they depend on each other.

Start with $r > 0$ satisfying that the ball $B_{(p,r)} \cap \left(K^\varepsilon \times S^1\right) = \emptyset$, this is possible since $p \notin \left(K^\varepsilon \times S^1\right)$. Fix a second parameter θ such that $0 < \theta < \frac{r}{2}$ and define a smooth (C^∞) function $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with a unique critical point at $\frac{1}{16}$, with $\psi(\frac{1}{16}) = 2$ and $\psi(x) = 0$, for all x in the complement of $(\frac{1}{16} - \theta, \frac{1}{16} + \theta)$, and an axis of symmetry in the line $x = \frac{1}{16}$, as shown in Figure 4.1(a).

Finally set a last parameter δ, with $0 < \delta < 2\theta$ verifying the following condition: since the derivative of ψ is bounded once θ has been fixed, name the bound as $m_\psi := m_\psi(\theta) = \max\{|\psi'(x)|, x \in \mathbb{R}\}$ and impose on δ that $2 \cdot m_\psi \cdot r \cdot \delta < 11\kappa$.

Having fixed δ, consider another smooth function $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that:

- φ' is as shown in Figure 4.1 (b).
- $\frac{-3}{4} \leq \varphi'(x) \leq 1$ for all $x \in \mathbb{R}$. This gives $|\varphi'(x)| \leq 1$ for all $x \in \mathbb{R}$.
- $\varphi'(x) = 0$ for all $x \notin [\frac{1}{4} - \frac{\delta}{4}, \frac{1}{4} + \frac{3\delta}{4}]$.
- $\varphi'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$, $\varphi'(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{8}) = 1$, $\varphi'(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{4}) = -\frac{3}{4}$, $\varphi(\frac{1}{4}) = 0$.

REMARK 4.1. — $\max\{|\varphi(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leq \delta$.

We are now in the condition to define a perturbation of f in the direction of the last canonical vector $\vec{e_n}$ that depends on r, θ and δ, which by simplicity we call only F and is defined at $x = (x_1, \dots, x_n)$ as

(5)

$$F_{r,\theta,\delta} : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n, \quad F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{if } x \notin B_{(p,r)} \\ A(x) - \varphi(x_n) \cdot \psi(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2) \cdot \vec{e_n} & \text{if } x \in B_{(p,r)} \end{cases}$$

Remark 4.2. —
1. For all $x \notin B_{(p,\frac{3\delta}{4})}$, it holds that $F(x) = f(x)$.
2. For all $x \notin K^\varepsilon \times S^1$, it holds that $f(x) = A(x)$.

To make reading easier we will denote $\varphi(x_n)$ as φ and $\psi(\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2)$ as ψ omitting the evaluations appearing in the definition.

Lemma 4.3. — *The endomorphism F defined by (5) is persistently singular.*

Proof. — Start computing the differential D_xF at $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_{(p,r)}$ to get

$$(6)\quad D_xF = \begin{pmatrix} 14 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 14 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 14 & 0 \\ -2\cdot x_1\cdot\varphi\cdot\psi' & -2\cdot x_2\cdot\varphi\cdot\psi' & \cdots & -2\cdot x_{n-1}\cdot\varphi\cdot\psi' & 1-\varphi'\cdot\psi \end{pmatrix}.$$

Since the critical set of F is defined as $S_F = \{x \in \mathbb{T}^n \mid \det(D_xF) = 0\}$, (6) provides $\det(D_xF) = 14^{n-1}\cdot(1-\varphi'\cdot\psi)$. In turn, $S_F = \{x \in \mathbb{T}^n \mid 1-\varphi'\cdot\psi = 0\}$.

Notice that S_F is not empty since $p = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4}) \in S_F$. To prove that S_F is persistent, consider the points $q_1 = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4} + \frac{\delta}{4})$ and $q_2 = (\frac{1}{4}, 0, \dots, 0, \frac{1}{4} + \frac{\delta}{8})$ both in $B_{(p,r)}$. Evaluating determinants $\det(D_{q_1}F) = \frac{5}{2}\cdot 14^{n-1}$ and $\det(D_{q_2}F) = -14^{n-1}$. Therefore there exists a neighborhood $\mathcal{U}_F \in C^1$ such that every $g \in \mathcal{U}_F$ satisfies $S_g \neq \emptyset$. $\square$

4.2. Dynamics of F. — We now turn to the last part of the article where we show that F is C^1 robustly transitive. To prove this, observe first that after Remark 4.2, Lemma 3.15 holds for F automatically. If we prove that Lemma 3.16 also holds for F, then we can apply the same reasoning of Theorem 3.18 to F to have the result. Notice that since the perturbation takes place only in the last coordinate, Lemma 3.16 will hold for F if we show that F admits an unstable cone $C^u_\kappa(x)$ of index 1 at every point $x \in B_{(p,r)}$ which satisfies $\mathrm{ir}_{n-1}(F(\gamma)) \geq 4\,\mathrm{ir}_{n-1}(\gamma)$ for each $(n-1)$-disk γ with $T\gamma \subset C^u_\kappa(\gamma)$.

Lemma 4.4. — *For all $x \in B_{(p,r)}$, it holds that $C^u_\kappa(x)$ is an unstable cone for F.*

Before moving on to the proof, we will denote as $\tilde{v} = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ whenever $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Proof. — From (6), we have for all $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in C^u_\kappa(x)$:

$$D_xF(v) = (14v_1, \ldots, 14v_{n-1}, -2 \cdot \langle \tilde{x}, \tilde{v}\rangle \cdot \varphi \cdot \psi' + v_n \cdot (1 - \varphi' \cdot \psi)).$$

Letting $(u_1, \ldots, u_n) := D_xF(v)$ be u and performing calculations, we have:

$$\begin{aligned}\frac{|u_n|}{\|\tilde{u}\|} &= \frac{|-2 \cdot \langle \tilde{x}, \tilde{v}\rangle \cdot \varphi \cdot \psi' + v_n \cdot (1 - \varphi' \cdot \psi))|}{\|14\tilde{v}\|} \\ &\le \frac{2 \cdot \|\tilde{x}\| \cdot \|\tilde{v}\| \cdot |\varphi| \cdot |\psi'|}{\|14\tilde{v}\|} + \frac{|1 - \varphi' \cdot \psi| \cdot |v_n|}{\|14\tilde{v}\|} \\ &< 2 \cdot r \cdot \left(\frac{1}{14}\right) \cdot \delta \cdot m_\psi + \frac{3\kappa}{14} < \kappa.\end{aligned}$$

Above, for the first inequality we use the triangular and Cauchy–Schwarz inequalities; for the second one we use:

- $v \in C^u_\kappa(x)$,
- $\|\tilde{x}\| \le \|x\| < r$,
- $|\varphi| \le \delta$,
- $|\psi'| < m_\psi$,
- $|2 - \varphi' \cdot \psi| \le 3$ since $\frac{-3}{4} \le \varphi' \le 1$ and $0 \le \psi \le 2$.

For the third one we use the condition $2 \cdot m_\psi \cdot r \cdot \delta < 11\kappa$ imposed over δ. ☐

Lemma 4.5. — *For all $x \in B_{(p,r)}$ and all $v \in C^u_\kappa(x)$, it holds that $\|D_xF(v)\| > 4\|v\|$.*

Proof. — Let $v_1 \in \mathbb{R}^{n-1}$ and $v_2 \in \mathbb{R}$ such that $v = (v_1, v_2) \in C^u_\kappa(x) \subset T_x\mathbb{T}^n$. Recall that $0 < \kappa < 3$ and compute:

$$\left(\frac{\|D_{(x,y)}F(v_1, v_2)\|}{4 \cdot \|(v_1, v_2)\|}\right)^2 \ge \frac{196 \cdot \|v_1\|^2}{16 \cdot (\|v_1\|^2 + v_2^2)} \ge \frac{196}{16 \cdot \left(1 + \frac{v_2^2}{\|v_1\|^2}\right)} > \frac{196}{160} > 1.$$

☐

Lemma 4.6. — *The map F defined by (5) is C^1 robustly transitive.*

Proof. — From Lemmas 4.4 and 4.5 we conclude that Lemma 3.16 holds for F. It was already mentioned that Lemma 3.15 holds for F. Consequently, Theorem 3.18 holds for F. ☐

We are now in the condition to give the proof of the main theorem of the article:

Proof of Theorem 1.1. — Define $\mathcal{U}_1 \in C^1$ an open neighborhood of F where Lemma 4.3 holds and $\mathcal{U}_2 \in C^1$ an open neighborhood of F where Lemma 4.6 holds. Then, all maps belonging to $\mathcal{U}_F = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ are C^1 robustly transitive and have nonempty critical sets. ☐

5. Final remarks

The example presented in this article shows the existence of C^1 robustly transitive maps displaying critical points on any dimension. Yet, many open questions remain: *Is* $\mathbb{T}^n$ *the only high dimensional manifold supporting such a map? Is it possible to extend this type of construction to other quotient manifolds? Would it be possible to carry on the proof starting from a matrix whose induced map belongs to a different isotopy class? Is it possible that a fiber bundle (instead of a product) admits a construction of this type?* just to mention some of them.

Acknowledgements. — The author would like to thank Prof. Jorge Iglesias for fruitful conversations regarding this problem and to Prof. Roberto Markarian and Prof. Lorenzo J. Díaz for their generous attitude towards the author and his work.

The author also wishes to thank Prof. Rafael Potrie for his reading and comments regarding the construction, which helped improving the outcome of the article. And last but not least, many thanks to Ms. Boubakeur and everyone at the *Bulletin* for providing with a great atmosphere all along the process of publication.

BIBLIOGRAPHY

[1] P. Berger & A. Bounemoura – "A geometrical proof of the persistence of normally hyperbolic submanifolds", *Dynamical Systems* **28** (2013), no. 4, p. 567–581.

[2] P. Berger & A. Rovella – "On the inverse limit stability of endomorphisms", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **30** (2013), p. 463–475.

[3] C. Bonatti, S. Crovisier, L. Díaz & A. Wilkinson – "What is ... a blender?", 2016, arxiv:1608.02848v1.

[4] C. Bonatti & L. Díaz – "Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms", *Ann. of Math (2)* (2014), no. 143, p. 357–396.

[5] C. Bonatti, L. Díaz & E. Pujals – "A C^1 generic dichotomy for diffeomorphisms: weak forms of hyperbolicity or infinitely many sinks or sources", *Ann. of Math (2)* **158** (2003), p. 355–418.

[6] M. Golubitsky & V. Guillemin – *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics, no. 14, Springer, New York, 1973.

[7] B. Hasselblatt & A. Katok – *A first course in dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[8] A. Homburg & M. Nassiri – "Robust minimality of iterated function systems with two generators", *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **34** (2013), p. 1914–1929.

[9] J. Iglesias, C. Lizana & A. Portela – "Robust transitivity for endomorphisms admitting critical points", *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** (2016), no. 3, p. 1235–1250.

[10] J. Iglesias & A. Portela – "An example of a map which is C^2 robustly transitive but not C^1 robustly transitive", *Colloq. Math.* **2** (2018), no. 152, p. 285–297.

[11] C. Lizana & E. Pujals – "Robust transitivity for endomorphisms", *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **33** (2013), p. 1082–1114.

[12] C. Lizana & W. Ranter – "Topological obstructions for robustly transitive endomorphisms on surfaces", 2017, arXiv:1711.02218.

[13] ———, "New classes of C^1 robustly transitive maps with persistent critical points", 2019, arXiv:1902.06781.

[14] J. Morelli – "A persistently singular map of $\mathbb{T}^n$ that is C^2 robustly transitive but is not C^1 robustly transitive", *J. Korean Math. Soc.* **58** (2021), no. 4, p. 977–1000.

[15] R. M. né – "An ergodic closing lemma", *Ann. of Math* **116** (1982), p. 503–540.

Bull. Soc. Math. France
149 (3), 2021, p. 521-546

MULTIVARIABLE (φ, Γ)-MODULES AND REPRESENTATIONS OF PRODUCTS OF GALOIS GROUPS: THE CASE OF THE IMPERFECT RESIDUE FIELD

by Jishnu Ray, Feng Wei & Gergely Zábrádi

Abstract. — Let K be a complete discretely valued field with mixed characteristic $(0, p)$ and imperfect residue field k_α. Let Δ be a finite set. We construct an equivalence of categories between finite dimensional $\mathbb{F}_p$-representations of the product of Δ copies of the absolute Galois group of K and multivariable étale (φ, Γ)-modules over a multivariable Laurent series ring over k_α.

