Revue d'histoire des mathématiques
28 (2022), p. 147–181
doi:10.24033/rhm.239

LES THÉORÈMES PROJECTIFS DE STURM ET LEUR CIRCULATION

Sylvain Demanie

Résumé. — Le mathématicien franco-suisse Charles-François Sturm est l'auteur d'un théorème peu connu en géométrie projective constituant le sujet principal d'un mémoire consacré aux sections coniques et publié en deux parties en 1826 dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne. Sturm a découvert ce théorème lors de son premier séjour à Paris en tant que précepteur de la famille de Broglie en 1824. Au début du XIX[e] siècle, une communauté de géomètres français développa le projet d'organiser tout le corpus des propositions géométriques (y compris des théorèmes célèbres comme celui de Pascal) à partir de principes généraux. Les travaux de Sturm firent partie intégrante de ce projet et furent publiés à une époque où des débats sur des questions de rigueur et de bonne pratique de la géométrie animaient la communauté des mathématiciens : comment interpréter le concept de dualité ? Comment le représenter ? Quelle crédibilité donner au controversé principe de continuité énoncé par Poncelet ? De plus, le nouveau théorème découvert par Sturm s'inscrit dans un contexte de compétition et de querelles de priorité avec d'autres jeunes mathématiciens publiant également dans la revue de Gergonne, comme Plücker ou Bobillier. L'étude de la circulation de ce théorème de Sturm peu étudié dans la littérature

Texte reçu le 20 novembre 2021, accepté le 10 janvier 2022, révisé le 16 octobre 2022, version finale reçue le 17 novembre 2022.

Sylvain Demanie, Archives Henri Poincaré – Philosophie et Recherches sur les Sciences et les Technologies, UMR 7117 CNRS – Université de Lorraine – Université de Strasbourg, Site de Nancy : 91 avenue de la Libération – BP 454 F-54001 Nancy Cedex, France.

Courrier électronique : `sylvain.demanie@univ-lorraine.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 01A70, 51–03.

Mots clefs : Géométrie projective, principe de continuité, dualité, circulation mathématique.

Key words and phrases. — Projective geometry, principle of continuity, duality, mathematical circulation.

scientifique nous permet de voir comment se sont construits les savoirs et les pratiques dans le domaine particulier de la géométrie projective.

Abstract (Sturm's projective theorems and their circulation)

The French-Swiss mathematician Charles-François Sturm was the discoverer of a little known theorem in projective geometry which was the main topic of a memoir dedicated to conic sections and published in two parts in 1826 in Gergonne's journal *Annales de mathématiques pures et appliquées.* Sturm discovered this theorem during his first stay in Paris as tutor to the de Broglie family in 1824. At the beginning of the 19th century, a community of French mathematicians had developed the project of organising the whole corpus of geometrical propositions (including famous theorems such as Pascal's) from general principles. Sturm's original work constituted a part of this project and appeared at a time when debates on questions of rigor and good practice in geometry had animated the community of mathematicians : how to interpret the concept of duality ? How to represent it ? What credence should be given to the controversial principle of continuity enunciated by Poncelet ? Furthermore, the new theorem discovered by Sturm appeared in a context of competition and priority debates with other young mathematicians also publishing in Gergonne's journal, such as Plücker or Bobillier. The study of the circulation of Sturm's theorem, which is little studied in the scientific literature, shows how knowledge and practices were formed in the particular field of projective geometry in France.

1. INTRODUCTION

Le mathématicien genevois Charles-François Sturm (1803–1855) est l'auteur d'un théorème de géométrie projective dont l'énoncé porte sur trois coniques – qu'on appelait également « lignes du second ordre » – ayant quatre points communs[1] . Énoncé en 1824 dans une lettre à son ami le futur physicien Jean-Daniel Colladon (1802–1893), le théorème et sa démonstration sont publiés pour la première fois en décembre 1826 dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* (1810–1831)[2] , journal dirigé par le mathématicien Joseph-Diez Gergonne (1771–1859). Ce nouveau résultat, découvert alors que Sturm était tout juste âgé de 21 ans,

1 Nous avons rangé le théorème dont il s'agit ici dans le domaine de la géométrie projective – même s'il n'a pas pu être classé ainsi à l'époque de sa publication et tout en reconnaissant qu'il est possible de regrouper sous cette étiquette des pratiques et des concepts différents – car il fait appel à des objets d'étude et à des notions considérées actuellement comme propres à la géométrie projective. Une délimitation rigoureuse du champ théorique de la géométrie projective s'effectuera complètement grâce à l'entreprise d'axiomatisation des théories géométriques conduite durant la seconde moitié du XIX^e siècle [Nabonnand 2006, 3–4].

2 Que nous appellerons pour la suite *Annales de Gergonne* ou simplement *Annales.*

fait son apparition au cours d'une période où des débats portant sur des questions de rigueur et de bonne pratique des mathématiques animent la communauté des géomètres constituée au début du XIXe siècle[3]. L'étude de la circulation de ce théorème dans la correspondance de différents acteurs scientifiques, dans les journaux savants et dans différents ouvrages consacrés à la géométrie permet de montrer, à travers le cas particulier de la géométrie projective, comment se constitue un ensemble de connaissances et de pratiques géométriques. Elle met aussi en lumière un court passage de l'itinéraire d'un jeune homme suisse qui, arrivé à Paris, semble déterminé à entamer une carrière de mathématicien.

La seule et unique contribution de Sturm à la géométrie projective a cependant été très peu étudiée. Pierre Speziali évoque dans un court paragraphe comment Sturm serait parvenu à « généraliser quelques résultats » [Speziali 1964, 15] en apportant deux nouveaux théorèmes à la théorie des sections coniques. Pour lui, le premier de ces théorèmes concernerait les « coniques doublement tangentes » tandis que le second décrirait « le lieu géométrique des centres de toutes les surfaces du second ordre tangentes à huit plans donnés de position » [Speziali 1964, 15]. Mais les théorèmes énoncés par Speziali ne semblent pas correspondre à ceux qui ont été donnés dans le mémoire de Sturm publié dans les *Annales*. Gino Loria a, quant à lui, consacré une partie de son travail biographique sur Sturm aux recherches géométriques menées par celui-ci [Loria 1938, 251–257]. Le théorème de Sturm sur les trois coniques y est correctement cité mais Loria n'apporte pas davantage de développements. Plus récemment, Jean-Claude Pont et Isaac Benguigui ont évoqué brièvement au sein d'un ouvrage collectif les découvertes de Sturm dans le champ de la géométrie projective [Pont & Benguigui 2009]. Cependant, l'attention des auteurs a davantage été focalisée sur les travaux plus connus du mathématicien suisse comme son théorème portant sur le nombre de racines réelles d'une équation numérique ou ses contributions à l'étude des équations différentielles dans le cadre de la théorie de Sturm-Liouville.

Nous nous proposons de mettre sur le devant de la scène les travaux de Sturm dans le domaine de la géométrie projective, de les situer dans les débats de l'époque puis d'étudier leur réception et leur circulation dans

[3] Nous y incluons tous les acteurs ayant publié des travaux géométriques sous la forme de mémoires, d'ouvrages ou d'articles parus dans la presse mathématique. Même si dans cette communauté on regroupe des acteurs évoluant dans des milieux sociaux (professeurs de collèges, polytechniciens, étudiants, etc.) et dans des espaces géographiques (Paris, Nîmes, Metz, Genève, etc.) bien distincts, les journaux mathématiques comme les *Annales de Gergonne* ont constitué un moyen de communication et d'échanges mettant en relation tous ces différents acteurs.

la littérature scientifique. Nos deux sources principales sont les suivantes : la lettre de Sturm à Colladon signée à Paris le 26 avril 1824 – dans laquelle Sturm explique avoir découvert des résultats nouveaux à son ami d'enfance resté à Genève – et le mémoire original de Sturm publié en deux parties au cours de l'année 1826 (en mars puis en décembre) sous le titre « Mémoire sur les lignes du second ordre », inséré dans les tomes 16 et 17 des *Annales de Gergonne*. Chacune des parties constituée dans le mémoire est divisée en cinq grands paragraphes. La lettre de Sturm à Colladon est conservée à la Bibliothèque de Genève[4] et a été reproduite dans son intégralité par Colladon dans ses *Souvenirs et Mémoires* publiés en 1893 [Sturm 1893]. Dans cette lettre, Sturm mentionne effectivement les deux nouveaux théorèmes qu'il aurait découverts et qui ont été correctement rappelés par Speziali. Surtout, Sturm relate à Colladon son projet de publier prochainement un mémoire en plusieurs parties et dont la première prend pour point de départ un théorème fondamental portant sur trois coniques ayant quatre points en commun : c'est ce théorème que nous allons étudier.

Une troisième partie du mémoire de Sturm contenant des théorèmes supplémentaires et inédits devait être originellement publiée dans les *Annales*. Bien plus tard, après la mort de Sturm en 1855, Liouville qui était un ami proche de celui-ci, s'était engagé à faire publier l'intégralité du mémoire comme nous le rappelle Loria [Loria 1938, 257]. Cela n'a hélas pas été fait et la dernière partie du mémoire a longtemps été considérée comme perdue. Cependant, Erwin Neuenschwander fit savoir en 1989 que plusieurs manuscrits inédits de Sturm avaient été découverts dans les archives de Liouville à Bordeaux, dont trois carnets contenant l'intégralité du mémoire sur les lignes du second ordre. Neuenschwander nous apprend notamment que la dernière partie du mémoire devait être constituée de douze paragraphes au total [Neuenschwander 1989, 340]. Le contenu de ces manuscrits inédits n'a pas encore été rendu public mais plusieurs indices nous permettent de conjecturer le contenu de cette partie manquante comme nous le verrons. Aussi, même s'il n'a fait paraître que les deux premières parties du mémoire dans son journal, Gergonne a eu accès à la troisième partie non publiée[5].

---

4 Bibliothèque de Genève (BGE), Ms. fr. 3255, f. 219–222. Une copie de la lettre originelle se trouve également dans le document dont la cote est Ms. fr. 3748, f. 239–242.

5 Dans une note à un article de Bobillier publié en 1828 et intitulé « Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre », Gergonne évoque en effet le mémoire manuscrit de Sturm et explique à ses lecteurs que son étendue ne lui a pas permis de le publier en entier [Bobillier 1827–1828b, 364].

Notre objectif est de montrer que les travaux de Sturm publiés dans les *Annales* en 1826 ont contribué – certes modestement – à la construction du champ de la géométrie projective auquel nous les avons rattachés *a posteriori* grâce aux outils que le jeune mathématicien genevois a développés. Les théorèmes de Sturm ont aussi été les témoins d'une époque au cours de laquelle ont émergé des discussions parfois très vives dans la presse mathématique centrées sur des questions de méthodes pouvant considérablement varier suivant les géomètres. Pour soutenir notre thèse, des extraits de journaux, des articles et des ouvrages consacrés à l'histoire de la géométrie nous permettront de voir comment le théorème des trois coniques de Sturm a pu circuler dans l'offre éditoriale mathématique et comment celui-ci a été relayé puis discuté par les différents acteurs historiques de la géométrie du XIX[e] siècle. Après avoir situé les travaux projectifs de Sturm dans la production mathématique au moment de leur publication, nous allons montrer en quoi ceux-ci se distinguent des recherches géométriques publiées par ses contemporains et comment ils alimentent les débats de l'époque, puis nous verrons comment les théorèmes de Sturm ont été reçus par la communauté des géomètres collaborant aux *Annales de Gergonne*.

