438

ASTÉRISQUE

2022

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2021/2022
EXPOSÉS 1181–1196

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France
Numéro 438.

Comité de rédaction

Marie-Claude Arnaud
Christophe Breuil
Philippe Eyssidieux
Colin Guillarmou
Fanny Kassel
Éric Moulines
Alexandru Oancea
Nicolas Ressayre
Rémi Rhodes
Sylvia Serfaty
Sug Woo Shin
Nicolas Burq (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
christian.smf@cirm-math.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 80€ ($ 120)
Abonnement : Europe : 665€ ; hors Europe : 718€ ($1 077)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax : (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • http://smf.emath.fr/

© Société Mathématique de France 2022

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN : 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)
ISBN : 978-2-85629-968-5
doi : 10.24033/ast.1181

Directeur de la publication : Fabien Durand

438 ASTÉRISQUE

2022

SÉMINAIRE BOURBAKI
VOLUME 2021/2022
EXPOSÉS 1181–1196

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre-et-Marie-Curie
75231 Paris Cedex 05 (France) https://www.bourbaki.fr

Mots clés et classification mathématique

Exposé n° 1181. — Réseaux des groupes de Lie semi-simples, groupes de surface, représentations anosoviennes, représentations quasi-fuchsiennes – 20E07, 20H10, 22E40 (14M15, 28C10, 37A25).

Exposé n° 1182. — Conjecture de Mordell, conjecture de Lang–Vojta, application de périodes, connexion de Gauss–Manin, équations diophantiennes – 11G30, 11G10, 12H25, 14D05.

Exposé n° 1183. — Conjecture de Smale généralisée, flot de Ricci, variétés de dimension 3 – 53C21, 53E20, 57S05.

Exposé n° 1184. — Courbure de Ricci, convergence de Gromov–Hausdorff, régularité, stratification, rectifiabilité – 53B20, 53C21, 53C23, 35A21.

Exposé n° 1185. — Joinings, measure rigidity, equidistribution – 22E40 (22D40, 37A05, 37A45, 11H55).

Exposé n° 1186. — Model theory, valued fields, the independence property – 03C45, 03C60, 12L12, 12J99.

Exposé n° 1187. — Expander graphs, high-dimensional expanders, Ramanujan complexes, topological overlap property – 05E45.

Exposé n° 1188. — Average distortion embedding, nonlinear spectral gap, John's theorem, expander graph – 30L05.

Exposé n° 1189. — Nonpositive curvature, Anosov geodesic flow, marked length spectrum, local rigidity, micro-local analysis, inversion of the generator of the geodesic flow, pseudo-differential operators, resolvent estimates – 53C24, 37C27.

Exposé n° 1190. — L-functions, automorphic forms, Lindelöf conjecture, the subconvexity problem, amplification, the orbit method – 11F03, 11F66, 17B08.

Exposé n° 1191. — Compressible Navier–Stokes and Euler equations, energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation, formation of singularities, self-similar profiles – 35Q30, 35Q31, 35Q55.

Exposé n° 1192. — Isoperimetrie, convexité en grande dimension, conjecture de Kannan–Lovász–Simonovits, localisation stochastique – 52A23.

Exposé n° 1193. — Function field arithmetic, analytic number theory, binary additive problems, exponential sums over finite fields, étale cohomology – 11N05, 11N32, 11L07, 11T55, 14F20.

Exposé n° 1194. — Tranformée de Fourier, mesure atomique, empilement de sphères – 42A16, 52C17, 52C23.

Exposé n° 1195. — Conjecture du $K(\pi, 1)$, arrangements d'hyperplans, groupes de Coxeter affines, groupes d'Artin, structures de Garside, décortiquabilité d'ensembles ordonnés – 20F36, 20F55, 55P20.

Exposé n° 1196. — Three-term arithmetic progressions, Roth's theorem – 11B30.

SÉMINAIRE BOURBAKI

Volume 2021/2022
Exposés 1181—1196

doi : 10.24033.ast/1181

Résumé. — Ce 73e volume du Séminaire Bourbaki contient les textes des seize exposés présentés pendant l'année 2021/2022 : groupes de surface dans les réseaux des groupes de Lie, non-densité des points entiers et variations de structures de Hodge, flots de Ricci et difféomorphismes de variétés de dimension 3, structure des espaces limites des variétés non effondrées, classification des couplages invariants, conjecture de Shelah et théorème de Johnson, graphes expanseurs en dimension supérieure, trous spectraux non linéaires et applications, rigidité locale du spectre des longueurs marquées, problème de sous-convexité pour les fonctions L, équation de Schrödinger non linéaire, conjecture de Kannan–Lovász–Simonovits, problèmes additifs binaires pour les polynômes sur les corps finis, mesures cristallines, conjecture du $K(\pi, 1)$ pour les groupes d'Artin affines, ensembles sans progression arithmétique de longueur 3.

Abstract. — This 73rd volume of the Bourbaki Seminar gathers the texts of the sixteen lectures delivered during the year 2021/2022: surface groups in lattices of Lie groups, non-density of integral points and variations of Hodge structures, Ricci flow and diffeomorphisms of 3-manifolds, structure of limit spaces of non-collapsed manifolds, classification of joinings, Shelah's conjecture and Johnson's theorem, high-dimensional expander graphs, non-linear spectral gaps and applications, local marked length spectrum rigidity, subconvexity problem for L-functions, non-linear Schrödinger equation, Kannan–Lovász–Simonovits's conjecture, binary additive problems over finite fields, crystalline measures, $K(\pi, 1)$ conjecture for affine Artin groups, sets with no three terms in arithmetic progression.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 2022

TABLE DES MATIÈRES

1181 **Fanny Kassel** — Groupes de surface dans les réseaux des groupes de Lie semi-simples (d'après J. Kahn, V. Marković, U. Hamenstädt, F. Labourie et S. Mozes) 1

1182 **Marco Maculan** — Non-densité des points entiers et variations de structures de Hodge (d'après B. Lawrence, W. Sawin et A. Venkatesh) 73

1183 **Sylvain Maillot** — Flot de Ricci et difféomorphismes de variétés de dimension 3 (d'après R. Bamler et B. Kleiner) 121

1184 **Ilaria Mondello** — Structure des espaces limites des variétés non effondrées à courbure de Ricci minorée (d'après J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber) 133

1185 **Menny Aka** — Joinings classification and applications (after Einsiedler and Lindenstrauss) 181

1186 **Sylvy Anscombe** — Shelah's Conjecture and Johnson's Theorem (after Will Johnson) 247

1187 **Uli Wagner** — High-Dimensional Expanders (after Gromov, Kaufman, Kazhdan, Lubotzky, and others) 281

1188 **Alexandros Eskenazis** — Average distortion embeddings, nonlinear spectral gaps, and a metric John theorem (after Assaf Naor) 295

1189 **Ursula Hamenstädt** — Local marked length spectrum rigidity (after Colin Guillarmou and Thibault Lefeuvre) 335

1190 **Philippe Michel** — Recent progress on the subconvexity problem 353

1191 **Galina Perelman** — Finite time blow up for the compressible fluids and for the energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation (after Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski and Jérémie Szeftel) 403

1192 **Guillaume Aubrun** — Vers la conjecture de Kannan–Lovász–Simonovits (d'après Yuansi Chen) 433

1193 **Emmanuel Kowalski** — Binary additive problems for polynomials over finite fields (after W. Sawin and M. Shusterman) 453

1194 **Yves Meyer** — Mesures cristallines et applications (d'après Pavel Kurasov, Alexander Olevskii, Peter Sarnak et Maryna Viazovska) 479

1195 **Thomas Haettel** — La conjecture du $K(\pi, 1)$ pour les groupes d'Artin affines (d'après Giovanni Paolini et Mario Salvetti) 495

1196 **Sarah Peluse** — Recent progress on bounds for sets with no three terms in arithmetic progression (after Bloom and Sisask, Croot, Lev, and Pach, and Ellenberg and Gijswijt) 547

Résumé des exposés

Fanny Kassel. — *Groupes de surface dans les réseaux des groupes de Lie semi-simples (d'après J. Kahn, V. Marković, U. Hamenstädt, F. Labourie et S. Mozes)*
Un réseau cocompact d'un groupe de Lie semi-simple G est un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ soit compact. Un tel réseau contient-il toujours un sous-groupe de surface, à savoir un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte ? Si oui, contient-il des sous-groupes de surface qui soient proches (dans un sens quantitatif précis) de sous-groupes fuchsiens de G, c'est-à-dire de sous-groupes discrets de G contenus dans une copie de $(\mathrm{P})\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})$ dans G ?

Le cas du groupe $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbf{C})$ correspond à une fameuse conjecture de Thurston sur les variétés hyperboliques de dimension 3, et la version quantitative dans le cas $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ implique une conjecture d'Ehrenpreis sur les paires de surfaces hyperboliques compactes ; ces deux conjectures ont été démontrées par Kahn et Marković il y a une dizaine d'années. Motivée par une question de Gromov, Hamenstädt a résolu le cas où G est de rang réel un à l'exception de $G = \mathrm{SO}(2n,1)$. Dans une prépublication récente, Kahn, Labourie et Mozes traitent le cas d'une large classe de groupes semi-simples G, incluant notamment tous les groupes de Lie simples complexes ; les groupes de surface qu'ils obtiennent sont des images de représentations anosoviennes au sens de Labourie. Nous donnerons quelques idées de leur démonstration.

Marco Maculan. — *Non-densité des points entiers et variations de structures de Hodge (d'après B. Lawrence, W. Sawin et A. Venkatesh)*
Au début des années 80, Faltings a montré que toute courbe projective non singulière de genre au moins 2 définie sur un corps de nombres K n'admet qu'un nombre fini de points à coordonnées dans K — un énoncé conjecturé auparavant par Mordell. Récemment, Lawrence et Venkatesh ont découvert une nouvelle méthode pour prouver que les points entiers d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres ne sont pas denses pour la topologie de Zariski. Appliquée aux courbes, cette technique fournit une nouvelle démonstration de la conjecture de Mordell ; appliquée aux variétés paramétrant les hypersurfaces non singulières de l'espace projectif (Lawrence–Venkatesh) ou d'une variété abélienne (Lawrence–Sawin), elle conduit à des résultats de finitude inaccessibles par les méthodes précédentes.

Sylvain Maillot. — *Flot de Ricci et difféomorphismes de variétés de dimension* 3 *(d'après R. Bamler et B. Kleiner)*
R. Bamler et B. Kleiner démontrent que si M est une variété de dimension 3 compacte admettant une métrique riemannienne à courbure constante strictement positive, alors l'injection canonique du groupe d'isométries de cette métrique dans le

groupe de difféomorphismes de M est une équivalence d'homotopie. Leur méthode est basée sur la notion de flot de Ricci singulier développée par B. Kleiner et J. Lott, et donne une nouvelle preuve de la conjecture de Smale, démontrée par Hatcher en 1983, dans le cas de S^3. Elle permet également de prouver que l'espace des métriques à courbure scalaire strictement positive sur une variété de dimension 3 compacte est vide ou contractile, ce qui améliore un résultat obtenu par F. Coda Marques en 2012.

Ilaria Mondello. — *Structure des espaces limites des variétés non effondrées à courbure de Ricci minorée* (*d'après J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber*)
Grâce au célèbre théorème de pré-compacité démontré par Gromov en 1981, nous savons que toute suite de variétés à courbure de Ricci minorée possède une sous-suite convergente vers un espace métrique en topologie de Gromov-Hausdorff pointée. Depuis lors, de nombreux mathématiciens, Anderson, Bando, Kasue, Nakajima, Cheeger, Colding, Tian, ont exploré la structure de cet espace limite, en particulier dans le cas de variétés à courbure de Ricci bornée, non effondrées, c'est-à-dire dont le volume de la boule unitaire est uniformément minoré. Les récents travaux de Cheeger, Jiang et Naber ont permis des avancées significatives dans la compréhension de la géométrie des espaces limites non effondrés. Ils ont ainsi démontré que, pour une suite de variétés à courbure de Ricci bornée, et sans hypothèse supplémentaire sur la courbure de Riemann, le lieu singulier est de codimension au moins quatre et de mesure d'Hausdorff correspondante localement finie (conjecture de la codimension quatre). Pour une suite de variétés dont la courbure de Ricci est seulement minorée, ils ont prouvé la rectifiabilité du lieu singulier et l'unicité presque partout des cônes tangents, ce qui améliore grandement les résultats connus sur les singularités de l'espace limite.

Menny Aka. — *Joinings classification and applications* (*after Einsiedler and Lindenstrauss*)
This talk surveys the classification of joinings of higher-rank torus actions on S-arithmetic quotients of semisimple or perfect algebraic groups and some of its applications. This classification was proved by Einsiedler and Lindenstrauss (Duke Mathematical Journal 2007, Publications mathématiques de l'IHÉS, 2019). It establishes that ergodic joinings must be algebraic, and in particular that such torus actions in many cases must be disjoint, that is, they admit only the trivial joining which is the product of the Haar measures on each of the factors.

Their proof is based on entropy methods, developed by Einsiedler, Katok, Lindenstrauss and Spatzier. We will describe these methods and give some ideas on how they fit into the scheme of their proof. Specifically, we will explain how to prove disjointness when the associated algebraic groups have a different root structure. This already allows for some applications, which will be presented at the end of the talk.

Sylvy Anscombe. — *Shelah's Conjecture and Johnson's Theorem* (*after Will Johnson*)
The "Shelah Conjecture" proposes a description of fields whose first-order theories are without the Independence Property (IP): they are finite, separably closed, real closed, or admit a non-trivial henselian valuation. One of the most prominent dividing lines in the contemporary model-theoretic universe, IP holds in a theory if there is a formula that can define arbitrary subsets of arbitrarily large finite sets. In 2020, Johnson gave a proof of the conjecture in an important case; namely, the case of dp-finite (roughly: finite dimensional) theories of fields. Combined with a result of Halevi–Hasson–Jahnke, Johnson's Theorem completely classifies the dp-finite theories of fields.

We will explain this classification, describe some ingredients of the proof, and explore how Johnson's Theorem and the Shelah Conjecture fit into the bigger picture.

Uli Wagner. — *High-Dimensional Expanders* (*after Gromov, Kaufman, Kazhdan, Lubotzky, and others*)
Expander graphs (sparse but highly connected graphs) have, since their inception, been the source of deep links between Mathematics and Computer Science as well as applications to other areas. In recent years, a fascinating theory of high-dimensional expanders has begun to emerge, which is still in a formative stage but has nonetheless already lead to a number of striking results. Unlike for graphs, in higher dimensions there is a rich array of non-equivalent notions of expansion (coboundary expansion, cosystolic expansion, topological expansion, spectral expansion, etc.), with differents strengths and applications. In this talk, we will survey this landscape of high-dimensional expansion, with a focus on two main results. First, we will present Gromov's Topological Overlap Theorem, which asserts that coboundary expansion (a quantitative version of vanishing mod 2 cohomology) implies topological expansion (roughly, the property that for every map from a simplicial complex to a manifold of the same dimension, the images of a positive fraction of the simplices have a point in common). Second, we will outline a construction of bounded degree 2-dimensional topological expanders, due to Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky.

Alexandros Eskenazis. — *Average distortion embeddings, nonlinear spectral gaps, and a metric John theorem* (*after Assaf Naor*)
In this lecture we shall discuss some geometric applications of the theory of nonlinear spectral gaps. Most notably, we will present a proof of a deep theorem of Naor asserting that for any norm $\|\cdot\|$ on $\mathbf{R}^d$, the metric space $(\mathbf{R}^d, \sqrt{\|x-y\|})$ embeds into Hilbert space with quadratic average distortion $O(\sqrt{\log d})$. As a consequence, we will deduce that any n-vertex expander graph does not admit a $O(1)$-average distortion embedding into any $n^{o(1)}$-dimensional normed space.

Ursula Hamenstädt. — *Local marked length spectrum rigidity* (*after Colin Guillarmou and Thibault Lefeuvre*)
The marked length spectrum rigidity question asks whether two closed negatively curved manifolds M and N are isometric if they are homeomorphic with a homeomorphism which maps a closed geodesic on M to a curve on N which is freely homotopic to a closed geodesic of the same length. The lecture discusses the work of Guillarmou and Lefeuvre who used novel tools from microlocal analysis to give an affirmative answer to a local version of this question.

Philippe Michel. — *Recent progress on the subconvexity problem*
The subconvexity problem aims at providing non-trivial (ie. subconvex) bounds for central values of automorphic L-functions; the main conjecture in this area is the Generalized Lindelöf Hypothesis which itself is a consequence of the Generalized Riemann Hypothesis. This lecture will survey several advances that have been made on this question during the past ten years : these include the delta-symbol approach of R. Munshi, the Weyl type bounds of I. Petrow and M. Young (both use the Dirichlet L-series representation of the central values) and the work of P. Nelson and A. Venkatesh (who use the automorphic period representations for the central value).

Galina Perelman. — *Finite time blow up for the compressible fluids and for the energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation* (*after Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski and Jérémie Szeftel*)
This talk addresses the problem of singularity formation in solutions of the 3D compressible barotropic Navier–Stokes equation and of the energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation. I will explain the recent results of F. Merle, P. Raphaël, I. Rodnianski, and J. Szeftel that link this problem to the compressible Euler dynamics showing that in some range of parameters both models admit finite time blow up solutions governed by appropriate self-similar solutions of the underlying Euler equation. While for the compressible Navier–Stokes equation the existence of finite time blow up solutions was already known, for the nonlinear Schrödinger equation this is the first result of formation of singularities in the defocusing case.

Guillaume Aubrun. — *Vers la conjecture de Kannan–Lovász–Simonovits* (*d'après Yuansi Chen*)
Comment couper un ensemble convexe de $\mathbf{R}^n$ en deux parties de même volume en minimisant la surface de coupe ? Pour ce problème isopérimétrique, Kannan, Lovász et Simonovits ont conjecturé en 1995 que si l'on restreint l'infimum aux coupes le long d'un hyperplan, la valeur obtenue n'est modifiée que par une constante indépendante de la dimension. Cette conjecture a de nombreuses implications sur la géométrie des convexes de grande dimension.

Fin 2020, Yuansi Chen a démontré une version affaiblie de la conjecture où la constante universelle est remplacée par $n^{o(1)}$, ce qui est une amélioration spectaculaire des bornes précédemment connues. Nous présenterons la preuve de Chen, qui raffine le processus de localisation stochastique dû à Eldan et Lee–Vampala, et exploite de manière efficace les outils du calcul stochastique.

Emmanuel Kowalski. — *Binary additive problems for polynomials over finite fields* (*after W. Sawin and M. Shusterman*)
The most famous open problems concerning prime numbers are binary additive problems, with the twin-prime conjecture as the best-known example. W. Sawin and M. Shusterman have solved the analogue of these conjectures in the case of irreducible polynomials over a fixed finite field, as well as the quadratic case of the Schinzel conjecture. The talk will present the background behind these questions and will explain the methods used by Sawin and Shusterman, which combine number theory and algebraic geometry.

Yves Meyer. — *Mesures cristallines et applications* (*d'après Pavel Kurasov, Alexander Olevskii, Peter Sarnak et Maryna Viazovska*)
Une mesure cristalline est une mesure atomique sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est localement fini et dont la transformée de Fourier au sens des distributions est également une mesure atomique portée par un ensemble localement fini. L'exemple le plus simple est le peigne de Dirac. Les mesures cristallines ont été définies et étudiées dès les années cinquante. Jean-Pierre Kahane et Szolem Mandelbrojt (1958) ont cherché à déterminer les fonctions méromorphes dans le plan complexe ayant un seul pole en $s = 1$ et qui vérifient le même type d'équation fonctionnelle que la fonction zeta. Ces auteurs montrèrent qu'une mesure cristalline est toujours attachée à une telle fonction méromorphe. Cette même année, André Guinand construisait des mesures cristallines très différentes des peignes de Dirac. Puis le sujet fut abandonné pendant près de trente ans. La découverte des quasicristaux par Don Shechtman en 1982 renouvela l'intérêt porté aux mesures cristallines. En premier lieu Nir Lev et Alexander Olevskii observèrent que la preuve donnée par Guinand était incomplète et construisirent une mesure cristalline sur la droite réelle qui ne se réduit pas à un peigne de Dirac. Nous verrons ensuite que la version discrètisée des mesures cristallines est reliée à un problème classique en traitement du signal et de l'image. Enfin les mesures cristallines sont présentes dans le problème suivant. Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Une fonction f de la classe de Schwartz peut-elle être reconstruite en utilisant seulement sa restriction à Λ et la restriction de sa transformée de Fourier à F ? En résolvant ce problème Maryna Viazovska a, du même coup, trouvé la solution du problème de Kepler d'empilement des boules en dimension 8 et 24. Nous terminerons cet exposé par un théorème remarquable dû à D. Radchenko, A. Bondarenko et K. Seip. Il s'agit d'une variante, sans terme intégral, de la formule sommatoire de Riemann–Weil.

Thomas Haettel. — *La conjecture du $K(\pi, 1)$ pour les groupes d'Artin affines (d'après Giovanni Paolini et Mario Salvetti)*
Considérons un groupe de Coxeter W affine, agissant par isométries sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, ainsi que l'arrangement des hyperplans de ses réflexions. Le complémentaire Y_W du complexifié de cet arrangement dans $\mathbb{C}^n$, quotienté par W, a pour groupe fondamental le groupe d'Artin affine G_W associé à W. La conjecture du $K(\pi, 1)$ affirme dans ce cas que l'espace Y_W est un espace classifiant pour G_W. Elle a été démontrée récemment par Paolini et Salvetti, en s'appuyant sur les travaux de McCammond et Sulway. Nous présenterons des ingrédients de la preuve, qui repose notamment sur l'étude des structures de Garside duales pour les groupes d'Artin affines, les factorisations des isométries euclidiennes et la décortiquabilité des partitions non croisées affines. Une conséquence est que les groupes d'Artin affines, ainsi que les groupes crystallographiques tressés, ont un espace classifiant fini.

Sarah Peluse. — *Recent progress on bounds for sets with no three terms in arithmetic progression (after Bloom and Sisask, Croot, Lev, and Pach, and Ellenberg and Gijswijt)*
A famous conjecture of Erdős states that if S is a subset of the positive integers and the sum of the reciprocals of elements of S diverges, then S contains arbitrarily long arithmetic progressions. If one could prove, for each positive integer k, sufficiently good bounds for the size of the largest subset of the first N integers lacking k-term arithmetic progressions, then Erdős's conjecture would follow. There is thus great interest in the problem of proving the strongest possible bounds for sets lacking arithmetic progressions of a fixed length. In this talk, I will survey the recent advances of Bloom–Sisask on this problem for length three progressions and of Croot–Lev–Pach and Ellenberg–Gijswijt on the analogous problem in $\mathbf{F}_3^n$ (the "cap set problem"). These two advances rely on very different techniques — Fourier analytic methods and a version of the polynomial method, respectively — and I will give an overview of both.

Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1181, p. 1 à 72
doi : 10.24033/ast.1182

GROUPES DE SURFACE DANS LES RÉSEAUX DES GROUPES DE LIE SEMI-SIMPLES

[*d'après* J. Kahn, V. Marković, U. Hamenstädt, F. Labourie et S. Mozes]

par **Fanny Kassel**

Un *réseau* d'un groupe de Lie G est un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ soit de volume fini pour la mesure de Haar ; on dit que Γ est cocompact si G/Γ est compact.

Tout réseau cocompact sans torsion Γ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est un groupe *de surface*, c'est-à-dire isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte S de genre au moins deux. En effet, on peut prendre pour S le quotient du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ par Γ.

Le but de cet exposé est de présenter le résultat suivant.

Théorème principal (Kahn–Marković, Hamenstädt, Kahn–Labourie–Mozes)**.** *Soit G un groupe de Lie simple complexe* [(1)]*, ou l'un des groupes* $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ *ou* $\mathrm{Sp}(p,q)$ *pour $p > q \geqslant 1$. Tout réseau cocompact de G contient un sous-groupe de surface.*

Le cas $G = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ est dû à Kahn et Marković (2012), les cas $G = \mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,1)$ et $\mathrm{Sp}(p,1)$ à Hamenstädt (2015), et le cas général à Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). Récemment, Hamenstädt (2021) a annoncé une nouvelle démonstration du cas général, qui étend les méthodes de son article de 2015.

Dans la partie 1 nous présentons diverses motivations du théorème, puis dans la partie 2 nous en énonçons des versions plus précises, pour une classe plus générale de groupes de Lie semi-simples G. La stratégie de la preuve est expliquée dans la partie 3. Elle comporte trois étapes : géométrique (partie 4), dynamique (partie 5) et combinatoire (partie 6).

Remerciements. — Je remercie chaleureusement Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Jean-Philippe Burelle, León Carvajales, Balthazar Fléchelles, Olivier Glorieux, Jeremy Kahn, François Labourie, Daniel Monclair, Alan Reid, Ilia Smilga, Katie Vokes, ainsi que Nicolas Bourbaki, pour leur aide dans la préparation de cet exposé. Je suis particulièrement reconnaissante à Jonas Beyrer, Pierre-Louis Blayac, Olivier Glorieux et François Labourie pour de nombreuses discussions autour des articles présentés ici.

(1) Par exemple $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{Sp}(2n,\mathbb{C})$ ou $\mathrm{SO}(n,\mathbb{C})$; *cf.* Helgason (2001, Ch. X, § 2) pour une description explicite de tous les groupes de Lie simples classiques.

©Astérisque 438, SMF 2022

1. Motivations

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact, par exemple $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1. Comprendre les sous-groupes des réseaux

Un point de vue fécond en théorie des groupes est de chercher à comprendre certains groupes en étudiant quels types de sous-groupes ils admettent. Il résulte des travaux de Tits (1972) que tout réseau de G contient un groupe libre non abélien à deux générateurs. On peut voir les groupes de surface comme les groupes de type fini (non résolubles à indice fini près) les plus « simples » après les groupes libres [(2)]. La question suivante est alors naturelle dans le cadre de l'étude des réseaux des groupes de Lie semi-simples.

Question 1.1. Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface ?

Le théorème principal répond affirmativement à cette question pour les réseaux cocompacts des groupes de Lie simples complexes et des groupes $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$, $\mathrm{Sp}(p,q)$ pour $p>q\geqslant 1$.

Lorsque G est de rang réel un (c'est-à-dire localement isomorphe à $\mathrm{SO}(n,1)$, $\mathrm{SU}(n,1)$, $\mathrm{Sp}(n,1)$ ou à la forme réelle de rang un du groupe exceptionnel F_4), les réseaux cocompacts de G sont des groupes hyperboliques au sens de Gromov. La question 1.1 pour ces réseaux est alors un cas particulier d'une question de Gromov (*cf.* Bestvina, 2000, Q. 1.6) : tout groupe hyperbolique à un bout admet-il un sous-groupe de surface ? Voir par exemple Gordon, Long et Reid (2004) pour une réponse affirmative dans le cadre des groupes de Coxeter, et Calegari (2008) pour des conditions homologiques suffisantes. Notons qu'un groupe hyperbolique ne peut contenir qu'un nombre fini de classes de conjugaison de sous-groupes de surface correspondant à des surfaces de genre donné, comme suggéré par Gromov (1987) et démontré par Delzant (1995) ; voir Thurston (1997) pour les groupes de 3-variétés hyperboliques.

En rang réel supérieur, il est facile de construire, de manière arithmétique, des exemples de réseaux contenant des groupes de surface.

Exemple 1.2. (*cf.* Benoist, 2009, § 2.1, exemples 5 et 8) Soit $n\geqslant 3$. L'automorphisme σ d'ordre deux de $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ définit un plongement $\iota : g\mapsto (g,g^\sigma)$ de $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$ dans $G:=\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})\times\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, et $\Gamma:=\iota(\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$ est un réseau non cocompact

[(2)] Par exemple en considérant la dimension cohomologique : les groupes sans torsion de dimension cohomologique 1 sont les groupes libres (Stallings, 1968) ; les groupes de surface sont de dimension cohomologique 2.

de G. Il contient $\Lambda := \iota(H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}]))$, où $H \simeq \mathrm{SO}(2,1)_0 \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est la composante neutre du groupe orthogonal associé à la forme quadratique $x^2 + y^2 - \sqrt{2}\,z^2$ sur $\mathbb{R}^3$. Le groupe $\Gamma_0 := H \cap \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ est un réseau cocompact de H. Ainsi, $\Lambda = \iota(\Gamma_0)$ est un sous-groupe de surface de Γ.

Afin d'établir que *tout* réseau contient des groupes de surface, nous verrons que la démonstration du théorème principal repose, non pas sur des considérations arithmétiques, mais sur des arguments géométriques et dynamiques.

1.2. Sous-groupes de surface « bien positionnés dans G »

La manière peut-être la plus simple d'obtenir des sous-groupes discrets isomorphes à des groupes de surface dans des groupes de Lie semi-simples G est de considérer des réseaux cocompacts Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et de les voir comme des sous-groupes discrets de G via un plongement τ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ dans G. Autrement dit, on part d'une surface compacte S de genre au moins deux ; on la munit grâce au théorème d'uniformisation d'une structure hyperbolique, ce qui définit une représentation injective de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, d'image un réseau cocompact Γ_0 de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$; puis on applique le plongement τ ou l'un de ses conjugués. Nous appellerons ces sous-groupes *τ-fuchsiens*, par analogie avec la terminologie classique pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Définition 1.3. Soient G un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Un sous-groupe de G est *τ-fuchsien* s'il est l'image d'une *représentation τ-fuchsienne* d'un groupe de surface $\pi_1(S)$, c'est-à-dire d'une représentation de la forme

$$\rho_0 : \pi_1(S) \xhookrightarrow{\varrho} \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \xhookrightarrow{\tau} G \xrightarrow{\mathrm{conj}} G,$$

où ϱ est injective d'image discrète et conj est la conjugaison par un élément de G.

Il se peut qu'un réseau Γ de G contienne des sous-groupes de surface τ-fuchsiens pour un certain plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$: c'est le cas dans l'exemple 1.2 pour $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq H \xhookrightarrow{\iota} G$. En général, étant donné un réseau Γ, on pourrait espérer qu'à défaut de sous-groupes τ-fuchsiens, il contienne au moins des *déformations* de sous-groupes τ-fuchsiens. De telles petites déformations sont encore des groupes de surface par la proposition suivante.

Proposition 1.4. *Soient G un groupe de Lie semi-simple, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ une représentation τ-fuchsienne d'un groupe de surface $\pi_1(S)$ (définition 1.3). Il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}$ de ρ_0 dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ formé entièrement de représentations injectives d'image discrète.*

On note ici $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ l'espace des représentations de $\pi_1(S)$ dans G, muni de sa topologie naturelle (topologie de la convergence sur une partie génératrice finie de $\pi_1(S)$). La proposition 1.4 est initialement due à Guichard (2004) ; c'est désormais une conséquence facile de la théorie des représentations anosoviennes, *cf.* paragraphe 1.4.

Pour un ouvert $\mathscr{U}$ comme ci-dessus, l'image de toute représentation $\rho \in \mathscr{U}$ est un sous-groupe de surface discret de G ; par analogie avec le cas classique $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$, on dira qu'il est *$\tau$-quasi-fuchsien* dès que $\mathscr{U}$ est connexe.

Définition 1.5. Soient G un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Un sous-groupe de G est *τ-quasi-fuchsien* s'il est de la forme $\rho(\pi_1(S))$ pour un groupe de surface $\pi_1(S)$ et une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ appartenant à un ouvert connexe $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ comme dans la proposition 1.4.

1.2.1. *Ouverts de déformations de groupes τ-fuchsiens.* — Des ouverts $\mathscr{U}$ comme dans la proposition 1.4 ont été beaucoup étudiés dans plusieurs cas.

Exemple 1.6. Soient $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Toute représentation τ-fuchsienne $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ d'un groupe de surface $\pi_1(S)$ est contenue dans l'ouvert $\mathscr{U}$ des *représentations quasi-fuchsiennes* de $\pi_1(S)$, c'est-à-dire des représentations injectives de $\pi_1(S)$ dans G dont l'image est un sous-groupe discret dans lequel tous les éléments non triviaux sont hyperboliques (c'est-à-dire diagonalisables sur $\mathbb{C}$ et dont les valeurs propres sont de modules différents de 1). Cet ouvert $\mathscr{U}$ joue un rôle important dans la théorie des groupes kleiniens. Il est connexe (Bers a montré que, modulo conjugaison par G au but, il est naturellement paramétré par le produit de deux copies de l'espace de Teichmüller de S) et dense dans l'ensemble des représentations injectives d'image discrète de $\pi_1(S)$ dans G.

Exemple 1.7. Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (voir l'exemple 2.1 ci-dessous). D'après Choi et Goldman (pour $n = 3$), Labourie (n quelconque), Fock et Goncharov (n quelconque), pour toute représentation τ-fuchsienne $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$, la composante connexe de ρ_0 dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ est entièrement formée de représentations injectives et discrètes. D'après Hitchin, cette composante connexe est, modulo conjugaison par G au but, homéomorphe à une boule de dimension $(n^2 - 1)(2g - 2)$, où $g \geqslant 2$ est le genre de la surface S. Désormais appelée *composante de Hitchin*, elle joue un rôle important en *théorie de Teichmüller–Thurston de rang supérieur* (*cf.* Pozzetti, 2019).

Il est remarquable qu'il existe ainsi des sous-groupes discrets de G (sous-groupes de surface τ-fuchsiens) avec de gros espaces de déformations continues. Par contraste, les réseaux de G ont souvent de fortes propriétés de rigidité, qui ont donné lieu à des travaux célèbres. Par exemple, pour G non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ (resp. non localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ni à $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$) et sans facteur compact, les réseaux cocompacts (resp. non cocompacts) irréductibles de G sont

localement rigides, d'après Selberg, Calabi, Weil, Garland et Raghunathan. Pour G sans facteur localement isomorphe à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et sans facteur compact, la rigidité de Mostow implique que toute représentation injective et discrète d'un réseau irréductible de G à valeurs dans G est la restriction d'un automorphisme de G. Pour G de rang réel supérieur et sans facteur compact, Margulis a montré que les réseaux irréductibles de G ont de surcroît une propriété plus forte de super-rigidité, qui implique que ce sont des groupes arithmétiques. Voir Pansu (1995) pour plus de détails.

1.2.2. *Retour aux sous-groupes des réseaux.* — Voici une version plus précise de la question 1.1.

Question 1.8. Soient G un groupe de Lie réel semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface τ-quasi-fuchsiens (définition 1.5) ?

Dans une série de papiers, Long, Reid et Thistlethwaite (2011), Long et Reid (2013, 2016), Long et Thistlethwaite (2018, 2020) montrent que, pour $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{R})$ et τ le plongement irréductible, c'est le cas de certains réseaux de G, à savoir tous les réseaux non cocompacts pour $n = 3$, une famille infinie de réseaux cocompacts pour $n = 3$, et le réseau non cocompact $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{Z})$ pour $n = 4$ et $n \geqslant 5$ impair. Pour cela, ils considèrent des groupes discrets Δ d'isométries de $\mathbb{H}^2$ engendrés par les réflexions orthogonales dans les côtés de certains triangles de $\mathbb{H}^2$; ces groupes admettent des sous-groupes d'indice fini sans torsion, qui sont alors des groupes de surface. L'analogue pour Δ de la composante de Hitchin de l'exemple 1.7 (*cf.* Alessandrini, Lee et Schaffhauser, 2022) est une composante connexe de $\mathrm{Hom}(\Delta, \mathrm{PGL}(n,\mathbb{R}))$ formée entièrement de représentations injectives et discrètes, dont les auteurs montrent que certaines prennent leurs valeurs dans des sous-groupes arithmétiques de $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{R})$. Ceci fournit, pour certains réseaux donnés de G, une infinité de classes de conjugaison de sous-groupes de surface correspondant à des surfaces de même genre, par contraste avec la situation de rang un mentionnée au paragraphe 1.1.

En allant encore plus loin, on peut poser la question suivante.

Question 1.9. Soient G un groupe de Lie réel semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface τ-quasi-fuchsiens qui soient « arbitrairement proches » de groupes τ-fuchsiens, dans un sens à spécifier ?

Les théorèmes 2.4 et 2.17 ci-dessous suggèrent une réponse affirmative à cette question dans le cas des réseaux cocompacts, pour certains couples (G,τ) qui couvrent tous les groupes G du théorème principal.

Les constructions de Long–Reid–Thistlethwaite, Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes permettent, pour nombre de réseaux arithmétiques de G, d'obtenir des sous-groupes de surface qui sont Zariski-denses dans G : ce sont alors des sous-groupes

fins (*thin* en anglais) de G, à savoir des sous-groupes d'indice infini de groupes arithmétiques qui sont encore Zariski-denses dans G. Voir Kontorovich et al. (2019) pour plus de détails sur les groupes fins et leur importance.

1.3. Motivations spécifiques en basse dimension

Les questions 1.1, 1.8 et 1.9 ont donné lieu à une riche littérature pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, motivée par les considérations géométriques suivantes.

1.3.1. *Variétés hyperboliques compactes de dimension trois.* — Soient $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Tout sous-groupe discret sans torsion Γ de G définit une variété hyperbolique de dimension trois, à savoir le quotient de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ par Γ. La question 1.1 pour les réseaux cocompacts de G appartient à une série de grandes conjectures de Thurston sur les variétés hyperboliques compactes de dimension trois (*cf.* Bergeron, 2013, 2014). Une réponse affirmative à cette question a été donnée par Lackenby (2010) dans le cas des réseaux arithmétiques de G, puis par Kahn et Marković (2012) en général. Plus précisément, Kahn et Marković ont montré que pour tout réseau cocompact de G, la variété hyperbolique correspondante contient des surfaces immergées π_1-*injectives* (c'est-à-dire telles que l'inclusion induise une injection au niveau des groupes fondamentaux) ; les sous-groupes de surface correspondants peuvent être pris « arbitrairement proches » de groupes fuchsiens, dans un sens quantitatif précis, répondant affirmativement aux questions 1.8 et 1.9. Agol (2013) a ensuite utilisé ce résultat et les travaux de Wise et ses collaborateurs (*cf.* Wise, 2021) pour démontrer la *conjecture de Haken virtuelle*, qui affirme que toute variété hyperbolique compacte orientable de dimension trois possède un revêtement fini qui est de Haken, c'est-à-dire qui contient une surface *plongée* π_1-injective. Grâce aux travaux de Perelman, ceci résout une conjecture de Waldhausen (1968) affirmant que toute variété compacte, connexe, orientable, irréductible de dimension trois possède un revêtement fini qui est de Haken.

1.3.2. *Conjecture d'Ehrenpreis.* — La question 1.9 dans le cas de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et du plongement diagonal $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$, pour les réseaux cocompacts de G de la forme $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ où $\Gamma_i \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, est motivée par une célèbre conjecture d'Ehrenpreis (1970) : pour tout réel $k > 1$ et toute paire de surfaces de Riemann compactes de genre au moins deux, on peut trouver des revêtements finis des deux surfaces qui sont k-quasi-conformes. Kahn et Marković (2015) ont démontré cette conjecture en construisant, pour tout réseau cocompact Γ_i de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, des sous-groupes d'indice fini « arbitrairement proches » de réseaux d'une forme particulière (dits *R-parfaits*), *cf.* paragraphe 3.2.

1.3.3. *Variétés hyperboliques de volume fini de dimension trois.* — Revenons à $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et au plongement standard τ, et considérons à présent des réseaux *non cocompacts* Γ de G. Cooper, Long et Reid (1997) ont répondu affirmativement à la question 1.1 dans ce cas en montrant que la variété hyperbolique de volume fini $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ contient une surface compacte immergée π_1-injective essentielle de genre au moins deux, qui de plus se relève en une surface *plongée* non séparante dans un revêtement fini de M. Les sous-groupes de surface de Γ ainsi obtenus contiennent des éléments paraboliques (c'est-à-dire non diagonalisable sur $\mathbb{C}$), dits accidentels. D'autres sous-groupes de surface, quasi-fuchsiens au sens de l'exemple 1.6, ont ensuite été construits par Masters et Zhang (2008, 2009) et Baker et Cooper (2015).

Rappelons que l'ensemble limite d'un sous-groupe discret Λ de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ est l'ensemble des points d'accumulation, dans le bord à l'infini $\partial\mathbb{H}^3 \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ de $\mathbb{H}^3$, des Λ-orbites de $\mathbb{H}^3$. Lorsque Λ est fuchsien (contenu dans un conjugué de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$), son ensemble limite est un cercle (bord à l'infini d'une copie de $\mathbb{H}^2$ dans $\mathbb{H}^3$). Lorsque Λ est quasi-fuchsien, son ensemble limite est un *quasi-cercle* (c'est-à-dire l'image d'un cercle par une application quasi-conforme), dont la géométrie permet de mesurer combien Λ est proche d'être fuchsien. Dans ce cas l'enveloppe convexe dans $\mathbb{H}^3$ de l'ensemble limite de Λ est un convexe fermé de $\mathbb{H}^3$ sur lequel Λ agit avec quotient compact : on dit que Λ est *convexe cocompact* dans $\mathbb{H}^3$.

En s'appuyant sur les travaux de Kahn et Marković (2012), Cooper et Futer (2019) ont récemment répondu affirmativement à la question 1.9 en montrant que pour tout réseau non cocompact Γ de G, les sous-groupes de surface quasi-fuchsiens de Γ vérifient la propriété d'« ubiquité » suivante : pour toute paire de cercles disjoints dans $\partial\mathbb{H}^3$, on peut trouver un sous-groupe de surface quasi-fuchsien de Γ dont l'ensemble limite est contenu dans la région de $\partial\mathbb{H}^3$ bordée par les deux cercles. Kahn et Wright (2021) ont obtenu une version plus forte de ce résultat : pour tout $k > 1$ on peut choisir les sous-groupes de surface Λ de telle sorte que leur action sur $\partial\mathbb{H}^3$ soit conjuguée de manière k-quasi-conforme à l'action d'un groupe fuchsien. Ces résultats répondent à une question d'Agol (Delp, Hoffoss et Manning, 2015, Q. 3.5). Ils ont récemment été utilisés par Cooper et Futer (2019) et Groves et Manning (2021) pour donner de nouvelles démonstrations de résultats de Wise (2021) affirmant que Γ agit librement et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0) et que le quotient de ce complexe par un certain sous-groupe d'indice fini de Γ est *spécial*.

1.3.4. *Groupe modulaire.* — Rappelons que le groupe modulaire $\mathrm{Mod}(S)$ d'une surface compacte S de genre $g \geqslant 2$ est le groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de S ; il s'identifie au groupe des automorphismes extérieurs de $\pi_1(S)$ par un résultat classique de Dehn, Nielsen et Baer. Il agit proprement par isométries sur un complexe simplicial hyperbolique au sens de Gromov (bien que localement infini), le *complexe des courbes* $C(S)$ de S, et Ivanov a montré qu'en genre $g > 2$ il s'identifie au groupe

tout entier des isométries simpliciales de $C(S)$. Comme au paragraphe 1.1, on cherche à comprendre $\mathrm{Mod}(S)$ en étudiant quels types de sous-groupes il admet.

Un point de vue fécond est d'étudier $\mathrm{Mod}(S)$ via son action sur $C(S)$ par analogie avec les réseaux non cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ agissant sur $\mathbb{H}^3$, *cf.* Reid (2006). Il est facile de construire des sous-groupes de $\mathrm{Mod}(S)$ qui sont des groupes libres non abéliens, en faisant « jouer au ping pong » des éléments, dits *pseudo-Anosov*, qui admettent une dynamique analogue à celle des éléments hyperboliques de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. Se pose alors la question de l'existence de sous-groupes de $\mathrm{Mod}(S)$ qui soient isomorphes à des groupes de surface. Cette question a été résolue affirmativement par González-Diez et Harvey (1999) pour $g \geqslant 4$ et par Leininger et Reid (2006) pour $g \geqslant 2$. Comme pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ (*cf.* paragraphe 1.3.3), il existe une notion de sous-groupe *convexe cocompact* de $\mathrm{Mod}(S)$, dont tous les éléments d'ordre infini sont pseudo-Anosov : *cf.* Farb et Mosher (2002), Hamenstädt (2005) et Kent IV et Leininger (2008). La question de trouver des sous-groupes de surface de $\mathrm{Mod}(S)$ qui soient convexes cocompacts reste ouverte à ce jour. Elle constitue l'une des motivations du travail récent de Kahn et Wright (2021) sur les réseaux non cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

1.4. Lien avec les représentations anosoviennes

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. Les représentations τ-fuchsiennes $\rho_0 : \pi_1(S) \to G$ de la définition 1.3 sont des exemples de *représentations anosoviennes* de $\pi_1(S)$ dans G. Ces dernières, introduites par Labourie (2006), sont des représentations injectives et discrètes avec de fortes propriétés dynamiques. Elles ont été beaucoup étudiées ces dernières années et jouent un rôle important en théorie de Teichmüller–Thurston de rang supérieur (*cf.* Pozzetti, 2019) et dans des développements récents sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie.

Leur définition dépend du choix [3], à conjugaison près, d'un sous-groupe parabolique de G, c'est-à-dire (disons si G est algébrique) d'un sous-groupe algébrique P de G tel que l'espace homogène G/P soit compact. On peut penser à G/P comme à un « bord » de G ou de son espace riemannien symétrique G/K, où K est un sous-groupe compact maximal de G. Pour simplifier, on supposera P symétrique (c'est-à-dire conjugué à ses opposés), une condition technique qui est satisfaite dans l'exemple important suivant.

Exemple 1.10. Soit $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le groupe des matrices triangulaires supérieures est un sous-groupe parabolique P de G. L'espace homogène compact G/P correspondant est l'espace des drapeaux complets $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1})$ de $\mathbb{K}^n$. Pour $n = 2$, l'espace G/P est la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$; il s'identifie au bord

[3] Il n'y a qu'un nombre fini de tels choix possibles, à conjugaison près.

à l'infini de l'espace riemannien symétrique G/K de G, qui est le plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'espace hyperbolique de dimension trois $\mathbb{H}^3$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Les représentations P-anosoviennes sont définies par l'existence de bonnes « applications de bord », au sens suivant. (Rappelons que l'holonomie de toute structure hyperbolique sur une surface S définit une action du groupe fondamental $\pi_1(S)$ sur le bord à l'infini $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ du plan hyperbolique $\mathbb{H}^2$.)

Définition 1.11. Soient $\pi_1(S)$ un groupe de surface et $\rho : \pi_1(S) \to G$ une représentation. Une application $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P$ est une *application de bord* pour ρ si elle est équivariante relativement à l'action de $\pi_1(S)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ donnée par une certaine structure hyperbolique sur S et l'action de $\pi_1(S)$ sur G/P via ρ : pour tous $\gamma \in \pi_1(S)$ et $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ on a $\xi(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \cdot \xi(x)$.

Par définition, une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ est *P-anosovienne* si elle admet une application de bord continue $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P$ qui :

- ▷ est injective et même *transverse* : toute paire de points distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est envoyée sur une paire de points de G/P en position générique ;
- ▷ préserve la dynamique : l'image par ξ du point fixe attractif dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'un élément $\gamma \in \pi_1(S)$ est un point fixe attractif dans G/P de $\rho(\gamma)$;
- ▷ satisfait une condition de contraction uniforme pour le relevé, à un certain fibré défini par ρ, du flot géodésique du fibré unitaire tangent de S.

Cette condition de contraction est liée à la condition définissant les *flots d'Anosov* en dynamique, d'où la terminologie. Elle implique que les représentations P-anosoviennes forment un ouvert de $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$. Nous n'énoncerons pas cette condition ici, mais renvoyons à Kassel (2019, § 4) pour plus de détails, et pour diverses caractérisations. La notion de représentation anosovienne se généralise à tous les groupes de type fini qui sont hyperboliques au sens de Gromov, *cf.* Guichard et Wienhard (2012).

Il est facile de voir qu'une représentation anosovienne $\rho : \pi_1(S) \to G$ est toujours injective. En effet, si l'image par ρ d'un élément $\gamma \in \pi_1(S)$ est triviale dans G, alors $\rho(\gamma)$ agit trivialement sur $\xi(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$; comme l'application ρ-équivariante ξ est injective, γ agit trivialement sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, ce qui implique que γ est trivial dans $\pi_1(S)$. Un raffinement de ce raisonnement (basé sur le fait que l'action de $\pi_1(S)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est une action *de convergence*) montre que l'image d'une représentation anosovienne est un sous-groupe *discret* de G, dit *anosovien*.

Les sous-groupes anosoviens sont des sous-groupes discrets remarquables de G. Lorsque G est de rang réel un (par exemple $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{K})$), ce sont exactement les sous-groupes convexes cocompacts de G au sens du paragraphe 1.3.3, c'est-à-dire les sous-groupes discrets agissant avec quotient compact sur un fermé convexe non vide de l'espace riemannien symétrique G/K. Lorsque G est de rang réel supérieur (par

exemple $\mathrm{PSL}(n,\mathbb{K})$ pour $n \geqslant 3$), les sous-groupes anosoviens sont des sous-groupes discrets de covolume infini avec de bonnes propriétés géométriques, topologiques et dynamiques, qui en font une bonne généralisation des sous-groupes convexes cocompacts (*cf.* Guichard, 2019).

La question suivante précise la question 1.1.

Question 1.12. Soit G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire non compact. Tout réseau de G admet-il des sous-groupes de surface qui soient anosoviens ?

Notons qu'une réponse affirmative à la question 1.9 implique une réponse affirmative à la question 1.12. En effet, tout plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ définit un sous-groupe parabolique strict de G qui est symétrique, à savoir le plus petit sous-groupe parabolique P_τ de G contenant l'image par τ du groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ainsi que le centralisateur dans G de l'image par τ du groupe des matrices diagonales de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Par construction, l'image par τ de tout élément hyperbolique de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ admet un point fixe attractif dans G/P_τ. De plus, τ induit un plongement équivariant de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans G/P_τ (*cf.* (2.1) ci-dessous) qui transmet la dynamique de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à G/P_τ. L'observation suivante en découle aisément, *cf.* Labourie (2006) et Guichard et Wienhard (2012).

Remarque 1.13. Tout sous-groupe τ-fuchsien de G (définition 1.3) est P_τ-anosovien.

En particulier, l'inclusion naturelle dans G de tout sous-groupe τ-fuchsien Λ de G admet un voisinage dans $\mathrm{Hom}(\Lambda, G)$ formé entièrement de représentations P_τ-anosoviennes, donc injectives et discrètes, ce qui prouve la proposition 1.4.

2. Énoncés plus précis et quantitatifs

Dans cette partie, nous donnons des énoncés qui répondent affirmativement aux questions 1.1 et 1.12, à la fois dans le cadre du théorème principal et dans un cadre plus général (théorèmes 2.4 et 2.17).

2.1. Énoncé pour les groupes G du théorème principal

Considérons les exemples suivants de triplets (G, τ, P_τ), où $n \geqslant 2$.

Exemple 2.1. Soit $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\tau = \tau_n : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible. Ce plongement, unique à conjugaison par $\mathrm{PGL}(n,\mathbb{K})$ près, est donné concrètement de la manière suivante : identifions $\mathbb{K}^n$ à l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X,Y]_{n-1}$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à deux variables X et Y qui sont homogènes de degré $n-1$. Le groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K})$ agit sur $\mathbb{K}[X,Y]_{n-1}$ par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot P\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right).$$

Ceci définit une représentation irréductible $\mathrm{SL}(2,\mathbb{K}) \to \mathrm{SL}(\mathbb{K}[X,Y]_{n-1}) \simeq \mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, qui passe au quotient en un plongement $\tau_n : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{K}) \hookrightarrow G$. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on note encore τ_n sa restriction à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Le sous-groupe parabolique P_{τ_n} du paragraphe 1.4 est le sous-groupe de $G \simeq \mathrm{PSL}(\mathbb{K}[X,Y]_{n-1})$ formé des matrices triangulaires supérieures dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}[X,Y]_{n-1}$. L'espace G/P_{τ_n} est l'espace des drapeaux complets de $\mathbb{K}^n \simeq \mathbb{K}[X,Y]_{n-1}$.

Exemple 2.2. Soit $G = \mathrm{SO}(n,1)$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}(n+1,\mathbb{R})$ formé des matrices préservant la forme quadratique $Q(x) = x_1^2 + \dots x_n^2 - x_{n+1}^2$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. Il n'y a à conjugaison près qu'un seul plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$, obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ à $\mathrm{SO}(2,1)_0$ et en voyant $\mathrm{SO}(2,1)$ comme le sous-groupe de $\mathrm{SO}(n,1)$ agissant trivialement sur les $n-2$ premières coordonnées. Le sous-groupe parabolique P_τ est le stabilisateur d'une droite Q-isotrope de $\mathbb{R}^{n+1}$. L'espace G/P_τ est le fermé de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ correspondant aux droites Q-isotropes de $\mathbb{R}^{n+1}$; il s'identifie au bord à l'infini de l'espace hyperbolique réel $\mathbb{H}^n$, qui est l'espace riemannien symétrique G/K de G.

L'exemple suivant est basé sur une observation élémentaire : pour n impair, le plongement irréductible $\tau_n : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ de l'exemple 2.1 se factorise par $\mathrm{SL}(n,\mathbb{C})$ et préserve une forme hermitienne sur $\mathbb{C}[X,Y]_{n-1} \simeq \mathbb{C}^n$, dont la matrice dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ est anti-diagonale à coefficients strictement positifs ; l'image $\tau_n(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ s'identifie donc à un sous-groupe de $\mathrm{SU}(q+1,q)$ pour $2q+1 = n$.

Exemple 2.3. Pour $p > q \geqslant 1$, soit $G = \mathrm{SU}(p,q)$ (resp. $\mathrm{Sp}(p,q)$), vu comme le groupe des transformations inversibles d'un espace vectoriel V de dimension $p+q$ sur $\mathbb{C}$ (resp. sur les quaternions) qui préservent une forme hermitienne de signature (p,q), et sont de déterminant un. Soit $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en composant τ_{2q+1} avec l'inclusion naturelle de $\mathrm{SU}(q+1,q)$ dans $\mathrm{SU}(p,q)$ (resp. $\mathrm{Sp}(p,q)$). Le sous-groupe parabolique P_τ est le stabilisateur d'un drapeau partiel $(V_1 \subset \dots \subset V_q)$ de V formé de sous-espaces totalement isotropes V_i de dimension i pour $1 \leqslant i \leqslant q$. L'espace G/P_τ est l'ensemble de tous les drapeaux partiels de V de cette forme.

Voici une version plus précise du théorème principal pour les groupes $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ et $\mathrm{Sp}(p,q)$. L'énoncé fait intervenir les notions d'*application de bord* et de *sous-groupe anosovien* de G du paragraphe 1.4, et d'*application sullivannienne* définie ci-dessous ; il donne un sens quantitatif au fait que l'on peut trouver, à l'intérieur de tout réseau cocompact de G, des sous-groupes de surface arbitrairement proches de groupes τ-fuchsiens (définition 1.3).

Théorème 2.4. *Soit (G,τ,P_τ) comme dans l'exemple 2.1, l'exemple 2.2 avec n impair, ou l'exemple 2.3. Soit Γ un réseau cocompact de G. Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un sous-groupe de surface de Γ qui admet une application de bord (δ,τ)*-sullivannienne *$\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ (définition 2.9) ; en particulier, un tel sous-groupe est P_τ-anosovien pour $\delta > 0$ assez petit.*

Le cas $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ résulte des travaux de Kahn et Marković (2012), et le cas général est démontré par Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). Hamenstädt (2015, 2021) construit elle aussi des sous-groupes de surface de Γ proches de groupes τ-fuchsiens dans ce contexte, mais elle ne considère pas d'application de bord.

Le théorème 2.4 répond affirmativement aux questions 1.1 et 1.12 pour les réseaux cocompacts de $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(2p-1,1)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ ou $\mathrm{Sp}(p,q)$. Pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, ceci implique une réponse affirmative aux questions 1.8 et 1.9, car dans ce cas les sous-groupes de surface anosoviens de G sont exactement les sous-groupes quasi-fuchsiens de l'exemple 1.6. En général, il n'est pas clair que les sous-groupes de surface construits par Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) et Hamenstädt (2015, 2021) soient τ-quasi-fuchsiens (définition 1.5) : la proposition 1.4 ne s'applique pas car lorsque δ tend vers zéro dans le théorème 2.4, le genre de la surface a tendance à augmenter. On s'attend toutefois à ce que ces constructions donnent une réponse affirmative aux questions 1.8 et 1.9 au moins dans le cas de $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et du plongement irréductible τ. [4]

Voir le paragraphe 2.3 pour une version du théorème 2.4 dans un cadre plus général.

2.2. Cercles et applications sullivanniennes

On définit à présent la notion d'application sullivannienne.

Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et P_τ le sous-groupe parabolique de G associé comme à la fin du paragraphe 1.4. L'idée de Kahn, Labourie et Mozes est la suivante : toute représentation τ-fuchsienne $\rho : \pi_1(S) \to G$ préserve un *τ-cercle* dans G/P_τ (définition 2.5) ; pour $\delta > 0$, ils considèrent une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ comme « δ-proche de τ-fuchsienne » si elle préserve une « δ-approximation de τ-cercle », qu'ils appellent *application (δ,τ)-sullivannienne* (définition 2.9).

2.2.1. *τ-cercles.* — Le plongement τ envoie le sous-groupe B des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ dans P_τ, et passe donc au quotient en un plongement τ-équivariant

$$\underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})/B \longrightarrow G/P_\tau. \tag{2.1}$$

Définition 2.5. Un *τ-cercle* est une application de la forme $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ où $g \in G$.

Si $g \circ \underline{\tau}$ est un τ-cercle, alors toute reparamétrisation $g \circ \underline{\tau} \circ h : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, où $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, est encore un τ-cercle, par équivariance de $\underline{\tau}$.

[4] Dans ce cas on pourrait espérer utiliser par exemple les coordonnées de Fock et Goncharov (2006) pour des sous-surfaces ouvertes.

Exemple 2.6. Soient $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Les images des τ-cercles de $G/P_\tau = \partial\mathbb{H}^3$ sont les bords des plans totalement géodésiques de $\mathbb{H}^3$ (*cf.* figure 1, gauche).

Exemple 2.7. Soit $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\tau = \tau_n : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible. Si l'on identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathbb{K}[X,Y]_{n-1}$ comme dans l'exemple 2.1, alors $\underline{\tau}$ envoie tout point $[\alpha : \beta] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sur le drapeau $(V_1 \subset \cdots \subset V_{n-1})$ où V_i est le sous-espace de $\mathbb{K}[X,Y]_{n-1}$ formé des polynômes divisibles par $(-\beta X + \alpha Y)^{n-i}$. En particulier, la première coordonnée de $\underline{\tau}$ est le plongement $[\alpha : \beta] \mapsto [(-\beta X + \alpha Y)^{n-1}]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{K}[X,Y]_{n-1}) \simeq \mathbb{P}(\mathbb{K}^n)$ (« plongement de Veronese »). Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = 3$, son image est une conique du plan projectif $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$; l'image de $\underline{\tau}$ est l'ensemble des drapeaux (V_1, V_2) de $\mathbb{R}^3$ où le projectivisé de V_1 est un point de la conique et le projectivisé de V_2 est tangent à la conique en ce point (*cf.* figure 1, droite).

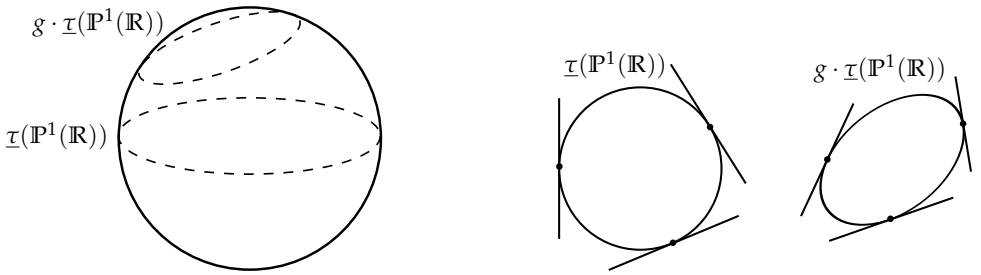


Figure 1 – Images de τ-cercles dans G/P_τ. À gauche : $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $G/P_\tau = \partial\mathbb{H}^3$. À droite : $G = \mathrm{PSL}(3,\mathbb{R})$ et G/P_τ est l'espace des drapeaux de $\mathbb{R}^3$, représentés comme des couples (point $\in$ droite projective) dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$.

Une observation importante est que si $\pi_1(S)$ est un groupe de surface et $\rho_0 = g(\tau \circ \varrho(\cdot))g^{-1} : \pi_1(S) \to G$ une représentation τ-fuchsienne (définition 1.3), où $g \in G$ et $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, alors ρ_0 préserve le τ-cercle $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$: ce τ-cercle est une application de bord pour ρ_0 (définition 1.11), faisant de ρ_0 une représentation P_τ-anosovienne au sens du paragraphe 1.4.

On suppose désormais que le centralisateur Z^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans G est compact, ce qui est vérifié dans le cadre du théorème 2.4 (et plus généralement dans le cadre 2.16 ci-dessous). Pour $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau = \tau_n$ le plongement irréductible, ce centralisateur Z^τ est même trivial. La remarque suivante affirme que les τ-cercles sont alors essentiellement les applications de bord des représentations τ-fuchsiennes.

Remarque 2.8. Soit $\pi_1(S)$ un groupe de surface. En supposant Z^τ compact, une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ admet une application de bord de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans G/P_τ qui est un τ-cercle si et seulement si ρ est le produit d'une représentation τ-fuchsienne $g(\tau \circ \varrho(\cdot))g^{-1}$, où $g \in G$ et $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, et d'une représentation de $\pi_1(S)$ à valeurs dans le groupe compact $gZ^\tau g^{-1}$.

2.2.2. *Applications (δ,τ)-sullivanniennes.* — Munissons $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de sa distance riemannienne standard $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$, invariante par $\mathrm{PSO}(2)$, telle que $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(0,t) = |\arctan(t)|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit K un sous-groupe compact maximal de G contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$. Munissons G/P_τ d'une distance riemannienne d_τ, invariante par K, telle que le τ-cercle $\underline{\tau}$ de (2.1) soit isométrique. Tout τ-cercle $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, où $g \in G$, est alors isométrique pour la distance riemannienne $d_\tau^g := d_\tau(g^{-1}\cdot, g^{-1}\cdot)$ sur G/P_τ.

Définition 2.9 (Kahn, Labourie et Mozes, arXiv 2018)**.** Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et P_τ le sous-groupe parabolique de G associé. Soit $\delta \geqslant 0$. Une application $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ est (δ,τ)-*sullivannienne* si pour tout $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, il existe $g \in G$ tel que pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$,

$$d_\tau^g\big(\xi(x), g \circ \underline{\tau} \circ h^{-1}(x)\big) \leqslant \delta.$$

En d'autres termes, l'application ξ est « une δ-approximation de τ-cercle vu depuis n'importe quel triplet de points » : pour tout triplet $T = h \cdot (0,\infty,-1)$ de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, où $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, il existe $g \in G$ tel que le triplet $\xi(T)$ soit δ-proche de $g \circ \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ pour la distance d_τ^g et la courbe ξ tout entière soit point par point δ-proche du τ-cercle $g \circ \underline{\tau} \circ h^{-1}$ pour d_τ^g.

Pour $\delta = 0$, une application (δ,τ)-sullivannienne est un τ-cercle. Plus $\delta > 0$ est petit, mieux l'application approche un τ-cercle, globalement comme localement (considérer un triplet T de points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ très proches entre eux comme sur la figure 2).

Cette définition est étroitement liée aux birapports. Par exemple, l'observation suivante est élémentaire, où $[w : x : y : z]$ est le birapport (à valeurs dans $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$) de quatre points $w,x,y,z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque 2.10. Soient $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement standard. Il existe une fonction $\delta \mapsto k_\delta$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]1,+\infty[$, tendant vers 1 en 0, telle que pour tout $\delta > 0$ assez petit, toute application (δ,τ)-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = G/P_\tau$ soit k_δ-quasi-symétrique au sens suivant : pour tous $w,x,y,z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ deux à deux distincts vérifiant $[w : x : y : z] = -1$, on a $k_\delta^{-1} \leqslant |[\xi(w) : \xi(x) : \xi(y) : \xi(z)]| \leqslant k_\delta$.

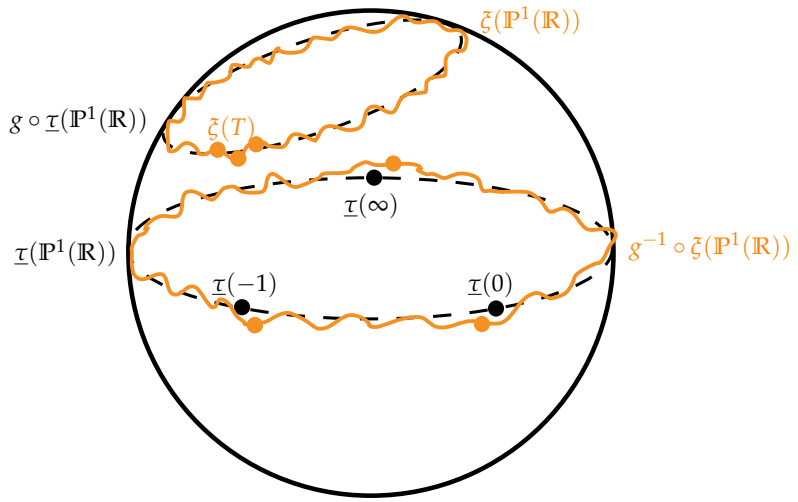


FIGURE 2 – Application (δ, τ)-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $G/P_\tau = \partial\mathbb{H}^3$. Le triplet $g^{-1} \circ \xi(T)$ est δ-proche de $\underline{\tau}(0, \infty, -1)$ pour d_τ et la courbe $g^{-1} \circ \xi$ tout entière est δ-proche de $\underline{\tau} \circ h^{-1}$ pour d_τ.

En effet, pour tous $w, x, y, z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ deux à deux distincts, il existe $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ envoyant (w, x, y, z) sur $(0, \infty, -1, t)$ où $t := -1/[w : x : y : z] \in \mathbb{R}$. Comme ξ est (δ, τ)-sullivannienne, il existe $g \in G$ tel que, dans $G/P_\tau = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ muni de sa distance $\mathrm{PSU}(2)$-invariante d_τ, le quadruplet $g^{-1} \circ \xi(w, x, y, z)$ soit point par point δ-proche du quadruplet $(0, \infty, -1, t)$. Pour δ suffisamment petit et $t = 1$, ceci implique que $|[g^{-1} \circ \xi(w) : g^{-1} \circ \xi(x) : g^{-1} \circ \xi(y) : g^{-1} \circ \xi(z)]|$ appartient à $[k_\delta^{-1}, k_\delta]$ pour un certain $k_\delta > 1$ ne dépendant que de δ, et tendant vers 1 lorsque δ tend vers 0. On conclut par l'invariance du birapport par $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Il est probable que ce lien entre applications sullivanniennes et birapports se généralise à des groupes semi-simples G de rang supérieur, pour de bonnes notions de birapports (*cf.* par exemple BEYRER, 2021).

L'observation facile suivante montre que, lorsque le centralisateur Z^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans G est compact, on peut quantifier le fait qu'une représentation soit proche d'être τ-fuchsienne par l'existence d'une application de bord (δ, τ)-sullivannienne pour δ petit.

Remarque 2.11. Supposons Z^τ compact. Pour toute surface hyperbolique compacte S et toute suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de représentations de $\pi_1(S)$ dans G, si ρ_n admet une application de bord (δ_n, τ)-sullivannienne pour tout n et si $\delta_n \to 0$, alors, quitte à conjuguer les ρ_n, elles convergent vers une représentation P_τ-anosovienne d'application de bord un τ-cercle, comme à la remarque 2.8.

2.2.3. *Quelques propriétés des applications sullivanniennes.* — Les propriété suivantes seront utiles au paragraphe 4.6.