Texte reçu le 23 juin 2020, modifié le 17 mars 2021, accepté le 23 juillet 2021.

Jishnu Ray, School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Colaba, Mumbai 400005, India • *E-mail :* jishnuray1992@gmail.com,jishnu.ray@tifr.res.in
Feng Wei, School of Mathematics and Statistics, Beijing Institute of Technology, Beijing, 100081, China • *E-mail :* daoshuo@hotmail.com,daoshuowei@gmail.com
Gergely Zábrádi, Institute of Mathematics, Eötvös Loránd University, Pázmány Péter sétány 1/C, H-1117 Budapest, Hungary and MTA Lendület Automorphic Research Group • *E-mail :* gergely.zabradi@ttk.elte.hu

Mathematical subject classification (2010). — 11S37, 11S20, 20G05, 20G25, 22E50.

Key words and phrases. — Étales (φ, Γ)-module, p-adic Galois representations, imperfect residue field.

The first and third authors are grateful to Beijing Institute of Technology (BIT) for its gracious hospitality during a visit on August 2019, when this collaboration took place. The main idea of this work grew out of their visit to BIT. The first author also acknowledges the grant from the PIMS-CNRS Postdoctoral Fellowship from the University of British Columbia. The first author was supported by postdoc research fellowship from Tata Institute of Fundamental Research during the final revision of this paper. The second author is supported by the National Natural Science Foundation of China under Grant 12071029. The third author was supported by the Rényi Institute Lendület Automorphic Research Group, by the NKFIH Research Grant FK-127906, and by Project ED 18-1-2019-0030 (Application-specific highly reliable IT solutions) under the Thematic Excellence Programme funding scheme.

 0037-9484/2021/521/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2837

Résumé (*(φ,Γ)-modules multivariables et représentations du produit du groupe de Galois: le cas des corps résiduels imparfaits*). — Soit K un corps discrètement valué à charactéristique mixte $(0,p)$ et un corps résiduel imparfait k_α. Soit Δ un ensemble fini. Nous établissons une équivalence de catégories entre des représentations de dimensions finies sur $\mathbb{F}_p$ du produit de Δ copies du groupe absolu de Galois de K et des (φ,Γ)-modules étales multivariables sur un anneau multivariable des séries Laurent sur k_α.

1. Introduction

1.1. Motivation of this work. — Fontaine's theory of (φ,Γ)-modules is a fundamental tool to describe and classify continuous representations of the Galois group of a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ on a finite-dimensional $\mathbb{Q}_p$-vector space. With the help of Fontaine's theory of (φ,Γ)-modules, one can understand the p-adic and mod-p Langlands correspondence in the case of the general linear group GL_2 over the field $\mathbb{Q}_p$ of p-adic numbers, see [9, 10, 11, 13, 20, 21, 22, 41]. By invoking the theory of (φ,Γ)-modules, the p-adic and mod-p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ can be connected with p-adic and mod-p Galois representations of $\mathbb{Q}_p$. To extend the correspondence to other p-adic reductive groups beyond $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, one naturally wants to generalize Fontaine's theory of (φ,Γ)-modules. There has been conjectural progress in attempts to generalize p-adic Langlands beyond $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ along these lines; two kinds of multivariable versions of (φ,Γ)-modules can be found in the literature. Berger's multivariable (φ,Γ)-modules is an attempt to generalize p-adic Langlands for $\mathrm{GL}_2(F)$, where F is a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ [6, 7]. The third author of this current work also defines multivariable (φ,Γ)-module over a m-variable Laurent series ring in an attempt to generalize p-adic Langlands for $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q}_p)$ [43, 49, 50]. One might also try to look at Zábrádi's multivariable (φ,Γ)-modules over Lubin–Tate extension to conjecturally understand p-adic Langlands for $\mathrm{GL}_m(F)$ [28]. It has become clear that essentially all of p-adic Hodge theory can be formulated in terms of (φ,Γ)-modules; moreover, this formulation has driven much recent progress in the subject and powered some notable applications in arithmetic geometry [17]. See [31] for a quick introduction to this circle of ideas or [42] for a more in-depth treatment. Multivariable (φ,Γ)-modules are also related [19, 32] to Scholze's theory of perfectoid spaces.

This paper can be considered as a complement to the third author's independent work [49] in which he shows that the category of continuous representations of the m^{th} direct product of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$ on finite dimensional $\mathbb{F}_p$-vector spaces (or $\mathbb{Z}_p$-modules and $\mathbb{Q}_p$-vector spaces, respectively) is equivalent to the category of étale multivariable (φ,Γ)-modules over a certain m-variable Laurent series ring over $\mathbb{F}_p$ (or over $\mathbb{Z}_p$ and over $\mathbb{Q}_p$, respectively). In the current paper, we will extend this equivalence of categories for continuous $\mathbb{F}_p$-representations of the m^{th} direct product of the absolute Galois group of a complete discretely valued field K with mixed characteristic $(0,p)$ whose residue field k_α is imperfect and has a finite p-basis, i.e., $[k_\alpha : k_\alpha^p] = p^d$ (for some $d \geq 1$). We plan to come back to the question of p-adic representations in the future. We expect applications of our results to p-adic Hodge theory of products of varieties over p-adic fields. To state our main theorem (Theorem 5.13) precisely, we need to review the third author's work on multivariable (φ,Γ)-modules [49] and his main theorem.

1.2. Zábrádi's work [49]. — Let F be a finite extension of $\mathbb{Q}_p$ with residue field k_F (which is perfect). For a finite set Δ, let $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p,\Delta} := \prod_{\alpha\in\Delta} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ denote the direct power of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$ indexed by Δ. We denote by $\mathrm{Rep}_{k_F}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p,\Delta})$ the category of continuous representations of the profinite group $\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p,\Delta}$ on finite dimensional k_F-vector spaces. For independent commuting variables $X_\alpha\,(\alpha\in\Delta)$, we write

$$E_{\Delta,k_F} := k_F\,[\![X_\alpha|\alpha\in\Delta]\!]\,[X_\Delta^{-1}],$$

where $X_\Delta = \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$. For each element $\alpha\in\Delta$, we have the partial Frobenius φ_α and group $G_{K_\alpha} \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}_p)$ acting on the variable X_α in the usual way and commuting with the other variables $X_\beta\,(\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\})$ in the ring E_{Δ,k_F} (some authors also write G_{K_α} as Γ_α). A $(\varphi_\Delta,\Gamma_\Delta)$-*module* (or a $(\varphi_\Delta,G_\Delta)$-module) over E_{Δ,k_F} is a finitely generated E_{Δ,k_F}-module D together with commuting semilinear actions of the operators φ_α and groups G_{K_α} ($\alpha\in\Delta$). We say that D is *étale* if the map $\mathrm{id}\otimes\varphi_\alpha : \varphi_\alpha^* D \longrightarrow D$ is an isomorphism for all $\alpha\in\Delta$. The third author shows independently that $\mathrm{Rep}_{k_F}(\mathcal{G}_{\mathbb{Q}_p,\Delta})$ is equivalent to the category of étale $(\varphi_\Delta,G_\Delta)$-modules over E_{Δ,k_F}.

1.3. Andreatta's work [1] **and Scholl's work** [44]. — Let us review Scholl's work [44] and parts of Andreatta's work [1], where they work with single variable classical (φ,Γ)-module but over an imperfect residue field. Let K be a complete discretely valued field (with uniformizer p) of mixed characteristic $(0,p)$ with imperfect residue field k_K having a p-basis, i.e., $[k_K : k_K^p] = p^d$. Let $t_1,t_2,\ldots,t_d\in K$ be a lift of a p-basis $\overline{t_1},\overline{t_2},\ldots,\overline{t_d}$ of k_K. Define $K_\infty = \bigcup_n K(\mu_{p^n},t_1^{1/p^n},\ldots,t_d^{1/p^n})$, $G_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ and $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Note that, in contrast with the perfect residue field case, G_K is not abelian. Scholl [44] and Andreatta [1] defined a field of norms E_K for K, and have shown that $E_K \cong k_K((\overline{\pi}))$, where $\varepsilon = \overline{\pi}+1\in E_K$ is a compatible system of p-power roots of unity in K_∞ (cf. [44, Section 2.3]). Finally, Andreatta [1, Theorem 7.11] showed that $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_K)$ is equivalent to the category of (single variable, i.e., classical) étale (φ,G_K)-module over E_K.

1.4. Our work in this paper. — In this paper, we will extend Scholl's and Andreatta's result to the case of multivariable $(\varphi_\Delta, G_\Delta)$-modules over an imperfect residue field. Precisely speaking, for a finite set Δ and a collection of possibly distinct fields K_α as above, we define

$$G_\Delta = \prod_{\alpha\in\Delta} G_{K_\alpha},$$
$$\mathcal{G}_\Delta = \prod_{\alpha\in\Delta} \mathcal{G}_{K_\alpha},$$

and the Laurent series ring

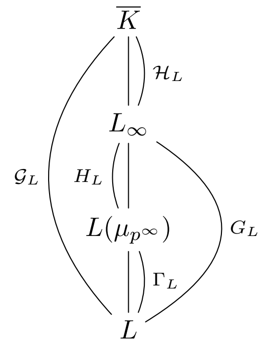
$$E_\Delta := \Big(\bigotimes_{\alpha\in\Delta} k_{K_\alpha}\Big) [\![X_\alpha|\alpha\in\Delta]\!] [X_\Delta^{-1}].$$

It should be remarked that for each α, $G_{K_\alpha} \cong \Gamma_\alpha \ltimes H_\alpha$, where $\Gamma_\alpha \cong \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$ and $H_\alpha \cong \mathrm{Gal}(K_\infty/K(\mu_{p^\infty}))$, and so G_{K_α} is a noncommutative p-adic Lie group. Extending actions of [44], we provide the ring E_Δ with the natural actions of partial Frobenius φ_α $(\alpha\in\Delta)$, absolute Frobenius $\varphi_s = \prod_{\alpha\in\Delta}$ and the Galois group G_Δ. We define the category $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_\Delta, E_\Delta)$ of multivariable étale $(\varphi_\Delta, G_\Delta)$-modules over E_Δ in Section 3.3. Our main theorem (Theorem 5.13) is that there is an equivalence of categories between $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_\Delta)$ and $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_\Delta, E_\Delta)$. Fortunately, many arguments in the proofs given by the third author in [49] (in the perfect residue field case) can be generalized and adapted to the case when the residue field is imperfect. Therefore, our proofs will mostly follow the line of arguments given in [49] with modifications when necessary, invoking the results of Andreatta and Scholl (for the single variable, imperfect residue field case) and using induction.

2. Kummer towers

In this section, we will introduce the Iwasawa theoretic tower that we are going to work with. Let L be a complete discretely valued field of mixed characteristic $(0,p)$. Suppose that $[k_L : k_L^p] = p^d$, where k_L is the residue field of L. Let us choose a complete subfield K of L with the same residue field k_L in which p is an uniformizer (the existence of such a subfield is proved in [34, Page 211-212]). Let $t_1, t_2, \dots, t_d \in L$ be a lift of a p-basis $\overline{t_1}, \overline{t_2}, \dots, \overline{t_d}$ of k_L. For $n \geq 1$, define $K_n = K(\mu_{p^n}, t_1^{1/p^n}, \dots, t_d^{1/p^n})$, $K_\infty = \bigcup_n K_n$, $L_n = LK_n$ and $L_\infty = LK_\infty$. Define the Galois groups $\Gamma_L = \mathrm{Gal}(L(\mu_{p^\infty})/L)$, $G_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L)$, $H_L = \mathrm{Gal}(L_\infty/L(\mu_{p^\infty}))$, $\mathcal{H}_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L_\infty)$, $\mathcal{G}_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$.

We identify Γ_L via the quotient map with the subgroup $\mathrm{Gal}(L_\infty/L'_\infty)$ of G_L, where $L_\infty = \varinjlim_n L(t_1^{1/p^n}, \ldots, t_d^{1/p^n})$.