2. UN NOUVEAU THÉORÈME DANS UNE DISCIPLINE EN PLEINE CONSTITUTION

Les travaux de Sturm dans le domaine de la géométrie projective, accomplis entre 1824 et 1826, apparaissent au cours d'une période marquée par la parution de nombreux ouvrages et mémoires écrits par des acteurs importants du champ de la géométrie projective.

Ainsi, en 1806, Lazare Carnot (1753–1823) fait publier son *Essai sur la théorie des transversales* dans lequel il expose une nouvelle théorie faisant jouer aux propriétés d'incidence[6] un rôle fondamental pour la géométrie [Nabonnand 2006, 27–28]. Auparavant, Carnot avait installé dans sa *Géométrie de position* son projet en partie déjà entamé dans *De la corrélation des*

6 En géométrie, on appelle propriété d'incidence toute propriété décrivant des objets (les points, les droites, les courbes, les plans, les surfaces, etc.) en les mettant en relation au moyen des notions d'intersection, de parallélisme, d'alignement, etc. Les *transversales*, qui désignaient pour Carnot et ses contemporains des droites ou même des courbes quelconques traversant un système de droites ou de courbes, voire un système de plans ou de surfaces, avaient alors un rôle central dans la démonstration de propriétés d'incidence [Nabonnand 2006, 28].

figures de géométrie consistant à fournir à la géométrie des méthodes générales et alternatives aux méthodes analytiques tout en conservant la puissance de celles-ci [Chemla 1998, 174].

Au cours du mois de décembre 1816, Gabriel Lamé (1795–1870) présente un mémoire sur les intersections des lignes et des surfaces. Ses stratégies de résolution de problèmes géométriques relatifs aux intersections sont illustrées en 1817 dans un article des *Annales de Gergonne* [Lamé 1816–1817], puis dans son *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* paru en 1818 [Lamé 1818]. Lamé développa notamment sa méthode de « notation abrégée » lui ayant permis d'étudier un certain nombre de problèmes en partie déjà connus et relatifs aux intersections de lieux de points. Mais Lamé posa également des questions inédites conduisant à des considérations autour des faisceaux de coniques [Barbin 2009, 4]. Dans l'objectif de résoudre des problèmes de recherche de conditions nécessaires pour que plusieurs surfaces s'intersectent ou concourent selon une courbe particulière, Lamé expose sa méthode des « multiplicateurs indéterminés » [Lamé 1816–1817, 236] qui sera reprise dix ans plus tard par différents auteurs des *Annales de Gergonne*.

Héritant des idées développées dans la théorie des transversales de Carnot, Charles-Julien Brianchon (1783–1864) fait paraître en 1817 un *Mémoire sur les lignes du second ordre* dans lequel les notions de *pôles* et de *polaires* sont placées au cœur de sa théorie des sections coniques [Nabonnand 2006, 37]. Dans ce mémoire, Brianchon redécouvre notamment un théorème que l'on doit à Girard Desargues (1591–1661) et démontre l'équivalence entre ce théorème et celui de l'hexagramme[7] attribué à Blaise Pascal (1623–1662). À l'aide de ces théorèmes, Brianchon pose et résout les problèmes de détermination d'une conique soumise à cinq conditions[8] [Del Centina 2022, 106–120].

Enfin et surtout, le fameux *Traité des propriétés projectives des figures* de Jean-Victor Poncelet (1788–1867) paraît en 1822. Dans ce *Traité*, Poncelet argumente notamment en faveur de son *principe de continuité* et qui consiste en ceci qu'une propriété démontrée pour une figure particulière appelée *primitive* (une section conique la plupart du temps) peut être considérée comme valide pour un ensemble de figures *corrélatives*[9]

[7] Nous reviendrons sur ces théorèmes dans la section 4.

[8] Par exemple : construire l'unique conique passant par cinq points distincts ou celle qui serait tangente à cinq droites distinctes.

[9] Prenons un exemple donné par Poncelet lui-même : si on considère un cercle et un point S situé à l'intérieur, il est possible de démontrer la relation $SA \times SB = SC \times SD$ si A, B, C et D désignent quatre points du cercle et si les droites (AB) et (CD) sont

[Nabonnand 2015, 3]. Autrement dit : il existe d'après Poncelet certaines propriétés qui restent invariantes par la déformation d'une figure primitive [Lorenat 2015b, 10].

Avec la formulation de son principe de continuité[10], Poncelet accomplit un retour à une géométrie pure[11], entendue comme une pratique de la géométrie s'interdisant tout recours aux coordonnées – aussi appelée géométrie *synthétique* – en réaction aux succès rencontrés par la géométrie *analytique* qui *a contrario* en fait une utilisation systématique par des outils algébriques [Nabonnand 2006, 3].

Chez les géomètres français comme Poncelet, Carnot, Brianchon mais aussi Michel Chasles (1793–1880), se développe aussi le projet d'organiser tout le corpus des propositions géométriques à l'intérieur de théories fondées sur des principes généraux. L'objectif n'est pas seulement de découvrir de nouveaux énoncés mais plutôt de mettre en avant des théorèmes généraux à partir desquels il est possible de dériver des propositions particulières incluant les résultats classiques de la géométrie des anciens. La pratique de la géométrie se voit ainsi modifiée, passant d'une *géométrie des problèmes* à l'élaboration de *théories géométriques* [Nabonnand 2006, 6–7].

C'est au cours de cette période de développement progressif des méthodes de la géométrie projective que Sturm entre en 1821 à l'auditoire de Philosophie attaché à ce haut-lieu de l'enseignement supérieur que fut l'Académie de Genève, dans la même promotion que son ami Colladon[12]. L'enseignement des mathématiques y était alors traditionnellement divisé en deux parties bien distinctes, à savoir l'algèbre (entendue comme l'étude des équations) et la géométrie. Si la partie algébrique de

sécantes en S. Ce résultat est connu sous le nom du théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle. La relation reste vraie également si S est à l'extérieur du cercle – et devrait nécessiter une autre démonstration – mais le principe de continuité permet d'en apporter une justification rapide [Nabonnand 2006, 48–49].

10 En reprenant l'exemple précédent, le principe de continuité permet à Poncelet d'introduire la notion discutable de « droite idéale » dans le cas où la droite (SC) que nous avons considérée ici comme sécante au cercle venait à ne plus rencontrer celui-ci. Ce même principe lui permet également d'introduire la notion de « point à l'infini » en considérant notamment deux droites sécantes : au moyen d'un mouvement progressif et continu, le point d'intersection des deux droites s'éloigne au fur et à mesure jusqu'à ne plus réellement exister au moment où les droites deviennent parallèles. Dans cette dernière situation, Poncelet s'autorise à parler de « point à l'infini » ; cela lui permet en outre de justifier l'expression de droites convergentes à l'infini quand on désigne des droites parallèles [Nabonnand 2006, 49].

11 Poncelet divisait la géométrie en trois parties : la géométrie pure des anciens, la géométrie pure moderne et la géométrie analytique [Lorenat 2016, 3].

12 Dans le jargon académique, on parlait de « volée » pour désigner une promotion d'élèves.

la formation académique était principalement dévolue au mathématicien Jean-Jacques Schaub (1773–1825), ce fut à Simon Lhuilier (1750–1840) qu'il incomba de prodiguer l'enseignement de la géométrie aux auditeurs de Philosophie[13]. La pratique de la géométrie telle qu'elle apparaît à la lecture des ouvrages de Lhuilier montre une très large préférence pour les méthodes de la géométrie analytique.

À l'issue de l'examen traditionnel se déroulant à la fin de la première année, les appréciations générales données par les professeurs des différentes disciplines nous dépeignent Sturm comme un très bon étudiant ayant des talents « distingués » pour les mathématiques mais « un peu lent » et ayant manqué de ponctualité aux cours dispensés à l'Académie : Sturm est en effet décrit comme « pas exact aux leçons »[14].

L'année académique 1822–1823 qui devait constituer pour Sturm sa deuxième et ultime année à l'auditoire de Philosophie marqua un tournant dans sa vie scientifique. En effet, ce fut en janvier 1823 que parut sa première contribution dans les *Annales de Gergonne* [Saint-Laurent & Sturm 1822–1823]. Il s'agissait alors d'une réponse à une question traitant de la courbe du chien posée deux mois auparavant dans la section « Questions posées » du journal. Ce fut là le début d'une participation fructueuse au jeu des questions-réponses, à laquelle se livra le jeune géomètre âgé de 19 ans dans les colonnes du journal. Sturm se démarqua notamment des autres participants aux questions-réponses par un usage quasiment exclusif des outils de la géométrie analytique.

Par exemple, le jeune géomètre genevois fut l'auteur de deux théorèmes portant sur les polygones réguliers et fournit leur énoncé à Gergonne afin de les soumettre sous la forme d'une question aux lecteurs de son journal. Les énoncés des deux théorèmes furent publiés en août 1823 et les réponses des lecteurs apparurent cinq mois plus tard. Gergonne, qui reçut les démonstrations avant de les publier, nota que les preuves des théorèmes – de type analytique – que Sturm avait apportées avec leur énoncé différaient de celles des autres participants :

---

13 À cause de son âge avancé, Lhuilier demanda à être remplacé au cours de l'année académique et plusieurs professeurs extérieurs prirent la relève dont Guillaume Henri Dufour (1787–1875) et le jeune Abraham Pascalis (1797–1857). Les suppléants de Lhuilier sont explicitement nommés dans le procès-verbal du 2 février 1822 du « Registre des séances du Sénat académique » qui se trouve à la Bibliothèque de Genève (BGE), Ms. fr. 989. f. 127.

14 C'est ce que nous lisons dans un document disponible aux Archives d'État de Genève (AEG), désigné par « Faculté des Sciences – Examens de sciences du 29 mai 1810 au 9 juillet 1831 et examens de philosophie » et dans lequel nous pouvons découvrir les sujets des examens ainsi que les appréciations des professeurs, Académie C1.

> Les géomètres qui nous ont adressé des démonstrations de ces deux élégans théorèmes les ont tous démontrés géométriquement[15] ; M. Sturm, à qui ils sont dûs, a seul accompagné la sienne d'une démonstration analitique [Sturm et al. 1823–1824, 216].

Entre temps, Sturm devient au cours de la première moitié de l'année 1823 le précepteur d'Alphonse de Rocca (1812–1838), le fils orphelin de Germaine de Staël (1766–1817) et d'Albert de Rocca (1788–1818), pris en charge au château de Coppet par Victor de Broglie (1785–1870), acteur politique important de la future Monarchie de Juillet. Occupé à remplir ses fonctions de précepteur pour la famille de Broglie, Sturm n'a pas pu se présenter aux examens de la dernière année de l'auditoire de Philosophie ayant eu lieu en mai 1823 contrairement à son camarade de volée Colladon[16]. Sturm n'a donc pas de diplôme quand il arrive à Paris pour la première fois à la fin de l'année 1823 en accompagnant son élève Alphonse au sein de la famille de Broglie.

Mais Sturm était venu dans la capitale avec des lettres de recommandation de Schaub, son professeur de mathématiques, et également du baron Jean Frédéric Théodore Maurice (1775–1851) de l'Académie de Genève[17], à destination – entre autres – d'Arago, de Nicollet et d'Ampère [Colladon 1893, 54]. Malgré ses retours réguliers à Genève, Maurice était un scientifique reconnu dans la capitale française en ce début du XIXe siècle [Gautier 1851, 104–111].