Proposition 2.12 (Kahn, Labourie et Mozes, arXiv 2018). *Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et P_τ le sous-groupe parabolique de G associé. On suppose que le centralisateur Z^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans G est compact. Alors il existe $\delta_0, C, \alpha > 0$ tels que*

1. *toute application (δ_0,τ)-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ est α-höldérienne ; plus précisément, pour tous $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $g \in G$ comme à la définition 2.9, on a $d^g_\tau(\xi(x),\xi(y)) \leqslant C\, d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h^{-1}(x),h^{-1}(y))^\alpha$ pour tous $x, y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$;*
2. *pour tout groupe de surface $\pi_1(S)$ et toute représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$, si ρ admet une application de bord (δ,τ)-sullivannienne pour $\delta < \delta_0$, alors*
   (*a*) *ρ est P_τ-anosovienne (donc en particulier injective) ;*
   (*b*) *ρ admet, pour tout $\varepsilon > 0$, un voisinage dans $\mathrm{Hom}(\pi_1(S),G)$ formé entièrement de représentations P_τ-anosoviennes d'application de bord $(\delta+\varepsilon,\tau)$-sullivannienne.*

Le point (1) repose sur une version précise, dans G/P_τ, du lemme de Morse de Kapovich, Leeb et Porti (2014, 2018), qui requiert un contrôle fin de la convergence de parties imbriquées de G/P_τ (« lunules ») et fait l'objet des parties 4 à 7 de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). Le point (2a) repose sur cette même propriété d'imbrication (mais sans nécessiter un contrôle aussi fin), dans l'esprit de la caractérisation des représentations anosoviennes en termes de multicônes de Bochi, Potrie et Sambarino (2019). Le point (2b) résulte de (2a) et du fait que l'application de bord d'une représentation P_τ-anosovienne varie continûment avec la représentation (*cf.* Guichard et Wienhard, 2012).

2.3. Un cadre général pour le théorème principal

Dans ce paragraphe, nous décrivons les couples (G,τ), où G est un groupe de Lie réel semi-simple linéaire et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement, pour lesquels le théorème principal et le théorème 2.4 sont démontrés. Ces couples sont ceux qui satisfont deux conditions : l'une de *régularité* et l'autre, que nous noterons (R), de *retournement*. Le lecteur peu familier avec la théorie de Lie pourra ignorer ce paragraphe et se concentrer sur l'exemple 2.1 de $(\mathrm{PSL}(n,\mathbb{C}),\tau_n)$, ou plus généralement sur les exemples du paragraphe 2.1, où les deux conditions sont satisfaites.

2.3.1. *La condition de régularité sur* h. — Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire, $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement et $\mathrm{d}\tau : \mathfrak{psl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ le morphisme

d'algèbres de Lie correspondant. Posons

$$\mathsf{h} := \mathrm{d}\tau\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right). \tag{2.2}$$

On demande que h soit *régulier* au sens classique suivant.

Soit K un sous-groupe compact maximal de G contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$; c'est l'ensemble des points fixes d'une involution θ de G, dite de Cartan. On a la décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{k}^\perp$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{k}^\perp$ l'ensemble des points fixes de $-\mathrm{d}\theta$ (l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour la forme de Killing). L'élément h appartient à $\mathfrak{k}^\perp$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{k}^\perp$ contenant h (*sous-espace de Cartan*). Le groupe de Weyl $W = N_G(\mathfrak{a})/Z_G(\mathfrak{a})$ agit sur $\mathfrak{a}$; l'ensemble des points qui sont fixés par au moins un élément non trivial de W est une union d'hyperplans appelés murs. On dit que h est *régulier* s'il n'appartient à aucun mur. (Autrement dit, h appartient à l'*intérieur* d'une chambre de Weyl $\mathfrak{a}^+$ de $\mathfrak{a}$, où une chambre de Weyl est par définition un cône convexe de $\mathfrak{a}$ qui est l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire dans $\mathfrak{a}$ de l'union des murs.)

Exemple 2.13. Soient $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $\tau = \tau_n : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (exemple 2.1). Dans la base $(X^{i-1}Y^{n-i})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbb{K}[X, Y]_{n-1} \simeq \mathbb{K}^n$, l'élément h est diagonal de coefficients $(n-1, n-3, \ldots, -(n-3), -(n-1))$. L'unique sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{psl}(n, \mathbb{K})$ contenant h est l'espace des matrices diagonales dans cette base, de trace nulle. Les murs de $\mathfrak{a}$ sont les hyperplans donnés par l'égalité entre i-ième et j-ième coefficients diagonaux pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$. L'élément h est ici régulier : ses coefficients sont deux à deux distincts.

Remarques 2.14.

1. La régularité de h implique que le centralisateur Z^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$ dans G est compact. La réciproque est fausse : *cf.* exemple 2.25.
2. L'élément h est toujours régulier lorsque G est de rang réel un.
3. Des plongements τ différents peuvent avoir le même élément h régulier : *cf.* exemple 2.22.

2.3.2. *La condition (R) sur* (G, τ). — Soit $Z_G(\mathsf{h})$ le centralisateur de h dans G, et soit $\underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow G/P_\tau$ comme en (2.1). Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes considèrent la condition supplémentaire suivante, dite de *retournement* (*flip* en anglais) :

(R) il existe un élément $j \in G$ d'ordre deux, appartenant à l'intersection du centre de $Z_G(\mathsf{h})$ et de la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$, tel que $j \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1) = \underline{\tau}(0, \infty, 1)$.

Cette condition exprime le fait que l'on peut utiliser une famille continue d'éléments de G pour « retourner » $\underline{\tau}(0, \infty, -1)$ en $\underline{\tau}(0, \infty, 1)$ en fixant $\underline{\tau}(0)$ et $\underline{\tau}(\infty)$ (*cf.* figure 11, paragraphe 5.5).

Exemple 2.15. Soient $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau = \tau_n$ le plongement irréductible. Le centralisateur $Z_G(\mathsf{h})$ de h dans G est le groupe des matrices diagonales de G, c'est un groupe connexe et abélien. La condition (R) est satisfaite en prenant $j = \tau\left(\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)\right)$.

2.3.3. *Le résultat général.* — Dans toute la suite, on travaille dans le cadre suivant.

Cadre 2.16. Soient G un groupe de Lie réel semi-simple linéaire sans facteur compact et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement. On suppose $\mathsf{h} := \mathrm{d}\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right) \in \mathfrak{g}$ régulier comme au paragraphe 2.3.1, ce qui implique que le centralisateur Z^τ de $\mathrm{d}\tau(\mathfrak{psl}(2,\mathbb{R}))$ dans G est compact. On note P_τ le sous-groupe parabolique minimal de G contenant l'image par τ du groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$; son algèbre de Lie est la somme des sous-espaces propres de $\mathrm{ad}(\mathsf{h})$ associés à des valeurs propres positives ou nulles.

On dit qu'un réseau Γ de G est *irréductible* si les seuls sous-groupes distingués G' de G tels que la projection de Γ sur G/G' soit discrète sont les sous-groupes finis ou d'indice fini de G. Voici une version générale du théorème 2.4.

Théorème 2.17. *Dans le cadre 2.16, supposons que la condition (R) du paragraphe 2.3.2 est vérifiée. Soit Γ un réseau cocompact irréductible de G. Pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un sous-groupe de surface de Γ qui admet une application de bord (δ,τ)-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ (définition 2.9) ; en particulier, un tel sous-groupe est P_τ-anosovien au sens du paragraphe 1.4 pour δ assez petit.*

Comme au paragraphe 2.1, le cas $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ résulte des travaux de Kahn et Marković (2012), et le cas général est traité par Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). Hamenstädt (2015, 2021) construit dans ce contexte des sous-groupes de surface de Γ proches de groupes τ-fuchsiens mais sans considérer d'application de bord.

On s'attend à ce que le théorème 2.17 reste vrai sans la condition (R). Voir Kahn et Marković (2015) pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et le plongement diagonal $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$, pour des réseaux cocompacts non irréductibles.

Remarque 2.18. Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) n'ont en fait pas besoin de supposer que h est régulier : il suffit que le centralisateur Z^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans G soit compact. Lorsque h n'est pas régulier, ils remplacent la condition (R) par une condition plus forte : au lieu de l'intersection du centre et de la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$, ils demandent que la composante neutre du centre de $Z_G(\mathsf{h})$ contienne un élément j d'ordre deux tel que $j \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1) = \underline{\tau}(0,\infty,1)$. Pour h non régulier, le sous-groupe parabolique P_τ de G est non minimal : *cf.* exemple 2.25. Par souci de simplicité, nous supposerons ici h régulier.

2.3.4. *Exemples relatifs à la condition (R).* — On pourra utiliser les observations suivantes.

Remarques 2.19.

1. Si τ est la restriction à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ d'un plongement $\tau_{\mathbb{C}} : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow G$ tel que le tore complexe $\exp \circ \mathrm{d}\tau_{\mathbb{C}}\left(\mathbb{C}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$ soit contenu dans le centre de $Z_G(\mathsf{h})$, alors la condition (R) est satisfaite pour $j = \mathrm{d}\tau_{\mathbb{C}}\left(\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)\right)$.
2. Soit $Z_K(\mathsf{h})_0$ la composante neutre du centralisateur de h dans K. Si h est régulier et si le centre de $Z_K(\mathsf{h})_0$ est trivial, ou plus généralement contenu dans le centralisateur Z^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans G, alors la condition (R) n'est pas satisfaite.

Le point (1) est immédiat. Pour (2), rappelons que si h est régulier, alors la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$ est le produit direct de $A := \exp(\mathfrak{a})$ et de $Z_K(\mathsf{h})_0$. Les éléments de A fixent $\underline{\tau}(0)$ et $\underline{\tau}(\infty)$, et préservent $\underline{\tau}(\mathbb{R}^*_+)$. Les éléments de Z^τ fixent $\underline{\tau}(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ point par point.

Exemple 2.20. Pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et τ l'identité, ainsi que pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement diagonal, la condition (R) n'est pas satisfaite car $Z_K(\mathsf{h})_0$ est trivial (*cf.* remarque 2.19.(2)).

Exemple 2.21. Pour $G = \mathrm{SO}(n,1)$, de rang réel un, il n'y a à conjugaison près qu'un seul plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$, obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ à la composante neutre de $\mathrm{SO}(2,1)$ comme dans l'exemple 2.2. Le groupe $Z_K(\mathsf{h})_0$ est isomorphe à $\mathrm{SO}(n-1)$. Pour n pair, la condition (R) n'est pas satisfaite car le centre de $\mathrm{SO}(n-1)$ est trivial (*cf.* remarque 2.19.(2)). Pour n impair, la condition (R) est satisfaite pour $j := -\mathrm{id} \in \mathrm{SO}(n-1) \simeq Z_K(\mathsf{h})_0$.

Exemple 2.22. Soit $G = \mathrm{PU}(n,1)$ (c'est-à-dire $\mathrm{U}(n,1)$ divisé par son centre), de rang réel un. Pour $n \geqslant 2$, il existe à conjugaison près deux plongements $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$:

- ▷ le plongement dit *totalement réel* obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ avec la composante neutre de $\mathrm{PO}(2,1)$;
- ▷ le plongement dit *complexe* obtenu en identifiant $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ avec $\mathrm{PU}(1,1)$.

Dans les deux cas, le groupe $Z_K(\mathsf{h})_0$ est isomorphe à un quotient de $\mathrm{U}(n)$ par un sous-groupe fini, et le centre de $Z_K(\mathsf{h})_0$ est un tore compact de dimension un. La condition (R) est satisfaite pour le plongement totalement réel, mais non satisfaite pour le plongement complexe car dans ce cas $Z_K(\mathsf{h})_0$ centralise $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ (*cf.* remarque 2.19.(2)).

Exemple 2.23. Pour $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'hypothèse de régularité de h impose que $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ soit, à conjugaison près, le plongement irréductible τ_n de l'exemple 2.1. La condition (R) est satisfaite pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ par la remarque 2.19.(1) (*cf.* exemple 2.15), et non satisfaite pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par la remarque 2.19.(2), car pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ le groupe $Z_K(\mathsf{h})_0$ est trivial.

On montre de même que la condition (R) est satisfaite si G est un groupe de Lie simple complexe de centre trivial et $d\tau : \mathfrak{psl}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathfrak{g}$ le plongement principal, alors qu'elle n'est jamais satisfaite si G est un groupe de Lie simple réel déployé.

Exemple 2.24. Soit $G = \mathrm{SU}(p,q)$ ou $\mathrm{Sp}(p,q)$, où $p > q$. Soit $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en composant τ_{2q+1} avec l'inclusion naturelle de $\mathrm{SU}(q+1,q)$ dans G, comme dans l'exemple 2.3. L'élément h est régulier. La condition (R) est satisfaite par la remarque 2.19.(1).

Exemple 2.25. Soient $G = \mathrm{SO}(4,2)$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(2,1)_0 \hookrightarrow G$ le plongement obtenu en plongeant $\mathrm{SO}(2,1)$ diagonalement dans $\mathrm{SO}(2,1) \times \mathrm{SO}(2,1) \subset G$. L'élément h n'est pas régulier, mais le centralisateur Z^τ de $\tau(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}))$ dans G est compact. La composante neutre de $Z_G(h)$ est isomorphe à $\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(2)$, et l'élément $j = -\mathrm{id}$ du facteur $\mathrm{SO}(2)$ échange $\underline{\tau}(1)$ et $\underline{\tau}(-1)$: la condition (R) est satisfaite (version forte de la remarque 2.18). Le sous-groupe parabolique P_τ est ici le stabilisateur d'un plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^{4,2}$.

2.3.5. *Classification des plongements τ.* — Pour G fixé, il n'y a qu'un nombre fini de plongements τ possibles à conjugaison près. On peut les classifier de la manière suivante. Posons

$$(h_0, e_0, f_0) := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \mathfrak{psl}(2,\mathbb{R})^3. \tag{2.3}$$

Les plongements τ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ dans G sont en bijection avec les morphismes d'algèbres de Lie $d\tau : \mathfrak{psl}(2,\mathbb{R}) \to \mathfrak{g}$ d'image non nulle, ou encore, via l'évaluation en (h_0, e_0, f_0), avec les $\mathfrak{sl}(2)$-*triplets* de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire les triplets $(h, e, f) \in \mathfrak{g}^3$ non nuls tels que

$$[h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f \qquad \text{et} \qquad [e, f] = h.$$

Le théorème de Jacobson–Morozov affirme que tout élément nilpotent non nul e de $\mathfrak{g}$ peut être complété en un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet, et un résultat classique de Kostant dit que ceci induit une bijection entre l'ensemble des éléments nilpotents non nuls de $\mathfrak{g}$ modulo l'action adjointe de G et l'ensemble des $\mathfrak{sl}(2)$-triplets de $\mathfrak{g}$ modulo l'action adjointe de G.

Remarque 2.26. Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) expriment la condition (R) du paragraphe 2.3.2 en termes du $\mathfrak{sl}(2)$-triplet $(h, e, f) = d\tau(h_0, e_0, f_0)$: il existe un élément $j \in G$ d'ordre deux, appartenant à l'intersection du centre de $Z_G(h)$ et de la composante neutre de $Z_G(h)$, qui envoie (via l'action adjointe) $e + f$ sur $-(e + f)$.

3. Stratégie de démonstration

La stratégie générale de démonstration du théorème principal et des théorèmes 2.4 et 2.17 remonte à Kahn et Marković (2012) ; nous la résumons brièvement au paragraphe 3.2. Elle fait intervenir la notion de structure hyperbolique R-parfaite, introduite au paragraphe 3.1, et comporte trois grandes étapes, décrites aux paragraphes 3.3 à 3.5.

3.1. Rappels de géométrie hyperbolique

Soit S une surface compacte connexe orientée de genre $g \geqslant 2$. On peut la décomposer en une union disjointe de $3g-3$ courbes fermées simples et de $2g-2$ *pantalons*, où un pantalon est par définition une sous-surface ouverte homéomorphe à une sphère à trois trous. On appelle *décomposition en pantalons* l'ensemble $\mathscr{P}$ des $2g-2$ pantalons ainsi obtenus ; les $3g-3$ courbes fermées simples sont appelées *courbes de bord*. La décomposition est *bipartie* si $\mathscr{P}$ est l'union disjointe de deux sous-ensembles $\mathscr{P}^+$ et $\mathscr{P}^-$ tels que pour toute paire de pantalons adjacents le long d'une courbe de bord, l'un des pantalons appartient à $\mathscr{P}^+$ et l'autre à $\mathscr{P}^-$; dans ce cas, aucun pantalon n'est adjacent à lui-même. Soit $\mathscr{G}$ un graphe fini sur S avec :

- $2g-2$ sommets : un à l'intérieur de chaque pantalon de $\mathscr{P}$,
- $3g-3$ arêtes : une pour chaque courbe de bord entre deux pantalons de $\mathscr{P}$,

de sorte que S se rétracte sur $\mathscr{G}$ (*cf.* figure 3, gauche). Le graphe $\mathscr{G}$ permet d'associer, à toute courbe de bord orientée a d'un pantalon $\Pi \in \mathscr{P}$, un élément privilégié de $\pi_1(\Pi)$ dans la classe de conjugaison définie par a. Si $\Pi^+ \in \mathscr{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathscr{P}^-$ sont adjacents le long de a, on peut orienter a et les autres courbes de bord $b^\pm, c^\pm$ comme à la figure 3, droite, de sorte que les éléments correspondants de $\pi_1(\Pi^\pm)$ (notés par les mêmes lettres) vérifient $c^+b^+a = 1$ et $c^-b^-a = 1$.

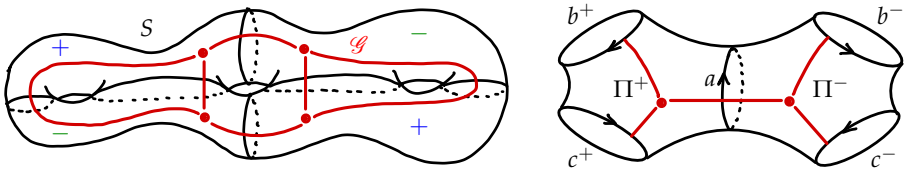


Figure 3 – À gauche : décomposition en pantalons bipartie de S avec un graphe associé $\mathscr{G}$; à droite : configuration de deux pantalons adjacents

Soient $a_1, \ldots, a_{3g-3}$ les courbes de bord de la décomposition en pantalons $\mathscr{P}$. À toute représentation injective et discrète ϱ de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, on peut associer une *structure hyperbolique marquée* sur S, ce qui définit $6g-6$ invariants (*cf.* Hubbard, 2006, § 7.6), à savoir, pour tout $i \in \{1, \ldots, 3g-3\}$,

- ▷ la longueur du représentant géodésique de la courbe de bord a_i pour la structure hyperbolique sur S définie par ϱ, c'est-à-dire la longueur de translation dans $\mathbb{H}^2$ de $\varrho(\alpha_i)$ où $\alpha_i \in \pi_1(S)$ correspond à a_i ;
- ▷ un « paramètre de décalage » au niveau de a_i, qui reflète le fait que l'on peut changer la structure hyperbolique marquée en faisant « tourner » l'un des deux pantalons adjacents à a_i par rapport à l'autre.

Les $3g-3$ longueurs peuvent prendre n'importe quelles valeurs strictement positives, et les $3g-3$ paramètres de décalage n'importe quelles valeurs réelles, lorsque ϱ varie parmi les représentations injectives et discrètes de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Un résultat classique de Fenchel et Nielsen affirme que ces $6g-6$ invariants paramètrent complètement l'espace de Teichmüller de S, c'est-à-dire l'espace des structures hyperboliques marquées sur S, ou de manière équivalente l'espace des représentations injectives et discrètes de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ modulo conjugaison au but par $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$.

L'idée de Kahn et Marković (2012) est de considérer le cas particulier suivant : pour $R > 0$, on dit qu'une représentation injective et discrète $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est *R-parfaite* si les $3g-3$ longueurs des courbes de bord sont toutes égales à $2R$ et les $3g-3$ paramètres de décalage sont tous égaux à 1 (voir le paragraphe 4.6.1 pour une interprétation en termes de pavages de $\mathbb{H}^2$ par des hexagones à angles droits). La valeur précise 1 n'a pas d'importance particulière : ce qui compte est de choisir une valeur non nulle, ce qui rend vrai le fait important suivant (*cf.* Kahn et Marković, 2012, Lem. 2.7).

Fait 3.1. *Le diamètre de S munie d'une structure hyperbolique R-parfaite (c'est-à-dire le diamètre de $\varrho_R(\pi_1(S))\backslash\mathbb{H}^2$) est uniformément borné lorsque R tend vers l'infini.*

3.2. Bref résumé de l'approche de Kahn et Marković

Soient Γ un réseau cocompact de $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^3$ la variété hyperbolique compacte de dimension trois correspondante. Afin de répondre affirmativement aux questions 1.1, 1.8 et 1.9, Kahn et Marković (2012) construisent, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε :

- ▷ une surface compacte S de genre au moins deux munie d'une décomposition en pantalons bipartie et d'un graphe fini comme au paragraphe 3.1 ;
- ▷ une immersion $f : S \to M$ envoyant chaque pantalon de S sur une sous-surface de M dont les courbes de bord sont des géodésiques de longueurs complexes ε-proches de $2R$, avec des paramètres de décalage (ε/R)-proches de 1

(ces longueurs complexes et paramètres de décalage sont des généralisations naturelles des notions correspondantes du paragraphe 3.1, *cf.* Bergeron, 2013, § 2).

L'immersion f induit un morphisme de groupes $\rho : \pi_1(S) \to \pi_1(M) \simeq \Gamma$. Soit $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ une représentation R-parfaite au sens du paragraphe 3.1. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, Kahn et Marković montrent, grâce aux conditions sur l'immersion f (longueurs de bord et paramètres de décalage), qu'elle induit une application de bord (ϱ_R, ρ)-équivariante de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui est $(1 + C\varepsilon)$-quasi-symétrique, pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de ε. En particulier, pour ε assez petit et R assez grand par rapport à ε, la représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ est injective et son image est « proche » d'être fuchsienne.

La même stratégie est utilisée par Kahn et Marković (2015) pour démontrer la conjecture d'Ehrenpreis (1970) du paragraphe 1.3.2. En effet, considérons deux surfaces de Riemann compactes de genre au moins deux, vues comme des surfaces hyperboliques $\Gamma_1\backslash\mathbb{H}^2$ et $\Gamma_2\backslash\mathbb{H}^2$ via le théorème d'uniformisation. Appliquée à $M = \Gamma_i\backslash\mathbb{H}^2$ pour $i \in \{1,2\}$, la stratégie ci-dessus donne, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε, une surface compacte S_i de genre au moins deux, une représentation $\rho_i : \pi_1(S_i) \to \pi_1(M) = \Gamma_i$, une représentation R-parfaite $\varrho_{R,i} : \pi_1(S_i) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et une application de bord $(\varrho_{R,i}, \rho_i)$-équivariante de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans lui-même qui est $(1 + C\varepsilon)$-quasi-symétrique, pour une certaine constante $C > 0$ indépendante de ε. Pour ε assez petit, la représentation ρ_i est injective, ce qui implique que $\rho_i(\pi_1(S_i))\backslash\mathbb{H}^2$ est un revêtement fini de $\Gamma_i\backslash\mathbb{H}^2$. Ce revêtement est quasi-conforme à une surface hyperbolique compacte R-parfaite, avec une constante de quasi-conformité bien contrôlée. La conjecture d'Ehrenpreis s'en déduit.

Notons que l'idée de construire des revêtements de surfaces hyperboliques compactes à l'aide de pantalons immergés bien recollés remonte à Bowen (2004).

3.3. Étape géométrique : conditions suffisantes d'injectivité pour les représentations de groupes de surface

Expliquons à présent comment l'approche de Kahn–Marković a été généralisée par Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes pour démontrer le théorème principal et les théorèmes 2.4 et 2.17.

Soit S une surface compacte connexe orientée munie d'une décomposition en pantalons bipartie $\mathscr{P} = \mathscr{P}^+ \sqcup \mathscr{P}^-$ et d'un graphe fini $\mathscr{G}$ comme au paragraphe 3.1. Soient G un groupe de Lie semi-simple et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ un plongement.

Au paragraphe 3.1 nous avons vu une notion de représentation R-parfaite de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Pour une telle représentation $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et pour des pantalons $\Pi^+ \in \mathscr{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathscr{P}^-$, on dira que la restriction de $\tau \circ \varrho_R$ à $\pi_1(\Pi^+)$ est une représentation *R-parfaite* à valeurs dans G et que la restriction de $\tau \circ \varrho_R$ à $\pi_1(\Pi^-)$ est une représentation *$(-R)$-parfaite* à valeurs dans G. [5]

[5] Cette terminologie reflète les orientations opposées considérées sur Π^+ et Π^-, *cf.* figure 3, droite.

Étendant l'approche de Kahn–Marković (paragraphe 3.2) à des groupes G plus généraux que $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, Hamenstädt et Kahn–Labourie–Mozes ont introduit, pour $\varepsilon, R > 0$, les notions suivantes :

- ▷ pour $\Pi \in \mathscr{P}$, une notion de *représentation* $(\varepsilon, \pm R)$*-presque parfaite* de $\pi_1(\Pi)$ dans G, à valeurs dans Γ : il s'agit d'une représentation qui est « proche à ε près » d'un conjugué d'une représentation $(\pm R)$-parfaite à valeurs dans G, ce qui se traduit par l'existence d'une bonne *donnée géométrique* associée à la représentation, décrivant une situation proche de celle du paragraphe 3.1 ;
- ▷ pour des pantalons $\Pi^+ \in \mathscr{P}^+$ et $\Pi^- \in \mathscr{P}^-$ adjacents le long d'une courbe de bord a, et pour des représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites $\rho^\pm : \pi_1(\Pi^\pm) \to \Gamma$ telles que $\rho^+(a) = \rho^-(a)$, une notion pour ρ^+ et ρ^- d'être *ε-bien recollées* le long de a via leurs données géométriques : cela signifie qu'elles « diffèrent à ε près par un décalage hyperbolique de 1 » comme à la figure 10 (*cf.* paragraphe 4.6.1), le long d'une copie de $\mathbb{H}^2$ induite par τ.

Les données géométriques sont exprimées en termes d'éléments de $\Gamma\backslash G$, vus comme des « repères de direction τ » dans l'espace tangent à l'espace localement symétrique $\Gamma\backslash G/K$ (pour Hamenstädt) ou comme des raffinements de triplets de points sur un même τ-cercle dans la variété de drapeaux G/P_τ, modulo l'action de Γ (pour Kahn, Labourie et Mozes). Les orbites de ces éléments par le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\Gamma\backslash G$ correspondant à la multiplication à droite par $\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2}\end{smallmatrix}\right)\right)$ doivent « presque » se refermer modulo l'application de certaines symétries (inversion ou rotation d'ordre trois) : *cf.* figure 8, paragraphes 4.1–4.2.

Une observation importante est que l'ensemble des classes de conjugaison de représentations (ε, R)-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans le groupe discret Γ est fini. Cela résulte du fait (*cf.* corollaire 4.13.(2)) que si $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$ où a, b, c correspondent aux courbes de bord de Π, alors une telle représentation envoie, à conjugaison près, le triplet (a, b, c) sur un triplet d'éléments de Γ proche de

$$\tau\left(\begin{pmatrix} e^{R/2} & 0 \\ 0 & e^{-R/2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} - e^{R/2} \\ 0 & e^{R/2}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{-R/2} & 0 \\ e^{R/2} - e^{-R/2} & e^{R/2}\end{pmatrix}\right) \in G^3.$$

Un raisonnement analogue vaut pour les représentations $(\varepsilon, -R)$-presque parfaites.

La donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite n'est pas unique, mais varie dans un espace continu (compact).

La première étape de la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17 consiste à donner les conditions suffisantes suivantes pour qu'une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ soit injective (et donc que son image soit un sous-groupe de Γ isomorphe à $\pi_1(S)$).

Proposition 3.2. *Dans le cadre du théorème 2.4, ou plus généralement dans le cadre 2.16, soient Γ un réseau cocompact irréductible de G et S une surface compacte munie d'une décomposition en pantalons bipartie $\mathscr{P} = \mathscr{P}^+ \sqcup \mathscr{P}^-$ et d'un graphe fini $\mathscr{G}$ comme au paragraphe 3.1. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε, si une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ vérifie que*

1. *pour tout $\Pi^\pm \in \mathscr{P}^\pm$, la restriction de ρ à $\pi_1(\Pi^\pm)$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaite, et*
2. *on peut choisir les données géométriques associées de sorte que pour toute paire $(\Pi^+, \Pi^-) \in \mathscr{P}^+ \times \mathscr{P}^-$ de pantalons adjacents, les restrictions de ρ à $\pi_1(\Pi^+)$ et à $\pi_1(\Pi^-)$ soient (ε/R)-bien recollées,*

alors ρ est injective.

Dans la version de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018), les auteurs montrent de plus que ρ admet une application de bord (δ, τ)-sullivannienne de paramètre δ arbitrairement petit : *cf.* proposition 4.19.

Dans la version de Hamenstädt (2015, 2021), les conditions de $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque perfection et de (ε/R)-bon recollement dans la proposition 3.2 sont remplacées par des conditions plus simples mais plus fortes de $(e^{-\kappa R}, \pm R)$-presque perfection et de $e^{-\kappa R}$-bon recollement, où $\kappa > 0$ est une constante indépendante de R.

3.3.1. *Injectivité selon Hamenstädt (2015, 2021).* — Soient G/K l'espace riemannien symétrique de G, où K est un sous-groupe compact maximal de G, et $M = \Gamma\backslash G/K$ l'espace localement symétrique compact associé à Γ. Soit $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ une représentation vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 3.2 pour $R > 0$ assez grand.

Pour montrer que ρ est injective, Hamenstädt suit une approche géométrique : à partir d'une structure hyperbolique R-parfaite sur S (*cf.* paragraphe 3.1) et des données géométriques des restrictions de ρ aux $\pi_1(\Pi)$ pour $\Pi \in \mathscr{P}$, elle construit :

- ▷ une surface S' homéomorphe à S, découpée en un nombre fini de « morceaux » (triangles, bandes ou anneaux), chaque morceau étant muni d'une structure hyperbolique ou euclidienne pour laquelle son bord est géodésique ;
- ▷ une application continue $f : S' \to M$, de morphisme induit $\rho = f_* : \pi_1(S) = \pi_1(S') \to \pi_1(M) = \Gamma$, qui est une immersion en restriction à chaque morceau ; elle se relève en une immersion par morceaux continue ρ-équivariante $\widetilde{f} : \widetilde{S'} \to G/K$.

La surface S' est obtenue à partir de la surface hyperbolique R-parfaite S en rajoutant, au niveau de chaque courbe de bord entre pantalons adjacents de $\mathscr{P}$, un fin anneau euclidien (réduit à un cercle lorsque G est de rang réel un). Les « morceaux » sont ces anneaux et, pour chaque pantalon de $\mathscr{P}$, deux triangles équilatéraux (dont le diamètre est borné lorsque R tend vers l'infini) et trois bandes hyperboliques (dont la longueur est proche de R) qui partitionnent le pantalon : *cf.* figure 4. La condition (1)

de la proposition 3.2 permet de construire f de sorte que sa restriction à chaque morceau soit presque isométrique, et la condition (2) de sorte que les angles de recollements soient proches de π et que les décalages entre pantalons soient proches de décalages hyperboliques de longueur 1 comme au paragraphe 3.1.

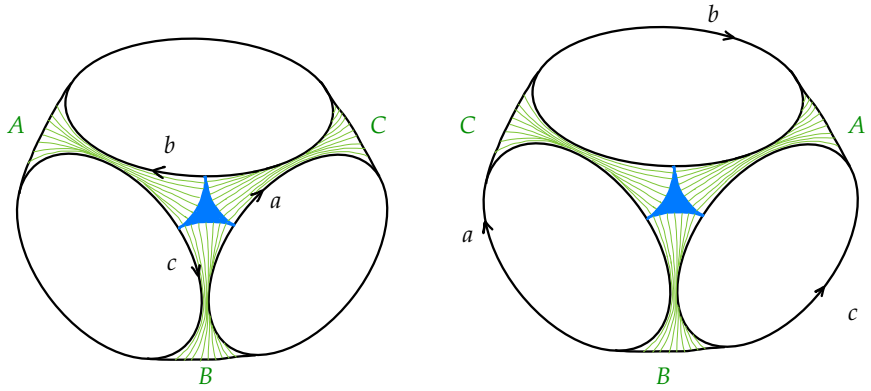


Figure 4 – Découpage d'un pantalon hyperbolique en deux triangles équilatéraux et trois bandes A, B, C (vues de devant et de derrière)

L'application $\widetilde{f}$ définit une métrique des chemins $\pi_1(S')$-invariante sur $\widetilde{S}'$: par définition, la distance entre deux points x, y de $\widetilde{S}'$ est la borne inférieure des longueurs, dans G/K, des images par $\widetilde{f}$ de chemins de x à y dans $\widetilde{S}'$. Cette borne inférieure est en fait un minimum : l'espace métrique $\widetilde{S}'$ est géodésique par le théorème de Hopf–Rinow. Par un contrôle fin de la géométrie de l'immersion par morceaux, Hamenstädt montre, pour $R > 0$ suffisamment grand, que l'on peut trouver, pour toute droite géodésique $\mathscr{L}$ de $\widetilde{S}'$, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de points de $\mathscr{L}$ tels que

- ▷ la distance dans $\widetilde{S}'$ entre x_n et x_{n+1} soit uniformément majorée,
- ▷ la distance dans G/K entre $\widetilde{f}(x_n)$ et $\widetilde{f}(x_{n+1})$ soit uniformément minorée,
- ▷ l'angle entre $[\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x_{n-1})]$ et $[\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x_{n+1})]$ soit suffisamment proche de π,
- ▷ la direction de $[\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(x_{n+1})]$ soit suffisamment proche de la direction régulière $\mathsf{h} = \mathrm{d}\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)\right) \in \mathfrak{a}^+$.

(On note ici $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl d'un sous-espace de Cartan $\mathfrak{a}$ comme au paragraphe 2.3.1. Rappelons que tout segment orienté $[z_1, z_2]$ dans G/K est de la forme $[gK, g\exp(\mathsf{h}')K]$ où $g \in G$ et $\mathsf{h}' \in \mathfrak{a}^+$; l'élément h' modulo $\mathbb{R}_+^*$ est la *direction* de $[z_1, z_2]$.)

Un résultat de Kapovich, Leeb et Porti (2014, Th. 7.2 & Cor. 7.13) (« lemme de Morse ») implique alors que le chemin géodésique par morceaux $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[f(x_n), f(x_{n+1})]$ est une quasi-géodésique de G/K, à distance bornée d'un plat de G/K. En appliquant ceci à une droite géodésique $\mathscr{L}$ invariante par $\gamma \in \pi_1(S) \smallsetminus \{1\}$, on voit que la représentation ρ est injective. En fait, le lemme de Morse donne une uniformité sur les quasi-géodésiques, ce qui permet de voir que ρ est P_τ-anosovienne au sens du paragraphe 1.4.

3.3.2. *Injectivité selon* Kahn, Labourie *et* Mozes *(arXiv 2018).* — Soit G/P_τ la variété de drapeaux associée à τ, comme aux paragraphes 1.4, 2.1 et 2.2.3. Pour démontrer la proposition 3.2 et son raffinement (proposition 4.19), Kahn, Labourie et Mozes observent que, grâce à la condition (1), pour tout $\gamma \in \pi_1(S)$ correspondant à une courbe de bord d'un pantalon de $\mathscr{P}$, l'élément $\rho(\gamma) \in G$ admet un unique point fixe attractif dans G/P_τ (corollaire 4.13.(1)) ; on a donc une application (ϱ_R, ρ)-équivariante naturelle d'un sous-ensemble dense de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers G/P_τ, qui au point fixe attractif dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de $\varrho_R(\gamma)$ associe le point fixe attractif dans G/P_τ de $\rho(\gamma)$. Ils utilisent alors la condition (2) pour montrer que cette application se prolonge en une application (ϱ_R, ρ)-équivariante *continue* $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, avec un contrôle suffisant pour établir qu'à $\delta > 0$ petit fixé, l'application ξ est (δ, τ)-sullivannienne (définition 2.9) dès que $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. La proposition 2.12.(2a) assure alors que ρ est P_τ-anosovienne au sens du paragraphe 1.4, donc injective. Voir la partie 4 pour plus de détails.

3.4. Étape dynamique

La deuxième étape de la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17 consiste à établir les propriétés d'existence suivantes, qui font intervenir les notions du paragraphe 3.3.

Proposition 3.3. *Dans le cadre 2.16, soit Γ un réseau cocompact irréductible de G, et soient Π^+ et Π^- deux pantalons adjacents le long d'une courbe de bord a comme à la figure 3, droite. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε,*

1. *il existe des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ ;*
2. *pour toute donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite de $\pi_1(\Pi^+)$ dans Γ, on peut trouver une donnée géométrique associée à une représentation $(\varepsilon/R, -R)$-presque parfaite de $\pi_1(\Pi^-)$ dans Γ de sorte que les représentations soient $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de a via ces données géométriques.*

On peut quantifier le point (2) en utilisant des mesures sur un espace continu $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,\pm R}$ qui paramètre, dans chacune des approches de Hamenstädt (2015, 2021) ou de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018), les données géométriques des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ modulo conjugaison.

Proposition 3.4. *Dans le cadre de la proposition 3.3,*

(2)′ *il existe des mesures $\mu_{\varepsilon,R}$ sur $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R}$ et $\mu_{\varepsilon,-R}$ sur $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,-R}$, de même masse totale, telles que pour tout sous-ensemble mesurable A de $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de A soit de $(\mu_{\varepsilon,-R})$-mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon,R}(A)$.*

Dans la partie 5, nous détaillons la démonstration des propositions 3.3 et 3.4 en suivant l'approche développée par Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). La démonstration de Hamenstädt est analogue, mais avec un formalisme un peu différent, dû à sa définition différente des données géométriques.

Dans les deux approches, et déjà chez Kahn et Marković (2012), la démonstration repose crucialement sur la propriété de mélange suivante, appliquée à $\mathsf{h}' = \mathsf{h}$ comme au cadre 2.16. Cette propriété, classique, provient de la décroissance exponentielle des coefficients matriciels des représentations tempérées (*cf.* la partie 4 de Bergeron, 2013 ou l'appendice B de Kahn, Labourie et Mozes, arXiv 2018).

Fait 3.5. *Soient $\mathfrak{a}$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$ comme au paragraphe 2.3.1 et Γ un réseau irréductible de G. Pour tout $\mathsf{h}' \in \mathfrak{a}$, le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\Gamma\backslash G$ donné par la multiplication à droite par $\exp(t\mathsf{h}')$ est exponentiellement mélangeant : il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C, q > 0$ tel que pour toutes fonctions $\psi, \theta \in C^k(\Gamma\backslash G, \mathbb{R})$ et tout $R > 0$,*

$$\left| \int_{[g]\in\Gamma\backslash G} \psi([g])\,(\theta\circ\varphi_R)([g])\,\mathrm{d}[g] - \left(\int_{\Gamma\backslash G}\psi\right)\left(\int_{\Gamma\backslash G}\theta\right)\right| \leqslant Ce^{-qR}\,\|\psi\|_{C^k}\,\|\theta\|_{C^k}.$$

Kahn et Marković (2012), Hamenstädt (2015), et Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) n'ont en fait pas besoin du mélange exponentiel (décroissance en e^{-qR}), seulement d'un mélange polynomial (décroissance en $1/R^\ell$ pour un certain $\ell \geqslant 2$).

3.5. Étape combinatoire

Pour conclure la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17, il s'agit de prendre les représentations de groupes de pantalons $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites $(C\varepsilon/R)$-bien recollées des propositions 3.3 et 3.4, avec les données géométriques appropriées correspondantes, et de montrer qu'on peut les agencer de manière adéquate pour obtenir une représentation d'une surface *compacte* S, avec une décomposition en pantalons bipartie et un graphe fini associé, vérifiant les hypothèses de la proposition 3.2. Pour cela, Kahn et Marković (2012) et Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018) utilisent le lemme classique suivant (*cf.* la remarque 6.1 pour l'approche de Hamenstädt).

Fait 3.6 (Lemme des mariages de Hall, 1935). *Soient $\mathscr{E}^+$ et $\mathscr{E}^-$ deux ensembles finis de même cardinal et $\mathscr{M} \subset \mathscr{E}^+ \times \mathscr{E}^-$ un sous-ensemble. Alors il existe une bijection $\psi : \mathscr{E}^+ \to \mathscr{E}^-$ telle que $(x, \psi(x)) \in \mathscr{M}$ pour tout $x \in \mathscr{E}^+$ dès que la condition suivante est vérifiée :*

$$\forall A \subset \mathscr{E}^+, \qquad \#\bigcup_{x\in A}\{y \in \mathscr{E}^- \mid (x,y) \in \mathscr{M}\} \geqslant \#A. \tag{3.1}$$

On pense à $\mathscr{M}$ comme à l'ensemble des mariages possibles entre éléments de $\mathscr{E}^+$ et de $\mathscr{E}^-$. La condition (3.1) dit que pour tout sous-ensemble A de $\mathscr{E}^+$, il existe au moins $\#A$ éléments de $\mathscr{E}^-$ avec la propriété de pouvoir être marié à au moins un élément de A.

Dans notre contexte, $\mathscr{E}^{\pm}$ sera un ensemble fini obtenu en prenant certaines données géométriques de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-parfaites de groupes de pantalons, avec certaines multiplicités bien choisies données par les mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 3.4, et $\mathscr{M}$ correspondra à l'ensemble des paires $(C\varepsilon/R)$-bien recollées : *cf.* paragraphe 6.3. La bijection ψ du lemme des mariages permet de construire un graphe fini biparti trivalent $\mathscr{G}$ de sommets $\mathscr{P} = \mathscr{P}^+ \sqcup \mathscr{P}^-$ de la manière suivante : les sommets $\mathscr{P}^{\pm}$ sont obtenus en prenant le quotient de $\mathscr{E}^{\pm}$ par la transformation d'ordre trois correspondant à la permutation cyclique des courbes de bord (*cf.* (6.1)) ; pour tout $x \in \mathscr{E}^+ \sqcup \mathscr{E}^-$, on relie la classe de x et celle de $\psi(x)$ par une arête. En épaississant ce graphe, on obtient une surface compacte S avec une décomposition en pantalons bipartie étiquetée par $\mathscr{P}$ et, pour tout pantalon $\Pi^{\pm}$ correspondant à un élément de $\mathscr{P}^{\pm}$, une classe de conjugaison de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^{\pm})$ dans Γ ; de plus, les classes de deux pantalons adjacents admettent des représentants $(C\varepsilon/R)$-bien recollés. On en déduit (*cf.* lemme 6.3) une représentation ρ de $\pi_1(S)$ dans Γ à laquelle la proposition 3.2 s'applique, et qui est donc injective.

4. Étape géométrique

Dans cette partie, nous présentons les notions de Kahn, Labourie et Mozes de *représentation (ε, R)-presque parfaite* d'un groupe de pantalon (paragraphe 4.2) et de représentations *ε-bien recollées* (paragraphe 4.5). Nous donnons les grandes lignes de leur démonstration de la proposition 4.19 ci-dessous, qui est une version plus précise de la proposition 3.2, faisant intervenir la notion d'application sullivannienne du paragraphe 2.2.

Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.16 ; la condition (R) du paragraphe 2.3.2 n'a pas besoin d'être satisfaite. On fixe un réseau cocompact irréductible Γ de G et un sous-groupe compact maximal K de G contenant $\tau(\mathrm{PSO}(2))$.

4.1. Préliminaires : τ-triangles et tripodes

4.1.1. *τ-triangles.* — Rappelons que le groupe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ agit simplement transitivement sur (et donc s'identifie à) l'ensemble $\mathscr{T}$ des triplets de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Ainsi, tout élément de $\mathscr{T}$ est de la forme $h \cdot (0, \infty, -1)$ où $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est unique. (L'ensemble $\mathscr{T}$ s'identifie également à l'ensemble des repères de $\mathbb{H}^2$ (où un repère est par définition une base orthonormée positivement orientée d'un espace tangent $T_x\mathbb{H}^2$ où $x \in \mathbb{H}^2$), ainsi qu'au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$ de $\mathbb{H}^2$.)

Comme au paragraphe 2.2.1, le plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ induit un plongement τ-équivariant $\underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow G/P_\tau$. On note encore $\underline{\tau}$ le plongement induit de $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^n$ dans $(G/P_\tau)^n$ pour $n \geqslant 2$. La G-orbite de $\underline{\tau}(0,\infty)$ (pour l'action diagonale

de G) est un ouvert dense de $(G/P_\tau)^2$ formé des couples de points dits *transverses*, ou encore en position générique.

Définition 4.1. Un *τ-triangle de G/P_τ* est un triplet de points deux à deux transverses de G/P_τ de la forme $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ où $g \in G$.

Notons que $g \cdot \underline{\tau}(T)$ est un τ-triangle pour tout $g \in G$ et tout $T \in \mathscr{T}$, par équivariance de $\underline{\tau}$. Un τ-triangle détermine de manière unique un τ-cercle $g \circ \underline{\tau} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ au sens du paragraphe 2.2.1.

Par définition, le groupe G agit transitivement sur l'espace des τ-triangles de G/P_τ. Le stabilisateur de $\underline{\tau}(0, \infty, -1)$ est le centralisateur Z^τ de $\mathrm{d}\tau(\mathfrak{psl}(2, \mathbb{R}))$ dans G (supposé compact, *cf.* cadre 2.16). Ainsi, $[g] \mapsto g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ est une bijection G-équivariante entre G/Z^τ et l'espace des τ-triangles de G/P_τ.

Remarque 4.2. L'espace des τ-triangles de G/P_τ est en général strictement inclus dans l'espace des triplets ordonnés de points deux à deux transverses de G/P_τ. Par exemple, pour $G = \mathrm{PSL}(n, \mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible, ces espaces sont de dimensions complexes respectives $(n+1)(n-1)$ et $3n(n-1)/2$.

4.1.2. *Tripodes.* — Afin de définir les représentations (ε, R)-presque parfaites, on a besoin d'objets un peu plus précis que les τ-triangles de G/P_τ, qui soient paramétrés par G plutôt que G/Z^τ. Pour cela, Kahn, Labourie et Mozes introduisent une notion de *tripode*, qui est par définition un isomorphisme d'une copie abstraite G_0 du groupe G vers G ou, de manière équivalente, un automorphisme de G. En réalité, pour démontrer les théorèmes 2.4 et 2.17 il n'est pas nécessaire de considérer tous les automorphismes de G : les automorphismes intérieurs (donnés par la conjugaison par un élément de G) suffisent. Dans la suite de cet exposé, nous travaillerons donc directement avec le groupe G plutôt qu'avec les tripodes de Kahn, Labourie et Mozes.

4.1.3. *Transformations.* — Kahn, Labourie et Mozes considèrent les transformations suivantes de l'espace G/Z^τ des τ-triangles de G/P_τ (*cf.* figure 5) :

- ▷ l'involution inv (« inversion ») qui envoie $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(\infty, 0, 1)$; elle correspond dans G/Z^τ à la multiplication à droite par $\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$;
- ▷ le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ qui envoie $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -e^t)$; il correspond dans G/Z^τ à la multiplication à droite par $\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{smallmatrix}\right)\right)$;
- ▷ la transformation rot (« rotation ») d'ordre trois qui envoie $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(\infty, -1, 0)$; elle correspond dans G/Z^τ à la multiplication à droite par $\tau\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

Ces transformations se relèvent en des transformations de G, encore notées inv, φ_t et rot, données par la multiplication à droite par les mêmes éléments. Elles commutent avec l'action de G par multiplication à gauche (que nous noterons parfois avec un point pour éviter toute confusion : $g_1 \cdot g_2 := g_1 g_2$).

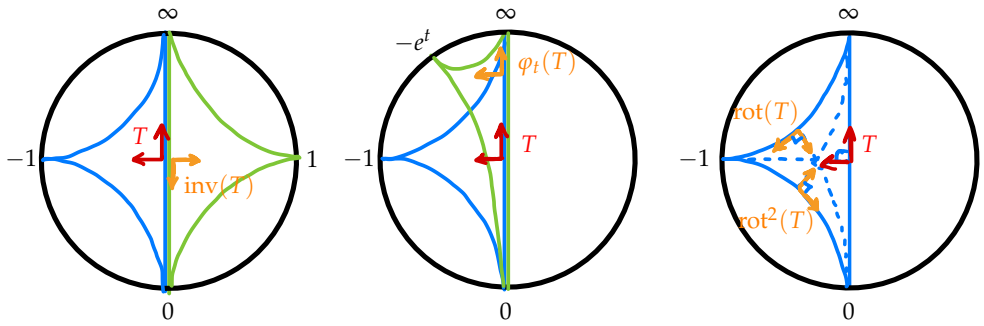


FIGURE 5 – Les transformations inv, φ_t et rot de G/Z^τ proviennent de transformations inv, φ_t et rot de $\mathscr{T} \simeq \{\text{repères de } \mathbb{H}^2\}$ représentées ici ; en identifiant $\mathscr{T}$ au fibré unitaire tangent $T^1\mathbb{H}^2$, le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ s'identifie au flot géodésique

4.1.4. *Points de vue équivalents.* — Le plongement $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ induit un plongement τ-équivariant $\underline{\tau} : \mathbb{H}^2 \hookrightarrow G/K$. On appellera *$\tau$-copie de* $\mathbb{H}^2$ une surface totalement géodésique de G/K de la forme $g \cdot \underline{\tau}(\mathbb{H}^2)$ où $g \in G$. Il est facile de voir (en utilisant par exemple la condition des *systèmes de triplets de Lie*, *cf.* HELGASON, 2001, Ch. IV, § 7) que toute surface totalement géodésique de G/K est soit contenue dans un plat, soit égale à une τ'-copie de $\mathbb{H}^2$ pour un certain plongement τ' de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ (ou $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$) dans G.

Les objets suivants s'identifient de manière G-équivariante :

- ▷ les τ-triangles de G/P_τ,
- ▷ les triplets ordonnés de points du bord visuel de l'espace symétrique G/K, correspondant à trois rayons géodésiques de G/K contenus dans une même τ-copie de $\mathbb{H}^2$, incidents en un point, et formant des angles de $2\pi/3$ en ce point,
- ▷ les triangles idéaux de τ-copies de $\mathbb{H}^2$ dans G/K,
- ▷ les repères de τ-copies de $\mathbb{H}^2$.

Chacune de ces classes d'objets est paramétrée par G/Z^τ où Z^τ est compact.

Là où Kahn, Labourie et Mozes travaillent avec les τ-triangles de G/P_τ, Hamenstädt travaille avec les repères de τ-copies de $\mathbb{H}^2$. Là où Kahn, Labourie et Mozes travaillent avec les tripodes, Hamenstädt travaille avec les « τ-repères de G/K », c'est-à-dire avec une G-orbite de repères $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ de G/K obtenus en complétant des repères (v_1, v_2) de τ-copies de $\mathbb{H}^2$, telle que le stabilisateur de cette G-orbite est trivial.

4.2. Représentations presque parfaites selon Kahn, Labourie et Mozes

4.2.1. *Intuition géométrique.* — Pour tout élément hyperbolique $\alpha \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, on note $\alpha^{\oplus}$ (resp. $\alpha^{\ominus}$) son point fixe attractif (resp. répulsif) dans $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$, où a, b, c correspondent aux courbes de bord de Π. Pour $R > 0$, soit $\varrho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ une représentation *R-parfaite* (resp. *$(-R)$-parfaite*) comme au paragraphe 3.1, c'est-à-dire l'holonomie d'une structure hyperbolique sur Π pour laquelle les trois courbes de bord sont de longueur $2R$ et les points fixes $\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(a)^{\oplus}, \varrho(b)^{\ominus}, \varrho(b)^{\oplus}$, $\varrho(c)^{\ominus}, \varrho(c)^{\oplus} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont dans un ordre cyclique positif (resp. négatif). Considérons les éléments suivants de l'espace $\mathscr{T}$ des triplets de points deux à deux distincts positivement orientés de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} T := (\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}), \\ T' := (\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b^{-1}a^{-1})^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}) \end{cases} \quad \left(\text{resp. } \begin{cases} T := (\varrho(b)^{\ominus}, \varrho(a)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}), \\ T' := (\varrho(b^{-1}a^{-1})^{\ominus}, \varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}) \end{cases}\right).$$

Les éléments $T, T' \in \mathscr{T}$ correspondent à des triangles idéaux de $\mathbb{H}^2$ qui se projettent en des triangles idéaux de Π, d'intérieurs disjoints, dont les côtés s'enroulent autour des courbes de bord et qui remplissent tout Π, comme à la figure 6.

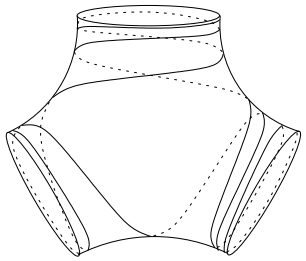


Figure 6 – Décomposition d'un pantalon hyperbolique en deux triangles idéaux dont les côtés s'enroulent autour des courbes de bord

Adoptons la terminologie suivante, où rot, inv et φ_t sont les transformations introduites au paragraphe 4.1.3, et où les signes $\pm$ sont pris tous égaux à $+$ si la représentation est R-parfaite, et tous égaux à $-$ si elle est $(-R)$-parfaite.

Définition 4.3. Un élément $\alpha \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est *$(\pm R)$-réalisé* par un couple (T_1, T_2) d'éléments de $\mathscr{T}^2$ si $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(T_1) = T_2$ et $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(T_2) = \alpha \cdot T_1$.

On vérifie alors (*cf.* figure 7) que pour (T, T') comme ci-dessus,

$$\begin{cases} \varrho(a) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } (T, T'), \\ \varrho(b) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } (\mathrm{rot}^{\pm 1}(T), \varrho(b) \cdot (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(T')), \\ \varrho(c) \text{ est } (\pm R)\text{-réalisé par } ((\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(T), \varrho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}^{\pm 1}(T')). \end{cases} \tag{4.1}$$

Une représentation $\varrho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est $(\pm R)$-parfaite si et seulement s'il existe $(T, T') \in \mathscr{T}^2$ vérifiant ces conditions.

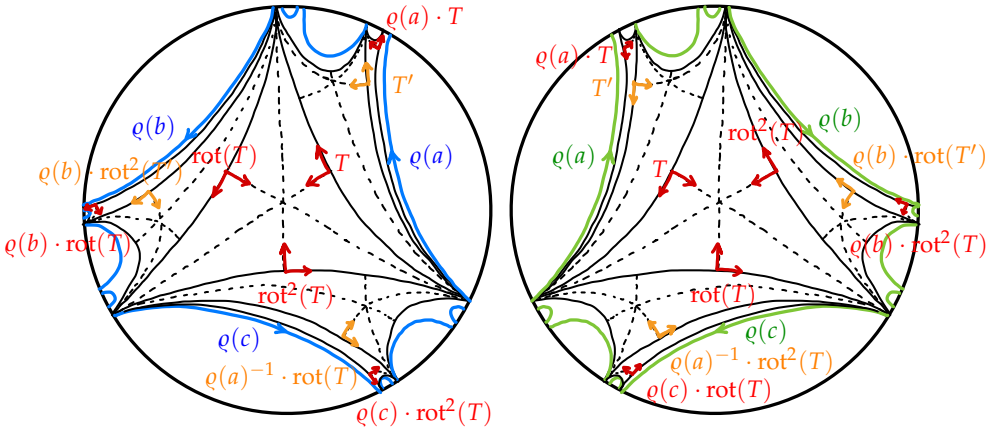


FIGURE 7 – Représentations R-parfaite (à gauche) et $(-R)$-parfaite (à droite)

Remarque 4.4. Si α est $(\pm R)$-réalisé par (T, T') au sens de la définition 4.3 et si l'on voit T comme un élément de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, alors $T^{-1}\alpha\, T$ est égal à $\left(\begin{smallmatrix} e^R & 0 \\ 1+e^{-R} & e^{-R}\end{smallmatrix}\right)$ (resp. $\left(\begin{smallmatrix} e^{-R} & 1+e^{-R} \\ 0 & e^R\end{smallmatrix}\right)$). En particulier, α est hyperbolique de longueur de translation $2R$, et ses points fixes répulsif et attractif vérifient que $T^{-1}\cdot\alpha^{\ominus} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est égal à 0 (resp. ∞), et $T^{-1}\cdot\alpha^{\oplus} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est proche de ∞ (resp. 0) pour R grand.

Ainsi, lorsque R tend vers 0, les points $\varrho(a)^{\oplus}, \varrho(b)^{\oplus}, \varrho(c)^{\oplus}$ d'une représentation $(\pm R)$-parfaite $\varrho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tendent respectivement vers $\varrho(a)^{\ominus}, \varrho(b)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}$; autrement dit, $\varrho(a), \varrho(b), \varrho(c) \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tendent vers des éléments paraboliques. Lorsque R tend vers $+\infty$, les points $\varrho(a)^{\oplus}, \varrho(b)^{\oplus}, \varrho(c)^{\oplus}$ d'une représentation $(\pm R)$-parfaite $\varrho : \pi_1(\Pi) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ tendent respectivement vers $\varrho(b)^{\ominus}, \varrho(c)^{\ominus}, \varrho(a)^{\ominus}$ (*cf.* figure 7).

Remarque 4.5. Les représentations R-parfaites de $\pi_1(S)$ dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ sont les images des représentations $(-R)$-parfaites par la conjugaison par un élément de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{R})$ qui renverse l'orientation de $\mathbb{H}^2$.

4.2.2. *Représentations presque parfaites à valeurs dans G.* — Munissons G d'une métrique riemannienne invariante par multiplication à gauche par G (pour cela, on choisit une forme quadratique définie positive sur $\mathfrak{g}$ et on la pousse en avant par G). Quitte à la remplacer par sa moyenne par le groupe d'ordre trois engendré par rot, on suppose cette métrique également invariante par rot. On note d_G la distance correspondante.

On a une notion naturelle de représentation $(\pm R)$-*parfaite* de $\pi_1(\Pi)$ dans G, à savoir la composition d'une représentation $(\pm R)$-parfaite à valeurs dans $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ au sens ci-dessus, avec $g\,\tau(\cdot)\,g^{-1} : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ où $g \in G$. La caractérisation (4.1) permet d'affaiblir cette notion de la manière suivante.

Définition 4.6. Soient $\varepsilon, R > 0$. On dit qu'un élément $\alpha \in G$ est $(\varepsilon, \pm R)$-*presque réalisé* par un couple $(g, g') \in G^2$ s'il existe $(h, h') \in G^2$ vérifiant les quatre conditions suivantes :

$$\begin{aligned} d_G(g,h) < \varepsilon, \quad & d_G(\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(h), g') < \varepsilon, \\ d_G(g',h') < \varepsilon, \quad & d_G(\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(h'), \alpha g) < \varepsilon. \end{aligned}$$

On considère les conditions suivantes sur un quintuplet $(\alpha, \beta, \gamma, g, g') \in G^5$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } (g, g'), \\ \beta \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } (\mathrm{rot}^{\pm 1}(g), \beta \cdot (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g')), \\ \gamma \text{ est } (\varepsilon, \pm R)\text{-presque réalisé par } ((\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g), \alpha^{-1} \cdot \mathrm{rot}^{\pm 1}(g')). \end{array} \right. \tag{4.2}$$

Définition 4.7. Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \mid cba = 1 \rangle$. On dit qu'une représentation $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ est $(\varepsilon, \pm R)$-*presque parfaite* s'il existe $(g, g') \in G^2$ tel que le quintuplet $Q := (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (4.2). Ce quintuplet est une *donnée géométrique* associée à la représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite ρ.

Remarque 4.8. Ceci ne dépend pas de l'ordre choisi pour les courbes de bord : si $Q = (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (4.2), alors

$$\begin{aligned} \mathrm{sym}(Q) &:= \big(\rho(b), \rho(c), \rho(a), \mathrm{rot}^{\pm 1}(g), \rho(b) \cdot (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g')\big) \\ \text{et} \quad \mathrm{sym}^2(Q) &:= \big(\rho(c), \rho(a), \rho(b), (\mathrm{rot}^2)^{\pm 1}(g), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}^{\pm 1}(g')\big) \end{aligned}$$

aussi. De plus, la notion de représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite est invariante par conjugaison au but par G : si $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ vérifie (4.2), alors $(x\rho(a)x^{-1}, x\rho(b)x^{-1}, x\rho(c)x^{-1}, xg, xg')$ aussi pour tout $x \in G$.

Remarque 4.9. Nous verrons à la proposition 5.11.(1) qu'en supposant la condition (R) du paragraphe 2.3.2 vérifiée, les notions de représentations (ε, R)-presque parfaite et $(\varepsilon, -R)$-presque parfaite coïncident, mais pour des éléments $(g, g') \in G^2$ qui diffèrent par la multiplication à droite par un certain élément de G envoyant h sur $-\mathsf{h}$ (ceci correspond au renversement d'orientation dans la remarque 4.5).

Voir la figure 8 pour une illustration dans le cas des représentations presque parfaites à valeurs dans un réseau Γ de G.

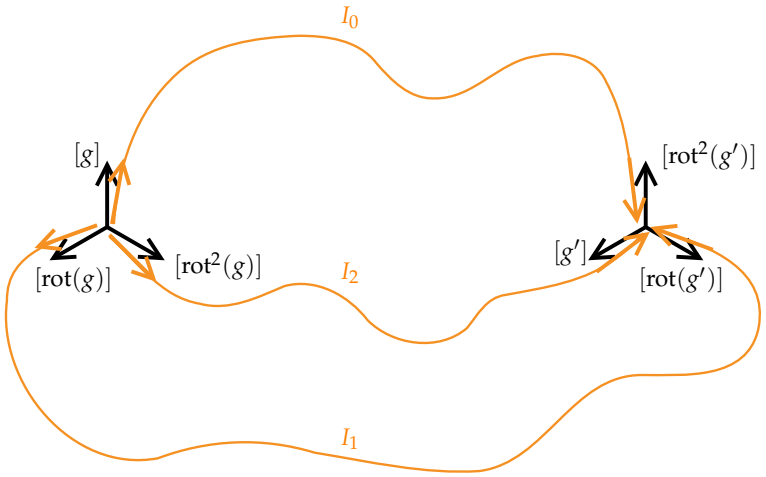


Figure 8 – Donnée géométrique $Q = (\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ associée à une représentation (ε, R)-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ à valeurs dans un réseau Γ de G : il existe dans $\Gamma\backslash G$ un segment I_0 (resp. I_1, resp. I_2) d'orbite du flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$, de longueur R, qui relie un élément proche de $[g]$ (resp. $[\mathrm{rot}(g)]$, resp. $[\mathrm{rot}^2(g)]$) à un élément proche de l'inverse inv de $[\mathrm{rot}^2(g')]$ (resp. $[\mathrm{rot}(g')]$, resp. $[g']$). L'élément $\rho(a)$ (resp. $\rho(b)$, resp. $\rho(c)$) est « presque réalisé » dans $\Gamma\backslash G$ par I_0 (resp. I_1, resp. I_2) suivi de I_2 (resp. I_0, resp. I_1) parcouru en sens inverse.

4.3. Rappels : proximalité

Soient $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{k}^\perp$ un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{a}^+$ une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ contenant h, comme au paragraphe 2.3.1. Soit $Z_K(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. Comme h est supposé régulier (*i.e.* $\mathsf{h} \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$), le sous-groupe parabolique P_τ de G est minimal et pour tout élément $g \in G$, les deux notions suivantes sont équivalentes :

- g est *proximal dans* G/P_τ, au sens où il admet un unique point fixe attractif $g^\oplus$ et un unique point fixe répulsif $g^\ominus$ dans G/P_τ,
- g est *loxodromique*, au sens où il est conjugué à un élément de la forme $\exp(x)k$ où $x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$; l'élément x est unique et l'on pose $\lambda(g) := x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$.

Le centralisateur $Z_G(\alpha_0)$ de $\alpha_0 := \exp(\mathsf{h})$ dans G est le produit de $A := \exp(\mathfrak{a})$ et de $Z_K(\mathfrak{a})$. Pour un élément $\alpha \in G$ proximal dans G/P_τ quelconque, conjugué à $\exp(x)k$ où $x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de α dans G est conjugué au produit de A et du groupe $Z_K(\mathfrak{a}) \cap Z_K(k)$, qui peut être plus petit que $Z_K(\mathfrak{a})$.

Exemple 4.10. Soient $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (*cf.* exemple 2.13). On a $K = \mathrm{PSU}(n)$. Le sous-espace $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ est constitué des matrices diagonales réelles de trace nulle, et le groupe $A = \exp(\mathfrak{a})$ (resp. $Z_K(\mathfrak{a})$) des matrices diagonales de G à coefficients strictement positifs (resp. complexes de module un). Comme $Z_K(\mathfrak{a})$ est abélien, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de tout élément $\alpha \in G$ proximal dans G/P_τ est conjugué à $Z_G(\alpha_0) = A\, Z_K(\mathfrak{a}) \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-1}$.

Exemple 4.11. Soient $G = \mathrm{SO}(n,1)$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(2,1)_0 \hookrightarrow G$ le plongement standard (*cf.* exemple 2.21). On a $K = \mathrm{S}(\mathrm{O}(n) \times \mathrm{O}(1))$. Le groupe $A = \exp(\mathfrak{a})$ est isomorphe à $\mathbb{R}_+^*$, et $Z_K(\mathfrak{a})$ à $\mathrm{S}(\mathrm{O}(n-1) \times \mathrm{O}(1) \times \mathrm{O}(1))$. Pour $\alpha = \exp(x)k \in G$ où $x \in \mathrm{Int}(\mathfrak{a}^+)$ et $k \in Z_K(\mathfrak{a})$, le centralisateur $Z_G(\alpha)$ de α dans G est strictement contenu dans $Z_G(\alpha_0)$ dès que k n'est pas central dans $Z_K(\mathfrak{a})$, ce qui peut se produire dès que $n \geqslant 4$.

4.4. Quelques observations utiles sur les pantalons presque parfaits

Soit $\|\cdot\|_{\mathfrak{a}}$ la norme euclidienne sur $\mathfrak{a}$ induite par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. Munissons G/P_τ de la distance d_τ du paragraphe 2.2.2, invariante par $K \supset \tau(\mathrm{PSO}(2))$. On renvoie au paragraphe 4.3 pour la notion de proximalité dans G/P_τ et la définition de λ.

Lemme 4.12. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α est (ε, R)-presque (resp. $(\varepsilon, -R)$-presque) réalisé par (g, g') au sens de la définition 4.6, alors*

- ▷ *α est proximal dans G/P_τ ;*
- ▷ *le point fixe attractif (resp. répulsif) de $g^{-1}\alpha g$ dans G/P_τ est à distance $\leqslant C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $\underline{\tau}(\infty)$ (resp. $\underline{\tau}(0)$) pour d_τ ;*
- ▷ *$\|\lambda(\alpha) - \lambda(\exp(R\,\mathsf{h}))\|_{\mathfrak{a}} \leqslant C(\varepsilon + e^{-R/2})$; en particulier, la longueur de translation de α dans G/K appartient à $[2R - C(\varepsilon + e^{-R/2}), 2R + C(\varepsilon + e^{-R/2})]$;*
- ▷ *$g^{-1}g'$ appartient à $\mathscr{B}_\varepsilon\, \tau\big(\left(\begin{smallmatrix} e^{R/2} & 0 \\ e^{-R/2} & e^{-R/2} \end{smallmatrix}\right)\big)\, \mathscr{B}_\varepsilon$ (resp. à $\mathscr{B}_\varepsilon\, \tau\big(\left(\begin{smallmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} \\ 0 & e^{R/2} \end{smallmatrix}\right)\big)\, \mathscr{B}_\varepsilon$), où $\mathscr{B}_\varepsilon$ désigne la boule fermée de rayon ε centrée en l'élément neutre dans (G, d_G).*

Démonstration. Considérons les éléments $h_R := \left(\begin{smallmatrix} e^{R/2} & 0 \\ e^{-R/2} & e^{-R/2} \end{smallmatrix}\right)$ et $h_{-R} := \left(\begin{smallmatrix} e^{-R/2} & e^{-R/2} \\ 0 & e^{R/2} \end{smallmatrix}\right)$ de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Généralisant la remarque 4.4, on note que pour tous $\varepsilon, R > 0$, si α est $(\varepsilon, \pm R)$-presque réalisé par $(g, g') \in G^2$, alors il existe $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathscr{B}_\varepsilon$ tels que

$$g^{-1}g' = g_1\, \tau(h_{\pm R})\, g_2 \qquad \text{et} \qquad g^{-1}\alpha g = g_1\, \tau(h_{\pm R})\, (g_2 g_3)\, \tau(h_{\pm R})\, g_4.$$

L'élément $h_R \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est hyperbolique de point fixe répulsif $0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ et de point fixe attractif $e^{R/2} - 1 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à distance $\arctan(1/(e^{R/2}-1)) \sim e^{-R/2}$ de ∞ pour la distance $\mathrm{PSO}(2)$-invariante de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. De même, h_{-R} est hyperbolique de point fixe attractif ∞ et de point fixe répulsif à distance $\sim e^{-R/2}$ de 0.