Note that the cyclotomic character χ identifies Γ_L with an open subgroup of $\mathbb{Z}_p^\times$. We also have that $G_L \cong \Gamma_L \ltimes H_L$, where $H_L \cong \mathbb{Z}_p^d$ and G_L is a noncommutative p-adic Lie group of dimension $d+1$. The tower $(K_n)_{n\geq 1}$ is strictly deeply ramified in the sense of [44]. By [44, Section 1.3], we can say that there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ and $\xi \in \mathcal{O}_{K_{n_0}}$ satisfying $0 < |\xi|_K < 1$ such that for all $n \geq n_0$, the p-power map $\mathcal{O}_{K_{n+1}}/(\xi) \longrightarrow \mathcal{O}_{K_n}/(\xi)$ is a surjection. We denote $E_K^+ = \varprojlim_{n\geq n_0} \mathcal{O}_{K_n}/(\xi)$, where the inverse limit is taken with respect to the p-power maps. Then E_K^+ is a complete, discretely valued ring of characteristic p, independent of n_0 and ξ (cf. [51, Section 2.1]). Let E_K be the fraction field of E_K^+. We call E_K the *field of norms* of the tower K_n. Note that E_K has a natural action of G_K that commutes with the Frobenius operator φ.

For every finite extension K' of K, $E_{K'}$ is a finite separable extension of E_K. Let $E_K^{\mathrm{sep}} = \bigcup_{K'} E_{K'}$. It follows from [1, Corollary 6.4] that there is an isomorphism of topological groups

$$\mathrm{Gal}(E_K^{\mathrm{sep}}/E_K) \cong \mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty) = \mathcal{H}_K.$$

We therefore conclude that $(E_K^{\mathrm{sep}})^{\mathcal{H}_K} \cong E_K$.

Theorem 2.1 ([44, Section 2.3]). — *The field of norms $E_K \cong k_K((\overline{\pi}))$, where $\varepsilon = 1 + \overline{\pi}$ is a compatible system of p-power roots of unity.*

The field of norms $E_L = (E_K^{sep})^{\mathcal{H}_L}$ for the tower L_∞ is a finite separable extension of E_K of the form $E_L \cong k_K((X))$ for some noncanonical choice of uniformizer X. Therefore, the action of G_L on E_L does not have an intrinsic description in general. We shall further make the following hypothesis on K (hence on L, as we have $k_K = k_L$).

HYP 2.2. — *The residue field k_K is a finitely generated field extension of $\mathbb{F}_p$.*

Let Δ be a finite set and we pick a complete discretely valued field $L = L_\alpha$ as above for each α. We also allow the cardinality d_α of a p-basis to vary for $\alpha \in \Delta$. We put $k_\alpha := k_{K_\alpha} = k_{L_\alpha}$ and assume that it satisfies HYP 2.2 for all $\alpha \in \Delta$. Further, let $\mathbb{F}_\alpha$ denote the maximal algebraic extension of $\mathbb{F}_p$ contained in k_α. Then, $\mathbb{F}_\alpha = k_\alpha((X_\alpha))^{G_{L,\Delta}}$ is a finite field, and k_α is a finite separable extension of the function field $k_{\alpha,0} := \mathbb{F}_\alpha(\overline{t_{\alpha,1}}, \dots, \overline{t_{\alpha,1}})$, where $\overline{t_{\alpha,1}}, \dots, \overline{t_{\alpha,1}} \in k_\alpha$ is a finite p-basis. We put $\mathbb{F}_\Delta := \bigotimes_{\mathbb{F}_p, \alpha\in\Delta} \mathbb{F}_\alpha$ and $k_{\Delta,0} := \bigotimes_{\mathbb{F}_p,\alpha\in\Delta} k_{\alpha,0}$.

LEMMA 2.3. — *Assume HXP 2.2 for each residue field k_α. Then the $|\Delta|$-fold tensor product $k_\Delta := \bigotimes_{\mathbb{F}_p,\alpha\in\Delta} k_\alpha$ is Noetherian and regular (and, in particular, reduced). Further, for each $\alpha \in \Delta$ the relative Frobenius φ_α is injective on k_Δ.*

Proof. — The ring k_Δ is the localization of a finitely generated $\mathbb{F}_p$-algebra; therefore, it is Noetherian. Since $\mathbb{F}_p$ is a field, any $\mathbb{F}_p$-module is flat. Now, $\varphi_\alpha\colon k_\alpha \to k_\alpha$ is injective, and on $k_{\Delta\setminus\{\alpha\}}$ it is the identity; therefore φ_α is also injective on $k_\Delta = k_\alpha \bigotimes_{\mathbb{F}_p} k_{\Delta\setminus\{\alpha\}}$. In particular, the absolute Frobenius $\varphi_s = \prod_{\alpha\in\Delta} \varphi_\alpha$ is also injective on k_Δ, i.e., k_Δ is reduced. The statement on the regularity follows from [47, Theorem 1.6(c),(e)] since $\mathbb{F}_p$ is perfect and k_Δ is Noetherian. □

Since $\mathbb{F}_\Delta$ is a tensor product of finite fields, it is finite étale algebra over $\mathbb{F}_p$. Moreover, it has primitive idempotents $b_1, \dots, b_\ell \in \mathbb{F}_\Delta$ with $1 = b_1 + \cdots + b_\ell$ and $b_j\mathbb{F}_\Delta \cong \mathbb{F}_{p^f}$, where $f = \gcd(|\mathbb{F}_\alpha : \mathbb{F}_p| \mid \alpha \in \Delta)$, $1 \le j \le \ell$. Note that for each $\alpha \in \Delta$ and $1 \le j \le \ell$, the element $\varphi_\alpha(b_j)$ is also a primitive idempotent in $\mathbb{F}_\Delta$ and $\varphi_s(b_j) = b_j^p = b_j$. The quotient monoid $\Phi := (\prod_{\alpha\in\Delta} \varphi_\alpha^{\mathbb{N}})/\varphi_s^{\mathbb{N}}$ is a group acting on the set of primitive idempotents.

LEMMA 2.4. — *The group Φ acts transitively on the set $\{b_1, \dots, b_\ell\}$ of primitive idempotents in $\mathbb{F}_\Delta$.*

Proof. — By induction on $|\Delta|$ we are reduced to the case $\Delta = \{\alpha, \beta\}$ has two elements. Put $p^n := |\mathbb{F}_\alpha|$, $p^m := |\mathbb{F}_\beta|$, and $f := \gcd(n, m)$. Writing $\mathbb{F}_{p^m} = \mathbb{F}_p[X]/(g(X))$ for some irreducible monic polynomial $g(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ we may write $g(X) = \prod_{i=1}^{f} g_i(X)$ over $\mathbb{F}_{p^n}$, so we have $\mathbb{F}_{p^n} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_{p^m} = \bigoplus_{i=1}^{f} \mathbb{F}_{p^n}[X]/(g_i(X))$, where φ_β acts trivially on $\mathbb{F}_{p^n}$ and satisfies $\varphi_\beta(g_i) = g_{i+1}$ with the convention $g_{f+1} = g_1$. □

3. Multivariable (φ, Γ)-modules

3.1. Let Δ be a finite set (which can be simple roots in the Lie algebra of a reductive group over $\mathbb{Z}_p$) and $(L_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ be a collection of complete discretely valued fields with residue fields k_α such that k_α is a finitely generated extension of $\mathbb{F}_p$ with finite p-basis $\overline{t_{\alpha,1}}, \dots, \overline{t_{\alpha,1}}$. We further choose a complete subfield $K_\alpha \leq L_\alpha$ in which p is a uniformizer and has the same residue field k_α. Let us define

i) $G_{L,\Delta} := \prod_{\alpha\in\Delta} G_{L_\alpha}$,

ii) $\mathcal{G}_{L,\Delta} := \prod_{\alpha\in\Delta} \mathcal{G}_{L_\alpha}$.

We denote $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$ the category of continuous representations of the profinite group $\mathcal{G}_{L,\Delta}$ on finite dimensional $\mathbb{F}_p$-vector spaces. (In the future, $G_{K,\Delta}$ and $\mathcal{G}_{K,\Delta}$ will simply be denoted as G_Δ and $\mathcal{G}_\Delta$, dropping the subscript K.)

3.2. Some Laurent series rings. — Consider the Laurent series $E_{L,\Delta} = E^+_{L,\Delta}[X_\Delta^{-1}]$, where

$$E^+_{L,\Delta} = k_\Delta[\![X_\alpha|\alpha\in\Delta]\!] = \Big(\bigotimes_{\mathbb{F}_p,\alpha\in\Delta} k_\alpha\Big)[\![X_\alpha|\alpha\in\Delta]\!]$$

is the completed tensor product of E^+_α ($\cong k_\alpha[\![X_\alpha]\!]$) over $\mathbb{F}_p$, for all $\alpha\in\Delta$. Here, E^+_α is the ring of integers of the field of norms E_α ($\cong k_\alpha((X_\alpha))$) corresponding to α. Here, $X_\Delta := \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha \in E^+_\Delta$. For each α, we define the action of the partial Frobenius φ_α and the group G_{L_α} as follows (cf. [44, Page 707, Section 2.3]).

$$\varphi_\alpha(X_\beta) := \begin{cases} X_\beta & \text{if } \beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}, \\ (1+X_\alpha)^p - 1 = X_\alpha^p & \text{if } \beta = \alpha. \end{cases} \tag{1}$$

φ_α acts on the coefficients in k_α as the p-th power map and as an identity on k_β for $\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}$. By the construction of the field of norms [44], the group G_{L_α} acts on the ring $k_\alpha((X_\alpha))$, and we extend this action to $E_{L,\Delta}$ by acting trivially on $k_\beta((X_\beta))$ ($\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}$). We only describe the action of G_{L_α} on $E_{L,\Delta}$ intrinsically in the case $L_\alpha = K_\alpha$. We put $\overline{\pi}_\alpha := \varepsilon - 1 \in k_\alpha((X_\alpha)) \subset \varprojlim \mathcal{O}_{L_n}/(\xi)$, where $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ is a compatible system of p-power roots of unity (with $\varepsilon_0 = 1 \neq \varepsilon_1$). In the case $L_\alpha = K_\alpha$ is unramified, we have $k_\alpha((X_\alpha)) = k_\alpha((\overline{\pi}_\alpha))$, but in general $k_\alpha((X_\alpha))$ is a finite separable extension of $k_\alpha((\overline{\pi}_\alpha))$ of degree e_L, which is the absolute ramification index of L. The action of $G_{K_\alpha} = G_\alpha \cong \Gamma_\alpha \ltimes H_\alpha$; $H_\alpha \cong \mathbb{Z}_p^d$ on $E_\Delta := E_{K,\Delta}$ can be described as follows. For any $\gamma_\alpha \in \Gamma_\alpha$, we have

$$\gamma_\alpha(\overline{\pi}_\beta) := \begin{cases} \overline{\pi}_\beta & \text{if } \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}, \\ (1+\overline{\pi}_\alpha)^{\chi(\gamma_\alpha)} - 1 & \text{if } \beta = \alpha. \end{cases} \tag{2}$$

Γ_α acts as an identity on k_α. Let $\underline{b}_\alpha$ be the image of $\delta_{\alpha,\underline{b}} \in H_\alpha$ in $\mathbb{Z}_p^d$ and let $b_{\alpha,i}$ be the i-th component of $\underline{b}_\alpha$. Then, we have

$$\delta_{\alpha,\underline{b}}(\overline{\pi}_\beta) := \overline{\pi}_\beta \text{ for all } \beta \text{ (equal to } \alpha \text{ and also not equal to } \alpha), \tag{3}$$

$$\delta_{\alpha,\underline{b}}(\overline{t_{\alpha,i}}) := (1+\overline{\pi}_\alpha)^{b_{\alpha,i}} \overline{t_{\alpha,i}} \text{ for all } 1 \leq i \leq d_\alpha\ , \tag{4}$$

and $\delta_{\alpha,\underline{b}}$ acts as an identity on k_β for $\beta \neq \alpha$. Note that such an automorphism $\delta_{\alpha,\underline{b}}$ of E_Δ^+ is unique, which is easy to see from the case $|\Delta| = 1$ in [44, Page 707].

Note that the absolute Frobenius $\varphi_s : E_{L,\Delta}^+ \longrightarrow E_{L,\Delta}^+$ equals the composite $\prod_{\alpha\in\Delta} \varphi_\alpha$ of the partial Frobenii. Further, the actions of φ_α ($\alpha \in \Delta$) and G_β ($\beta \in \Delta$) all commute with each other (even though the individual factors G_β are non-abelian).

The ring $E_{L,\Delta}^+$ is Noetherian and reduced by Lemma 2.3.