Par conséquent, les contacts que Maurice avait fournis à Sturm lui ont été d'une aide précieuse dans son intégration au milieu savant parisien. Dans sa lettre du 26 avril 1824, Sturm explique à Colladon qu'une lettre de recommandation de Maurice lui a permis d'entrer en relation avec Vecten[18], un ancien professeur de mathématiques de Nîmes et habitant désormais Paris. Ce fut grâce à celui-ci que Sturm rencontra François-Joseph

---

15 C'est-à-dire sans faire usage des coordonnées.

16 Colladon a ainsi pu obtenir le grade de bachelier après avoir réussi brillamment ses examens, Archives d'État de Genève (AEG), Académie C1.

17 Nommé examinateur d'admission à l'École Polytechnique en 1801, Maurice remplit plus tard plusieurs fonctions publiques et devint membre de l'Académie des sciences en qualité d'académicien libre, ce qui ne l'obligeait pas à résider dans la capitale. Genevois lui aussi, Maurice était un ami proche du père de Colladon [Colladon 1893, 78].

18 Dans cette édition des *Souvenirs et mémoires* de Colladon [Sturm 1893, 55], le nom de Vecten a été mal orthographié et a laissé planer quelques doutes sur l'identité de ce contact parisien. Cependant, dans la lettre originale que nous pouvons trouver à la Bibliothèque de Genève, le nom de Vecten est correctement écrit et ne laisse plus de place à l'incertitude, Ms. fr. 3255. f. 214.

Servois (1768–1847). S'il est bien établi que les soutiens d'Arago ou de Fourier ont eu des profondes répercussions dans la conduite de sa carrière de mathématicien, la rencontre de Sturm avec Vecten et Servois – et plus tard avec Poncelet – a eu une influence sur ses premiers travaux géométriques. Comme il l'écrit dans sa lettre à Colladon : « Je fais de temps en temps une visite à ces messieurs et nous parlons géométrie à n'en plus finir » [Sturm 1893, 55].

En tout cas, c'est à Paris que Sturm étudie pour la première fois le *Traité* de Poncelet et qu'il se tient au courant des dernières avancées dans le champ de la géométrie projective. Plus loin dans sa lettre, Sturm raconte à Colladon comment Poncelet aurait réussi à redémontrer à l'aide du principe de continuité de nombreux théorèmes en partie déjà connus. Il demande également à son ami de faire état de ses découvertes à son professeur Lhuilier :

> Il faut que je te raconte un projet que j'ai formé. Arrivé à Paris, je me suis mis à lire le bel ouvrage de M. Poncelet *sur les propriétés projectives des figures.* Ce livre ne traite guère que des lignes et surfaces du 2^{me} degré. L'auteur (avec qui, par parenthèse, je vais faire connaissance), ne voulant rien emprunter de l'analyse algébrique, a introduit un certain principe de continuité, et, le combinant avec les considérations projectives, il est parvenu par cette méthode équivoque à de beaux résultats, déjà connus en grande partie. Mais il n'a pas senti que presque toutes les propositions qu'il a établies dépendent au fond les unes des autres. En y réfléchissant longuement, j'ai trouvé qu'on peut les rattacher à un lien commun et en faire un corps de doctrine assez complet ; j'ai rencontré sur mon chemin plusieurs théorèmes nouveaux et difficiles ; je veux te donner ici deux exemples de mes trouvailles, afin que tu puisses en dire un mot au bon M. Lhuilier [Sturm 1893, 59–60].

Sturm est donc conscient que Poncelet, en défendant son point de vue projectif, se démarque dans sa pratique de la géométrie par un recours à une méthodologie originale et se manifestant par une certaine opposition à l'analyse algébrique appliquée à la géométrie que Sturm connaît très bien grâce à l'enseignement de son professeur Lhuilier. Mais dans l'objectif d'établir « un corps de doctrine assez complet », Sturm semble rejoindre l'entreprise engagée par les acteurs principaux de la géométrie projective, Brianchon, Lamé, Poncelet etc., de recherche de la plus grande généralité possible.

En outre, Sturm semble avoir dès 1824 une idée très claire du contenu de son futur mémoire puisqu'il met en avant l'existence d'une « proposition fondamentale » lui permettant de retrouver les résultats bien connus de la géométrie projective :

> La proposition fondamentale de la première partie de mon mémoire consiste dans une certaine relation qui a lieu entre les six points de section déterminés sur une droite arbitraire, qui coupe trois coniques ayant quatre points communs. Il existe une relation analogue (que j'ai aussi découverte) entre les sections des trois couples de tangentes qu'on peut mener d'un même point à trois coniques qui ont quatre tangentes communes. De là dérivent, sans calcul, la théorie des pôles et polaires, la division harmonique, toute la géométrie de la règle, l'hexagone de Pascal, etc. [Sturm 1893, 60–61]

Plus loin, Sturm expose à Colladon son projet de publication d'un mémoire en vue d'une présentation à l'Académie des sciences, bien qu'il ait conscience du peu de temps qui lui reste pour réunir tous ses résultats en un tout cohérent et approuvable :

> Je compte présenter ce mémoire à l'Institut en quittant Paris ; jusqu'ici, quoiqu'il soit bien long, je n'y ai pas mis une grande activité, aussi j'ai tout lieu de craindre que M. Poncelet ne m'ait enlevé, par droit de premier occupant, une partie de mon sujet, vu qu'il a présenté dernièrement un mémoire qui s'y rapporte[19]. Jusqu'à ce que j'en sache le contenu, l'inquiétude me ronge. Et ce ne serait rien si je n'avais pas exposé à M. Servois, il y a quelque temps, mes principales idées, en lui demandant des conseils. Peut-être ne se sera-t-il pas cru obligé au secret, que je ne lui ai pas demandé [Sturm 1893, 61].

Si le premier article de Poncelet dans le journal date de juillet 1817 avec une présentation de « théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre », les *Annales* ont vu plus tard au cours de l'année 1826 l'entrée en scène de deux nouveaux acteurs importants de la géométrie projective : Julius Plücker (1801–1868) et Étienne Bobillier (1798–1840). Ces deux mathématiciens s'intéressent aux mêmes sujets que Sturm et sont de la même génération que lui. Par conséquent, le mémoire de Sturm survient dans un contexte de concurrence où des querelles de priorité de découvertes peuvent se manifester dans les colonnes du journal, comme ce fut le cas notamment entre Gergonne et Poncelet à propos du concept de dualité[20]. Cet esprit de compétition a d'ailleurs été attesté par Gergonne :

---

19 Le mémoire de Poncelet auquel Sturm fait ici référence porte sur la théorie des polaires réciproques [Poncelet 1829] et il aurait été préparé au cours de l'hiver 1823–24 avant d'être lu le 12 avril 1824 à l'Académie des sciences. Legendre, Poinsot et Cauchy constituaient alors la commission chargée d'évaluer le contenu de celui-ci [Nabonnand 2006, 70]. Sturm profite de son séjour parisien pour assister aux séances de l'Académie des sciences qui ont lieu tous les lundis [Sturm 1893, 56].

20 Au début de la polémique, Poncelet estimait que le concept de *dualité* baptisé par Gergonne ne relevait que d'une réinterprétation philosophique de la propriété de « réciprocité polaire » que Poncelet a lui-même développée. Pour Gergonne, les

> En voici présentement pour M. Plucker qui, je ne sais trop pourquoi, avait déjà excité l'animadversion de M. Sturm, lequel, à son tour, n'aura peut-être pas été à l'abri de celle de M. Poncelet. M. Plucker se vengera, sans doute, en continuant de composer pour les *Annales* des articles que les lecteurs, excepté M. Poncelet, et peut-être M. Sturm, aiment beaucoup à y rencontrer [Gergonne 1827–1828, 146][21].

Ainsi, en arrivant à Paris en tant que précepteur de la famille de Broglie, Sturm commença à se constituer un ensemble de relations avec quelques acteurs importants de la géométrie projective comme Servois, Poncelet ou même Vecten. La lecture du *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet fit office de premier contact avec le principe de continuité et Sturm se tint au courant des différents débats gravitant autour de la légitimité de ce principe au fil de ses conversations. En découvrant son théorème sur les trois coniques ayant quatre points en commun et en projetant de le publier sous la forme d'un mémoire dans un environnement compétitif, Sturm rejoignit l'entreprise déjà amorcée par ses prédécesseurs d'une création d'une théorie géométrique dans laquelle il serait possible de dériver des théorèmes à partir de propositions jugées fondamentales. Avec Gergonne, Bobillier et surtout Plücker, Sturm était prêt pour développer dans les *Annales* une théorie concurrente à celle de Poncelet par une application des méthodes analytiques qui se perfectionna avec le temps [Darboux 1905, 524].

3. LE PRINCIPE DE CONTINUITÉ SELON STURM

Environ deux années vont s'écouler entre le moment où Sturm est rentré à Genève après son bref séjour parisien et la publication de la première partie de son mémoire sur les lignes du second ordre contenant le théorème des trois coniques que Sturm a évoqué à son ami Colladon. Entre temps, Sturm fit paraître un article dans les *Annales de Gergonne* dans lequel il partagea une réflexion sur le principe de continuité de Poncelet, nous permettant ainsi de mesurer sa compréhension de ce résultat important

---

potentialités de ce concept permettant de modifier en profondeur la pratique de la géométrie échappaient à Poncelet [Lorenat 2015a, 577].

21 Cependant, il est admis que Gergonne usait de sarcasmes et d'attaques subtiles dans ses notes de bas de page en se dissimulant derrière une apparence d'objectivité éditoriale. Par exemple, Gergonne a beaucoup fait pour rendre la polémique qui l'opposa à Poncelet toujours plus mélodramatique [Lorenat 2015a, 566]. La note de Gergonne est peut-être davantage le témoignage de son goût pour la controverse qu'il espérait faire germer dans les colonnes de son journal que d'une véritable animosité entre Sturm et Plücker.

du champ de la géométrie projective et sa position dans les discussions de l'époque.

De retour en Suisse, Sturm continua de participer dans les *Annales de Gergonne* au jeu des questions-réponses et des théorèmes à démontrer en privilégiant les outils de la géométrie analytique, et ceci jusqu'en 1825, l'année à partir de laquelle ses publications mathématiques commencèrent à changer d'objectifs. Sturm cessa en effet d'apporter des solutions aux questions posées dans le journal et il entama une nouvelle série d'articles s'apparentant davantage à des travaux d'investigation scientifique : ainsi parurent ses « Recherches » sur les caustiques et sur les polygones rectilignes.

L'un de ses articles publiés au début de l'année 1825 se présenta comme une réponse à un défi lancé par Lhuilier dans la *Bibliothèque universelle* [Lhuilier 1824] au sein d'une publication signée le 23 mai 1824. Son ancien professeur, bien connu parmi ses contemporains comme l'auteur d'une *Polygonométrie* [Lhuilier 1789], formula un théorème sur les polygones réguliers sans révéler sa démonstration, préférant soumettre ledit théorème aux jeunes géomètres et les incitant à consacrer leur temps à la recherche d'une preuve que l'un d'entre eux pourrait publier par la suite. Le théorème que Lhuilier qualifie de « presque général » en raison d'une exception notable dans le cas où le polygone considéré est un carré, est formulé comme suit :

> Soit un polygone régulier, et soit un cercle concentrique à ce polygone : d'un point de la circonférence de ce cercle soient abaissées des perpendiculaires sur les côtés du polygone : le polygone dont les sommets sont les pieds de ces perpendiculaires successives est d'une grandeur constante, déterminée par le rayon du cercle, sur la circonférence duquel le point est situé [Lhuilier 1824, 169].