Posons $x_0^+ := \underline{\tau}(\infty) \in G/P_\tau$ et notons H_0^- l'ensemble des points de G/P_τ non tranverses à $\underline{\tau}(0)$. Il existe $r > 0$ tel que $\mathscr{V}_{3r}(x_0^+) \cap \mathscr{V}_{3r}(H_0^-) = \emptyset$, où $\mathscr{V}_\delta(\cdot)$ désigne le δ-voisinage uniforme dans $(G/P_\tau, d_\tau)$ pour $\delta > 0$. On vérifie qu'il existe $C > 0$ avec les propriétés suivantes :

- ▷ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $g \in \mathscr{B}_\varepsilon$, la constante de Lipschitz de g dans $(G/P_\tau, d_\tau)$ est $\leqslant 1 + C\varepsilon$ et l'on a $d_\tau(x, g \cdot x) \leqslant C\varepsilon$ pour tout $x \in G/P_\tau$;
- ▷ pour tout $R > 0$ assez grand, $\tau(h_R)$ envoie le complémentaire de $\mathscr{V}_r(H_0^-)$ dans $\mathscr{V}_{Ce^{-R/2}}(x_0^+)$ avec une constante de Lipschitz $\leqslant Ce^{-R}$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tous $g_1, g_2, g_3, g_4 \in \mathscr{B}_\varepsilon$, l'élément $g_1\,\tau(h_R)\,g_2 g_3\,\tau(h_R)\,g_4 \in G$ envoie le complémentaire de $\mathscr{V}_{2r}(H_0^-)$ dans $\mathscr{V}_{C(\varepsilon+e^{-R/2})}(x_0^+)$ avec une constante de Lipschitz $\leqslant (1 + C\varepsilon)^4\, C^2\, e^{-2R}$, donc de manière uniformément contractante si ε est assez petit et R assez grand. On en déduit que $g_1\,\tau(h_R)\,g_2 g_3\,\tau(h_R)\,g_4$ est proximal dans G/P_τ, de point fixe attractif à distance $\leqslant C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $x_0^+ = \underline{\tau}(\infty)$. En raisonnant de même, on voit que son point fixe répulsif est à distance $\leqslant C(\varepsilon + e^{-R/2})$ de $\underline{\tau}(0)$. La borne supérieure pour $\|\lambda(g_1\,\tau(h_R)\,g_2 g_3\,\tau(h_R)\,g_4) - \lambda(\exp(R\,\mathsf{h}))\|_{\mathfrak{a}}$ est obtenue par des raisonnements analogues, tenant compte de manière plus précise de la constante de Lipschitz, dans divers espaces projectifs associés à τ, comme dans Benoist (1997). Ceci prouve les propriétés voulues de $g^{-1}\alpha g = g_1\,\tau(h_R)\,g_2 g_3\,\tau(h_R)\,g_4$ lorsque α est (ε, R)-presque réalisé par $(g, g') \in G^2$. Le cas où α est $(\varepsilon, -R)$-presque réalisé par (g, g') est analogue. □

Corollaire 4.13. *Si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $R > 0$ assez grand, alors*

1. *toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ est τ-*générique *au sens où $\rho(a)$, $\rho(b)$ et $\rho(c)$ sont proximaux dans G/P_τ de points fixes attractifs $\rho(a)^\oplus, \rho(b)^\oplus, \rho(c)^\oplus \in G/P_\tau$ deux à deux transverses ;*
2. *pour tout réseau cocompact Γ de G, il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaison de représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ à valeurs dans Γ.*

Démonstration. (1) Les points $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-1)$ et $\underline{\tau}(0)$ sont transverses et la transversalité est une condition ouverte. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x, y \in G/P_\tau$, si x est δ-proche de l'un des points $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-1)$ ou $\underline{\tau}(0)$, et si y est δ-proche d'un autre de ces points, alors x et y sont transverses. Soit $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ une donnée géométrique associée à ρ, comme à la définition 4.7. D'après le lemme 4.12, si ε est assez petit et R assez grand, alors $g^{-1}\rho(a)g$ (resp. $g^{-1}\rho(b)g$, resp. $g^{-1}\rho(c)g$) est proximal dans G/P_τ, de point fixe attractif δ-proche de $\underline{\tau}(\infty)$ (resp. $\underline{\tau}(-1)$, resp. $\underline{\tau}(0)$). On conclut en remarquant que $(g^{-1}\rho(d)g)^\oplus = g^{-1} \cdot \rho(d)^\oplus$ pour tout $d \in \{a, b, c\}$ et que l'action de G préserve la transversalité.

(2) Soit Γ un réseau cocompact de G : il existe une partie compacte K_1 de G telle que $G = \Gamma K_1$. D'après le lemme 4.12, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand, il existe une partie compacte K_2 de G telle que pour tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α

est $(\varepsilon, \pm R)$-presque réalisé par (g, g') au sens de la définition 4.6, alors $g^{-1}\alpha g \in K_2$. En particulier, si $\rho : \pi_1(\Pi) \to \Gamma$ est $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite, de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ comme à la définition 4.7, alors $g^{-1}\rho(a)g$ et $g^{-1}\rho(b)g$ appartiennent tous deux au compact $K_2' := K_2 \cup \tau(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right))^{\pm 1} K_2 \tau(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right))^{\mp 1}$. Si l'on écrit $g = xk_1$ où $x \in \Gamma$ et $k_1 \in K_1$, alors $x^{-1}\rho(a)x$ et $x^{-1}\rho(b)x$ appartiennent tous deux à $K_1 K_2' K_1^{-1} \cap \Gamma$, qui est fini car Γ est discret dans G. □

Le lemme 4.12 implique que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit et R assez grand, l'image de toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ est un groupe *ε-Schottky* au sens de Benoist (1997, Def. 4.1). En particulier, ρ est injective et discrète, c'est un plongement quasi-isométrique (*cf.* Benoist, 1997) et plus précisément une représentation P_τ-anosovienne au sens du paragraphe 1.4 (*cf.* Canary et al., 2017 ; Kapovich, Leeb et Porti, 2018).

4.5. Application « pied » et bons recollements selon Kahn, Labourie, Mozes

Afin de définir les bons recollements de pantalons presque parfaits, Kahn, Labourie et Mozes introduisent une notion d'application « pied », définie de la manière suivante.

Soit $\alpha \in G$ un élément proximal dans G/P_τ. Soit L_α l'ensemble des éléments $g \in G$ dont le τ-triangle $g \cdot \underline{\tau}(0, \infty, -1)$ de G/P_τ associé est de la forme $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus, \cdot)$. Choisissons $r > 0$ assez petit de sorte que le r-voisinage uniforme $\mathscr{U}_\alpha$ de L_α dans (G, d_G) soit homéomorphe au produit direct de L_α avec une boule.

Définition 4.14. L'*application « pied »* associée à l'élément proximal $\alpha \in G$ est la projection orthogonale $\Psi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to L_\alpha$ sur L_α.

On peut choisir le même $r > 0$ pour tous les éléments α par la remarque suivante.

Remarque 4.15. Pour $\alpha_0 = \exp(\mathfrak{h})$, l'ensemble L_{α_0} est le centralisateur $Z_G(\alpha_0) = AZ_K(\mathfrak{a})$ de α_0 dans G (*cf.* paragraphe 4.3). Pour un élément proximal quelconque $\alpha \in G$, on a $L_\alpha = g_\alpha L_{\alpha_0}$ et $\mathscr{U}_\alpha = g_\alpha \mathscr{U}_{\alpha_0}$ et $\Psi_\alpha = g_\alpha \Psi_{\alpha_0}(g_\alpha^{-1} \cdot)$ où $g_\alpha \in G$ envoie $(\alpha_0^\ominus, \alpha_0^\oplus) = (\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ sur $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. Le stabilisateur $\mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$ de $(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) \in G/P_\tau \times G/P_\tau$ dans G est égal à $g_\alpha L_{\alpha_0} g_\alpha^{-1} = L_\alpha g_\alpha^{-1}$; il agit sur $\mathscr{U}_\alpha$ et L_α par multiplication à gauche et Ψ_α est équivariante pour ces actions.

Lemme 4.16. *1. Pour tout élément proximal $\alpha \in G$, les ensembles*

$$\mathscr{N}_\delta := \left\{ g \in G \;\middle|\; d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^\ominus, \underline{\tau}(0)\big) \leqslant \delta \text{ et } d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^\oplus, \underline{\tau}(\infty)\big) \leqslant \delta \right\},$$

pour $\delta > 0$, forment une base de voisinages $\mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$-invariants de L_α dans G.

2. *En particulier, si $\varepsilon > 0$ est assez petit et $R > 0$ assez grand, alors pour toute représentation $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaite $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$, de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ comme à la définition 4.7, on a $g \in \mathscr{U}_{\rho(a)^{\pm 1}}$.*

Démonstration. (1) Soit $g_\alpha \in G$ tel que $g_\alpha^{-1} \cdot (\alpha^\ominus, \alpha^\oplus) = (\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$. L'espace homogène $\mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)\backslash G$ s'identifie à l'ensemble des couples de points transverses de G/P_τ via $[g] \mapsto g^{-1} \cdot (\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$. Par conséquent, une base de voisinages de $[g_\alpha]$ dans $\mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)\backslash G$ est donnée par les ensembles

$$[\mathscr{N}_\delta] := \big\{ [g] \in \mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)\backslash G \,\big|\, d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^\ominus, \underline{\tau}(0)\big) \leqslant \delta \text{ et } d_\tau\big(g^{-1} \cdot \alpha^\oplus, \underline{\tau}(\infty)\big) \leqslant \delta \big\},$$

pour $\delta > 0$. Les images réciproques $\mathscr{N}_\delta$ des $[\mathscr{N}_\delta]$ par la projection naturelle $G \to \mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)\backslash G$ forment alors une base de voisinages $\mathrm{stab}_G(\alpha^\ominus, \alpha^\oplus)$-invariants de L_α dans G.

(2) Conséquence immédiate de (1), de la définition de $\mathscr{U}_{\rho(a)^{\pm 1}}$ et du lemme 4.12. □

Notons que le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du paragraphe 4.1.3 préserve L_α, alors que l'involution inv échange L_α et $L_{\alpha^{-1}}$.

Dans la définition suivante, Kahn, Labourie et Mozes ont en tête des couples (Π^+, Π^-) de pantalons adjacents le long d'une courbe de bord a comme à la figure 3, droite.

Définition 4.17. Soient Π^+ et Π^- deux pantalons, de groupes fondamentaux $\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a^\pm, b^\pm, c^\pm \,|\, c^\pm b^\pm a^\pm = 1 \rangle$. Soient $\varepsilon, R > 0$ et $\rho^\pm : \pi_1(\Pi^\pm) \to G$ des représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites de données géométriques $Q^\pm = (\rho^\pm(a^\pm), \rho^\pm(b^\pm), \rho^\pm(c^\pm), g^\pm, g'^\pm)$. Pour $\varepsilon' > 0$, on dit que ρ^+ et ρ^- (ou leurs images) sont *ε'-bien recollées le long de a^+ et a^-* via Q^+ et Q^- si $\rho^+(a^+) = \rho^-(a^-) =: \alpha \in G$, si $g^\pm \in \mathscr{U}_{\alpha^{\pm 1}}$ et si

$$d_G\big(\Psi_\alpha(g^+), \varphi_1 \circ \mathrm{inv} \circ \Psi_{\alpha^{-1}}(g^-)\big) < \varepsilon'. \tag{4.3}$$

Lorsque R est grand, l'élément $g^\pm$ est très proche de son image par $\Psi_{\alpha^{\pm 1}}$ (lemmes 4.12 et 4.16.(1)), et l'inégalité (4.3) signifie donc que g^- est « presque » obtenu à partir de g^+ par inversion et décalage de 1 (*cf.* figure 9). En pratique, on prendra des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites qui sont ε'-bien recollées pour $\varepsilon' = C\varepsilon/R$ où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de G.

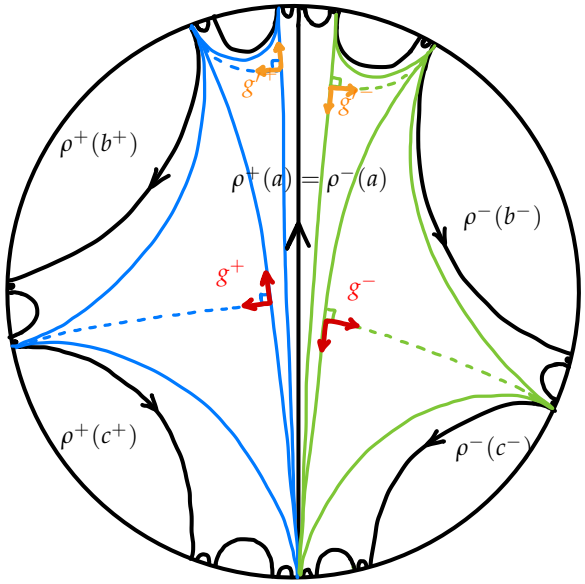


FIGURE 9 – Représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites $\rho^\pm$ qui sont bien recollées au sens de Kahn, Labourie et Mozes

Remarque 4.18. En utilisant le lemme 4.12, on vérifie que pour tout $\delta > 0$, si $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ sont assez petits et $R > 0$ assez grand, alors les images par $(g^-)^{-1}$ des points $\rho^\pm(a^\pm)^\ominus$, $\rho^\pm(a^\pm)^\oplus$, $\rho^+(b^+)^\ominus$, $\rho^+(b^+)^\oplus$, $\rho^+(c^+)^\ominus$, $\rho^+(c^+)^\oplus$, $\rho^-(b^-)^\ominus$, $\rho^-(b^-)^\oplus$, $\rho^-(c^-)^\ominus$ et $\rho^-(c^-)^\oplus$ sont à distance $\leqslant \delta$ pour d_τ, respectivement, de $\underline{\tau}(0)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(-e)$, $\underline{\tau}(-e)$, $\underline{\tau}(0)$, $\underline{\tau}(\infty)$, $\underline{\tau}(1)$, $\underline{\tau}(1)$ et $\underline{\tau}(0)$ (*cf.* figure 9).

4.6. Injectivité des représentations de $\pi_1(S)$ dont les restrictions aux pantalons sont presque parfaites et bien recollées

Kahn, Labourie et Mozes établissent la version plus précise suivante de la proposition 3.2. On note $\sigma_\Pi : \{a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi\} \to \{a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi\}$ la permutation cyclique envoyant a_Π sur b_Π, et l'on renvoie à la remarque 4.8 pour la définition de sym.

Proposition 4.19. *Dans le cadre 2.16, soit Γ un réseau cocompact irréductible de G, et soit S une surface compacte de genre au moins deux avec une décomposition en pantalons bipartie $\mathscr{P}$ et un graphe $\mathscr{G}$ comme au paragraphe 3.1, donnant une présentation $\pi_1(\Pi) = \langle a_\Pi, b_\Pi, c_\Pi \,|\, c_\Pi b_\Pi a_\Pi = 1\rangle$ pour tout $\Pi \in \mathscr{P}$. Pour tout $\delta > 0$, tout $\varepsilon > 0$ assez petit par rapport à δ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε, si une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ vérifie que*

1. *pour tout* $\Pi^{\pm} \in \mathscr{P}^{\pm}$, *la restriction* $\rho_{\Pi^{\pm}}$ *de* ρ *à* $\pi_1(\Pi^{\pm})$ *est* $(\varepsilon/R, \pm R)$*-presque parfaite comme à la définition 4.7, et*
2. *on peut choisir les données géométriques* Q_Π *des* ρ_Π *(définition 4.7) de telle sorte que pour tous* $\Pi^+, \Pi^- \in \mathscr{P}$ *adjacents le long d'une courbe de bord correspondant à* $\sigma^{i^+}_{\Pi^+}(a_{\Pi^+}) \in \pi_1(\Pi^+)$ *et* $\sigma^{i^-}_{\Pi^-}(a_{\Pi^-}) \in \pi_1(\Pi^-)$ *où* $i^+, i^- \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$*, les restrictions* ρ_{Π^+} *et* ρ_{Π^-} *sont* (ε/R)*-bien recollées le long de* $\sigma^{i^+}_{\Pi^+}(a_{\Pi^+})$ *et* $\sigma^{i^-}_{\Pi^-}(a_{\Pi^-})$ *via* $\mathrm{sym}^{i^+}(Q_{\Pi^+})$ *et* $\mathrm{sym}^{i^-}(Q_{\Pi^-})$*, comme à la définition 4.17,*

alors ρ *est injective et admet une application de bord* $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ *qui est* (ϱ_R, ρ)*-équivariante (pour une représentation R-parfaite* ϱ_R *comme au paragraphe 3.1) et* (δ, τ)*-sullivannienne.*

Nous esquissons à présent les idées de la démonstration. Ces considérations de Kahn, Labourie et Mozes sur les applications de bord sullivanniennes, en lien avec les représentations anosoviennes en rang supérieur, constituent l'une des nouveautés importantes par rapport à l'approche originale de Kahn et Marković.

4.6.1. *Pavages de* $\mathbb{H}^2$ *par des hexagones.* — À toute représentation injective et discrète $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est associé un pavage $\varrho(\pi_1(S))$-invariant Hex_ϱ de $\mathbb{H}^2$ par des hexagones à angles droits, obtenu en considérant les axes de translation dans $\mathbb{H}^2$ des images par ϱ des éléments de $\pi_1(S)$ correspondant aux courbes de bord des pantalons de $\mathscr{P}$, et en rajoutant la perpendiculaire commune à toute paire d'axes *adjacents* (c'est-à-dire non séparés par un autre axe). Ainsi, chaque hexagone est bordé par trois segments d'axe de translation (« côtés principaux ») et trois perpendiculaires communes.

Si $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ est R-parfaite, où $R > 1$, alors les côtés principaux des hexagones de Hex_{ϱ_R} sont tous de longueur R, et deux hexagones adjacents le long d'un côté principal y sont toujours décalés de 1 (*cf.* figure 10).

Tout hexagone H de Hex_{ϱ_R} définit un triplet (a,b,c) d'éléments de $\pi_1(S)$, unique à permutation cyclique près, tel que les côtés principaux de H sont contenus dans les axes de translation $A_{\varrho_R(a)}, A_{\varrho_R(b)}, A_{\varrho_R(c)}$ de $\varrho_R(a), \varrho_R(b), \varrho_R(c)$, et les points fixes $\varrho_R(a)^\ominus$, $\varrho_R(a)^\oplus$, $\varrho_R(b)^\ominus$, $\varrho_R(b)^\oplus$, $\varrho_R(c)^\ominus$ et $\varrho_R(c)^\oplus$ dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont dans un ordre cyclique positif. On dira que $(H,(a,b,c))$ et $(H,(b,c,a))$ et $(H,(c,a,b))$ sont des *hexagones marqués* de Hex_{ϱ_R}. Comme au paragraphe 4.2.1, les points fixes de $\varrho_R(a), \varrho_R(b), \varrho_R(c), \varrho_R(b^{-1}a^{-1})$ définissent une application (ϱ_R, ϱ_R)-équivariante $\underline{H} \mapsto (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$ de l'ensemble des hexagones marqués de Hex_{ϱ_R} vers $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^2$, telle que si $\underline{H} = (H,(a,b,c))$, alors a,b,c et $(T,T') := (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$ vérifient (4.1) pour $\varrho = \varrho_R|_{\langle a,b,c\rangle}$.

Remarque 4.20. Le fait 3.1 assure que tout point de $\mathbb{H}^2$ est à distance uniformément bornée (indépendante de R et ϱ_R) du centre d'un hexagone du pavage Hex_{ϱ_R}. On en déduit l'existence d'une constante $C' > 0$ (indépendante de R et ϱ_R) telle que pour tout $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et tout $R > 1$ on puisse trouver un hexagone marqué $\underline{H}$ de Hex_{ϱ_R} tel que $d_\tau(\tau(h^{-1})\cdot z, \tau(h^{-1})\cdot z') \leqslant C'\, d_\tau(\tau(h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}})\cdot z, \tau(h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}})\cdot z')$ pour tous $z, z' \in G/P_\tau$.

Suivant Kahn, Labourie et Mozes, on dira qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\pi_1(S)$ est *acceptable* si chaque a_n correspond à une courbe de bord d'un pantalon de $\mathscr{P}$ et pour tout $n \geqslant 1$, les axes de translation $A_{\varrho_R(a_{n-1})}$ et $A_{\varrho_R(a_n)}$ d'une part, et $A_{\varrho_R(a_n)}$ et $A_{\varrho_R(a_{n+1})}$ d'autre part, bordent des hexagones du pavage Hex_{ϱ_R} avec des côtés qui coïncident sur une longueur de $R-1$ dans $\mathbb{H}^2$ (*cf.* figure 10).

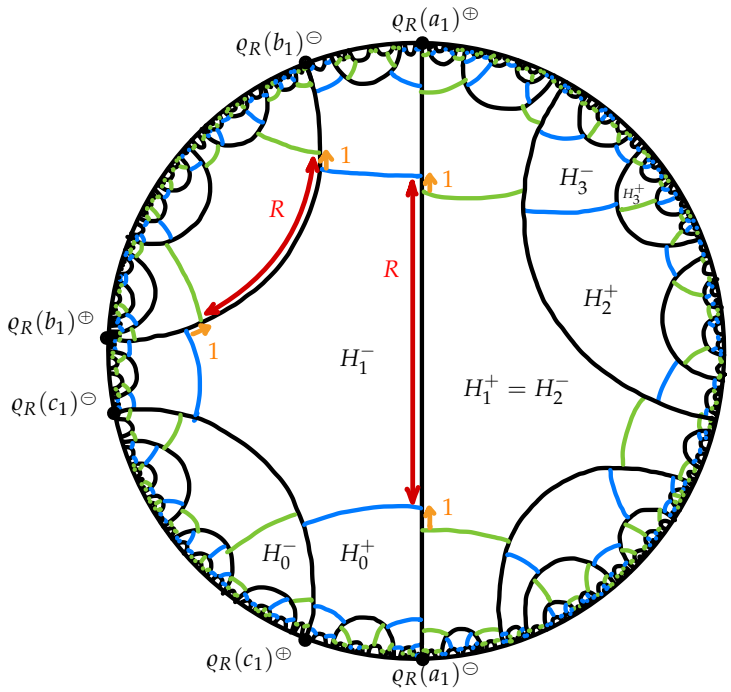


Figure 10 – Pavage Hex_{ϱ_R} de $\mathbb{H}^2$ par des hexagones à angles droits, invariant par une représentation R-parfaite $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On a représenté, pour plusieurs valeurs de n, des hexagones H_n^- et H_n^+ ayant des côtés qui coïncident sur une longueur de $R-1$ le long d'un axe de translation $A_{\varrho_R(a_n)}$ où $a_n \in \pi_1(S)$: la suite (a_n) est ϱ_R*-acceptable*. On a également représenté les points fixes attractifs et répulsifs de $\varrho_R(a_1), \varrho_R(b_1), \varrho_R(c_1)$ pour trois éléments $a_1, b_1, c_1 \in \pi_1(S)$ tels que $(H_1^-, (a_1, b_1, c_1))$ est un *hexagone marqué* de Hex_{ϱ_R}.

On dira qu'un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est ϱ_R*-accessible* si c'est la limite, dans la compactification $\overline{\mathbb{H}^2} = \mathbb{H}^2 \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ de $\mathbb{H}^2$, d'une suite $(A_{\varrho_R(a_n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est acceptable ; dans ce cas, si $A_{\varrho_R(a_0)}$ et $A_{\varrho_R(a_1)}$ bordent un hexagone H du pavage Hex_{ϱ_R}, on dira que x est ϱ_R*-accessible à partir de* H. Kahn, Labourie et Mozes font l'observation suivante.

Lemme 4.21. *Il existe une fonction $\vartheta : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, tendant vers 0 en $+\infty$, telle que pour tout $R > 1$, toute représentation R-parfaite $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et tout hexagone marqué $\underline{H} = (H,(a,b,c))$ de Hex_{ϱ_R}, l'image par $h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}$ de l'ensemble des points ϱ_R-accessibles à partir de H est $\vartheta(R)$-dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ pour $d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$.*

De manière analogue à l'application $\underline{H} \mapsto (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$, à toute représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ vérifiant la condition (1) de la proposition 4.19 pour un certain $\varepsilon > 0$, on peut associer une application (ϱ_R,ρ)-équivariante $\underline{H} \mapsto (g_{\rho,\underline{H}}, g'_{\rho,\underline{H}})$ de l'ensemble des hexagones marqués de Hex_{ϱ_R} vers G^2, telle que si $\underline{H} = (H,(a,b,c))$, alors $(\rho(a),\rho(b),\rho(c),g_{\rho,\underline{H}},g'_{\rho,\underline{H}})$ est une donnée géométrique associée à la représentation $(\varepsilon/R,R)$-presque parfaite $\rho|_{\langle a,b,c\rangle}$ comme à la définition 4.7.

4.6.2. *Applications de bord partielles et déformations.* — Le cœur de la démonstration de la proposition 4.19 est formé des deux résultats ci-dessous. Le premier, comme la proposition 2.12 sur laquelle repose le second, fait intervenir une version précise, dans G/P_τ, du lemme de Morse de Kapovich, Leeb et Porti (2014, 2018), déjà mentionnée au paragraphe 2.2.3.

Rappelons (corollaire 4.13.(1)) que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε, si une représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ vérifie la condition (1) de la proposition 4.19, alors pour tout $a \in \pi_1(S)$ correspondant à une courbe de bord d'un pantalon de $\mathscr{P}$, l'élément $\rho(a)$ est proximal dans G/P_τ : il admet un unique point fixe attractif $\rho(a)^\oplus \in G/P_\tau$. Soit $C' > 0$ la constante de la remarque 4.20.

Proposition 4.22. *Pour tout $\delta > 0$, tout $\varepsilon > 0$ assez petit par rapport à δ, tout $R > 1$ assez grand par rapport à ε, toute représentation R-parfaite $\varrho_R : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ et toute représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ vérifiant les conditions (1) et (2) de la proposition 4.19, il existe une unique application (ϱ_R,ρ)-équivariante ξ de l'ensemble des points ϱ_R-accessibles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers G/P_τ vérifiant la propriété suivante : pour toute suite acceptable $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\pi_1(S)$ et tout hexagone marqué $\underline{H} = (H,(a,b,c))$ de Hex_{ϱ_R} où H est bordé par $A_{\varrho_R(a_0)}$ et $A_{\varrho_R(a_1)}$, si $(A_{\varrho_R(a_n)})$ converge dans $\overline{\mathbb{H}^2}$ vers un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, alors $(\rho(a_n)^\oplus)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans G/P_τ vers $\xi(x)$ et*

$$d_\tau\big(g^{-1}_{\rho,\underline{H}} \circ \xi(x), \underline{\tau} \circ h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}(x)\big) \leqslant \frac{\delta}{2C'}.$$

Proposition 4.23. *Soit $\varrho : \pi_1(S) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ une représentation injective et discrète. Pour tout $\delta > 0$ assez petit, il existe $\theta > 0$ tel que pour toute famille continue $(\rho_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S),G)$ de représentations et toutes applications (ϱ,ρ_t)-équivariantes $\xi_t : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$, si ξ_0 est (δ,τ)-sullivannienne et si pour tout $t \in]0,1]$, les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :*

1. (« *cohérence d'attraction* ») *pour tout* $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, *il existe une suite* $(a_n) \in \pi_1(S)^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\rho_t(a_n)$ *soit proximal dans* G/P_τ *pour tout* n *et telle que* $(\varrho(a_n)^{\oplus})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *vers* x *et* $(\rho_t(a_n)^{\oplus})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* G/P_τ *vers* $\xi_t(x)$,
2. (« *condition sullivannienne sur un sous-ensemble suffisamment dense* ») *pour tout* $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, *il existe* $g \in G$ *et un sous-ensemble* D *de* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *tels que* $h^{-1}(D)$ *soit* θ*-dense dans* $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ *et que* $d_\tau^g(\xi_t(x), g\circ\underline{\tau}\circ h^{-1}(x)) \leqslant \delta/2$ *pour tout* $x \in D$,

alors ξ_t *est* (δ,τ)*-sullivannienne pour tout* $t \in [0,1]$.

Démonstration de la proposition 4.23. Soient $\alpha, \delta_0, C > 0$ donnés par la proposition 2.12.(1). Prenons $\delta < \delta_0$ et θ tel que $\theta + C\,\theta^\alpha \leqslant \delta/2$, et montrons que l'ensemble E des $t \in [0,1]$ tels que ξ_t soit (δ,τ)-sullivannienne est ouvert et fermé dans $[0,1]$.

Pour montrer que E est fermé, on observe que les applications (δ,τ)-sullivanniennes forment une famille équicontinue, par la proposition 2.12.(1) : ainsi, d'après le théorème d'Arzelà–Ascoli, si $(t_m) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers t, on peut supposer après extraction que $(\xi_{t_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers une application $\xi'_t : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$. Cette application ξ'_t est encore (δ,τ)-sullivannienne, et (ϱ,ρ_t)-équivariante. D'après la proposition 2.12.(2a), la représentation ρ_t est P_τ-anosovienne d'application de bord ξ'_t. En particulier (propriété générale des représentations anosoviennes), pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments non triviaux de $\pi_1(S)$ telle que $(\varrho(a_n)^{\oplus})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, l'élément $\rho_t(a_n)$ est proximal dans G/P_τ pour tout n et $(\rho_t(a_n)^{\oplus})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans G/P_τ vers $\xi'_t(x)$. L'hypothèse (1) de la proposition implique alors $\xi'_t = \xi_t$. Ainsi, $t \in E$.

Vérifions que E est ouvert dans $[0,1]$. D'après la proposition 2.12.(2b), tout $t \in E$ admet un voisinage dans $[0,1]$ formé d'éléments s tels que ξ_s soit (δ_0,τ)-sullivannienne. Grâce à l'hypothèse (2) ci-dessus, on en déduit que ξ_s est en fait (δ,τ)-sullivannienne, *i.e.* $s \in E$. En effet, soit $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. D'après l'hypothèse (2) il existe $g \in G$ et, pour tout $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, un point $y \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tels que $d_\tau(\underline{\tau}\circ h^{-1}(x), \underline{\tau}\circ h^{-1}(y)) = d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h^{-1}(x), h^{-1}(y)) \leqslant \theta$ et $d_\tau(g^{-1}\circ\xi_s(y), \underline{\tau}\circ h^{-1}(y)) \leqslant \delta/2$. D'après la proposition 2.12.(1), on a $d_\tau(g^{-1}\circ\xi_s(x), g^{-1}\circ\xi_s(y)) \leqslant C\,d_{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}(h^{-1}(x), h^{-1}(y))^\alpha \leqslant C\,\theta^\alpha$, et l'on conclut par inégalité triangulaire. □

4.6.3. *Démonstration de la proposition 4.19.* — Fixons $\delta > 0$ (que l'on peut supposer très petit) et prenons $\varepsilon > 0$ assez petit par rapport à δ et $R > 1$ assez grand par rapport à ε comme dans la proposition 4.22. Prenons de plus R assez grand de sorte que le réel $\vartheta(R)$ du lemme 4.21 soit inférieur à θ/C' où θ et C' sont donnés respectivement par la proposition 4.23 et la remarque 4.20.

Supposons dans un premier temps qu'il existe une famille continue $(\rho_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S), G)$ telle que ρ_0 soit τ-fuchsienne, $\rho_1 = \rho$ et pour tout $t \in [0,1]$, la représentation ρ_t vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.19.

Soit Hex_{ϱ_R} le pavage $\varrho_R(\pi_1(S))$-invariant de $\mathbb{H}^2$ du paragraphe 4.6.1 et, pour tout $t \in [0,1]$, soit $\underline{H} \mapsto (h_{\varrho_R,\underline{H}}, h'_{\varrho_R,\underline{H}})$ (resp. $\underline{H} \mapsto (g_{\rho_t,\underline{H}}, g'_{\rho_t,\underline{H}})$) une application (ϱ_R,ϱ_R)-équivariante (resp. (ϱ_R,ρ_t)-équivariante) de l'ensemble des hexagones marqués de Hex_{ϱ_R} vers $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})^2$ (resp. G^2) comme au paragraphe 4.6.1. Soit ξ_t l'application (ϱ_R,ρ_t)-équivariante de la proposition 4.22, allant de l'ensemble des points ϱ_R-accessibles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ vers G/P_τ ; on la prolonge en une application (ϱ_R,ρ_t)-équivariante $\xi_t : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ vérifiant la condition (1) de la proposition 4.23. La remarque 4.20, le lemme 4.21 et la proposition 4.22 assurent que la condition (2) de la proposition 4.23 est vérifiée. En effet, pour $t \in [0,1]$ et $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, soit $\underline{H} = (H,(a,b,c))$ un hexagone marqué de Hex_{ϱ_R} donné par la remarque 4.20. Soit $g := g_{\rho_t,\underline{H}}\,\tau(h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}\,h) \in G$ et soit D l'ensemble des points ϱ_R-accessibles à partir de H. Pour tout $x \in D$, on a

$$\begin{aligned} d^g_\tau\big(\xi_t(x), g\circ\underline{\tau}\circ h^{-1}(x)\big) &= d_\tau\big(g^{-1}\circ\xi_t(x), \underline{\tau}\circ h^{-1}(x)\big) \\ &= d_\tau\big(\tau(h^{-1}h_{\varrho_R,\underline{H}})\,g^{-1}_{\rho_t,\underline{H}}\circ\xi_t(x), \tau(h^{-1}h_{\varrho_R,\underline{H}})\circ\underline{\tau}\circ h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}(x)\big) \\ &\leqslant C'\,d_\tau\big(g^{-1}_{\rho_t,\underline{H}}\circ\xi_t(x), \underline{\tau}\circ h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}(x)\big) \;\leqslant\; \delta/2, \end{aligned}$$

où les deux inégalités utilisent respectivement la remarque 4.20 et la proposition 4.22. Or, l'ensemble $h^{-1}_{\varrho_R,\underline{H}}(D)$ est (θ/C')-dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'après le lemme 4.21 et notre choix de R, donc l'ensemble $h^{-1}(D)$ est θ-dense dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ d'après la remarque 4.20. On peut alors appliquer la proposition 4.23 : on obtient que pour tout $t \in [0,1]$, l'application (ϱ_R,ρ_t)-équivariante ξ_t est (δ,τ)-sullivannienne.

En général, Kahn, Labourie et Mozes ne construisent pas de famille continue $(\rho_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S),G)$ telle que ρ_0 soit τ-fuchsienne et $\rho_1 = \rho$. Ils procèdent plutôt par approximation, en considérant une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de surfaces hyperboliques compactes obtenues en doublant des surfaces hyperboliques S'_n compactes à bord qui sont des unions de pantalons isométriques à des pantalons de $\mathscr{P}$, et telles que le revêtement universel de S coïncide avec celui de S'_n sur une boule de rayon n. La représentation $\rho : \pi_1(S) \to G$ définit pour tout n une représentation $\rho^{(n)} : \pi_1(S_n) \to G$ dont les restrictions aux pantalons de S_n sont encore $(\varepsilon/R,\pm R)$-presque parfaites et (ε/R)-bien recollées. Pour tout n, en utilisant le fait que $\pi_1(S'_n)$ est un groupe libre, ils construisent une famille continue $(\rho^{(n)}_t)_{t\in[0,1]} \subset \mathrm{Hom}(\pi_1(S_n),G)$ telle que $\rho^{(n)}_0$ soit τ-fuchsienne, $\rho^{(n)}_1 = \rho^{(n)}$ et pour tout $t \in [0,1]$, la représentation $\rho^{(n)}_t$ vérifie les conditions (1) et (2) de la proposition 4.19. D'après le paragraphe précédent, $\rho^{(n)}$ admet donc une application de bord (δ,τ)-sullivannienne $\xi^{(n)} : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$. La famille $(\xi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue d'après la proposition 2.12.(1). En procédant par convergence, on obtient alors une application de bord (δ,τ)-sullivannienne $\xi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to G/P_\tau$ pour ρ.

5. Étape dynamique : utilisation du mélange

Dans cette partie, nous donnons les grandes lignes de la démonstration des propositions 3.3 et 3.4 selon le point de vue de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018). L'espace $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 3.4 est ici un espace $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de « couples triconnectés » que nous introduisons au paragraphe 5.3.

Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.16. On suppose à présent la condition (R) *du paragraphe 2.3.2 vérifiée. On fixe un réseau cocompact irréductible* Γ *de* G*. Par le lemme de Selberg, quitte à remplacer* Γ *par un sous-groupe d'indice fini, on peut le supposer sans torsion ; c'est ce que nous ferons ici.*

5.1. Fonctions poids sur $G \times G$

Rappelons la notion de *représentation* (ε, R)*-presque parfaite* (définition 4.7), qui fait intervenir la fonction $\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R$. Pour démontrer la proposition 3.3.(1), l'idée est de montrer, en utilisant le mélange (fait 3.5), que pour tous éléments $[x], [y] \in \Gamma\backslash G$, il existe « beaucoup » d'éléments $[g] \in \Gamma\backslash G$ proches de $[x]$ tels que $\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R([g])$ soit proche de $[y]$.

Plus précisément, fixons une fonction cloche $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, de support $[-1, 1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient une fonction cloche $\chi_\varepsilon \in C^\infty(G, \mathbb{R}^+)$ de support la boule de rayon ε autour de l'élément neutre $\mathrm{id} \in G$, d'intégrale 1, en posant

$$\chi_\varepsilon(g) := \frac{1}{\int_G \chi(d_G(\cdot, \mathrm{id})^2/\varepsilon^2)}\, \chi(d_G(g, \mathrm{id})^2/\varepsilon^2).$$

Pour $R > 0$, on définit des fonctions « poids » $W_{\varepsilon,R}, W_{\varepsilon,-R} : G \times G \to \mathbb{R}^+$, à support compact dans $G \times G$, par

$$W_{\varepsilon,\pm R}(x, y) = \int_{g \in G} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g)\, \chi_{\varepsilon/R}\big(y^{-1}\, (\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R})(g)\big)\, \mathrm{d}g. \tag{5.1}$$

La fonction $W_{\varepsilon,\pm R}$ mesure la proportion d'éléments $g \in G$ tels que g soit (ε/R)-proche de x et $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}(g)$ soit (ε/R)-proche de y. Elle est invariante sous l'action diagonale de G : on a $W_{\varepsilon,\pm R}(gx, gy) = W_{\varepsilon,\pm R}(x, y)$ pour tous $g, x, y \in G$, car rot, inv et φ_R correspondent à des multiplications à droite. Elle induit une fonction $(\Gamma \times \Gamma)$-invariante $w_{\varepsilon,\pm R} : G \times G \to \mathbb{R}^+$ donnée par

$$w_{\varepsilon,\pm R}(x, y) = \sum_{\gamma \in \Gamma} W_{\varepsilon,\pm R}(x, \gamma y). \tag{5.2}$$

(Cette somme est finie car à x fixé, la fonction $W_{\varepsilon,\pm R}(x, \cdot) : G \to \mathbb{R}^+$ est à support compact et Γ est discret dans G ; ainsi, $w_{\varepsilon,\pm R}$ est bien définie et lisse.) La fonction $w_{\varepsilon,\pm R}$ passe au quotient en une fonction $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}^+$, que l'on notera encore

$w_{\varepsilon,\pm R}$. Celle-ci mesure la proportion d'éléments $[g] \in \Gamma\backslash G$ proches de $[x]$ tels que $\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R}([g])$ soit proche de $[y]$, ou encore la proportion d'éléments $g \in G$ proches de x pour lesquels il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $\gamma \cdot (\mathrm{rot}^{\pm 1} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_{\pm R})(g)$ soit proche de y.

Le lemme suivant reprend l'approche de Margulis dans sa thèse. On n'utilise ici qu'une vitesse de mélange polynomiale (*cf.* paragraphe 3.4), qui donne une estimée en ε/R^2 et suffit pour démontrer les propositions 3.3 et 3.4 ; en utilisant pleinement le mélange exponentiel (fait 3.5), on obtiendrait une estimée en $e^{-qR/2}$.

Lemme 5.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tous $[x], [y] \in \Gamma\backslash G$, on a*

$$\big|w_{\varepsilon,\pm R}([x],[y]) - 1\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{R^2}. \tag{5.3}$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $X_\varepsilon : G \times G \to \mathbb{R}^+$ donnée par $X_\varepsilon(x,g) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \chi_\varepsilon(x^{-1}\gamma g)$ est de classe C^∞ et passe au quotient en une fonction $X_\varepsilon : \Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G \to \mathbb{R}^+$. Soit $k \in \mathbb{N}$ donné par le fait 3.5. Il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe $D > 0$ tel que $\|\chi_\varepsilon\|_{C^k} \leqslant D\,\varepsilon^{-k-D}$ pour tout $\varepsilon > 0$; on en déduit qu'il existe $D' > 0$ tel que $\|X_\varepsilon(x,\cdot)\|_{C^k}, \|X_\varepsilon(x,(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv})(\cdot))\|_{C^k} \leqslant D'\,\varepsilon^{-k-D'}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $[x] \in \Gamma\backslash G$.

Soit $\mathscr{D}$ un domaine fondamental mesurable relativement compact de G pour l'action de Γ (rappelons qu'on a supposé Γ sans torsion). Soient $\varepsilon, R > 0$. Pour tous $x, y \in G$, on a

$$\begin{aligned} w_{\varepsilon,R}([x],[y]) &= \sum_{\gamma\in\Gamma} \int_{g\in G} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g)\,\chi_{\varepsilon/R}\big(y^{-1}\gamma^{-1}\,(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv}\circ\varphi_R)(g)\big)\,\mathrm{d}g \\ &= \sum_{\gamma,\gamma'\in\Gamma} \int_{g\in\mathscr{D}} \chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}\gamma' g)\,\chi_{\varepsilon/R}\big(y^{-1}\gamma^{-1}\gamma'\,(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv}\circ\varphi_R)(g)\big)\,\mathrm{d}g \\ &= \int_{[g]\in\Gamma\backslash G} X_{\varepsilon/R}(x,[g])\,X_{\varepsilon/R}(y,(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv}\circ\varphi_R)([g]))\,\mathrm{d}[g]. \end{aligned}$$

Si l'on pose $\psi = X_{\varepsilon/R}(x,\cdot)$ et $\theta = X_{\varepsilon/R}(y,(\mathrm{rot}\circ\mathrm{inv})(\cdot))$, alors

$$\int_{\Gamma\backslash G} \psi = \int_{\Gamma\backslash G} \theta = \int_G \chi_{\varepsilon/R} = 1,$$

et le fait 3.5 donne

$$\big|w_{\varepsilon,R}([x],[y]) - 1\big| \leqslant C\,e^{-qR}\,\|\psi\|_{C^k}\,\|\theta\|_{C^k} \leqslant C\,D'^2\,e^{-qR}\Big(\frac{\varepsilon}{R}\Big)^{-2k-2D'}.$$

En particulier, on obtient (5.3) dès que R est assez grand par rapport à ε. Un raisonnement analogue vaut pour $w_{\varepsilon,-R}$. □

Corollaire 5.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tous $x, y \in G$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $W_{\varepsilon,R}(x,\gamma y) > 0$.*

5.2. Fonctions poids sur G^4 et représentations presque parfaites : démonstration de la proposition 3.3.(1)

Pour tous $\varepsilon, R > 0$, on définit des fonctions $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,\pm R} : G^4 \to \mathbb{R}^+$ par

$$\begin{cases} W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,R}(x,y_0,y_1,y_2) = W_{\varepsilon,R}(x,y_0)\, W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}^2(x),\mathrm{rot}(y_1)) W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}(x),\mathrm{rot}^2(y_2)), \\ W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,-R}(x,y_0,y_1,y_2) = W_{\varepsilon,-R}(x,\mathrm{rot}^2(y_1))\, W_{\varepsilon,-R}(\mathrm{rot}(x),\mathrm{rot}(y_0)) W_{\varepsilon,-R}(\mathrm{rot}^2(x),y_2) \end{cases} \tag{5.4}$$

pour tous $x, y_0, y_1, y_2 \in G$, où $W_{\varepsilon,\pm R}$ est donnée par (5.1). Ces fonctions sont invariantes par l'action diagonale de G sur G^4 par multiplication à gauche. Le lemme suivant fait le lien avec les données géométriques de représentations $(\varepsilon, \pm R)$-presque parfaites (définition 4.7).

Lemme 5.3. *Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \mid cba = 1\rangle$, soit $\rho : \pi_1(\Pi) \to G$ une représentation, soient $\varepsilon, R > 0$ et soient $g, g' \in G$. Alors*

1. *la représentation ρ est (ε, R)-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ si et seulement si $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon R,R}(g, g', \rho(a)^{-1}g', \rho(b)g') > 0$,*
2. *la représentation ρ est $(\varepsilon, -R)$-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ si et seulement si $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon R,-R}(g, g'', \rho(a)g'', \rho(ba)g'') > 0$, où l'on pose $g'' := \rho(a)^{-1} \circ \mathrm{rot}(g')$.*

Démonstration. Traitons le point (1) ; le point (2) est analogue. Par définition (5.1) de $W_{\varepsilon R,R}$, on a $W_{\varepsilon R,R}(g, g') > 0$ si et seulement s'il existe $h \in G$ tel que $d_G(h, g) < \varepsilon$ et $d_G(\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R(h), g') < \varepsilon$. De même, on a $W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}^2(g), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}(g')) > 0$ si et seulement s'il existe $h'' \in G$ tel que

$$d_G(h'', \mathrm{rot}^2(g)) < \varepsilon \quad \text{et} \quad d_G(\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R(h''), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}(g')) < \varepsilon\,;$$

en posant $h' := \rho(a) \cdot \mathrm{inv} \circ \varphi_R(h'')$, ceci est équivalent à

$$d_G(g', h') < \varepsilon \quad \text{et} \quad d_G(\mathrm{rot} \circ \mathrm{inv} \circ \varphi_R(h'), \rho(a) \cdot g) < \varepsilon$$

(car d_G est invariante par G et rot, et $(\mathrm{inv} \circ \varphi_R)^2 = \mathrm{id}_G$). Ainsi, on a $W_{\varepsilon R,R}(g, g')\, W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}^2(g), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}(g')) > 0$ si et seulement si $\rho(a)$ est (ε, R)-presque réalisé par (g, g') (définition 4.6). De même, $W_{\varepsilon R,R}(g, g')\, W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}(g), \rho(b) \cdot \mathrm{rot}^2(g')) > 0$ (resp. $W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}^2(g), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}(g'))\, W_{\varepsilon R,R}(\mathrm{rot}(g), \rho(b) \cdot \mathrm{rot}^2(g')) > 0$) si et seulement si $\rho(b)$ (resp. $\rho(c)$) est (ε, R)-presque réalisé par $(\mathrm{rot}(g), \rho(b) \cdot \mathrm{rot}^2(g'))$ (resp. $(\mathrm{rot}^2(g), \rho(a)^{-1} \cdot \mathrm{rot}(g'))$). On en déduit que $(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')$ satisfait (4.2) avec les signes $+$ si et seulement si $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon R,R}(g, g', \rho(a)^{-1}g', \rho(b)g') > 0$. □

Démonstration de la proposition 3.3.(1). D'après le corollaire 5.2, si R est assez grand par rapport à ε, alors pour tous $g, g'' \in G$ on peut trouver $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ tels que $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,R}(g, \gamma_0 g'', \gamma_1 g'', \gamma_2 g'') > 0$. D'après le lemme 5.3.(1), la représentation de $\pi_1(\Pi^+) = \langle a, b^+, c^+ \mid c^+b^+a = 1\rangle$ dans Γ envoyant (a, b^+) sur $(\gamma_0\gamma_1^{-1}, \gamma_2\gamma_0^{-1})$ est $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite. De même, les lemmes 5.1 et 5.3.(2) permettent de trouver des représentations $(\varepsilon/R, -R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^-)$ dans Γ. □

5.3. Couples triconnectés et mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 3.4

Soit Π un pantalon de groupe fondamental $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$. Dans ce paragraphe, nous introduisons l'espace $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ qui paramètre les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ modulo l'action de Γ. Nous introduisons des mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ dont nous montrerons plus loin (proposition 5.7) qu'elles satisfont la conclusion de la proposition 3.4.

Définition 5.4. Un *couple triconnecté* [(6)] *dans* $\Gamma\backslash G$ est un élément de

$$\mathrm{Triconn} := \{[(x, y_0, y_1, y_2)] \in \Gamma\backslash G^4 \mid y_1, y_2 \in \Gamma y_0\}, \tag{5.5}$$

où Γ agit diagonalement sur G^4 par multiplication à gauche. Pour $\varepsilon, R > 0$, on note $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble des couples triconnectés $[(x, y_0, y_1, y_2)]$ tels que $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,\pm R}(x, y_0, y_1, y_2) > 0$ (*cf.* (5.4)).

Rappelons (remarque 4.8) que Γ agit sur l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi)$ dans Γ par conjugaison au but, ce qui se traduit par une action de Γ sur les données géométriques correspondantes donnée par $x \cdot (\alpha, \beta, \gamma, g, g') = (x\alpha x^{-1}, x\beta x^{-1}, x\gamma x^{-1}, xg, xg')$ pour tout $x \in \Gamma$. Le lemme 5.3 se reformule ainsi.

Lemme 5.5. *Soit* Π *un pantalon de groupe fondamental* $\pi_1(\Pi) = \langle a, b, c \,|\, cba = 1\rangle$ *et soient* $\varepsilon, R > 0$. *Alors*

1. *l'ensemble des données géométriques associées à des représentations* $(\varepsilon/R, R)$*-presque parfaites de* $\pi_1(\Pi)$ *dans* Γ, *modulo l'action de* Γ, *est paramétré par* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ *via* $[(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')] \mapsto [(g, g', \rho(a)^{-1}g', \rho(b)g')]$,
2. *l'ensemble des données géométriques associées à des représentations* $(\varepsilon/R, -R)$*-presque parfaites de* $\pi_1(\Pi)$ *dans* Γ, *modulo l'action de* Γ, *est paramétré par* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ *via* $[(\rho(a), \rho(b), \rho(c), g, g')] \mapsto [(g, g'', \rho(a)g'', \rho(ba)g'')]$ *où* $g'' := \rho(a)^{-1} \circ \mathrm{rot}(g')$.

On peut prendre $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R} := \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ *dans la proposition 3.4.*

Notons $\mathscr{A}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble des classes de conjugaison dans Γ d'éléments $\rho(a)$ où $\rho : \pi_1(\Pi) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaite; c'est un ensemble fini d'après le corollaire 4.13.(2). Pour tout $\alpha \in \Gamma$, l'ensemble

$$\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R} := \{[(x, y_0, y_1, y_2)] \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \mid y_0 = \alpha^{\pm 1} y_1\} \tag{5.6}$$

ne dépend que de la classe de conjugaison $[\alpha]$ de α dans Γ. L'ensemble $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ est l'union disjointe de ses sous-ensembles $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$ où $[\alpha]$ parcourt $\mathscr{A}_{\varepsilon,\pm R}$.

(6) Cette terminologie est justifiée par la figure 8 (paragraphe 4.2.2) associée au lemme 5.5.

Tout élément de $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ (resp. $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$) est par définition de la forme $[(g,g',\alpha^{-1}g',\beta g')]$ (resp. $[(g,g',\alpha g',\beta\alpha g')]$) où $(g,g')\in G^2$ et $\beta\in\Gamma$, et définit une représentation $(\varepsilon/R,R)$-presque parfaite (resp. $(\varepsilon/R,-R)$-presque parfaite) de $\pi_1(\Pi)$ par $(a,b)\mapsto(\alpha,\beta)$ modulo conjugaison au but par Γ.

D'après la remarque 4.8, l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R,\pm R)$-parfaites est invariant par la symétrie naturelle d'ordre trois sym de $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Pi),G)$ donnée par $\mathrm{sym}(\rho)(a,b,c)=(\rho(b),\rho(c),\rho(a))$. Cette symétrie induit une symétrie d'ordre trois de l'ensemble des classes de conjugaison modulo Γ de représentations $(\varepsilon/R,\pm R)$-parfaites, qui elle-même se relève en une symétrie d'ordre trois de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$, que nous noterons encore sym et qui est donnée par

$$\begin{cases} \mathrm{sym}([(g,g',\alpha^{-1}g',\beta g')]) &= [(x,x',\beta^{-1}x',\alpha^{-1}\beta^{-1}x')] & \text{sur } \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R},\\ \mathrm{sym}([(g,g',\alpha g',\beta\alpha g')]) &= [(y,y',\beta y',\alpha^{-1}y')] & \text{sur } \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}, \end{cases} \tag{5.7}$$

où $(x,x'):=(\mathrm{rot}(g),\beta\circ\mathrm{rot}^2(g'))$ et $(y,y'):=(\mathrm{rot}^2(g),\alpha\circ\mathrm{rot}(g'))$.

L'observation suivante est une conséquence directe des lemmes 4.12 et 5.5 et de la définition 4.7.

Remarque 5.6. Pour tout $R>0$ assez grand par rapport à ε et tout $[\alpha]\in\mathscr{A}_{\varepsilon,\pm R}$, l'adhérence de $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$ dans $\Gamma\backslash G^4$ est compacte ; ainsi, l'adhérence de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ dans $\Gamma\backslash G^4$, c'est-à-dire l'image dans $\Gamma\backslash G^4$ du support de $W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,\pm R}$, est compacte.

On définit une mesure $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de la manière suivante. La mesure de Haar de G induit une mesure naturelle sur $\Gamma\backslash G^2$. L'espace Triconn de (5.5) se projette, en considérant les deux premières coordonnées, sur $\Gamma\backslash G^2$, avec des fibres dénombrables paramétrées par Γ. Soit $\lambda_{\mathrm{Triconn}}$ la mesure localement finie sur Triconn dont le poussé en avant est la mesure naturelle de $\Gamma\backslash G^2$ et dont la restriction à chaque fibre est la mesure de comptage. On définit, sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$, la mesure

$$\mu_{\varepsilon,\pm R}:=W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,\pm R}\,\lambda_{\mathrm{Triconn}} \tag{5.8}$$

(*cf.* (5.4)). Elle est finie d'après la remarque 5.6. On vérifie également qu'elle est invariante par la symétrie d'ordre trois sym de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de (5.7).

Soient Π^+ et Π^- deux pantalons de groupes fondamentaux

$$\pi_1(\Pi^{\pm})=\langle a^{\pm},b^{\pm},c^{\pm}\,|\,c^{\pm}b^{\pm}a^{\pm}=1\rangle.$$

Pour $\varepsilon'>0$, on dit que deux éléments $\mathtt{T}^+\in\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ et $\mathtt{T}^-\in\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ sont ε'-*bien recollés* s'ils définissent des représentations $(\varepsilon/R,\pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^{\pm})$ dans G qui, après conjugaison par Γ, sont ε'-bien recollées le long de a^+ et a^- via des données géométriques associées à $\mathtt{T}^+$ et $\mathtt{T}^-$, au sens de la définition 4.17.

Notre but est désormais d'expliquer le résultat suivant, qui implique les propositions 3.4 (avec $\mathrm{Geom}_{\varepsilon,R}=\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$) et 3.3.(2).

Proposition 5.7. *En supposant la condition* (R) *vérifiée, il existe* $C > 0$ *tel que pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $R > 0$ *assez grand par rapport à* ε*, les mesures* sym*-invariantes* $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ *sur* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ *de* (5.8) *satisfont la conclusion de la proposition 3.4 : on a* $\mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R})$ *et pour tout sous-ensemble mesurable* A *de* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$*, l'ensemble des éléments de* $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ *qui sont* $(C\varepsilon/R)$*-bien recollés à au moins un élément de* A *est de* $(\mu_{\varepsilon,-R})$*-mesure supérieure ou égale à* $\mu_{\varepsilon,R}(A)$*.*

5.4. Reformulation en termes de la distance de Lévy–Prokhorov

Soient $\varepsilon, R > 0$. Comme au paragraphe 5.3 précédent, notons $\mathscr{A}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble fini des classes de conjugaison dans Γ d'éléments $\rho(a)$ où $\rho : \pi_1(\Pi^{\pm}) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaite. Supposons R assez grand par rapport à ε de sorte que pour tout $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,\pm R}$, l'élément $\alpha \in \Gamma \subset G$ soit proximal dans G/P_τ (corollaire 4.13.(1)), de points fixes attractif $\alpha^{\oplus}$ et répulsif $\alpha^{\ominus}$. Comme au paragraphe 4.5, notons L_α l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty) = (\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$; c'est une classe à gauche du centralisateur $Z_G(\alpha_0)$ de $\alpha_0 = \exp(\mathfrak{h})$ dans G (remarque 4.15). Le centralisateur $Z_\Gamma(\alpha)$ de α dans Γ est contenu dans le stabilisateur $\mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$ qui agit sur L_α par multiplication à gauche. Dans ce paragraphe, nous reformulons la proposition 5.7 en termes de mesures sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$.

Notons que, comme Γ est un réseau cocompact de G et $\mathfrak{h}$ est régulier (cadre 2.16), le quotient $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ est compact (*cf.* Wolf, 1962, Th. 4.2).

Exemple 5.8. Soient $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (*cf.* exemples 2.23 et 4.10). Pour Γ sans torsion et $\alpha \in \Gamma$ proximal dans G/P_τ, les groupes $Z_G(\alpha)$ et $Z_\Gamma(\alpha)$ sont isomorphes respectivement à $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ et $\mathbb{Z}^{n-1}$, et $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha \simeq Z_\Gamma(\alpha)\backslash Z_G(\alpha) \simeq \mathbb{T}^{2(n-1)}$ est un tore compact.

On peut voir l'ensemble $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$ de (5.6) comme un sous-ensemble de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash G^4$ plutôt que de $\Gamma\backslash G^4$: en effet, si deux éléments de

$$\{(x, y_0, y_1, y_2) \in G^4 \mid y_1 = \alpha^{\pm} y_0,\ y_2 \in \Gamma y_0\}$$

ont même image dans $\Gamma\backslash G^4$, alors ils ont déjà même image dans $Z_\Gamma(\alpha)\backslash G^4$. D'après les lemmes 4.16.(2) et 5.5, si R est assez grand par rapport à ε, alors pour tout $[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')] \in \mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ (resp. pour tout $[(g, g', \alpha g', \beta\alpha g')] \in \mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$), l'élément g appartient au domaine de définition $\mathscr{U}_\alpha$ (resp. $\mathscr{U}_{\alpha^{-1}}$) de l'application « pied » $\Psi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to L_\alpha$ (resp. $\Psi_{\alpha^{-1}} : \mathscr{U}_{\alpha^{-1}} \to L_{\alpha^{-1}}$), *cf.* définition 4.14. L'application $\Psi_{\alpha^{\pm 1}}$ est équivariante par rapport aux actions de $Z_\Gamma(\alpha) = Z_\Gamma(\alpha^{-1})$ par multiplication à gauche, donc induit une application

$$\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{\pm 1}} : \mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R} \longrightarrow Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{\pm 1}} \tag{5.9}$$

donnée par $\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha}[(g, g', \alpha^{-1}g', \beta g')] = [\Psi_\alpha(g)]$ (resp. $\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{-1}}[(g, g', \alpha g', \beta\alpha g')] = [\Psi_{\alpha^{-1}}(g)]$).

Soit $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ la mesure finie sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ de (5.8). Elle se restreint en une mesure finie $\mu^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$ sur $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$, qui induit sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{\pm 1}}$ une mesure finie

$$m^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R} := (\Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{\pm 1}})_*\, \mu^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}. \tag{5.10}$$

Rappelons (*cf.* paragraphe 4.5) que le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ du paragraphe 4.1.3 préserve L_α, alors que l'involution inv échange L_α et $L_{\alpha^{-1}}$. Ainsi, $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{-1}} = (\varphi_1 \circ \mathrm{inv})(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha)$.

La proposition 5.7 se reformule en termes de proximité des mesures $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ pour la distance suivante, dite de *Lévy–Prokhorov*.

Définition 5.9. Soient μ_1, μ_2 deux mesures finies sur un espace métrique X, telles que $\mu_1(X) = \mu_2(X)$. On pose

$$d_{LP}(\mu_1,\mu_2) := \inf\big\{\delta \geqslant 0 \mid \mu_1(A) \leqslant \mu_2(\mathscr{V}_\delta(A))\ \forall A \subset X\big\},$$

où $\mathscr{V}_\delta(A)$ désigne le δ-voisinage uniforme de A dans X.

Ceci définit une distance d_{LP} sur les mesures sur X. (Pour vérifier la symétrie, notons que si $d_{LP}(\mu_1,\mu_2) \leqslant \delta$, alors pour tout $A \subset X$ on a

$$\mu_2(A) \leqslant \mu_2(X) - \mu_2(\mathscr{V}_\delta(X \smallsetminus \mathscr{V}_\delta(A))) \leqslant \mu_1(X) - \mu_1(X \smallsetminus \mathscr{V}_\delta(A)) = \mu_1(\mathscr{V}_\delta(A)),$$

d'où $d_{LP}(\mu_2,\mu_1) \leqslant \delta$.) Dans notre cas X sera $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ muni de la distance induite par d_G par restriction et passage au quotient, où $\alpha \in \Gamma$ est proximal dans G/P_τ.

La proposition 5.7 se reformule ainsi.

Proposition 5.10. *En supposant la condition* (R) *vérifiée, il existe* $C > 0$ *avec la propriété suivante : pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout* $R > 0$ *assez grand par rapport à* ε *et tout* $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$, *les mesures finies* $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ *et* $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$ *sur* $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ (*cf.* (5.10)) *ont même masse totale et l'on a*

$$d_{LP}\big(m^{\alpha}_{\varepsilon,R}, (\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}\big) \leqslant \frac{C\varepsilon}{R}. \tag{5.11}$$

Démonstration du fait que la proposition 5.10 implique la proposition 5.7. Rappelons (*cf.* paragraphe 5.3) que $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ est l'union disjointe de ses sous-ensembles $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,\pm R}$ où $[\alpha]$ parcourt l'ensemble fini $\mathscr{A}_{\varepsilon,\pm R}$. Comme toute mesure a même masse totale que ses poussés en avant, on a

$$\begin{cases} \mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \sum_{[\alpha]} \mu^{\alpha}_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}) = \sum_{[\alpha]} m^{\alpha}_{\varepsilon,R}(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha), \\ \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}) = \sum_{[\alpha]} m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_{\alpha^{-1}}) = \sum_{[\alpha]} ((\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R})(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha). \end{cases}$$

Ainsi, le fait que les mesures $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ aient même masse totale comme dans la proposition 5.10 implique l'égalité $\mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R})$ de la proposition 5.7.

Soit $C > 0$ la constante de la proposition 5.10. Pour tout sous-ensemble mesurable A de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de A est l'union disjointe sur $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$ des ensembles

$$B_\alpha := (\varphi_1 \circ \mathrm{inv} \circ \Psi^{\mathrm{tri}}_{\alpha^{-1}})^{-1}\big(\mathscr{V}_{C\varepsilon/R}\big(\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha\big(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}\big)\big)\big) \subset \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,-R},$$

où $\mathscr{V}_{C\varepsilon/R}(\cdot)$ désigne le $(C\varepsilon/R)$-voisinage uniforme dans $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$. Par définition (5.10) de $m^\alpha_{\varepsilon,-R}$, on a

$$\mu^\alpha_{\varepsilon,-R}(B_\alpha) = \big((\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_*\, m^\alpha_{\varepsilon,-R}\big)\big(\mathscr{V}_{C\varepsilon/R}\big(\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha\big(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}\big)\big)\big)$$

qui, par la proposition 5.10, est supérieur ou égal à $m^\alpha_{\varepsilon,R}(\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}))$. Par définition (5.10) de $m^\alpha_{\varepsilon,R}$, on a donc $\mu^\alpha_{\varepsilon,-R}(B_\alpha) \geqslant \mu^\alpha_{\varepsilon,R}(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R})$. Ainsi, la $(\mu_{\varepsilon,-R})$-mesure de l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de A est égale à $\sum_{[\alpha]} \mu^\alpha_{\varepsilon,-R}(B_\alpha) \geqslant \sum_{[\alpha]} \mu^\alpha_{\varepsilon,R}(A \cap \mathrm{Triconn}^\alpha_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,R}(A)$. □

5.5. Utilisation de la condition de retournement (R)

Nous avons vu au paragraphe 5.4 précédent que pour démontrer la proposition 3.4, il suffit de démontrer la proposition 5.10. Expliquons à présent comment la condition (R) du paragraphe 2.3.2 intervient dans la démonstration de la proposition 5.10.

La condition (R) affirme que $Z_G(\mathsf{h})$ contient, dans sa composante neutre, un élément central j d'ordre deux tel qui échange $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(0,\infty,1)$. Notons $\mathrm{refl} : G \to G$ la multiplication à droite par j ; elle commute à inv. Posons

$$I := \mathrm{inv} \circ \mathrm{refl} : G \longrightarrow G. \tag{5.12}$$

Les involutions refl et I de G passent au quotient en des involutions de l'espace G/Z^τ des τ-triangles de G/P_τ du paragraphe 4.1 :

- ▷ refl (« réflexion ») envoie $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,1)$,
- ▷ I envoie $g \cdot \underline{\tau}(0,\infty,-1)$ sur $g \cdot \underline{\tau}(\infty,0,-1)$

(*cf.* figure 11). (Par exemple, si τ est la restriction à $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ d'un plongement $\tau_{\mathbb{C}} : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \hookrightarrow G$ comme à la remarque 2.19.(1), alors refl et I correspondent à la multiplication à droite respectivement par $\tau_{\mathbb{C}}(\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right))$ et $\tau_{\mathbb{C}}(\left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right))$.)

Notons que rot et I engendrent un groupe de transformations de G qui est relativement compact, car il préserve l'ensemble $\{\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty), \underline{\tau}(-1)\}$ et le sous-groupe Z^τ de G qui fixe ces trois points est compact. Quitte à remplacer la distance riemannienne G-invariante à gauche d_G par sa moyenne par le groupe engendré par rot et I, *on supposera désormais que d_G est invariante par* rot *et par* I. Pour tout élément proximal $\alpha \in G$, l'involution refl de G (resp. le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ du paragraphe 4.1.3) préserve l'ensemble L_α, et induit une involution (resp. un flot) sur $\Lambda\backslash L_\alpha$ pour tout sous-groupe Λ de $Z_G(\alpha)$.