3.3. Multivariable $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-modules. — By a $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-module over $E_{L,\Delta}$, we mean a finitely generated module D over $E_{L,\Delta}$ together with commuting semilinear actions of φ_α and the Galois groups G_{L_α}, for all $\alpha \in \Delta$. By an étale $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-module over $E_{L,\Delta}$, we mean a $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-module D such that the maps

$$\mathrm{id} \otimes \varphi_\alpha : \varphi_\alpha^* D := E_{L,\Delta} \bigotimes_{E_{L,\Delta},\varphi_\alpha} D \longrightarrow D,$$

are isomorphisms for all $\alpha \in \Delta$.

We are going to show that $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$ is equivalent to the category of étale $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-modules over $E_{L,\Delta}$; the latter category we denote by $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$.

4. Integrality properties

4.1. Definition and projectivity. — In this section, our goal is to show that any object in the category $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$ is stably free as a module over $E_{L,\Delta}$.

LEMMA 4.1. — *There exists a $G_{L,\Delta}$-equivariant injective resolution of $E_{L,\Delta}$ as a module over itself.*

Proof. — This follows from a general result that the Cousin complex provides an injective resolution for the spectrum of Noetherian rings with finite injective dimension (these are the so-called Gorenstein rings; we recommend that the reader refer to [29, Remark before Proposition 3.4 in Page 249] or [46]). Note that $E_{L,\Delta}$ is the localization of a $|\Delta|$-variable power series ring over the regular ring k_Δ, and therefore it is regular (and in particular, Gorenstein). Hence, the Cousin complex

$$0 \longrightarrow E_{L,\Delta} \xrightarrow[d_{-1}]{} \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(E_{L,\Delta}),\mathrm{ht}\mathfrak{p}=0} (E_{L,\Delta})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow[d_0]{} \cdots \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathrm{Spec}(E_{L,\Delta}),\mathrm{ht}\mathfrak{p}=r} \mathrm{Coker}(d_{r-2})_{\mathfrak{p}} \xrightarrow[d_r]{} \cdots$$

is an injective resolution of $E_{L,\Delta}$. This resolution is $G_{L,\Delta}$-equivariant because the automorphisms preserve the height of a prime ideal. $\square$

Recall $\mathbb{F}_\Delta$ has primitive idempotents $b_1,\dots,b_\ell \in \mathbb{F}_\Delta$ with $1 = b_1+\cdots+b_\ell$ and $b_j\mathbb{F}_\Delta \cong \mathbb{F}_{p^f}$, where $f = \gcd(|\mathbb{F}_\alpha : \mathbb{F}_p| \mid \alpha\in\Delta)$, $1\le j\le \ell$.

Lemma 4.2. — *Let I be a $G_{L,\Delta}$-invariant ideal of $E_{L,\Delta}$. Then we have $I = (I\cap \mathbb{F}_\Delta)E_{L,\Delta}$.*

Proof. — Suppose that I is a nontrivial $G_{L,\Delta}$-invariant ideal of $E_{L,\Delta}$. Then I is also Γ_Δ-invariant. We first show $I = (I\cap k_\Delta)E_{L,\Delta}$. This is completely analogous to the proof of [50, Proposition 2.1, Lemma 2.2]. The assumption that the ring κ of loc. cit. is a finite field is not used in the proof of [50, Lemma 2.2]; one only needs that $E_{L,\Delta}$ is Noetherian. Further, t can be chosen large enough to ensure $1+p^t$ lies in the image of the character $\chi\colon \Gamma_{L_\alpha}\to\mathbb{Z}_p^\times$, for all $\alpha\in\Delta$. In our argument, κ is not a field but the ring k_Δ, in which case one cannot conclude at the end of the proof of Proposition 2.1 that $1\in I$ but only that $I=(I\cap k_\Delta)E_{L,\Delta}$.

We use the action of $H_{L,\Delta}$ in order to further descend to $\mathbb{F}_\Delta$. Fix $\alpha\in\Delta$, $j\in\{1,\dots,\ell\}$ and pick an element $0\neq\lambda=\sum_{i=1}^r u_i\bigotimes v_i \in b_jI\cap k_\Delta$ where $u_1,\dots,u_r\in k_\alpha$ and $v_1,\dots,v_r\in k_{\Delta\setminus\{\alpha\}}$. Suppose r is minimal and $u_1=1$ (possibly replacing λ with $u_1^{-1}\lambda$), i.e., no nonzero element in $b_jI\cap k_\Delta$ can be written as a sum of at most $r-1$ elementary tensors. In particular, both $u_1,\dots,u_r$ and $v_1,\dots,v_r$ are linearly independent over $\mathbb{F}_p$. Assume for contradiction that there is an index $i_0\in\{2,\dots,r\}$ such that $u_{i_0}\notin\mathbb{F}_\alpha$. Then there exists an element $h\in H_{L_\alpha}$ such that $h(u_{i_0})\neq u_{i_0}$, whence $0\neq\sum_{i=2}^r(h(u_i)-u_i)\bigotimes v_i = h(\lambda)-\lambda\in b_jI$. Writing $h(\lambda)-\lambda=\sum_{N=0}^\infty \lambda_N X_\alpha^N$, where $\lambda_N\in b_jI\cap k_\Delta$ can be written as a sum of at most $r-1$ elementary tensors for all $N\ge 0$ contradicts the minimality of r. By repeating this argument for all $\alpha\in\Delta$ we find a nonzero element in $b_jI\cap\mathbb{F}_\Delta$ whenever $b_jI\neq 0$. Hence, we deduce $b_jI=b_jE_{L,\Delta}$, as $b_j\mathbb{F}_\Delta$ is a field. The claim follows noting that j is arbitrary, and $I=\bigoplus_{j=1}^\ell b_jI$. $\square$

Lemma 4.3. — *Any object D in $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$ is a projective module over $E_{L,\Delta}$.*

Proof. — The proof follows from the argument in [49, Proposition 2.2] with the following modification: since $E_{L,\Delta}$ is not a domain, the assertion that $\mathrm{Ext}^n_{E_{L,\Delta}}(D, E_{L,\Delta}) = 0$ does not make sense. However, $\mathrm{Ext}^n_{E_{L,\Delta}}(D, E_{L,\Delta}) = \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathrm{Ext}^n_{b_j E_{L,\Delta}}(b_j D, b_j E_{L,\Delta})$ is a finitely generated torsion $b_j E_{L,\Delta}$-module ($b_j E_{L,\Delta}$ is a domain). So, we deduce by the proof of [49, Proposition 2.2] that $b_j D$ is a projective $E_{L,\Delta}$-module, for each $j = 1, \ldots, \ell$, whence so is $D = \bigoplus_{j=1}^{\ell} b_j D$. □

Lemma 4.4. — *We have $K_0(b_j E_{L,\Delta}) \cong \mathbb{Z}$, for all $j = 1, \ldots, \ell$, i.e., any finitely generated projective module over $b_j E_{L,\Delta}$ is stably free.*

Proof. — The proof was given in [49, Lemma 2.3]. □

Proposition 4.5. — *Let D be an object in the category $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$. Then, D is stably free as a module over $E_{L,\Delta}$.*

Proof. — By Lemma 4.4 it remains to show that the rank of $b_j D$ does not depend on j ($j = 1, \ldots, \ell$). However, this follows from Lemma 2.4, as we have $E_{L,\Delta}\varphi_\alpha(b_j D) = \varphi_\alpha(b_j) D$, for all $\alpha \in \Delta$. □

4.2. Topology of $E^+_{L,\Delta}$ and $E_{L,\Delta}$. — We equip $E^+_{L,\Delta}$ with the X_Δ-adic topology and equip $E_{L,\Delta}$ with the inductive limit topology $E_{L,\Delta} = \bigcup_n X_\Delta^{-n} E^+_{L,\Delta}$. This makes $(E_{L,\Delta}, E^+_{L,\Delta})$ a Huber pair in the sense of [45]; $E_{L,\Delta}$ is a complete Noetherian Tate ring (loc. cit.). Note that this is not the natural compact topology on $E^+_{L,\Delta}$, as in the compact topology $E^+_{L,\Delta}$ would not be open in $E_{L,\Delta}$ since the index of $E^+_{L,\Delta}$ in $X_\Delta^{-n} E^+_{L,\Delta}$ is not finite. Also, the inclusion $k_\alpha((X_\alpha)) \hookrightarrow E_{L,\Delta}$ is not continuous in the X_Δ-adic topology (unless $|\Delta| = 1$).

Suppose $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$. By Banach's theorem for Tate rings ([48, Proposition 6.18]), there is a unique $E_{L,\Delta}$-module topology on D that we call the X_Δ-*adic topology*. (This is the induced topology as D is finitely generated over $E_{L,\Delta}$). Moreover, any $E_{L,\Delta}$-module homomorphism is continuous in the X_Δ-adic topology.

Let M be a finitely generated $E^+_{L,\Delta}$-submodule in $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$. Suppose that $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ is a set of generators of M. Then, $\varphi_s(m_1), \ldots, \varphi_s(m_n)$ generate $E^+_{L,\Delta}\varphi_s(M)$. Thus $E^+_{L,\Delta}\varphi_s(M)$ is also finitely generated.

Now, let $D^{++} := \{x \in D \mid \lim_{k\to\infty} \varphi_s^k(x) = 0\}$, where the limit is considered in the X_Δ-adic topology (cf. [20, II.2.1] in the case $|\Delta| = 1$).

PROPOSITION 4.6. — *D^{++} is a finitely generated $E^+_{L,\Delta}$-submodule in D that is stable under the actions of $\varphi_\alpha, G_{L_\alpha}$, for all $\alpha \in \Delta$, and we have $D = D^{++}[X_\Delta^{-1}]$.*

Proof. — The proof is essentially the same as [49, Proposition 2.5], but we would like to clarify few steps as we sketch the third author's line of proof.

Choose an arbitrary finitely generated $E^+_{L,\Delta}$-submodule M of D with $M[X_\Delta^{-1}] = D$. We can take $M = E^+_{L,\Delta}e_1 + \cdots + E^+_{L,\Delta}e_n$ for some $E_{L,\Delta}$-generating system $e_1, \ldots, e_n$ of D. First, note that M is not φ_s-stable, but $E^+_\Delta\varphi_s(M)$ is finitely generated (as M is finitely generated over E^+_Δ). Hence, we can find a "common denominator" of $E^+_{L,\Delta}\varphi_s(M)$ to be X^r_Δ such that $\varphi_s(M) \subseteq X_\Delta^{-r}M$, since $E^+_{L,\Delta}$ is Noetherian and we have $D = \bigcup_r X_\Delta^{-r}M$. Then we have

$$\varphi_s(X^k_\Delta M) = X^{pk}_\Delta\varphi_s(M) \subseteq X^{pk-r}_\Delta M \subseteq X^{k+1}_\Delta M$$

for any integer $k \geq \frac{r+1}{p-1}$. We therefore have $X_\Delta^{[\frac{r+1}{p-1}]+1}M \subseteq D^{++}$. This implies that

$$M[X_\Delta^{-1}] = D = X_\Delta^{[\frac{r+1}{p-1}]+1}M[X_\Delta^{-1}] \subseteq D^{++}[X_\Delta^{-1}].$$

However, $D^{++}[X_\Delta^{-1}] \subseteq D$ is obvious. Thus, $D^{++}[X_\Delta^{-1}] = D$. Note that D^{++} is stable under G_{L_α}, because the action of G_{L_α} commute with φ_s (and also φ_α for all $\alpha \in \Delta$). There is a system of neighborhoods of 0 in D consisting of $E^+_{L,\Delta}$-submodules. Hence, D^{++} is an $E^+_{L,\Delta}$-submodule.

Assume first that D is a free module over $E_{L,\Delta}$ with free generators $e_1, \ldots, e_n$ and put $M := E^+_{L,\Delta}e_1 + \cdots + E^+_{L,\Delta}e_n$. Then we can show that $D^{++} \subseteq X_\Delta^{-r}M$ for some integer $r > 0$ (cf. [49, Proposition 2.5]). As $E^+_{L,\Delta}$ is Noetherian, this gives that D^{++} is finitely generated over $E^+_{L,\Delta}$.