Parvenir à répondre publiquement au défi lancé par son ancien professeur de l'Académie était un moyen pour Sturm de rappeler son existence de jeune géomètre[22]. Dans sa publication, Lhuilier explique en effet que s'il souhaite embrasser une carrière dans les sciences exactes, le jeune chercheur se doit – tout en consolidant ses connaissances académiques – de se montrer actif dans la démonstration de résultats nouveaux, y compris dans une discipline bien constituée comme la géométrie :

> Le jeune homme que son goût porte vers la culture des sciences, et en particulier vers celle des sciences exactes ; celui qui aspire à parcourir avec distinction

22 Comme nous l'avons vu, Sturm n'a pas de titre ou de diplôme à ce moment-là.

> la carrière qui s'ouvre devant lui, et à en reculer les bornes, doit sans doute, fortifier les connoissances fondamentales qu'il a reçues, par la lecture et par l'étude des écrits et des leçons des grands maîtres. Mais il doit bientôt seconder et remplacer, au moins en partie, cette instruction passive par une instruction plus active qu'il se donne à lui-même par ses propres méditations. Pour développer son génie, il doit travailler avec ses propres forces, il doit se rendre capable d'exploiter à son tour le champ de la science.
>
> Quoique ce champ ait été cultivé pendant une longue durée de siècles et par un grand nombre d'ouvriers habiles, il peut espérer d'y faire encore quelque récolte, et tout au moins, d'y trouver encore à glaner [Lhuilier 1824, 171].

Mais une première démonstration du théorème de Lhuilier fit son apparition dans le journal de Gergonne au mois d'août 1824 par un lecteur anonyme[23]. Plusieurs auteurs ont relaté qu'il était dans les habitudes de Gergonne de signer ses contributions de manière anonyme[24]. Il nous semble probable en effet que la démonstration de cet abonné inconnu soit celle de Gergonne, étant donné les spéculations présentes à la fin de l'article que son auteur exprime sur les différentes méthodes qu'auraient employées Lhuilier pour prouver son théorème.

Gergonne aurait donc pris de vitesse Sturm et d'autres jeunes géomètres concourant au défi de Lhuilier en publiant avant eux une preuve du théorème. Néanmoins, le jeune genevois rendit publique sa propre démonstration du théorème de Lhuilier quelques mois plus tard dans le même journal[25] : celle-ci fut publiée en 1825 dans le numéro de février sous la forme d'un article intitulé « Théorèmes sur les polygones réguliers » [Sturm 1824–1825]. En ouverture de son article, Sturm formule une remarque sur la démonstration du théorème de Lhuilier publiée anonymement avant lui et il entend clairement se démarquer de celle-ci :

> Il a paru, à la page 45 du présent volume, une démonstration d'un théorème de géométrie dont M. le professeur Lhuilier avait donné l'énoncé dans la *Bibliothèque universelle*. Cette démonstration nous ayant paru moins simple que le sujet ne semblait le comporter, nous nous sommes occupés à en chercher une

---

23 Cette démonstration aurait été découverte par « un abonné » ayant signé sa preuve agrémentée de quelques commentaires à Lyon le 17 mai 1824, [Gergonne 1824–1825].

24 Ainsi par exemple, l'historien des statistiques Stephen Mack Stigler a notamment fait savoir qu'il existait des indices probants que plusieurs articles des *Annales de Gergonne* signés à Lyon par « un abonné » auraient été écrits par Gergonne lui-même [Stigler 1976, 72–73].

25 Ceci illustre comment les *Annales de Gergonne* ont permis à ses différents auteurs (professeurs et élèves de collèges ou de lycées, jeunes mathématiciens, etc.) de rendre accessible le fruit de leurs travaux qui auraient pu ne pas être connus sans elles [Gerini 2016, 24].

> autre ; et le tour de raisonnement que nous y avons employé nous a heureusement conduit à quelques autres théorèmes assez curieux. M. Lhuilier n'ayant point encore publié sa démonstration, nous pensons que nos recherches sur ce sujet seront accueillies avec quelque bienveillance [Sturm 1824–1825, 250].

Pour parvenir à la preuve du théorème de Lhuilier, Sturm énonce et démontre au préalable deux autres théorèmes de telle façon que le théorème de Lhuilier se déduise aisément des théorèmes qui le précèdent[26]. Le premier des théorèmes de Sturm peut être énoncé comme suit : si m et n sont deux entiers naturels avec $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 3$ vérifiant $m > n$, alors le lieu géométrique des points tels que la somme des puissances n-ièmes de leurs distances aux côtés d'un polygone régulier à m côtés soit constante, est un cercle concentrique au polygone. Ce théorème se généralise pour toute fonction symétrique rationnelle et entière de degré n de ces distances, toujours sous la condition $m > n$. C'est cette même condition qui fait douter Sturm de la validité du principe de continuité de Poncelet :

> D'après l'idée qu'on se forme communément de la loi de continuité, on serait tenté de croire que notre premier théorème doit subsister encore pour les sommes de puissances des longueurs des perpendiculaires d'un degré égal ou supérieur à m. Il paraîtrait étrange et vraiment paradoxal, en effet, que, par exemple, le lieu géométrique des points du plan d'un polygone régulier de 100 côtés desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ces cotés, la somme des 99$^{\text{mes}}$ puissances ou des puissances semblables de degrés inférieurs serait constante, dut être un cercle, et que ce lieu dut devenir tout-à-coup une ligne du 100$^{\text{me}}$ ordre, ou peut-être même d'un ordre plus élevé, dès qu'il s'agirait seulement de la somme des 100$^{\text{mes}}$ puissances de ces mêmes longueurs [Sturm 1824–1825, 253].

Pour s'épargner des calculs, Sturm considère le cas particulier du triangle équilatéral ($m = 3$) de son théorème, triangle noté ici $A_1A_2A_3$. Considérons le lieu $\mathscr{L}$ des points P vérifiant la condition

$$PH_1^n + PH_2^n + PH_3^n = \text{constante}$$

où H_1, H_2 et H_3 sont respectivement les projetés orthogonaux de P sur (A_2A_3), (A_1A_3) et (A_1A_2).

Sturm rappelle alors à ses lecteurs que son professeur Lhuilier démontra, dans ses *Élémens d'analyse géométrique* [Lhuilier 1809, 139], que $\mathscr{L}$ était un cercle si $n = 1$ ou 2 mais ne l'était plus si $n \geqslant 3$.

---

26 Giulio Vivanti (1859–1949) a reformulé et redémontré en 1938 ces théorèmes en utilisant des outils et des méthodes modernes dans un article portant sur les théorèmes des polygones réguliers découverts par le mathématicien genevois [Vivanti 1938].

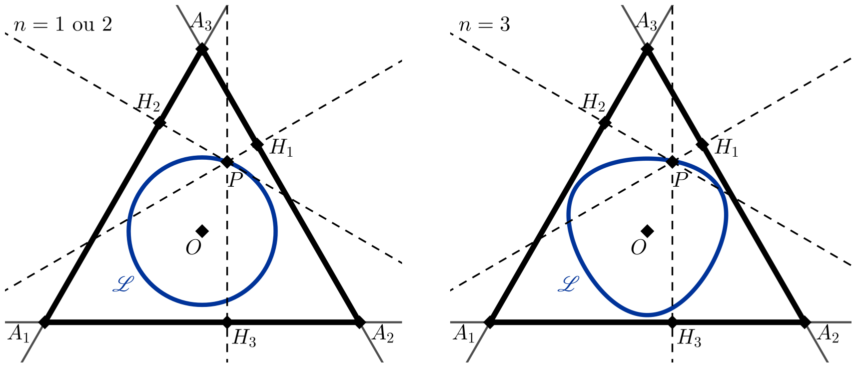

Figure 1. Le cas particulier du triangle équilatéral.

En considérant alors le cas particulier du triangle équilatéral, Sturm conclut que « la loi de continuité n'est point observée dans tous les cas » [Sturm 1824–1825, 253] et parvient plus loin à démontrer le théorème de Lhuilier mis au concours des lecteurs de la *Bibliothèque universelle* en le présentant comme corollaire de ses propres théorèmes.

Ainsi, Sturm cessa au début de l'année 1825 de participer au jeu des questions-réponses des *Annales de Gergonne* et commença à publier des articles dont l'objectif était moins de résoudre un problème particulier que d'établir un ensemble de théorèmes généraux : ce constat révèle ainsi un changement de cap dans sa pratique mathématique. Dans son article consacré aux polygones réguliers, Sturm démontre certes le théorème de Lhuilier posé en tant que problème à résoudre dans la *Bibliothèque universelle* mais en l'intégrant surtout dans une famille de cinq théorèmes au total, connectés logiquement les uns aux autres et présentés sous une forme similaire. Sturm y manifeste déjà son scepticisme vis-à-vis du principe de continuité qu'il refera transparaître dans son futur « Mémoire sur les lignes du second ordre » publié dans le journal de Gergonne un an plus tard.

4. LA PUBLICATION DES THÉORÈMES DE STURM EN 1826

Comme l'avait déjà bien résumé Loria en 1938, la première partie du mémoire consacré aux coniques et publiée en 1826 consiste en une présentation d'une théorie possible de la polarité par rapport à une ligne du second ordre distincte de celle qui était en usage à l'époque [Loria 1938, 256]. En effet, bien que Sturm fasse plusieurs fois référence au mémoire de Brianchon, il prend soin dès le début de se distinguer de ce dernier par le choix d'une définition analytique d'une ligne du second ordre.

Pour Brianchon, qui choisit d'adopter la définition traditionnelle d'une section conique, une ligne du second ordre est « la section faite par un plan dans une surface conique à base circulaire » [Brianchon 1817, 5]. De là s'ensuivent de nouvelles propositions et définitions comme celle du pôle d'une droite ou, de façon duale, celle de la polaire d'un point fixe par rapport à une conique. Sturm, fidèle aux méthodes de la géométrie analytique, opte pour une représentation d'une ligne du second ordre par une équation du second degré à deux inconnues x et y[27] :

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

L'originalité dans l'approche de Sturm réside dans l'étude de la configuration particulière de trois lignes du second ordre (c), (c') et (c'') ayant quatre points communs. En admettant que les équations représentant les deux premières lignes du second ordre sont :

$$(c) : Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$
$$(c') : A'x^2 + B'y^2 + 2C'xy + 2D'x + 2E'y + F' = 0.$$

Il est alors possible par l'intermédiaire d'un facteur numérique indéterminé m de former une équation de la troisième ligne :

$$(c'') : \ A''x^2 + B''y^2 + 2C''xy + 2D'x + 2E''y + F'' = 0.$$

Avec les relations suivantes :

$$mA + A' = A'' \qquad mB + B' = B'' \qquad mC + C' = C''$$
$$mD + D' = D'' \qquad mE + E' = E'' \qquad mF + F' = F''.$$

De ces relations algébriques[28] impliquant un multiplicateur indéterminé m, Sturm en tire plusieurs conséquences qui lui permettent de proposer une définition analytique des pôles et des polaires bien différente de celle de ses prédécesseurs. En outre, le jeune genevois s'attache à fournir les méthodes pour construire les pôles et les polaires au moyen

---

27 La définition des coniques varie selon les auteurs. Poncelet et Brianchon optèrent pour la définition classique mais pour Steiner par exemple, les coniques étaient définies à partir de la notion plus complexe de formes projectives [Nabonnand 2006, 7–8]. Avec Sturm, Plücker utilisa l'équation générale du second degré à deux inconnues pour décrire les coniques [Plücker 1828–1829, 102].