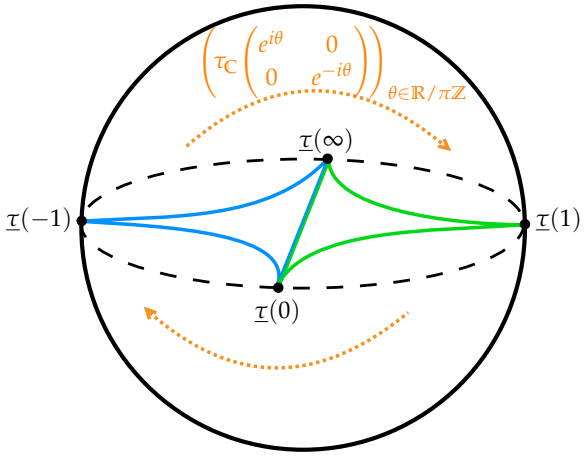


Figure 11 – La transformation refl échange les τ-triangles $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(0,\infty,1)$ de G/P_τ ; la transformation I échange les τ-triangles $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(\infty,0,-1)$ de G/P_τ. Ici $G=\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ et $G/P_\tau=\partial\mathbb{H}^3$. La condition de retournement (R) est satisfaite : le tore compact $\left(\begin{smallmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta}\end{smallmatrix}\right)_{\theta\in\mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}}$ permet de « retourner continûment » $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ en $\underline{\tau}(0,\infty,1)$ en fixant $\underline{\tau}(0)$ et $\underline{\tau}(\infty)$.

5.5.1. *Existence de l'élément j.* — L'existence d'un élément $j\in Z_G(\mathsf{h})$ d'ordre deux qui échange $\underline{\tau}(0,\infty,-1)$ et $\underline{\tau}(0,\infty,1)$, définissant des involutions refl : $G\to G$ (multiplication à droite par j) et $I:=\mathrm{inv}\circ\mathrm{refl}:G\to G$ comme ci-dessus, permet d'oublier les mesures $m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ pour ne plus travailler qu'avec les mesures $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ de (5.10).

Proposition 5.11. *En supposant la condition (R) vérifiée, soient $\varepsilon,R>0$.*

1. *Une représentation $\rho:\pi_1(\Pi)\to G$ est (ε,R)-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a),\rho(b),\rho(c),g,g')$ si et seulement si ρ est $(\varepsilon,-R)$-presque parfaite de donnée géométrique $(\rho(a),\rho(b),\rho(c),I(g),I(g'))$. En particulier, $\mathscr{A}_{\varepsilon,R}=\mathscr{A}_{\varepsilon,-R}$.*
2. *Pour R assez grand par rapport à ε comme au paragraphe 5.4 et pour $[\alpha]\in\mathscr{A}_{\varepsilon,R}$, on a $m^\alpha_{\varepsilon,-R}=I_*\,m^\alpha_{\varepsilon,R}$. En particulier, $m^\alpha_{\varepsilon,R}$ et $m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ ont même masse totale.*

Démonstration. (1) Comme d_G est invariante par $I=\mathrm{inv}\circ\mathrm{refl}$, l'application cloche $\chi_{\varepsilon/R}:G\to\mathbb{R}^+$ du paragraphe 5.1 vérifie $\chi_{\varepsilon/R}(I(x)^{-1}I(g))=\chi_{\varepsilon/R}(x^{-1}g)$ pour tous $x,g\in G$. De plus, on a $\varphi_R\circ\mathrm{inv}=\mathrm{inv}\circ\varphi_{-R}$ pour tout $R\in\mathbb{R}$ et $I\circ\mathrm{rot}=\mathrm{rot}^2\circ I$, et φ_R commute avec refl. On en déduit aisément, par un changement de variable, que $W_{\varepsilon,R}(I(x),I(y))=W_{\varepsilon,-R}(x,y)$ pour tous $x,y\in G$, puis que

$$W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,R}\circ I^{\mathrm{tri}}=W^{\mathrm{tri}}_{\varepsilon,-R}, \tag{5.13}$$

où $I^{\mathrm{tri}}:\mathrm{Triconn}\to\mathrm{Triconn}$ est l'involution donnée par

$$I^{\mathrm{tri}}(x,y_0,y_1,y_2)=\big(I(x),\mathrm{rot}\circ I(y_1),\mathrm{rot}\circ I(y_0),\mathrm{rot}\circ I(y_2)\big). \tag{5.14}$$

On conclut en appliquant le lemme 5.3.

(2) D'après (5.8) et (5.13), on a $I_*^{\mathrm{tri}}\mu_{\varepsilon,R}^{\alpha} = \mu_{\varepsilon,-R}^{\alpha}$. D'autre part, on a $I(L_\alpha) = L_{\alpha^{-1}}$ et, comme Ψ_α est une projection orthogonale (définition 4.14) pour la métrique riemannienne associée à d_G, qui est par hypothèse invariante par I, on a $I(\mathscr{U}_\alpha) = \mathscr{U}_{\alpha^{-1}}$ et $I \circ \Psi_\alpha = \Psi_{\alpha^{-1}} \circ I : \mathscr{U}_\alpha \to L_{\alpha^{-1}}$. On en déduit $I \circ \Psi_\alpha^{\mathrm{tri}} = \Psi_{\alpha^{-1}}^{\mathrm{tri}} \circ I^{\mathrm{tri}}$, puis

$$m_{\varepsilon,-R}^{\alpha} = (\Psi_{\alpha^{-1}}^{\mathrm{tri}})_*\mu_{\varepsilon,-R}^{\alpha} = (\Psi_{\alpha^{-1}}^{\mathrm{tri}})_* I_*^{\mathrm{tri}}\mu_{\varepsilon,R}^{\alpha} = I_*(\Psi_{\alpha}^{\mathrm{tri}})_*\mu_{\varepsilon,R}^{\alpha} = I_*\, m_{\varepsilon,R}^{\alpha}. \qquad \square$$

Pour démontrer la proposition 5.10, il suffit donc de montrer que la mesure $m_{\varepsilon,R}^{\alpha}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ est proche, pour la distance de Lévy–Prokhorov, de son poussé en avant par $\varphi_1 \circ \mathrm{inv} \circ I = \varphi_1 \circ \mathrm{refl}$.

5.5.2. *Tores compacts.* — La condition (R) requiert que l'élément j soit central dans $Z_G(\mathsf{h})$ et appartienne à la composante neutre de $Z_G(\mathsf{h})$. Ceci permet d'obtenir une action d'un certain tore compact $\mathbb{S}_\alpha$, ce qui est utile de manière générale pour contrôler la distance de Lévy–Prokhorov (*cf.* lemme 5.17 ci-dessous).

Lemme 5.12. *Il existe un entier $N \geqslant 1$, ne dépendant que de G, avec la propriété suivante : en supposant la condition (R) vérifiée, pour tout réseau cocompact irréductible sans torsion Γ de G et tout élément proximal $\alpha \in \Gamma$, il existe un sous-groupe Λ_α d'indice $\leqslant N$ de $Z_\Gamma(\alpha)$ et un tore compact $\mathbb{S}_\alpha$ de $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ tels que l'involution* refl : $L_\alpha \to L_\alpha$ *corresponde à la multiplication à gauche par un élément de $\mathbb{S}_\alpha$.*

Notons que $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ est bien contenu dans le groupe $\mathrm{stab}_G(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$ qui agit à gauche sur L_α. En effet, le sous-groupe d'indice fini Λ_α de $Z_\Gamma(\alpha)$ contient une puissance de α.

Démonstration. Soient Γ un réseau cocompact irréductible sans torsion de G et $\alpha \in \Gamma$ un élément proximal. Comme à la remarque 4.15, soit $g_\alpha \in G$ envoyant $(\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ sur $(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$. On a $L_\alpha = g_\alpha Z_G(\mathsf{h})$ et $Z_G(\alpha) \subset g_\alpha Z_G(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$, où $Z_G(\mathsf{h}) = AZ_K(\mathsf{h})$. Comme Γ est sans torsion, la projection de $Z_\Gamma(\alpha)$ sur $g_\alpha A g_\alpha^{-1}$ est injective, donc $Z_\Gamma(\alpha)$ est abélien. La projection de $Z_\Gamma(\alpha)$ sur $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$ est contenue dans un sous-groupe abélien maximal $\mathbb{S}'_\alpha$ de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$. Or, il existe $N \geqslant 1$, ne dépendant que de G, tel que $\mathbb{S}'_\alpha$ admette un sous-groupe d'indice $\leqslant N$ qui est un tore maximal $\mathbb{S}_\alpha$ de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h})_0 g_\alpha^{-1}$ (*cf.* Milnor, 1964). On note Λ_α l'intersection de $Z_\Gamma(\alpha)$ avec l'image réciproque de $\mathbb{S}_\alpha$ par la projection sur $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$: c'est un sous-groupe d'indice $\leqslant N$ de $Z_\Gamma(\alpha)$. Par construction, $Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ contient le tore maximal $\mathbb{S}_\alpha$ de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha^{-1}$.

L'involution refl : $L_\alpha \to L_\alpha$ correspond à la multiplication à droite par $j \in G$, qui appartient par définition (*cf.* condition (R), paragraphe 2.3.2) au centre de $Z_G(\mathsf{h})$, et même (*cf.* paragraphe 2.3.4) au centre de $Z_K(\mathsf{h})_0$. Elle correspond donc à l'action de $j_\alpha := g_\alpha j g_\alpha^{-1}$ sur L_α par multiplication à gauche. L'élément j_α appartient au centre de $g_\alpha Z_K(\mathsf{h})_0 g_\alpha^{-1}$, donc au tore maximal $\mathbb{S}_\alpha$ (*cf.* Knapp, 2002, Cor. IV.4.47). $\square$

La distance de Lévy–Prokhorov se comporte bien par revêtement fini de degré borné (*cf.* Kahn, Labourie et Mozes, arXiv 2018, § 18), ce qui implique le fait suivant.

Remarque 5.13. Pour que les mesures finies $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ satisfassent la conclusion de la proposition 5.10, il suffit que leurs relevés à $\Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ la satisfassent, où Λ_α est donné par le lemme 5.12. (Par définition, le relevé de $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ est la mesure sur $\Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ dont le poussé en avant par le revêtement fini $\Lambda_\alpha \backslash L_\alpha \to Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ est $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ et dont la restriction à chaque fibre est la mesure de probabilité uniforme.)

Dans la suite, on travaille avec Λ_α plutôt que $Z_\Gamma(\alpha)$ afin de pouvoir utiliser le tore $\mathbb{S}_\alpha$ du lemme 5.12. Le lecteur pourra penser en première approximation $\Lambda_\alpha = Z_\Gamma(\alpha)$, motivé notamment par l'exemple suivant.

Exemple 5.14. Soient $G = \mathrm{PSL}(n,\mathbb{C})$ et $\tau : \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \hookrightarrow G$ le plongement irréductible (*cf.* exemples 2.23 et 4.10). Pour Γ sans torsion et $\alpha \in \Gamma$ proximal, on peut prendre $\Lambda_\alpha = Z_\Gamma(\alpha)$ et $\mathbb{S}_\alpha = g_\alpha Z_K(\mathsf{h}) g_\alpha$ où $g_\alpha \in G$ envoie $(\underline{\tau}(0), \underline{\tau}(\infty))$ sur $(\alpha^{\ominus}, \alpha^{\oplus})$. On a $C^\Gamma_\alpha := Z_G(\Lambda_\alpha)_0 = Z_G(\alpha)$ et $C^\Gamma_\alpha / (C^\Gamma_\alpha \cap \Lambda_\alpha) \simeq \mathbb{T}^{2(n-1)}$ (*cf.* exemple 5.8).

5.5.3. *Stratégie de démonstration de la proposition 5.10.* — Prenons R assez grand par rapport à ε comme au paragraphe 5.4. Pour $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$, soit Λ_α le sous-groupe d'indice fini de $Z_\Gamma(\alpha)$ donné par le lemme 5.12. Le groupe $C^\Gamma_\alpha := Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ agit sur $X := \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ par multiplication à gauche. Cette action se factorise en une action libre du groupe quotient $C^\Gamma_\alpha / (C^\Gamma_\alpha \cap \Lambda_\alpha)$. Pour démontrer la proposition 5.10, l'idée est de :

1. trouver une mesure finie $n^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$, invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, telle que $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ soit absolument continue par rapport à $n^{\alpha}_{\varepsilon,R}$, de dérivée de Radon–Nikodym proche de 1 : c'est l'objet de la proposition 5.15, qui utilise le mélange (fait 3.5) via le lemme 5.1 ; en relevant $n^{\alpha}_{\varepsilon,R}$, on obtient une mesure finie sur $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$, invariante par $C^\Gamma_\alpha = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$, par rapport à laquelle le relevé de $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ est absolument continu, de dérivée de Radon–Nikodym proche de 1 ;
2. observer que pour un bon sous-groupe à un paramètre $(a_t)_{t\in\mathbb{R}} \subset C^\Gamma_\alpha$ contenant α, l'élément φ_1 agit sur X « presque » comme a_1 (proposition 5.18) ; considérer alors le tore compact $\mathbb{T}_\alpha$ de $C^\Gamma_\alpha / (C^\Gamma_\alpha \cap \Lambda_\alpha)$ engendré par les images de $(a_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et du tore $\mathbb{S}_\alpha$ du lemme 5.12, et montrer en utilisant (1) et un argument général (lemme 5.17) que la mesure $m_{\varepsilon,R}$ relevée à $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ est proche pour la distance de Lévy–Prokhorov de sa moyenne par $\mathbb{T}_\alpha$; en déduire, en utilisant la remarque 5.13, que $m_{\varepsilon,R}$ est proche pour la distance de Lévy–Prokhorov de la mesure $(\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_* m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$, qui est égale à $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$ d'après la proposition 5.11.

5.6. Mesures proches au sens de la dérivée de Radon–Nikodym

La première étape de la démonstration de la proposition 5.10 consiste à établir le résultat suivant, qui utilise le mélange (fait 3.5) via le lemme 5.1.

Proposition 5.15. *En supposant la condition* (R) *vérifiée, pour tout* $\varepsilon > 0$, *tout* $R > 0$ *assez grand par rapport à* ε *et tout* $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$, *il existe une mesure finie* $n^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ *sur* $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$, *invariante par* $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, *telle que la mesure* $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ *de* (5.10) *soit absolument continue par rapport à* $n^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ *et que sa dérivée de Radon–Nikodym vérifie*

$$\left\| \frac{\mathrm{d}m^{\alpha}_{\varepsilon,R}}{\mathrm{d}n^{\alpha}_{\varepsilon,R}} - 1 \right\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{R^2}.$$

La proposition 5.15 implique que, sous la condition (R), les mesures $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ et $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$ sont absolument continues l'une par rapport à l'autre, avec une dérivée de Radon–Nikodym proche de 1. En effet, d'après la proposition 5.11 on a $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R} = (\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$. En raisonnant comme à la fin de la démonstration du lemme 5.12, on voit que l'action de $\varphi_1 \circ \mathrm{refl}$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ correspond à la multiplication à gauche par un élément de $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$. La mesure $(\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R}$ est donc elle aussi absolument continue par rapport à $n^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ et sa dérivée de Radon–Nikodym vérifie $\|\mathrm{d}((\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,-R})/\mathrm{d}n^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \leqslant \varepsilon/R^2$. Pour $\varepsilon/R^2 \leqslant 1/2$, on en déduit que $(\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ est absolument continue par rapport à $m^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ et que

$$\left\| \frac{\mathrm{d}((\varphi_1 \circ \mathrm{refl})_* \, m^{\alpha}_{\varepsilon,R})}{\mathrm{d}m^{\alpha}_{\varepsilon,R}} - 1 \right\|_\infty \leqslant \frac{4\varepsilon}{R^2}.$$

Afin de construire une mesure $n^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ vérifiant la conclusion de la proposition 5.15, pour tous $\varepsilon, R > 0$, on définit une fonction $W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R} : G^3 \to \mathbb{R}$ par

$$W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}(x, y_0, y_1) = W_{\varepsilon,R}(x, y_0) \, W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}^2(x), \mathrm{rot}(y_1)),$$

où $x, y_0, y_1 \in G$. Elle est invariante par l'action diagonale de G par multiplication à gauche. On appelle *couple biconnecté dans* $\Gamma\backslash G$ tout élément de

$$\mathrm{Biconn} := \{[(x, y_0, y_1)] \in \Gamma\backslash G^3 \mid y_1 \in \Gamma y_0\},$$

où Γ agit diagonalement sur G^3 par multiplication à gauche. Pour $\varepsilon, R > 0$ et $\alpha \in \Gamma$, on pose

$$\mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R} := \{[(x, y_0, y_1)] \in \mathrm{Biconn} \mid W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}(x, y_0, y_1) > 0 \text{ et } y_1 = \alpha^{-1} y_0\}.$$

Comme pour les couples triconnectés, on peut voir $\mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ comme un sous-ensemble de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash G^3$. En particulier, $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$ agit sur $\mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ par multiplication à gauche. On a une projection naturelle π : Triconn $\to$ Biconn, qui envoie

$\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ sur $\mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ de manière $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$-équivariante. Pour R assez grand par rapport à ε, l'application « pied » $\Psi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to L_\alpha$ de la définition 4.14 induit (par analogie avec $\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha$, *cf.* (5.9)) une application $\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha : \mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R} \to Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ qui à $[(g, g', \alpha^{-1}g')]$ associe $[\Psi_\alpha(g)]$. Cette application $\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha$ est $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$-équivariante car Ψ_α est $Z_G(\alpha)$-équivariante (remarque 4.15). Le diagramme suivant commute :

$$\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R} \xrightarrow{\pi} \mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R} \xrightarrow{\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha} Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha \ .$$
$$\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha$$

Démonstration de la proposition 5.15. Comme Triconn, l'espace Biconn se projette, en considérant les deux premières coordonnées, sur $\Gamma\backslash G^2$, avec des fibres dénombrables paramétrées par Γ. Soit $\lambda_{\mathrm{Biconn}}$ la mesure localement finie sur Biconn dont le poussé en avant est la mesure naturelle de $\Gamma\backslash G^2$ (induite par la mesure de Haar de G) et dont la restriction à chaque fibre est la mesure de comptage. On définit, sur $\mathrm{Biconn}_{\varepsilon,R}$, la mesure $\nu_{\varepsilon,R} := W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R}\, \lambda_{\mathrm{Biconn}}$. Soit $\nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ sa restriction à $\mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ pour $\alpha \in \Gamma$. Montrons que la mesure $n^{\alpha}_{\varepsilon,R} := (\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_* \nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ convient. Comme la fonction $W^{\mathrm{bi}}_{\varepsilon,R} : G^3 \to \mathbb{R}$ est invariante par l'action diagonale de G, la mesure $\nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ est invariante par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$, donc $n^{\alpha}_{\varepsilon,R} = (\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_* \nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ aussi par $Z_G(Z_\Gamma(\alpha))$-équivariance de $\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha$. Soit $f^{\alpha}_{\varepsilon,R} : \mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R} \to \mathbb{R}$ la fonction lisse donnée par

$$f^{\alpha}_{\varepsilon,R}([g, g', \alpha^{-1}g']) = w_{\varepsilon,R}([\mathrm{rot}(g)], [\mathrm{rot}^2(g')]) = \sum_{\beta\in\Gamma} W_{\varepsilon,R}(\mathrm{rot}(g), \mathrm{rot}^2 \circ \beta(g'))$$

(*cf.* (5.2)). On a $\pi_* \mu^{\alpha}_{\varepsilon,R} = f^{\alpha}_{\varepsilon,R}\, \nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ où $\mu^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ est la restriction à $\mathrm{Triconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}$ de la mesure $\mu_{\varepsilon,R}$ de (5.8), et pour R assez grand par rapport à ε on a $\|f^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \leqslant \varepsilon/R^2$ par le lemme 5.1. La mesure $m^{\alpha}_{\varepsilon,R} = (\Psi^{\mathrm{tri}}_\alpha)_*\, \mu^{\alpha}_{\varepsilon,R} = (\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_*\, (f^{\alpha}_{\varepsilon,R}\, \nu^{\alpha}_{\varepsilon,R})$ est absolument continue par rapport à $n^{\alpha}_{\varepsilon,R} = (\Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)_*\, \nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}$, et sa dérivée de Radon–Nikodym $h^{\alpha}_{\varepsilon,R} = \frac{\mathrm{d}m^{\alpha}_{\varepsilon,R}}{\mathrm{d}n^{\alpha}_{\varepsilon,R}}$ vérifie $\|h^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \leqslant \|f^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty$. En effet, pour toute fonction $\psi \in L^1(Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha, \mathbb{R})$, on a

$$\left|\int_{Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha} \psi\, (h^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1)\, \mathrm{d}n^{\alpha}_{\varepsilon,R}\right| = \left|\int_{\mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}} (\psi \circ \Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)\, (f^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1)\, \mathrm{d}\nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}\right|$$
$$\leqslant \|f^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \left|\int_{\mathrm{Biconn}^{\alpha}_{\varepsilon,R}} (\psi \circ \Psi^{\mathrm{bi}}_\alpha)\, \mathrm{d}\nu^{\alpha}_{\varepsilon,R}\right| = \|f^{\alpha}_{\varepsilon,R} - 1\|_\infty \left|\int_{Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha} \psi\, \mathrm{d}n^{\alpha}_{\varepsilon,R}\right|. \quad \square$$

5.7. Mesures proches au sens de la distance de Lévy–Prokhorov

On souhaite à présent déduire la proposition 5.10 de la proposition 5.15.

5.7.1. *Premier ingrédient.* — On utilise les observations générales suivantes sur la distance de Lévy–Prokhorov (définition 5.9). La démonstration du lemme 5.17 est esquissée au paragraphe 5.8 ci-dessous.

Remarques 5.16. Soient (X, d) un espace métrique, μ, ν deux mesures finies sur X et $f, g : X \to X$ deux applications mesurables.

1. Si f est une isométrie bijective de (X, d), alors $d_{LP}(f_*\mu, f_*\nu) = d_{LP}(\mu, \nu)$.
2. En général, $d_{LP}(f_*\mu, g_*\mu) \leqslant \sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$. En effet, supposons $\delta := \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)) < +\infty$. Pour tout $A \subset X$ et tout $x \in X$, si $f(x) \in A$, alors $g(x) \in \mathscr{V}_\delta(A)$, d'où $(f_*\mu)(A) = \mu(f^{-1}(A)) \leqslant \mu(g^{-1}(\mathscr{V}_\delta(A))) = (g_*\mu)(\mathscr{V}_\delta(A))$.

Lemme 5.17. *Pour tout $k \geqslant 1$, il existe une constante $C_k > 0$ avec la propriété suivante : pour toute variété riemannienne X munie d'une action par isométries d'un tore compact $\mathbb{T}$ de dimension k, préservant une mesure n sur X, pour tout $\delta > 0$ et toute fonction $h : X \to \mathbb{R}_+^*$, si la moyenne $\overline{h} := \int_{g\in\mathbb{T}} h \circ g \, \mathrm{d}g$ de h pour la mesure de probabilité de Haar de $\mathbb{T}$ vérifie $e^{-\delta}\,\overline{h} \leqslant h \leqslant e^{\delta}\,\overline{h}$, alors*

$$d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leqslant \delta \cdot C_k \sup_{x\in X} \operatorname{diam}(\mathbb{T} \cdot x).$$

5.7.2. *Second ingrédient.* — Rappelons que l'on a supposé Γ sans torsion. Pour $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$, soit Λ_α le sous-groupe d'indice fini de $Z_\Gamma(\alpha)$ du lemme 5.12, et soit $C_\alpha^\Gamma = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$. Soit $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot sur G du paragraphe 4.1.3. On utilise le résultat suivant, qui provient d'un raffinement du lemme 4.12, et dont la démonstration est esquissée au paragraphe 5.9 ci-dessous.

Proposition 5.18. *Il existe $C' > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε et tout $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$, il existe un sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ du centre de C_α^Γ tel que $\alpha_{2R} = \alpha$ et $d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) \leqslant C'(\varepsilon/R + e^{-R})$ pour tous $x \in L_\alpha$ et $t \in [0, 2R]$.*

5.7.3. *Esquisse de démonstration de la proposition 5.10.* — Soit $\varepsilon > 0$, soit $R > 0$ assez grand par rapport à ε comme au paragraphe 5.4, et soit $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$. On considère le quotient $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ de L_α par Λ_α, muni de la métrique riemannienne induite par celle de G par restriction à L_α et passage au quotient. Le groupe $C_\alpha^\Gamma = Z_G(\Lambda_\alpha)_0$ agit sur X par multiplication à gauche, et cette action se factorise en une action du groupe quotient $C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$.

Soit $\mathbb{T}_\alpha \subset C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ le tore compact engendré par les images dans $C_\alpha^\Gamma/(C_\alpha^\Gamma \cap \Lambda_\alpha)$ du tore compact $\mathbb{S}_\alpha \subset C_\alpha^\Gamma$ du lemme 5.12 et du sous-groupe à un paramètre $(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de la proposition 5.18. On vérifie qu'il existe $C'' > 0$, indépendant de ε et R, tel que le diamètre des orbites de $\mathbb{T}_\alpha$ dans X est borné par $C''R$ dès que R est assez grand par rapport à ε.

Soit $\hat{m}_{\varepsilon,R}^\alpha$ le relevé à $X = \Lambda_\alpha \backslash L_\alpha$ de la mesure $m_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$. La proposition 5.15 implique, pour R assez grand par rapport à ε, l'existence d'une mesure finie $\hat{n}_{\varepsilon,R}^\alpha$ sur X,

invariante par C^Γ_α, telle que $\hat m^\alpha_{\varepsilon,R} = h\hat n^\alpha_{\varepsilon,R}$ où $h : X \to \mathbb{R}^*_+$ vérifie $\|h-1\|_\infty \leqslant \varepsilon/R^2$. La moyenne $\overline{h} = \int_{g\in\mathbb{T}_\alpha} h\circ g \,\mathrm{d}g$ de h par $\mathbb{T}_\alpha$ vérifie alors $e^{-3\varepsilon/R^2}\,\overline{h} \leqslant h \leqslant e^{3\varepsilon/R^2}\,\overline{h}$ dès que R est assez grand par rapport à ε. D'après le lemme 5.17 il existe $C_G > 0$, ne dépendant que de la dimension maximale d'un tore compact de G, tel que

$$d_{LP}\big(\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}, \overline{h}\hat n^\alpha_{\varepsilon,R}\big) = d_{LP}\big(h\hat n^\alpha_{\varepsilon,R}, \overline{h} n^\alpha_{\varepsilon,R}\big) \leqslant \frac{3\varepsilon}{R^2}\, C_G \sup_{x\in X} \mathrm{diam}(\mathbb{T}_\alpha\cdot x) \leqslant 3C_G C''\frac{\varepsilon}{R}. \quad (5.15)$$

Or, d'après la proposition 5.11 on a $(\varphi_1\circ\mathrm{inv})_*\,\hat m^\alpha_{\varepsilon,-R} = (\varphi_1\circ\mathrm{refl})_*\,\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}$. D'après le lemme 5.12 l'involution $\mathrm{refl} : X \to X$ correspond à l'action d'un élément de $\mathbb{S}_\alpha$ donc de $\mathbb{T}_\alpha$, et d'après la proposition 5.18, pour R assez grand par rapport à ε, l'élément $\alpha_1 \in \mathbb{T}_\alpha$ envoie tout $x \in X$ à distance $\leqslant 2C'\varepsilon/R$ de $\varphi_1(x)$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d_{LP}(\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}, (\varphi_1\circ\mathrm{refl})_*\,\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}) \leqslant\ & d_{LP}(\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}, \overline{\hat h}\hat n^\alpha_{\varepsilon,R}) + d_{LP}(\overline{\hat h}\hat n^\alpha_{\varepsilon,R}, (\alpha_1\circ\mathrm{refl})_*\,\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}) \\ & + d_{LP}((\alpha_1\circ\mathrm{refl})_*\,\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}, (\varphi_1\circ\mathrm{refl})_*\,\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}). \end{aligned}$$

Le premier terme de droite est borné par $3C_GC''\varepsilon/R$ d'après (5.15). Le deuxième terme est égal au premier par la remarque 5.16.(1), en utilisant le fait que $\alpha_1\circ\mathrm{refl} \in \mathbb{T}_\alpha$ agit sur X comme une isométrie et préserve $\overline{\hat h}\hat n^\alpha_{\varepsilon,R}$. Le troisième terme est borné par $2C'\varepsilon/R$, d'après la remarque 5.16.(2) et le fait que α_1 envoie tout $x \in X$ à distance $\leqslant 2C'\varepsilon/R$ de $\varphi_1(x)$. On obtient ainsi $d_{LP}(\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}, (\varphi_1\circ\mathrm{refl})_*\,\hat m^\alpha_{\varepsilon,R}) \leqslant (6C_GC'' + 2C')\varepsilon/R$. On conclut en utilisant la remarque 5.13.

5.8. Démonstration du lemme 5.17

Nous traitons ici le cas où X est le tore euclidien $\mathbb{T}^\ell = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^\ell$ muni de sa mesure de Haar n et $\mathbb{T}^k$ est un sous-tore, pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$. Le cas général utilise les mêmes idées : *cf.* Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018, § 18).

Comme la distance de Lévy–Prokhorov entre deux mesures est invariante par multiplication des deux mesures par une même constante, on peut supposer que n est une mesure de probabilité. On raisonne en trois étapes :

1. pour $k = \ell = 1$, si $\overline{h} \leqslant e^{2\delta}\,h$, alors $d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leqslant \delta$;
2. pour $k = 1$ et $\ell \geqslant 1$ quelconque, si $\overline{h} \leqslant e^{2\delta}\,h$, alors $d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leqslant \delta$;
3. pour $1 \leqslant k \leqslant \ell$ quelconques, si $e^{-2\delta}\,\overline{h} \leqslant h \leqslant e^{2\delta}\,\overline{h}$, alors $d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leqslant (2^k-1)\,\delta$.

▷ Démonstration de (1) : Supposons $\overline{h} \leqslant e^{2\delta}\,h$ et soit $A \subset X = \mathbb{T}^1$. Si $\mathscr{V}_\delta(A) = \mathbb{T}^1$, on a

$$(hn)(\mathscr{V}_\delta(A)) = \int_{\mathbb{T}^1} h\mathrm{d}n = \overline{h} \geqslant \overline{h}\,n(A).$$

Si $\mathscr{V}_\delta(A) \subsetneq \mathbb{T}^1$, alors $n(A) \leqslant n(\mathscr{V}_\delta(A)) - 2\delta \leqslant (1-2\delta)\,n(\mathscr{V}_\delta(A))$ car $X = \mathbb{T}^1$, d'où

$$(hn)(\mathscr{V}_\delta(A)) \geqslant e^{-2\delta}\,\overline{h}\,n(\mathscr{V}_\delta(A)) \geqslant \frac{e^{-2\delta}}{1-2\delta}\,\overline{h}\,n(A) \geqslant \overline{h}\,n(A).$$

▷ Démonstration de (2) : Écrivons $X = \mathbb{T}^\ell$ comme le produit de $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}^1$ et d'un facteur $\mathbb{T}^{\ell-1}$. Toute mesure m sur X se désintègre en des mesures m_x sur $\mathbb{T}^1 \times \{x\}$ pour $x \in \mathbb{T}^{\ell-1}$. D'après (1) on a $d_{LP}((hn)_x, (\overline{h}n)_x) \leqslant \delta$ pour tout $x \in \mathbb{T}^{\ell-1}$. Par intégration, pour tout $A \subset X$, en utilisant le fait que $(\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}) \cap \mathscr{V}_\delta(A)$ contient le δ-voisinage de $(\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}) \cap A$ dans $\{x\} \times \mathbb{T}^{\ell-1}$, on voit que $(hn)(\mathscr{V}_\delta(A)) \geqslant (\overline{h}n)(A)$.

▷ Démonstration de (3) : On raisonne par récurrence sur k. Le cas $k = 1$ est contenu dans (2). Supposons le résultat vrai pour $k-1$. Écrivons notre facteur $\mathbb{T}^k$ comme $\mathbb{T}^{k-1} \times \mathbb{T}^1$, et soit $\widetilde{h}$ la moyenne de h par $\mathbb{T}^{k-1}$. Par hypothèse on a $e^{-2\delta}\,\overline{h} \leqslant h \leqslant e^{2\delta}\,\overline{h}$, d'où $e^{-2\delta}\,\overline{h} \leqslant \widetilde{h} \leqslant e^{2\delta}\,\overline{h}$ en prenant la moyenne par $\mathbb{T}^{k-1}$. On en déduit $e^{-4\delta}\,\widetilde{h} \leqslant h \leqslant e^{4\delta}\,\widetilde{h}$, et donc $d_{LP}(hn, \widetilde{h}n) \leqslant (2^{k-1}-1)\,2\delta$ par hypothèse de récurrence. D'autre part, comme $\overline{h}$ est la moyenne de $\widetilde{h}$ par $\mathbb{T}^1$, on a $d_{LP}(\widetilde{h}n, \overline{h}n) \leqslant \delta$ par (2). Par inégalité triangulaire, on obtient

$$d_{LP}(hn, \overline{h}n) \leqslant d_{LP}(hn, \widetilde{h}n) + d_{LP}(\widetilde{h}n, \overline{h}n) \leqslant (2^{k-1}-1)\,2\delta + \delta = (2^k - 1)\,\delta.$$

5.9. Démonstration de la proposition 5.18

Le lemme 4.12 affirme que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α est (ε, R)-presque réalisé par (g, g') au sens de la définition 4.6, alors $g^{-1}\alpha g$ est proche de $\exp(R\,\mathfrak{h})$ au sens où les points fixes attractifs, les points fixes répulsifs et les images par λ (projections de Jordan/Lyapounov) de ces deux éléments sont proches. Le lemme suivant affirme que dans ce contexte, l'élément $\Psi_\alpha(g)^{-1}\alpha\Psi_\alpha(g)$ est proche de $\exp(R\,\mathfrak{h})$ au sens de la distance G-invariante à gauche d_G, où $\Psi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to L_\alpha$ est l'application « pied » de la définition 4.14.

Lemme 5.19. *Il existe $C'' > 0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si α est (ε, R)-presque réalisé par (g, g') au sens de la définition 4.6, alors*

$$d_G(\varphi_{2R}(\Psi_\alpha(g)), \alpha\,\Psi_\alpha(g)) \leqslant C''(\varepsilon + e^{-R}).$$

Pour démontrer le lemme 5.19, Kahn, Labourie et Mozes utilisent les propriétés suivantes de contraction et de dilatation du flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Soit U_τ^+ le radical unipotent du sous-groupe parabolique P_τ de G du paragraphe 1.4, de sorte que $P_\tau = Z_K(\mathfrak{a})AU_\tau^+$. Soit U_τ^- le conjugué de U_τ^+ par $\tau(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right))$, de sorte que $P_\tau^- := Z_K(\mathfrak{a})AU_\tau^-$ soit un sous-groupe parabolique de G opposé à P_τ. Les classes à gauche de A (resp. U_τ^+, resp. P_τ, resp. U_τ^-, resp. P_τ^-) forment un feuilletage de G, dit central (resp. stable, resp. central stable, resp. instable, resp. central instable) ; pour $t > 0$, la transformation φ_t envoie feuille sur feuille de manière isométrique (resp. uniformément contractante, resp. contractante au sens large, resp. uniformément dilatante, resp. dilatante au sens large). Pour $x, y \in G$ suffisamment proches, la feuille stable de x intersecte la feuille centrale instable de y en un unique point, proche de x et y.

Exemple 5.20. Pour $G = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, vu comme $T^1\mathbb{H}^2$ comme au paragraphe 4.1, le flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot géodésique. La feuille du feuilletage central stable (resp. central instable) contenant $x \in T^1\mathbb{H}^2$ est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents pointant vers le même point à l'infini $\eta_x^+ \in \partial\mathbb{H}^2$ (resp. $\eta_x^- \in \partial\mathbb{H}^2$) dans le futur (resp. passé) que x. La feuille du feuilletage stable (resp. instable) contenant x est l'ensemble des vecteurs unitaires tangents de la feuille centrale stable (resp. centrale instable) de x qui sont basés sur le même horocycle centré en η_x^+ (resp. η_x^-) que x.

Kahn, Labourie et Mozes utilisent ces propriétés dynamiques du flot $(\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ pour établir l'existence de constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que :

1. pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, tout $R > 0$ assez grand et tout $(g, g', \alpha) \in G^3$, si (g, g') réalise (ε, R)-presque α (définition 4.6), alors il existe $z \in G$ tel que $d_G(z, g) \leqslant C_1(\varepsilon + e^{-R})$ et $d_G(\varphi_{2R}(z), \alpha g) \leqslant C_1(\varepsilon + e^{-R})$;
2. pour tout $\delta > 0$ assez petit, tout $R > 0$ et tous $\alpha, z \in G$, si α est proximal dans G/P_τ, de points fixes attractif $\alpha^\oplus$ et répulsif $\alpha^\ominus$, si $d_\tau({z'}^{-1} \cdot \alpha^\ominus, \underline{\tau}(0)) \leqslant \delta$ et si $d_\tau({z'}^{-1} \cdot \alpha^\oplus, \underline{\tau}(\infty)) \leqslant \delta$ pour tout $z' \in \{z, \varphi_{2R}(z)\}$, alors

$$d_G(\Psi_\alpha \circ \varphi_{2R}(z), \varphi_{2R} \circ \Psi_\alpha(z)) \leqslant C_2\delta.$$

Ils en déduisent alors le lemme 5.19 en utilisant le lemme 4.12 et le fait que l'application « pied » Ψ_α, définie comme la projection orthogonale d'un petit voisinage de L_α sur L_α, est lipschitzienne ; sa constante de Lipschitz ne dépend pas de α d'après la remarque 4.15.

Démonstration de la proposition 5.18. Pour tout $[\alpha] \in \mathscr{A}_{\varepsilon,R}$, par définition, il existe $(g, g') \in G$ tel que α est $(\varepsilon/R, R)$-presque réalisé par (g, g'). Le lemme 5.19 affirme que si R est assez grand par rapport à ε, alors il existe $y \in L_\alpha$ tel que

$$d_G(\varphi_{2R}(y), \alpha y) = d_G(y\exp(R\,\mathsf{h}), \alpha y) \leqslant C'' r_{\varepsilon,R},$$

où $r_{\varepsilon,R} := (\varepsilon/R + e^{-R})$; autrement dit, comme d_G est G-invariante à gauche, on a $d_G(\exp(-R\,\mathsf{h})y^{-1}\alpha y, \mathrm{id}) \leqslant C'' r_{\varepsilon,R}$.

Soit $v \in Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a}) + \mathfrak{a}$ de norme minimale tel que $\exp(2Rv) = \exp(-R\,\mathsf{h})y^{-1}\alpha y$. Pour tout $t \in [0, 2R]$, on a $d_G(\exp(tv), \mathrm{id}) \leqslant d_G(\exp(2Rv), \mathrm{id}) \leqslant C'' r_{\varepsilon,R}$. On considère le sous-groupe à un paramètre

$$(\alpha_t)_{t\in\mathbb{R}} := \Big(y\exp\Big(t\Big(\frac{\mathsf{h}}{2} + v\Big)\Big)y^{-1}\Big)_{t\in\mathbb{R}}$$

de $Z(Z_G(\alpha))_0 \subset Z(C_\alpha^\Gamma)$. On a $\alpha_{2R} = \alpha$ et $d_G(\varphi_t(y), \alpha_t y) = d_G(\exp(tv), \mathrm{id}) \leqslant C'' r_{\varepsilon,R}$ pour tout $t \in [0, 2R]$.

En écrivant L_α comme une classe à gauche de $AZ_K(\mathfrak{a})$ comme à la remarque 4.15, on voit que pour tout $x \in L_\alpha$ et tout $t \in [0, 2R]$, on a $x^{-1}y \in AZ_K(\mathfrak{a})$ et

$$d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) = d_G((x^{-1}y)\exp(tv)(x^{-1}y)^{-1}, \mathrm{id}).$$

Les éléments $(x^{-1}y)\exp(tv)(x^{-1}y)^{-1}$ et $\exp(tv)$ de $AZ_K(\mathfrak{a})$ ne diffèrent que selon leurs composantes dans $Z_K(\mathfrak{a})$, qui sont conjuguées par un élément de $Z_K(\mathfrak{a})$ indépendant de t (à savoir la composante de $x^{-1}y$ dans $Z_K(\mathfrak{a})$). On en déduit l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que $d_G(\varphi_t(x), \alpha_t x) \leqslant (C'/C'')\, d_G(\varphi_t(y), \alpha_t y) \leqslant C' r_{\varepsilon,R}$ pour tous $x \in L_\alpha$ et $t \in [0, 2R]$. □

6. Conclusion : Étape combinatoire

Dans cette partie nous concluons la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17 à partir des propositions 3.2 et 3.4. Nous présentons l'approche de Kahn, Labourie et Mozes (arXiv 2018), qui utilise (comme Kahn et Marković, 2012) le lemme des mariages de Hall (fait 3.6).

Remarque 6.1. L'approche de Hamenstädt, plus précise, ne requiert pas le lemme des mariages. Le point clé est une version plus forte de la proposition 5.10, qui revient essentiellement à l'existence, pour tout $\alpha \in \Gamma$, d'un homéomorphisme ψ_α de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ tel que $(\psi_\alpha)_* m^\alpha_{\varepsilon,R} = (\varphi_1 \circ \mathrm{inv})_* m^\alpha_{\varepsilon,-R}$ et tel que la distance de tout point de $Z_\Gamma(\alpha)\backslash L_\alpha$ à son image par ψ_α soit uniformément (exponentiellement) petite par rapport à R.

Dans toute la partie, on travaille dans le cadre 2.16. On suppose la condition (R) *du paragraphe 2.3.2 vérifiée. On fixe un réseau cocompact irréductible* Γ *de* G*, que l'on suppose comme précédemment sans torsion.*

6.1. Idée de la démonstration : graphes enrubannés

Comme expliqué au paragraphe 3.5, pour conclure la démonstration des théorèmes 2.4 et 2.17, il s'agit de prendre les représentations de groupes de pantalons $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites $(C\varepsilon/R)$-bien recollées des propositions 3.3 et 3.4, avec les données géométriques appropriées correspondantes, et de montrer qu'on peut les agencer de manière adéquate pour obtenir une représentation d'une surface compacte S, avec une décomposition en pantalons bipartie et un graphe $\mathscr{G}$ comme au paragraphe 3.1, vérifiant les hypothèses de la proposition 3.2 ou de son raffinement 4.19.

Pour trouver la surface S et la décomposition en pantalons, l'idée est de commencer par construire le graphe $\mathscr{G}$. Plus précisément, $\mathscr{G}$ sera un *graphe enrubanné*, c'est-à-dire un graphe muni d'un ordre cyclique sur l'ensemble des arêtes en chaque sommet.

Le point est que tout graphe enrubanné fini trivalent $\mathscr{G}$ peut être épaissi (en remplaçant chaque arête par un cylindre) pour obtenir une surface compacte S de genre au moins deux. Les milieux des arêtes de $\mathscr{G}$ s'épaississent en des courbes fermées simples de S qui définissent une décomposition en pantalons de S. On peut voir $\mathscr{G}$ comme un graphe sur S, contenant exactement un sommet à l'intérieur de chaque pantalon, avec une arête pour chaque courbe de bord entre deux pantalons, comme au paragraphe 3.1. Le graphe $\mathscr{G}$ est biparti si et seulement si la décomposition en pantalons l'est.

6.2. Le point de vue de Kahn, Labourie et Mozes

Fixons deux pantalons Π^+ et Π^- de groupes fondamentaux

$$\pi_1(\Pi^\pm) = \langle a^\pm, b^\pm, c^\pm \mid c^\pm b^\pm a^\pm = 1 \rangle.$$

Pour $\varepsilon, R > 0$, soit $\mathscr{C}_{\varepsilon,\pm R}$ l'ensemble des classes de conjugaison modulo Γ de représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ. Rappelons qu'il est fini d'après le corollaire 4.13.(2). Il admet une symétrie naturelle sym d'ordre trois induite par la symétrie sym de $\mathrm{Hom}(\pi_1(\Pi^\pm), G)$ donnée par

$$\mathrm{sym}(\rho)(a^\pm, b^\pm, c^\pm) = (\rho(b^\pm), \rho(c^\pm), \rho(a^\pm)) \tag{6.1}$$

pour tout $\rho \in \mathrm{Hom}(\pi_1(\Pi^\pm), G)$ (*cf.* remarque 4.8). Cette symétrie est sans point fixe pour R assez grand par rapport à ε d'après le corollaire 4.13.(1).

D'autre part, rappelons que l'ensemble $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ du paragraphe 5.3 paramètre les données géométriques associées aux représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ modulo l'action de Γ. Il est muni lui aussi d'une symétrie sym d'ordre trois, donnée par (5.7). On a une projection naturelle $\varpi : \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \to \mathscr{C}_{\varepsilon,\pm R}$, qui induit une projection naturelle de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ vers $\mathscr{C}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$, encore notée ϖ. Comme au paragraphe 5.3, pour $\varepsilon' > 0$, la définition 4.17 induit une notion d'éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ et $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont *ε'-bien recollés*.

En utilisant les mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ de la proposition 5.7 et le lemme des mariages (fait 3.6), Kahn, Labourie et Mozes établissent le résultat suivant.

Proposition 6.2. *Supposons la condition (R) vérifiée. Soit $C > 0$ la constante de la proposition 5.7. Pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε, il existe*

- *un graphe enrubanné fini $\mathscr{G}$, trivalent, biparti, de sommets $\mathscr{P} = \mathscr{P}^+ \sqcup \mathscr{P}^-$,*
- *une application $E : \mathscr{P}^\pm \to \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ (« étiquetage »)*

tels que pour tout sommet $v \in \mathscr{P}^\pm$, de sommets adjacents $v_1, v_2, v_3 \in \mathscr{P}^\mp$, on puisse trouver $\mathtt{T} \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ et $\mathtt{T}_1, \mathtt{T}_2, \mathtt{T}_3 \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\mp R}$ vérifiant $E(v) = [\mathtt{T}]$ et $E(v_i) = [\mathtt{T}_i]$, tels que $\mathrm{sym}^i(\mathtt{T})$ et $\mathtt{T}_i$ soient $(C\varepsilon/R)$-bien recollés pour tout $i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Adoptons la terminologie suivante : pour une classe de conjugaison $\boldsymbol{c} \in \mathscr{C}_{\varepsilon,\pm R}$ de représentations de $\pi_1(\Pi^\pm)$, et pour un pantalon Π quelconque, disons qu'une représentation $\rho_\Pi : \pi_1(\Pi) \to \Gamma$ est *de type* $\boldsymbol{c}$ si l'on peut identifier les courbes de bord de Π à $a^\pm, b^\pm, c^\pm$ de sorte que ρ_Π définisse une représentation de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans la classe de conjugaison $\boldsymbol{c}$. Ceci ne dépend que de la classe de $\boldsymbol{c}$ dans $\mathscr{C}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$.

Le graphe enrubanné $\mathscr{G}$ de la proposition 6.2 définit une surface compacte S avec une décomposition en pantalons bipartie comme au paragraphe 6.1, et l'on en déduit une représentation de $\pi_1(S)$ dans Γ par le lemme suivant.

Lemme 6.3. *Soit S une surface compacte de genre au moins deux avec une décomposition en pantalons bipartie $\mathscr{P} = \mathscr{P}^+ \sqcup \mathscr{P}^-$. Soit $\mathscr{G}$ un graphe fini sur S, avec un sommet à l'intérieur de chaque pantalon et une arête pour chaque courbe de bord entre deux pantalons, comme au paragraphe 3.1. Pour $\varepsilon, R > 0$, soit $E : \mathscr{P}^\pm \to \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ un étiquetage comme à la proposition 6.2. Alors il existe une représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$, unique à conjugaison par Γ près, telle que pour tout $\Pi \in \mathscr{P}^\pm$, la restriction de ρ à $\pi_1(\Pi)$ soit de type $\varpi \circ E(\Pi) \in \mathscr{C}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$.*

Notons que $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \subset \mathrm{Triconn}_{C\varepsilon,\pm R}$ pour $C \geqslant 1$. La proposition 3.2 implique alors que pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $R > 0$ assez grand par rapport à ε, la représentation $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ du lemme 6.3 est injective. De plus, à $\delta > 0$ fixé, la proposition 4.19 assure que si $\varepsilon > 0$ est assez petit par rapport à δ et $R > 0$ assez grand par rapport à ε, alors ρ admet une application de bord (δ, τ)-sullivannienne de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dans G/P_τ, ce qui démontre les théorèmes 2.4 et 2.17.

6.3. Démonstration de la proposition 6.2

D'après la proposition 5.7, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $R > 0$ assez grand par rapport à ε, il existe des mesures $\mu_{\varepsilon,\pm R}$ sur $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$, invariantes par la transformation sym de (5.7), vérifiant $\mu_{\varepsilon,R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}) = \mu_{\varepsilon,-R}(\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R})$ et telles que pour tout sous-ensemble mesurable A de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de A est de $(\mu_{\varepsilon,-R})$-mesure supérieure ou égale à $\mu_{\varepsilon,R}(A)$.

Les espaces $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$ et $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ étant compacts, on peut remplacer les mesures $\mu_{\varepsilon,R}$ et $\mu_{\varepsilon,-R}$ par des mesures $\mu^f_{\varepsilon,R}$ et $\mu^f_{\varepsilon,-R}$ de même masse totale, de *supports finis*, qui sont encore invariantes par sym et vérifient encore que pour tout $A \subset \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de A est de $\mu^f_{\varepsilon,-R}$-mesure supérieure ou égale à $\mu^f_{\varepsilon,R}(A)$. Autrement dit, en notant $\mathscr{F}^+$ (resp. $\mathscr{F}^-$) le support (fini) de $\mu^f_{\varepsilon,R}$ (resp. $\mu^f_{\varepsilon,-R}$) et $\mathscr{F}$

l'union disjointe de $\mathscr{F}^+$ et $\mathscr{F}^-$, le système d'inéquations

$$\begin{cases} \mu(\mathtt{T}) & = & \mu(\mathrm{sym}(\mathtt{T})) & \forall \mathtt{T} \in \mathscr{F}, \\ \sum_{\mathtt{T}^+ \in \mathscr{F}^+} \mu(\mathtt{T}^+) & = & \sum_{\mathtt{T}^- \in \mathscr{F}^-} \mu(\mathtt{T}^-), & \\ \sum_{\mathtt{T}^- \in \mathscr{F}^-(A)} \mu(\mathtt{T}^-) & \geqslant & \sum_{\mathtt{T}^+ \in A} \mu(\mathtt{T}^+) & \forall A \subset \mathscr{F}^+ \end{cases} \tag{6.2}$$

admet une solution $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{R}^+$ non nulle, où $\mathscr{F}^-(A)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}^- \subset \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés à au moins un élément de $A \subset \mathscr{F}^+ \subset \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}$. Le système (6.2) étant à coefficients entiers, ceci implique l'existence d'une solution *rationnelle*, et donc (en multipliant par un entier assez grand) l'existence d'une solution *entière* non nulle $\mu : \mathscr{F} \to \mathbb{N}$.

Soit $\mathscr{E}^\pm$ l'ensemble obtenu en prenant $\mu(\mathtt{T}) \in \mathbb{N}$ copies de chaque élément $\mathtt{T} \in \mathscr{F}^\pm$. La première ligne de (6.2) assure que la transformation d'ordre trois (sans point fixe) sym de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ induit une transformation d'ordre trois (sans point fixe) sym de $\mathscr{E}^\pm$. La deuxième ligne assure que $\#\mathscr{E}^+ = \#\mathscr{E}^-$. Soit $\mathscr{M} \subset \mathscr{E}^+ \times \mathscr{E}^-$ le sous-ensemble correspondant aux couples $(\mathtt{T}^+, \mathtt{T}^-) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R} \times \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}$ qui sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollés. La troisième ligne de (6.2) assure que la condition (3.1) est vérifiée. D'après le lemme des mariages de Hall (fait 3.6), il existe une bijection $\psi : \mathscr{E}^+ \to \mathscr{E}^-$ telle que tout couple de la forme $(x, \psi(x))$ où $x \in \mathscr{E}^+$ corresponde à un couple $(C\varepsilon/R)$-bien recollé.

Soit $\mathscr{G}$ le graphe fini biparti de sommets $\mathscr{P} = \mathscr{P}^+ \sqcup \mathscr{P}^-$ où $\mathscr{P}^\pm := \mathscr{E}^+/\langle \mathrm{sym} \rangle$, pour lequel on met une arête entre les images de x et $\psi(x)$ pour tout $x \in \mathscr{E}^+$. Ce graphe est trivalent car sym est d'ordre trois sans point fixe. C'est un graphe enrubanné : sym définit un ordre cyclique sur les arêtes en chaque sommet. La projection naturelle de $\mathscr{E}^\pm$ vers $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ induit une application $E : \mathscr{P}^\pm \to \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ vérifiant les conclusions de la proposition 6.2.

6.4. Démonstration du lemme 6.3

On utilise l'observation suivante.

Remarque 6.4. Pour ε/R assez petit, si $\rho^+ : \pi_1(\Pi^+) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, R)$-presque parfaite, si $\rho^- : \pi_1(\Pi^-) \to \Gamma$ est $(\varepsilon/R, -R)$-presque parfaite et si les représentations ρ^+ et ρ^- sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de a^+ et a^-, alors pour $\gamma \in \Gamma \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$ les représentations ρ^+ et $\gamma\rho^-(\cdot)\gamma^{-1}$ ne sont pas $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de a^+ et a^-.

En effet, soit $\gamma \in \Gamma$. Si ρ^+ et $\gamma\rho^-(\cdot)\gamma^{-1}$ sont $(C\varepsilon/R)$-bien recollées le long de a^+ et a^-, alors $\gamma\rho^-(a^-)\gamma^{-1} = \rho^+(a^+) = \rho^-(a^-) =: \alpha$, donc γ appartient au centralisateur $Z_\Gamma(\alpha)$ de α dans Γ. Or, l'application « pied » $\Psi_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to L_\alpha$ (définition 4.14) est $Z_\Gamma(\alpha)$-équivariante et tout élément non trivial du groupe discret sans torsion $Z_\Gamma(\alpha)$ déplace les points de L_α d'au moins une certaine distance, indépendante de ε et R.

La condition (4.3) sur (g^+, g^-) pour $\varepsilon' = C\varepsilon/R$ ne peut donc pas être satisfaite par $(g^+, \gamma g^-)$ pour $\gamma \in Z_\Gamma(\alpha) \smallsetminus \{\mathrm{id}\}$ si ε/R est assez petit.

Dans la suite, on note $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,\pm R} \subset G^4$ la pré-image de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ par la projection naturelle $G^4 \to \Gamma\backslash G^4$. La symétrie d'ordre trois sym de $\mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R}$ se relève en une symétrie d'ordre trois de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,\pm R}$, encore notée sym. La projection $\varpi : \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,\pm R} \to \mathscr{C}_{\varepsilon,\pm R}$ du paragraphe 6.2 se relève en une projection $\widetilde{\varpi}$ de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,\pm R}$ vers l'ensemble des représentations $(\varepsilon/R, \pm R)$-presque parfaites de $\pi_1(\Pi^\pm)$ dans Γ, telle que $\widetilde{\varpi} \circ \mathrm{sym} = \mathrm{sym} \circ \widetilde{\varpi}$. On dit que des éléments de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}$ et $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,-R}$ sont $(C\varepsilon/R)$-*bien recollés* si leurs images par $\widetilde{\varpi}$ le sont.

Dans le cadre du lemme 6.3, le groupe fondamental $\pi_1(\mathscr{G})$ est un groupe libre non abélien. On peut voir S comme un épaississement de $\mathscr{G}$, ce qui donne une injection $\pi_1(\mathscr{G}) \hookrightarrow \pi_1(S)$. On peut voir $\mathscr{G}$ comme l'image d'une rétraction $r : S \to \mathscr{G}$, ce qui donne une surjection $r_* : \pi_1(S) \twoheadrightarrow \pi_1(\mathscr{G})$. La composition de l'injection $\pi_1(\mathscr{G}) \hookrightarrow \pi_1(S)$ avec la surjection r_* est l'identité de $\pi_1(\mathscr{G})$. On en déduit

$$\pi_1(S) = (\mathrm{Ker}\, r_*) \rtimes \pi_1(\mathscr{G}),$$

et il existe un revêtement infini $\widehat{S}$ de S tel que $\mathrm{Ker}\, r_*$ s'identifie à $\pi_1(\widehat{S})$ et $\pi_1(\mathscr{G})$ au groupe de Galois du revêtement $\widehat{S} \to S$. Le graphe trivalent $\mathscr{G}$ sur S se relève en un arbre trivalent $\widetilde{\mathscr{G}}$ (revêtement universel de $\mathscr{G}$) sur $\widehat{S}$ (*cf.* figure 12) ; notons $\widetilde{\mathscr{P}} = \widetilde{\mathscr{P}}^+ \sqcup \widetilde{\mathscr{P}}^-$ l'ensemble de ses sommets.

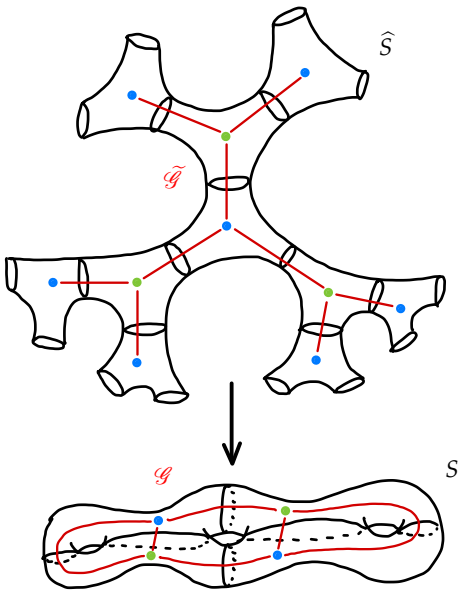


FIGURE 12 – Le revêtement $\widehat{S}$ de S

Pour toute arête $\widetilde{A}$ de $\widetilde{\mathscr{G}}$, notons $a_{\widetilde{A}}$ un élément de $\pi_1(\widehat{S})$ correspondant à la courbe de bord entre les deux pantalons de $\widehat{S}$ définis par $\widetilde{A}$, orientée de sorte que si $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3$ sont incidentes dans cet ordre en un même sommet, alors $a_{\widetilde{A}_3} a_{\widetilde{A}_2} a_{\widetilde{A}_1} = 1$. Le groupe $\pi_1(\widehat{S})$ admet alors la présentation par le système générateur $\{a_{\widetilde{A}} \mid \widetilde{A} \text{ arête de } \widetilde{\mathscr{G}}\}$ et les relations $a_{\widetilde{A}_3} a_{\widetilde{A}_2} a_{\widetilde{A}_1} = 1$ pour toutes arêtes $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \widetilde{A}_3$ incidentes dans cet ordre en un même sommet.

Fixons un sommet initial de $\mathscr{G}$, appartenant à un pantalon $\Pi_0 \in \mathscr{P}^+$, et un relevé $\widetilde{\Pi}_0 \in \widetilde{\mathscr{P}}^+$ dans $\widetilde{\mathscr{G}}$. Choisissons un représentant $[\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}] \in \widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ de $E(\Pi_0) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$. Par hypothèse, pour tout sommet $\widetilde{\Pi}_1 \in \widetilde{\mathscr{P}}^-$ adjacent à $\widetilde{\Pi}_0$, se projetant en $\Pi_1 \in \mathscr{P}^-$, il existe un représentant $[\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_1}] \in \widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,-R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ de $E(\Pi_1) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,-R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ qui est *compatible* avec $[\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$ au sens où il existe $i_0, i_1 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{sym}^{i_0}(\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_0})$ et $\mathrm{sym}^{i_1}(\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_1})$ soient $(C\varepsilon/R)$-bien recollés ; ce représentant est unique d'après la remarque 6.4. De même, pour tout sommet $\widetilde{\Pi}_2 \in \widetilde{\mathscr{P}}^+$ adjacent à $\widetilde{\Pi}_1$, se projetant en $\Pi_2 \in \mathscr{P}^+$, il existe un unique représentant $[\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_2}] \in \widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ de $E(\Pi_2) \in \mathrm{Triconn}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ qui soit compatible avec $[\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_1}]$. On continue. Comme $\widetilde{\mathscr{G}}$ est un arbre, il n'y a pas d'autre condition de compatibilité à vérifier. En raisonnant de proche en proche, on obtient ainsi une famille $([\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}^+}])_{\widetilde{\Pi}^+ \in \widetilde{\mathscr{P}}^+}$ d'éléments de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ paramétrés par les sommets $\widetilde{\mathscr{P}}^+$, et une famille $([\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}^-}])_{\widetilde{\Pi}^- \in \widetilde{\mathscr{P}}^-}$ d'éléments de $\widetilde{\mathrm{Triconn}}_{\varepsilon,-R}/\langle \mathrm{sym} \rangle$ paramétrés par les sommets $\widetilde{\mathscr{P}}^-$, de sorte que les éléments au-dessus de deux sommets adjacents soient compatibles. Pour toute arête $\widetilde{A}$ de $\widetilde{\mathscr{G}}$ entre $\widetilde{\Pi}^+$ et $\widetilde{\Pi}^-$, si $\mathrm{sym}^{i^+}(\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}^+})$ et $\mathrm{sym}^{i^-}(\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}^+})$ sont bien recollés où $i^+, i^- \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on note $\rho_{\widehat{S}}(a_{\widetilde{A}}) \in \Gamma$ l'image de $a_{\widetilde{A}}$ par $\widetilde{\omega}(\mathrm{sym}^{i^+}(\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}^+}))$. Étant donnée la présentation par générateurs et relations de $\pi_1(\widehat{S})$ décrite ci-dessus, on obtient ainsi une représentation $\rho_{\widehat{S}} : \pi_1(\widehat{S}) \to \Gamma$.

Ceci nous donne également une *représentation d'holonomie* $\rho_{\mathscr{G}} : \pi_1(\mathscr{G}) \to \Gamma$, définie de manière unique. En effet, pour tout $f \in \pi_1(\mathscr{G})$, il existe un unique élément $\rho_{\mathscr{G}}(f) \in \Gamma$ tel que $[\widetilde{\mathrm{T}}_{f\cdot\widetilde{\Pi}_0}] = \rho_{\mathscr{G}}(f) \cdot [\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$. Par unicité de la construction (remarque 6.4), on a $[\widetilde{\mathrm{T}}_{f\cdot\widetilde{\Pi}}] = \rho_{\mathscr{G}}(f) \cdot [\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}}]$ pour tout sommet $\widetilde{\Pi}$ de $\widetilde{\mathscr{G}}$, et $\rho_{\mathscr{G}}(ff') = \rho_{\mathscr{G}}(f)\,\rho_{\mathscr{G}}(f')$ pour tous $f, f' \in \pi_1(\mathscr{G})$.

Par construction, pour tout $f \in \pi_1(\mathscr{G})$ et toute arête $\widetilde{A}$ de $\mathscr{G}$, on a $\rho_{\widehat{S}}(f a_{\widetilde{A}} f^{-1}) = \rho_{\mathscr{G}}(f)\,\rho_{\widehat{S}}(a_{\widetilde{A}})\,\rho_{\mathscr{G}}(f)^{-1}$. Comme les $a_{\widetilde{A}}$ engendrent $\pi_1(\widehat{S})$, on en déduit $\rho_{\widehat{S}}(f\gamma f^{-1}) = \rho_{\mathscr{G}}(f)\,\rho_{\widehat{S}}(\gamma)\,\rho_{\mathscr{G}}(f)^{-1}$ pour tout $\gamma \in \pi_1(\widehat{S})$. Ainsi, les représentations $\rho_{\widehat{S}} : \pi_1(\widehat{S}) \to \Gamma$ et $\rho_{\mathscr{G}} : \pi_1(\mathscr{G}) \to \Gamma$ se combinent en une représentation

$$\rho : \pi_1(S) = \pi_1(\widehat{S}) \rtimes \pi_1(\mathscr{G}) \longrightarrow \Gamma.$$

Cette représentation est unique étant donné notre choix initial de représentant $[\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$ de $E(\Pi_0)$. Changer le choix initial pour $[\widetilde{\mathrm{T}}_{\widetilde{\Pi}_0}]$ revient à conjuguer $\rho : \pi_1(S) \to \Gamma$ par un élément de Γ.

Ceci conclut la démonstration du lemme 6.3, et donc des théorèmes 2.4 et 2.17.

Références

Agol, I. (2013). « The virtual Haken conjecture », *Doc. Math.* **18**. Avec un appendice par Agol, Groves et Manning, p. 1045-1087.

Alessandrini, D., Lee, G.-S. et Schaffhauser, F. (2022). « Hitchin components for orbifolds », *J. Eur. Math. Soc.* À paraître.

Baker, M. D. et Cooper, D. (2015). « Finite-volume hyperbolic 3-manifolds contain immersed quasi-Fuchsian surfaces », *Algebr. Geom. Topol.* **15**, p. 1199-1228.

Benoist, Y. (1997). « Propriétés asymptotiques des groupes linéaires », *Geom. Funct. Anal.* **7**, p. 1-47.

——— (2009). « Five lectures on lattices in semisimple Lie groups », in : *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*. T. 18. Séminaires et Congrès. Paris : Société Mathématique de France, p. 117-176.

Bergeron, N. (2013). « La conjecture des sous-groupes de surfaces [d'après Jeremy Kahn et Vladimir Marković] », *Astérisque* **352**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1055, p. 429-458.

——— (2014). « La conjecture de Waldhausen est démontrée ! », *Gazette des mathématiciens* **140**, p. 31-37.

Bestvina, M. (2000). « Questions in geometric group theory ». `https://www.math.utah.edu/~bestvina/eprints/questions-updated.pdf`.

Beyrer, J. (2021). « Cross ratios on boundaries of symmetric spaces and Euclidean buildings », *Transform. Groups* **26**, p. 31-68.

Bochi, J., Potrie, R. et Sambarino, A. (2019). « Anosov representations and dominated splittings », *J. Eur. Math. Soc.* **21**, p. 3343-3414.

Bowen, L. (2004). « Weak forms of the Ehrenpreis Conjecture and the Surface Subgroup Conjecture ». arXiv : math/0411662.

Calegari, D. (2008). « Surface subgroups from homology », *Geom. Topol.* **12**, p. 1995-2007.

Canary, R. D. et al. (2017). « Projective Anosov Schottky groups and strongly amalgam Anosov representations », *Geom. Topol.* **21**. appendice à l'article *Amalgam Anosov representations* de Canary, Lee et Stover, p. 215-251.

Cooper, D. et Futer, D. (2019). « Ubiquitous quasi-Fuchsian surfaces in cusped hyperbolic 3-manifolds », *Geom. Topol.* **23**, p. 241-298.

Cooper, D., Long, D. D. et Reid, A. W. (1997). « Essential surfaces in bounded 3-manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **10**, p. 553-563.

Delp, K., Hoffoss, D. et Manning, J. F. (2015). « Problems in groups, geometry, and three-manifolds ». arXiv : 1512.04620.

Delzant, T. (1995). « L'image d'un groupe dans un groupe hyperbolique », *Comment. Math. Helv.* **70**, p. 267-284.

Ehrenpreis, L. (1970). « Cohomology with bounds », in : *Symposia Mathematica, Vol. IV (INDAM, Rome, 1968/69)*. Londres : Academic Press, p. 389-395.

Farb, B. et Mosher, L. (2002). « Convex cocompact subgroups of mapping class groups », *Geom. Topol.* **6**, p. 91-152.

Fock, V. et Goncharov, A. (2006). « Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **103**, p. 1-211.

González-Diez, G. et Harvey, W. J. (1999). « Surface groups inside mapping class groups », *Topology* **38**, p. 57-69.

Gordon, C. M., Long, D. D. et Reid, A. W. (2004). « Surface subgroups of Coxeter and Artin groups », *J. Pure Appl. Algebra* **189**, p. 135-148.

Gromov, M. (1987). « Hyperbolic groups », in : *Essays in group theory*. T. 8. MSRI Publications. New York : Springer, p. 75-263.

Groves, D. et Manning, J. F. (2021). « Quasiconvexity and Dehn filling », *Amer. J. Math.* **143**, p. 95-124.

Guichard, O. (2004). « Groupes plongés quasi isométriquement dans un groupe de Lie », *Math. Ann.* **330**, p. 331-351.