In the general case, by Proposition 4.6, we know that D is stably free. Therefore, we can establish $D_1 := D \bigoplus E^k_{L,\Delta}$ making D_1 into an étale free module over $(\varphi_\alpha, \varphi_s, G_{L_\alpha}, \alpha \in \Delta)$ by the trivial action of $(\varphi_\alpha, \varphi_s, G_{L_\alpha}, \alpha \in \Delta)$ on $E^k_{L,\Delta}$. This gives us that D_1^{++} is finitely generated over $E^+_{L,\Delta}$. The result follows as $D^{++} \subseteq D_1^{++}$ and $E^+_{L,\Delta}$ is Noetherian. □

Let us define

$$D^+ := \{x \in D \,|\, \{\varphi_s^k(x) : k \geq 0\} \subset D \text{ is bounded}\}.$$

Since $\varphi_s^k(X_\Delta)$ tends to 0 in the X_Δ-adic topology, we have $X_\Delta D^+ \subseteq D^{++}$, i.e., $D^+ \subseteq X_\Delta^{-1}D^{++}$. In particular, D^+ is finitely generated over $E^+_{L,\Delta}$. On the other hand, we also have $D^{++} \subseteq D^+$ by construction, whence we deduce $D = D^+[X_\Delta^{-1}]$.

Lemma 4.7. — *For all $\alpha \in \Delta$ and $g_\alpha \in G_{L_\alpha}$, we have*

$$\varphi_\alpha(D^+) \subset D^+ \quad (\text{resp. } \varphi_\alpha(D^{++}) \subset D^{++}),$$
$$g_\alpha(D^+) \subset D^+ \quad (\text{resp. } g_\alpha(D^{++}) \subset D^{++}).$$

Proof. — We will show that, for any generating system $e_1, \dots, e_n$ of D and any γ (γ can be φ_α or $g_\alpha \in G_{L_\alpha}$), there exists an integer $k > 0$ such that

$$\gamma(X_\Delta^k M) \subseteq X_\Delta^k E_{L,\Delta}^+ \gamma(M) \subseteq M,$$

where $M := E_{L,\Delta}^+ e_1 + \cdots + E_{L,\Delta}^+ e_n$.

Case (i). — Assume that $\gamma = \varphi_\alpha$. Then choose $k \gg 0$ so that $X_\Delta^k E_{L,\Delta}^+ \varphi_\alpha(M) \subseteq M$, whence

$$\varphi_\alpha(X_\Delta^k M) = \prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta^k X_\alpha^{pk} \varphi_\alpha(M) = X_\Delta^k X_\alpha^{(p-1)k} \varphi_\alpha(M) \subseteq M\ .$$

Case (ii). — Assume that $\gamma = g_\alpha \in G_{L_\alpha}$. We need to check that $g_\alpha(X_\Delta) = uX_\Delta$ for some unit $u \in E_{L,\Delta}^+$. In the case $K = L$, this is clear from the intrinsic description of the action of G_{L_α}. The general statement follows noting that we still have $g_\alpha(X_\beta) = X_\beta$ for $\beta \neq \alpha$, and $g_\alpha(X_\alpha)$ is also a uniformizer in $k_\alpha((X_\alpha))$ since $k_\alpha((X_\alpha))$ is a finite separable extension of $k_\alpha((\overline{\pi}_\alpha))$, and G_{L_α} is a subgroup in G_{K_α}. The proof then follows from [49, Lemma 2.6]. $\square$

We now fix $\alpha \in \Delta$ and define $D_{\overline{\alpha}}^+ := D^+[X_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{-1}]$ where for any subset $S \subseteq \Delta$ we put $X_S := \prod_{\beta \in S} X_\beta$. Then, $D_{\overline{\alpha}}^+$ is a finitely generated module over $E_{\overline{\alpha}}^+ := E_{L,\Delta}^+[X_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{-1}]$.

Lemma 4.8. — *$D_{\overline{\alpha}}^+/D^+$ is X_α-torsion free: If both $X_\alpha^{n_1} d$ and $X_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{n_2} d$ lie in D^+ for some element $d \in D$, $\alpha \in \Delta$, and integers $n_1, n_2 \geq 0$, then we have $d \in D^+$. The same statement holds if we replace D^+ by D^{++}.*

Proof. — The proof of [49, Lemma 2.7] works without any change. $\square$

Lemma 4.9. — *Assume that D is generated by a single element $e_1 \in D$ over $E_{L,\Delta}$. Then, for any γ, we have $\gamma(e_1) = a_\gamma e_1$ for some unit $a_\gamma \in (E_{\overline{\alpha}}^+)^\times$. Here, γ can be $\varphi_\beta, g_\beta \in G_{L_\beta}$ for $\beta \neq \alpha$.*

Proof. — For any γ equal to either g_β or φ_β, we define a_γ and a_α such that

$$\gamma(e_1) = a_\gamma e_1 \text{ and } \varphi_\alpha(e_1) = a_\alpha e_1.$$

By the étaleness property, it follows that D is generated by $\gamma(D)$ over $E_{L,\Delta}$. Thus, $e_1 \in D$ implies

$$\begin{aligned} e_1 &= x\gamma(e_1) \quad (\text{for some}\, x \in E_{L,\Delta}) \\ &= xa_\gamma e_1 \\ &= y\varphi_\alpha(e_1) \quad (\text{for some}\, y \in E_{L,\Delta}, \text{as}\, D\, \text{is also generated by}\, \varphi_\alpha(D)\, \text{over}\, E_{L,\Delta}) \\ &= ya_\alpha e_1 \end{aligned}$$

So $xa_\gamma = ya_\alpha = 1$, which implies that both a_γ and a_α are units in $E_{L,\Delta}$. It remains to show that $\mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\gamma) = 0$. We compute

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(a_\gamma)a_\alpha e_1 &= \varphi_\alpha(a_\gamma)\varphi_\alpha(e_1) = \varphi_\alpha(a_\gamma e_1) = \varphi_\alpha(\gamma(e_1)) \\ &= \gamma(\varphi_\alpha(e_1)) = \gamma(a_\alpha e_1) = \gamma(a_\alpha)\gamma(e_1) = \gamma(a_\alpha)a_\gamma e_1. \end{aligned}$$

Hence, we deduce

$$p\mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\gamma) + \mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\alpha) = \mathrm{val}_{X_\alpha}(\varphi_\alpha(a_\gamma)a_\alpha) = \mathrm{val}_{X_\alpha}(\gamma(a_\alpha)a_\gamma). \tag{5}$$

Since φ_β and g_β act trivially on $k_\alpha((X_\alpha))$, and they are injective on $E_{L,\Delta}$, they both preserve the X_α-adic valuation. So we have

$$\mathrm{val}_{X_\alpha}(\gamma(a_\alpha)a_\gamma) = \mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\alpha) + \mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\gamma) \tag{6}$$

for $\gamma = \varphi_\beta, g_\beta$ where $\beta \neq \alpha$. Hence, by (5) we obtain

$$p\mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\gamma) + \mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\alpha) = \mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\alpha) + \mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\gamma). \tag{7}$$

Now (7) immediately yields $\mathrm{val}_{X_\alpha}(a_\gamma) = 0$ as desired. □

Lemma 4.10. — *There exists an integer $k = k(D) > 0$ such that for any $\gamma \in \{\varphi_\beta \mid \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}\} \cup G_{L,\Delta}$, we have*

$$X_\alpha^k D_{\overline{\alpha}}^{+} \subseteq E_{L,\Delta}^{+}\gamma(D_{\overline{\alpha}}^{+}) \subseteq E_{\overline{\alpha}}^{+}\gamma(D_{\overline{\alpha}}^{+}).$$

Proof. — The proof for the first inclusion relation follows exactly as in [49, Lemma 2.9]. The second inclusion relation is obvious as $E_{L,\Delta}^{+} \subseteq E_{\overline{\alpha}}^{+}$ by definition. □

Let us now define

$$D_{\overline{\alpha}}^{+*} := \bigcap_{\gamma} E_{\overline{\alpha}}^{+}\gamma(D_{\overline{\alpha}}^{+}),$$

where γ runs on the operators φ_β for $\beta \neq \alpha$ and on $G_{L,\Delta}$; $D_{\overline{\alpha}}^{+*}$ is finitely generated over $E_{\overline{\alpha}}^{+}$ as it is contained in $D_{\overline{\alpha}}^{+}$ and $E_{\overline{\alpha}}^{+}$ is noetherian. By Lemma 4.10, we conclude that $X_\alpha^k D_{\overline{\alpha}}^{+} \subseteq D_{\overline{\alpha}}^{+*}$, for some integer $k = k(D) > 0$. In particular, $D = D_{\overline{\alpha}}^{+*}[X_\alpha^{-1}]$.

Proposition 4.11. — *$D_{\overline{\alpha}}^{+*}$ is an étale module over $E_{\overline{\alpha}}^{+}$, i.e., the maps*

$$\mathrm{id}\otimes\gamma\colon \gamma^*D_{\overline{\alpha}}^{+*}=E_{\overline{\alpha}}^{+}\bigotimes_{E_{\overline{\alpha}}^{+},\gamma} D_{\overline{\alpha}}^{+*}\longrightarrow D_{\overline{\alpha}}^{+*}$$

are bijective for all $\gamma\in\{\varphi_\beta\mid\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}\}\cup G_{L,\Delta}$.

Proof. — The only thing we need to check in order for the third author's arguments in [49, Proposition 2.10] to work is that $E_{\overline{\alpha}}^{+}$ (or $E_{L,\Delta}$, or E_{Δ}^{+}, respectively) is a finite free module over $\gamma(E_{\overline{\alpha}}^{+})$ (or over $\gamma(E_{L,\Delta})$ or over $\gamma(E_{L,\Delta}^{+})$, respectively). This is already true if $\gamma=\varphi_\beta$ because the action of φ_β on the variables is exactly the same as the third author's arguments. If $\gamma\in G_{L,\Delta}$, then this is automatic since $G_{L,\Delta}$ is a group, so the action of γ is bijective. The rest of the argument in the proof follows exactly as in [49, Proposition 2.10]. □

Lemma 4.12. — *There exists a finitely generated $E_{L,\Delta}^{+}$-submodule $D_0\subset D_{\overline{\alpha}}^{+*}$ such that $D_0\subseteq E_{L,\Delta}^{+}\varphi_{\overline{\alpha}}(D_0)$ and $D_{\overline{\alpha}}^{+*}=D_0[X_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{-1}]$, where $\varphi_{\overline{\alpha}}:=\prod_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}}\varphi_\beta$. Moreover, we have*

$$D_{\overline{\alpha}}^{+*}=\bigcup_{r\geq 0}E_{L,\Delta}^{+}\varphi_{\overline{\alpha}}^{r}(X_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{-1}D_0).$$

Proof. — The proof is exactly the same as [49, Lemma 2.11]. □

5. The equivalence of categories for $\mathbb{F}_p$-representations

5.1. The functor $\mathbb{D}$. — Let $\mathcal{H}_{L,\Delta}:=\prod_{\alpha\in\Delta}\mathcal{H}_{L_\alpha}$, where $\mathcal{H}_{L_\alpha}:=\mathrm{Gal}(\overline{K}_\alpha/L_{\alpha,\infty})$, for each $\alpha\in\Delta$. In the case, $L_\alpha=K_\alpha$, we omit the subscript K from the notation, i.e., we put $\mathcal{H}_\Delta:=\prod_{\alpha\in\Delta}\mathcal{H}_\alpha$, where $\mathcal{H}_\alpha:=\mathrm{Gal}(\overline{K}_\alpha/K_{\alpha,\infty})$. Recall that the field of norm E_α of $K_{\alpha,\infty}$ is isomorphic to $E_\alpha\cong k_\alpha((\overline{\pi}_\alpha))$. We already know by [1, Corollary 6.4] that $(E_\alpha^{\mathrm{sep}})^{\mathcal{H}_\alpha}\cong E_\alpha$. For each $\alpha\in\Delta$, consider a finite separable extension E'_α of E_α together with the natural Frobenius $\varphi_\alpha : E'_\alpha\longrightarrow E'_\alpha$. The structure theorem for local fields of equal characteristic shows that $E'_\alpha\cong k_\alpha((X'_\alpha))$, where k_α is a finite extension over k_α. The field k_α is also the residue field of E'_α, and X'_α is a uniformizer of E'_α. We denote it by $E'^{+}_\alpha\cong k_\alpha[\![X'_\alpha]\!]$ in E'_α. As in [49, Section 3.1], we equip the tensor product

$$E'_{\Delta,\circ}:=\bigotimes_{\alpha\in\Delta,\mathbb{F}_p}E'_\alpha$$

with a norm $|\cdot|_{\mathrm{prod}}$ by the formula

$$|c|_{\mathrm{prod}} := \inf\left(\max_i\left(\prod_{\alpha\in\Delta}|c_{\alpha,i}|_\alpha\right)\,\middle|\, c=\sum_{i=1}^n\bigotimes_{\alpha\in\Delta}c_{\alpha,i}\right).$$

Note that the restriction of $|\cdot|_{\mathrm{prod}}$ to the subring $E'^{+}_{\Delta,\circ} := \bigotimes_{\alpha\in\Delta,\mathbb{F}_p} E'^{+}_{\alpha}$ induces the valuation with respect to the augmentation ideal $\mathrm{Ker}(E'^{+}_{\Delta,\circ} \twoheadrightarrow \bigotimes_{\alpha\in\Delta,\mathbb{F}_p} k_\alpha)$. Note that $\bigotimes_{\alpha\in\Delta,k_\alpha} k_\alpha$ is not a domain, and hence $|\cdot|_{\mathrm{prod}}$ is not multiplicative in general. However, it is submultiplicative. Following [49], we define E'^{+}_{Δ} as the completion of $E'^{+}_{\Delta,\circ}$ with respect to $|\cdot|_{\mathrm{prod}}$ and put $E'_\Delta := E'^{+}_{\Delta}[1/X_\Delta]$. This ring E'_Δ is not complete with respect to $|\cdot|_{\mathrm{prod}}$ (unless $|\Delta|=1$). Further, φ_α acts on $E'^{+}_{\Delta,\circ}$ (and on $E'_{\Delta,\circ}$) by the Frobenius on the component E'_α in E'_Δ and by the identity on all the other components in E'_β for $\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}$. This action is continuous in the norm $|\cdot|_{\mathrm{prod}}$ and, therefore, extends to the completion E'^{+}_{Δ} and the localization E'_Δ.