28 Sturm reprend ici à l'identique la méthode que Lamé a développée en 1816 dans le but de résoudre le problème de recherche de conditions nécessaires pour que trois coniques se coupent suivant les mêmes points [Lamé 1816–1817, 231].

de la règle seule. Avec ses propres outils, Sturm redéfinit principalement par les techniques de la géométrie analytique tous les termes et les expressions en usage chez les géomètres projectifs : points harmoniques, faisceau harmonique, quadrilatère complet, centres, diamètres, axes, asymptotes, etc. Aussi, Sturm fait un usage très restreint des figures puisqu'on ne compte, dans la totalité de son mémoire, que deux figures représentant des situations de quatre points distribués de façon harmonique.

Ayant choisi de fonder son étude des lignes du second ordre à partir des équations du second degré, Sturm est par conséquent amené à considérer les cas où des solutions x' et x'' d'une certaine équation sont imaginaires et donc de la forme $x' = p + q\sqrt{-1}$ et $x'' = p - q\sqrt{-1}$. Un travail d'interprétation est donc nécessaire pour discuter la constructibilité ou non des points ayant x' ou x'' comme première coordonnée. Dans une longue note de bas de page, Sturm explicite de quelle manière les solutions imaginaires doivent être interprétées :

> Soit une ligne du second ordre et une droite, tracées sur un même plan, et données par leurs équations. Si l'on cherche, par l'analise, leurs points d'intersection; en désignant par $(x\ ,\ y)$ l'un quelconque d'entre eux, on trouvera, pour déterminer la coordonnée x, une équation du second degré dont les coefficiens seront toujours réels. Suivant que les deux racines de cette équation seront réelles ou imaginaires, les valeurs correspondantes de l'autre coordonnée y seront réelles ou imaginaires. Dans le premier cas, la droite coupera effectivement la courbe; dans le second, elle ne la coupera pas, et ses points d'intersection avec elle seront *imaginaires* [Sturm 1825–1826, 278].

Plus loin, il rappelle qu'il est possible d'interpréter trois cercles disposés sur un même plan comme trois lignes du second ordre ayant les mêmes points d'intersection « dont deux situés à l'infini » ; ces trois cercles ayant de plus une corde commune pouvant être « réelle ou idéale » [Sturm 1826–1827, 184]. Sturm montre ainsi publiquement qu'il s'est approprié les notions susceptibles d'alimenter des débats chez les géomètres comme celles de points à l'infini, de points d'intersection imaginaires, de cordes ou de sécantes idéales [Lorenat 2015b, 133].

De plus, Sturm explique avec insistance que ses réflexions sont à dissocier de celles de Poncelet relatives au principe de continuité et prend de nouveau publiquement ses distances vis-à-vis de celui-ci. S'appuyant sur la mise en garde de Cauchy à l'encontre du principe de continuité[29], Sturm

29 En 1820, Cauchy, Arago et Poisson ont été chargés par l'Académie royale des sciences de rendre compte d'un mémoire de Poncelet relatif aux propriétés projectives des sections coniques. Le rapport rédigé par Cauchy et présenté au cours de la séance à l'Académie du 5 juin 1820 est publié dans les *Annales* dans le numéro de

se montre sceptique quant à la validité du principe de Poncelet à l'instar de certains de ses contemporains :

> Les remarques qui précèdent doivent être étendues aux intersections des lignes droites avec les courbes de tous les degrés. Il ne faut jamais les perdre de vue, parce qu'elles sont nécessaires pour donner aux relations que fournit la théorie des transversales et à d'autres relations que nous ferons connaître par la suite, toute la généralité convenable. On ne doit pas d'ailleurs les confondre avec les considérations de M. Poncelet sur la loi de continuité. La distinction en a déjà été faite, avec soin, par M. Cauchy, dans son rapport inséré au tome XI^e des *Annales* (pag. 69) et placé depuis en tête du *Traité des Propriétés projectives des figures* [Sturm 1825–1826, 279].

Si Sturm manifeste ainsi sa défiance envers le principe de continuité, c'est parce que l'émergence seule des nombres imaginaires dans la résolution des équations – suivant les méthodes de la géométrie analytique – suffit au géomètre pour parler de point à l'infini ou de droite idéale. Pour justifier l'existence de ces objets atypiques, il n'est donc pas nécessaire d'invoquer un quelconque principe de permanence de propriétés par transformation continue de figures comme le propose Poncelet.

L'appareil analytique développé dans la première partie du mémoire lui permet d'aboutir à un résultat entièrement nouveau dans la deuxième partie. Il s'agit de la « proposition fondamentale » déjà évoquée dans sa lettre à Colladon de 1824 et qui s'intègre aisément, grâce à la multitude des conséquences qu'il est possible d'en tirer, dans l'ensemble des propositions centrales de la théorie des sections coniques [Loria 1938, 256]. Ce « nouveau théorème » est énoncé ainsi sous la plume de Sturm :

> Soient trois lignes du second ordre, tracées sur un même plan et ayant les mêmes points d'intersection. Si l'on mène à volonté, sur leur plan, une droite coupant chacune d'elles en deux points, il y aura sur cette droite arbitraire six points de section tels que les deux produits de segmens compris entre un point de section appartenant à l'une quelconque des trois courbes et les points de section de chacune de deux autres, seront entre eux dans le même rapport que les deux produits de segmens compris entre le second point de section de la première courbe et les mêmes points de section des deux autres [Sturm 1826–1827, 179].

---

septembre [Cauchy & Poncelet 1820–1821]. D'après son auteur, le principe de continuité ne serait qu'une « forte induction » ayant certes conduit Poncelet à la formulation de résultats exacts mais qui ne devrait être admis dans sa généralité. Cauchy explique sa méfiance envers le principe de continuité en étudiant un exemple découlant du calcul intégral [Cauchy & Poncelet 1820–1821, 73].

Reformulons ce théorème autrement. Soient trois coniques $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ayant les mêmes points d'intersection et soit $\mathscr{D}$ une transversale, c'est-à-dire une droite coupant chacune des trois coniques en deux points. On note A et B les points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_1$, C et D les points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_2$, puis E et F les points d'intersection de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_3$.

Alors la conclusion du théorème est l'égalité suivante :

$$\frac{AC \times AD}{AE \times AF} = \frac{BC \times BD}{BE \times BF}$$

Cette relation pouvant être obtenue à partir de n'importe quel point de la figure, on obtient par symétrie les trois équations :

$$\begin{gathered}\frac{AC \times AD}{AE \times AF} = \frac{BC \times BD}{BE \times BF}\\ \frac{CA \times CB}{CE \times CF} = \frac{DA \times DB}{DE \times DF}\\ \frac{EA \times EB}{EC \times ED} = \frac{FA \times FB}{FC \times FD}.\end{gathered}$$

Puis, « par voie de multiplication », quatre équations supplémentaires peuvent être dérivées :

$$\begin{array}{ll} AC \times BE \times DF = AF \times BD \times CE & AD \times BE \times CF = AF \times BC \times DE\\ AC \times BF \times DE = AE \times BD \times CF & AD \times BF \times CE = AE \times BC \times DF. \end{array}$$

Toute la deuxième partie de son mémoire consiste alors à démontrer un ensemble de théorèmes (la plupart déjà connus) et diverses propositions qui découlent de ce théorème fondamental. D'ailleurs, Sturm baptise l'ensemble de ces sept équations « le système des formules (f) », qui a toujours « une signification réelle et indépendante de la réalité des points de section de la transversale ». Revenant ainsi sur la discussion qu'il avait entamée dans la première partie, Sturm fournit les clés permettant d'interpréter correctement les points imaginaires, ceci afin de leur « trouver un sens intelligible » [Sturm 1826–1827, 181].

Ensuite, Sturm choisit d'adopter un point de vue historique en rappelant que Desargues est considéré comme le premier géomètre ayant étudié

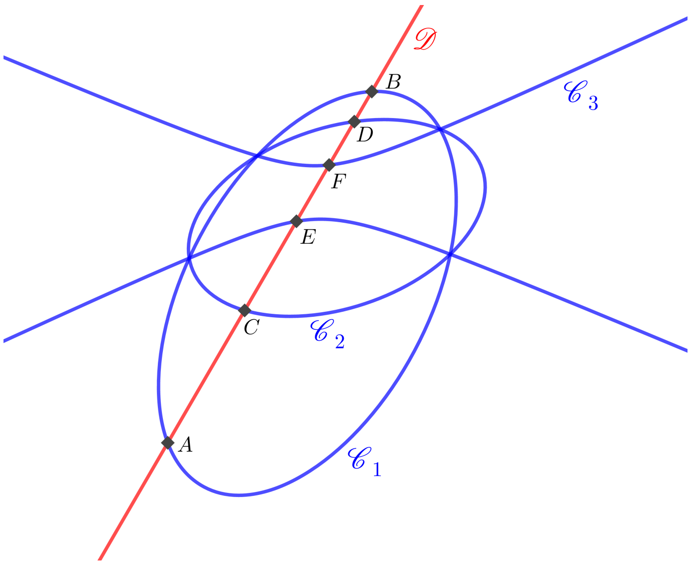

Figure 2. Le théorème de Sturm. Les points A, B, C, D, E et F sont six points en involution.

les configurations de six points vérifiant ce système d'équations. En référence à Desargues, Sturm appelle alors *involution de six points* cette configuration particulière (on dit également que les six points sont en involution)[30].

À titre d'exemple, Sturm montre comment un théorème attribué à Desargues peut désormais être démontré à partir de sa proposition fondamentale. En considérant un système de deux droites comme un cas dégénéré d'une conique, l'application du théorème de Sturm au cas particulier d'un quadrilatère permet de former la proposition suivante :

> [...] si, sur le plan d'un quadrilatère inscrit à une ligne du second ordre, on mène une droite arbitraire, ses points d'intersection avec deux côtés opposés du quadrilatère, ses points d'intersection avec les deux autres et enfin ses points d'intersection avec la courbe seront six points en involution [Sturm 1826–1827, 188].

30 Le géomètre genevois devient d'ailleurs le premier auteur des *Annales de Gergonne* à employer le terme *involution* : Chasles [Chasles 1827–1828, 271] et Bobillier [Bobillier 1827–1828b, 363] auront recours à ce vocabulaire à sa suite.