——— (2019). « Groupes convexes-cocompacts en rang supérieur [d'après Labourie, Kapovich, Leeb, Porti, ...] » *Astérisque* **414**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1138, p. 95-124.

Guichard, O. et Wienhard, A. (2012). « Anosov representations: Domains of discontinuity and applications », *Invent. Math.* **190**, p. 357-438.

Hall, P. (1935). « On representatives of subsets », *J. London Math. Soc.* **1**, p. 26-30.

Hamenstädt, U. (2005). « Word hyperbolic extensions of surface groups ». arXiv : 0505244.

——— (2015). « Incompressible surfaces in rank one locally symmetric spaces », *Geom. Funct. Anal.* **25**, p. 815-859.

——— (2021). « Incompressible surfaces in some locally symmetric spaces of arbitrary rank ». En préparation.

Helgason, S. (2001). *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*. T. 34. Graduate Studies in Mathematics. Réimpression corrigée de l'original de 1978. Providence, RI : American Mathematical Society.

Hubbard, J. H. (2006). *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1. Teichmüller theory*. Avec des contributions de A. Douady, W. Dunbar, R. Roeder, S. Bonnot, D. Brown, A. Hatcher, C. Hruska et S. Mitra. Ithaca, NY : Matrix Editions.

Kahn, J., Labourie, F. et Mozes, S. (arXiv 2018). « Surface groups in uniform lattices of some semi-simple groups ». arXiv : 1805.10189.

Kahn, J. et Marković, V. (2012). « Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold », *Ann. Math.* **175**, p. 1127-1190.

——— (2015). « The good pants homology and the Ehrenpreis Conjecture », *Ann. Math.* **182**, p. 1-72.

Kahn, J. et Wright, A. (2021). « Nearly Fuchsian surface subgroups of finite covolume Kleinian groups », *Duke Math. J.* **70**, p. 503-573.

Kapovich, M., Leeb, B. et Porti, J. (2014). « Morse actions of discrete groups on symmetric spaces ». arXiv : 1403.7671.

——— (2018). « A Morse Lemma for quasigeodesics in symmetric spaces and euclidean buildings », *Geom. Topol.* **22**, p. 3827-3923.

Kassel, F. (2019). « Geometric structures and representations of discrete groups », in : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 2018 (ICM 2018)*. World Scientific, p. 1113-1150.

Kent IV, R. P. et Leininger, C. J. (2008). « Shadows of mapping class groups: capturing convex cocompactness », *Geom. Funct. Anal.* **18**, p. 1270-1325.

Knapp, A. W. (2002). *Lie groups beyond an introduction*. T. 140. Progress in mathematics. Deuxième édition. Boston, MA : Birkhäuser Boston, Inc.

Kontorovich, A. et al. (2019). « What is... a thin group ? », *Notices Amer. Math. Soc.* **66**, p. 905-910.

Labourie, F. (2006). « Anosov flows, surface groups and curves in projective space », *Invent. Math.* **165**, p. 51-114.

Lackenby, M. (2010). « Surface subgroups of Kleinian groups with torsion », *Invent. Math.* **179**, p. 175-190.

Leininger, C. J. et Reid, A. W. (2006). « A combination theorem for Veech subgroups of the mapping class group », *Geom. Funct. Anal.* **16**, p. 403-436.

Long, D. D. et Reid, A. W. (2013). « Constructing thin groups », in : *Proceedings of the Hot Topics workshop on Thin groups and super-strong approximation*. T. 61. MSRI Publications, p. 151-166.

——— (2016). « Thin surface subgroups in cocompact lattices in SL(3,R) », *Illinois J. Math.* **60**. Special issue to celebrate the work of Wolfgang Haken, p. 39-53.

Long, D. D., Reid, A. W. et Thistlethwaite, M. (2011). « Zariski dense surface subgroups in SL(3,Z) », *Geom. Topol.* **15**, p. 1-9.

Long, D. D. et Thistlethwaite, M. (2018). « Zariski dense surface subgroups in SL(4,Z) », *Exp. Math.* **27**, p. 82-92.

——— (2020). « Zariski dense surface subgroups in $\mathrm{SL}(2k+1,\mathbb{Z})$ ». Pré-publication.

Masters, J. D. et Zhang, X. (2008). « Closed quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic knot complements », *Geom. Topol.* **12**, p. 2095-2171.

——— (2009). « Quasi-Fuchsian surfaces in hyperbolic link complements ». arXiv : 0909.4501.

Milnor, J. (1964). « On the Betti numbers of real varieties », *Proc. Amer. Math. Soc.* **15**, p. 275-280.

Pansu, P. (1995). « Sous-groupes discrets des groupes de Lie : rigidité, arithméticité », *Astérisque* **227**. Séminaire Bourbaki, Exposé 778, p. 69-105.
Pozzetti, M. B. (2019). « Higher rank Teichmüller theories », *Astérisque* **422**. Séminaire Bourbaki, Exposé 1159, p. 327-354.
Reid, A. W. (2006). « Surface subgroups of mapping class groups », in : *Problems on mapping class groups and related topics*. T. 74. Proc. Sympos. Pure Math. Providence, RI : American Mathematical Society, p. 257-268.
Stallings, J. R. (1968). « On torsion free groups with infinitely many ends », *J. Algebra* **2**, p. 312-334.
Thurston, W. P. (1997). *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. T. 35. Princeton Mathematical Series. Princeton, NJ : Princeton University Press.
Tits, J. (1972). « Free subgroups in linear groups », *J. Algebra* **20**, p. 250-270.
Waldhausen, F. (1968). « On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large », *Ann. of Math.* **87**, p. 56-88.
Wise, D. T. (2021). *The structure of groups with a quasiconvex hierarchy*. T. 209. Annals of Mathematics Studies. Princeton, NJ : Princeton University Press.
Wolf, J. A. (1962). « Discrete groups, symmetric spaces, and global holonomy », *Amer. J. Math.* **84**, p. 527-542.

Fanny Kassel

CNRS et Laboratoire Alexander Grothendieck
Institut des Hautes Études Scientifiques
Université Paris-Saclay
35 route de Chartres
91440 Bures-sur-Yvette, France

E-mail : kassel@ihes.fr

Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1182, p. 73 à 119
doi : 10.24033/ast.1183

NON-DENSITÉ DES POINTS ENTIERS ET VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE
[*d'après* B. Lawrence, W. Sawin et A. Venkatesh]

par **Marco Maculan**

A supposedly fun thing I'll never do again.
— D. F. Wallace

1. Introduction

Il est question ici d'une technique introduite par Lawrence et Venkatesh pour montrer la non-densité (pour la topologie de Zariski) des points entiers d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres. Les points rationnels d'une variété projective étant tous entiers et la non-densité dans une courbe étant équivalente à la finitude, la méthode conduit à une nouvelle preuve de la conjecture de Mordell :

Théorème 1.1. *Soit C une courbe projective lisse connexe de genre $g \geqslant 2$ sur un corps de nombres K. Alors, l'ensemble $C(K)$ des points K-rationnels de C est fini.*

Cet énoncé, ainsi que les suivants concernant les problèmes à la Shafarevich, ont déjà été discutés dans ce séminaire par Szpiro (1985) ; j'invite le lecteur à s'y référer.

Le théorème 1.1 a été démontré en premier par Faltings (1983, 1984). Par la suite Vojta (1991) en a donné une preuve combinant les méthodes classiques d'approximation diophantienne avec des arguments dans la veine de Mumford, 1965 (voir aussi Bombieri, 1990). Kim (2005, 2009) a proposé une approche généralisant les techniques de Chabauty (1941).

Quoique la preuve proposée par Lawrence et Venkatesh partage des aspects avec les méthodes de Chabauty et Kim, elle est plus proche à celle de Faltings. Pour en comprendre le fonctionnement, il n'est donc pas inutile de commencer par en retracer les grandes lignes.

1.1. La stratégie de Faltings

On fixe un corps de nombres K et un ensemble fini S de places de K. Grâce à une construction rusée due à Kodaira (1967) et Parshin (1968), on ramène la preuve du théorème 1.1 à celle de la conjecture de Shafarevich pour les courbes :

©Astérisque 438, SMF 2022

Théorème 1.2. *Pour un entier $g \geqslant 2$, l'ensemble des classes de K-isomorphie de courbes projectives lisses sur K de genre g à bonne réduction en dehors de S est fini.*

En passant à la jacobienne de la courbe, le théorème de Torelli permet de se ramener au problème analogue pour les variétés abéliennes :

Théorème 1.3. *Pour $g \in \mathbb{N}$, l'ensemble des classes de K-isomorphie de variétés abéliennes sur K de dimension g à bonne réduction en dehors de S est fini.*

La finitude sur laquelle repose à terme la démonstration de l'énoncé précédent est la « conjecture de Shafarevich pour les points », conséquence immédiate de la minoration d'Hermite–Minkowski du discriminant d'un corps de nombres (Serre, 1997, §4.1) :

Théorème 1.4 (Hermite–Minkowski)**.** *Pour $d \in \mathbb{N}$, l'ensemble des classes d'isomorphie d'extensions de degré d de K non ramifiées en dehors de S est fini.*

Combiné avec le théorème de densité de Čeboratev et des arguments élémentaires, il entraîne le résultat de finitude suivant pour les représentations galoisiennes dû à Faltings (Deligne, 1985, Théorème 3.1) :

Proposition 1.5. *Soient $\bar{K}$ une clotûre algébrique de K et p un nombre premier. Pour $d \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbb{Z}$, l'ensemble des classes d'isomorphie de représentations continues $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q}_p)$ semi-simples et pures de poids w (par rapport à S et à p) est fini.*

Je rappelle la notion de pureté :

Définition 1.6. Soient $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, p un nombre premier, V un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et w un nombre entier.

Une représentation continue $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}(V)$ est *pure de poids w (par rapport à S et à p)* si elle est non ramifiée en dehors de S et, pour toute place v de K n'appartenant pas à S et ne divisant pas p, le polynôme caractéristique $P_{v,\rho}$ d'un élément de Frobenius (et donc de tous) en v est à coefficients entiers et toutes ses racines sont de valeur absolue complexe $|\mathbb{F}_v|^{w/2}$.

Pour démontrer le théorème 1.3, Faltings fixe un premier p, considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{variétés abéliennes sur } K \\ \text{de dimension } g \text{ à bonne} \\ \text{réduction en dehors de } S \end{array} \right\} \Big/ \cong & \xrightarrow{\mathrm{T}_p} & \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations continues} \\ \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \Big/ \cong \\ A & \longmapsto & \mathrm{T}_p(A) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \end{array}$$

associant à une variété abélienne son module de Tate p-adique

$$\mathrm{T}_p(A) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A[p^n](\bar{K})$$

tensorisé par $\mathbb{Q}_p$ et se ramène à montrer la finitude de l'image et des fibres de T_p.

L'hypothèse de Riemann pour les variétés abéliennes sur les corps finis (démontrée par Weil) dit que les représentations en question sont pures de poids -1. La finitude de l'image de T_p découle de la semi-simplicité de $\mathrm{T}_p(A)$ grâce à la proposition 1.5. La semi-simplicité, ainsi que la finitude des fibres, se ramène par des arguments de Tate (1966) au résultat suivant :

Théorème 1.7. *Soit A une variété abélienne sur K. Il n'existe qu'un nombre fini de classes de K-isomorphie de variétés abéliennes définies sur K et K-isogènes à A.*

C'est le cœur technique de la preuve de Faltings : cela requiert de comprendre comment la hauteur des variétés abéliennes qu'il introduit change avec les isogénies. L'invariance cherchée est montrée par Faltings en utilisant la théorie des groupes p-divisibles et plus précisément un théorème de Raynaud (1974) sur les schémas en groupes finis annulés par p. L'irruption de la théorie de Hodge p-adique dans la démonstration proposée par Lawrence et Venkatesh est en résonance avec ce dernier argument.

Une « nouvelle » preuve de la conjecture de Mordell ne peut donc pas s'appuyer sur la semi-simplicité des modules de Tate démontrée par Faltings. On peut donner une démonstration alternative du théorème 1.7, comme le font Masser et Wüstholz (1993) (voir aussi l'exposé de Bost, 1996 dans ce séminaire), ou contourner les questions de semi-simplicité : c'est la deuxième piste que Lawrence et Venkatesh suivent. Néanmoins, leur méthode ne semble pas à ce jour pouvoir fournir une approche aux théorèmes 1.2, 1.3 et à la conjecture de Tate pour les variétés abéliennes sur les corps de nombres. [(1)]

1.2. Idée de la preuve de Lawrence et Venkatesh

Soit C une courbe projective lisse sur K de genre $g \geqslant 2$.

1.2.1. — Lawrence et Venkatesh commencent par une construction auxiliaire.

On fixe un nombre premier ℓ et on considère le groupe $G := \mathrm{Aff}(\ell)$ des transformations affines du corps à ℓ éléments $\mathbb{F}_\ell$. On désigne par C' l'espace de modules des revêtements galoisiens $X \to C$ de groupe G et qui sont ramifiés exactement en un seul point de C. Des tels revêtements existent car le groupe fondamental de C est non abélien, ce qui équivaut à l'hypothèse $g \geqslant 2$. L'application $\nu\colon C' \to C$ associant à un revêtement son point de ramification est un revêtement non ramifié de la courbe C. L'« objet universel » $\mathscr{X} \to C \times C'$ pour ce problème de modules est un revêtement galoisien de groupe G. Une variante de la construction de Prym fournit une famille de variétés abéliennes $\alpha'\colon A \to C'$.

[(1)] Par exemple, en ce qui concerne le théorème 1.3, un obstacle majeur à l'applicabilité de la méthode est la présence de sous-variétés de l'espace de modules des variétés abéliennes donnant lieu à une trop petite monodromie, *e.g.* des sous-variétés de Shimura.

On pose $\alpha := \nu \circ \alpha' \colon A \to C$, on note d la dimension relative de ce morphisme et δ le degré du revêtement ν. Combinant les stratégies de Faltings et de Chabauty, Lawrence et Venkatesh fixent un nombre premier p, une place p-adique v de K et s'intéressent ensuite au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} C(K) & \hookrightarrow & C(K_v) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_v} \\ \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations continues} \\ \mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathrm{GL}_{2d\delta}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \Big/ \cong & \xrightarrow{\rho} & \left\{ \begin{array}{c} \text{représentations continues} \\ \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \to \mathrm{GL}_{2d\delta}(\mathbb{Q}_p) \end{array} \right\} \Big/ \cong \end{array}$$

où les flèches τ, τ_v associent à un point c le premier groupe de cohomologie étale p-adique $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ de $\alpha^{-1}(c)$ et ρ est l'application de restriction à $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$. Si l'on démontre que l'image de τ est finie et les fibres de τ_v sont finies, on a gagné.

1.2.2. *Finitude des fibres.* — Tout d'abord, on peut choisir le nombre premier p de façon à ce qu'il ne ramifie pas dans K et à ce que les courbes C et C', ainsi que la famille de variétés abéliennes $A \to C'$, aient bonne réduction en toute place p-adique de K. Étant fixé un K_v-point o de C, on considère le disque v-adique

$$\Omega := \{x \in C(K_v) : x \equiv o \pmod{p}\}$$

autour de o et on se ramène à montrer que la restriction de τ_v à Ω a fibres finies.

Si jusqu'à présent la stratégie de preuve suit de près celle de Faltings, elle va s'en affranchir nettement à partir de maintenant. L'idée est de « linéariser » le problème par le biais de la théorie de Hodge p-adique, en transformant les représentations galoisiennes en des données d'algèbre linéaire, les *isocristaux filtrés*, pendant p-adique des structures de Hodge. Appliquée à la représentation galoisienne $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ pour $c \in \Omega$, la théorie de Hodge p-adique fournit le triplet

$$(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(c)/K_v), \mathrm{H}^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1), \varphi_c)$$

formé par le premier groupe de cohomologie de de Rham de $\alpha^{-1}(c)$, l'espace des 1-formes différentielles sur $\alpha^{-1}(c)$ et l'opérateur de Frobenius obtenu par comparaison avec le premier groupe de cohomologie cristalline de la fibre spéciale de $\alpha^{-1}(c)$.

Par ailleurs le fibré vectoriel $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C)$ est muni de la connexion de Gauss–Manin : ses sections horizontales convergent p-adiquement sur le disque Ω, donnant lieu à des isomorphismes de « transport parallèle »

$$\chi_c \colon \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(c)/K_v) \xrightarrow{\sim} V := \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(o)/K_v)$$

pour c dans Ω. On obtient ainsi une application de périodes p-adique

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Per}_o \colon \Omega & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_{d \deg \nu}(V) \\ c & \longmapsto & \chi_c(\mathrm{H}^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1)). \end{array}$$

Il découle directement des définitions que si $\tau_v(c) = \tau_v(c')$, alors leurs images $\mathrm{Per}_o(c)$ et $\mathrm{Per}_o(c')$ sont conjugués sous l'action du centralisateur Z dans $\mathrm{GL}(V)$ de l'opérateur de Frobenius cristallin φ_o.

Soit X l'adhérence pour la topologie de Zariski de l'image de l'application Per_o. Si l'on sait que la dimension de X est strictement plus grande que la dimension de Z, on peut conclure la preuve. En effet, les solutions à l'équation de Gauss–Manin sont données par des séries qui convergent absolument sur tout Ω. L'image de Ω par Per_o ne pouvant pas être contenue dans une orbite Z, l'ensemble, pour c dans Ω,

$$F_c := \mathrm{Per}_o^{-1}(Z.\mathrm{Per}_o(c))$$

n'est pas Ω tout entier.

L'ensemble F_c ne peut qu'être fini : au cas contraire, il s'accumulerait dans le compact Ω en un point c_0 ; par conséquent, si $f = 0$ est une équation locale de Z autour de $\mathrm{Per}_o(c_0)$, le principe des zéros isolés pour la fonction analytique $f \circ \mathrm{Per}_o$ entraînerait que l'image de Ω est contenue dans Z. Contradiction !

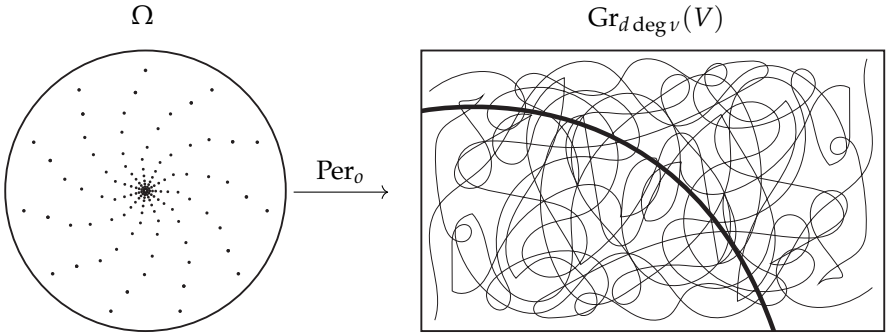


Figure 1 – À droite, en gros, l'orbite $Z.\mathrm{Per}_o(c)$ et, dessinée comme un gribouillis, l'image de l'application des périodes Per_o. À gauche les points représentent la préimage de $Z.\mathrm{Per}_o(c)$ par Per_o : comme pour une fonction holomorphe d'une variable complexe non constante, il n'y a qu'un nombre fini de zéros dans un disque compact contenu dans son domaine de définition ; sinon comme en figure ils s'accumuleraient.

Pour avoir l'inégalité $\dim X > \dim Z$, Lawrence et Venkatesh démontrent que la famille de variétés abéliennes $A \to C'$ a grande monodromie et imposent des conditions arithmétiques sur les fibres du revêtement $\nu\colon C' \to C$ (qui sont satisfaites pour des premiers ℓ bien choisis).

1.2.3. *Finitude de l'image.* — Comme pour Faltings, on veut s'appuyer sur la finitude des représentations galoisiennes pures et semi-simples. La pureté ne pose pas de problème : pour $c \in C(K)$, la décomposition

$$\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p) = \bigoplus_{\nu(c')=c} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha'^{-1}(c'), \mathbb{Q}_p)$$

et l'hypothèse de Riemann pour les variétés abéliennes impliquent que la représentation galoisienne $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ est pure de poids 1. Donc, si l'on accepte que ces représentations sont semi-simples (comme on le sait d'après Faltings), la démonstration est terminée.

Lawrence et Venkatesh parviennent à s'en passer par des idées similaires à celles qui conduisent à la finitude des fibres. Ils imposent une deuxième contrainte arithmétique sur le revêtement $\nu\colon C' \to C$ entraînant la propriété suivante : si la représentation galoisienne $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ est réductible, alors le sous-espace $\mathrm{H}^0(\alpha^{-1}(c), \Omega^1)$ n'est pas en « position générique ».

Les arguments qui précèdent mènent au résultat suivant : il existe un ensemble fini F de Ω tel que, pour tout point c de $C(K) \cap (\Omega \smallsetminus F)$, il existe $c' \in \nu^{-1}(c)$ tel que la représentation galoisienne $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha'^{-1}(c'), \mathbb{Q}_p)$ est irréductible.

Cet énoncé, plus faible que la semi-simplicité de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$, demande de changer légèrement la méthode pour parvenir à la finitude de $C(K)$. Le lecteur pourra trouver les détails dans la section 4.

1.3. Problèmes à la Shafarevich pour d'autres variétés

1.3.1. — Les techniques de Lawrence et Venkatesh sont bien adaptées pour montrer la non-densité des points entiers d'une variété algébrique portant une variation de structures de Hodge assez compliquée.

En appliquant cette observation à la famille universelle au-dessus d'un espace de modules (prétendons qu'un tel objet existe…) on peut espérer obtenir des résultats dans le style des théorèmes 1.2 et 1.3 pour d'autres classes de variétés. Mis à part les cas des courbes et des variétés abéliennes, de telles finitudes avaient auparavant été obtenues dans les cas suivants :

(1) surfaces K3 et certaines variétés hyper-kähler (André, 1996, She, 1997, Takamatsu, 2020) ;

(2) surfaces de del Pezzo (Scholl, 1985) ;

(3) variétés de drapeaux (Javanpeykar et Loughran, 2015) ;

(4) intersections complètes de niveau $\leqslant 1$ (Javanpeykar et Loughran, 2017) ;

(5) surfaces fibrées en courbes lisses (Javanpeykar, 2015) ;

(6) certains solides de Fano (Javanpeykar et Loughran, 2018) ;

(7) certaines surfaces de type général (Javanpeykar et Loughran, 2021) ;

(8) surface de Enriques (Takamatsu, 2019).

Les preuves de (1), (4), (5) et (7) reposent sur le théorème 1.3, alors que (2), (3) et (6) découlent de résultats de finitude en cohomologie galoisienne. En s'appuyant sur la conjecture de Lang–Vojta, Javanpeykar et Loughran (2017) ont dégagé une heuristique pour la finitude d'intersections complètes de degrés fixés (*loc.cit.* Conjecture 1.4).

1.3.2. *Hypersurfaces de l'espace projectif.* — Soient n, d des entiers $\geqslant 1$. Les hypersurfaces de degré d dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ sont paramétrées par l'espace projectif $\mathbb{P}(E_{n,d})$ du $\mathbb{Z}$-module libre $E_{n,d} = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(d))$ des polynômes homogènes à coefficients entiers de degré d en $n+1$ variables. Les hypersurfaces singulières y forment à leur tour une hypersurface $\Delta_{n,d}$ de degré $(d-1)^n(n+1)$ définie par l'annulation du discriminant. On s'intéresse à l'ouvert complémentaire

$$H_{n,d} = \mathbb{P}(E_{n,d}) \smallsetminus \Delta_{n,d},$$

qui paramètre les hypersurfaces lisses de degré d dans $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$; il est stable sous l'action naturelle du groupe PGL_{n+1}. La conjecture de Lang–Vojta, combinée avec l'hyperbolicité de l'espace de modules des hypersurfaces de l'espace projectif (Zuo (2000), Brunebarbe (2018)), implique

$$|H_{n,d}(\mathscr{O}_{K,S}) / \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathscr{O}_{K,S})| < \infty,$$

pour $d \geqslant 3$, un corps de nombres K et un ensemble fini S de places de K contenant toutes les places archimédiennes (voir Javanpeykar et Loughran (2017) pour les détails). Lawrence et Venkatesh obtiennent un résultat non conditionnel (le premier en grand degré) dans cette direction :

Théorème 1.8. *Il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ et une fonction $d_0 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tels que, pour tous $n \geqslant n_0$, $d \geqslant d_0(n)$ et tout entier $N \geqslant 1$, l'ensemble $H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N])$ n'est pas Zariski-dense dans $H_{n,d}$.*

Autrement dit, il existe un polynôme homogène non nul $F \in \mathrm{Sym}\, E^\vee_{n,d}$ s'annulant sur chaque point de $H_{n,d}(\mathbb{Z}[1/N])$. Des expériences numériques suggèrent que $n_0 \sim 60$ suffit, alors qu'une majoration de $d_0(n)$ semble plus difficile à obtenir.

Pour démontrer ce théorème, Lawrence et Venkatesh exploitent la variation de structures de Hodge donnée par la partie primitive du $(n-1)$-ème groupe de cohomologie singulière de la famille universelle au-dessus de $H_{n,d}$. Dans ces problèmes diophantiens, c'est la première fois qu'on utilise des groupes de cohomologie que l'on ne peut pas obtenir à partir de variétés abéliennes.

On pourrait envisager de travailler par récurrence sur la dimension pour passer de la non-densité à la finitude dans le théorème 1.8. Cependant, la machinerie de Lawrence et Venkatesh nécessite une « grande » monodromie pour fonctionner : pour obtenir la finitude, il faudrait savoir que la monodromie de la variation de

structures de Hodge mentionnée plus haut restreinte à une sous-variété arbitraire de $H_{n,d}/\mathrm{PGL}_{n+1}$ reste grande. Or, ce n'est pas le cas pour les sous-variétés qui s'envoient dans des sous-variétés spéciales du domaine de périodes correspondant.

1.3.3. *Hypersurfaces d'une variété abélienne.* — Soient A une variété abélienne de dimension g sur un corps de nombres K à bonne réduction en dehors d'un ensemble fini S de places (contenant toutes les places archimédiennes) et $\mathscr{A}$ le schéma abélien sur $\mathscr{O}_{K,S}$ en lequel elle s'étend.

Soit L un fibré en droites ample sur A. Les hypersurfaces (*i.e.* les diviseurs de Cartier effectifs) H de A telles que le fibré en droites $\mathscr{O}(H)$ est isomorphe à L sont paramétrées par l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(A,L))$ et celles singulières y forment un diviseur $\Delta_{A,L}$. On considère l'ouvert complémentaire

$$H_{A,L} = \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(A,L)) \smallsetminus \Delta_{A,L}.$$

Le fibré en droites L s'étend de manière unique en un fibré en droites $\mathscr{L}$ sur $\mathscr{A}$. On désigne par $\Delta_{\mathscr{A},\mathscr{L}}$ l'adhérence de Zariski de $\Delta_{A,L}$ dans $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathscr{A},\mathscr{L}))$ et par $H_{\mathscr{A},\mathscr{L}}$ le complétementaire $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathscr{A},\mathscr{L})) \smallsetminus \Delta_{\mathscr{A},\mathscr{L}}$. À la différence des hypersurfaces de l'espace projectif, Lawrence et Sawin (2020) parviennent à montrer la finitude suivante :

Théorème 1.9. *L'ensemble $H_{\mathscr{A},\mathscr{L}}(\mathscr{O}_{K,S})$ est fini pour $g = 2$ et $g \geqslant 4$.*

Autrement dit, il n'existe qu'un nombre fini d'hypersurfaces lisses H dans A dont l'adhérence dans $\mathscr{A}$ est à bonne réduction en dehors de S et telles que le fibré en droites $\mathscr{O}(H)$ soit isomorphe à L.

Lorsque A est une surface abélienne, le théorème 1.9 est une conséquence facile du théorème 1.2 (Lawrence et Sawin, 2020, Theorem 11.6). En dimension $\geqslant 4$, le théorème 1.9 est d'autant plus intéressant que sa preuve est indépendante des résultats de finitude déjà cités.

Quand la variété abélienne A est de dimension 3, la finitude faisant l'objet du théorème 1.9 est démontrée sous une condition supplémentaire (vraisemblablement non nécessaire) portant sur le nombre d'auto-intersection L^3 du fibré en droites L. Pour l'énoncer, on considère les suites d'entiers $(a_i)_{i\geqslant 1}$ et $(d_i)_{i\geqslant 1}$ définies par $a_1 = 1, a_2 = 5$ et, pour $i \geqslant 1$,

$$a_{i+2} = 4a_{i+1} - a_i + 1, \qquad\qquad d_i = \frac{1}{6}\binom{a_{i+1}+a_i}{a_i}.$$

On a $d_1 = 1$, $d_2 = 8\,855$ et $d_3 = 36\,030\,431\,772\,522\,503\,316$.

Théorème 1.10. *Avec les notations ci-dessus, on suppose $g = 3$. Si le nombre entier $L^3/3!$ n'est divisible par aucun des nombres d_i ($i \geqslant 2$), alors l'ensemble $H_{\mathscr{A},\mathscr{L}}(\mathscr{O}_{K,S})$ est fini.*

En particulier, c'est vrai pour tout L satisfaisant à l'inégalité $L^3/3! < d_2$.

Par opposition à l'espace projectif, les variétés abéliennes disposent d'un degré de liberté supplémentaire : elles ne sont pas simplement connexes. Les revêtements topologiques non triviaux, donnés en l'occurrence par la multiplication par un entier, seront l'ingrédient clé pour accéder à la finitude (en contraste avec la simple non-densité du théorème 1.8).

L'innovation principale dans la preuve des théorèmes 1.9 et 1.10 réside dans l'argument de grande monodromie. En effet, les théorèmes 1.1 et 1.8 font intervenir des considérations topologiques à l'allure plus classique—respectivement, la production de twists de Dehn pour le premier (*cf.* théorème 2.14), l'application par Beauville (1986) de résultats de Ebeling (1984) et Janssen (1983) dans le deuxième. Par contre, dans le cas des hypersurfaces de variétés abéliennes, l'argument repose sur des techniques tannakiennes, dans la veine des travaux de Krämer et Weissauer (2015a,b) et de Krämer (2016, 2021).

1.4. *Excusatio non petita, accusatio manifesta*

La suite de ce texte n'est consacrée qu'à la preuve proposée par Lawrence et Venkatesh du théorème 1.1, avec un accent particulier sur la partie arithmétique et en sacrifiant malheureusement des aspects topologiques tout aussi intéressants.

1.5. Conventions

Une *variété algébrique* X sur un corps k est un k-schéma séparé de type fini. Si k' est une extension du corps k, on désigne par $X_{k'}$ la variété algébrique sur k' déduite de X par extension des scalaires. Une *courbe* sur un schéma noethérien S est un S-schéma $C \to S$ séparé, de type fini, lisse, de dimension relative 1 et à fibres géométriques connexes.

Remerciements. — Au cours de la rédaction de ce texte j'ai eu plaisir de discuter avec un grand nombre de personnes : G. Ancona, O. Benoist, Y. Brunebarbe, J. Fresán, A. Javanpeykar, T. Krämer, C. Lehn, J. Marché, J. Poineau, M. Romagny, A. Torzewski. Je les remercie de m'avoir écouté et fait part de leurs connaissances. Merci à J. Fresán pour sa relecture attentive d'une première version de ce texte ainsi que pour les dessins.

2. Finitude des points entiers sur les courbes hyperboliques

2.1. Énoncé

2.1.1. *Schémas fini-abéliens.* — Les familles de variétés abéliennes paramétrées par des revêtements non ramifiés d'une courbe joueront un rôle proéminent (comme elles le font déjà dans la preuve de Faltings, la construction de Kodaira–Parshin pouvant s'interpréter ainsi). Par commodité on leur donne un nom :

Définition 2.1. Soit S un schéma noethérien. Un *schéma fini-abélien* (*polarisé*) sur S est la donnée (S', A, λ) d'un S-schéma fini étale $\nu\colon S' \to S$, d'un schéma abélien $\alpha'\colon A \to S'$ et d'une polarisation $\lambda\colon A \to \check{A}$ du schéma abélien A.

Le morphisme $\alpha := \nu \circ \alpha'\colon A \to S$ détermine les morphismes α' et ν, car ν est la factorisation de Stein du morphisme α. Pour cette raison on l'omettra de la notation.

Lorsque S est une variété complexe lisse connexe et s est un $\mathbb{C}$-point de S, la fibre $\alpha^{-1}(s)$ est la réunion disjointe des variétés abéliennes $A_{s'} := \alpha'^{-1}(s')$, pour s' dans $\nu^{-1}(s)$, d'où la décomposition

$$\mathrm{H}^1(\alpha^{-1}(s), \mathbb{Q}) = \bigoplus_{\nu(s')=s} \mathrm{H}^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}). \tag{1}$$

du premier groupe de cohomologie singulière à coefficients rationnels. L'action de monodromie du groupe fondamental $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ sur $\mathrm{H}^1(\alpha^{-1}(s), \mathbb{Q})$ est soumise à deux contraintes :

(1) Elle respecte la décomposition (1), mais pas terme à terme : pour tout lacet γ dans $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ et tout point $s' \in \nu^{-1}(s)$, l'automorphisme $\rho(\gamma)$ induit un isomorphisme $\mathbb{Q}$-linéaire $\mathrm{H}^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^1(A_{\gamma s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$.

(2) Pour tout point $s' \in \nu^{-1}(s)$, la forme alternée non dégénérée $\omega_{s'}$ induite par la polarisation de A est invariante par le sous-groupe $\pi_1(S'(\mathbb{C}), s')$. Il en découle que l'image par ρ du sous-groupe d'indice fini $\bigcap_{\pi(s')=s} \pi_1(S'(\mathbb{C}), s')$ de $\pi_1(S(\mathbb{C}), s)$ est contenue dans $\prod_{\nu(s')=s} \mathrm{Sp}(\mathrm{H}^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \omega_{s'})$.

Définition 2.2. Soit S une variété complexe lisse et connexe. Avec les notations ci-dessus, un schéma fini-abélien A sur S a *grande monodromie* si pour un point $s \in S(\mathbb{C})$ (et donc pour tous) l'adhérence de Zariski de l'image de ρ contient le sous-groupe

$$\prod_{\pi(s')=s} \mathrm{Sp}(\mathrm{H}^1(A_{s'}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}), \omega_{s'}) \subseteq \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1(\alpha^{-1}(s), \mathbb{Q})).$$

2.1.2. *Stagnation galoisienne.* — Soit K un corps de nombres. Soit v une place de K. Soient $\bar{K}$ et $\bar{K}_v$ des clôtures algébriques respectivement des corps K et K_v.

Définition 2.3. Soient $r > 0$, E un ensemble fini non vide muni d'une action continue de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et $\iota\colon \bar{K} \to \bar{K}_v$ un plongement étendant l'injection canonique $K \to K_v$. La *v-stagnation (de paramètre r) de E* est le nombre rationnel

$$\mathrm{stag}_v(E, r) := \frac{|\{e \in E : |\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v).e| \leqslant r\}|}{|E|},$$

le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ agissant sur E via l'injection dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ induite par ι.

La v-stagnation ne dépend pas du plongement choisi. Étant donné un K-schéma fini E, sa v-stagnation est celle de l'ensemble $E(\bar{K})$ muni de son action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$; elle ne dépend pas de la clôture algébrique choisie.

Exemple 2.4. L'algèbre A des fonctions régulières sur un K-schéma fini étale E est un produit (fini) d'extensions finies (séparables) de K. On écrit $A \otimes_K K_v = L_1 \times \cdots \times L_n$ pour des extensions finies L_i de K_v. Soit N_r^- (resp. N_r^+) le nombre d'homomorphismes de K_v-algèbres $A \otimes_K K_v \to \bar{K}_v$ dont l'image est une extension de degré $\leqslant r$ (resp. $> r$) de K_v. Alors, la v-stagnation de E est donnée par

$$\mathrm{stag}_v(E, r) = \frac{N_r^-}{N_r^- + N_r^+} = \sum \frac{[L_i : K_v]}{\dim_K A},$$

la somme à droite parcourant les indices $i \in \{1, \ldots, n\}$ pour lesquels $[L_i : K_v] \leqslant r$.

On n'appliquera la notion de v-stagnation que lorsque l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ est non ramifiée en v. Soient $\mathbb{F}_v$ et $\bar{\mathbb{F}}_v$ les corps résiduels de K_v et $\bar{K}_v$ respectivement. Par définition, le groupe d'inertie, noyau de la flèche de réduction $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v) \to \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v)$, opère trivialement sur E. L'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ se factorise alors à travers une action de $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v)$ et, pour $e \in E$,

$$|\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v).e| = |\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v).e| = |\langle \mathrm{Fr}_v \rangle.e|,$$

où $\langle \mathrm{Fr}_v \rangle$ est le sous-groupe engendré par l'automorphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}_v\colon x \mapsto x^{|\mathbb{F}_v|}$.

Lemme 2.5. *Soient $r > 0$, v une place de K, E, E' des ensembles finis non vides muni d'actions continues de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ et $E \to E'$ une application $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$-équivariante surjective dont les fibres ont toutes le même cardinal. Alors,*

$$\mathrm{stag}_v(E, r) \leqslant \mathrm{stag}_v(E', r).$$

C'est une application immédiate de l'exercice de comptage suivant : soient X, Y des ensembles finis non vides munis d'une action d'un groupe fini G et $f\colon X \to Y$ une application G-équivariante, surjective dont les fibres ont toutes le même cardinal. Alors, pour tout $r > 0$,

$$\frac{|\{x \in X : |Gx| \leqslant r\}|}{|X|} \leqslant \frac{|\{y \in Y : |Gy| \leqslant r\}|}{|Y|}.$$

2.1.3. *Places admissibles.* — Un corps de nombres est à multiplication complexe (CM en bref) s'il n'admet pas de plongements réels et s'il est extension quadratique d'un sous-corps totalement réel. Soit K un corps de nombres. Si K contient un sous-corps CM, il existe un plus grand sous-corps totalement réel F^+ de K et une unique extension quadratique F de F^+ contenue dans K qui est CM.

Définition 2.6. Si K ne contient pas de sous-corps CM, une place v de K est *admissible* si elle est non ramifiée. Si K contient un sous-corps CM F, une place v de K est *admissible* si elle est non ramifiée et elle est au-dessus d'une place de F^+ inerte dans F.

2.1.4. *Énoncé.* — Dans le cas des courbes, le cœur de la méthode de Lawrence–Venkatesh se résume par l'énoncé suivant :

Théorème 2.7. *Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K contenant celles archimédiennes, C une courbe sur $\mathscr{O}_{K,S}$, $\alpha\colon A \to C$ un schéma fini-abélien de dimension relative d, p un premier impair qui ne ramifie pas dans K et tel que S ne contient pas de places p-adiques, et v une place p-adique admissible de K.*

Si le schéma fini-abélien A a grande monodromie et $r \geqslant \lfloor 8d/(d+1)\rfloor$, alors l'ensemble

$$\{c \in C(\mathscr{O}_{K,S}) : \mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < 1/(d+1)\}$$

est fini (*rappelons que $\nu\colon C' = \mathrm{Spec}\,\alpha_*\mathscr{O}_A \to C$ est la factorisation de Stein de α*).

Des commentaires :

(1) Dans Lawrence et Venkatesh (2020), ce résultat n'est énoncé que pour les courbes projectives de genre $\geqslant 2$, évidemment le cas le plus intéressant. Néanmoins, j'ai penché pour cette formulation afin de garder trace des hypothèses utilisées dans sa preuve.

(2) Dans les applications, on choisira des schémas fini-abéliens tels que tout $\mathscr{O}_{K,S}$-point de C satisfait à la condition $\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < 1/(d+1)$. Le théorème 2.7 implique alors la finitude de $C(\mathscr{O}_{K,S})$.

(3) La condition $r \geqslant \lfloor 8d/(d+1)\rfloor$ est une reformulation de l'inégalité

$$\tfrac{1}{2}d(d+1)n > (2d)^2, \tag{2}$$

pour tout entier $n > r$, que l'on verra apparaître dans la preuve de la Proposition 4.8. Elle s'interprète de la façon suivante :

Soit c un K-point de C. Pour un point c' du K_v-schéma $\nu^{-1}(c) \times_K K_v$, on désigne par $A_{c'}$ la variété abélienne sur le corps résiduel $K_v(c')$ de c', fibre en c' de l'unique morphisme $\alpha'\colon A \to C'$ tel que $\alpha = \nu \circ \alpha'$. Le terme $\frac{1}{2}d(d+1)$ est la dimension de la grassmanienne lagrangienne $\mathrm{LGr}_d(V_{c'})$ des sous-espaces vectoriels de dimension d du $K_v(c')$-espace de vectoriel $V_{c'} := \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{c'}/K_v(c'))$ de dimension $2d$, qui sont totalement isotropes par rapport à la forme bilinéaire

alternée induite par la polarisation de A. Le terme à gauche de (2) est la minoration de la dimension de la restriction à la Weil

$$\mathfrak{H}_{c'} := \mathrm{Res}_{K_v(c')/K_v} \mathrm{LGr}_d(V_{c'})$$

de $\mathrm{LGr}_d(V_{c'})$ pour c' tel que $[K_v(c') : K_v] > r$. La variété $\mathfrak{H}_{c'}$ est un facteur du but de l'application de périodes associée à la connexion de Gauss–Manin sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C)$.
Le terme $(2d)^2$ est une majoration (triviale) de la dimension du centralisateur Z du Frobenius cristallin dans $\mathrm{Res}_{K_v(c')/K_v} \mathrm{GL}(V_{c'})$. L'inégalité (2) assure que les orbites de Z dans $\mathrm{Res}_{K_v(c')/K_v} \mathrm{LGr}_d(V_{c'})$ ne sont pas la grassmanienne tout entière.

(4) L'origine du terme $1/(d+1)$ est plus difficile à cerner. L'hypothèse

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < 1/(d+1)$$

va entraîner qu'il existe un point c' de $\nu^{-1}(c) \times_K K_v$ de degré $[K_v(c') : K_v] > r$ pour lequel la filtration de Hodge de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{c'}/K_v(c'))$ est en position « générale » (voir proposition 4.11).

(5) Il y a une tension entre l'hypothèse de grande monodromie et celle de petite stagnation : de manière heuristique, plus le degré du revêtement ν grandit (ce qui suit de l'hypothèse de petite stagnation), plus l'hypothèse de grande monodromie est forte.
Par exemple, on ne peut pas appliquer l'énoncé tout court à la famille de Legendre de courbes elliptiques : l'application ν étant l'identité dans ce cas, pour tout $r \geqslant 1$ la stagnation vaut toujours $1 > \frac{1}{2} = \frac{1}{d+1}$. Moins formellement, la famille de Legendre a certes grande monodromie, mais le stabilisateur des Frobenius cristallins sont trop grands. On peut néanmoins appliquer la méthode à la composition de la famille de Legendre avec le revêtement de Kummer $\lambda \mapsto \lambda^{2^n}$ pour un n bien choisi. On obtient alors la finitude des solutions à l'équation des S-unités.

(6) Dans la preuve *rien* de propre aux variétés abéliennes n'est utilisé ! Elles y sont seulement pour incarner le *premier* groupe de cohomologie étale et de de Rham.

2.2. La droite projective privée de trois points : l'équation des S-unités

En guise de premier exemple, on va appliquer le théorème 2.7 à une variante de la famille de Legendre de courbes elliptiques. Ceci conduit au théorème des S-unités :

Théorème 2.8. *Soient K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K contenant toutes les places archimédiennes. Alors, l'ensemble*

$$U := \{t \in \mathscr{O}_{K,S}^\times : 1 - t \in \mathscr{O}_{K,S}^\times\}$$

est fini.

On renvoie au livre de Bombieri et Gubler (2006, Chapitre 5) pour une preuve classique de ce résultat. Le lien avec le théorème 2.7 est vite fait en remarquant que l'ensemble U n'est autre que l'ensemble des $\mathscr{O}_{K,S}$-points du schéma $\mathbb{P}^1 \smallsetminus \{0, 1, \infty\}$.

Par le théorème d'Hermite–Minkowski (théorème 1.4), et quitte à faire grandir K et S, on se ramène sans trop de peine à montrer l'énoncé suivant (voir Lawrence et Venkatesh, 2020, début de §4) :

Proposition 2.9. *Soient K un corps de nombres contenant les racines 8-ièmes de l'unité, $n \geqslant 8$ la plus grande puissance de 2 divisant l'ordre du groupe des racines de l'unité de K, S un ensemble fini de places de K contenant toutes les places 2-adiques et toutes les places archimédiennes, et L une extension galoisienne cyclique de K de degré n non-ramifiée en dehors de S.*

Alors, l'ensemble U'_L des éléments $u \in U$ qui ne sont pas des carrés dans K et tels que la K-algèbre $K[x]/(x^n - u)$ est isomorphe à L est fini.

On désigne par K un corps de nombres, par n la plus grande puissance de 2 divisant l'ordre du groupe des racines de l'unité de K et par S un ensemble fini de places de K contenant toutes le places 2-adiques et toutes les places archimédiennes. On considère :

- $C = \mathbb{P}^1_{\mathscr{O}_{K,S}} \smallsetminus \{\infty, 0, 1\}$ la droite projective sur $\mathscr{O}_{K,S}$ privée des sections ∞, 0 et 1 ;
- $C' = \mathbb{P}^1_{\mathscr{O}_{K,S}} \smallsetminus \{\infty, 0, \mu_n\}$ l'ouvert de C où l'on a retiré les sections correspondant aux racines n-ièmes de l'unité ;
- $\nu \colon C' \to C$ le morphisme fini étale $\lambda \mapsto \lambda^n$.

La famille de Legendre est la famille de courbes elliptiques sur C d'équation affine

$$y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

En se restreignant à l'ouvert C' de C, on obtient un schéma abélien $\alpha' \colon A \to C'$. On considère le schéma fini-abélien $\alpha := \nu \circ \alpha' \colon A \to C$. Des considérations simples faisant intervenir la connaissance explicite de la monodromie de l'équation hypergéométrique montrent que le schéma fini-abélien a grande monodromie (Lawrence et Venkatesh, 2020, Lemma 4.3 ou Noordman, 2021, Proposition 4.1).

Pour obtenir la proposition 2.9 on applique le théorème 2.7 au schéma fini-abélien $\alpha \colon A \to C$. Pour $d = 1$ on a $8d/(d+1) = 4$: c'est pour cela que l'on suppose $n > 4$. La preuve du théorème 2.7 dans ce cas spécifique est décidément plus simple, parce que les représentations cristallines qu'y interviennent (des modules de Tate p-adiques de courbes elliptiques) sont explicites (voir Lawrence et Venkatesh, 2020, Lemma 4.4).

Démonstration de la proposition 2.9. Soit L une extension cyclique de K de degré n non ramifiée en dehors de S. Par le théorème de Čebotarev, il existe un nombre premier impair p et une place v de K au-dessus de p tels que

(1) p est non ramifié dans K;

(2) S ne contient pas de place p-adique de K;

(3) un élément de Frobenius en v engendre $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Dire que l'opérateur de Frobenius engendre $\mathrm{Gal}(L/K)$ implique, pour tout nombre réel $0 < r < [L : K]$, l'annulation

$$\mathrm{stag}_v(\mathrm{Spec}\, L, r) = 0.$$

Pour un $\mathscr{O}_{K,S}$-point λ de C, le $\mathscr{O}_{K,S}$-schéma $\nu^{-1}(\lambda)$ s'identifie à $\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_{K,S}[x]/(x^n - \lambda)$. Si l'on suppose que λ appartient à U'_L, alors le $\mathscr{O}_{K,S}$-schéma $\nu^{-1}(\lambda)$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}\, \mathscr{O}_{L,T}$. On obtient de cette façon, l'inclusion suivante :

$$U'_L \subseteq \{\lambda \in C(\mathscr{O}_{K,S}) : \mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(\lambda), 4) = 0\}.$$

On conclut par le théorème 2.7. □

Remarque 2.10. Par un argument classique à la Chevalley–Weil de relèvement des points S-entiers le long des revêtements étales (Serre, 1997, §4.2), le théorème de l'équation des S-unités se déduit de celui de Faltings. Il en est de même pour la finitude des points S-entiers d'une courbe elliptique épointée. On peut aussi démontrer cette dernière comme application du théorème 2.7 à un schéma fini-abélien bien choisi (Liu, 2021 ; Noordman, 2021).

2.3. Constructions à la Kodaira–Parshin

La construction de Kodaira–Parshin dans la preuve originelle de Faltings fournit, pour tout point rationnel de la courbe, un revêtement galoisien abélien non ramifié en dehors du point choisi. Pour déduire la conjecture de Mordell du théorème 2.7, on l'appliquera à une variante non abélienne de cette construction.

2.3.1. *Espaces de Hurwitz.* — Soient X et Y des schémas noethériens. Un morphisme $f : Y \to X$ est un *revêtement* s'il est fini, plat, surjectif et son discriminant est un diviseur de Cartier effectif sur X (le mot « discriminant » étant à prendre au sens de Stacks Project, Section 0BVH). Un revêtement $f : Y \to X$ est *galoisien* si, pour tout point géométrique x de X, le groupe $\mathrm{Aut}(f)$ agit transitivement sur la fibre de f en x. Pour un groupe fini G, un *G-revêtement* est la donnée d'un revêtement galoisien $f : Y \to X$ et d'un isomorphisme de groupes $\tau : G \to \mathrm{Aut}(f)$. La notion d'isomorphisme de G-revêtements est définie de manière évidente.

Soient C une courbe projective sur un corps de caractéristique nulle k et G un groupe fini. Pour un k-schéma noethérien S, on désigne par $\mathscr{H}_{C,G}(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphie de G-revêtements $X \to C \times_k S$ avec X une courbe sur S et tels que le discriminant est de la forme $r[c]$ pour une section $c\colon S \to C \times_k S$ et un entier $r \geqslant 1$. L'association $S \rightsquigarrow \mathscr{H}_{C,G}(S)$ donne lieu à un foncteur contravariant

$$\mathscr{H}_{C,G}\colon (\mathrm{Sch}/k)^{\mathrm{op}} \longrightarrow (\mathrm{Ens}),$$

où (Sch/k) désigne la catégorie des k-schémas noethériens.

Théorème 2.11. *Soit C une courbe projective sur un corps de caractéristique nulle k. Soit G un groupe fini à centre trivial. Alors,*

(1) *le foncteur $\mathscr{H}_{C,G}$ est représentable par un k-schéma de type fini $\mathrm{H}_{C,G}$;*

(2) *le morphisme $\mathrm{disc}\colon \mathrm{H}_{C,G} \to C$ associant à un revêtement le support de son discriminant est fini étale.*

Esquisse de démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de construction des espaces de Hurwitz ; voir le théorème 6.3.1 pour (1) et la proposition 6.5.2 pour (2) dans Bertin et Romagny (2011). [(2)] □

Soient $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, c un k-point C et $\bar{c}$ le $\bar{k}$-point associé. La fibre $\mathrm{disc}^{-1}(\bar{c})$ est l'ensemble des classes d'isomorphie de G-revêtements $X \to \bar{C} := C_{\bar{k}}$ non ramifiés en dehors de $\bar{c}$, où X est une courbe projective sur $\bar{k}$. Par la correspondance « de Galois » des revêtements, le choix d'un $\bar{k}$-point x dans $\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}$ donne lieu à une bijection

$$\mathrm{disc}^{-1}(\bar{c}) \longleftrightarrow F_{\bar{c}} := \left\{ \begin{array}{c} \text{homomorphismes surjectifs } \rho\colon \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}, x) \to G \\ \text{non triviaux sur les lacets autour de } x \end{array} \right\} \Big/ G \quad (3)$$

la locution « non triviaux sur les lacets autour de x » signifiant que la surjection ρ ne se factorise pas à travers l'homomorphisme naturel $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}, x) \to \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}, x)$ induit par l'inclusion de $\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}$ dans $\bar{C}$. (Le groupe G agit sur l'ensemble des homomorphismes $\rho\colon \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}, x) \to G$ par conjugaison.) Le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ opère naturellement sur la fibre $\mathrm{disc}^{-1}(\bar{c})$. D'autre part, via la suite courte exacte géométrique/arithmétique du groupe fondamental étale,

$$1 \longrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}, x) \longrightarrow \pi_1^{\text{ét}}(C \smallsetminus \{c\}, x) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1,$$

le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ opère par automorphismes extérieurs sur $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}, x)$. Les automorphismes intérieurs de $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}, x)$ agissant trivialement sur $F_{\bar{c}}$, on obtient une action naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$ sur $F_{\bar{c}}$ de sorte que la bijection avec $\mathrm{disc}^{-1}(\bar{c})$ est Galois équivariante.

[(2)] Dans *loc.cit.* il est plutôt question du *champ* de Hurwitz : la trivialité du centre de G assure que l'espace de modules grossier attaché au champ est un espace de modules fin.

2.3.2. *G-monodromie.* — Soient G un groupe fini, n un entier positif et $\iota\colon G \to \mathfrak{S}_n$ une injection de G dans le groupe symétrique sur n éléments. Pour un schéma connexe X, on dit qu'un revêtement étale $f\colon Y \to X$ de degré n a *G-monodromie* s'il existe un point géométrique x de X et une bijection $\{1,\dots,n\} \to f^{-1}(x)$ tels que l'application composée $\pi_1^{\text{ét}}(X,x) \to \mathrm{Aut}(f^{-1}(x)) \to \mathfrak{S}_n$ a pour image $\iota(G)$. Si c'est le cas, une telle bijection existe alors pour tout point géométrique de X.

On fixe un point géométrique x de X. Pour $i = 1, 2$, soient $f_i\colon Y_i \to X$ un revêtement à G-monodromie et $\{1,\dots,n\} \to \mathrm{Aut}(f_i^{-1}(x))$ comme ci-dessus. Alors, les revêtements f_1 et f_2 sont isomorphes si et seulement ρ_1 et ρ_2 sont conjuguées sous le normalisateur de $\iota(G)$ dans $\mathfrak{S}_n$.

Soient ℓ un nombre premier impair et $\mathrm{Aff}(\ell)$ le groupe des automorphismes affines de $\mathbb{F}_\ell$. Le caractère

$$\begin{array}{rcl} \chi\colon \mathrm{Aff}(\ell) & \longrightarrow & \mathbb{F}_\ell^\times \\ (z \mapsto az+b) & \longmapsto & a \end{array}$$

a pour noyau le sous-groupe engendré par $z \mapsto z+1$.

En identifiant $\mathbb{F}_\ell$ avec $\{1,\dots,\ell\}$ de la manière usuelle, l'action naturelle du groupe $\mathrm{Aff}(\ell)$ sur $\mathbb{F}_\ell$ est fidèle et induit une injection $\iota\colon \mathrm{Aff}(\ell) \to \mathfrak{S}_\ell$. Le choix de ι n'a guère d'importance car tout monomorphisme $\mathrm{Aff}(\ell) \to \mathfrak{S}_\ell$ lui est conjugué par $\mathfrak{S}_\ell$.

Lemme 2.12. *Soient C, C' des courbes projectives sur un corps de caractéristique nulle k et $\pi\colon C' \to C$ un revêtement avec $\mathrm{Aff}(\ell)$-monodromie. Supposons que le diviseur de ramification de π soit supporté exactement sur un k-point c de C. Alors,*

(1) *le diviseur de ramification est $(\ell-1)[c]$;*

(2) *la fibre $\pi^{-1}(c)$ est constituée d'un unique k-point de C' ;*

(3) *si la courbe C a genre g, alors le genre de la courbe C' est*

$$g\ell - \frac{\ell-1}{2}.$$

Démonstration. Quitte à étendre les scalaires, on peut supposer k algébriquement clos. Le groupe fondamental étale de $C \smallsetminus \{c\}$ est la complétion profinie du groupe libre sur $2g$ éléments $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$. [(3)] L'image dans $\mathrm{Aff}(\ell)$ du produit des commutateurs $[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]$ est un ℓ-cycle.

En effet, elle est non triviale car le revêtement π est ramifié et, par commutativité de $\mathbb{F}_\ell^\times$, contenue dans le noyau du caractère $\chi\colon \mathrm{Aff}(\ell) \to \mathbb{F}_\ell^\times$: elle est donc de la forme $x \mapsto x+u$ avec $u \in \mathbb{F}_\ell$. Il en découle qu'il n'y a qu'un point au-dessus de c. L'expression du genre de C' est une conséquence immédiate de la formule de Riemann–Hurwitz. □

[(3)] Pour voir cela, on se ramène d'abord au cas $k = \mathbb{C}$ grâce à l'invariance par extensions des scalaires du groupe fondamental étale géométrique. Sur le corps des complexes, le groupe fondamental étale est la complétion profinie du groupe fondamental topologique. Or, le groupe fondamental topologique d'une surface de Riemann compacte de genre g privée d'un point est le groupe libre sur $2g$ éléments.

2.3.3. *Construction de Prym.* — Soit ℓ un premier impair. Soit C une courbe projective de genre $g \geqslant 2$ sur un corps k de caractéristique nulle. On suppose que C a un point k-rationnel. Le centre du groupe affine $G := \mathrm{Aff}(\ell)$ étant trivial, on peut considérer le schéma $H := \mathrm{H}_{C,G}$ paramétrant les $\mathrm{Aff}(\ell)$-revêtements de C. Soit $X \to H \times_k C$ la famille universelle des G-revêtements de C.

On désigne par $T = \mathbb{F}_\ell^\times$ le stabilisateur de $0 \in \mathbb{F}_\ell$ dans G, à savoir, le sous-groupe de G formé par les automorphismes linéaires de $\mathbb{F}_\ell$. Le quotient Y de X par T est une courbe sur H. Le morphisme G-invariant $X \to H \times_k C$ induit un revêtement fini $\pi\colon Y \to H \times_k C$ à G-monodromie dont le diviseur de ramification est le graphe de disc: $H \to C$ compté avec multiplicité ℓ (*cf.* lemme 2.12).

On définit une section de la projection $\mathrm{pr}_H \circ \pi\colon Y \to H$ de la manière suivante. La fibre $\pi_h\colon Y_h \to C_{\kappa(h)}$ du morphisme π en un point $h \in H$ est un revêtement avec G-monodromie de courbes sur le corps résiduel $\kappa(h)$ de h. D'après le lemme 2.12, la fibre de π_h en le $\kappa(h)$-point $\mathrm{disc}(h)$ de $C_{\kappa(h)}$ consiste en un unique $\kappa(h)$-point que l'on note $\sigma(h)$.

On considère la composante neutre du schéma de Picard relatif $\mathrm{Pic}^0_{Y/H}$: c'est un schéma abélien principalement polarisé sur H. D'après le lemme 2.12 sa dimension relative est $g\ell - (\ell-1)/2$. Le morphisme π induit un morphisme

$$\pi^*\colon H \times_k \mathrm{Pic}^0_{C/k} = \mathrm{Pic}^0_{H\times C/H} \longrightarrow \mathrm{Pic}^0_{Y/H}$$

de schémas abéliens sur H. Le morphisme $\mathrm{N}\colon \mathrm{Pic}^0_{Y/H} \to H \times_k \mathrm{Pic}^0_{C/k}$ dual à π^* associe à un fibré en droites sur Y sa norme sur $C \times_k H$. Soit $\alpha'\colon A \to H$ le schéma abélien obtenu comme composante neutre du noyau du morphisme N, muni de la polarisation induite par la polarisation principale du schéma abélien $\mathrm{Pic}^0_{Y/H}$.

Définition 2.13. Le schéma fini-abélien $\alpha := \mathrm{disc} \circ \alpha'\colon A \to C$ est appelé la *famille de Kodaira–Parshin* pour le groupe $\mathrm{Aff}(\ell)$.

La dimension relative de la famille de Kodaira–Parshin est

$$g\ell - \frac{\ell-1}{2} - g = (g - \tfrac{1}{2})(\ell - 1). \tag{4}$$

Le morphisme $\mathrm{disc}\colon H \to C$ est la factorisation de Stein de α.

Théorème 2.14. *Soit $k = \mathbb{C}$. Alors, la famille de Kodaira–Parshin $\alpha\colon A \to C$ est un schéma fini-abélien avec grande monodromie.*

Esquisse de démonstration. On désigne par ν le morphisme disc et on fixe un $\mathbb{C}$-point c de C. La fibre $\nu^{-1}(c)$ de ν en c s'interprète comme l'ensemble des classes d'isomorphie des revêtements à G-monodromie ramifiés exactement en c. Le *mapping class group* de la surface épointée $C \smallsetminus \{c\}$ agit donc naturellement sur $\nu^{-1}(c)$. On considère l'intersection Γ de tous les stabilisateurs.

Pour un point h de $\nu^{-1}(c)$, le groupe Γ agit sur $\mathrm{H}^1(Y_h, \mathbb{Q})$ en préservant la forme d'intersection. Si $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pr}}(Y_h, \mathbb{Q})$ désigne l'orthogonal de l'image de $\pi_h^* \colon \mathrm{H}^1(C, \mathbb{Q}) \to \mathrm{H}^1(Y_h, \mathbb{Q})$, on a une application

$$\mu \colon \Gamma \longrightarrow \prod_{\nu(h)=c} \mathrm{Sp}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{pr}}(Y_h, \mathbb{Q})).$$

On se ramène sans trop de peine à démontrer que l'image de μ est Zariski-dense. Une variante du lemme de Goursat entraîne qu'il suffit de vérifier les deux faits suivants :

(1) pour tout $h \in \nu^{-1}(c)$, l'image de $\Gamma \to \mathrm{Sp}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{pr}}(Y_h, \mathbb{Q}))$ est Zariski-dense ;

(2) pour tous $h, h' \in \nu^{-1}(c)$ distincts, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que les éléments $\mathrm{pr}_h(\mu(\gamma))$ et $\mathrm{pr}_{h'}(\mu(\gamma))$ sont unipotents et les espaces qu'ils fixent ont dimensions différentes.

Les deux énoncés se démontrent en produisant des éléments unipotents des groupes $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{pr}}(Y_h, \mathbb{Q}))$. En l'occurrence, ils seront des transvections sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{pr}}(Y_h, \mathbb{Q})$ induites par des twists de Dehn associés à des courbes simples sur $C \smallsetminus \{c\}$. Je dois me contenter de donner une idée très sommaire de comment leur choix judicieux est fait. On commence en donnant une forme normale d'un revêtement $\pi_h \colon Y_h \to C$; on exploitera le fait que le groupe G est extension des groupes cycliques $\mathbb{F}_\ell^\times$ et $\mathbb{F}_\ell$.

La composée de la représentation de monodromie $\rho_h \colon \pi_1(C \smallsetminus \{c\}) \to \mathrm{Aff}(\ell)$ avec le caractère $\chi \colon \mathrm{Aff}(\ell) \to \mathbb{F}_\ell^\times$ se factorise par l'homologie de la surface C. On fixe un isomorphisme $\mathbb{F}_\ell^\times \simeq \mathbb{Z}/(\ell-1)$. L'homomorphisme $\mathrm{H}_1(C, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/(\ell-1)$ qui en résulte envoie la classe d'un cycle vers le nombre d'intersection, pris modulo $\ell - 1$, avec une courbe simple non séparante α passant par c.

Le complémentaire d'un voisinage tubulaire V de α est une surface à bord C' telle que la composée

$$\pi_1(C') \longrightarrow \pi_1(C \smallsetminus \{c\}) \xrightarrow{\pi_h} \mathrm{Aff}(\ell) \xrightarrow{\chi} \mathbb{F}_\ell^\times$$

est triviale. À nouveau, l'homomorphisme $\pi_1(C') \to \mathrm{Ker}\,\chi = \mathbb{F}_\ell$ qui s'en déduit envoie un lacet vers le nombre d'intersection, pris modulo ℓ, avec un arc β reliant les deux composantes de bord de C'.

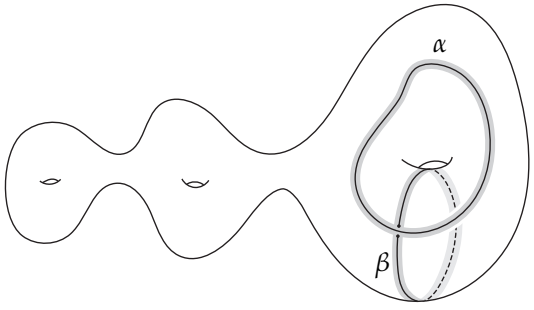


Figure 2 – La courbe α, l'arc β et leurs voisinages tubulaires V et W. On voit sur la figure que la surface à bord $V \cup W$ est homéomorphe à un tore à bord.

Soit W un voisinage tubulaire de β. La surface $T := V \cup W$ est un tore à bord dont le complémentaire S est une surface à bord (de genre $g-1$). Par construction, la représentation de monodromie est triviale sur S et sur le bord de T. Les twists de Dehn cherchés sont fabriqués à partir de courbes simples sur $T \smallsetminus \{c\}$. □

2.4. La conjecture de Mordell

2.4.1. *Stagnation des familles de Kodaira–Parshin.* — Soient C une courbe projective sur K de genre g, ℓ un nombre premier et $\alpha\colon A \to C$ la famille de Kodaira–Parshin pour le groupe $\mathrm{Aff}(\ell)$.

Pour un ensemble fini S de places de K assez grand, la famille de Kodaira–Parshin s'étend en une famille finie-abélienne polarisée sur un $\mathscr{O}_{K,S}$-schéma projectif lisse à fibres géométriquement connexes de dimension relative 1. Avec un abus de notation, on désigne encore par $\alpha\colon A \to C$ une telle extension. Soit $\nu\colon C' = \mathrm{Spec}\,\alpha_*\mathscr{O}_A \to C$ la factorisation de Stein de α. Soit $\bar{K}$ une clôture algébrique de K.

Soit p un premier impair qui ne ramifie pas dans K et tel que S ne contient pas de place p-adique, et soit v une place p-adique de K.

Proposition 2.15. *Soit $c \in C(K)$. Avec les notations ci-dessus, on suppose*

(1) *ℓ congru à 3 modulo 4;*

(2) *les entiers $|\mathbb{F}_v|$ et $\ell-1$ premiers entre eux;*

(3) *pour tout premier impair q divisant $\ell-1$, la classe de $|\mathbb{F}_v|$ dans $\mathbb{F}_q^\times$ d'ordre $\geqslant 8$.*

Alors,

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(\bar{c}), 7) \leqslant 7\frac{2^{g+1}}{(\ell-1)^g}.$$

Le reste de ce numéro est consacré à la preuve de cet énoncé. On commence par un lemme simple dont la preuve est laissé au lecteur (voir Lawrence et Venkatesh, 2020, Lemma 2.11) :

Lemme 2.16. *On considère l'homomorphisme de groupes $t\colon \mathrm{Aff}(\ell)^{2g} \to (\mathbb{F}_\ell^\times)^{2g}$ et l'application $u\colon \mathrm{Aff}(\ell)^{2g} \to \mathrm{Aff}(\ell)$, définis par*

$$t(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) := (\chi(a_1), \chi(b_1), \ldots, \chi(a_g), \chi(b_g)).$$
$$u(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) := [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g].$$

Soit N le sous-ensemble de $\mathrm{Aff}(\ell)^{2g}$ formé des $2g$-uplets $(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g)$ engendrant $\mathrm{Aff}(\ell)$ et vérifiant $u(a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g) \neq \mathrm{id}_{\mathbb{F}_\ell}$. Alors,

(1) *l'image de t par N est l'ensemble des $2g$-uplets engendrant $\mathbb{F}_\ell^\times$:*

$$t(N) = \{(\tau_1, \ldots, \tau_{2g}) : \langle \tau_1, \ldots, \tau_{2g} \rangle = \mathbb{F}_\ell^\times\};$$

(2) *pour tout $x \in N$,*

$$|t^{-1}(t(x)) \cap N| = \ell^{2g}(\ell-1).$$

Par construction, la fibre $\nu^{-1}(\bar{c})$ s'identifie de manière Galois équivariante aux classes de conjugaisons des épimorphismes $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}) \to \mathrm{Aff}(\ell)$ ne se factorisant pas à travers l'application canonique $\rho\colon \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}) \to \pi_1^{\text{ét}}(\bar{C})$. La composition d'une telle surjection avec la projection $\sigma\colon \mathrm{Aff}(\ell) \to \mathbb{F}_\ell^\times$ donne lieu à une application Galois équivariante

$$\Phi_c\colon \nu^{-1}(\bar{c}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}), \mathbb{F}_\ell^\times).$$

Un homomorphisme continu surjectif de groupes $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}) \to \mathrm{Aff}(\ell)$ est déterminé par la donnée de $2g$ éléments $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g$ de $\mathrm{Aff}(\ell)$. De plus, un tel homomorphisme se factorise à travers $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C})$ si et seulement si le produit des commutateurs $[\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g]$ est l'élément neutre.