We define the multivariable analogue of E^{sep} as

$$E^{\mathrm{sep}}_\Delta := \varinjlim_{E_\alpha\leqslant E'_\alpha\leqslant E^{sep}_\alpha,\forall\alpha\in\Delta} E'_\Delta.$$

For any subset $\Delta'\subseteq\Delta$, one can define the similar notions $E'^{+}_{\Delta'}$, $E'_{\Delta'}$ and $E^{\mathrm{sep}}_{\Delta'}$ with Δ replaced by Δ'. We equip E^{sep}_Δ with the relative Frobenii φ_α for each $\alpha\in\Delta$ and the absolute Frobenius φ_s defined above on each E'_Δ. Further, E^{sep}_Δ admits a Galois action of the Galois group $\mathcal{G}_\Delta$.

With respect to the ring E'_Δ, we have the following alternative characterization.

Lemma 5.1. — *Put $\Delta=\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$. We have*

$$E'_\Delta \cong E'_{\alpha_1}\bigotimes_{E_{\alpha_1}}\Big(E'_{\alpha_2}\bigotimes_{E_{\alpha_2}}\Big(\cdots\Big(E'_{\alpha_n}\bigotimes_{E_{\alpha_n}}E_\Delta\Big)\Big)\Big).$$

Proof. — The proof of [49, Lemma 3.2] also works in our imperfect case. □

Proposition 5.2. — *For a collection of finite separable extensions E'_α/E_α $\alpha\in\Delta$, we let $\mathcal{H}'_\Delta := \prod_{\alpha\in\Delta}\mathcal{H}'_\alpha$, where $\mathcal{H}'_\alpha = \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{sep}}_\alpha/E'_\alpha)$. Then, we have $(E^{\mathrm{sep}}_\Delta)^{\mathcal{H}'_\Delta} = E'_\Delta$. In particular, we have $(E^{\mathrm{sep}}_\Delta)^{\mathcal{H}_{L,\Delta}} = E_{L,\Delta}$.*

Proof. — Since X_Δ is $\mathcal{H}'_\Delta$-invariant and $\varinjlim$ can be interchanged with taking $\mathcal{H}'_\Delta$-invariants, it suffices to show that whenever

$$E_\alpha = k_\alpha((X_\alpha)) \leqslant E'_\alpha = k_{\alpha'}((X'_\alpha)) \leqslant E''_\alpha = k_{\alpha''}((X''_\alpha))$$

is a sequence of finite separable extensions for each $\alpha \in \Delta$ such that E''_α/E'_α is Galois, then we have $(E''^+_\Delta)^{\mathcal{H}'_\Delta} = E'^+_\Delta$. The containment $E'^+_\Delta \subseteq (E''^+_\Delta)^{\mathcal{H}'_\Delta}$ is clear. We will prove the converse by induction on $|\Delta|$. It should be remarked that the ideal $\mathcal{M}_\alpha \triangleleft E''^+_\Delta$ generated by X''_α is invariant under the action of $\mathcal{H}'_\Delta$ for any fixed $\alpha \in \Delta$. Moreover, for any integer $k \geq 1$, the ring $E''^+_\alpha/\mathcal{M}^k_\alpha$ is finite dimensional over k_α. Therefore, the image of $(E''^+_\Delta)^{\mathcal{H}'_\Delta}$ under the quotient map $E''^+_\Delta \twoheadrightarrow E''^+_\Delta/\mathcal{M}^k_\alpha$ is contained in

(8)
$$\begin{aligned}\left(E''^+_\Delta/\mathcal{M}^k_\alpha\right)^{\mathcal{H}'_\Delta} \subseteq \left(E''^+_\Delta/\mathcal{M}^k_\alpha\right)^{\mathcal{H}'_{\Delta\setminus\{\alpha\}}} &= \Big(E''^+_{\Delta\setminus\{\alpha\}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} \left(E''^+_\alpha/\mathcal{M}^k_\alpha\right)\Big)^{\mathcal{H}'_{\Delta\setminus\{\alpha\}}} \\ &= \Big(E''^+_{\Delta\setminus\{\alpha\}}\Big)^{\mathcal{H}'_{\Delta\setminus\{\alpha\}}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} (E''^+_\alpha/\mathcal{M}^k_\alpha) \\ &= E'^+_{\Delta\setminus\{\alpha\}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} (E''^+_\alpha/\mathcal{M}^k_\alpha)\end{aligned}$$

by induction. Note that the second equality in (8) follows from the following fact.

Fact. — If A and B are k-vector spaces with a G-action such that B is finite dimensional over k and B has trivial G-action, then

$$(A \bigotimes_k B)^G \cong (A \bigotimes_k k^r)^G \cong (A^r)^G \cong A^G \bigotimes_k k^r \cong A^G \bigotimes_k B,$$

where $B \cong k^r$.

As the inductive limit commutes with these operations, by taking inductive limits of finite dimensional vector spaces, the assumption that B is finite dimensional over k can be removed from this fact.

Let us continue our proof. Taking the projective limit of $(E''^+_\Delta/\mathcal{M}^k_\alpha)^{\mathcal{H}'_\Delta}$ with respect to $k \geq 1$, we deduce that $(E''^+_\Delta)^{\mathcal{H}'_\Delta}$ is contained in the power series ring

$$\Big(k_{\alpha''} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} \bigotimes_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\},\mathbb{F}_p} k_{\beta'}\Big)[\![X''_\alpha, X'_\beta \,|\, \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}]\!] \subseteq E''^+_\Delta.$$

Indeed, even though projective limits do not commute in general with taking $\mathcal{H}'_\Delta$-invariants, this inclusion is automatic. Now using the action of $\mathcal{H}'_\alpha$ in a similar argument to the above (reducing modulo the k-th power of the ideal generated by all the $X'_\beta, \beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$, for all $k \geq 1$), we deduce the statement. □

We define the subring $E^{\mathrm{sep}}_{\Delta,\circ} \cong \bigotimes_{\alpha\in\Delta,\mathbb{F}_p} E^{\mathrm{sep}}_\alpha$ in E^{sep}_Δ to be the inductive limits of $E'_{\Delta,\circ} \subseteq E'_\Delta$, where E'_α runs through the finite separable extensions of E_α for each $\alpha \in \Delta$.

As in Section 2. assume that L_α/K_α is a finite totally ramified extension for each $\alpha\in\Delta$, i.e., L_α also has k_α as the residue field. Put $E_{L,\Delta} := (E_\Delta^{\mathrm{sep}})^{\mathcal{H}_{L,\Delta}}$, where $\mathcal{H}_{L,\Delta} := \prod_{\alpha\in\Delta}\mathcal{H}_{L_\alpha}$. As in the case $L=K$, a $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-module over $E_{L,\Delta}$ is a finitely generated free module D over $E_{L,\Delta}$ together with commuting semilinear actions of φ_α and the Galois groups G_{L_α} for all $\alpha\in\Delta$. By an étale $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-module over $E_{L,\Delta}$, we mean a $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-module D such that the maps

$$\mathrm{id}\otimes\varphi_\alpha : \varphi_\alpha^* D := E_{L,\Delta}\bigotimes_{E_{L,\Delta},\varphi_\alpha} D \longrightarrow D,$$

are isomorphisms for all $\alpha\in\Delta$.

Now, let V be a finite dimensional representation of the group $\mathcal{G}_{L,\Delta}$ over $\mathbb{F}_p$. The base change $E_\Delta^{\mathrm{sep}}\bigotimes_{\mathbb{F}_p} V$ is equipped with the diagonal semilinear action of $\mathcal{G}_{L,\Delta}$ and with the partial Frobenii $\varphi_\alpha\,(\alpha\in\Delta)$. These all commute with each other. We define the functor $\mathbb{D}$ as in [49]

$$\mathbb{D}(V) := \Big(E_\Delta^{\mathrm{sep}}\bigotimes_{\mathbb{F}_p} V\Big)^{\mathcal{H}_{L,\Delta}}.$$

By Proposition 5.2, $\mathbb{D}(V)$ is a module over E_Δ, which inherits the action of $\varphi_\alpha\,(\alpha\in\Delta)$, and the Galois group $\mathcal{G}_{L,\Delta}$ on $E_\Delta^{\mathrm{sep}}\bigotimes_{\mathbb{F}_p} V$. Further, the action of $\mathcal{G}_{L,\Delta}$ factors through its quotient $G_{L,\Delta} = \mathcal{G}_{L,\Delta}/\mathcal{H}_{L,\Delta}$. We denote the category of étale $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$-modules over $E_{L,\Delta}$ by $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$. One key lemma for us is the following.

Lemma 5.3. — *The E_Δ^{sep}-module $E_\Delta^{\mathrm{sep}}\bigotimes_{\mathbb{F}_p} V$ admits a basis consisting of elements fixed by $\mathcal{H}_{L,\Delta}$.*

Proof. — The same proof given in [49, Lemma 3.4] works exactly here. □

Lemma 5.4. — *We have $(E_\Delta^{\mathrm{sep}})^\times \bigcap E_{L,\Delta} = E_{L,\Delta}^\times$.*

Proof. — Let u be an arbitrary element in $(E_\Delta^{\mathrm{sep}})^\times \bigcap E_{L,\Delta}$. Since u is invariant under the action of $\mathcal{H}_{L,\Delta}$, so is its inverse u^{-1}. Hence, it also lies in $E_{L,\Delta}$ by Proposition 5.2. □

Lemma 5.5. — *We have $\bigcap_{\alpha\in\Delta}\big(E_\Delta^{\mathrm{sep}}\big)^{\varphi_\alpha=\mathrm{id}} = \mathbb{F}_p$.*

Proof. — The containment $\mathbb{F}_p \subseteq \bigcap_{\alpha\in\Delta}\big(E_\Delta^{\mathrm{sep}}\big)^{\varphi_\alpha=\mathrm{id}}$ is obvious. On the other hand, let $u\in E_\Delta^{\mathrm{sep}}$ be an arbitrary element such that $\varphi_\alpha(u)=u$, for all $\alpha\in\Delta$. We also have $u^p=\varphi_s(u)=u$, as $\varphi_s=\prod_{\alpha\in\Delta}\varphi_\alpha$ is the absolute

Frobenius on E_Δ^{sep}. Since E_Δ^{sep} is defined to be an inductive limit, u lies in $E'_\Delta \cong (\bigotimes_{\alpha\in\Delta,\mathbb{F}_p} k'_\alpha)[\![X'_\alpha \mid \alpha\in\Delta]\!][X_\Delta^{-1}]$ for some collection $E'_\alpha = k'_\alpha((X'_\alpha))$ $(\alpha\in\Delta)$ of finite separable extensions of E_α.