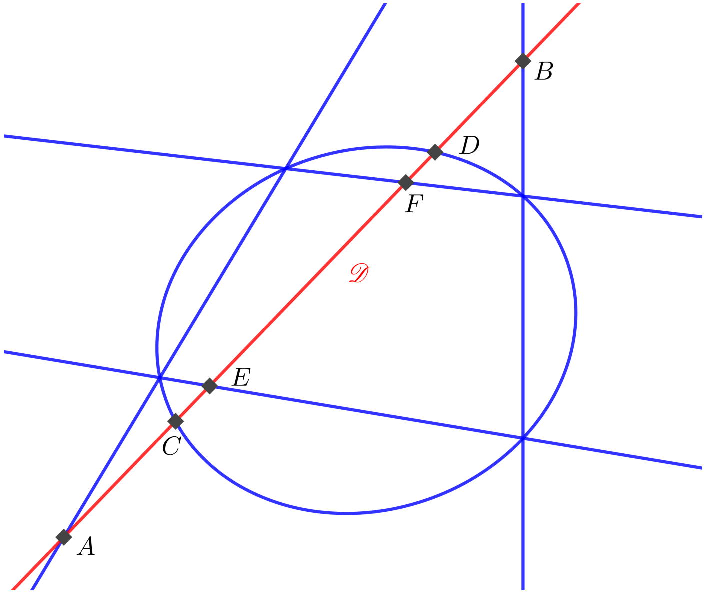

Figure 3. Le théorème de Desargues. Les points A, B, C, D, E et F sont six points en involution.

De manière astucieuse, le théorème de Sturm devient par conséquent une généralisation du théorème de Desargues à partir duquel il est possible de tirer un nombre important de conséquences.

Sturm prend beaucoup de soins à citer les noms de plusieurs mathématiciens dans le but de montrer comment ses théorèmes s'intègrent naturellement à la suite des travaux de ses prédécesseurs : Desargues comme nous l'avons vu, Descartes, Pascal, puis Brianchon, Poncelet, Servois et également Lambert. Les renvois au *Traité* de Poncelet parsèment le mémoire, mais Sturm cite aussi le *Journal de l'École Polytechnique* – la revue dans laquelle le « Mémoire sur les lignes du second ordre » de Brianchon a été publié en 1817 – et différents articles publiés dans les *Annales de Gergonne*. En plus de se montrer un lecteur assidu des différents journaux savants du début du XIXe siècle, Sturm rappelle aussi que les différentes questions qu'il a étudiées étaient déjà présentes dans le paysage éditorial mathématique de son temps.

Les références à Brianchon sont d'ailleurs nombreuses : par le choix du titre de son mémoire d'abord qui reprend mot à mot celui de Brianchon et même s'il n'emploie pas la méthode des projections comme ce dernier, Sturm s'applique néanmoins à redémontrer un théorème attribué à Brianchon et qui n'est rien d'autre que le théorème dual du théorème dit de « l'hexagramme mystique » associé à Pascal. En outre, Sturm apporte une nouvelle démonstration du théorème de l'hexagramme de Pascal et souligne l'originalité de celle-ci : « La démonstration que je viens de donner de ce beau théorème, démonstration que je crois nouvelle, me paraît se recommander par sa simplicité » [Sturm 1826–1827, 189].

Quant à la dualité, concept fondamental de la géométrie projective très discuté à son époque, celle-ci se manifeste principalement chez Sturm à la fin de la deuxième partie de son mémoire dans laquelle il donne plusieurs exemples de « propositions inverses » [Sturm 1826–1827, 191]. Par exemple, les deux propositions suivantes permettent de conclure qu'il n'existe qu'une seule conique passant par cinq points ou bien, par dualité, qu'il n'existe qu'une seule conique touchant cinq droites données :

> (1) lorsque cinq des sommets de l'hexagone appartiennent à une ligne du second ordre, et que d'ailleurs les points de concours des côtés opposés de cet hexagone appartiennent tous trois à une même droite, son sixième sommet est aussi sur la courbe ;
> (2) lorsque cinq des côtés d'un hexagone sont tangens à une ligne du second ordre, et que d'ailleurs les diagonales qui joignent les sommets opposés de cet hexagone se coupent au même point, son sixième côté est aussi tangent à la courbe [Sturm 1826–1827, 191].

De plus, Sturm démontre toutes les propositions découlant de son théorème des trois coniques sans faire usage des coordonnées. Si la deuxième partie du mémoire a bel et bien été classée dans la thématique « Géométrie analytique » dans la table des matières des *Annales*, il convient de relativiser cette classification car l'essentiel du calcul algébrique sur les coordonnées – et relevant prétendument des méthodes de la géométrie analytique – a été accompli dans la première partie. Comme Sturm l'écrit : c'est uniquement dans la première partie de son mémoire qu'il a développé « la théorie purement analytique des pôles et polaires » et ceci dans le but de faire « voir qu'on pouvait en déduire, avec facilité, les propriétés généralement connues des lignes du second ordre qui nous ont été transmises par les anciens géomètres » [Sturm 1826–1827, 173]. Une fois son théorème principal prouvé à partir des définitions analytiques des coniques, des pôles et des polaires, Sturm peut ensuite démontrer, « sans calcul »[31], de nombreux résultats classiques de la géométrie. L'entreprise de Sturm se rapproche ainsi davantage de celle des géomètres que l'on range parmi

31 Comme il l'écrit dans sa lettre à Colladon [Sturm 1893, 61].

les partisans de la géométrie synthétique (Carnot, Poncelet, Chasles, etc.), par sa décision de présenter et d'organiser de manière synthétique le corpus des théorèmes de la géométrie pouvant être démontrés par la méthode hypothético-déductive à partir d'un noyau dur, ici le théorème des trois coniques que Sturm a appelé « proposition fondamentale » dans sa lettre à Colladon [Sturm 1893, 60].

En conclusion de la deuxième partie de son mémoire, Sturm expose son projet de démontrer au sein d'une troisième partie un théorème analogue à son théorème fondamental. L'énoncé de ce théorème porterait également sur trois lignes du second ordre mais on supposerait cette fois-ci que ces trois lignes ont quatre tangentes communes au lieu de quatre points communs. Cette troisième partie ne verra pas le jour mais les indications laissées dans la lettre de 1824 et dans les parties ayant été publiées suggèrent fortement que le théorème manquant devrait être la version duale de son théorème fondamental.

Ce théorème dual considère trois coniques $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ayant quatre tangentes communes. Soit P un point extérieur à ces trois coniques. Par le point P, on construit les tangentes T_1 et T_1' à $\mathscr{C}_1$, les tangentes T_2 et T_2' à $\mathscr{C}_2$, puis les tangentes T_3 et T_3' à $\mathscr{C}_3$.

Alors, les six tangentes forment un faisceau de droites en involution, dans le sens où après avoir tracé une droite quelconque $\mathscr{D}$ intersectant les six tangentes en six points – les points A et B avec T_1 et T_1', C et D avec T_2 et T_2', E et F avec T_3 et T_3' – ces six points seront en involution.

Ainsi, la publication des deux premières parties du mémoire sur les lignes du second ordre en 1826 nous montre de quelle manière Sturm a voulu réaliser une théorie géométrique construite à partir d'une proposition fondamentale que nous avons appelée « théorème de Sturm ». En adoptant l'analyse comme méthode privilégiée, le jeune mathématicien genevois a redéfini les concepts principaux de la géométrie projective (pôle, polaire, points imaginaires, involution, etc.) et montré comment il était possible de redémontrer les théorèmes classiques de ce champ comme celui de Desargues, de Pascal ou de Brianchon au moyen d'un seul théorème principal. Pour ce qui concerne la dualité, Sturm s'est contenté de formuler quelques propositions géométriques duales les unes par rapport à d'autres sans entrer dans des considérations plus générales. Bien que la dernière partie de son mémoire n'a jamais été publiée, il est cependant possible de deviner que celle-ci contenait la version duale de son théorème principal ainsi qu'un certain nombre de ses conséquences.

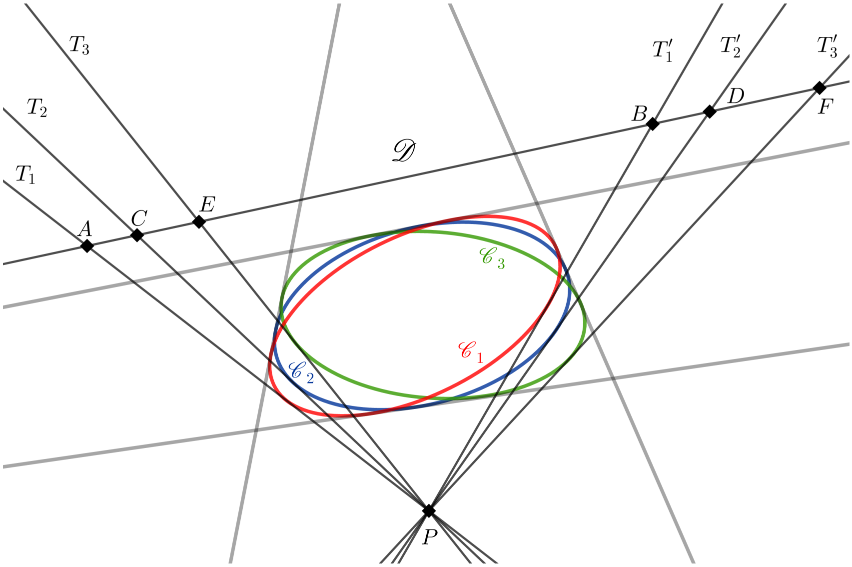

Figure 4. Le théorème dual de Sturm. Les droites T_1, T'_1, T_2, T'_2, T_3 et T'_3 forment un faisceau de six droites en involution.

5. LA CIRCULATION DES THÉORÈMES DE STURM DANS LA LITTÉRATURE SAVANTE

Publiée en décembre 1826, l'unique contribution de Sturm à la géométrie projective a par la suite été reprise et commentée par différents géomètres. En première ligne : Gergonne, Plücker, Bobillier et Chasles. Ces derniers ont joué un rôle essentiel dans la circulation des théorèmes de Sturm dans les colonnes des *Annales*.

Ainsi, dans son article intitulé « Théorèmes sur les sections coniques confocales », Chasles transforme en 1827 le théorème de Sturm pour l'appliquer à la géométrie de l'espace et le présente sous une forme plus condensée avec sa version duale :

> Quelques lignes de calcul font voir que,
>
> Si trois surfaces du second ordre ont les mêmes courbes d'intersection, elles couperont toute transversale rectiligne en six points qui seront en involution ;
>
> Donc, si trois surfaces du second ordre sont inscrites à une même surface développable de cet ordre, et que, par une droite prise arbitrairement, on leur mène trois couples de plans tangens, ces plans couperont toute transversale rectiligne en six points qui seront en involution [Chasles 1827–1828, 271].

En remplaçant les lignes du second ordre par les surfaces du second ordre, un point fixe par une droite fixe, les points d'intersection par les courbes d'intersection, puis les tangentes par les plans tangents, les deux théorèmes de Sturm ayant cours dans le plan se voient ainsi rectifiés pour pouvoir s'appliquer à l'espace. Sans citer Sturm, Chasles devient le deuxième auteur des *Annales* à employer le concept d'involution et une note de bas de page – sans doute rédigée par Gergonne – renvoie les lecteurs à la partie du mémoire de Sturm dans laquelle la définition d'involution a été fournie.

Alors installé à Châlons-sur-Marne depuis 1818 en tant que professeur à l'École des arts et métiers [Haubrichs dos Santos 2015, 49], Bobillier rédige en 1828 un article publié dans la section « Philosophie mathématiques » des *Annales* sous le titre « Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre ». Par le recours à des « constantes indéterminées », Bobillier fait usage de la méthode des multiplicateurs développée par Lamé en 1817 puis, en faisant appel à des résultats déjà obtenus par Plücker [Bobillier 1827–1828b, 360–361], le géomètre présente une liste de théorèmes obtenus grâce à une méthode qu'il entend partager à ses lecteurs.