En reprenant les notations du Lemme 2.16, le choix des générateurs de l'image de $\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\})$ qui précède permet d'identifier la fibre $\nu^{-1}(\bar{c})$ avec le quotient $N/\mathrm{Aff}(\ell)$ de N par l'action de conjugaison de $\mathrm{Aff}(\ell)$, le groupe abélien $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_\ell^\times)$ avec $(\mathbb{F}_\ell^\times)^{2g}$ et l'application Φ_c avec t. D'après la description explicite de Φ_c et le lemme 2.16 (2), les fibres de Φ_c ont toutes le même cardinal et donc

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(\bar{c}), 7) \leqslant \mathrm{stag}_v(\mathrm{Im}\,\Phi_c, 7).$$

Pour conclure la preuve de la proposition 2.15, il suffit de borner la v-stagnation de l'image de Φ_c, c'est-à-dire de majorer le nombre d'éléments d'orbite de taille $\leqslant 7$ et de minorer le cardinal de $\mathrm{Im}\,\Phi_c$.

Lemme 2.17. *Avec les notations introduites ci-dessus,*

$$|\mathrm{Im}\,\Phi_c| \geqslant \tfrac{1}{2}(\ell-1)^{2g}, \tag{1}$$

$$|\{x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_\ell^\times) : |\langle \mathrm{Fr}_v \rangle . x| \leqslant 7\}| \leqslant 7 \cdot 2^g (\ell-1)^g. \tag{2}$$

Démonstration. (1) Via le lemme 2.16 (1) on identifie l'image de Φ_c à l'ensemble des épimorphismes $(\mathbb{F}_\ell^\times)^{2g} \to \mathbb{F}_\ell^\times$. Prendre le produit tensoriel d'un tel épimorphisme avec le $\mathbb{Z}/(\ell-1)$-module $\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_\ell^\times, \mathbb{Z}/(\ell-1))$ libre de rang 1 met en bijection l'ensemble précédent avec l'ensemble des épimorphismes $(\mathbb{Z}/(\ell-1))^{2g} \to \mathbb{Z}/(\ell-1)$, ou encore (par dualité) avec les éléments de $(\mathbb{Z}/(\ell-1))^{2g}$ engendrant un sous-module libre. Si q est un nombre premier, il y a $q^{2gr}(1-q^{-2g})$ éléments de $(\mathbb{Z}/q^r\mathbb{Z})^{2g}$ engendrant un sous-$\mathbb{Z}/q^r\mathbb{Z}$-module libre. En prenant le produit sur les premiers divisant $\ell-1$,

$$|\mathrm{Im}\,\Phi_c| = (\ell-1)^{2g} \prod_{\substack{q \mid \ell-1 \\ \text{premier}}} (1-q^{-2g}) \geqslant \tfrac{1}{2}(\ell-1)^{2g},$$

où l'on a utilisé l'inégalité

$$\prod_{\substack{q|\ell-1\\ \text{premier}}}(1-q^{-2g})^{-1} < \prod_{\substack{q|\ell-1\\ \text{premier}}}(1-q^{-2})^{-1} < \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} < 2.$$

(2) Par commutativité de $\mathbb{F}_\ell^\times$, la précomposition avec ρ induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_\ell^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C} \smallsetminus \{\bar{c}\}), \mathbb{F}_\ell^\times).$$

L'abélianisé du groupe fondamental étale de $\bar{C}$ s'identifie de manière Galois équivariante au module de Tate de la jacobienne J de C. Le groupe $\mathbb{F}_\ell^\times$ étant de $(\ell-1)$-torsion,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{C}), \mathbb{F}_\ell^\times) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell-1], \mathbb{F}_\ell^\times).$$

L'accouplement de Weil $J[\ell-1] \times J[\ell-1] \to \mu_{\ell-1}$ induit par dualité un accouplement parfait et compatible à l'action de Galois

$$\langle -, - \rangle \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell-1], \mathbb{F}_\ell^\times) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell-1], \mathbb{F}_\ell^\times) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mu_{\ell-1}, (\mathbb{F}_\ell^\times)^{\otimes 2}),$$

où $(\mathbb{F}_\ell^\times)^{\otimes 2}$ désigne la deuxième puissance tensorielle du $\mathbb{Z}/(\ell-1)$-module inversible $\mathbb{F}_\ell^\times$. Comme la courbe C a bonne réduction en v, l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ sur $J[\ell-1]$ est non ramifiée. L'endomorphisme de Frobenius $\mathrm{Fr}_v \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_v/\mathbb{F}_v)$ opère linéairement sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell-1], \mathbb{F}_\ell^\times)$ et, pour tous $x, x' \in \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\bar{C}, \mathbb{F}_\ell^\times)$,

$$\langle \mathrm{Fr}_v.x, \mathrm{Fr}_v.x' \rangle = |\mathbb{F}_v|^{-1} \langle x, x' \rangle.$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tous $x, x' \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_v^i - \mathrm{id})$,

$$(|\mathbb{F}_v|^{-i} - 1)\langle x, x' \rangle = 0.$$

Les éléments x de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell-1], \mathbb{F}_\ell^\times)$ ayant orbite de taille $\leqslant 7$ vérifient $\mathrm{Fr}_v^i.x = x$ pour un certain $i = 1, \ldots, 7$, c'est-à-dire qu'ils appartiennent au noyau de $\mathrm{Fr}_v^i - \mathrm{id}$.

Soit q un premier impair divisant $\ell - 1$. Comme la classe de $|\mathbb{F}_v|$ modulo q est inversible et d'ordre $\geqslant 8$ dans $\mathbb{F}_q^\times$, les entiers $|\mathbb{F}_v|^i - 1$ et q sont premiers entre eux. L'accouplement $\langle x, x' \rangle$ de x et x' est un élément d'un $\mathbb{Z}/(\ell-1)\mathbb{Z}$-module libre de rang 1, donc l'identité précédente implique $2\langle x, x' \rangle = 0$ car 4 ne divise pas $\ell - 1$.

Lemme 2.18. *Soit M un groupe abélien fini muni d'un accouplement parfait à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Soit N un sous-groupe totalement isotrope. Alors,*

$$|N| \leqslant \sqrt{|M|}.$$

Le $\mathbb{Z}/(\ell-1)$-module $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell-1], \mathbb{F}_\ell^\times)$ est libre de rang $2g$. En appliquant le lemme précédent avec $M = 2\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(J[\ell-1], \mathbb{F}_\ell^\times)$ et $N = 2\,\mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_v^i - \mathrm{id})$ on trouve

$$|\,\mathrm{Ker}(\mathrm{Fr}_v^i - \mathrm{id})| \leqslant 2^g(\ell-1)^g.$$

On termine la preuve en prenant la somme pour $i = 1, \ldots, 7$. □

2.4.2. *Fin de la preuve du théorème de Faltings.* — Il ne reste qu'à bien choisir les données auxiliaires, c'est-à-dire le premier ℓ et la place v. Soient K un corps de nombres et $g \geqslant 2$ un entier. Alors, il existe un nombre premier ℓ avec les propriétés suivantes :

(1) ℓ est congru à 3 modulo 4 ;

(2) $\ell - 1$ n'est divisible par aucun premier impair $\leqslant 8[K : \mathbb{Q}]$;

(3) toute clôture galoisienne K' de K est linéairement disjointe de $\mathbb{Q}(\mu_{\ell-1})$;

(4) l'inégalité suivante est satisfaite :

$$7\frac{2^{g+1}}{(\ell-1)^g} < \frac{1}{(g-\frac{1}{2})(\ell-1)+1}.$$

L'existence d'un tel ℓ découle du théorème de la progression arithmétique de Dirichlet : il existe une infinité de premiers ℓ qui ne sont congrus à 1 ni modulo un premier impair divisant le discriminant de K, ni modulo un premier impair $\leqslant 8[K : \mathbb{Q}]$, ni modulo 4. La condition (3) s'ensuit pour des raisons de ramification et la condition (4) peut être toujours satisfaite quitte à prendre ℓ assez grand.

On considère la famille de Kodaira–Parshin pour le groupe $\mathrm{Aff}(\ell)$. Pour un ensemble fini S de places de K assez grand, la courbe C s'étend en une courbe projective sur $\mathscr{O}_{K,S}$ (que l'on note abusivement encore par C) et la famille de Kodaira–Parshin en un schéma fini-abélien $\alpha\colon A \to C$. On remarquera que le membre de droite de la condition (4) se récrit comme $1/(d+1)$ où $d = (g-\frac{1}{2})(\ell-1)$ est la dimension relative de $\alpha\colon A \to S$.

Une application facile du théorème de densité de Čeboratev montre qu'il existe une place v de K avec les propriétés suivantes :

(1) la place v est admissible et n'appartient pas à S ;

(2) $\ell - 1$ et $|\mathbb{F}_v|$ sont premiers entre eux ;

(3) pour tout premier impair q divisant $\ell - 1$, la classe de $|\mathbb{F}_v|$ modulo q est inversible et a ordre $\geqslant 8$ dans $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times$.

Soit c un K-point de C. Grâce au choix de ℓ et de v, on peut appliquer la Proposition 2.15 et obtenir la borne suivante pour la v-stagnation de $\nu^{-1}(c)$:

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), 7) \leqslant 7\frac{2^{g+1}}{(\ell-1)^g} < \frac{1}{d+1}.$$

Le Théorème 2.7 permet alors de conclure. □

3. Applications de périodes

3.1. Cas complexe

3.1.1. — Soit $\pi\colon X \to S$ un morphisme propre et lisse entre variétés algébriques complexes non singulières. L'application holomorphe $\pi^{\mathrm{an}}\colon X^{\mathrm{an}} \to S^{\mathrm{an}}$ associée est une submersion holomorphe et propre entre variétés complexes. Le théorème d'Ehresmann affirme qu'il s'agit d'une fibration topologique localement triviale : étant donnés un ouvert simplement connexe Ω de S^{an} et un point s de Ω, l'ouvert $\pi^{-1}(\Omega)$ de X^{an} est homéomorphe à $X_s^{\mathrm{an}} \times \Omega$ où X_s^{an} est la fibre de π^{an} en s.

Il en découle que, pour tout naturel $q \in \mathbb{N}$, le faisceau $\mathrm{R}^q\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}$ est un système local sur S^{an}, où $\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}$ est le faisceau des fonctions localement constantes à valeurs complexes sur X^{an}. Le fibré vectoriel holomorphe $V := \mathrm{R}^q\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}} \otimes_{\mathbb{C}_{S^{\mathrm{an}}}} \mathscr{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ est muni de la connexion id $\otimes$d dont les sections horizontales s'identifient de façon tautologique à $\mathrm{R}^q\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}$.

D'autre part, le théorème de de Rham fournit un isomorphisme du fibré vectoriel V avec le q-ème faisceau de cohomologie de de Rham relative $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}/S^{\mathrm{an}})$. Par transport de structure, le fibré vectoriel $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}/S^{\mathrm{an}})$ est muni d'une connexion canonique ∇_{GM} appelée de *Gauss–Manin* (ou de *Picard–Fuchs* suivant les auteurs).

Par le théorème GAGA de Serre, l'application naturelle de fibrés vectoriels holomorphes $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)^{\mathrm{an}} \to \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X^{\mathrm{an}}/S^{\mathrm{an}})$ est un isomorphisme. Comme la variété S n'est pas supposée propre, les connexions holomorphes sur $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)^{\mathrm{an}}$ ne sont pas algébriques en général et il est tout à fait remarquable que ce soit le cas pour la connexion ∇_{GM} construite par les moyens fort transcendants décrits ci-dessus.

3.1.2. — Par construction, la connexion de Gauss–Manin est intégrable et elle permet donc d'identifier les fibres voisines de $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$. Plus précisément, étant donné un ouvert simplement connexe Ω de S^{an}, le système local $\mathrm{R}^q\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}$ est constant, d'où un isomorphisme, pour $s, t \in \Omega$,

$$\mathrm{H}^q(X_s^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \xleftarrow[\sim]{\mathrm{ev}_s} \Gamma(\Omega, \mathrm{R}^q\pi_*^{\mathrm{an}}\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{ev}_t} \mathrm{H}^q(X_t^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$
$$\mathrm{H}^q(X_s^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\tilde{\chi}_{s,t}} \mathrm{H}^q(X_t^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels donné par l'evaluation en s et en t. Par composition avec l'isomorphisme de de Rham, on déduit de $\tilde{\chi}_{s,t}$ un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels

$$\chi_{s,t}\colon \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_t/\mathbb{C}).$$

Lorsque Ω est une boule assez petite on peut écrire une formule explicite pour l'isomorphisme $\chi_{s,t}$ purement en termes de la connexion ∇_{GM}. Soient $z_1, \ldots, z_d$ des

coordonnées sur Ω ($d = \dim S$). Pour $i = 1, \dots, d$, on considère la dérivation

$$D_i = \nabla_{\mathrm{GM}}(\frac{\partial}{\partial z_i}) \colon \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S) \longrightarrow \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$$

donnée par l'évaluation de la connexion ∇_{GM} le long du champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_i}$. Alors, l'homomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes sur Ω,

$$\begin{aligned} \chi_s \colon \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)^{\mathrm{an}}_{|\Omega} &\longrightarrow \mathscr{O}_\Omega \otimes \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/S) \\ v &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \frac{z^n}{n!} \otimes D^n(v).s \end{aligned}$$

est un isomorphisme satisfaisant $\chi_s(D_i(v)) = \frac{\partial D(v)}{\partial z_i}$, où pour un d-uplet de nombres entiers $n = (n_1, \dots, n_d)$, on a utilisé la notation $n! = n_1! \cdots n_d!$, $z^n = z_1^{n_1} \cdots z_d^{n_d}$ et $D^n = D_1^{n_1} \circ \cdots \circ D_d^{n_d}$.[(4)] L'isomorphisme $\chi_{t,s}$ plus haut n'est rien d'autre que la fibre en t de χ_s.

Le fibré vectoriel $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$ est muni de sa filtration (décroissante) de Hodge

$$\mathrm{Fil}^\bullet \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S) : \mathscr{F}^0 = \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S) \supseteq \mathscr{F}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{F}^n \supseteq \mathscr{F}^{n+1} = 0,$$

par les sous-fibrés vectoriels $\mathscr{F}^i = \mathrm{Im}(\mathrm{R}^i\pi_*\Omega^\bullet_{X/S} \to \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S))$.

Pour un entier $i \geqslant 1$, soit r_i le rang du fibré vectoriel $\mathscr{F}^i/\mathscr{F}^{i+1}$ et soit $r = (r_0, \dots, r_n)$. On considère la variété $\mathfrak{H} := \mathrm{Flag}_r(\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/\mathbb{C}))$ des drapeaux de type r de l'espace vectoriel $\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/\mathbb{C})$. L'application holomorphe

$$\mathrm{Per}_s \colon \Omega \longrightarrow \mathfrak{H}^{\mathrm{an}} = \mathrm{Flag}_r(\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/\mathbb{C}))^{\mathrm{an}}$$

qui, à tout point $t \in \Omega$, associe le point représentant le drapeau $\chi_{t,s}(\mathrm{Fil}^\bullet \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)_t)$ est appelée l'*application (holomorphe) de périodes*.

Exemple 3.1. La pierre angulaire des applications de périodes est sans doute celle provenant de la famille de Legendre de courbes elliptiques $\pi \colon X \to S$, où S est la droite projective complexe privée de 3 points $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \smallsetminus \{0, 1, \infty\}$ et pour $\lambda \in S(\mathbb{C})$, la fibre en λ de π est la courbe elliptique d'équation affine

$$E_\lambda : \quad y^2 = x(x-1)(x-\lambda).$$

Soient λ un nombre complexe $\neq 0, 1$ et $\Omega \subseteq \mathbb{C} \smallsetminus \{0, 1\}$ un voisinage ouvert simplement connexe de λ. Le premier groupe de cohomologie de de

[(4)] L'ordre de la composition dans la dernière expression n'a pas d'importance car les opérateurs D_i commutent entre eux à cause de l'intégrabilité de ∇_{GM} et de la commutativité des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z_i}$.

Rham $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E_\lambda/\mathbb{C})$ de E_λ est de dimension 2 et l'application de périodes décrit comment varie $\mathrm{H}^0(E_{\lambda'}, \Omega^1_{E_{\lambda'}})$ pour $\lambda' \in \Omega$,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Per}_\lambda : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E_\lambda/\mathbb{C})) \\ \lambda' & \longmapsto & \left[\chi_{\lambda',\lambda}(\mathrm{H}^0(E_{\lambda'}, \Omega^1_{E_{\lambda'}}))\right], \end{array}$$

les crochets désignant le point associé à la droite vectorielle.

Du point de vue topologique, par le biais d'un homéomorphisme $\pi^{-1}(\Omega) \simeq \Omega \times E_\lambda$ on peut voir des lacets α sur E_λ comme des lacets $\alpha(\lambda')$ sur $E_{\lambda'}$ pour tout $\lambda' \in \Omega$. On fixe une base α_1, α_2 du premier groupe d'homologie de la courbe elliptique E_λ. Via l'isomorphisme de de Rham

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E_\lambda/\mathbb{C}) \simeq \mathrm{H}^1(E_\lambda, \mathbb{C}),$$

les lacets α_1 et α_2 (vus comme des formes linéaires sur $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(E_\lambda/\mathbb{C})$) prennent les valeurs

$$\omega_i(\lambda') = \int_{\alpha_i(\lambda')} \frac{\mathrm{d}x}{y} \qquad (i = 1, 2)$$

sur la base $\mathrm{d}x/y$ de la droite vectorielle $\mathrm{H}^0(E_{\lambda'}, \Omega_{E_{\lambda'}})$. Autrement dit, dans les coordonnées dans le repère α_1, α_2, l'application de périodes est la fonction holomorphe

$$\begin{array}{rcl} \tau : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ \lambda' & \longmapsto & \tau(\lambda') = \frac{\omega_1(\lambda')}{\omega_2(\lambda')}, \end{array}$$

et la courbe elliptique complexe $E_{\lambda'}$ est biholomorphe à $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau(\lambda')\mathbb{Z})$.

Du point de vue différentiel, les sections horizontales pour la connexion de Gauss–Manin sont les solutions de l'*équation hypergéometrique* de Gauss de paramètres $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$, à savoir :

$$\lambda(1-\lambda)f'' + (1-2\lambda)f' - \tfrac{1}{4}f = 0.$$

La fonction holomorphe τ plus haut s'interprète comme le ratio de deux solutions linéairement indépendantes.

3.1.3. — Soit $\nu : \tilde{S} \to S^{\mathrm{an}}$ un revêtement universel de S^{an}. Un point $\tilde{s}$ dans la fibre $\nu^{-1}(s)$ étant fixé, il existe une unique composante connexe $\tilde{\Omega}$ de $\nu^{-1}(\Omega)$ contenant $\tilde{s}$ et le revêtement ν se restreint en un homéomorphisme $\nu_{|\tilde{\Omega}} : \tilde{\Omega} \xrightarrow{\sim} \Omega$. L'application $\mathrm{Per}_s \circ \nu_{|\tilde{\Omega}}$ s'étend en une application holomorphe $\mathrm{Per}_{\tilde{s}} : \tilde{S} \to \mathfrak{H}$ équivariante sous l'action du groupe fondamental $\pi_1(S^{\mathrm{an}}, s)$ opérant sur le revêtement universel $\tilde{S}$ de manière naturelle et sur $\mathfrak{H}$ via la représentation de monodromie

$$\rho_s : \pi_1(S^{\mathrm{an}}, s) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(X_s/\mathbb{C})).$$

En particulier, on obtient :

Lemme 3.2. *Avec les notations ci-dessus, soit* Γ *(resp.* Z*) l'adhérence de Zariski de l'image de l'application* ρ_s *(resp.* Per_s*). Alors,*

$$\Gamma.\mathrm{Per}_s(s) \subseteq Z.$$

Dans l'énoncé il n'y a pas de confusion possible à propos de l'adhérence de Zariski à prendre, si algébrique ou analytique : comme $\mathfrak{H}$ est une variété projective, elles coïncident d'après le théorème de Chow.

3.2. Cas formel

3.2.1. — Soit $\pi\colon X \to S$ un morphisme propre et lisse entre variétés algébriques lisses sur un corps k de caractéristique nulle. Il y a manière de donner une définition purement algébrique de la connexion de Gauss–Manin ∇_{GM} sur le q-ème faisceau de cohomologie de de Rham $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$ (voir Katz, 1970, §3.4). On peut aussi donner un sens à l'isomorphisme χ_s plus haut en termes de géométrie formelle, à savoir, en remplaçant les fonctions holomorphes par des séries formelles à coefficients dans k.

De façon plus précise, soit s un point k-rationnel de S. On considère la complétion formelle $\hat{\mathscr{O}}_{S,s}$ de l'anneau local $\mathscr{O}_{S,s}$ en s :

$$\hat{\mathscr{O}}_{S,s} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{O}_{S,s}/\mathfrak{m}_s^n,$$

où $\mathfrak{m}_s$ est l'idéal maximal de $\mathscr{O}_{S,s}$. On désigne par $\varepsilon\colon \mathrm{Spec}\,\hat{\mathscr{O}}_{S,s} \to S$ le morphisme qui s'en déduit. L'analogue formel de l'isomorphisme χ_s est un isomorphisme

$$\hat{\chi}_s\colon \varepsilon^*\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S) \longrightarrow \hat{\mathscr{O}}_{S,s} \otimes_k \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/k)$$

de $\hat{\mathscr{O}}_{S,s}$-modules décrit en coordonnées locales de la manière suivante.

Soient $z_1, \dots, z_d \in \mathscr{O}_{S,s}$ des paramètres locaux en s, *i.e.* des générateurs de l'idéal maximal $\mathfrak{m}_s$, où $d = \dim S$. Après passage aux complétions, l'inclusion de $k[z_1, \dots, z_d]$ dans $\mathscr{O}_{S,s}$ s'étend en un isomorphisme

$$k[[z_1, \dots, z_d]] \xrightarrow{\sim} \hat{\mathscr{O}}_{S,s}$$

de k-algèbres locales complètes. Comme avant, on pose $D_i = \nabla_{\mathrm{GM}}(\frac{\partial}{\partial z_i})$. Via l'isomorphisme qui précède, la formule pour v dans $\varepsilon^*\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$,

$$\hat{\chi}_s(v) = \sum_{n\in\mathbb{N}^d} \frac{z^n}{n!} \otimes D^n(v).s, \tag{5}$$

a un sens comme élément de $\hat{\mathscr{O}}_{S,s} \otimes_k \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/k)$ (où l'on a employé les mêmes conventions qu'au numéro précédent).

3.2.2. — L'isomorphisme $\hat{\chi}_s$ permet de définir un analogue formel de l'application de périodes. On désigne encore par

$$\mathrm{Fil}^\bullet \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S) : \mathscr{F}^0 = \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S) \supseteq \mathscr{F}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathscr{F}^n \supseteq \mathscr{F}^{n+1} = 0$$

la filtration de Hodge, par r_i le rang de $\mathscr{F}^i/\mathscr{F}^{i+1}$ et on pose $r = (r_0, \ldots, r_n)$. La filtration du $\hat{\mathscr{O}}_{S,s}$-module $\hat{\mathscr{O}}_{S,s} \otimes_k \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/k)$ induite par $\varepsilon^* \mathrm{Fil}^\bullet \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$ via $\hat{\chi}_s$ donne lieu à un morphisme de k-schémas

$$\widehat{\mathrm{Per}}_s : \mathrm{Spec}\, \hat{\mathscr{O}}_{S,s} \longrightarrow \mathfrak{H} := \mathrm{Flag}_r(\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/k)),$$

qu'on appellera l'*application de périodes formelle*.

Lemme 3.3. *Avec les notations ci-dessus, on suppose que k est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Soient Ω un voisinage contractile de s dans $S(\mathbb{C})$ et $\mathrm{Per}_s : \Omega \to (\mathfrak{H} \times_k \mathbb{C})^{\mathrm{an}}$ l'application holomorphe des périodes en s. Soient $\hat{Z}$ et $Z_{\mathbb{C}}$ respectivement les adhérences de Zariski de l'image de $\widehat{\mathrm{Per}}_s$ et de Per_s. Alors,*

$$Z_{\mathbb{C}} = \hat{Z} \times_k \mathbb{C}.$$

Cette observation élémentaire relève de l'insensibilité des adhérences de Zariski aux extensions de scalaires et du fait que $\widehat{\mathrm{Per}}_s$ et Per_s sont données « par les mêmes formules ».

3.3. Cas p-adique

Soit p un nombre premier. Soit K une extension finie non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, d'anneau des entiers $\mathscr{O}_K$ et de corps résiduel k.

3.3.1. — Pour une variété algébrique X sur K on désigne par X^{an} le K-espace analytique associé au sens de Berkovich. [(5)] L'espace topologique sous-jacent est l'ensemble $|X^{\mathrm{an}}|$ des couples $(x, |\cdot|)$ formés d'un point $x \in X$ (pas nécessairement fermé) et d'une valeur absolue $|\cdot|$ sur le corps résiduel $\kappa(x)$ en x étendant celle de K ; l'ensemble $|X^{\mathrm{an}}|$ est muni de la topologie la moins fine pour laquelle

- l'application oubliant la valeur absolue $\pi_X : |X^{\mathrm{an}}| \to X$, $(x, |\cdot|) \mapsto x$ est continue ;
- pour tout ouvert U de X et toute fonction régulière $f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_X)$, l'application $|f| : |X^{\mathrm{an}}| \to \mathbb{R}_+$, $(x, |\cdot|) \mapsto |f(x)|$ est continue.

L'espace topologique $|X^{\mathrm{an}}|$ est localement compact. Si X est intègre, une fonction analytique sur un ouvert U de $|X^{\mathrm{an}}|$ est une fonction qui est localement limite uniforme de fonctions rationnelles sans pôles.

[(5)] Le choix de ce langage pour l'analyse rigide n'a guère d'importance et le lecteur préférant d'autres points de vue pourra s'en servir sans changements majeurs.

Si $\mathscr{X}$ est un modèle de X, c'est-à-dire un $\mathscr{O}_K$-schéma plat séparé de type fini de fibre générique X, on considère le sous-ensemble compact $\mathscr{X}_\eta$ de X^{an}, appelé la *fibre générique à la Raynaud*, formé par les couples $(x, |\cdot|)$ tels que le morphisme naturel $\operatorname{Spec}\kappa(x) \to X$ s'étend en un morphisme $\operatorname{Spec}\kappa(x)^\circ \to \mathscr{X}$, où $\kappa(x)^\circ$ est l'anneau des entiers de $\kappa(x)$ par rapport à $|\cdot|$:

$$\kappa(x)^\circ = \{\lambda \in \kappa(x) : |\lambda| \leqslant 1\}.$$

Une telle extension étant unique par séparation de $\mathscr{X}$, on définit l'application de réduction $\mathrm{red}\colon \mathscr{X}_\eta \to \mathscr{X}_0$ à valeurs dans la fibre spéciale $\mathscr{X}_0$ de $\mathscr{X}$ associant à un couple $(x, |\cdot|)$ l'image par $\operatorname{Spec}\kappa(x)^\circ \to \mathscr{X}$ du point fermé de $\operatorname{Spec}\kappa(x)^\circ$.

Il s'agit d'une application anti-continue, c'est-à-dire que la préimage d'un fermé est ouverte. Par exemple, si x est un $\mathscr{O}_K$-point de $\mathscr{X}$, l'ensemble $\Omega_x := \mathrm{red}^{-1}(\mathrm{red}(x))$ est un ouvert de $\mathscr{X}_\eta$ contenant x et qu'on appelle le *disque autour de* x. [(6)] Les K-points de Ω_x s'identifient aux $\mathscr{O}_K$-points x' de $\mathscr{X}$ tels que

$$x \equiv x' \pmod{p}.$$

Exemple 3.4. Soient $\mathscr{X} = \mathbb{A}^1_{\mathscr{O}_K}$ la droite affine sur $\mathscr{O}_K$ et $X = \mathbb{A}^1_K$ la droite affine sur K. Alors, le compact $\mathscr{X}_\eta$ n'est autre que le disque fermé de rayon 1 dans X^{an} :

$$\mathscr{X}_\eta = \{(x, |\cdot|) \in \mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_K : |t(x)| \leqslant 1\},$$

où t désigne la fonction coordonnée sur $\mathbb{A}^1$. La fibre spéciale de $\mathscr{X}$ est la droite affine $\mathbb{A}^1_k$ sur le corps résiduel k et le disque ouvert autour de 0 est le disque ouvert de rayon 1 centré à l'origine :

$$\Omega_0 := \mathrm{red}^{-1}(\mathrm{red}(0)) = \{(x, |\cdot|) \in \mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_K : |t(x)| < 1\}.$$

3.3.2. — La connexion de Gauss–Manin peut être définie en général pour un schéma T, un T-schéma lisse S et un morphisme propre et lisse $\pi\colon X \to S$. Ici, on prend pour T le spectre de $\mathscr{O}_K$. On suppose de plus S connexe et que les $\mathscr{O}_S$-modules cohérents $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$ et $\mathrm{R}^i\pi_*\Omega^j_{X/S}$ sont localement libres pour tout $i, j, q \in \mathbb{N}$.

Soit s un K-point de la fibre générique à la Raynaud S_η de S et soit Ω_s le disque autour de s. Comme S est lisse, on peut identifier Ω_s avec le produit de n copies du disque ouvert centré à l'origine et de rayon 1 :

$$\mathrm{D}(0, 1^-)^n = \{x \in \mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_K : |t_i(x)| < 1\},$$

où n est la dimension (relative) de S sur $\mathscr{O}_K$ et $t_1, \ldots, t_n$ sont les fonctions coordonnées sur l'espace affine $\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_K$. Quoique cela ne soit pas de grande importance (tout point

[(6)] Si le $\mathscr{O}_K$-schéma $\mathscr{X}$ est lisse de dimension relative d, le critère de lissité formelle montre que Ω_x est isomorphe en tant que K-espace analytique au disque ouvert de rayon 1 de dimension d.

d'un disque p-adique en est un centre), on peut supposer que s soit envoyé sur 0. La série formelle (5) converge [7] sur Ω_s (voir l'exposé de Katz, 1973, dans ce séminaire) et donne lieu à un isomorphisme de fibrés vectoriels sur Ω_s,

$$\chi_s \colon \mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)^{\mathrm{an}}_{|\Omega_s} \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\Omega_s} \otimes_K \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/K).$$

En particulier, pour tout K-point t de Ω_s, la fibre en t de l'isomorphisme χ_s est un isomorphisme de K-espaces vectoriels

$$\chi_{t,s} \colon \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_t/K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/K).$$

Avec la situation complexe en tête, l'ouvert Ω_s joue le rôle d'un voisinage simplement connexe de s. L'image par χ_s de la filtration de Hodge de $\mathscr{H}^q_{\mathrm{dR}}(X/S)$ définit une application analytique

$$\mathrm{Per}_s \colon \Omega_s \longrightarrow \mathrm{Flag}_r(\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/K))^{\mathrm{an}},$$

que l'on appellera l'*application de périodes p-adique*.

Exemple 3.5. On suppose $p \neq 2$ et considère la famille de courbes elliptiques de Legendre $\pi \colon X \to S$ où S est la droite projective sur $\mathbb{Z}_p$ privé de 3 points $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}_p} \smallsetminus \{0, 1, \infty\}$. Pour $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ tel que $\lambda \not\equiv 0, 1 \pmod{p}$, le disque Ω_λ autour de λ est le disque ouvert de rayon 1 centré en λ dans $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_p}$. La courbe elliptique sur $\mathbb{Q}_p$ d'équation affine

$$E_\lambda : \quad y = x(x-1)(x-\lambda)$$

est à bonne réduction et l'application de périodes a deux comportements radicalement différents suivant que le groupe $E_\lambda(\bar{\mathbb{F}}_p)$ ait des points de p-torsion non triviaux ou pas. La courbe elliptique E_λ est dite à réduction *ordinaire* dans le premier cas et à réduction *supersingulière* dans le deuxième.

Dans le cas ordinaire, l'application de périodes $\mathrm{Per}_\lambda \colon \Omega_\lambda \to \mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_p}$ est la composition d'un rêvetement étale $q \colon \Omega_\lambda \to \mathrm{D}(1, 1^-)$, le *paramètre de Serre–Tate*, et du logarithme $\log \colon \mathrm{D}(1, 1^-) \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}_p}$, où $\mathrm{D}(1, 1^-)$ désigne le disque ouvert de rayon 1 centré en 1. Tout comme le logarithme, Per_λ est un revêtement étale surjectif de $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_p}$ par le disque Ω_λ.

Si la réduction est supersingulière, la situation est encore plus perturbante (en la comparant à son homologue complexe) : l'application de périodes Per_λ est un revêtement étale surjectif de la droite projective analytique $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}_{\mathbb{Q}_p}$ sur $\mathbb{Q}_p$!

J'invite le lecteur intéressé à consulter l'ouvrage de André (2003) pour davantage de détails.

[7] Ce n'est pas vrai en général que les sections horizontales d'une connexion intégrable convergent sur tout le disque autour de s : par exemple, la série exponentielle $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ ne converge que sur le disque ouvert de rayon $p^{-1/(p-1)}$ autour de l'origine. La différence est imputable au caractère régulier des singularités de la connexion de Gauss–Manin, par opposition à la singularité irrégulière de $\mathrm{d} - \mathrm{d}t$.

3.3.3. — Si l'on ne s'intéresse qu'à des propriétés grossières, comme la dimension de l'adhérence de Zariski de l'image, on peut tirer des informations sur l'application de périodes p-adique à partir de renseignements sur celle complexe. Ceci se fait par le choix à première vue étrange d'un plongement $\sigma\colon K \to \mathbb{C}$. Cela va sans dire, un tel plongement n'est pas du tout continu.

On désigne par $\pi_\sigma\colon X_\sigma \to S_\sigma$ le morphisme de variétés algébriques complexes déduit de π par extension des scalaires et par $\sigma(s)$ le $\mathbb{C}$-point de S_σ induit par s. On fixe un voisinage ouvert simplement connexe Ω de $\sigma(s)$ dans $S_\sigma(\mathbb{C})$. La formation de la filtration de Hodge étant compatible aux extensions de scalaires, on a une application de périodes holomorphe

$$\mathrm{Per}_{\sigma(s)}\colon \Omega \longrightarrow \mathrm{Flag}_r(\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_{\sigma(s)}/\mathbb{C})),$$

ainsi qu'une représentation de monodromie

$$\rho_{\sigma(s)}\colon \pi_1(S_\sigma(\mathbb{C}), \sigma(s)) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_{\sigma(s)}/\mathbb{C})).$$

Proposition 3.6. *Avec les notations ci-dessus, soit Z l'adhérence de Zariski de l'image de l'application de périodes p-adique $\mathrm{Per}_s\colon \Omega_s \to \mathrm{Flag}_r(\mathrm{H}^q_{\mathrm{dR}}(X_s/K))^{\mathrm{an}}$. Si Γ désigne l'adhérence de Zariski de la représentation de monodromie $\rho_{\sigma(s)}$, on a*

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma.\mathrm{Per}_{\sigma(s)}(\sigma(s)) \leqslant \dim_K Z.$$

Cet énoncé s'obtient par conjonction du lemme 3.3 et de son analogue p-adique, ainsi que du lemme 3.2.

4. Preuve du théorème 2.7

4.1. Démarrage

4.1.1. — On reprend les notations de l'énoncé du théorème 2.7. Soient K un corps de nombres, S un ensemble fini de places de K contenant toutes celles archimédiennes et celles qui ramifient. Soit p un nombre premier tel qu'aucune place de K au-dessus de p n'est dans S et tel qu'il existe une place admissible v de K au-dessus de p.

Soient C une courbe sur $\mathscr{O}_{K,S}$, $\alpha\colon A \to C$ un schéma fini-abélien de dimension relative d, $\nu\colon C' = \mathrm{Spec}\,\alpha_*\mathscr{O}_A \to C$ la factorisation de Stein de α et $\alpha'\colon A \to C'$ l'unique morphisme tel que $\alpha = \nu \circ \alpha'$.

On fixe une clôture algébrique $\bar{K}$ de K. Soit r un nombre réel $\geqslant \lfloor 8d/(d+1) \rfloor$. On dit qu'un $\mathscr{O}_{K,S}$-point c de C est *non stagnant* si

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) < \frac{1}{d+1}.$$

De cette manière, il s'agit de montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de $\mathscr{O}_{K,S}$-points non stagnants de C.

Soit o un $\mathscr{O}_{K,S}$-point non stagnant de C (s'il n'y en a pas, on a gagné). On désigne par Ω le disque v-adique autour de o. Les K-points de Ω s'identifient aux $\mathscr{O}_{K,v}$-points c de C tels que $c \equiv o \pmod{p}$. On désigne par Ω^{ns} l'ensemble des $\mathscr{O}_{K,S}$-points non stagnants de C tels que $c \equiv o \pmod{p}$. L'ensemble $C(\mathbb{F}_v)$ étant fini, pour démontrer le théorème 2.7 il suffit (et il faut) de montrer que l'ensemble Ω^{ns} est fini.

Pour voir qu'un tel ensemble est fini on s'appuie, comme dans la preuve originelle de Faltings, sur la finitude des représentations galoisiennes paramétrées par ces points. On fixe des notations pour être plus précis.

4.1.2. *Notations « globales ».* — Pour un $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de C' soit :

- c' l'image du morphisme $\operatorname{Spec} \bar{K} \to C'$ défini par $\bar{c}'$;
- $K(c')$ le corps résiduel du point c' ;
- $A_{\bar{c}'}$ la fibre de $\alpha' \colon A \to C'$ en $\bar{c}'$;
- $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$ le premier groupe de cohomologie étale p-adique de $A_{\bar{c}'}$;
- $\rho_{\bar{c}'} \colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/K(c')) \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p))$ l'homomorphisme continu de groupes définissant l'action galoisienne naturelle sur $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$.

Pour justifier la dernière définition, on remarquera que la variété $A_{\bar{c}'}$ est obtenue par extension des scalaires de la fibre en c' de α', qui est définie sur $K(c')$. [8] La fibre $A_{\bar{c}'}$ est une variété abélienne de dimension d sur $\bar{K}$, donc son premier groupe de cohomologie étale p-adique est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $2d$, dual du module de Tate p-adique (tensorisé avec $\mathbb{Q}_p$).

4.1.3. *Notations « locales ».* — Soient K_v la complétion de K en v et $\bar{K}_v$ une clôture algébrique de K_v. On fixe un plongement $\iota \colon \bar{K} \to \bar{K}_v$ étendant l'injection canonique $K \to K_v$. Pour un $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de C' soit :

- $\bar{c}'_v$ le $\bar{K}_v$-point de C' induit par $\bar{c}'$ via ι ;
- c'_v l'image du morphisme $\operatorname{Spec} \bar{K}_v \to C'_{K_v}$ défini par $\bar{c}'_v$;
- $K_v(c')$ le corps résiduel du point c'_v ;
- $\rho_{\bar{c}',v}$ la restriction de $\rho_{\bar{c}'}$ à $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v(c'))$ via le plongement dans $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K(c'))$ induit par ι.

4.1.4. — On revient à la preuve du théorème.

Définition 4.1. Soient L un corps et $\bar{L}$ une clôture algébrique de L. Pour $i = 1, 2$, soient $L_i \subseteq \bar{L}$ une extension finie de L, V_i un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et

$$\rho_i \colon \mathrm{Gal}(\bar{L}/L_i) \longrightarrow \mathrm{GL}(V_i)$$

un homomorphisme continu de groupes. Un *isomorphisme* $(L_1, \rho_1) \to (L_2, \rho_2)$ est la donnée d'un élément $\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{L}/L)$ induisant un isomorphisme $\gamma_{|L_1} \colon L_1 \to L_2$ et

[8] La donnée de $\bar{c}'$ induit un plongement de $K(c')$ dans $\bar{K}$.

d'un isomorphisme de $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels $\psi\colon V_1 \to V_2$ faisant commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gal}(\bar{L}/L_1) & \xrightarrow{\rho_1} & \mathrm{GL}(V_1) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma\circ-\circ\gamma^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \psi\circ-\circ\psi^{-1}} \\ \mathrm{Gal}(\bar{L}/L_2) & \xrightarrow{\rho_2} & \mathrm{GL}(V_2). \end{array}$$

Si un tel isomorphisme existe, on dit que les couples sont isomorphes.

Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des classes d'isomorphie des couples (L,ρ) où $L \subseteq \bar{K}$ est une extension finie de K et $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}/L) \to \mathrm{GL}(V)$ un homomorphisme continu de groupes, avec V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $2d$. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \tau\colon C'(\bar{K}) & \longrightarrow & \mathscr{T} \\ c' & \longmapsto & \left[(K(c'),\rho_{\bar{c}'})\right], \end{array}$$

les crochets désignant la classe d'isomorphie du couple $(K(c'),\rho_{\bar{c}'})$.

De manière analogue, on désigne par $\mathscr{T}_v$ l'ensemble des classes d'isomorphie des couples (L,ρ) où $L \subseteq \bar{K}_v$ est une extension finie de K_v et $\rho\colon \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/L) \to \mathrm{GL}(V)$ un homomorphisme continu de groupes, avec V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension $2d$. On considère

$$\begin{array}{rcl} \tau_v\colon C'(\bar{K}) & \longrightarrow & \mathscr{T}_v \\ c' & \longmapsto & \left[(K_v(c'),\rho_{\bar{c}',v})\right]. \end{array}$$

On désigne par $\Omega'_{>r}$ l'ensemble des $\bar{K}$-points $\bar{c}'$ de C' tels que le $\bar{K}_v$-point $\nu(\bar{c}'_v)$ de C est K_v-rationnel et que l'extension $K_v(c')$ de K_v est de degré $> r$. La finitude de Ω^{ns} découle des deux assertions suivantes :

Proposition 4.2. *Avec les notations introduites ci-dessus,*

(1) *les fibres de l'application $\tau_v\colon \Omega'_{>r} \to \mathscr{T}_v$ sont finies ;*

(2) *il existe un sous-ensemble fini F de Ω^{ns} tel que, pour tout $c \in \Omega^{\mathrm{ns}} \smallsetminus F$, il y a un $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(c') : K_v] > r$ et que la représentation $\rho_{c'}$ est irréductible.*

Démonstration de 2.7 admettant 4.2. Soit F comme dans (2). Pour $c \in \Omega^{\mathrm{ns}} \smallsetminus F$, on choisit un $\bar{K}$-point $\sigma(c)$ de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(\sigma(c)) : K_v] > r$ et que la représentation $\rho_{\sigma(c)}$ est irréductible. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \tau\circ\sigma\colon \Omega^{\mathrm{ns}} \smallsetminus F & \longrightarrow & \mathscr{T} \\ c & \longmapsto & \left[(K(\sigma(c)),\rho_{\sigma(c)})\right]. \end{array}$$

La finitude de Ω^{ns} est équivalente à celle de l'image et des fibres de $\tau\circ\sigma$.

Pour la finitude des fibres, il suffit d'appliquer (1) après avoir remarqué que, pour tout point $c \in \Omega^{\mathrm{ns}}$ et $t = \tau(\sigma(c))$, l'ensemble $(\tau \circ \sigma)^{-1}(t)$ est la réunion finie de fibres de $\tau_v \circ \sigma$. En effet, pour tout $c' \in \Omega^{\mathrm{ns}}$, l'extension $K_v(\sigma(c'))$ de K_v est non ramifiée de degré borné par celui du revêtement ν : comme il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie de telles extensions (elles sont toutes le corps des fractions de l'anneau de Witt de leur corps résiduels, l'extension K_v étant non ramifiée sur $\mathbb{Q}_p$), *a fortiori* $\tau_v \circ \sigma$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs sur $(\tau \circ \sigma)^{-1}(t)$.

Pour montrer que l'image est finie, on remarque d'abord que pour tout K-point c de C et tout $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$ l'extension $K(c')$ est non ramifiée en dehors de S et de degré majoré par celui du morphisme ν. Le théorème d'Hermite–Minkowski (théorème 1.4) entraîne que, à isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de telles extensions.

Soit c un point de $\Omega^{\mathrm{ns}} \smallsetminus F$. Soit S' l'ensemble des places de $K(\sigma(c))$ au-dessus de S ou de p. En dehors de S' la représentation $\rho_{\sigma(c)}$ est non ramifiée et pure de poids 1. En supposant (2), elle est de plus irréductible : d'après la proposition 1.5, les classes d'isomorphie de telles représentations sont en nombre fini. L'image de $\tau \circ \sigma$ est donc finie, et il en est de même pour l'ensemble Ω^{ns}. □

4.2. Application de périodes

4.2.1. — Le morphisme ν étant fini étale par hypothèse, l'application naturelle entre faisceaux de cohomologie de de Rham relative

$$\theta \colon \nu_* \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C') \longrightarrow \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C)$$

est un isomorphisme. Le $\mathscr{O}_C$-module $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C)$ est muni via θ d'une structure de faisceau en $\nu_*\mathscr{O}_{C'}$-modules localement libre de rang d. La grassmanienne $\mathrm{Gr}_d(\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C'))$ des sous-espaces de dimension d du $\mathscr{O}_{C'}$-module $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C')$ est un schéma projectif sur C'. On considère sa restriction à la Weil $\mathfrak{G}$ le long du morphisme fini et plat ν :

$$\mathfrak{G} = \mathrm{Res}_{C'/C} \mathrm{Gr}_d(\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C')).$$

Puisque ν est étale, c'est un schéma projectif sur C : via θ il s'interprète aussi comme la grassmanienne des sous-$\nu_*\mathscr{O}_{C'}$-modules des $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C)$ de rang d.

La polarisation du schéma fini-abélien A induit un accouplement $\mathscr{O}_{C'}$-bilinéaire et alterné

$$\omega \colon \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C') \otimes \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C') \longrightarrow \mathscr{O}_{C'}.$$

On considère le sous-schéma fermé $\mathrm{LGr}_d(\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C'))$ de $\mathrm{Gr}_d(\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C'))$ formé par les sous-espaces *lagrangiens*, c'est-à-dire de rang d et totalement isotropes pour la forme ω, du $\mathscr{O}_{C'}$-module $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C')$. On désigne par $\mathfrak{H}$ la restriction à la Weil le long de ν :

$$\mathfrak{H} = \mathrm{Res}_{C'/C} \mathrm{LGr}_d(\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C')).$$

4.2.2. — On considère l'application de périodes p-adique Per_o en o associée au premier groupe de cohomologie de de Rham $\mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C)$ et à sa filtration de Hodge

$$0 \longrightarrow \alpha_*\Omega^1_{A/C} \longrightarrow \mathscr{H}^1_{\mathrm{dR}}(A/C) \longrightarrow \mathrm{R}^1\alpha_*\mathscr{O}_A \longrightarrow 0.$$

Comme tous les $\mathscr{O}_C$-modules en question sont des $\nu_*\mathscr{O}_{C'}$-modules, l'application de périodes Per_o prend naturellement des valeurs dans $\mathfrak{G}$. De plus, le sous-module $\alpha_*\Omega^1_{A/C}$ étant lagrangien, l'image de Per_o est contenue dans $\mathfrak{H}$. Plus précisément, en voyant o comme un K_v-point de C, soit $\nu_v^{-1}(o)$ la fibre en o de l'application ν. Alors, l'application de périodes p-adique Per_o s'écrit

$$\mathrm{Per}_o \colon \Omega \longrightarrow (\mathfrak{H}_{o,K_v})^{\mathrm{an}},$$

où $\mathfrak{H}_o = \mathrm{Res}_{\nu^{-1}(o)/K}\,\mathrm{LGr}_d\,\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(o)/K)$.

4.2.3. — L'hypothèse de grande monodromie garantit l'existence d'un plongement $\sigma\colon K \to \mathbb{C}$ tel que l'adhérence de Zariski Γ de l'image de la représentation de monodromie

$$\rho_{\sigma(o)} \colon \pi_1(S_\sigma(\mathbb{C}), \sigma(o)) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\nu^{-1}(\sigma(o))/\mathbb{C}))$$

contient le produit, pris sur les points o' de $\nu^{-1}(\sigma(o))$, de $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/\mathbb{C}))$. D'autre part, la variété complexe $\mathfrak{H}_{o,\mathbb{C}}$ est le produit $\prod_{o'}\mathrm{LGr}_d(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/\mathbb{C}))$ où o' parcourt $\nu^{-1}(\sigma(o))$. Puisque le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/\mathbb{C}))$ agit transitivement sur $\mathrm{LGr}_d(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/\mathbb{C}))$, la proposition 3.6 entraîne que l'image de l'application de périodes p-adique Per_o est Zariski-dense.

4.3. Finitude des fibres

4.3.1. *Isocristaux.* — Je discute ici la donnée d'algèbre linéaire avec laquelle on se retrouvera à travailler. L'extension finie K_v de $\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée, donc l'anneau des entiers de K_v coïncide avec l'anneau de Witt du corps résiduel $\mathbb{F}_v$ de K_v. On désigne par σ l'unique rélèvement à K_v de l'opérateur de Frobenius $x \mapsto x^p$.

Un *isocristal* sur K_v est la donnée (V, φ) d'un K_v-espace vectoriel V de dimension finie et d'un endomorphisme $\varphi\colon V \to V$ σ-linéaire [9] bijectif. Un *isocristal filtré* sur K_v est la donnée d'un isocristal (V, φ) et d'une filtration décroissante $\mathrm{Fil}^\bullet V = (\mathrm{Fil}^i V)_{i\in\mathbb{N}}$ de V par des sous-K_v-espaces vectoriels avec $\mathrm{Fil}^0 V = V$ et $\mathrm{Fil}^i V = 0$ pour i assez grand. Il est important de remarquer que l'endomorphisme φ *ne respecte pas* en général la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet V$. La notion d'isomorphisme d'isocristaux filtrés est définie de la manière évidente. Lorsque la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet V$ n'a qu'un seul cran W, on écrira simplement (V, φ, W).

[9] Pour $x, y \in V$ et $\lambda \in K_v$, on a $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ et $\varphi(\lambda x) = \sigma(\lambda)\varphi(x)$.

Exemple 4.3. L'exemple qui nous intéresse davantage est celui de la cohomologie de de Rham d'une variété abélienne à bonne réduction sur K_v. Soit temporairement $\mathscr{A}$ un schéma abélien sur $\mathscr{O}_{K_v}$ de dimension relative d. Si $\mathscr{A}_0$ désigne sa fibre spéciale, le théorème de comparaison de Rham/cristallin fournit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{K_v}$-modules

$$\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{A}/\mathscr{O}_{K_v}) \simeq \mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{A}_0/\mathbb{F}_v).$$

Le membre de gauche vient avec sa filtration de Hodge, en l'occurrence donnée par le sous-module $\mathrm{H}^0(\mathscr{A}, \Omega^1_{\mathscr{A}})$ de rang d. Par fonctorialité de la cohomologie cristalline, le morphisme de Frobenius absolu $\mathrm{Fr}_{\mathscr{A}_0} : \mathscr{A}_0 \to \mathscr{A}_0$ induit un endomorphisme σ-linéaire φ du $\mathscr{O}_{K_v}$-module $\mathrm{H}^1_{\mathrm{cris}}(\mathscr{A}_0/\mathbb{F}_v)$. Le triplet

$$(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{A}/\mathscr{O}_{K_v})[\tfrac{1}{p}], \varphi, \mathrm{H}^0(\mathscr{A}, \Omega^1_{\mathscr{A}})[\tfrac{1}{p}])$$

est un isocristal filtré. L'opérateur φ respecte la filtration de Hodge, *i.e.* se restreint en un endomorphisme de $\mathrm{H}^0(\mathscr{A}, \Omega^1_{\mathscr{A}})$, si et seulement si l'endomorphisme de Frobenius de $\mathscr{A}_0$ se relève. Cela n'a lieu que dans des cas très particuliers et c'est loin d'être le comportement « générique ».

Définition 4.4. Pour $i = 1, 2$, soient $L_i \subseteq \bar{K}_v$ une extension finie de K_v et (V_i, φ_i, W_i) un isocristal filtré sur L_i.

Un *isomorphisme* $(L_1, (V_1, \varphi_1, W_1)) \to (L_2, (V_2, \varphi_2, W_2))$ est la donnée d'un élément $\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ induisant un isomorphisme de corps $\gamma : L_1 \to L_2$ et d'un isomorphisme de L_2-espaces vectoriels $f : V_1 \otimes_{L_1} L_2 \to V_2$ tel que $f(W_1 \otimes_{L_1} L_2) = W_2$ et que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes_{L_1} L_2 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1 \otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ V_1 \otimes_{L_1} L_2 & \xrightarrow{f} & V_2. \end{array}$$

(Les produits tensoriels sont tous pris via γ.) Les couples sont dites isomorphes si un tel isomorphisme existe.

4.3.2. — On désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des classes d'isomorphie des couples $(L, (V, \varphi, W))$ où $L \subseteq \bar{K}_v$ est une extension finie de K_v et (V, φ, W) est un isocristal filtré sur L avec V et W respectivement de dimension $2d$ et d. Pour un $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de C' la variété abélienne $A_{c'_v}$ sur $K_v(c')$ est à bonne réduction. La construction de l'exemple 4.3 donne lieu à un isocristal filtré sur $K_v(c')$,

$$D(\bar{c}') = (\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{c'_v}/K_v(c')), \varphi_{c'_v}, \mathrm{H}^0(A_{c'_v}, \Omega_{A_{c'_v}})),$$

où $\varphi_{c'_v}$ est l'endomorphisme semi-linéaire induit par le Frobenius absolu de la réduction de $A_{c'_v}$ modulo p. On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \delta\colon C'(\bar{K}) & \longrightarrow & \mathscr{D} \\ \bar{c}' & \longmapsto & [(K_v(c'), D(\bar{c}'))]\,. \end{array} \tag{6}$$

Proposition 4.5. *Avec les notations ci-dessus, la restriction $\delta\colon \Omega'_{>r} \to \mathscr{D}$ est à fibres finies.*

Avant de nous attaquer à la preuve de la proposition 4.5, voyons comment elle entraîne la proposition 4.2 (1) grâce à des considérations simples de théorie de Hodge p-adique.

4.3.3. *Des représentations galoisiennes aux isocristaux.* — Pour combler au manque dans $\mathbb{C}_p$ de « nombres comme $2\pi i$ », Fontaine (1982) a introduit une foule d'anneaux dits *de périodes* jouant le rôle de coefficients dans les isomorphismes de comparaison entre différentes théories cohomologiques p-adiques.

Soit $L \subseteq \bar{K}_v$ une extension finie non ramifiée de K_v. Ici on ne s'intéresse qu'à B_{cris}, un corps contenant $\bar{K}_v$ muni d'une action continue de $\Gamma := \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/L)$, d'une filtration $(B^i_{\mathrm{cris}})_{i\in\mathbb{Z}}$ exhaustive stable sous l'action de Galois et d'un opérateur de Frobenius $\varphi\colon B_{\mathrm{cris}} \to B_{\mathrm{cris}}$. L'ensemble des éléments de B_{cris} fixes sous Galois est L.

La définition de B_{cris} n'est pas particulièrement compliquée mais elle fait intervenir plusieurs étapes. Pour ne pas m'attarder trop je ne donne pas de détails ici sur sa construction : le lecteur intéressé pourra consulter les excellentes notes de Brinon et Conrad (2009).

Soit $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation continue, où V est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. On pose

$$D_{\mathrm{cris}}(\rho) := (B_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\Gamma},$$

où le groupe Γ agit diagonalement.

Il s'agit d'un K_v-espace vectoriel de dimension $\dim_L D_{\mathrm{cris}}(\rho) \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p} V$ muni d'une filtration et d'un opérateur de Frobenius déduits des structures analogues sur B_{cris}.

Définition 4.6. La représentation ρ est *cristalline* si $\dim_{K_v} D_{\mathrm{cris}}(\rho) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$.

Soient $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma)$ la catégorie des représentations continues de Γ à valeurs dans les $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et MF^{φ}_L la catégorie des isocristaux filtrés sur K_v. La construction ci-dessus donne lieu à un foncteur $D_{\mathrm{cris}}\colon \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(\Gamma) \to \mathrm{MF}^{\varphi}_L$. La restriction du foncteur D_{cris} à la sous-catégorie pleine des représentations cristallines est pleinement fidèle. Ce fait dont la preuve est difficile ne sera pas utile ici : on n'emploiera que la fonctorialité.

Exemple 4.7. L'exemple de base est celui de la cohomologie étale p-adique des variétés abéliennes à bonne réduction. Soit $\mathscr{A}$ temporairement un schéma abélien sur $\mathscr{O}_L$. On considère la représentation galoisienne $\rho\colon \Gamma \to \mathrm{GL}(\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathscr{A}, \mathbb{Q}_p))$ associée au premier groupe de cohomologie étale p-adique $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\mathscr{A}, \mathbb{Q}_p)$ de la variété abélienne $\mathscr{A}_{\bar{K}_v}$ sur $\bar{K}_v$. D'après Fontaine et Messing (1987) la représentation ρ est cristalline et on sait grâce à Faltings (1989, Theorem 5.6) que l'isocristal filtré $D_{\text{cris}}(\rho)$ est isomorphe à celui considéré dans l'exemple 4.3, à savoir :

$$(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\mathscr{A}/\mathscr{O}_L)[\tfrac{1}{p}], \varphi, \mathrm{H}^0(\mathscr{A}, \Omega^1_{\mathscr{A}})[\tfrac{1}{p}]).$$

En particulier, l'anneau B_{cris} contient toutes les périodes des variétés abéliennes à bonne réduction.

Démonstration de 4.2 (1) admettant 4.5. D'après l'exemple précédent, l'application

$$\begin{array}{rcl} D_{\text{cris}} \circ \tau_v\colon \Omega'_{>r} & \longrightarrow & \mathscr{D} \\ \bar{c}' & \longmapsto & [(K_v(c'), D(\rho_{\bar{c}'}))] \end{array}$$

coïncide avec l'application δ introduite à l'équation (6). En admettant la proposition 4.5, les fibres de l'application δ sont finies et dont celles de τ_v le sont aussi. □

4.3.4. *Notations « locales » (reprise).* — La preuve de la proposition 4.5 demande d'identifier les fibres v-adiquement voisines de o et de décomposer l'application de périodes de façon correspondante : il n'y a pas de difficultés ici, à part celle de digérer les notations. [(10)] On désigne par $\nu_v\colon C'_{K_v} \to C_{K_v}$ l'application induite par ν.

Pour un point o' de $\nu_v^{-1}(o)$, soit $\mathfrak{H}'_{o'}$ la restriction à la Weil à K_v de la grassmanienne des sous-espaces lagrangiens de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/K_v(o'))$. La restriction à la fibre en o' définit un morphisme

$$\mathrm{LGr}_d\, \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(\alpha^{-1}(o)/K) \longrightarrow \mathrm{LGr}_d\, \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/K_v(o'))$$

induisant un morphisme de K-schémas $\mathrm{pr}_{o'}\colon \mathfrak{H}_{o,K_v} \to \mathfrak{H}'_{o'}$ sur les restrictions à la Weil respectives. L'application induite

$$\mathfrak{H}_{o,K_v} \longrightarrow \prod_{\nu_v(o')=o} \mathfrak{H}'_{o'}$$

est un isomorphisme de K_v-schémas.

Soit c un K_v-point de Ω, *i.e.* un $\mathscr{O}_{K_v}$-point de C tel que $c \equiv o \pmod{p}$. Pour tout entier $i \geqslant 0$, la connexion de Gauss–Manin fournit un isomorphisme de K_v-espaces vectoriels

$$\chi^i_{c,o}\colon \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(\nu_v^{-1}(c)/K_v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(\nu_v^{-1}(o)/K_v).$$

[(10)] Ces considérations élémentaires (mais un peu pénibles) sont le prix à payer pour ne pas démontrer que la représentation galoisienne $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(\alpha^{-1}(c), \mathbb{Q}_p)$ est semi-simple, mais seulement qu'un certain facteur direct $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{c'}, \mathbb{Q}_p)$ est irréductible.

Pour $i = 0$, le 0-ème groupe de cohomologie de de Rham n'étant rien d'autre que l'espace des fonctions régulières, l'isomorphisme induit par $\chi^0_{c,o}$ est un isomorphisme de K_v-algèbres, le produit de fonctions s'interprétant comme le cup produit en cohomologie de de Rham. En passant aux spectres, l'isomorphisme $\chi^0_{c,o}$ induit un isomorphisme de K_v-schémas

$$\Phi_{o,c} \colon \nu_v^{-1}(o) \xrightarrow{\sim} \nu_v^{-1}(c).$$

D'autre part, la décomposition

$$\mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(\nu_v^{-1}(c)/K_v) = \bigoplus_{\nu_v(c')=c} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(A_{c'}/K_v(c'))$$

est respectée par le transport parallèle, c'est-à-dire que, pour tout point o' de $\nu^{-1}(o)$, l'isomorphisme $\chi^i_{c,o}$ se restreint en un isomorphisme

$$\chi^i_{c',o'} \colon \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(A_{c'}/K_v(c')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^i_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/K_v(o'))$$

de $K_v(o')$-espaces vectoriels, où $c' = \Phi_{o,c}(o')$. En particulier,

$$\mathrm{pr}_{o'}(\mathrm{Per}_o(c)) = [\chi^1_{c',o'}(\mathrm{H}^0(A_{c'}, \Omega^1_{A_{c'}}))],$$

le crochet désignant le point de la grassmanienne défini par le sous-espace vectoriel.

4.3.5. *Preuve de la proposition 4.5.* — Par la discussion précédente et par définition de l'application de périodes, le couple $(K_v(c'), D(c'))$ est isomorphe au couple $(K_v(o'), D)$ où D est l'isocristal filtré

$$(\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'}/K_v(o')), \varphi_{o'}, \chi^1_{c',o'}(\mathrm{H}^0(A_{c'}, \Omega^1_{A_{c'}}))),$$

et $\Phi_{o,c}(o') = c'$.[(11)] On se ramène donc à démontrer l'énoncé suivant :

Proposition 4.8. *Soient o'_1, o'_2 des points de $\nu_v^{-1}(o)$, $\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ induisant un isomorphisme $\gamma \colon K_v(o'_1) \to K_v(o'_2)$ et W un sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'_2}/K_v(o'_2))$ de dimension d. Si $[K_v(o'_i) : K_v] > 8d/(d+1)$, alors l'ensemble $\mathscr{D}(\gamma, W)$ des K_v-points c de Ω pour lesquels il y a un isomorphisme*

$$D(\Phi_{o,c}(o'_1)) \otimes_{K_v(o'_1)} K_v(o'_2) \simeq (\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o'_2}/K_v(o'_2)), \varphi_{o'_2}, W)$$

d'isocristaux filtrés sur L_2, est fini (le produit tensoriel dans l'énoncé est pris via γ).

On remarque que l'inégalité $[K_v(o'_i) : K_v] > 8d/(d+1)$ est satisfaite car par hypothèse

$$[K_v(o'_i) : K_v] > r \geqslant \lfloor 8d/(d+1) \rfloor.$$

(11) Cette assertion cache un aspect profond, à savoir, que le Frobenius cristallin $\varphi_{c'}$ s'identifie via l'application de périodes à $\varphi_{o'}$. La raison pour cela est que l'isomorphisme $\chi_{c,o}$ donné par intégration de Gauss–Manin s'interprète (via le théorème de comparaison de Rham/cristallin) comme l'identification de la cohomologie cristalline des fibres spéciales en c et o (qui sont la même variété algébrique sur $\mathbb{F}_v$). Cette compatibilité ne doit pas surprendre : l'isomorphisme donné par Gauss–Manin était une des motivations de Grothendieck pour la quête de la cohomologie cristalline, dont tout candidat raisonnable aurait dû satisfaire cette compatibilité.

Démonstration. Pour simplifier la notation on pose, pour $i = 1, 2$,

$$L_i := K_v(o_i'), \qquad V_i := \mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{o_i'}/K_v(o_i')), \qquad \varphi_i := \varphi_{o_i'}.$$

Étant isomorphes, les extensions L_1 et L_2 de K_v ont même degré δ. Il en découle que l'opérateur φ_i^δ est L_i-linéaire.

Soit $I := \mathrm{Iso}_{L_2}(V_1 \otimes_{L_1} L_2, V_2)$ le L_2-schéma représentant le foncteur associant à une L_2-algèbre R les isomorphismes de R-modules $f\colon V_1 \otimes_{L_1} L_2 \otimes_{L_2} R \to V_2 \otimes_{L_2} R$. La précomposition avec un automorphisme de V_1 en fait un fibré principal sous l'action du groupe algébrique $G := \mathrm{GL}(V_1)$. On considère le sous-schéma fermé I' de I dont les R-points sont les isomorphismes f faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} V_1 \otimes_{L_1} L_2 \otimes_{L_2} R & \xrightarrow{f} & V_2 \otimes_{L_2} R \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1^\delta \otimes \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2^\delta} \\ V_1 \otimes_{L_1} L_2 \otimes_{L_2} R & \xrightarrow{f} & V_2 \otimes_{L_2} R. \end{array}$$

S'il est non vide, alors le schéma I' est un fibré principal sous l'action du centralisateur Z de φ_1^δ dans $\mathrm{GL}(V_1)$.

Soient $c \in \Omega(K_v)$ et $c' := \Phi_{o,c}(o_1')$. Par définition de l'application de périodes, l'isocristal filtré $D(c')$ est isomorphe au L_1-espace vectoriel V_1 muni de l'opérateur de Frobenius φ_1 et du sous-espace vectoriel $\chi^1_{c',o'}(\mathrm{H}^0(A_{c'}, \Omega^1_{A_{c'}}))$. L'isocristal filtré $D(c') \otimes_{L_1} L_2$ est isomorphe à (V_2, φ_2, W) si et seulement s'il existe un isomorphisme de L_2-espaces vectoriels $f\colon V_1 \otimes_{L_1} L_2 \to V_2$ tel que $f \circ (\varphi_1 \otimes \mathrm{id}) = \varphi_2 \circ f$ et

$$f \circ \chi^1_{c',o'}(\mathrm{H}^0(A_{c'}, \Omega^1_{A_{c'}})) = W.$$

Un tel f vérifie évidemment $f \circ (\varphi_1^\delta \otimes \mathrm{id}) = \varphi_2^\delta \circ f$ et il définit donc un L_2-point de I'.