Since k'_α is a finite separable extension of k_α, it is a finitely generated field extension of $\mathbb{F}_p$. Therefore, by Lemma 2.3 $k'_\Delta := \bigotimes_{\alpha\in\Delta,\mathbb{F}_p} k'_\alpha$ is reduced. This implies that for each $\alpha\in\Delta$, the norm $|\cdot|_\alpha$ on $E'_\Delta = k'_\Delta[\![X'_\alpha \mid \alpha\in\Delta]\!][X_\Delta^{-1}]$ defined by the X'_α-adic valuation is power-multiplicative, as the powers of the leading coefficient (with respect to the X'_α-degree) of an element cannot vanish. Therefore, we have $|u^p|_\alpha = |u|_\alpha^p$, for all $\alpha\in\Delta$. We deduce $|u|_\alpha = 1$ unless $u=0$. In particular, u lies in $E'^{+}_\Delta = k'_\Delta[\![X'_\alpha \mid \alpha\in\Delta]\!]$. The constant term $u_0\in k'_\Delta$ also satisfies $\varphi_\alpha(u_0)=u_0$ for all $\alpha\in\Delta$. Now, k'_Δ is an infinite dimensional vector space over $\mathbb{F}_p$. For a fixed $\alpha\in\Delta$, we can choose elements of an $\mathbb{F}_p$-basis $d_1,\dots,d_n$ of $\bigotimes_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\},\mathbb{F}_p} k'_\beta$ such that $u_0=\sum_{i=1}^n c_i\otimes d_i$ with $c_i\in k'_\alpha$. This decomposition is unique, and we compute

$$\sum_{i=1}^n c_i\otimes d_i = u_0 = \varphi_\alpha(u_0) = \sum_{i=1}^n c_i^p\otimes d_i.$$

We conclude that $c_i = c_i^p$. However (when $|\Delta|=1$), by [44, Theorem 2.1.3] and [44, Equation 2.1.5 and Equation 2.1.6], we know that $(E_\alpha^{\mathrm{sep}})^{\varphi_\alpha=\mathrm{id}} = \mathbb{F}_p$. Therefore, $c_i\in\mathbb{F}_p$, for all $1\leqslant i\leqslant n$. It follows by induction on $|\Delta|$ that u_0 lies in $\mathbb{F}_p$. Now, $u-u_0$ is also fixed by each φ_α $(\alpha\in\Delta)$ and φ_s, but we have $|u-u_0|_{\mathrm{prod}}<1$. By the discussion above this implies that $u=u_0$ is in $\mathbb{F}_p$, as desired. □

Proposition 5.6. — *$\mathbb{D}(V)$ is an étale $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$-module over $E_{L,\Delta}$ of rank $d := \dim_{\mathbb{F}_p} V$. Moreover, we have*

$$E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{E_{L,\Delta}} \mathbb{D}(V) \cong E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} V,$$

and

$$V = \bigcap_{\alpha\in\Delta} \left(E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{E_{L,\Delta}} \mathbb{D}(V)\right)^{\varphi_\alpha=\mathrm{id}}.$$

Proof. — By Proposition 5.2 and Lemma 5.3 we can say that $\mathbb{D}(V)$ is a free module of rank d over $E_{L,\Delta}$. Moreover, the matrix of φ_α in any basis of $\mathbb{D}(V)$ is invertible in E_Δ^{sep} and, therefore, also in $E_{L,\Delta}$ by Lemma 5.4. So the action of $(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta})$ on $\mathbb{D}(V)$ is étale. The last statement is a direct consequence of Lemmas 5.3 and 5.5. □

LEMMA 5.7. — *For objects V, V_1, V_2 in $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$, we have $\mathbb{D}(V_1 \bigotimes_{\mathbb{F}_p} V_2) \cong \mathbb{D}(V_1) \bigotimes_{E_{L,\Delta}} \mathbb{D}(V_2)$ and $\mathbb{D}(V^*) \cong \mathbb{D}(V)^*$.*

Proof. — The proof of [49, Lemma 3.8] works in our imperfect case. □

THEOREM 5.8. — *$\mathbb{D}$ is a fully faithful tensor functor from the category $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$ to the category $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$.*

Proof. — Let $f : V_1 \longrightarrow V_2$ be a nonzero morphism in $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$. Then, the E_Δ^{sep}-linear map $\mathrm{id} \bigotimes f : E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} V_1 \longrightarrow E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} V_2$ is also nonzero. By Proposition 5.6 we assert that $\mathbb{D}(f) \neq 0$ and, therefore, the faithfulness.

Now, let V_1 and V_2 be arbitrary objects in $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$ and $\theta : \mathbb{D}(V_1) \longrightarrow \mathbb{D}(V_2)$ be a morphism in $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$. Then, by Proposition 5.6, we obtain a $\mathcal{G}_{L,\Delta}$-equivariant $\mathbb{F}_p$-linear map

$$f : V_1 = \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Big(E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{E_{L,\Delta}} \mathbb{D}(V_1)\Big)^{\varphi_\alpha=\mathrm{id}} \longrightarrow \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Big(E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{E_{L,\Delta}} \mathbb{D}(V_2)\Big)^{\varphi_\alpha=\mathrm{id}} = V_2$$

induced by θ, for which we have $\theta = \mathbb{D}(f)$. Therefore, $\mathbb{D}$ is full. The compatibility with tensor product follows from Lemma 5.7. □

5.2. The functor $\mathbb{V}$. — In the following, we define the functor $\mathbb{V}$ and show that it is a quasi-inverse of $\mathbb{D}$. This, in turn, implies that the functor $\mathbb{D}$ is essentially surjective. Let $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$. It comes with a natural semilinear action of φ_α ($\alpha \in \Delta$) and the Galois group $G_{L,\Delta}$. We define

$$\mathbb{V}(D) := \bigcap_{\alpha\in\Delta} \Big(E_\Delta^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{E_{L,\Delta}} D\Big)^{\varphi_\alpha=\mathrm{id}}.$$

$\mathbb{V}(D)$ is a—a priori not necessarily finite dimensional—representation of $\mathcal{G}_{L,\Delta}$ over $\mathbb{F}_p$.

LEMMA 5.9. — *For any integer $r > 0$, we have*

$$\bigcap_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}} \left(E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{E_{L,\Delta\setminus\{\alpha\}}^+} E_{L,\Delta}^+/(X_\alpha^r)\right)^{\varphi_\beta=\mathrm{id}} = k_\alpha[X_\alpha]/(X_\alpha^r).$$

Proof. — First of all, we have

$$\begin{aligned} &E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}} \bigotimes_{E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^+} E_{L,\Delta}^+/(X_\alpha^r) \\ &\quad = \varinjlim E'_{\beta_1} \bigotimes_{E_{\beta_1}} \Big(E'_{\beta_2} \bigotimes_{E_{\beta_2}} \Big(\cdots \Big(E'_{\beta_{n-1}} \bigotimes_{E_{\beta_{n-1}}} E_{L,\Delta}/(X_\alpha^r)\Big)\Big)\Big), \end{aligned}$$

where $\Delta \setminus \{\alpha\} = \{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$. As in Lemma 5.5, if $\varphi_\beta(u) = u$ for some element $u \in E'_{\Delta\setminus\{\alpha\}} \bigotimes_{E^+_{\Delta\setminus\{\alpha\}}} E^+_{L,\Delta}/(X^r_\alpha)$, then by Lemma 2.3 we must have $p\mathrm{val}_{X'_\beta}(u) = \mathrm{val}_{X'_\beta}(u)$ showing $\mathrm{val}_{X_\beta{}'}(u) = 0$. The constant term (with respect to the variables X_β, $\beta \in \Delta \setminus \{\alpha\}$) is an element in $k_{\Delta\setminus\{\alpha\}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} k_\alpha[X_\alpha]/(X^r_\alpha)$. So the statement follows the same way as in the proof of Lemma 5.5 noting that

$$\bigcap_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}} \left(k_{\Delta\setminus\{\alpha\}}\right)^{\varphi_\beta=\mathrm{id}} = \mathbb{F}_p,$$

and φ_β acts trivially on $k_\alpha[X_\alpha]/(X^r_\alpha)$. □

Lemma 5.10. — *For any integer $r > 0$ and finitely generated $E^+_{\overline{\alpha}}/(X^r_\alpha)$-module M, we have an identification*

$$E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[X_\alpha]/(X^r_\alpha) \bigotimes_{E^+_{\overline{\alpha}}/(X^r_\alpha)} M \cong E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}} \bigotimes_{E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}} M.$$

Proof. — This follows from the isomorphism

$$E^+_{\overline{\alpha}}/(X^r_\alpha) \cong E_{\Delta\setminus\{\alpha\}} \bigotimes_{\mathbb{F}_p} k_\alpha[X_\alpha]/(X^r_\alpha).$$ □

For a subset $\Delta' \subseteq \Delta$, we put $E^{\mathrm{sep}+}_{\Delta'} := \varinjlim E'^+_{\Delta'}$, so we have $E^{\mathrm{sep}}_{\Delta'} = E^{\mathrm{sep}+}_{\Delta'}[X^{-1}_{\Delta'}]$, where $X_{\Delta'} := \prod_{\alpha\in\Delta'} X_\alpha$.

The proofs of the following two lemmas follow exactly as in [49, Lemma 3.13] and [49, Lemma 3.14] without any change.

Lemma 5.11. — *$E^{\mathrm{sep}}_{\Delta'}$ (resp. $E^{\mathrm{sep}+}_{\Delta'}$) is flat as a module over $E_{\Delta'}$ (resp. over $E^+_{\Delta'}$) for all $\Delta' \subseteq \Delta$.*

Lemma 5.12. — *We have* $\left(E^{\mathrm{sep}+}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[\![X_\alpha]\!][X^{-1}_\Delta]\right)^{\mathcal{H}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}} = E_{L,\Delta}$.

Our main result in this section is the following.

Theorem 5.13. — *The functors $\mathbb{D}$ and $\mathbb{V}$ are quasi-inverse equivalences of categories between $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$ and $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$.*

Proof. — The proof is essentially the same as that of [49, Theorem 3.15]. Instead of repeating the proof, we recall the strategy and just point out what the changes should be adapted to making the argument work in our imperfect residue field case.

Step 1. — *Reducing the statement to the essential surjectivity of* $\mathbb{D}$. It follows from Theorem 5.8 that $\mathbb{D}$ is fully faithful. By Proposition 5.6 we conclude that $\mathbb{V}\circ\mathbb{D}(V)\cong V$ for any object V in $\mathrm{Rep}_{\mathbb{F}_p}(\mathcal{G}_{L,\Delta})$. So we are reduced to showing that $\mathbb{D}$ is essentially surjective. This is done by induction on $|\Delta|$. The case of $|\Delta|=1$ is due to Scholl [44] and Andreatta [1, Theorem 7.11]. Suppose that $|\Delta|>1$, fix $\alpha\in\Delta$, and pick an object D in $\mathcal{D}^{et}(\varphi_\Delta,G_{L,\Delta},E_{L,\Delta})$.

Step 2. — *The goal here is to trivialize the* $(\varphi_{\overline{\alpha}},\varphi_\beta)$*-action* $(\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\})$ *on* $D_{\overline{\alpha}}^{+*}/X_\alpha^r D_{\overline{\alpha}}^{+*}$ *uniformly in* r *by tensoring up with* $E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{sep}$. The place that we need to modify is Equation (4) before [49, Lemma 3.17]. In our imperfect case, it should be reformulated as

$$\begin{aligned}E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{\mathbb{F}_p[X_\alpha]/(X_\alpha^r)}\bigcap_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}}\Big(E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{E_{\overline{\alpha}}^{+}/(X_\alpha^r)}D_{\overline{\alpha},r}^{+*}\Big)^{\varphi_{\overline{\alpha}}=\mathrm{id},\varphi_\beta=\mathrm{id}}\\ \xrightarrow{\sim} E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{E_{\overline{\alpha}}^{+}/(X_\alpha^r)}D_{\overline{\alpha},r}^{+*}\\ \cong E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{E_{\overline{\alpha}}^{+}}D_{\overline{\alpha}}^{+*}.\end{aligned}$$

Lemma 3.17 in [49] should be changed into: there exists a finitely generated $E_{L,\Delta}^+$-submodule $M\leqslant D_{\overline{\alpha}}^{+*}$ such that

$$\bigcap_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}}\Big(E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{E_{\overline{\alpha}}^{+}}D_{\overline{\alpha}}^{+*}\Big)^{\varphi_{\overline{\alpha}}=\mathrm{id},\varphi_\beta=\mathrm{id}}$$

is contained in the image of the map

$$\begin{aligned}E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{E_{L,\Delta}^{+}}M\longrightarrow E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{E_{L,\Delta}^{+}}D_{\overline{\alpha}}^{+*}\\ \cong E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r)\bigotimes_{E_{\overline{\alpha}}^{+}}D_{\overline{\alpha}}^{+*}\end{aligned}$$

induced by the inclusion $M\leqslant D_{\overline{\alpha}}^{+*}$ for all $r>0$.