Dans ses *Annales*, Gergonne avait argumenté dans le numéro du 1er janvier 1826 en faveur d'une exposition de la dualité au moyen d'une représentation à deux colonnes[32]. Ainsi, les théorèmes duaux pouvaient être séparés par deux colonnes « en regard l'une de l'autre » [Gergonne 1825–1826, 211]. C'est donc en suivant les recommandations de Gergonne que Bobillier reformule les théorèmes de Sturm d'une façon très compacte [Bobillier 1827–1828b, 363] :

7. THÉORÈME. Trois coniques circonscrites à un même quadrilatère coupent toute droite en six points qui forment une involution.

7. THÉORÈME. Les six tangentes menées d'un même point quelconque à trois coniques inscrites à un même quadrilatère forment un faisceau en involution.

Le théorème présenté sur la colonne de gauche est la « proposition fondamentale » de Sturm énoncée dans la deuxième partie de son mémoire,

32 Cette convention de présentation des théorèmes a été vite adoptée dans les *Annales* dans des articles attribués à Plücker [Plücker 1826–1827, 38] et à Bobillier [Bobillier 1827–1828a, 323]. Cependant, les travaux de Plücker ont été réécrits par Gergonne qui opta pour une présentation à deux colonnes des théorèmes duaux et ceci afin de faire office d'argument de poids en faveur de sa version de la dualité [Lorenat 2015a, 560].

tandis que celui de droite en est la version duale qui n'a pas été publiée. Si Bobillier ne cite pas Sturm dans ses travaux, une note de bas de page ajoutée par Gergonne précise bien que le septième théorème est bel et bien « l'élégant théorème de M. Sturm » et apporte les références du mémoire où ce résultat est démontré [Bobillier 1827–1828b, 363].

Des deux théorèmes de Sturm, Bobillier parvient à en déduire trois couples de théorèmes découlant de l'application des théorèmes fondamentaux à des cas dégénérés de coniques. Il suffit, par exemple, de prendre comme cas particulier pour n'importe laquelle des trois coniques un système de deux droites et on obtient alors d'autres théorèmes dont celui de Desargues (le théorème 9 dans la colonne de gauche) :

> 8. THÉORÈME. Toute droite est coupée par deux coniques qui se coupent en quatre points et par les deux cordes qui joignent ces quatre points deux à deux en six points qui forment une involution.

> 8. THÉORÈME. Les quatre tangentes menées d'un même point quelconque à deux coniques et les deux droites menées du même point aux points de concours de leurs deux paires de tangentes communes, forment un faisceau en involution.

> 9. THÉORÈME. Les six points d'intersection des quatre côtés d'un quadrilatère et d'une conique qui lui est circonscrite avec une droite quelconque, forment une involution.

> 9. THÉORÈME. Les droites menées d'un même point quelconque aux quatre sommets d'un quadrilatère et les deux tangentes menées du même point à une conique inscrite, forment un faisceau en involution.

> 10. THÉORÈME. Les six droites que déterminent quatre points d'un même plan coupent toute transversale en six points qui forment une involution.

> 10. THÉORÈME. Les droites menées d'un même point quelconque d'un plan aux six points que déterminent quatre droites tracées sur ce plan forment un faisceau en involution.

Gergonne, qui aurait lu l'intégralité du mémoire de Sturm, profite aussi de l'exposition des corollaires du théorème de Sturm pour faire savoir aux lecteurs de l'article de Bobillier que les théorèmes 9 et 10 auraient dû être énoncés dans la troisième partie du mémoire :

> Ce théorème et celui qui le précède se trouvent consignés dans un mémoire manuscrit de M. Sturm, dont nous avons publié deux extraits dans notre XVIIe volume, et que son étendue ne nous a pas permis de publier en entier ; mais l'auteur, qui n'a pas songé à les déduire de son théorème général ou de celui de Desargues, en donne des démonstrations directes [Bobillier 1827–1828b, 364].

Plus tard en 1837, Chasles évoque dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* l'existence d'un théorème qui devait figurer dans la dernière partie du mémoire sur les lignes du second ordre de Sturm. Chasles rappelle notamment que de la même manière que le théorème de l'hexagramme mystique de Pascal est le dual de celui de Brianchon, celui de Desargues est le dual du théorème non publié de Sturm qui selon Chasles aurait dû être énoncé comme suit, ressemblant fortement à la formulation du théorème 9 de Bobillier :

> Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites menées d'un point quelconque à ses quatre sommets et les deux tangentes menées de ce point à la courbe, forment un faisceau en involution [Chasles 1837, 341].

En outre, dans un *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Chasles fera brièvement en 1870 une très courte description du mémoire des lignes du second ordre en insistant sur le fait que le théorème de Sturm constituait une généralisation du théorème de Desargues [Chasles 1870, 65].

En 1853, un jeune étudiant de 19 ans, Edmond Nicolas Laguerre (1834–1886)[33], préparant cette année le concours d'admission à l'École Polytechnique à l'Institut Barbet[34], s'approprie le théorème de Sturm et publie dans les *Nouvelles annales de mathématiques* une « Note sur la théorie des foyers ». Laguerre part d'un théorème portant sur trois coniques ayant un même foyer et démontre par homographie d'autres propositions connues sur les coniques dont certaines sont attribuées à Chasles. Le théorème dual de Sturm est ainsi redémontré à partir d'une proposition portant sur les bissectrices des six tangentes et au moyen d'une généralisation par homographie :

> Soient trois coniques biconfocales; par un point extérieur menons-leur six tangentes. Ces tangentes auront deux à deux la même bissectrice; donc elles formeront un faisceau en involution. En généralisant par homographie, on obtiendra la proposition suivante, corrélative d'un théorème de M. Sturm :
>
> Si trois coniques sont inscrites dans un même quadrilatère, et que, par un point pris dans leur plan, on leur mène six tangentes, ces six tangentes formeront un faisceau en involution [Laguerre 1852, 58].

---

33 Les publications de Laguerre sont d'abord signées sous le nom de Laguerre-Verly.

34 Un institut privé secondaire parisien situé dans l'impasse des Feuillantines (5e arrondissement) et dans lequel on préparait les concours d'admission des grandes écoles. Fondé par André Marie Ruinet en 1803 et repris par Jean François Barbet en 1827, l'institution devient plus connue par la suite sous le nom de l'institut Barbet [Huguet 2001].

Plus tard, en 1862, Poncelet adopte un point de vue rétrospectif dans ses *Applications d'analyse et de géométrie*. Il réexamine notamment les travaux de Gergonne, Bobillier, Plücker et Sturm et s'étonne de voir dans leurs premiers travaux l'application de la méthode des multiplicateurs indéterminés développée par Lamé. Pour Poncelet, il semble en effet difficile d'expliquer pourquoi il s'est « écoulé près de dix ans (1817 à 1826 ou 1827) avant que MM. Gergonne, Bobillier, Sturm, Plücker, etc., aient songé à faire cette application en apparence si naturelle » [Poncelet 1862a, 489]. Sturm, « comme tant d'autres » [Poncelet 1862b, 67], aurait dû citer explicitement la méthode développée par Lamé en 1817 et relative aux problèmes d'intersection ou de concours de lignes et de surfaces. Malgré ce manquement, Poncelet reconnaît la qualité du travail de Sturm et rappelle que celui-ci constitue une généralisation de résultats importants :

> Ceci n'ôte rien d'ailleurs au mérite de sa belle découverte relative aux intersections, par une transversale arbitraire, de trois sections coniques ayant en commun les mêmes quatre points ; découverte qui est l'extension de celles dont les Anciens, Desargues, Pascal vers 1640, et en dernier lieu Brianchon en 1817, s'étaient déjà occupés, pour le cas simple il est vrai, du quadrilatère inscrit à une section conique [Poncelet 1862b, 67].

Poncelet revient également sur les normes en usage au cours des années 1820 concernant la présentation de la dualité. Dans son mémoire, Sturm s'était en effet contenté de présenter les propositions duales à la suite les unes après les autres, sans opter pour la représentation à deux colonnes préconisée par Gergonne et pourtant vite adoptée par Plücker et Bobillier. Poncelet a bien remarqué ce détail et dans une note de bas de page – dans laquelle il répond à une observation de Plücker assimilant les méthodes de Poncelet à un plagiat de la méthode analytique – il tente d'apporter une justification :

> J'apprécie, comme elle doit l'être, la franchise de cette tardive réflexion de la part d'un savant [Plücker] qui, par prosélytisme, avait consenti à laisser revêtir ses premiers travaux (1827), de la forme à double colonne, jadis admise par les partisans de la *dualité* ; ce à quoi un autre savant de la trempe de M. Sturm, n'a point consenti, au risque de voir ses belles études sur les *polaires, réciproques, etc.*, tronquées dans le Journal Mathématique, de Montpellier[35] [Poncelet 1862a, 494].

---

35 Poncelet fait ici référence aux *Annales* : Gergonne fonda son journal à Nîmes en 1810 mais il s'installa à Montpellier à partir de 1816 en devenant professeur à la faculté [Gerini 2016, 2].

Adopter une représentation de la dualité au moyen des deux colonnes aurait donc, d'après Poncelet, amoindri une partie du travail accompli dans le mémoire de Sturm. En outre, la distance que Sturm aurait prise par rapport à son principe de continuité n'a pas échappé à Poncelet. Son explication : Sturm aurait été sous l'influence de Lhuilier, son professeur de mathématiques à l'Académie de Genève, que Poncelet n'hésite pas à qualifier d' « esprit étroit » faisant preuve d'un « rigorisme lent et épineux » [Poncelet 1862a, 10]. Il ajoute :

> Lhuilier eut l'insigne bonheur d'initier à l'*Analyse géométrique et algébrique*, le sens naturellement droit et mathématique de Sturm, homme modeste jusqu'à la timidité, que j'ai appris à aimer, à estimer depuis 1825, où, encore inconnu, il écrivait dans le *Bulletin des Sciences de Férussac*, au prix annuel de 1500 francs ; mais Lhuilier avait aussi inspiré à notre illustre confrère de fortes préventions contre le principe, la *loi de continuité* [Poncelet 1862a, 10].

Si Poncelet commet ici un anachronisme en affirmant que Sturm officiait en tant que rédacteur au *Bulletin de Férussac* dès 1825 (il ne le sera qu'à partir de 1829), il appuie son hypothèse en se basant sur une « Observation sur la Loi de Continuité » que Lhuilier formule dans sa *Polygonométrie* publiée dès 1789. Mais Poncelet sous-entend que le principe de continuité a été mal compris par Lhuilier qui émet dans cet ouvrage « une objection plus spécieuse que juste » [Poncelet 1862a, 10]. Lhuilier considère en effet que la loi de continuité est un principe « appuyé plutôt sur une Analogie poussée trop loin que sur des Raisonnemens rigoureux »[Lhuilier 1789, 98–99][36]. Mais l'hypothèse de Poncelet quant à l'influence de Lhuilier sur la perception du principe de continuité chez Sturm peut être appuyée par une référence explicite à Lhuilier et effectuée par Sturm lui-même dans son article sur les théorèmes des polygones réguliers comme nous l'avons vu. Pour Poncelet, il s'agirait donc tout simplement d'une mauvaise compréhension du principe de continuité de la part de Sturm et de Lhuilier.