On peut ainsi supposer que I' contient un K_v-point f. Soit $W_1 = f^{-1}(W) \otimes_{L_2} L_1$, le produit tensoriel étant pris via l'inverse de γ. Puisque I' est un fibré principal sous l'action du centralisateur Z de φ_1^δ,

$$\mathscr{D}(\gamma, W) \subseteq (\mathrm{pr}_{o'} \circ \mathrm{Per}_o)^{-1}(Z.[W_1] \cap \mathfrak{H}'_{o_1'}).$$

Par le lemme 4.9 qui suit,

$$\dim(Z.[W_0] \cap \mathfrak{H}'_{o_1'}) \leqslant \dim(Z.[W_0]) \leqslant \dim Z \leqslant (\dim_{K_0} V_0)^2 = (2d)^2.$$

D'autre part,

$$\dim \mathfrak{H}'_{o_1'} = \dim \mathrm{Res}_{L_1/K_v} \mathrm{LGr}_d(V_0) = \tfrac{1}{2}\delta d(d+1).$$

Par hypothèse $\delta > 8d/(d+1)$, donc

$$\dim(Z.[W_0] \cap \mathfrak{H}'_{o_1'}) < \dim \mathfrak{H}'_{o_1'}.$$

Puisque l'extension $K_v(c')$ est non ramifiée, l'ensemble $\mathscr{D}(\gamma, W)$ est contenu dans les sous-ensembles des points de $(\mathrm{pr}_{o'} \circ \mathrm{Per}_o)^{-1}(Z.[W_0] \cap \mathfrak{H}'^{\mathrm{an}}_{o_1'})$ à valeurs dans une extension finie non ramifiée de K_v. L'image de l'application de périodes étant supposée Zariski-dense, on conclut grâce au lemme 4.10 plus bas. □

Lemme 4.9. *Soit k un corps. Soit γ un automorphisme du corps k d'ordre fini r de corps fixe k_0. Soient E un k-espace vectoriel de dimension finie et $\psi\colon E \to E$ un automorphisme γ-linéaire. On considère*

$$Z(\psi) := \{f \in \mathrm{End}_k(E) : f \circ \psi = \psi \circ f\},$$
$$Z(\psi^r) := \{f \in \mathrm{End}_k(E) : f \circ \psi^r = \psi^r \circ f\}.$$

Alors, $Z(\psi^r)$ est un sous-k-espace vectoriel de $\mathrm{End}_k(E)$, $Z(\psi)$ est un sous-k_0-espace vectoriel de $Z(\psi^r)$ et

$$\dim_{k_0} Z(\psi) = \dim_k Z(\psi^r) \leqslant (\dim_k E)^2.$$

Démonstration. Voir Lawrence et Venkatesh, 2020, Lemma 2.1. □

Soit $\mathrm{D}(0,1^-) = \{x \in \mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_{K_v} : |t(x)| < 1\}$ le disque ouvert de rayon 1 centré à l'origine de la droite affine analytique sur K_v.

Lemme 4.10. *Soient X un K_v-schéma propre et $f\colon \mathrm{D}(0,1^-) \to X^{\mathrm{an}}$ un morphisme de K_v-espaces analytiques. Soit Z un fermé strict de X. Si l'image de f est Zariski-dense, alors*

(1) *le fermé analytique $f^{-1}(Z^{\mathrm{an}})$ de $\mathrm{D}(0,1^-)$ est une suite de points ;*

(2) *il n'y a qu'un nombre fini de points z de $f^{-1}(Z^{\mathrm{an}})$ dont le corps résiduel est une extension non ramifiée de K_v.*

Il s'agit essentiellement d'une trivialité provenant de la finitude des zéros d'une fonction analytique non nulle sur un disque fermé et du fait que les points de $\mathrm{D}(0,1^-)$ à corps résiduel non ramifié sur K_v sont contenus dans le disque fermé $\{|z| \leqslant p^{-1}\}$.

4.4. Irréductibilité générique

4.4.1. — L'idée menant à la preuve de la proposition 4.2 (2) est que les sous-représentations non triviales vont donner lieu (via la théorie de Hodge p-adique) à des sous-espaces en position non générique.

Proposition 4.11. *Soit c un $\mathscr{O}_{K,S}$-point de C. Avec les notations introduites plus haut, on suppose que pour tout $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(c') : K_v] > r$ les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(1) *la représentation $\rho_{\bar{c}'}$ n'est pas irréductible ;*

(2) *pour tout sous-espace vectoriel non nul W de $\mathrm{H}^1_{\mathrm{dR}}(A_{c'}/K_v(c'))$ stable sous l'opérateur de Frobenius $\varphi_{c'}$, on a*

$$\dim_{K_v(c')} \mathrm{Fil}^1 W < \tfrac{1}{2} \dim_{K_v(c')} W,$$

où $\mathrm{Fil}^1 W = W \cap \mathrm{H}^0(A_{c'}, \Omega^1_{A_{c'}})$.

Alors,

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) \geqslant 1/(d+1).$$

Démonstration. Pour tout $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$ soit $V_{\bar{c}'}$ une sous-représentation de $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$ de dimension > 0 minimale (elle peut être l'espace tout entier).

Un automorphisme $\gamma \in \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ induit un isomorphisme de représentations galosiennes $\rho_{\bar{c}'} \cong \rho_{\gamma\bar{c}'}$: on choisit les sous-espaces $V_{\bar{c}'}$ et $V_{\gamma\bar{c}'}$ de manière à ce qu'ils se correspondent via cet isomorphisme.

Par restriction, on obtient une représentation continue de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ sur $V_{\bar{c}'}$. En lui appliquant le foncteur D_{cris} on produit un sous-espace vectoriel non nul $W_{\bar{c}'}$ de $\mathrm{H}^1_{\text{dR}}(A_{c'}/K_v(c'))$ stable sous l'opérateur de Frobenius $\varphi_{c'}$.

Lemme 4.12. *Pour un $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(c') : K_v] > r$,*

$$\dim_{K_v(c')} W_{\bar{c}'} \leqslant d.$$

Démonstration du lemme. Comme $[K_v(c') : K_v] > r$, par hypothèse la représentation $\rho_{\bar{c}'}$ n'est pas irréductible. Puisque l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ respecte (à un facteur scalaire près) l'accouplement de Weil sur $\mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p)$, l'orthogonal $V_{\bar{c}'}^{\perp}$ de $V_{\bar{c}'}$ par rapport à cette forme est stable sous l'action de Galois. Puisque

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\bar{c}'}^{\perp} = \dim_{\mathbb{Q}_p} \mathrm{H}^1_{\text{ét}}(A_{\bar{c}'}, \mathbb{Q}_p) - \dim V_{\bar{c}'} = 2d - \dim V_{\bar{c}'},$$

on a $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\bar{c}'} \leqslant d$ par minimalité. On conclut car $\dim_{K_v(c')} W_{\bar{c}'} \leqslant \dim_{\mathbb{Q}_p} V_{\bar{c}'}$. □

Pour simplifier la notation, on désigne par dim la dimension en tant que $K_v(c')$-espace vectoriel. On considère la somme $\sum_{\bar{c}'} \dim \mathrm{Fil}^1 W_{\bar{c}'} / \dim W_{\bar{c}'}$ prise sur les $\bar{K}$-points de $\nu^{-1}(c)$. Pour tout $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$,

$$\frac{\dim \mathrm{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} \leqslant \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2d} & \text{si } [K_v(c') : K_v] > r, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où on a utilisé $\dim W_{\bar{c}'} \leqslant d$ et l'hypothèse $\dim \mathrm{F}^1 W_{\bar{c}'} \leqslant \frac{1}{2}(\dim W_{\bar{c}'} - 1)$. En particulier,

$$\sum_{\bar{c}'} \frac{\dim \mathrm{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} \leqslant N_r^- + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2d}\right) N_r^+,$$

où N_r^- (resp. N_r^+) est le nombre de $\bar{K}$-points $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$ tels que $K_v(c')$ est une extension de degré $\leqslant r$ (resp. $> r$) de K_v.

Lemme 4.13. *Avec les notations ci-dessus,*

$$\sum_{\bar{c}'} \frac{\dim \mathrm{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} = \tfrac{1}{2} |\nu^{-1}(c)(\bar{K})|,$$

la somme étant prise sur les $\bar{K}$-points de $\nu^{-1}(c)$.

Démonstration du lemme. Pour un $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de $\nu^{-1}(c)$, le nombre rationnel

$$\frac{\dim \mathrm{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} \tag{7}$$

ne dépend que de l'orbite de $\bar{c}'$ sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$, car on a choisi les sous-espaces $V_{\bar{c}'}$ de manière compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ (le passage du groupe de Galois global au local est dû à l'application de la théorie de Hodge p-adique).

Le quotient de l'ensemble $\nu^{-1}(c)(\bar{K})$ par le groupe $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ est l'ensemble sous-jacent au K_v-schéma $\nu_v^{-1}(c)$. Pour un point c'_v de $\nu_v^{-1}(c)$ on désigne par $w(c'_v)$ le nombre rationnel (7). La longueur de l'orbite de $\bar{c}'$ sous $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$ est le degré du corps résiduel $K_v(c')$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{\bar{c}'\in\nu^{-1}(c)(\bar{K})} \frac{\dim \mathrm{Fil}^1 W_{\bar{c}'}}{\dim W_{\bar{c}'}} &= \sum_{c'_v\in\nu_v^{-1}(c)} [K_v(c'_v):K_v]w(c'_v)\\ &= \sum_{c'\in\nu^{-1}(c)} \sum_{\mathrm{pr}(c'_v)=c'} [K_v(c'_v):K_v]w(c'_v),\end{aligned}$$

où $\mathrm{pr}\colon \nu_v^{-1}(c) \to \nu^{-1}(c)$ est le morphisme d'extension des scalaires. Le lemme découle de l'égalité, pour tout point c' de $\nu^{-1}(c)$,

$$\sum_{\mathrm{pr}(c'_v)=c'} [K_v(c'_v):K_v]w(c'_v) = \tfrac{1}{2}[K(c'):K]. \tag{8}$$

Pour démontrer cette dernière, on considère un $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ au-dessus de c' et la représentation $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ déduite de $\rho_{\bar{c}'|V_{\bar{c}'}}$ par induction. La représentation $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ est une représentation pure de poids 1 et cristalline, propriétés qu'elle hérite de $\rho_{\bar{c}'}$.

Le membre de gauche de (8) divisé par $[K(c'):K]$ est le poids [(12)] de la filtration de l'isocristal $D_{\mathrm{cris}}(\tilde{\rho}_{\bar{c}'})$ obtenu en appliquant la théorie de Hodge p-adique à la représentation $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ restreinte à $\mathrm{Gal}(\bar{K}_v/K_v)$; comme une représentation cristalline est de Hodge–Tate, c'est aussi le poids de Hodge–Tate en v du déterminant de $\tilde{\rho}_{\bar{c}'}$ divisé par $[K_v(c'):K_v]\dim V_{\bar{c}'}$.

On conclut grâce au fait suivant : pour un caractère continu $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathbb{Z}_p^\times$ pur de poids n et localement algébrique en tout premier au-dessus de p, l'entier n est pair et le poids de Hodge–Tate en v est $n/2$ (Lawrence et Venkatesh, 2020, Lemma 2.8). [(13)] □

[(12)] Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k. Soit $\mathrm{Fil}^\bullet E = (\mathrm{Fil}^i E)_{i\in\mathbb{N}}$ une filtration décroissante sur E avec $\mathrm{Fil}^0 E = E$. Le *poids* de la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet E$ est le nombre rationnel

$$\mathrm{wt}(E, \mathrm{Fil}^\bullet E) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{i \dim_k \mathrm{Fil}^i E/\mathrm{Fil}^{i+1} E}{\dim_k E}.$$

[(13)] Lorsque K contient un sous-corps CM F, c'est ici (et seulement ici) qu'on utilise que la place v est au-dessus d'une place de F^+ qui est inerte dans F.

D'après le lemme et l'inégalité qui le précède,

$$\tfrac{1}{2}(N_r^- + N_r^+) = \tfrac{1}{2}|\nu^{-1}(c)(\bar{K})| \leqslant N_r^- + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2d}\right) N_r^+,$$

d'où l'inégalité $N_r^+ \leqslant dN_r^-$. Par définition de la v-stagnation (voir l'exemple 2.4),

$$\mathrm{stag}_v(\nu^{-1}(c), r) = \frac{N_r^-}{N_r^- + N_r^+} \geqslant \frac{N_r^-}{N_r^- + dN_r^-} = \frac{1}{d+1},$$

ce qui termine la preuve. □

4.4.2. *Démonstration de 4.2 (2).* — On reprend les notations introduites au 4.3.4. Pour un point o' de $\nu_v^{-1}(o)$, on désigne par $\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{H}'_{o'}$ formé par les sous-espaces vectoriels lagrangiens $H \subseteq \mathrm{H}^0(A_{o'}/K_v(o'))$ pour lesquels il existe un sous-espace vectoriel W stable sous $\varphi_{o'}$ tel que

$$\dim_{K_v(o')} H \cap W \geqslant \tfrac{1}{2} \dim_{K_v(o')} W.$$

Pour commencer, on remarque que pour tout point $c \in \Omega^{\mathrm{ns}}$ il existe un $\bar{K}$-point c' de $\nu^{-1}(c)$ tel que $[K_v(c') : K_v] > r$ (*cf.* exemple 2.4). On considère l'ensemble F des points non stagnants c pour lesquels, pour tout $\bar{K}$-point $\bar{c}'$ de la fibre $\nu^{-1}(c)$ de degré $[K_v(c') : K_v] > r$, la représentation $\rho_{\bar{c}'}$ n'est pas irréductible. Alors, d'après la proposition 4.11, l'ensemble F est contenu dans

$$\bigcup_{o'} (\mathrm{pr}_{o'} \circ \mathrm{Per}_o)^{-1}(\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'}),$$

la réunion parcourant les points o' de $\nu^{-1}(o)$ tels que $[K_v(o') : K_v] > r$.

Le lemme 4.14 qui suit entraîne que le sous-ensemble $\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'}$ est contenu dans un fermé strict de $\mathfrak{H}'_{o'}$. Puisque l'image de $\mathrm{pr}_{o'} \circ \mathrm{Per}_o$ est Zariski-dense, le lemme 4.10 implique la finitude de $(\mathrm{pr}_{o'} \circ \mathrm{Per}_o)^{-1}(\tilde{\mathfrak{H}}'_{o'})$ et par conséquent celle de F.

Lemme 4.14. *Soient k un corps, γ un automorphisme de k et k_0 le corps fixe. Soit V un k-espace vectoriel de dimension 2δ muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée θ. Soit $\psi \colon V \to V$ un endomorphisme γ-linéaire bijectif. On considère la grassmannienne $\mathrm{LGr}_d(V)$ des sous-espaces de dimension d totalement isotropes par rapport à θ et sa restriction à la Weil $\mathrm{Res}_{k/k_0} \mathrm{LGr}_d(V)$ à k_0.*

Si $[k : k_0] \geqslant 5$, alors l'ensemble des sous-espaces vectoriels H de V pour lesquels il existe un sous-espace vectoriel W stable sous ψ tel que

$$\dim_k H \cap W \geqslant \tfrac{1}{2} \dim_k W,$$

n'est pas Zariski-dense dans $\mathrm{Res}_{k/k_0} \mathrm{LGr}_d(V)$.

Démonstration. Voir Lawrence et Venkatesh, 2020, Lemma 6.3. □

Ceci termine la preuve de la proposition 4.2 (2) et donc du théorème 2.7.

Références

André, Y. (1996). « On the Shafarevich and Tate conjectures for hyperkähler varieties », *Math. Ann.* **305** (2), p. 205-248.

——— (2003). *Period mappings and differential equations. From* $\mathbb{C}$ *to* $\mathbb{C}_p$. T. 12. MSJ Memoirs, vol. **12**. Tôhoku-Hokkaidô lectures in arithmetic geometry, With appendices by F. Kato and N. Tsuzuki. Mathematical Society of Japan, Tokyo, p. viii+246.

Beauville, A. (1986). « Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'intersections complètes », in : *Complex analysis and algebraic geometry* (*Göttingen, 1985*). T. 1194. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, p. 8-18.

Bertin, J. et Romagny, M. (2011). « Champs de Hurwitz », *Mém. Soc. Math. Fr.* (*N.S.*) (125-126), p. 219.

Bombieri, E. (1990). « The Mordell conjecture revisited », *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (*4*) **17** (4), p. 615-640.

Bombieri, E. et Gubler, W. (2006). *Heights in Diophantine geometry*. T. 4. New Mathematical Monographs. Cambridge University Press, Cambridge, p. xvi+652.

Bost, J.-B. (1996). « Périodes et isogenies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz) », *Astérisque* (237). Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95, Exp. No. 795, 4, 115-161.

Brinon, O. et Conrad, B. (2009). *CMI Summer school notes on p-adic Hodge theory*. available at `https://math.stanford.edu/~conrad/papers/notes.pdf`.

Brunebarbe, Y. (2018). « Symmetric differentials and variations of Hodge structures », *J. Reine Angew. Math.* **743**, p. 133-161.

Chabauty, C. (1941). « Sur les points rationnels des variétés algébriques dont l'irrégularité est supérieure à la dimension », *C. R. Acad. Sci. Paris* **212**, p. 1022-1024.

Deligne, P. (1985). « Preuve des conjectures de Tate et de Shafarevitch (d'après G. Faltings) », *Astérisque* (121-122). Seminar Bourbaki, Vol. 1983/84, p. 25-41.

Ebeling, W. (1984). « An arithmetic characterisation of the symmetric monodromy groups of singularities », *Invent. Math.* **77** (1), p. 85-99.

Faltings, G. (1983). « Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern », *Invent. Math.* **73** (3), p. 349-366.

——— (1984). « Erratum : "Finiteness theorems for abelian varieties over number fields" », *Invent. Math.* **75** (2), p. 381.

——— (1989). « Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations », in : *Algebraic analysis, geometry, and number theory* (*Baltimore, MD, 1988*). Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, p. 25-80.

Fontaine, J.-M. (1982). « Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate », *Ann. of Math.* (*2*) **115** (3), p. 529-577.

Fontaine, J.-M. et Messing, W. (1987). « p-adic periods and p-adic étale cohomology », in : *Current trends in arithmetical algebraic geometry (Arcata, Calif., 1985)*. T. 67. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 179-207.

Janssen, W. A. M. (1983). « Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups », *Math. Ann.* **266** (1), p. 115-133.

Javanpeykar, A. (2015). « Néron models and the arithmetic Shafarevich conjecture for certain canonically polarized surfaces », *Bull. Lond. Math. Soc.* **47** (1), p. 55-64.

Javanpeykar, A. et Loughran, D. (2015). « Good reduction of algebraic groups and flag varieties », *Arch. Math.* **104** (2), p. 133-143.

——— (2017). « Complete intersections : moduli, Torelli, and good reduction », *Math. Ann.* **368** (3-4), p. 1191-1225.

——— (2018). « Good reduction of Fano threefolds and sextic surfaces », *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5)* **18** (2), p. 509-535.

——— (2021). « Arithmetic hyperbolicity and a stacky Chevalley–Weil theorem », *Journal of the London Mathematical Society* **103** (3), p. 846-869.

Jong, J. de et al. (2008-). *The Stacks Project*. Available at `http://stacks.math.columbia.edu` (ci-après : Stacks Project).

Katz, N. (1970). « Nilpotent connections and the monodromy theorem : Applications of a result of Turrittin », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (39), p. 175-232.

——— (1973). « Travaux de Dwork », 167-200. Lecture Notes in Math., Vol. 317.

Kim, M. (2005). « The motivic fundamental group of $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and the theorem of Siegel », *Invent. Math.* **161** (3), p. 629-656.

——— (2009). « The unipotent Albanese map and Selmer varieties for curves », *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (1), p. 89-133.

Kodaira, K. (1967). « A certain type of irregular algebraic surfaces », *J. Anal. Math.* **19**, p. 207-215.

Krämer, T. (2016). *Characteristic cycles and the microlocal geometry of the Gauss map, II*. `https://arxiv.org/abs/1604.02389`.

——— (2021). « Characteristic cycles and the microlocal geometry of the Gauss map, II », *J. Reine Angew. Math.*

Krämer, T. et Weissauer, R. (2015a). « On the Tannaka group attached to the theta divisor of a generic principally polarized abelian variety », *Math. Z.* **281** (3-4), p. 723-745.

——— (2015b). « Vanishing theorems for constructible sheaves on abelian varieties », *J. Algebraic Geom.* **24** (3), p. 531-568.

Lawrence, B. et Sawin, W. (2020). *The Shafarevich conjecture for hypersurfaces in abelian varieties*. `https://arxiv.org/abs/2004.09046`.

Lawrence, B. et Venkatesh, A. (2020). « Diophantine problems and p-adic period mappings », *Invent. Math.* **221** (3), p. 893-999.

Liu, H. (2021). *Lawrence-Venkatesh's p-adic approach to Mordell's conjecture*. Disponible à l'adresse http://home.ustc.edu.cn/~kyung/Lawrence-Venkatesh.pdf.

Masser, D. et Wüstholz, G. (1993). « Isogeny estimates for abelian varieties, and finiteness theorems », *Ann. of Math.* (2) **137** (3), p. 459-472.

Mumford, D. (1965). « A remark on Mordell's conjecture », *Amer. J. Math.* **87**, p. 1007-1016.

Noordman, M. P. (2021). *Siegel's theorem via the Lawrence-Venkatesh method*. https://arxiv.org/abs/2101.07111.

Parshin, A. N. (1968). « Algebraic curves over function fields. I », *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **32**, p. 1191-1219.

Raynaud, M. (1974). « Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$ », *Bull. Soc. Math. France* **102**, p. 241-280.

Scholl, A. J. (1985). « A finiteness theorem for del Pezzo surfaces over algebraic number fields », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **32**, p. 31-40.

Serre, J.-P. (1997). *Lectures on the Mordell-Weil theorem*. Aspects of Mathematics. Translated from the French and edited by Martin Brown from notes by Michel Waldschmidt, With a foreword by Brown and Serre. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, p. x+218.

She, Y. (1997). *The unpolarized Shafarevich Conjecture for K3 Surfaces*. https://arxiv.org/abs/1705.09038.

Szpiro, L. (1985). « La conjecture de Mordell. [D'après G. Faltings] »,

Takamatsu, T. (2019). *On the Shafarevich conjecture for Enriques surfaces*. https://arxiv.org/abs/1911.03419.

——— (2020). « On a cohomological generalization of the Shafarevich conjecture for K3 surfaces », *Algebra Number Theory* **14** (9), p. 2505-2531.

Tate, J. (1966). « Endomorphisms of Abelian varieties over finite fields », *Invent. Math.* **2**, p. 134-144.

Vojta, P. (1991). « Siegel's theorem in the compact case », *Ann. of Math.* (2) **133** (3), p. 509-548.

Zuo, K. (2000). « On the negativity of kernels of Kodaira-Spencer maps on Hodge bundles and applications », *Asian J. Math.* **4** (1). Kodaira's issue, p. 279-301.

Marco Maculan

Institut de Mathématiques de Jussieu
Sorbonne Université
4 place Jussieu
75005 Paris

E-mail : marco.maculan@imj-prg.fr

Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1183, p. 121 à 131
doi : 10.24033/ast.1184

FLOT DE RICCI ET DIFFÉOMORPHISMES DE VARIÉTÉS DE DIMENSION 3
[*d'après* R. Bamler et B. Kleiner]

par **Sylvain Maillot**

1. Type d'homotopie des groupes de difféomorphismes

Dans tout cet exposé M désigne une variété lisse, sans bord, orientable, connexe et compacte. On munit l'ensemble $\mathrm{Diff}(M)$ des difféomorphismes de M de la topologie $\mathscr{C}^\infty$. On note $\mathrm{Diff}^+(M)$ (resp. $\mathrm{Diff}^-(M)$) l'ensemble des difféomorphismes de M qui préservent (resp. renversent) l'orientation. Il est bien connu que $\mathrm{Diff}(M)$ est une variété de Fréchet localement homéomorphe à l'espace des champs de vecteurs lisses sur M. Elle a le type d'homotopie d'un CW complexe (Palais, 1966) et est déterminée à homéomorphisme près par son type d'homotopie (Bessaga et Pełczyński, 1975). On est donc conduit au problème suivant :

Problème. *Calculer les groupes d'homotopie de* $\mathrm{Diff}(M)$.

Comme toujours en topologie des variétés, les méthodes utilisées pour résoudre ce problème dépendent fortement de la dimension de M. Dans la suite de cette section, nous faisons un rapide tour d'horizon des dimensions autres que la dimension 3, à laquelle nous allons consacrer le reste de ce texte. Nous renvoyons à Hatcher (2003) pour un survol plus détaillé.

On note S^n la sphère unité dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$. Son groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(S^n)$ s'identifie au groupe orthogonal $\mathrm{O}(n+1)$.

Si M est de dimension 1, elle est difféomorphe au cercle S^1. Il est facile de voir que l'injection canonique de $\mathrm{Isom}(S^1)$ dans $\mathrm{Diff}(S^1)$ est une équivalence d'homotopie. En particulier, $\mathrm{Diff}(S^1)$ a exactement deux composantes connexes, qui sont $\mathrm{Diff}^+(S^1)$ et $\mathrm{Diff}^-(S^1)$. Le groupe $\pi_1 \mathrm{Diff}^+(S^1)$ est infini cyclique, engendré par un lacet de rotations dont l'angle varie de 0 à 2π. Pour tout $k \geqslant 2$ on a $\pi_k \mathrm{Diff}^+(S^1) = 0$.

Passons à la dimension 2. S. Smale a démontré que l'énoncé analogue est vrai :

Théorème 1.1 (Smale, 1959). *L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(S^2)$ *dans* $\mathrm{Diff}(S^2)$ *est une équivalence d'homotopie.*

©Astérisque 438, SMF 2022

Ainsi, $\mathrm{Diff}(S^2)$ a de nouveau deux composantes connexes, $\mathrm{Diff}^+(S^2)$ et $\mathrm{Diff}^-(S^2)$. Le groupe $\pi_1 \mathrm{Diff}^+(S^2)$ est cyclique d'ordre 2, engendré par un lacet de rotations d'axe fixe et dont l'angle varie de 0 à 2π.

Le cas suivant est celui du tore de dimension 2. Son premier groupe d'homologie à coefficients entiers est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. On démontre que l'application de $\mathrm{Diff}(T^2)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ qui à un difféomorphisme associe son action en homologie induit une bijection de $\pi_0 \mathrm{Diff}(T^2)$ sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. De plus, chaque composante connexe de $\mathrm{Diff}(T^2)$ a le type d'homotopie de T^2.

Dans le cas d'une surface hyperbolique, chaque composante connexe de $\mathrm{Diff}(M)$ est contractile (Earle et Eells, 1969 ; Gramain, 1973, 1974). Cela est lié au fait que l'espace de Teichmüller est contractile.

Nous renvoyons à Hatcher (2003) pour une discussion des « grandes » dimensions, c'est-à-dire $n \geqslant 5$. Nous nous contenterons de signaler que l'énoncé analogue au théorème 1.1 est faux : par exemple, il existe des difféomorphismes de S^6 qui préservent l'orientation, mais ne sont pas isotopes à l'identité. C'est ce fait qui a permis à Milnor de démontrer l'existence de structures lisses exotiques sur S^7.

Enfin, il y a très peu de résultats en dimension 4. On ne sait rien du type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(S^4)$, ni de l'existence d'éventuelles structures lisses exotiques sur S^4.

2. Cas de la dimension 3

Supposons à présent que M est de dimension 3. Un résultat fondamental est l'analogue du théorème 1.1. Conjecturé par Smale, il a été démontré par Hatcher :

Théorème 2.1 (Hatcher, 1983). *L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(S^3)$ *dans* $\mathrm{Diff}(S^3)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Il est naturel de chercher à généraliser ce résultat au cas où M est géométrique au sens de W. Thurston, c'est-à-dire admet une métrique riemannienne localement isométrique à l'une des huit géométries modèles S^3, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^3$, Nil, Sol, $\widetilde{\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^3$ (Boileau, Maillot et Porti, 2003 ; Scott, 1983 ; Thurston, 1997). On pourrait s'attendre à ce que le type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(M)$ soit donné par un groupe de Lie, par exemple le groupe d'isométries pour une métrique bien choisie, ou peut-être un groupe un peu plus gros, comme celui des transformations affines. Or Hatcher a démontré également le résultat suivant :

Théorème 2.2 (Hatcher, 1981). *L'espace* $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$ *a le type d'homotopie de* $\mathrm{Diff}(S^1) \times \mathrm{Diff}(S^2) \times \Omega \mathrm{Diff}(S^2)$.

On rappelle que ΩX est l'espace des lacets pointés dans X. En combinant les théorèmes 1.1 et 2.2, on obtient que $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$ a le type d'homotopie de $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{O}(3) \times \Omega\,\mathrm{SO}(3)$. Comme $H_{2k}(\Omega\,\mathrm{SO}(3)) \neq 0$ pour tout entier k, il en résulte qu'il n'existe aucun groupe de Lie homotopiquement équivalent à $\mathrm{Diff}(S^1 \times S^2)$.

Le cas de $S^1 \times S^2$ est cependant exceptionnel. Pour les autres variétés géométriques, on conjecture que le type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(M)$ est bien celui d'un groupe de Lie qui reflète la géométrie. Cette conjecture est aujourd'hui démontrée dans un grand nombre de cas. Nous limiterons notre discussion aux cas les plus rigides des variétés sphériques et hyperboliques, et renvoyons encore à Hatcher (2003), ainsi qu'à la bibliographie de Bamler et Kleiner (2019b) pour une discussion des autres cas.

Rappelons que M est dite *sphérique* (resp. *hyperbolique*) si elle admet une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante égale à 1 (resp. -1). Une telle métrique est unique à l'action de $\mathrm{Diff}(M)$ près : cela résulte du théorème de rigidité de G. De Rham dans le cas sphérique (De Rham, 1950) et de celui de G. Mostow dans le cas hyperbolique (Mostow, 1973). La conjecture de Smale généralisée affirme que l'injection canonique de $\mathrm{Isom}(M)$ dans $\mathrm{Diff}(M)$ est une équivalence d'homotopie.

Dans le cas hyperbolique, D. Gabai a démontré cette conjecture :

Théorème 2.3 (Gabai, 2001). *Soit M une variété de dimension* 3 *hyperbolique. L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(M)$ *dans* $\mathrm{Diff}(M)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Le cas des variétés sphériques a une longue histoire, résumée dans la monographie Hong et al. (2012). Les méthodes topologiques permettent de montrer que $\pi_0\,\mathrm{Isom}(M) = \pi_0\,\mathrm{Diff}(M)$ pour toutes les variétés sphériques, en calculant explicitement ces groupes. Elles permettent également de traiter l'homotopie supérieure dans de nombreux cas, en se ramenant au théorème 2.1.

En 2017, Bamler et Kleiner ont démontré la conjecture de Smale généralisée pour toutes les variétés sphériques sauf $\mathbb{R}P^3$ (Bamler et Kleiner, 2017a). Cette preuve utilise le théorème 2.1, et ne redémontre donc pas le cas de S^3. Elle permet également de redémontrer le théorème 2.3, toujours modulo le théorème 2.1.

En 2019 les mêmes auteurs ont finalement obtenu une preuve de la conjecture valable dans tous les cas, et qui n'utilise pas le théorème 2.1 :

Théorème 2.4 (Bamler et Kleiner, 2019b). *Soit M une variété de dimension* 3 *sphérique. L'injection canonique de* $\mathrm{Isom}(M)$ *dans* $\mathrm{Diff}(M)$ *est une équivalence d'homotopie.*

Remarquons que la méthode utilisée permet également de donner une nouvelle preuve du théorème 2.3. [(1)]

[(1)] Tout récemment, Bamler et Kleiner ont étendu leur méthode de façon à démontrer la conjecture de Smale généralisée pour les variétés dont la géométrie est modelée par le groupe de Heisenberg Nil (Bamler et Kleiner, 2021).

Dans la suite de ce texte, nous expliquons comment les travaux de G. Perelman, puis B. Kleiner et J. Lott et enfin R. Bamler et B. Kleiner sur le flot de Ricci (Bamler et Kleiner, 2017b ; Kleiner et Lott, 2017 ; Perelman, 2003) ont permis de prouver le théorème 2.4. Pour approfondir le sujet, nous recommandons, outre les articles originaux, le survol de Bamler dans les Notices de l'A.M.S. (Bamler, 2021a), ainsi que le mini-cours donné par Bamler à l'École d'été de l'Institut Fourier (Bamler, 2021b).

3. Espaces de métriques riemanniennes

Dans toute la suite du texte, on suppose que M est de dimension 3. On note $\mathrm{Met}(M)$ l'espace des métriques riemanniennes lisses sur M. Muni de la topologie $\mathscr{C}^\infty$, c'est une variété de Fréchet. On note $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ le sous-espace formé des métriques localement isométriques à S^3 ou $S^2 \times \mathbb{R}$.

Théorème 3.1 (Bamler et Kleiner, 2019b). *L'espace* $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ *est vide ou contractile.*

Le théorème 2.4 se déduit du théorème 3.1 de la façon suivante : soit M une 3-variété sphérique. Fixons $g_0 \in \mathrm{Met}_{CC}(M)$ et considérons l'application $\pi : \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Met}_{CC}(M)$ qui à ϕ associe $\phi_*(g_0)$. D'après De Rham (1950) l'application π est surjective. On montre que c'est en fait une fibration, dont la fibre est par définition $\mathrm{Isom}(M, g_0)$. On conclut grâce à la suite exacte longue en homotopie.

De façon similaire, le théorème 3.1 permet de donner une nouvelle démonstration du théorème 2.2, ainsi que la détermination du type d'homotopie de $\mathrm{Diff}(\mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3)$.

Notons $\mathrm{Met}_{PSC}(M)$ l'espace des métriques à courbure scalaire strictement positive sur M. Cet espace est non-vide si et seulement si M est une somme connexe de variétés sphériques et/ou de copies de $S^1 \times S^2$ (Perelman, 2003) :

Théorème 3.2 (Bamler et Kleiner, 2019b). *L'espace* $\mathrm{Met}_{PSC}(M)$ *est vide ou contractile.*

Le théorème 3.2 vient compléter un résultat de F. Coda Marques qui prouvait la connexité par arcs du quotient de cet espace par $\mathrm{Diff}(M)$ (Marques, 2012). Notons qu'en grandes dimensions cet espace n'est en général pas contractile, ni même connexe par arcs. Nous renvoyons à Rosenberg (2007) pour un survol.

4. L'approche par le flot de Ricci

Supposons M sphérique. Comme $\mathrm{Met}_{CC}(M)$ est une variété de Fréchet séparable, pour démontrer le théorème 3.1, il suffit de prouver que tous ses groupes d'homotopie sont nuls.

Soit k un entier naturel, et soit f une application continue de S^k dans $\mathrm{Met}_{CC}(M)$. Comme l'espace $\mathrm{Met}(M)$ est contractile, f admet un prolongement $\bar{f} : B^{k+1} \to \mathrm{Met}(M)$.

Si l'on disposait d'une façon canonique de déformer une métrique riemannienne quelconque en une métrique à courbure constante, et ce de façon continue par rapport à un multi-paramètre, on obtiendrait une application $g : B^{k+1} \to \mathrm{Met}_{CC}(M)$ qui prolonge f, ce qui résoudrait notre problème.

Le point de départ est de considérer les solutions d'une équation aux dérivées partielles introduite par R. Hamilton :

$$\frac{dg}{dt} = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}, \tag{1}$$

où Ric désigne la courbure de Ricci. Nous appellerons *flot de Ricci* un couple $(N, \{g(t)\}_{t\in I})$ où N est une variété lisse (toujours sans bord, mais pas nécessairement compacte) et $g(\cdot)$ est une famille de métriques riemanniennes sur N dépendant de façon lisse d'un paramètre t prenant ses valeurs dans un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et vérifiant l'équation (1). Pour x dans N et t dans I on note $B(x,t,r)$ la boule de centre x et de rayon r pour la métrique $g(t)$. On note $R(x,t)$ la courbure scalaire au point x pour la métrique $g(t)$.

Pour toute métrique g_0 sur notre variété compacte M, il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'il existe un unique flot de Ricci $(M, \{g(t)\}_{t\in[0,\varepsilon[})$ satisfaisant la condition initiale $g(0) = g_0$ (Hamilton, 1982). On peut donc considérer le temps $T_{max} \in]0, +\infty]$ tel que l'intervalle de définition maximal d'un tel flot soit $[0, T_{max}[$. Si $T_{max} < +\infty$ on dit que le flot *admet une singularité* au temps T_{max}.

La première intuition est que l'équation (1) est similaire à l'équation de la chaleur ; elle a donc des propriétés régularisantes et dans les cas les plus favorables, la courbure tend à s'uniformiser :

Théorème 4.1 (Hamilton, 1982). *Supposons que g_0 est à courbure de Ricci strictement positive. Alors $T_{max} < +\infty$ et il existe une fonction $\lambda : [0, T_{max}[\to]0, +\infty[$ ayant pour limite $+\infty$ en T_{max} telle que la métrique rééchelonnée $\lambda(t)g(t)$ converge à difféomorphisme près vers une métrique à courbure constante.*

En général, si le flot admet une singularité, on sait que le maximum de la courbure scalaire tend vers l'infini quand $t \to T_{max}$. On peut considérer l'ensemble $\Omega \subset M$ des points x tels que la courbure scalaire en (x,t) reste bornée quand $t \to T_{max}$. L'ensemble Ω est un ouvert de M (Perelman, 2003). On sait que sur Ω le flot converge, mais la théorie générale ne permet pas de prolonger le flot, puisqu'en général Ω n'est pas compact.

Dans sa preuve de la conjecture de géométrisation, Perelman introduit une fonction de cutoff $\delta(t)$ qui permet de prolonger le flot au-delà de T_{max} en effectuant des chirurgies aux petites échelles. Cette contruction est insuffisante pour démontrer le théorème 3.1, car elle n'est pas continue par rapport à un paramètre. Toutefois, l'analyse des régions où la courbure scalaire devient grande joue un rôle important, et nous allons la présenter de façon détaillée dans la section suivante.

5. Kappa-solutions et voisinages canoniques

Un élément crucial qui a permis à Perelman de réaliser le programme de Hamilton pour résoudre la conjecture de géométrisation est l'étude d'une classe de flots de Ricci, appelés κ-solutions, qui servent de modèles pour l'étude locale des régions de grande courbure des flots de Ricci compacts. La définition peut être donnée en toutes dimensions, mais nous nous contenterons ici de la dimension 3.

Définition 5.1. Soit $\kappa > 0$. On appelle *κ-solution* un flot de Ricci $(N, \{g(t)\}_{t\in]-\infty,0]}$ où N est une variété de dimension 3, satisfaisant les conditions ci-dessous :

1. Pour tout t, la métrique $g(t)$ est complète, à courbure scalaire > 0 et à courbure sectionnelle $\geqslant 0$.
2. La courbure sectionnelle de $g(t)$ est uniformément bornée sur tout intervalle compact $I \subset]-\infty, 0]$.
3. Pour tout $(x,t) \in N\times]-\infty,0]$ et tout $r > 0$, si toutes les courbures sectionnelles sur $B(x,t,r)$ sont comprises entre $-r^{-2}$ et r^{-2}, alors $\mathrm{Vol}(B(x,t,r)) \geqslant \kappa r^3$.

Voici une liste d'exemples de κ-solutions :

1. La sphère $N = S^3$ et $g(t) = (1-4t)g_{S^3}$.
2. Le cylindre $N = S^2 \times \mathbb{R}$ et $g(t) = (1-2t)g_{S^2} + g_{\mathbb{R}}$.
3. Le soliton de Bryant $N = \mathbb{R}^3$ et $g(t)$ est pour tout t rotationnellement symétrique ; la géométrie asymptotique à t fixé et $x \to \infty$ est cylindrique.
4. $N = S^3$ ou $N = \mathbb{R}P^3$, $g(t)$ est pour tout t rotationnellement symétrique.

Ici g_{S^3}, g_{S^2} et $g_{\mathbb{R}}$ sont les métriques standard convenablement normalisées.

Perelman a développé la théorie générale des κ-solutions. Il a démontré que l'espace des κ-solutions est compact modulo l'échelle, et que pour tout t la géométrie de $(N, g(t))$ est cylindrique en dehors d'un compact. Brendle (Brendle, 2018, 2019) (voir aussi Bamler et Kleiner, 2019a) a démontré que les seules κ-solutions sont celles ci-dessus ainsi que leurs quotients métriques. Ce résultat plus précis de classification des κ-solutions est crucial pour l'application au théorème 3.1, car combiné au théorème 5.4 ci-dessous il a pour conséquence que les parties de grande courbure d'un flot de Ricci compact sont proches de modèles ayant beaucoup de symétries (cf. Bamler et Kleiner, 2019b, Section 5).

Nous allons à présent expliquer comment les κ-solutions interviennent dans la théorie des flots de Ricci compacts. Pour cela nous donnons deux définitions.

Définition 5.2. Soit (M_0, g_0, x_0) une variété riemannienne pointée. On dit que la variété riemannienne pointée (M, g, x) est *ε-proche* de (M_0, g_0, x_0) s'il existe un plongement ϕ de $B(x_0, \varepsilon^{-1})$ dans M tel que $\phi(x_0) = x$ et la norme $\mathscr{C}^{1/\varepsilon}$ du tenseur $\phi^* g - g_0$ est majorée par ε.

On dit que (M, g, x) est *ε-homothétique* à (M_0, g_0, x_0) s'il existe $\lambda > 0$ tel que $(M, \lambda g, x)$ est ε-proche de (M_0, g_0, x_0).

Définition 5.3. Soit $(M, \{g(t)\}_{t\in I})$ un flot de Ricci. On dit que ce flot a la *propriété des voisinages canoniques aux échelles $\leqslant r$ avec précision ε* si pour tout $(x, t) \in M \times I$ satisfaisant $R(x, t) > r^{-2}$ il existe $\kappa > 0$, une κ-solution $(N, h(\cdot))$ et un point $x_0 \in N$ tel que $R(x_0, 0) = 1$ et $(M, g(t), x)$ est ε-homothétique à $(N, g(0), x_0)$.

Une métrique riemannienne sur M est *normalisée* si la courbure sectionnelle est bornée en valeur absolue par 1 et chaque boule de rayon 1 a un volume minoré par la moitié du volume de la boule euclidienne de rayon 1.

Théorème 5.4 (Perelman, 2002). *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T > 0$ il existe $r = r(\varepsilon, T) > 0$ tel que pour tout $t_1 \in]0, T]$, tout flot de Ricci compact $(M, \{g(t)\}_{t\in[0,t_1]})$ à condition initiale normalisée a la propriété des voisinages canoniques aux échelles $\leqslant r$ avec précision ε.*

6. Flots de Ricci singuliers

Grâce aux résultats décrits dans la section précédente, Perelman construit un objet appelé flot de Ricci avec (r, δ)-cutoff. On peut le décrire comme une famille à un paramètre de variétés riemanniennes $(M(t), g(t))$ où on autorise un ensemble discret de temps singuliers où la variété change et la métrique varie de façon discontinue. La construction dépend de deux paramètres : le paramètre d'échelle r intervenant dans la propriété des voisinages canoniques, traitée comme hypothèse *a priori*, et le paramètre de cutoff δ qui gouverne l'échelle à laquelle on effectue les chirurgies. Comme la façon dont la topologie de la variété change à chaque chirurgie est contrôlée, cela permet de déterminer la topologie de la variété initiale. Pour plus de détails nous renvoyons à Perelman (2003) ainsi qu'à Bessières et al. (2010), Cao et Zhu (2006), Kleiner et Lott (2008) et Morgan et Tian (2007).

À cause de la présence de paramètres, cette construction n'est pas canonique, et ne permet donc pas de réaliser les déformations nécessaires pour démontrer les théorèmes 3.1 et 3.2. Pour y remédier, Kleiner et Lott ont démontré un théorème de compacité permettant de prouver que, quand le paramètre de cutoff δ tend vers 0, le flot de Ricci avec (r, δ)-cutoff converge vers une déformation canonique. Donnons maintenant les définitions nécessaires à l'énoncé de leur résultat.

Définition 6.1. Un *espace-temps de Ricci* est un quadruplet $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ où $\mathscr{M}$ est une variété à bord lisse de dimension 4, $\mathbf{t}$ est une fonction de $\mathscr{M}$ dans $\mathbb{R}_+$ dont les ensembles de niveau sont notés $\mathscr{M}_t = \mathbf{t}^{-1}(t)$, ∂_t est un champ de vecteurs sur $\mathscr{M}$ et g est un produit scalaire sur le fibré $\ker(d\mathbf{t}) \subset T\mathscr{M}$, tels que les conditions suivantes soient satisfaites :

1. La fonction $\mathbf{t}$ n'a pas de point critique.
2. Le bord de $\mathscr{M}$ est égal à $\mathscr{M}_0$.
3. La fonction $\partial_t \mathbf{t}$ est constante égale à 1.
4. L'équation
$$\mathscr{L}_{\partial_t} g = -2\mathrm{Ric}(g) \tag{2}$$
est vérifiée en tout point de $\mathscr{M}$.

Noter que chaque tranche temporelle $\mathscr{M}_t$ est munie d'une métrique riemannienne, que l'on notera g_t ; la courbure de Ricci intervenant dans l'équation (2) est celle de cette métrique.

On dit que deux espaces-temps de Ricci $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ et $(\mathscr{M}', \mathbf{t}', \partial_t', g')$ sont *isométriques* s'il existe un difféomorphisme $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ qui conjugue les champs de vecteurs ∂_t et ∂_t' et induit pour tout t une isométrie de $(\mathscr{M}_t, g_t)$ sur $(\mathscr{M}_t', g_t')$.

Tout flot de Ricci $(M, \{g(t)\}_{t\in[0,T[})$ peut être vu comme un espace-temps de Ricci où $\mathscr{M} = M \times [0, T[$, $\mathbf{t}$ est la projection sur le deuxième facteur et ∂_t est un champ de vecteur unitaire transverse aux fibres de cette projection.

Il y a une notion d'espace-temps de Ricci *complet*. La définition utilisée dans Bamler et Kleiner (2019b) fait référence à une fonction d'échelle que nous ne discuterons pas. Disons simplement qu'en première approximation elle revient à demander que la courbure scalaire tend vers l'infini quand on sort de tout compact de $\mathscr{M}$.

Voici maintenant la notion la plus importante :

Définition 6.2. Un *flot de Ricci singulier* est un espace-temps de Ricci complet $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ qui a les propriétés suivantes :

1. $\mathscr{M}_0$ est compact.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $T \in \mathbb{R}_+$ il existe $r = r(\varepsilon, T) > 0$ tel que la propriété des voisinages canoniques aux échelles $\leqslant r$ avec précision ε est satisfaite en tout point de $\mathbf{t}^{-1}([0, T])$.

S'il existe $t_1 > 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_1$ on a $\mathscr{M}_t = \emptyset$, on dit que le flot est *éteint*.

Théorème 6.3 (Kleiner et Lott, 2017)**.** *Pour toute métrique riemannienne h sur M il existe un flot de Ricci singulier $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ tel que $(\mathscr{M}_0, g_0)$ est isométrique à (M, h).*

Théorème 6.4 (Bamler et Kleiner, 2017b)**.** *Soient $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ et $(\mathscr{M}', \mathbf{t}', \partial_t', g')$ deux flots de Ricci singuliers tels que $(\mathscr{M}_0, g_0)$ est isométrique à $(\mathscr{M}_0', g_0')$. Alors $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ et $(\mathscr{M}', \mathbf{t}', \partial_t', g')$ sont isométriques.*

Ce dernier théorème est une conséquence d'un théorème de stabilité disant que si $(\mathscr{M}_0, g_0)$ est presque isométrique à $(\mathscr{M}_0', g_0')$, alors $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ et $(\mathscr{M}', \mathbf{t}', \partial_t', g')$ sont presque isométriques. Ainsi, le flot de Ricci singulier est unique et dépend continûment d'un multi-paramètre.

En général, le flot de Ricci singulier existe pour tout temps. Par exemple, si $M = T^3$ et g_0 est une métrique plate, alors le flot de Ricci singulier est le flot de Ricci constant, défini sur $[0, +\infty[$. Dans les cas qui nous intéressent, cependant, le flot de Ricci singulier est automatiquement éteint :

Théorème 6.5 (Bamler et Kleiner, 2017a ; Kleiner et Lott, 2017). *Si M est une somme connexe de variétés sphériques et de copies de $S^1 \times S^2$, alors tout flot de Ricci singulier $(\mathscr{M}, \mathbf{t}, \partial_t, g)$ tel que $\mathscr{M}_0$ est difféomorphe à M est éteint.*

Il est impossible de présenter ici les notions nouvelles (familles continues de flots de Ricci, $\mathscr{R}$-structures, isotopies partielles) introduites par Bamler et Kleiner dans Bamler et Kleiner, 2019b. Les difficultés techniques de cet article étant redoutables, nous conseillons vivement aux lecteurs désireux d'en savoir plus le mini-cours de Bamler dont les vidéos sont disponibles sur la chaîne de l'Institut Fourier (Bamler, 2021b).

Références

Bamler, R. (2021a). « Recent developments in Ricci flows », *Notices Amer. Math. Soc.* **68** (9), p. 1486-1498.

——— (2021b). *Uniqueness of Weak Solutions to the Ricci Flow and Topological Applications*. Vidéo disponible sur la chaîne de l'Institut Fourier.

Bamler, R. et Kleiner, B. (2017a). *Ricci flow and diffeomorphism groups of 3-manifolds*. prépublication arXiv 1712.06197.

——— (2017b). *Uniqueness and Stability of Ricci flow through singularities*. prépublication arXiv 1709.04122.

——— (2019a). *On the rotational symmetry of 3-dimensional κ-solutions*. prépublication arXiv 1904.05388.

——— (2019b). *Ricci flow and contractibility of spaces of metrics*. prépublication arXiv 1909.08710.

——— (2021). *Diffeomorphism groups of prime 3-manifolds*. prépublication arXiv 2108.03302.

Bessaga, C. et Pełczyński, A. (1975). *Selected topics in infinite-dimensional topology*. Monografie Matematyczne, Tom 58. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, p. 353.

Bessières, L. et al. (2010). *Geometrisation of 3-manifolds*. T. 13. EMS Tracts in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, p. x+237.

Boileau, M., Maillot, S. et Porti, J. (2003). *Three-dimensional orbifolds and their geometric structures*. T. 15. Panoramas et Synthèses. Société Mathématique de France, Paris, p. viii+167.

Brendle, S. (2018). *Rotational symmetry of ancient solutions to the Ricci flow in dimension* 3. prépublication arXiv 1811.02559.

——— (2019). *Rotational symmetry of ancient solutions to the Ricci flow in dimension* 3 – *The compact case.* prépublication arXiv 1904.07835.

Cao, H.-D. et Zhu, X.-P. (2006). « A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures—application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow », *Asian J. Math.* **10** (2), p. 165-492.

De Rham, G. (1950). « Complexes à automorphismes et homéomorphie différentiable », *Ann. Inst. Fourier* (*Grenoble*) **2**, 51-67 (1951).

Earle, C. J. et Eells, J. (1969). « A fibre bundle description of Teichmüller theory », *J. Differential Geometry* **3**, p. 19-43.

Gabai, D. (2001). « The Smale conjecture for hyperbolic 3-manifolds : $\mathrm{Isom}(M^3) \simeq \mathrm{Diff}(M^3)$ », *J. Differential Geom.* **58** (1), p. 113-149.

Gramain, A. (1973). « Le type d'homotopie du groupe des difféomorphismes d'une surface compacte », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (*4*) **6**, p. 53-66.

——— (1974). « Groupe des difféomorphismes et espace de Teichmüller d'une surface (d'après C. Earle et J. Eells) », in : *Séminaire Bourbaki, 25ème année* (*1972/1973*), *Exp. No. 426*, 157-170. Lecture Notes in Math., Vol. 383.

Hamilton, R. S. (1982). « Three-manifolds with positive Ricci curvature », *J. Differential Geometry* **17** (2), p. 255-306.

Hatcher, A. (1981). « On the diffeomorphism group of $S^1 \times S^2$ », *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (2), p. 427-430.

——— (1983). « A proof of the Smale conjecture, $\mathrm{Diff}(S^3) \simeq \mathrm{O}(4)$ », *Ann. of Math.* (*2*) **117** (3), p. 553-607.

——— (2003). *A 50-year view of diffeomorphism groups.* url : `http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/`.

Hong, S. et al. (2012). *Diffeomorphisms of elliptic 3-manifolds*. T. 2055. Lecture Notes in Mathematics. Springer, Heidelberg, p. x+155.

Kleiner, B. et Lott, J. (2008). « Notes on Perelman's papers », *Geom. Topol.* **12** (5), p. 2587-2855.

——— (2017). « Singular Ricci flows I », *Acta Math.* **219** (1), p. 65-134.

Marques, F. C. (2012). « Deforming three-manifolds with positive scalar curvature », *Ann. of Math.* (*2*) **176** (2), p. 815-863.

Morgan, J. et Tian, G. (2007). *Ricci flow and the Poincaré conjecture*. T. 3. Clay Mathematics Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI ; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, p. xlii+521.

Mostow, G. D. (1973). *Strong rigidity of locally symmetric spaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 78. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, p. v+195.

Palais, R. S. (1966). « Homotopy theory of infinite dimensional manifolds », *Topology* **5**, p. 1-16.

Perelman, G. (2002). *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. ArXiv : math.DG/0211159.

——— (2003). *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. ArXiv : math.DG/0303109.

Rosenberg, J. (2007). « Manifolds of positive scalar curvature : a progress report », in : *Surveys in differential geometry. Vol. XI*. T. 11. Surv. Differ. Geom. Int. Press, Somerville, MA, p. 259-294.

Scott, P. (1983). « The geometries of 3-manifolds », *Bull. London Math. Soc.* **15** (5), p. 401-487.

Smale, S. (1959). « Diffeomorphisms of the 2-sphere », *Proc. Amer. Math. Soc.* **10**, p. 621-626.

Thurston, W. P. (1997). *Three-dimensional geometry and topology. Vol. 1*. T. 35. Princeton Mathematical Series. Edited by Silvio Levy. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. x+311.

Sylvain Maillot

Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, CNRS, Université de Montpellier

E-mail : sylvain.maillot@umontpellier.fr

Séminaire BOURBAKI Octobre 2021
73e année, 2021–2022, no 1184, p. 133 à 179
doi : 10.24033/ast.1185

STRUCTURE DES LIMITES DES VARIÉTÉS NON EFFONDRÉES À COURBURE DE RICCI MINORÉE
[*d'après* J. Cheeger, W. Jiang and A. Naber]

par **Ilaria Mondello**

Introduction

Un célèbre théorème, démontré en 1981 par M. Gromov, affirme que toute suite de variétés riemanniennes pointées (M_i^n, g_i, p_i), dont la courbure de Ricci est uniformément minorée, admet une sous-suite convergente au sens de la topologie de Gromov–Hausdorff pointée vers un espace métrique (X, d, p). Depuis lors, de nombreux mathématiciens, M. Anderson, S. Bando, A. Kasue, H. Nakajima, J. Cheeger, T. H. Colding, G. Tian, A. Naber, W. Jiang, ont étudié la structure de cet espace limite en essayant d'établir dans quelle mesure elle diffère de celle d'une variété riemannienne lisse : quelles sont les singularités qui peuvent apparaître ? Est-ce qu'il y en a peu, beaucoup, dans quel sens ? Dans ce texte, nous nous concentrerons sur les avancées récentes apportées par les travaux de Cheeger et Naber, 2015, Jiang et Naber, 2021, et Cheeger, Jiang et Naber, 2021, dans le cas d'une suite de variétés non effondrées, c'est-à-dire avec la condition supplémentaire que le volume d'une boule unité est uniformément minoré.

Les premiers résultats dans l'étude des espaces limites de variétés riemanniennes non effondrées ont été obtenus en supposant que la courbure de Ricci est bornée et pas seulement minorée. En dimension 2 et 3, une borne sur la courbure de Ricci est équivalente à une borne sur la courbure sectionnelle ou sur la courbure de Riemann. Dans ce cas, un résultat de pré-compacité en topologie Lipschitz découle des travaux sur le théorème de finitude des difféomorphismes de Cheeger, 1967 (voir aussi Dai et Rong, 2012). Il est en effet possible de démontrer qu'une suite de variétés non effondrées dont la courbure sectionnelle est bornée converge, au sens C^α de la métrique, vers une variété munie d'une métrique C^α (voir le chapitre 10 du livre de Petersen, 2016).

©Astérisque 438, SMF 2022

En dimension 4 en revanche, des singularités peuvent apparaître, comme le montre l'exemple de la métrique de Eguchi–Hanson ré-échelonnée, qui développe une singularité conique isolée (exemple 1.3 de ce texte). À la fin des années 80, plusieurs résultats ont été prouvés, d'abord dans le cas où la courbure de Ricci est proportionnelle à la métrique, c'est-à-dire Einstein, puis lorsque la courbure de Ricci est seulement supposée bornée. Les travaux de Anderson, 1989, Bando, Kasue et Nakajima, 1989, Tian, 1990, et Anderson, 1990, ont ensuite démontré qu'en supposant, en plus du non effondrement et de la borne sur la courbure de Ricci, un contrôle uniforme de la topologie et du diamètre, l'espace limite est une variété riemannienne en dehors d'un nombre fini de singularités coniques orbifolds (voir aussi le théorème 4 de Anderson, 1995). Cela repose sur le fait que, en vertu de la formule de Chern–Gauss–Bonnet, le contrôle de la topologie et du diamètre implique une borne uniforme pour la norme L^2 de la courbure de Riemann. Plusieurs conjectures ont été formulées à partir de ce résultat. Tout d'abord la conjecture de la codimension 4, selon laquelle, en toute dimension n et sans hypothèse sur la courbure de Riemann, un espace limite de variétés non effondrées à courbure de Ricci bornée ne contient que des singularités de codimension supérieure ou égale à 4. En particulier, selon cette conjecture, les contrôles de la topologie et du diamètre ne sont pas nécessaires en dimension 4 pour que la limite ne possède que des singularités de type orbifold (voir la conjecture 3 de Anderson, 1995, et le paragraphe qui la précède). Il a de plus été conjecturé que la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^{n-4}$ de l'ensemble des singularités est localement finie.

Entre la fin des années 90 et le début des années 2000, la conjecture de la codimension 4 a été prouvée en toute dimension dans des cas particuliers : lorsque la norme L^2 de la courbure de Riemann est bornée, ou lorsque la métrique est kählerienne. Ce sont des conséquences du théorème 1.15 de Cheeger, Colding et Tian, 2002 (voir respectivement les Remarques 1.17 et 1.18) ou également, pour le cas Kähler, du théorème 6.1 de Cheeger, 2003. Parallèlement, T. H. Colding et J. Cheeger ont développé une riche théorie qui a permis une meilleure compréhension de la géométrie des espaces limites, sous l'hypothèse moins restrictive de courbure de Ricci uniquement minorée. Ils ont démontré, entre autres, que le non effondrement et la minoration uniforme de la courbure de Ricci permettent d'obtenir des informations locales sur la géométrie de l'espace limite, exprimées à l'aide des cônes tangents. Un cône tangent en un point est obtenu comme un éclatement de l'espace en ce point, via un changement d'échelle. La théorie de Cheeger–Colding affirme alors que, pour les limites de variétés non effondrées à courbure de Ricci minorée, tout cône tangent est un cône métrique de la forme $\mathbb{R}^k \times C(Z)$, où $C(Z)$ est le cône sur un espace métrique Z. Cela donne lieu à une stratification de l'espace limite X en sous-ensembles singuliers $S^k(X)$ définis par la propriété que $x \in S^k(X)$ si et seulement si aucun cône tangent en x ne scinde un espace euclidien de dimension $(k+1)$. On a donc une stratification de l'espace limite

donnée par

$$S^0(X) \subset \cdots \subset S^{n-1}(X) \subset X.$$

On désigne la k-ième strate singulière par $\Sigma^k(X) = S^k(X) \setminus S^{k-1}(X)$. À partir de cette stratification, désormais classique, T. H. Colding et J. Cheeger ont alors démontré qu'on peut décomposer X en un ensemble régulier $\mathscr{R} := X \setminus S^{n-1}(X)$, bi-Hölder homéomorphe à une variété lisse, et un ensemble singulier de codimension au moins 2. Plus précisément, on dispose du résultat suivant.

Théorème A (J. Cheeger, T. H. Colding). *Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés riemanniennes telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1) \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

convergeant vers un espace métrique (X, d, p). Alors :

1. *La strate singulière $\Sigma^{n-1}(X)$ est vide.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U_ε et $\alpha(\varepsilon, n) \in]0,1[$, avec $\alpha(\varepsilon, n) \to 1$ quand ε tend vers 0, tels que U_ε contient $\mathscr{R}$ et est $\alpha(\varepsilon, n)$-bi-Hölder homéomorphe à une variété riemannienne de dimension n.*
3. *Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, la dimension de Hausdorff de $S^k(X)$ est inférieure ou égale à k. En particulier l'ensemble singulier $\mathscr{S} := S^{n-2}(X)$ vérifie*

$$\dim_{\mathscr{H}} \mathscr{S} \leqslant (n-2).$$

Le premier point découle du fait que l'existence d'une strate de codimension 1 impliquerait l'apparition d'un bord à la limite, ce qui n'arrive pas lorsque l'on considère des suites de variétés *sans bord*. L'information sur la dimension de Hausdorff est significative mais reste en un certain sens faible : on peut, par exemple, construire un espace limite dont le lieu singulier est dense et a mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^{n-2}$ infinie (voir l'exemple 1.2 ci-dessous). En outre, les cônes tangents ne sont pas uniques, comme le montre l'exemple 8.41 de Cheeger et Colding, 1997, originalement dû à G. Perelman. Ils peuvent de plus présenter des comportements pathologiques ; Colding et Naber, 2013, ont construit en toute dimension $n \geqslant 3$ des suites de variétés non effondrées à Ricci minoré, convergentes vers un espace (X, d, p) tel que pour tout entier $k = 0, \ldots, n-2$, il existe un cône tangent en p qui scinde un espace euclidien de dimension k, mais qui ne scinde pas d'espace euclidien de dimension $k+1$. En dimension 5, ils ont exhibé également un espace limite (Y, d, y) qui possède deux cônes tangents en y, dont les sections ne sont pas homéomorphes. Dans le même article, T. H. Colding et A. Naber ont conjecturé que l'ensemble des points où le cône tangent n'est pas unique a dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $n-3$.

En 2011, J. Cheeger et A. Naber ont introduit un nouvel outil, inspiré par les travaux précédents de Cheeger, 2012, et de Cheeger et Naber, 2013b : la stratification quantitative (voir l'article de Cheeger et Naber, 2013a). Grâce à cette dernière, ils

ont pu relier des bornes L^q, $q < 2$, sur la courbure de Riemann avec des estimées de volume pour le voisinage tubulaire d'une strate quantitative (voir le théorème 1.8 de Cheeger et Naber, 2015). Au cours des sept années suivantes, leurs travaux avec W. Jiang ont résolu l'ensemble des conjectures citées ci-dessus. Dans le cas où la courbure de Ricci est bornée, J. Cheeger et A. Naber ont démontré la conjecture de la codimension 4 et W. Jiang et A. Naber ont montré des bornes L^2 a priori pour la courbure de Riemann, en toute dimension, conjecturées par Naber, 2014 et Cheeger et Naber, 2015 (voir respectivement les articles de Cheeger et Naber, 2015, et Jiang et Naber, 2021). Lorsque la courbure de Ricci est uniquement minorée, parmi les nombreux résultats de leur dernier article, Cheeger, Jiang et Naber, 2021, ont prouvé l'unicité des cônes tangents en dehors d'un ensemble de mesure $\mathscr{H}^{n-2}$ nulle. En outre, ils ont démontré que, même si les ensembles S^k ne se comportent pas comme des sous-variétés de dimension k, ils sont *k-rectifiables* : en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathscr{H}^k$ nulle, ils sont recouverts par des cartes bi-Lipschitz à valeurs dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$. Plus précisément, nous pouvons énoncer les trois résultats suivants.

Théorème B (Rectifiabilité des strates, Cheeger, Jiang et Naber, 2021). *Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1) \text{ et } \mathrm{vol}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

qui converge vers l'espace métrique (X, d, p) dans la topologie de Gromov–Hausdorff pointée. Alors pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$ l'ensemble $S^k(X)$ est k-rectifiable. En outre, en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathscr{H}^k$ nulle, si $x \in S^k(X)$, alors tous les cônes tangents scindent un espace euclidien $\mathbb{R}^k$.

Ce théorème, avec la convergence du volume de Cheeger–Colding, implique directement que les cônes tangents sont uniques en dehors d'un sous-ensemble de mesure $\mathscr{H}^{n-2}$ nulle (voir le théorème 1.15 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Théorème C (Codimension 4, Cheeger et Naber, 2015 et mesure localement finie, Jiang et Naber, 2021). *Soit (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que*

$$\| \mathrm{Ric}_{g_i} \| \leqslant (n-1) \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v,$$

qui converge vers l'espace métrique (X, d, p) au sens de Gromov–Hausdorff pointé. Alors l'ensemble singulier $\mathscr{S}$ est de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à $n-4$, il est $(n-4)$-rectifiable et de mesure $\mathscr{H}^{n-4}$ localement finie.

À l'aide de ce théorème, J. Cheeger et A. Naber ont aussi pu démontrer de nouveaux résultats pour les variétés lisses de dimension 4, non effondrées et à courbure de Ricci bornée ; par exemple le nombre fini de types de difféomorphismes lorsque le diamètre est borné, ou le fait qu'une 4-variété Ricci plate à croissance euclidienne du volume est asymptotiquement localement plate (voir respectivement le théorème 1.12 et le corollaire 8.86 de l'article de Cheeger et Naber, 2015).

Théorème D (Bornes L^2 pour la courbure de Riemann, Jiang et Naber, 2021)**.** *Il existe une constante $C(n,v)$ telle que pour toute variété riemannienne (M^n,g) qui vérifie $\|\operatorname{Ric}_g\| \leqslant (n-1)$ et $\operatorname{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$,*

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_g(B_1(p))}\int_{B_1(p)} \|\mathrm{Rm}_g\|^2 dv_g \leqslant C(n,v).$$

Certaines des techniques utilisées dans les démonstrations de ces résultats ont été parallèlement exploitées en dehors du contexte des limites de variétés, dans l'étude des singularités des solutions de nombreuses équations géométriques ou des minimiseurs de problèmes variationnels : on peut citer par exemple les travaux de Naber et Valtorta, 2017a, Naber, Valtorta et Veronelli, 2019, Breiner et Lamm, 2015, sur les applications harmoniques ; ceux de Cheeger, Haslhofer et Naber, 2013, et Cheeger, Haslhofer et Naber, 2015, sur le flot de la courbure moyenne ; ou encore l'article de Naber et Valtorta, 2019, sur les connexions de Yang–Mills ; les articles de Focardi, Marchese et Spadaro, 2015, et de De Lellis et al., 2018, sur les surfaces minimales au sens des courants de codimension supérieure à 1, ou de Edelen et Engelstein, 2019, concernant des problèmes à bord libre. En outre, une question naturelle liée à la théorie de Cheeger–Colding est celle de la définition d'une notion généralisée de la minoration de la courbure de Ricci pour des espaces métriques mesurés, stable par rapport à la convergence de Gromov–Hausdorff. Une réponse possible été donnée par la désormais vaste théorie des espaces RCD, initiée à partir de 2006 par les travaux de J. Lott, K. T. Sturm et C. Villani et de L. Ambrosio, N. Gigli et G. Savaré. Des travaux récents montrent comment les techniques liées à la stratification quantitative sont aussi fructueuses dans le cadre des espaces RCD (voir par exemple las articles de Mondino et Naber, 2019, Antonelli, Brué et Semola, 2019 et Brué, Pasqualetto et Semola, 2019).

Dans ce texte, nous essayons de présenter les grandes lignes de la théorie de Cheeger–Colding et des développements récents apportés par J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber : nous illustrons certains de ses outils principaux et essayons de dégager les idées importantes, en renvoyant aux articles originaux pour les détails. Nous nous concentrons principalement sur le théorème B, dont la démonstration repose sur des estimées de volume pour les voisinages tubulaires des strates quantitatives. Nous présentons la structure de la démonstration de ces estimées, en soulignant ses points communs, et ses différences, avec la théorie de Cheeger–Colding et avec les démonstrations des théorèmes C et D. Enfin, pour donner une idée plus précise des techniques utilisées dans les articles de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber, nous présentons un des théorèmes qui interviennent dans la preuve des estimées de volume et sa démonstration : le théorème de transformation. Nous avons choisi ce dernier car sa preuve est représentative de certaines des techniques communes aux trois derniers articles des auteurs, comme l'utilisation de la démonstration par l'absurde, l'exploitation des interactions entre l'analyse et la géométrie, le passage d'une propriété

analytique ou géométrique d'une échelle donnée aux échelles inférieures. En outre, le théorème de transformation permet d'obtenir une démonstration nouvelle et plus simple de l'existence de cartes bi-Hölder entre l'ensemble régulier d'un espace limite et une variété lisse (le deuxième point du théorème A).