Note that the intersection in the above is not only over $\varphi_\beta=\mathrm{id}$ $(\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\})$ but also over $\varphi_{\overline{\alpha}}=\mathrm{id}$, noting that $\varphi_{\overline{\alpha}}$ is the absolute Frobenius of $E_{\Delta\setminus\{\alpha\}}^{\mathrm{sep}}$. The reason why we need to make this change is because it is coherent with our Lemma 5.5 and also in the proof of [49, Lemma 3.17] (where the third author used the fact that $\varphi_{\overline{\alpha}}^{l_r}(x)=x$).

Step 3. — *The goal of this step is to show the following compatibility of our construction with projective limits with respect to* r. In our imperfect residue field case, Lemma 3.18 in [49] should be changed into: we have

$$\varprojlim_r \left(E^{\mathrm{sep}+}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r) \bigotimes_{E^+_{L,\Delta}} M\right) \cong E^{\mathrm{sep}+}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[\![X_\alpha]\!] \bigotimes_{E^+_{L,\Delta}} M,$$

$$\varprojlim_r \left(E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r) \bigotimes_{E^+_{\overline{\alpha}}} D^{+*}_{\overline{\alpha}}\right) \cong E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[\![X_\alpha]\!] \bigotimes_{E^+_{\overline{\alpha}}} D^{+*}_{\overline{\alpha}},$$

and

$$\begin{aligned}&\varprojlim_r \Bigg(E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r) \\ &\qquad \bigotimes_{\mathbb{F}_p[X_\alpha]/(X_\alpha^r)} \bigcap_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}} \left(E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[X_\alpha]/(X_\alpha^r) \bigotimes_{E^+_{\overline{\alpha}}/(X_\alpha^r)} D^{+*}_{\overline{\alpha},r}\right)^{\varphi_{\overline{\alpha}}=\mathrm{id},\varphi_\beta=\mathrm{id}}\Bigg) \\ &\cong E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[\![X_\alpha]\!] \bigotimes_{\mathbb{F}_p[\![X_\alpha]\!]} \bigcap_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}} \left(E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[\![X_\alpha]\!] \bigotimes_{E_{L,\Delta}} D\right)^{\varphi_{\overline{\alpha}}=\mathrm{id},\varphi_\beta=\mathrm{id}}.\end{aligned}$$

Everything else, including the proof of [49, Lemma 3.18], remains the same.

Step 4. — *The goal here is to obtain a* $(\varphi_\alpha, G_\alpha)$*-module* D_α *over* E_α *(by trivializing the action of* $(\varphi_{\overline{\alpha}}, \varphi_\beta), \beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}$*), which is at the same time a linear representation of the group* $\mathcal{G}_{L,\Delta\setminus\{\alpha\}}$. In Step 4 of the third author's proof (before [49, Lemma 3.19]), the corresponding D_α in our imperfect residue field case should be defined as

$$D_\alpha := \bigcap_{\beta\in\Delta\setminus\{\alpha\}} \left(E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}((X_\alpha)) \bigotimes_{E_{L,\Delta}} D\right)^{\varphi_{\overline{\alpha}}=\mathrm{id},\varphi_\beta=\mathrm{id}},$$

which is contained in the image of the map

$$E^{\mathrm{sep}+}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}[\![X_\alpha]\!][X_\alpha^{-1}] \bigotimes_{E_{L,\Delta}} D \hookrightarrow E^{\mathrm{sep}}_{\Delta\setminus\{\alpha\}}((X_\alpha)) \bigotimes_{E_{L,\Delta}} D.$$

Then D_α is an $\mathbb{F}_p((X_\alpha))$ vector space.

Step 5. — *The last step is to show the essential surjectivity of* $\mathbb{D}$. Lemma 3.19 of [49] remains exactly the same, including its proof, and so does the third author's Step 5 (cf. after the proof of [49, Lemma 3.19]). We do not need to change anything here. □

Corollary 5.14. — *Any object* D *in* $\mathcal{D}^{\mathrm{et}}(\varphi_\Delta, \varphi_s, G_{L,\Delta}, E_{L,\Delta})$ *is a free module over* $E_{L,\Delta}$.

Proof. — By Theorem 5.13 we know that $\mathbb{D}$ is essentially surjective. The corollary follows by noting that any étale module in the image of the functor $\mathbb{D}$ is free as a module over $E_{L,\Delta}$ by construction. □

Acknowledgements. — First of all to Professor Kiran S. Kedlaya for many unreserved discussions and for constant inspiration. We would like to thank the anonymous referee for his/her tremendous job, who, apart from two very thorough reports that helped to correct a number of minor errors, lacunae, and other inaccuracies (both mathematical and pedagogical), also taught us some theory of (φ,Γ)-modules and representations of Galois groups. In particular, he/she reminded us to notice the fact that projective limits do not commute by taking Galois invariants in general. He/she suggests that we should reformulate the proof of the main Theorem 5.13 by indicating the main steps and mentioning the strategy.

BIBLIOGRAPHY

[1] F. Andreatta – "Generalized ring of norms and generalized (φ,Γ)-modules", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **39** (2006), p. 599–647.

[2] F. Andreatta & O. Brinon – "Surconvergence des représentations p-adiques: le cas relatif", in *Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I. Représentations galoisiennes et* (φ,Γ)*-modules*, Astérisque, no. 319, 2008, p. 39–116.

[3] ———, "B_{dR}-représentations dans le cas relatif", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **43** (2010), p. 279–339.

[4] L. Berger – "Représentations p-adiques et équations différentielles", *Invent. Math.* **48** (2002), p. 219–284.

[5] ———, "Galois representations and (φ,Γ)-modules", 2010, Course given at IHP. `http://perso.ens-lyon.fr/laurent.berger/autrestextes/CoursIHP2010.pdf`.

[6] ———, "Multivariable Lubin-Tate (φ,Γ)-modules and filtered φ-modules", *Math. Res. Lett.* **20** (2013), p. 409–428.

[7] ———, "Multivariable (φ,Γ)-modules and locally analytic vectors", *Duke Math. J.* **165** (2016), p. 3567–3595.

[8] L. Berger, P. Schneider & B.-Y. Xie – "Rigid character groups, Lubin-Tate theory, and (φ,Γ)-modules", *Mem. Amer. Math. Soc.* **263** (2020), no. 1275.

[9] C. Breuil – "Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ I", *Compos. Math.* **138** (2003), p. 165–188.

[10] ———, "Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ II", *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), p. 1–36.

[11] ———, "The emerging p-adic Langlands programme", in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II*, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010, p. 203–230.

[12] ———, "Induction parabolique et (φ,Γ)-modules", *Algebra Number Theory* **9** (2015), p. 2241–2291.

[13] C. Breuil & V. Paškūnas – "Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2", *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1016.

[14] O. Brinon – "Représentations cristallines dans le cas d'un corps résiduel imparfait", *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **56** (2006), p. 919–999.

[15] ———, "Représentations p-adiques cristallines et de de rham dans le cas relatif", *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* **112** (2008).

[16] ———, "Filtered (φ, N)-modules and semi-stable representations", *Panor. Synthèses* **54** (2019), p. 93–129.

[17] O. Brinon & B. Conrad – "CMI summer school notes on p-adic Hodge theory (preliminary version)", `http://math.stanford.edu/~conrad/papers/notes.pdf`.

[18] O. Brinon & F. Trihan – "Représentations cristallines et F-cristaux: le cas d'un corps résiduel imparfait", *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **119** (2008), p. 141–171.

[19] A. Carter, K. S. Kedlaya & G. Zábrádi – "Drinfeld's lemma for perfectoid spaces and overconvergence of multivariate (φ, Γ)-modules", 2020, To appear in Documenta Math., arXiv:1808.03964.

[20] P. Colmez – in *(φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque, no. 330, 2010, p. 61–153.

[21] ———, in *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *et (φ, Γ)-modules*, Astérisque, no. 330, 2010, p. 281–509.

[22] ———, "Le programme de Langlands p-adique", in *European Congress of Mathematics*, Eur. Math. Soc, Zürich, 2013, p. 259–284.

[23] P. Colmez & J.-M. Fontaine – "Construction des représentations p-adiques semistables", *Invent. Math.* **140** (2000), p. 1–43.

[24] J.-M. Fontaine – "Représentations p-adiques des corps locaux, I", in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math., no. 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[25] ———, in *Le corps des périodes p-adiques*, Astérisque, no. 223, 1994, p. 59–111.

[26] ———, in *Représentations p-adiques semi-stables*, Astérisque, no. 223, 1994, p. 113–184.

[27] J.-M. Fontaine & Y. Ouyang – "Theory of p-adic Galois representations", `https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~fontaine/galoisrep.pdf`.

[28] E. Grosse-Klönne – "A note on multivariable (φ, Γ)-modules", *Research in Number Theory* **5** (2019), Article 6.

[29] R. Hartshorne – *Residues and duality*, Lecture Notes in Mathematics, no. 20, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1966.

[30] O. Hyodo – "On variation of Hodge-Tate structures", *Math. Ann.* **284** (1989), p. 7–22.

[31] K. S. Kedlaya – "New methods for (φ,Γ)-modules", *Res. Math. Sci.* (2015), p. 2, Article 20.
[32] ———, "Sheaves, stacks, and shtukas", in *Perfectoid Spaces: Lectures from the 2017 Arizona Winter School* (B. Bhatt, B. Cais, A. Caraiani, K. S. Kedlaya, P. Scholze & J. Weinstein, eds.), Mathematical Surveys and Monographs, no. 242, AMS, 2019.
[33] M. Kisin & W. Ren – "Galois representations and Lubin-Tate groups", *Doc. Math.* **14** (2009), p. 441–461.
[34] H. Matsumura – *Commutative algebra*, 2 ed., Mathematics Lecture Note Series, no. 56, Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1980.
[35] K. Morita – "Galois cohomology of a p-adic field via (φ,Γ)-modules in the imperfect residue field case", *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **15** (2008), p. 219–241.
[36] ———, "Hodge-Tate and de Rham representations in the imperfect residue field case", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* (2010), no. 43, p. 341–356.
[37] ———, "Crystalline and semi-stable representations in the imperfect residue field case", *Asian J. Math.* **18** (2014), p. 143–157.
[38] S. Ohkubo – "Galois theory of B_{dR}^{+} in the imperfect residue field case", *J. Number Theory* **130** (2010), p. 1609–1641.
[39] ———, "A note on Sen's theory in the imperfect residue field case", *Math. Z.* **269** (2011), p. 261–280.
[40] ———, "The p-adic monodromy theorem in the imperfect residue field case", *Algebra Number Theory* **7** (2013), p. 1977–2037.
[41] V. Paškūnas – "The image of Colmez's Montreal functor", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **118** (2013), p. 1–191.
[42] P. Schneider – *Galois representations and (φ,Γ)-modules*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, no. 164, Cambridge University Press, 2017.
[43] P. Schneider, G. Zabradi & M.-F. Vignéras – "From étale P_+-representations to G-equivariant sheaves on G/P", in *Automorphic forms and Galois representations. Volume 2*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., no. 415, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, p. 248–366.
[44] A. J. Scholl – "Higher fields of norms and (φ,Γ)-modules", *Documenta Math.* **Extra Volume Coates** (2006), p. 685–709.
[45] P. Scholze & J. Weinstein – *Berkeley lectures on p-adic geometry*, Annals of Mathematics Studies, no. 207, Princeton University Press, 2020.
[46] R. Y. Sharp – "The Cousin complex for a module over a commutative noetherian ring", *Math. Z.* **112** (1969), p. 340–356.
[47] M. Tousi & S. Yassemi – "Tensor products of some special rings", *J. Algebra* **268** (2003), p. 672–676.

[48] T. Wedhorn – "Adic spaces", arXiv:1910.05934 [math.AG].
[49] G. Zábrádi – "Multivariable (φ, Γ)-modules and products of Galois groups", *Math. Res. Lett.* **25** (2018), p. 687–721.
[50] ———, "Multivariable (φ, Γ)-modules and smooth o-torsion representations", *Selecta Math. (New Series)* **24** (2018), p. 935–995.
[51] S. L. Zerbes – "Bloch-Kato exponential maps for local fields with imperfect residue fields", *Proc. London Math. Soc. (3)* **103** (2011), p. 1007–1048.