6. CONCLUSION

Ainsi, s'ils n'ont pas durablement marqué la mémoire collective des mathématiciens de l'époque et des historiens, les théorèmes de Sturm découverts au cours de l'année 1824 s'insèrent cependant au centre des discussions et des polémiques autour des fondations de la géométrie projective,

---

36 D'après Lhuilier, ce serait le physicien Georges-Louis Le Sage (1724–1803) qu'il a compté parmi ses professeurs à l'Académie de Genève qui l'aurait mis en garde contre les abus que peut engendrer un certain usage de l'analogie dans les sciences [Lhuilier 1789, 99].

de la légitimité de ses méthodes et des normes d'exposition des théorèmes que la communauté des géomètres doit appliquer.

La pratique de la géométrie chez Sturm telle qu'elle apparaît dans les colonnes des *Annales de Gergonne* évolua entre 1823 et 1826. Les premières participations au journal attribuées à Sturm furent publiées alors qu'il terminait ses études à l'Académie de Genève et relevèrent de la résolution de problèmes. La lecture du *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet pendant son séjour parisien lui a ouvert les portes de la géométrie projective : un champ des mathématiques dont les contours demeuraient encore très flous puisque différents acteurs historiques aux pratiques et aux méthodes bien distinctes se sont attelés à sa construction. Sturm transforma sa pratique de la géométrie et suivit la voie entamée par des géomètres comme Carnot, Poncelet ou Chasles, en achevant sa transition d'une *géométrie des problèmes* à l'élaboration d'une *théorie géométrique.* À partir du théorème des trois coniques démontré suivant la méthode de la géométrie analytique, Sturm peut redécouvrir et organiser tout un ensemble de théorèmes bien connus de la géométrie des anciens et des modernes à la manière des géomètres se revendiquant de la méthode synthétique.

Le mathématicien suisse a prudemment pris ses distances par rapport au principe de continuité défendu avec enthousiasme par Poncelet, préférant respecter la démarche analytique appliquée à la géométrie et s'adonnant aux méthodes enseignées par Lhuilier, son professeur de l'Académie de Genève. Son théorème principal a néanmoins circulé dans la littérature mathématique. Dans les journaux, le théorème a notamment été affiché à côté de son dual par Bobillier, avec son lot de corollaires, dans une représentation par deux colonnes de la dualité telle qu'elle a été préconisée par Gergonne. Chasles le reformula pour l'adapter dans le cadre de la géométrie de l'espace et Laguerre, alors jeune élève préparant ses concours d'entrée aux grandes écoles, le démontra au moyen de nouveaux objets apparus au cours des trente années ayant suivi sa publication. Quarante ans après la publication de son *Traité,* Poncelet prit du recul et analysa les premières années de fondation de la géométrie projective. Il reconnut la qualité des théorèmes de Sturm en interrogeant l'origine des méthodes employées par celui-ci, puis tenta d'expliquer pourquoi le géomètre suisse ne l'avait pas suivi dans l'application de sa méthode projective et l'acceptation du principe de continuité.

En faisant savoir comment les recherches de Sturm lui ont permis de proposer une théorie géométrique ayant pour noyau le théorème des trois coniques, puis comment ses travaux ont permis d'alimenter des discussions dans la communauté des géomètres autour de sujets sensibles comme la portée du concept de dualité ou la légitimité du principe de continuité, nous avons voulu montrer comment les théorèmes de Sturm – mathématicien davantage connu pour son théorème d'algèbre et son implication dans la théorie dite de Sturm-Liouville – ont pris part à la construction du champ de la géométrie projective.

En 1827, Sturm mit fin à ses investigations géométriques ; ses travaux n'ont sans doute pas laissé une empreinte durable mais ils ont toutefois été relayés et discutés par différents acteurs tandis que son nom commençait à se faire connaître dans le milieu savant parisien et parmi les géomètres français.

RÉFÉRENCES

Barbin (Evelyne)

[2009] L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé, *Bulletin de la Sabix*, 44 (2009), p. 101–111.

Bobillier (Étienne)

[1827–1828a] Philosophie mathématique. Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827–1828), p. 320–339.

[1827–1828b] Philosophie mathématique. Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827–1828), p. 359–367.

Brianchon (Charles-Julien)

[1817] *Mémoire sur les lignes du second ordre : faisant suite aux recherches publiées dans les journaux de l'École royale polytechnique*, Paris : Bachelier, 1817.

Cauchy (Augustin-Louis) & Poncelet (Jean-Victor)

[1820–1821] Géométrie des courbes : Rapport à l'Académie royale des sciences, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 11 (1820–1821), p. 69–83.

Chasles (Michel)

[1827–1828] Géométrie pure : Théorèmes sur les sections coniques confocales, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827–1828), p. 269–276.

[1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, Bruxelles : Hayez, 1837.

[1870] *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Paris : Imprimerie nationale, 1870.

Chemla (Karine)

[1998] Lazare Carnot et la généralité en géométrie : Variations sur le théorème dit de Menelaus, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4–2 (1998), p. 163–190.

COLLADON (Jean-Daniel)
[1893] *Souvenirs et Mémoires : autobiographie*, Genève : Imprimerie Aubert-Schuchardt, 1893.

DARBOUX (Gaston)
[1905] A survey of the development of geometric methods, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 11–10 (1905), p. 517–543.

DEL CENTINA (Andrea)
[2022] Carnot's theory of transversals and its applications by Servois and Brianchon : the awakening of synthetic geometry in France, *Archive for History of Exact Sciences*, 76–1 (2022), p. 45–128.

GAUTIER (Alfred)
[1851] Notice biographique sur M. le baron Maurice, *Archives des sciences physiques et naturelles*, tome 18 (1851), p. 102–118.

GERGONNE (Joseph Diez)
[1824–1825] Géométrie élémentaire. Démonstration d'un théorème de M. Lhuilier, énoncé dans la Bibliothèque Universelle (mars 1824, p. 169), *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 15 (1824–1825), p. 45–55.
[1825–1826] Philosophie mathématique : Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 16 (1825–1826), p. 209–231.
[1827–1828] Post-scriptum supprimé dans l'impression de l'analyse du mémoire de M. Poncelet, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827–1828), p. 145–149.

GERINI (Christian)
[2016] Joseph-Diez Gergonne (1771–1859), professeur et recteur d'Académie à Montpellier, éditeur du premier grand journal de l'histoire des mathématiques et de leur enseignement : les Annales de Gergonne (1810–1831), dans Radford (Luis), Furinghetti (Fulvia) & Hausberger (Thomas), éd., *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics* IREM de Montpellier, 2016.

HAUBRICHS DOS SANTOS (Cleber)
[2015] *Étienne Bobillier (1798–1840) : parcours mathématique, enseignant et professionnel*, Thèse d'histoire des sciences, Université de Lorraine, 2015.

HUGUET (Françoise)
[2001] Les pensions et institutions privées secondaires pour garçons dans la région parisienne (1700–1940), *Histoire de l'éducation*, 90 (2001), p. 205–221.

LAGUERRE (Edmond Nicolas)
[1852] Note sur la théorie des foyers, *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 11 (1852), p. 290–292.

LAMÉ (Gabriel)

[1816–1817] Géométrie analitique. Sur les intersections des lignes et des surfaces. Extrait d'un mémoire présenté à l'académie royale des sciences, en décembre 1816, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1816–1817), p. 229–240.

[1818] *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*, Paris : Veuve Courcier, 1818.

LHUILIER (Simon)

[1789] *Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes et abrégé d'isopérimétrie élémentaire ou de la dépendance mutuelle des grandeurs et des limites des figures*, Genève : Barde, Manget et compagnie, 1789.

[1809] *Élémens d'analyse géométrique et d'analyse algébrique à la recherche des lieux géométriques* imprimé à Genève en 1809, Paris : Bachelier, 1809.

[1824] Lettre aux Rédacteurs sur un Théorème nouveau de Polygonométrie, *Bibliothèque universelle des sciences, belles-lettres et arts*, 25 (Sciences et arts) (1824), p. 169–171.

LORENAT (Jemma)

[2015a] Polemics in Public : Poncelet, Gergonne, Plücker, and the Duality Controversy, *Science in Context*, 28 (2015), p. 545–585.

[2015b] *"Die Freude an der Gestalt" : methods, figures and practices in early nineteenth century geometry*, PhD, Université Pierre et Marie Curie et Simon Fraser University, 2015.

[2016] Synthetic and Analytic Geometries in the Publications of Jakob Steiner and Julius Plücker, *Archive for History of Exact Sciences*, 70–4 (2016), p. 413–462.

LORIA (Gino)

[1938] Charles Sturm et son œuvre mathématique (1803–1855), *L'Enseignement mathématique*, 37 (1938), p. 249–274.

NABONNAND (Philippe)

[2006] *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au XIXe siècle*, Mémoire d'HDR, Université de Lorraine, 2006.

[2015] L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition, dans Gilain (Christian) & Guilbaud (Alexandre), dir., *Sciences mathématiques 1750–1850 : Continuités et ruptures*, Paris : CNRS Éditions, 2015, p. 381–402.

NEUENSCHWANDER (Erwin)

[1989] The unpublished papers of Joseph Liouville in Bordeaux, *Historia Mathematica*, 16 (1989), p. 334–342.

PLÜCKER (Julius)

[1826–1827] Géométrie de la règle. Théorèmes et problèmes, sur les contacts des sections coniques, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 17 (1826–1827), p. 37–59.

[1828–1829] Géométrie analytique : Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 19 (1828–1829), p. 97–106.

PONCELET (Jean-Victor)
[1822] *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, Paris : Bachelier, 1822.
[1829] Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4 (1829), p. 1–71.
[1862a] *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, vol. 1, Paris : Mallet-Bachelier, 1862.
[1862b] *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, vol. 2, Paris : Mallet-Bachelier, 1862.

PONT (Jean-Claude) & BENGUIGUI (Isaac)
[2009] Charles François Sturm : notice biographique, dans Pont (Jean-Claude), éd., *Collected Works of Charles Francois Sturm*, Birkhäuser, 2009, p. 1–11.

SAINT-LAURENT (Thomas de) & STURM (Charles)
[1822–1823] Questions résolues : solution du problème de dynamique énoncé à la page 180 du présent volume, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 13 (1822–1823), p. 289–303.

SPEZIALI (Pierre)
[1964] *Charles-François Sturm (1803–1855) : documents inédits*, Paris : Palais de la Découverte, 1964; fascicule 96 : conférence donnée au Palais de la Découverte le 1er Février 1964.

STIGLER (Stephen Mack)
[1976] The anonymous professor Gergonne, *Historia Mathematica*, 3–1 (1976), p. 71–74.

STURM (Charles)
[1893] Lettre de Charles Sturm à Monsieur Daniel Colladon (26 avril 1824), dans Jean-Daniel Colladon, *Souvenirs et Mémoires : autobiographie*, Genève : Aubert-Schuchardt, 1893, p. 54–61.
[1824–1825] Géométrie élémentaire : Théorèmes sur les polygones réguliers, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 15 (1824–1825), p. 250–256.
[1825–1826] Mémoire sur les lignes du second ordre (Première partie), *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 16 (1825–1826), p. 265–293.
[1826–1827] Mémoire sur les lignes du second ordre (Deuxième partie), *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 17 (1826–1827), p. 173–198.

STURM (Charles), QUERRET (Jean-Joseph), VERNIER (Hippolyte) & VECTEN
[1823–1824] Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 63 du présent volume, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 14 (1823–1824), p. 216–228.

VIVANTI (Giulio)
[1938] Sur quelques théorèmes géométriques de Charles Sturm, *L'Enseignement mathématique*, 37 (1938), p. 275–291.