Dans les deux premières sections, nous présentons des exemples de suites de variétés lisses, à courbure de Ricci minorée ou bornée, qui convergent vers des espaces singuliers, puis nous énonçons les définitions, les résultats et les principes de la théorie de Cheeger–Colding qui jouent un rôle important dans la suite.

Dans la troisième section, nous définissons les strates quantitatives, en donnons des exemples, et énonçons le résultat sur les estimées de volume qui permet de prouver le théorème B.

Dans la quatrième section, nous expliquons la structure de la démonstration de ce résultat et présentons ses outils, en particulier les régions collier et le théorème de structure des régions collier.

Dans la section suivante, nous exposons les idées des démonstrations des théorèmes C et D, à la lumière des éléments présentés dans les sections précédentes.

Enfin, la dernière section présente le théorème de transformation, la démonstration par l'absurde de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber, et une preuve alternative proposée par G. Carron.

Remerciements. — Je tiens à remercier A. Naber pour ses réponses détaillées à mes questions ; J. Cheeger et W. Jiang pour leurs retours sur ce texte ; L. Bessières, G. Carron, D. Semola, V. Bour, A. Deruelle et N. Bourbaki pour les échanges fructueux que nous avons eus, leurs relectures et leurs suggestions ; S. Mondello pour les dessins. Merci aussi à mes collègues des équipes de géométrie de l'UPEC et de l'IMJ pour nos nombreuses discussions durant la préparation de ce texte.

1. Exemples d'espaces limites

Nous illustrons dans cette section des exemples d'espaces limites de suites de variétés à courbure de Ricci minorée, qui présentent des singularités de codimension 2, et des suites de variétés dont la courbure de Ricci est bornée, où des singularités de codimension 4 apparaissent.

1.1. Cônes et singularités de codimension 2

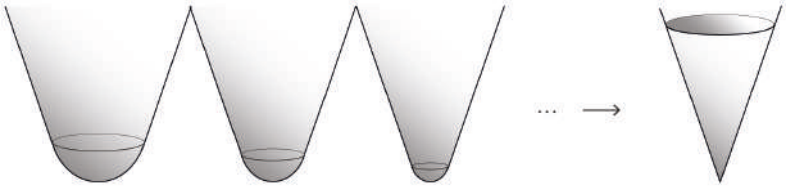
Un cône d'angle α en dimension 2 est le produit de $\mathbb{R}_+$ avec un cercle $\mathbb{S}^1_\alpha$ de longueur $\alpha > 0$, où l'on identifie en un seul point, le sommet du cône o, tous les points de $\{0\} \times \mathbb{S}^1_\alpha$:

$$C(\mathbb{S}^1_\alpha) = [0, +\infty[\times \mathbb{S}^1_\alpha / \sim, \text{ où } \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{S}^1_\alpha,\ (0, \theta_1) \sim (0, \theta_2).$$

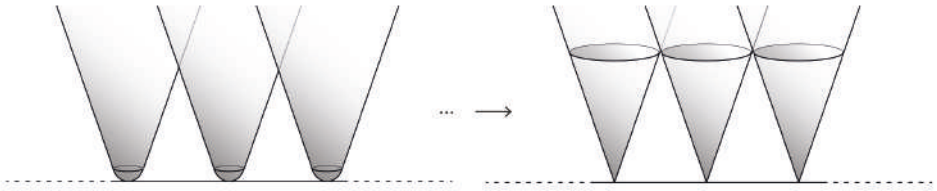
On munit $C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ de la distance d_α définie par la loi du cosinus :

$$d_\alpha((s,\theta_1),(t,\theta_2)) = \sqrt{t^2+s^2-2st\cos(\min\{d(\theta_1,\theta_2),\pi\})},$$

où d est la distance sur $\mathbb{S}^1_\alpha$. Si l'angle du cône α est inférieur ou égal à 2π, $(C(\mathbb{S}^1_\alpha), d_\alpha, o)$ est une limite de variétés lisses à courbure de Ricci positive. En effet, pour une suite de rayons $r_i > 0$, $r_i \to 0$, on peut remplacer la boule centrée en o de rayon r_i, c'est-à-dire le cône tronqué $[0,r_i]\times \mathbb{S}^1_\alpha/\sim$, par une calotte de sphère, en préservant la positivité de la courbure de Ricci. On obtient ainsi une suite de variétés lisses à courbure de Ricci minorée qui converge vers le cône $(C(\mathbb{S}^1_\alpha), d_\alpha, o)$.



Il en résulte que l'espace $X = \mathbb{R}^{n-2}\times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ muni de la distance induite par la métrique produit est une limite de variétés lisses (M^n_i, g_i, x_i) à courbure de Ricci positive. En revanche, nous verrons que X ne peut pas être obtenu comme limite de variétés dont la courbure de Ricci est *bornée*, ce qui joue un rôle important dans la preuve de la conjecture de la codimension 4 (voir la section 5.1 de ce texte).

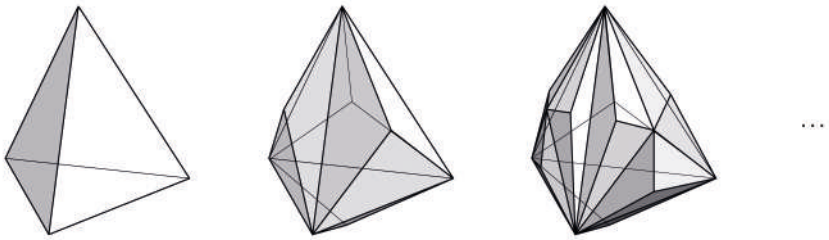


On peut noter qu'un cône $C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ de dimension 2 et d'angle α supérieur à 2π ne peut être limite de variétés à courbure de Ricci minorée. En effet, s'il existait une suite de surfaces (M^2_i, g_i, x_i) convergentes vers $(C(\mathbb{S}^1_\alpha), d_\alpha, o)$, dont la courbure de Ricci est minorée $\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -\lambda$, le cône d'angle supérieur à 2π serait un espace d'Alexandrov de courbure minorée par $-\lambda$, donc non-branchant. Cependant, toutes les géodésiques reliant deux points de $C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ de distance supérieure à 2π et passant par le sommet sont branchantes au sommet.

1.2. Une surface infiniment singulière

Nous allons donner un exemple d'espace limite X dont l'ensemble singulier vérifie bien $\dim_{\mathscr{H}}(\mathscr{S}) \leqslant n-2$, mais tel que pour tout $x \in X$ la mesure $\mathscr{H}^{n-2}(\mathscr{S} \cap B_1(x))$ est infinie (voir l'exemple 3.4 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

On considère un tétraèdre Z^2 centré à l'origine de $\mathbb{R}^3$ dont les côtés ont longueur L. On construit un premier élément d'une suite Z_1^2 de la façon suivante : on attache à chaque face de Z^2 un tétraèdre dont la base coïncide avec la face correspondante de Z^2 et dont la hauteur est $h_1 \ll L$. Pour obtenir Z_2^2 on fait de même avec toutes les faces de Z_1^2, en attachant des tétraèdres d'une hauteur $h_2 < h_1$. On obtient ainsi une suite Z_i^2, avec h_i qui tend vers 0, et telle que Z_i^2 converge au sens de Hausdorff vers une limite $X = Z_\infty^2$. En particulier, X possède une infinité de points singuliers, les sommets, qui appartiennent à la strate $S^0(X)$ et sont denses dans X. Pour chaque point $x \in X$, la boule $B_1(x)$ contient un nombre infini de points singuliers. En outre, X peut être obtenu comme limite de surfaces à courbure sectionnelle positive : on construit une suite M_i^2 en « lissant » chaque Z_i^2, comme on l'a fait pour le sommet d'un cône dans l'exemple 1.1.



1.3. Métrique de Eguchi–Hanson

Des singularités peuvent apparaître même à la limite d'une suite de variétés non effondrées à courbure de Ricci *bornée*. Nous illustrons ici l'exemple le plus simple de ce phénomène, donné par un ré-échelonnement de la métrique de Eguchi–Hanson en dimension 4. Cette dernière, notée g_{EH}, est une métrique lisse qui peut être définie sur le fibré cotangent $T^*\mathbb{S}^2$ de la sphère, ou de façon équivalente sur l'éclatement au sens algébrique de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ à l'origine, que nous notons X. L'espace X peut être vu comme $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ avec, attachée en l'origine, une sphère unitaire $\mathbb{S}^2$.

La métrique de Eguchi–Hanson g_{EH} est une métrique hyperkählerienne qui possède de nombreuses propriétés : en particulier, ce qui nous intéresse dans notre contexte, elle est Ricci plate, c'est-à-dire $\text{Ric}_{g_{\text{EH}}} = 0$, et asymptotiquement localement euclidenne (ALE). À l'infini g_{EH} est asymptotique à la métrique conique de $C(\mathbb{RP}^3)$:

voir par exemple l'article de Biquard, 2013, l'exemple 7.2.2 du livre de Joyce, 2000, ou l'exercice 5 du chapitre 3 dans le livre de Petersen, 2016. Si nous considérons les espaces $(X, r^2 g_{\text{EH}})$ avec la métrique de Eguchi–Hanson ré-échelonnée, ils convergent alors vers le cône $C(\mathbb{RP}^3)$ quand r tend vers 0. Intuitivement, le changement d'échelle transforme la sphère unitaire $\mathbb{S}^2$ qui désingularise l'origine dans X en une sphère de rayon r, qui à la limite pour $r \to 0$ se contracte en un seul point singulier. Ce dernier est le sommet du cône, qui est alors une singularité de codimension 4 dans $C(\mathbb{RP}^3)$.

1.4. Construction(s) de Kummer

À l'aide de la métrique de Eguchi–Hanson, il est possible de construire d'autres exemples de métriques Einstein, Ricci plates, convergeant vers un espace limite qui possède des singularités de type orbifold, dont le modèle local est un cône sur un quotient de la sphère unité par un groupe fini d'isométries.

L'exemple le plus connu est la construction de Kummer sur une surface complexe K3. Il s'agit d'une variété complexe et compacte de dimension 2, donc de dimension réelle 4, simplement connexe et dont le fibré canonique est trivial. D'après un résultat de Kodaira, toutes les surfaces K3 sont difféomorphes : nous pouvons donc parler de *la* surface K3. Observons aussi que la surface K3 est une variété de Calabi–Yau ; grâce à la preuve de la conjecture de Calabi due à S. T. Yau, il existe sur K3 une métrique hyperkähler donc Ricci plate. En réalité, on connaît l'espace des modules des métriques hyperkähler et on sait que, une fois le volume normalisé, il est de dimension réelle 57 : il y a donc beaucoup de métriques Ricci plates sur K3. La construction de Kummer a été proposée par deux physiciens, Gibbons et Pope, 1979, pour décrire de façon plus explicite une métrique Ricci plate sur la surface K3. Elle permet en particulier d'obtenir l'existence d'une suite de métriques lisses g_i sur K3, Ricci plates, telles que $(\text{K3}, g_i)$ converge vers $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ et développe donc 16 singularités isolées. Puisque les singularités $\{p_1, \dots, p_{16}\}$ de $\mathbb{T}^4/\mathbb{Z}_2$ sont modelées sur $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, l'idée de la construction de Kummer consiste à désingulariser chaque p_i en remplaçant un voisinage de p_i par l'éclatement de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ décrit ci-dessus, et en le munissant de la métrique de Eguchi–Hanson. Il faut ensuite recoller ces éclatements pour obtenir une seule métrique Kähler, Ricci plate sur la surface K3. Il n'est pas trivial de démontrer rigoureusement qu'il est possible de faire ce recollement : nous pouvons citer les preuves données par Biquard et Minerbe, 2011 ; Donaldson, 2012 ; LeBrun et Singer, 1994 ; Topiwala, 1987.

Observons qu'en faisant un changement d'échelle approprié autour d'un point $x \in \text{K3}$, choisi de façon à être Gromov–Hausdorff proche d'une singularité p_i, les métriques g_i convergent vers la métrique g_{EH}. Ceci est un cas particulier, et l'exemple prototype, d'un phénomène propre aux limites de variétés Einstein en dimension 4 : la limite possède des singularités orbifolds modelées sur des variétés ALE Ricci plates. Nous renvoyons aux notes de Foscolo, 2018, pour une exposition plus précise.

D'autres constructions inspirées par celle de Kummer existent pour des singularités non isolées en dimension supérieure : D. Joyce a en effet donné de nombreux exemples de suites de variétés Einstein qui convergent vers des tores orbifolds $\mathbb{T}^n/\Gamma$, en dimension $n = 7$ et $n = 8$, où Γ est un groupe fini d'isométries, voir par exemple les chapitres 11 et 12 du livre de Joyce, 2000, ou l'article du même auteur, Joyce, 2004. En dimension 7, les singularités sont localement de la forme $\mathbb{R}^3 \times (\mathbb{C}^2/G)$ ou $\mathbb{R} \times (\mathbb{C}^3/G)$, respectivement pour un groupe fini G de SU(2) ou de SU(3). À l'aide de résultats de géométrie algébrique complexe, il est possible de désingulariser les quotients $\mathbb{C}^2/G$ et $\mathbb{C}^3/G$ avec des « résolutions crépantes », analogues à l'éclatement en l'origine de $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Grâce à des résultats de P. Kronheimer et D. Joyce, il existe des métriques Ricci plates, ALE, asymptotiques à l'infini aux métriques euclidiennes sur $\mathbb{C}^2/G$ et $\mathbb{C}^3/G$. Une procédure de recollement sophistiquée permet alors d'obtenir des variétés compactes Einstein convergentes vers $\mathbb{T}^7/\Gamma$. Notons que l'un des intérêts et des motivations de ces constructions est que les variétés obtenues fournissent des exemples de variétés à holonomie spéciale, G_2 en dimension 7 et Spin(7) en dimension 8.

2. Préliminaires : la théorie de Cheeger–Colding

Dans cette section nous donnons les définitions utiles dans la suite, puis nous rappelons quelques éléments essentiels de la théorie de Cheeger–Colding, en nous concentrant sur les idées qui interviennent également dans les articles de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, Cheeger et Naber, 2015, et Jiang et Naber, 2021. Nous résumons les résultats qui ont mené à la définition de la stratification classique et à la démonstration du théorème A, qui contient plusieurs de résultats obtenus dans les travaux de J. Cheeger et T. H. Colding datant de 1996 à 2000. Nous renvoyons aussi aux notes de Cheeger, 2001, qui donnent une vision d'ensemble de nombreux éléments et des techniques de la théorie.

2.1. Définitions

La géométrie locale autour des singularités des espaces limites que nous considérons est modelée sur des cônes métriques, définis comme suit.

Définition 2.1. Soit (Y, d^Y) un espace métrique. Le *cône sur* Y est l'espace métrique $(C(Y), d)$ où $C(Y) = [0, +\infty[\times Y/\sim$ avec $(0, y_1) \sim (0, y_2)$ pour tout $y_1, y_2 \in Y$ et la distance d entre deux points (s, y_1) et (t, y_2) est donnée par la règle du cosinus :

$$d((s, y_1), (t, y_2)) = \sqrt{t^2 + s^2 - 2ts\cos(\min\{d^Y(y_1, y_2), \pi\})}.$$

On note o le sommet du cône $C(Y)$.

Un espace métrique (Z, d^Z) est un cône métrique par rapport à $z \in Z$ s'il existe un espace métrique (Y, d^Y) et une isométrie $\varphi : Z \to C(Y)$ telle que $\varphi(z) = o$.

Définition 2.2. Un espace métrique (X, d) est dit *k-symétrique* par rapport à $x \in X$ s'il existe un espace métrique (Y, d^Y) et une isométrie $\varphi : X \to \mathbb{R}^k \times C(Y)$ telle que $\varphi(x) \in \mathbb{R}^k \times \{o\}$.

Un espace k-symétrique est toujours un cône métrique : en effet, $\mathbb{R}^k \times C(Y)$ est isométrique à un cône $C(Z)$, où Z est une k-suspension sphérique de Y.

Afin de définir les strates quantitatives dans la section 4, on se sert d'une « quantification » de la k-symétrie : pour une boule dans un espace métrique, on souhaite pouvoir dire combien, et à quelle échelle, la boule est proche au sens de Gromov–Hausdorff d'une boule k-symétrique. Nous notons par $B_r(x)$ une boule de rayon r centrée en un point x d'un espace métrique, et par $\mathbb{B}^k_r$ une boule euclidienne de rayon r centrée en $0^k \in \mathbb{R}^k$. Pour un sous-ensemble A d'un espace métrique (X, d) nous notons par $B_r(A)$ le voisinage tubulaire de taille r de A : $B_r(A) = \{x \in X,\ d(x, A) < r\}$.

Nous renvoyons au chapitre 7 du livre de D. Burago, Y. Burago et Ivanov, 2001, pour la définition de la Gromov–Hausdorff proximité et des presque isométries.

Définition 2.3. Une boule $B_r(x)$ dans un espace métrique (X, d) est (k, ε)-*symétrique* s'il existe un espace métrique $\mathbb{R}^k \times C(Y)$ tel que

$$\mathrm{d_{GH}}(B_r(x), B_r^{\mathbb{R}^k \times C(Y)}(0^k, o)) < \varepsilon r.$$

On peut observer que cette définition équivaut à dire qu'avec le changement d'échelle $\tilde{d} = r^{-1}d$, qui transforme la boule $B_r(x)$ en une boule unité pour $\tilde{d}$, la boule $\tilde{B}_1(x)$ dans $(X, \tilde{d})$ est ε-proche de la boule unité k-symétrique $B_1^{\mathbb{R}^k \times C(Y)}(0^k, o)$. On remarque aussi que la propriété de (k, ε)-symétrie ne passe pas nécessairement aux échelles inférieures : en raison du changement d'échelle, si une boule $B_r(x)$ est (k, ε)-symétrique, une boule $B_s(x)$ pour $s < r$ peut ne pas l'être, car sa distance de la boule k-symétrique $B_s^{\mathbb{R}^k \times C(Y)}(0^k, o)$ n'est pas forcément contrôlée par εs.

Dans le cadre des variétés lisses à courbure de Ricci minorée, il est possible de traduire en termes analytiques la propriété géométrique de (k, ε)-symétrie, à l'aide de la notion de (k, δ)-*splitting* harmonique.

Définition 2.4. Soit (M^n, g) une variété lisse. Une application $u = (u^1, \dots, u^k) : B_r(p) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, δ)-*splitting harmonique* si elle satisfait :

1. $\Delta u^i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, k$.
2. $\fint_{B_r(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - \delta^{ij}| dv_g < \delta$.
3. $\sup_{B_r(p)} |\nabla u| < 1 + \delta$.
4. $r^2 \fint_{B_r(p)} |\nabla^2 u|^2 dv_g < \delta^2$,

où nous avons noté $\fint_{B_r(p)} f dv_g = \dfrac{1}{\mathrm{vol}_g(B_r(p))} \displaystyle\int_{B_r(p)} f dv_g$.

Comme la propriété de (k,ε)-symétrie, le fait d'être un (k,δ)-splitting sur une boule $B_r(p)$ ne passe pas nécessairement aux échelles inférieures : en effet, si on restreint un (k,δ)-splitting $u : B_r(p) \to \mathbb{R}^k$ à une boule $B_s(p)$ avec $s < r$, les propriétés 2 et 4 ne sont pas nécessairement préservées, à cause de la moyenne qui apparaît dans les deux intégrales.

Cheeger et Colding, 1996, ont démontré qu'il existe une constante dimensionnelle $C(n)$ telle que pour ε, δ opportunément choisis, si $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta$ et $B_2(p)$ est (k,ε)-symétrique, alors il existe une application harmonique u de $B_1(p)$ dans $\mathbb{R}^k$ satisfaisant la condition 2 et dont le gradient est borné par $C(n)$. Réciproquement, l'existence d'une telle fonction garantit la GH-proximité à une boule k-symétrique. La preuve du lemme 3.34 de Cheeger et Naber, 2015, permet d'affirmer que u peut être choisie de plus comme un (k,δ)-splitting : cela est résumé par le résultat suivant.

Proposition 2.5 (Cheeger et Naber, 2015, Lemme 1.21). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, dépendant de ε, n, tel que pour toute variété (M^n, g) avec $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta$:*

1. *S'il existe un (k,δ)-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$, alors $B_1(p)$ est (k,ε)-symétrique.*
2. *Si $B_4(p)$ est (k,δ)-symétrique, alors il existe un (k,ε)-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$.*

On définit également la k-rectifiabilité, utilisée dans les théorèmes B et 3.8 :

Définition 2.6. Un espace métrique (X,d) est *k-rectifiable* s'il existe une collection dénombrable $\{X_i\}_{i\in I}$ de sous-ensembles de X, mesurables pour la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^k$ et telle que :

1. $\mathscr{H}^k(X \setminus \bigcup_{i\in I} X_i) = 0$.
2. Pour tout $i \in I$, il existe une application $\phi_i : X_i \to \mathbb{R}^k$ bi-Lipschitz sur son image.

2.2. Cônes tangents et stratification classique

Tout au long de cette section nous considérons un espace métrique pointé (X,d,p) obtenu comme limite d'une suite de variétés Riemanniennes lisses (M_i^n, g_i, p_i) telles que

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1) \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

La géométrie locale en un point de X est décrite par les cônes tangents, définis comme suit.

Définition 2.7. Un espace métrique (X_x, d_x, x) est un *cône tangent à X en x* s'il existe une suite r_i tendant vers 0 telle que

$$(X, r_i^{-1}d, x) \to (X_x, d_x, x).$$

En général, le cône tangent en un point n'est pas unique, comme l'ont montré les exemples donnés par les articles de Cheeger et Colding, 1997 (voir exemple 8.41), ou de Colding et Naber, 2013. Dans le cas des espaces limites que nous considérons, un cône tangent est aussi limite d'une sous-suite de variétés lisses pointées $(M^n_{i_j}, \tilde{g}_{i_j}, x_{i_j})$ munies de la métrique ré-échelonnée $\tilde{g}_{i_j} = r_{i_j}^{-2} g_{i_j}$. Nous avons alors $\mathrm{Ric}_{\tilde{g}_{i_j}} \geqslant -(n-1) r_{i_j}^2$; si de plus la courbure de Ricci est bornée par $(n-1)$ nous obtenons $\| \mathrm{Ric}_{\tilde{g}_{i_j}} \| \leqslant (n-1) r_{i_j}^2$ avec r_{i_j} qui tend vers 0.

Exemple 2.8. Pour le produit $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, les cônes tangents sont uniques en tout point ; ils coïncident avec l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ en dehors des sommets $x_* \in \mathbb{R}^{n-2} \times \{o\}$. En un sommet x_*, le cône tangent est donné par X, car un cône est invariant par les dilatations qui fixent le sommet.

L'un des résultats fondamentaux de la théorie de Cheeger–Colding affirme que pour tout cône tangent X_x il existe k tel que X_x est k-symétrique. Pour prouver cela, la première étape consiste à montrer que les cônes tangents sont des cônes métriques au sens de la Définition 2.1. Cela a été démontré dans le théorème 5.2 de Cheeger et Colding, 1997 : la preuve se sert du non effondrement et du théorème « presque cône en volume implique presque cône métrique », que nous rappelons dans la section ci-dessous. L'hypothèse de non effondrement est cruciale ; en effet, dans le cas des limites effondrées, il existe des exemples où le cône tangent n'est pas un cône métrique (voir l'exemple 8.95 du même article de 1997). Deuxièmement, un argument d'éclatement et le théorème de scindement pour les espaces limites, énoncé dans le théorème 9.7 des notes de Cheeger, 2001, permettent d'obtenir la k-symétrie. Nous définissons alors, pour un espace limite (X, d, p),

$$S^k(X) = \{x \in X \text{ tel que aucun cône tangent } X_x \text{ en } x \text{ n'est } (k+1)\text{-symétrique}\}.$$

En d'autres termes, $S^k(X)$ est l'ensemble des points dont les cônes tangents possèdent au plus k symétries. Cela permet d'obtenir une filtration de l'espace limite :

$$S^0(X) \subset S^1(X) \subset \ldots \subset S^{n-1}(X) \subset X.$$

Nous désignons la *k-ième strate singulière* par $\Sigma^k(X) = S^k(X) \setminus S^{k-1}(X)$, l'*ensemble singulier* de X par $\mathscr{S} = S^{n-1}(X)$ et l'*ensemble régulier* par $\mathscr{R} = X \setminus \mathscr{S}$.

Exemple 2.9. Pour le produit $X = \mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, l'ensemble singulier coïncide avec la strate singulière de codimension 2, qui est constituée par l'ensemble des sommets : $S^{n-2}(X) = \Sigma^{n-2}(X) = \mathbb{R}^{n-2} \times \{o\}$.

Remarque 2.10. L'inégalité de Bishop–Gromov, que nous rappelons ci-dessous, et la continuité du volume, prouvée par Colding, 1997 (voir aussi le théorème 9.31 des notes de Cheeger, 2001), impliquent que pour tout x dans la strate singulière $\Sigma^{n-2}(X)$ de l'espace limite X il existe un cône tangent X_x de la forme $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha \in]0, 2\pi[$. Nous renvoyons également vers le théorème 4.2 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021.

2.3. Presque cône en volume implique presque cône métrique

Le théorème « presque cône en volume implique presque cône métrique » est une des étapes clefs pour montrer que les cônes tangents sont des cônes métriques (voir le théorème 3.6 de Cheeger et Colding, 1996, et le théorème 9.45 des notes de Cheeger, 2001). Il relie le pincement d'une quantité monotone, le *rapport de volume*, et la géométrie d'une boule. Le fait de mettre en relation des propriétés géométriques avec le contrôle d'une quantité monotone représente un élément important de la théorie de Cheeger–Colding. C'est en effet une idée commune à différents problèmes d'étude de la régularité et de l'ensemble singulier des solutions d'une équation géométrique. On peut citer par exemple les applications harmoniques minimisantes (Naber et Valtorta, 2017a, Simon, 1996) ou bi-harmoniques (Breiner et Lamm, 2015), les connexions de Yang–Mills stationnaires (Naber et Valtorta, 2019), les solutions d'équations elliptiques (Naber et Valtorta, 2017b). Le point de départ commun dans ces différents problèmes consiste à se servir d'une quantité monotone, qui possède des propriétés de rigidité, pour obtenir des informations sur les symétries de l'ensemble singulier. Nous renvoyons à la section 1.4 de l'article de Naber et Valtorta, 2017a, et au livre de Simon, 1996, pour une exposition détaillée de ce principe.

Dans le contexte des espaces limites de variétés à courbure de Ricci minorée, la quantité monotone utilisée dans la théorie de Cheeger–Colding est le *rapport de volume*. Pour une variété (M^n, g) avec $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta$, le rapport de volume est défini par

$$\mathscr{V}_r(p) = \frac{\mathrm{vol}_g(B_r(p))}{v_{-\delta}(r)}, \tag{1}$$

où $v_{-\delta}(r)$ est le volume d'une boule de rayon r dans la variété à courbure constante égale à $-\delta$. L'inégalité classique de Bishop–Gromov affirme que $\mathscr{V}_r(p)$ est décroissant avec le rayon. Le résultat suivant affirme que si le *pincement du rapport de volume* est assez petit en un point, une boule autour de ce point est proche d'une boule dans un cône métrique (voir aussi la section 4.1 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Théorème 2.11. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$, dépendant de ε, n, tel que pour toute variété (M^n, g) telle que $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta$, si $p \in M$ satisfait $\mathscr{V}_2(p) \geqslant (1-\delta)\mathscr{V}_1(p)$, alors $B_1(p)$ est $(0, \varepsilon)$-symétrique.*

Cheeger et Naber, 2013a, ont étendu ce théorème pour détecter non seulement la $(0,\varepsilon)$-symétrie, mais aussi la proximité en topologie de Gromov–Hausdorff à une boule k-symétrique, pour $k \geqslant 1$: ils montrent qu'une boule est (k,ε)-symétrique sous une hypothèse plus sophistiquée de pincement du rapport de volume (voir aussi les théorèmes 4.6 et 4.9 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021). La relation entre le pincement d'une quantité monotone en un point et les propriétés analytiques et géométriques des boules jouent également un rôle important dans les travaux de Cheeger et Naber, 2015, Jiang et Naber, 2021, et Cheeger, Jiang et Naber, 2021 (voir les sections 4.3 et 5.2 de ce texte).

2.4. Le théorème A et la partie régulière de l'espace limite

Le premier point du théorème A affirme que la strate singulière de dimension $(n-1)$ est vide. La démonstration se sert d'un raisonnement par l'absurde : s'il existait un point x dans $\Sigma^{n-1}(X)$, alors il admettrait un cône tangent X_x de la forme $\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}_+$. Or, ceci est un demi-espace ayant pour bord $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$. J. Cheeger et T. H. Colding montrent qu'un tel demi-espace ne peut être obtenu comme limite de variétés sans bord, non effondrées, dont la courbure Ricci vérifie $\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant \delta_i$ avec δ_i qui tend vers 0. On peut trouver cette démonstration dans la section 6 de Cheeger et Colding, 1997, ou la démonstration du théorème 10.22 des notes de Cheeger, 2001.

Pour la démonstration de l'inégalité $\dim_{\mathscr{H}} S^k \leqslant k$, nous renvoyons au théorème 4.7 de Cheeger et Colding, 1997, et au théorème 10.20 des notes de Cheeger, 2001. Nous nous concentrons dans la suite sur les ingrédients principaux de la démonstration du deuxième point, c'est-à-dire le fait qu'un ouvert U_ε de l'espace limite, contenant la partie régulière $\mathscr{R}$, est bi-Hölder homéomorphe à une variété lisse. Pour $\varepsilon > 0$, l'ensemble U_ε du théorème A est donné par

$$U_\varepsilon = \left\{ x \in X \text{ tel que } \theta(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^n(B_r(x))}{\omega_n r^n} \geqslant 1-\varepsilon \right\},$$

où ω_n est le volume de la boule unité euclidienne et $\theta(x)$ est la *densité* au point x. À cause de la continuité du volume et de l'inégalité de Bishop–Gromov, pour tout $x \in X$ nous savons que $\theta(x) \leqslant 1$; l'ensemble régulier $\mathscr{R}$ coïncide avec l'ensemble des points de densité égale à 1.

Remarque 2.12. Dans l'exemple 1.2, l'ensemble singulier de Z^2_∞ est dense. Néanmoins, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, U_ε est constitué de Z^2_∞ privé d'un nombre fini de points. En effet, chaque surface Z^2_i de la suite est plate et, en dehors des sommets, le volume des boules est euclidien, donc pour tout $x \in Z^2_i$, sauf les sommets, la densité $\theta(x)$ est égale à 1. En un sommet x_i, la densité dépend de la proximité de l'angle α en x_i à 2π : $\theta(x_i) = 1-\varepsilon(\alpha)$, où $\varepsilon(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers 2π.

Fixons $\alpha \in]0, 2\pi[$ tel que $\varepsilon(\alpha) < \varepsilon$. Puisque la hauteur h_i des tétraèdres qui composent Z_i^2 tend vers zéro quand i tend vers l'infini, pour chaque i il y a un nombre fini de sommets dont l'angle est strictement inférieur à α. En particulier, à la limite Z_∞^2, il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers $\{x_\infty^1, \dots, x_\infty^N\}$ qui sont limites de sommets d'angle strictement inférieur à α. D'autre part, si la boule $B_r(x_i) \subset Z_i^2$ centrée en un sommet ne contient que des sommets d'angle supérieur à α, alors

$$\mathrm{vol}_i\left(B_r(x_i)\right) \geqslant (1 - \varepsilon(\alpha))\, r^2 \omega_n.$$

À cause de la continuité du volume, si $B_r(x_\infty) \subset Z_\infty^2$ est la limite des boules $B_r(x_i)$, on obtient

$$\mathscr{H}^2\left(B_r(x_\infty)\right) \geqslant (1 - \varepsilon(\alpha))\, \omega_n r^n,$$

donc la densité en x_∞ est supérieure ou égale à $1 - \varepsilon(\alpha)$. Avec notre choix de α, pour tout x dans Z_∞^2 privé de $\{x_\infty^1, \dots, x_\infty^N\}$, la densité vérifie alors $\theta(x) \geqslant 1 - \varepsilon$. Il y a donc un nombre fini de points dont la densité est strictement inférieure à $(1 - \varepsilon)$, en dehors desquels Z_∞^2 est bi-Hölder homéomorphe à une variété. Cet exemple montre en particulier que dans le cas des limites à courbure de Ricci minorée, l'inclusion $\mathscr{R} \subset U_\varepsilon$ est en général stricte.

D'après la convergence du volume et le théorème 9.69 des notes de Cheeger, 2001, si la densité en x est proche de 1, alors une boule unité centrée en x est (n, ε)-symétrique. La construction de cartes bi-Hölder entre des boules de U_ε et $\mathbb{R}^n$ repose alors sur le résultat suivant, qui se trouve dans la section « Reifenberg's method » du chapitre 9 des notes de Cheeger, 2001, et dans les théorèmes A.1.1 et A.1.2 de l'article de Cheeger et Colding, 1997.

Théorème 2.13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\varepsilon_0(n)$ et $\alpha(\varepsilon) \in]0, 1[$ tels que pour tout espace limite (X, d, p), tout $\varepsilon < \varepsilon_0(n)$ et tout point x tel que*

$$\mathrm{d_{GH}}(B_2(x), \mathbb{B}_2^n) < \varepsilon, \tag{2}$$

il existe une application $\varphi : B_1(x) \to \mathbb{B}_1^n$ telle que

1. *$\varphi(B_1(p))$ contient une boule $\mathbb{B}_r$, $r = 1 - \psi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon) \to 0$ quand ε tend vers 0 ;*
2. *φ est un homéomorphisme $\alpha(\varepsilon)$-bi-Hölder entre $B_1(p)$ et son image, c'est-à-dire pour tout $y, z \in B_1(x)$: $C^{-1} d(y,z)^{\alpha(\varepsilon)} \leqslant \|\varphi(y) - \varphi(z)\| \leqslant C d(y,z)^{\alpha(\varepsilon)}$. De plus $\alpha(\varepsilon) \to 1$ quand $\varepsilon \to 0$.*

Pour passer de l'inégalité (2) à l'existence d'un homéomorphisme bi-Hölder, J. Cheeger et T. H. Colding se sont inspirés des travaux de E. G. Reifenberg : si la GH-proximité à une boule euclidienne $\mathbb{B}_r^n$ est vraie non seulement à l'échelle 2, mais aussi à toutes les échelles r plus petites, nous disons que la boule $B_2(p)$ satisfait la propriété de Reifenberg. Il est alors possible d'obtenir l'homéomorphisme recherché

avec une construction originairement due à Reifenberg, 1960 (voir aussi les notes de Naber, 2020). L'élément clef dans la démonstration du théorème précédent consiste donc à démontrer la propagation aux échelles plus petites de la GH-proximité, ce qui est résumé par le résultat suivant (voir le Théorème 9.73 des notes de Cheeger, 2001, et le Théorème 4.3 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Théorème 2.14. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, dépendant de ε, n et v, tel que pour toute variété lisse (M^n, g) avec $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta$ et $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$, si $B_4(p)$ est (n,δ)-symétrique, alors toute boule $B_r(x) \subset B_3(p)$ est (n,ε)-symétrique.*

Dans la suite de ce texte, nous allons retrouver ce principe : une certaine propriété, vraie pour une échelle fixée, doit être propagée aux échelles inférieures, sous les bonnes hypothèses et avec souvent beaucoup de travail (voir les sections 4.2 et 5.1).

2.5. Courbure de Ricci bornée

Si (X, d, p) est la limite d'une suite de variétés (M_i^n, g_i, p_i) telles que $\| \mathrm{Ric}_{g_i} \| \leqslant (n-1)$ et $\mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > 0$, on dispose d'informations supplémentaires sur l'ensemble régulier, grâce au résultat suivant de « ε-régularité », dû à M. Anderson, qui concerne le rayon harmonique (voir la définition 2.9 dans l'article de Cheeger et Naber, 2015).

Théorème 2.15 (Lemme 2.2, Anderson, 1990)**.** *Il existe $\varepsilon(n, v)$ tel que pour toute variété (M^n, g) telle que $\| \mathrm{Ric}_g \| \leqslant \varepsilon$ et $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$, si*

$$\mathrm{vol}_g(B_r(p)) \geqslant (1-\varepsilon)\omega_n r^n, \tag{3}$$

alors le rayon harmonique vérifie $r_h(p) \geqslant r/2$.

La continuité du volume prouvée par T. H. Colding assure qu'on peut remplacer (3) par une hypothèse de (n,ε)-symétrie de la boule $B_r(p)$.

Une des conséquences du théorème précédent est que si $\varepsilon \leqslant \varepsilon(n, v)$ et $x \in X$ appartient à l'ensemble U_ε donné par le théorème A, alors x est un point régulier : par continuité du volume, il est en effet la limite de points x_i qui satisfont (3) et dont le rayon harmonique ne tend par vers 0. Par conséquent, l'ensemble régulier $\mathscr{R}$ coïncide avec l'ouvert U_ε. En particulier, dans le cas de courbure de Ricci bornée, des situations comme celle de l'exemple 1.2 ne peuvent pas se produire, car l'ensemble régulier est ouvert. Le théorème de ε-régularité joue également un rôle important dans la démonstration de la conjecture de la codimension 4 de J. Cheeger et A. Naber (voir la section 5.1).

3. La stratification quantitative

Un des outils importants dans les travaux de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber est la *stratification quantitative*. D'un point de vue purement géométrique, nous pouvons considérer l'affirmation « x appartient à $S^k(X)$ » comme une propriété de rigidité pour les cônes tangents en x : ils ne possèdent pas $k+1$ symétries. Les strates quantitatives ont comme but de « quantifier » combien les cônes tangents sont loin de posséder $k+1$ symétries. Cela permet d'obtenir des informations analytiques et géométriques plus fines que celles qui peuvent être déduites de la stratification classique.

La stratification quantitative a été introduite dans le cadre des espaces limites dans l'article de Cheeger et Naber, 2013a, qui s'inspire des travaux précédents de Cheeger, 2012, et de Cheeger et Naber, 2013b, ce dernier concernant les applications harmoniques. Les techniques liées à la stratification quantitative ont été utilisées dans de nombreux travaux, à la fois dans le contexte des limites de variétés dans tous les travaux successifs de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber, et dans ceux de Bamler, 2017, et Bamler, 2018, dans le cadre des espaces métriques mesurés avec des bornes synthétiques ou d'Alexandrov sur la courbure, par exemple dans les travaux de Mondino et Naber, 2019, Antonelli, Brué et Semola, 2019 et Li et Naber, 2020, et dans l'étude des solutions d'équations différentielles géométriques. Nous pouvons citer par exemple les articles de Breiner et Lamm, 2015 ; Cheeger, Haslhofer et Naber, 2013, 2015 ; De Lellis et al., 2018 ; Edelen et Engelstein, 2019 ; Focardi, Marchese et Spadaro, 2015 ; Naber et Valtorta, 2017a,b, 2019 ; Naber, Valtorta et Veronelli, 2019.

Les strates quantitatives sont définies comme suit :

Définition 3.1 ((ε, r)-strates quantitatives)**.** Soit (X, d, p) un espace métrique pointé. Pour $\varepsilon, r > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, on définit :

$$S^k_{\varepsilon,r}(X) = \{x \in B_1(p) \text{ t.q. pour tout } s \in [r, 1[, B_s(x) \text{ n'est pas } (k+1, \varepsilon)\text{-symétrique}\}.$$

La k-ième (ε, r)-strate quantitative autour de p est alors $\Sigma^k_{\varepsilon,r}(X) = S^k_{\varepsilon,r}(X) \setminus S^{k-1}_{\varepsilon,r}(X)$, où nous posons $S^{-1}_{\varepsilon,r}(X) = \emptyset$.

Les propriétés suivantes des (ε, r)-strates quantitatives découlent immédiatement de la définition :

$$S^k_{\varepsilon,r}(X) \subset S^k_{\varepsilon,R}(X) \quad \text{si } r \leqslant R, \quad S^k_{\eta,r}(X) \subset S^k_{\varepsilon,r}(X) \quad \text{si } \varepsilon \leqslant \eta.$$

Définition 3.2 (ε-strates quantitatives)**.** Soit (X, d) un espace métrique. Pour $\varepsilon > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ nous définissons :

$$S^k_{\varepsilon}(X) = \{x \in B_1(p) \text{ t.q. pour tout } r \in]0, 1[, B_r(x) \text{ n'est pas } (k+1, \varepsilon)\text{-symétrique}\}.$$

De façon équivalente :

$$S^k_\varepsilon(X) = \bigcap_{r>0} S^k_{\varepsilon,r}(X).$$

La k-ème ε-strate quantitative est alors $\Sigma^k_\varepsilon(X) = S^k_\varepsilon(X) \setminus S^{k-1}_\varepsilon(X)$, où nous posons $S^{-1}_\varepsilon(X) = \emptyset$.

Nous avons la relation suivante entre strates classiques et quantitatives :

Lemme 3.3. *Soit (X, d, p) un espace limite d'une suite de variétés non effondrées à courbure de Ricci uniformément minorée. Alors*

$$S^k(X) \cap B_1(p) = \bigcup_{\varepsilon>0} S^k_\varepsilon(X).$$

Grâce à ce lemme, les résultats sur les strates quantitatives permettent d'obtenir des informations sur les strates classiques.

3.1. Exemples de strates quantitatives

Commençons par donner des exemples de strates quantitatives dans des cas simples. Notons en particulier que même pour une variété lisse (M^n, g), $S^k_{\varepsilon,r}(M)$ n'est pas nécessairement vide. En effet, considérons le complémentaire de $S^k_{\varepsilon,r}(M)$:

$$(S^k_{\varepsilon,r}(M))^c = \{x \in B_1(p) \text{ t.q. } \exists s \in [r, 1[\text{ t.q. } B_s(x) \text{ est } (k+1, \varepsilon)\text{-symétrique } \}.$$

Pour un point $x \in M^n$ et $\varepsilon > 0$ fixés, il existe toujours un rayon $r_0(\varepsilon, x)$ assez petit pour que la boule $B_{r_0}(x)$ soit (n, ε)-symétrique, et donc tel que $x \in (S^k_{\varepsilon,r_0}(M))^c$ pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Mais si r_0 est strictement inférieur à l'échelle fixée r, il se peut que x n'appartienne pas à $(S^k_{\varepsilon,r}(M))^c$. Par conséquent, $(S^k_{\varepsilon,r}(M))^c$ ne coïncide pas nécessairement avec la totalité de la variété M^n, et $S^k_{\varepsilon,r}(M)$ peut être non vide (voir également l'exemple 3.7).

Exemple 3.4. Considérons un cône de dimension 2, $X = C(\mathbb{S}^1_\alpha)$. Dans ce cas il n'y a qu'une seule strate singulière $S(X) = S^0(X)$ constituée du sommet du cône. Nous omettrons donc l'indice 0 dans la suite. Nous commençons par décrire une ε-strate quantitative $S_\varepsilon(X)$.

On observe tout d'abord que l'angle du cône $\alpha \leqslant 2\pi$ détermine la proximité de X au plan euclidien $\mathbb{R}^2$: pour un angle α très proche de 2π, les boules $B_s(o)$ centrées au sommet sont GH-proches d'une boule euclidienne. Néanmoins, un cône d'angle strictement inférieur à 2π n'est pas isométrique à $\mathbb{R}^2$. Il existe donc $\varepsilon_0 > 0$ dépendant de l'angle tel que pour tout $\varepsilon > \varepsilon_0$, les boules $B_s(0)$ sont $(2, \varepsilon)$-symétriques, donc le sommet o n'appartient pas à $S_\varepsilon(X)$; pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, les boules $B_s(o)$ ne sont pas $(2, \varepsilon)$-symétriques et $o \in S_\varepsilon(X)$. De plus, en dehors du sommet, X est une variété

lisse. Ainsi, comme observé ci-dessus, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in X \setminus \{o\}$ il existe $r_0(d(x,o),\varepsilon)$ tel que pour tout $r \leqslant r_0$, $x \notin S_{\varepsilon,r}(X)$. Il y a donc deux possibilités pour l'ensemble $S_\varepsilon(X)$: si $\varepsilon > \varepsilon_0$, $S_\varepsilon(X)$ est vide, sinon il coïncide avec le sommet du cône.

Le même argument s'applique à un cône $C(M)$ sur une variété lisse (M^n, g) de diamètre inférieur ou égal à π et aux produits $\mathbb{R}^k \times C(M)$.

Exemple 3.5. Considérons les espaces introduits dans l'exemple 1.2. L'ensemble singulier $S^0(Z_i^2)$ est constitué par un nombre fini de points, les sommets $z_1, \ldots, z_N$. En argumentant comme dans l'exemple précédent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe trois possibilités pour l'ε-strate singulière, dépendant des angles aux sommets : $S_\varepsilon(Z_i^2)$ peut être vide, constituée d'un sous-ensemble de $S(Z_i^2)$ dépendant des angles aux sommets z_j, ou coïncider avec $S(Z_i^2)$.

Exemple 3.6. Reprenons $X = C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ comme dans l'exemple 3.4 et décrivons une (ε, r)-strate quantitative $S_{\varepsilon,r}(X)$ pour $\varepsilon, r > 0$ fixés.

Supposons que la boule unité $B_1(o)$ du cône n'est pas 2ε-proche de la boule euclidienne $\mathbb{B}^2_1$:

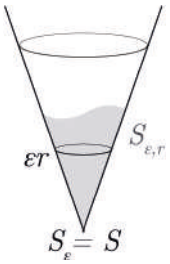
$$\mathrm{d_{GH}}(B_1(o), \mathbb{B}^2_1) \geqslant 2\varepsilon.$$

Puisque le cône est invariant par homothétie, pour tout $s > 0$

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), \mathbb{B}^2_s) \geqslant 2\varepsilon s,$$

donc aucune boule centrée au sommet n'est $(2, 2\varepsilon)$-symétrique.
Montrons alors que

$$B_{\varepsilon r}(o) \subset S_{\varepsilon,r}(X).$$



Pour $x \in X$ tel que $d(x,o) < \varepsilon r$ et pour $s \in [r, 1[$, on a

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), B_s(x)) = d(x,o) < \varepsilon r \leqslant \varepsilon s.$$

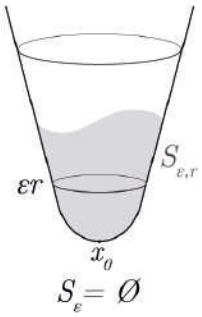
Or, pour tout s la boule $B_s(o)$ n'est pas $(2, 2\varepsilon)$-symétrique.
Si $B_s(x)$ était $(2,\varepsilon)$-symétrique, l'inégalité triangulaire impliquerait :

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), \mathbb{B}^2_s(0)) \leqslant \mathrm{d_{GH}}(B_s(o), B_s(x)) + \mathrm{d_{GH}}(B_s(x), \mathbb{B}^2_s(0)) < 2\varepsilon s.$$

On en déduit que si $x \in B_{\varepsilon r}(o)$, pour tout $s \in [r, 1[$ la boule $B_s(x)$ n'est pas $(2,\varepsilon)$-symétrique, ce qui signifie $x \in S_{\varepsilon,r}(X)$. Par conséquent, $B_{\varepsilon r}(o) \subset S_{\varepsilon,r}(X)$.

De la même façon on peut montrer que pour un produit $X = \mathbb{R}^k \times C(M)$, où M est une variété lisse de diamètre strictement inférieur à π, pour ε assez petit dépendant du diamètre de M, l'(ε, r)-strate quantitative contient un voisinage tubulaire de taille εr de $S^k(X)$: $B_{\varepsilon r}(S^k(X)) \subset S^k_{\varepsilon,r}(X)$.

Exemple 3.7. Fixons $\varepsilon, r > 0$, considérons un cône $X = C(\mathbb{S}^1_a)$ tel que $B_1(o)$ n'est pas (4ε)-proche de la boule euclidienne $\mathbb{B}^2_1$. Soit (M^2, g, x_0) une surface lisse approchant X, comme dans l'exemple 1.1, telle que $\mathrm{d_{GH}}((M, g, x_0), (C(\mathbb{S}^1_a), d, o)) < 2\varepsilon r$.



Montrons que la boule $B_{\varepsilon r}(x_0)$ est alors incluse dans $S_{\varepsilon,r}(M)$: en particulier, cela donne un exemple concret d'(ε, r)-strate quantitative non-vide dans une variété lisse.
On commence par observer que, puisque $B_s(o)$ n'est $(2, 4\varepsilon)$-symétrique pour aucun rayon $s \in [r, 1[$, de même $B_s(x_0)$ n'est pas $(2, 2\varepsilon)$-symétrique. En effet, si elle l'était on aurait :

$$\begin{aligned}\mathrm{d_{GH}}(B_s(o), \mathbb{B}^2_s(0)) &\leqslant \mathrm{d_{GH}}(B_s(o), B_s(x_0)) + \mathrm{d_{GH}}(B_s(x_0), \mathbb{B}^2_s(0)) \\ &< 2\varepsilon r + 2\varepsilon s < 4\varepsilon s.\end{aligned}$$

Soit $x \in B_1(x_0)$ tel que $d(x, x_0) < \varepsilon r$. S'il existait $s \in [r, 1[$ tel que $B_s(x)$ était $(2, \varepsilon)$-symétrique on aurait :

$$\mathrm{d_{GH}}(B_s(x_0), \mathbb{B}^2_s(0)) \leqslant \mathrm{d_{GH}}(B_s(x_0), B_s(x)) + \mathrm{d_{GH}}(B_s(x), \mathbb{B}^2_s(0)) < \varepsilon r + \varepsilon s \leqslant 2\varepsilon s.$$

Donc si $d(x, x_0) < \varepsilon r$, il n'existe pas $s \in [r, 1[$ telle que la boule $B_s(x)$ soit $(2, \varepsilon)$-symétrique. Cela implique $B_{\varepsilon r}(x_0) \subset S_{\varepsilon,r}(M)$. En particulier, $S_{\varepsilon,r}(M)$ est non vide.

3.2. Estimées de volume sur les strates quantitatives

Le théorème B, qui affirme la k-rectifiabilité des strates classiques S^k et la k-symétrie $\mathscr{H}^k$-presque partout des cônes tangents aux points de S^k, est une conséquence directe du lemme 3.3 et du théorème suivant.

Théorème 3.8 (Théorèmes 1.7 et 1.9 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021). *Soit (X, d, x) un espace limite d'une suite de variétés (M^n_i, g_i, x_i) telles que $\mathrm{vol}_{g_i}(B_1(x_i)) > v > 0$ et dont la courbure de Ricci est uniformément minorée par $-(n-1)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c(n, v, \varepsilon)$ telle que pour tout $r \in]0, 1[$*

$$\mathrm{vol}(B_r(S^k_{\varepsilon,r}(X)) \cap B_1(p)) \leqslant cr^{n-k} \text{ et } \mathrm{vol}(B_r(S^k_\varepsilon(X)) \cap B_1(p)) \leqslant cr^{n-k}. \qquad (4)$$

En particulier la $\mathscr{H}^k$-mesure de $S^k_\varepsilon(X)$ est localement finie. De plus, la k-ième ε-strate quantitative $\Sigma^k_\varepsilon(X)$ est k-rectifiable et pour $\mathscr{H}^k$-presque tout $x \in S^k_\varepsilon(X)$, tous les cônes tangents en x sont k-symétriques.

Ce théorème montre que les strates quantitatives se comportent « mieux » que les strates classiques : ainsi, s'il existe des exemples où la mesure $\mathscr{H}^k$ de $S^k(X) \cap B_1(p)$ est infinie, la mesure de $S^k_\varepsilon(X)$ est toujours localement finie. Revenons sur l'exemple de la surface infiniment singulière pour illustrer ce fait.

Exemple 3.9. Considérons l'espace limite $X = Z^2_\infty$ construit dans l'exemple 1.2. Comme il a été observé, l'ensemble singulier $\mathscr{S} = S^0(X)$ est constitué d'un nombre infini de points et il est dense dans X. Le théorème précédent affirme néanmoins que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $p \in X$, la boule $B_1(p)$ contient un nombre fini de points appartenant à la ε-strate quantitative. En effet, d'après la remarque 2.12, en dehors d'un nombre fini de points $\{x_1, \dots, x_N\}$, la densité est proche de 1. Par conséquent, d'après Cheeger (2001, Théorème 9.69), si $x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$, il existe un rayon r tel que $B_r(x)$ est $(2, \varepsilon)$-symétrique et donc $x \notin S_\varepsilon(X)$. Cela implique que $S_\varepsilon(X)$ est constitué au plus d'un nombre fini de points.

Une autre conséquence du théorème 3.8 est que pour $\mathscr{H}^k$-presque tout point de la strate classique $S^k(X)$ les cônes tangents sont k-symétriques. Le phénomène pathologique des cônes tangents j-symétriques pour tous les entiers $j \in \{0, \dots, n-2\}$ illustré par l'article de Colding et Naber, 2013, ne peut donc avoir lieu que pour un ensemble de points de mesure $\mathscr{H}^k$ nulle.

Les estimées de volume (4) affirment que le comportement « en volume » des strates quantitatives, et donc aussi des strates classiques, est analogue à celui d'une sous-variété de dimension k. En effet, si (M^n, g) est une variété lisse et N^k est une sous-variété de dimension k, le volume d'un voisinage tubulaire de N de taille r est contrôlé par r^{n-k}. Néanmoins, des exemples donnés dans le théorème 1.7 et la section 7 de l'article de Li et Naber, 2020, montrent que la k-ième strate classique Σ^k ne possède pas toujours de structure de variété k-dimensionnelle.

Des estimées de volume plus faibles, avec un contrôle en $C(\eta, n, v, \varepsilon) r^{n-k-\eta}$ pour tout $\eta > 0$, avaient été prouvées par Cheeger et Naber, 2013a. Ce contrôle avait pu être amélioré en r^{n-k} uniquement dans le cas de courbure de Ricci bornée et $k = n-4$: en effet, le théorème 1.14 de l'article de Jiang et Naber, 2021, implique le contrôle du volume en r^4 pour les strates quantitatives de codimension 4.

Ces estimées plus faibles avaient été utilisées pour démontrer que si (M^n, g) est une variété telle que $\mathrm{vol}(B_1(p)) > v > 0$ et dont la courbure de Ricci est bornée $\| \mathrm{Ric}_g \| \leqslant (n-1)$, alors pour tout $q < 1$ la norme L^q de la courbure de Riemann est bornée par une constante $C(n, v, q)$ (voir le corollaire 1.26 dans l'article de Cheeger et Naber, 2013a). La démonstration de la conjecture de la codimension 4 par les mêmes auteurs leur a permis d'améliorer ce dernier résultat dans le théorème 1.8 de Cheeger et Naber, 2015, en obtenant, toujours à partir des estimées de volume, des bornes L^q pour la courbure de Riemann pour tout $q < 2$.

4. Quelques éléments de la preuve du théorème 3.8

La démonstration du théorème 3.8 combine des éléments classiques de la théorie de Cheeger–Colding (en particulier le théorème « presque cône en volume implique presque cône métrique », voir théorème 2.11) avec deux nouveaux résultats

marquants sur la géométrie des espaces limites : un théorème de décomposition en *régions collier* et un théorème de structure de ces mêmes régions.

Les régions collier permettent d'obtenir des informations sur une strate quantitative $S^k_{\varepsilon,r}$ et sur son voisinage tubulaire, en se plaçant dans des boules qui intersectent $S^k_{\varepsilon,r}$ de façon appropriée. Ces boules possèdent un sous-ensemble $\mathscr{C}$ « approchant » la strate quantitative, dans le sens que nous allons voir ci-dessous. Le théorème de décomposition assure que des régions collier existent et permet alors de prouver qu'une boule unité se décompose en deux types de boules : celles qui contiennent une région collier et des boules $(k+1, 2\varepsilon)$-symétriques, dont les centres sont assez loin de la strate S^k_ε. De plus, la mesure k-dimensionnelle de l'ensemble de ces deux types de boules est contrôlée. Le théorème de structure permet d'obtenir des informations supplémentaires sur les boules qui contiennent une région collier, en particulier la k-Ahlfors régularité de la mesure qui lui est associée. Celle-ci, avec le contrôle de la mesure k-dimensionnelle donné par le théorème de décomposition, permet d'obtenir la démonstration des estimées de volume du théorème 3.8.

Nous allons nous concentrer principalement sur le théorème de structure des régions collier. Nous renvoyons aux sections 2.4 et 10 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, pour les démonstrations respectivement du théorème 3.8 et du théorème de décomposition. Dans le reste de cette section, nous présentons les régions collier, puis un schéma de la preuve du théorème de structure. Nous présentons également certains des résultats intervenant dans cette démonstration, qui constitue la majorité du même article des trois auteurs.

4.1. Régions collier et théorème de structure des régions collier

Les régions collier ont été introduites dans le cadre des espace limites dans l'article de Jiang et Naber, 2021. Des versions antérieures de cette notion peuvent se retrouver dans les travaux de Naber et Valtorta, 2017b, section 3.7 ; de Naber et Valtorta, 2017a, section 8, ou de Naber et Valtorta, 2019, sections 9 et 11. Dans les trois cas, il s'agit de donner des théorèmes de décomposition en régions appropriées. La démonstration du nombre fini de types de difféomorphismes pour les variétés de dimension 4, contenue dans la section 8 de l'article de Cheeger et Naber, 2015, se sert également d'un théorème de décomposition en bulles, appelées « colliers » et « corps », spécifique à la dimension 4. Nous nous référons dans la suite à la définition 2.4 de région collier donnée dans l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021.

Définition 4.1 (Région collier et mesure associée). Soient (X, d, p) un espace limite, $k \in \{0, \dots, n-2\}$ et $\delta, \varepsilon > 0$. Soit $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}_+ \subset B_2(p)$ tel que $p \in \mathscr{C}$. Soit $x \mapsto r_x$ une fonction continue de $\mathscr{C}$ dans $[0, 1[$ telle que $r_x > 0$ si $x \in \mathscr{C}_+$, $r_x = 0$ si $x \in \mathscr{C}_0$. L'ensemble

$$\mathscr{N} = B_2(p) \setminus \bigcup_{x \in \mathscr{C}} \bar{B}_{r_x}(x).$$

est une (k, δ, ε)-région collier si les propriétés suivantes sont vérifiées.

(a) Les boules $\{B_{10^{-3}r_x}(x), x \in \mathscr{C}\}$ sont disjointes. En particulier, $\mathscr{C}_+$ est discret.

(b) $|\mathscr{V}_{\delta^{-1}r_x}(x) - \mathscr{V}_{\delta r_x}(x)| \leqslant \delta^2$, où $\mathscr{V}$ est le rapport de volume défini par (1).

(c) Pour tout $x \in \mathscr{C}$ et pour tout $s \in [r_x, \delta^{-1}[$, la boule $B_s(x)$ est (k, δ^2)-symétrique mais pas $(k+1, \varepsilon)$-symétrique.

(d) Si $r \geqslant r_x$ et $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$ et φ est une (εr)-presque isométrie entre $B_r^{\mathbb{R}^k \times C(Z)}(0^k, o)$ et $B_r(x)$, la distance de Hausdorff entre $B_{2r}(x) \cap \mathscr{C}$ et l'image des sommets $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{o\})$ est inférieure à $10^{-2}r$.

(e) La constante de Lipschitz de $x \mapsto r_x$ est inférieure à δ.

La mesure μ associée à la région collier $\mathscr{N}$ est définie par

$$\mu = \mathscr{H}^k|_{\mathscr{C}_0} + \sum_{x \in \mathscr{C}_+} r_x^k \delta_x.$$

Nous nous référons à $\mathscr{C}$ comme l'ensemble des centres, en rouge dans la figure ci-dessous. Cet ensemble joue le rôle d'approximation de la strate quantitative $S^k_\varepsilon(X)$. En effet, la condition (c) implique que tout $x \in \mathscr{C}_0$ est inclus dans $S^k_\varepsilon(X)$ et qu'il existe un rayon r, la borne supérieure des rayons r_x, tel que tout $x \in \mathscr{C}_+$ appartient à $S^k_{\varepsilon,r}(X)$. La condition (d) nous dit de plus que $\mathscr{C}$ est proche de $S^k_\varepsilon(X)$.

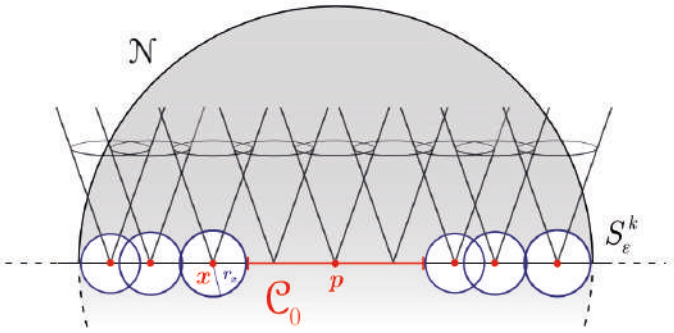


Figure 1 – En gris, une région collier simple, où S^k_ε coïncide avec S^k.

Une région collier peut également être définie dans une variété lisse (M^n, g) : dans ce cas, puisque les ε-strates quantitatives sont vides, l'ensemble des centres $\mathscr{C}$ est constitué seulement de sa partie discrète $\mathscr{C}_+$ et la mesure μ est une somme de masses de Dirac.

Le théorème de structure des colliers, énoncé dans le théorème 2.9 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, affirme ce qui suit.

Théorème 4.2 (Théorème de structure des colliers). *Soient $\varepsilon, v > 0$. Il existe $\delta_0(n, v, \varepsilon)$ tel que pour tout $\delta \leqslant \delta_0(n, v, \varepsilon)$, si (X, d, p) est un espace limite d'une suite de variétés non effondrées qui vérifient $\mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0$ et $\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1)$, et si $\mathscr{N} \subset B_2(p)$ est une (k, δ, ε)-région collier, alors :*

1. *La mesure μ est k-Ahlfors régulière, c'est-à-dire il existe une constante $A(n)$ telle que pour tout $x \in \mathscr{C}$ et tout $r \geqslant r_x$ tel que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$ on ait*

$$A(n)^{-1} r^k \leqslant \mu(B_r(x)) \leqslant A(n) r^k. \tag{A}$$

2. *$\mathscr{C}_0$ est k-rectifiable.*

4.2. Structure de la preuve du théorème 4.2

La preuve du théorème de structure des colliers occupe les sections de 5 à 9 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021. Nous en résumons ici les grandes étapes.

Il est tout d'abord possible de séparer la démonstration du théorème 4.2 en deux parties :

1. La démonstration du théorème pour une région collier dans une variété lisse.
2. La démonstration dans le cas des espaces limites, à partir du cas lisse.

Pour ce qui concerne le deuxième point, les auteurs prouvent un résultat d'approximation des régions collier singulières par des régions collier lisses, ainsi que la rectifiabilité de $\mathscr{C}_0$, ce qui permet de conclure (voir les sections 9.5 et 9.6 de l'article sus-cité).

Les difficultés principales résident dans la démonstration du théorème dans le cas lisse. Pour se former une première idée intuitive, considérons une boule euclidienne $\mathbb{B}_2^k$ dans $\mathbb{R}^k$ et un sous-ensemble $\mathscr{C}' = \mathscr{C}'_0 \cup \mathscr{C}'_+$ muni d'une fonction rayon $x \mapsto r_x$ de $\mathscr{C}'$ dans $[0, 1[$, strictement positive sur $\mathscr{C}'_+$, telle que les boules $\{\mathbb{B}_{r_x}(x), x \in \mathscr{C}'_+\}$ soient disjointes et la réunion $\{\mathbb{B}_{r_x}(x), x \in \mathscr{C}'_+\} \cup \mathscr{C}'_0$ recouvre $\mathbb{B}_2^k$. En considérant la mesure associée

$$\mu' = \mathscr{H}^k|_{\mathscr{C}'_0} + \sum_{x \in \mathscr{C}'_x} r_x^k \delta_x,$$

on peut montrer que μ' est k-Ahlfors régulière sur $\mathscr{C}'$, dans le sens de (A). La démonstration de l'Ahlfors régularité se fonde alors sur le fait de trouver une fonction u de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^k$ possédant les propriétés de régularité adéquates, ce qui permet d'exploiter la situation plus simple de l'espace euclidien. En gardant cela à l'esprit, nous pouvons identifier trois étapes principales dans la démonstration du théorème de structure dans le cas lisse :

1. Montrer l'existence d'une application bi-Hölder $u : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^k$ (section 7 de l'article).

2. Sous une hypothèse supplémentaire, montrer qu'il existe un sous-ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon$ sur lequel u est $(1+\varepsilon)$-bi-Lipschitz (sections 9.1 et 9.3).
3. Se servir d'un raisonnement par récurrence pour ôter l'hypothèse supplémentaire et conclure (sections 9.3 et 9.4).

Dans la suite de cette section, nous allons présenter certaines des idées qui interviennent dans la construction de l'application $u : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^k$, en nous concentrant sur des points communs à la théorie de Cheeger–Colding et aux deux autres articles de Cheeger et Naber, 2015, et de Jiang et Naber, 2021.

4.3. Propagation d'une propriété aux échelles inférieures

Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.3, si (X, d, p) est un espace limite et p est un point de l'ensemble régulier $\mathscr{R}$, il est possible de construire une application bi-Hölder d'une boule $B_1(p)$ dans une boule euclidienne $\mathbb{B}_1^n$. Une étape préalable pour démontrer l'existence d'une telle application bi-Hölder consiste à obtenir une propriété de Reifenberg, c'est-à-dire le propagation de la GH-proximité d'une échelle fixée à toutes les échelles inférieures et à tous les points x de la boule $B_1(p)$.

Une idée similaire entre en jeu dans la construction d'une application bi-Hölder de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^k$. Pour une boule $B_2(p)$ qui contient une région collier, en partant d'une propriété vraie à l'échelle 2, J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber montrent qu'il est possible d'obtenir cette même propriété sur (beaucoup de) boules centrées en un point x de l'ensemble des centres, pour toutes les échelles $r \in [r_x, 1]$ telles que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$.

Plus précisément, considérons une (k, δ, η)-région collier $\mathscr{N}$. Grâce à la condition (c) dans la Définition 4.1, pour δ assez petit, par exemple inférieur à $1/8$, la boule $B_8(p)$ est (k, δ^2)-symétrique. De plus, la proposition 2.5 assure que pour tout $\delta' > 0$, si δ est inférieur à $\delta(n, \delta')$, il existe un (k, δ')-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$. Ce dernier restreint à $\mathscr{C}$ est le candidat pour l'application bi-Hölder recherchée.

Pour obtenir les informations nécessaires sur la régularité de l'application u, les auteurs visent à montrer que l'on peut choisir δ' et δ de façon à ce que u reste un (k, ε)-splitting pour le même $\varepsilon > 0$ fixé, sur toutes les boules $B_r(x)$ avec $x \in \mathscr{C}$ et $r \in [r_x, 1]$ tel que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$. Si cela était vrai pour tous les points de l'ensemble des centres, alors u serait bi-Lipschitz sur $\mathscr{C}$, comme le montrent le lemme 9.6 et la preuve de la proposition 9.3 dans l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021. Or, les auteurs fournissent un exemple où u n'est pas bi-Lipschitz sur tout l'ensemble $\mathscr{C}$ (voir l'exemple 1 dans la section 3 du même article).

Il montrent alors que, même si u n'est pas nécessairement un (k, ε)-splitting harmonique sur les boules $B_r(x)$, $x \in \mathscr{C}$, il existe toujours une transformation linéaire $T_{x,r}$ de $\mathbb{R}^k$ telle que la composition $T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est bien un (k, ε)-splitting. Plus précisément, J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber démontrent, dans la section 7 de leur

article, un théorème de transformation qui, combiné avec le dernier point de leur proposition 9.3, peut être énoncé de la façon suivante.

Théorème 4.3 (Théorème de transformation). *Fixons $\varepsilon, \eta, v > 0$. Il existe $\delta_0(n, v, \varepsilon, \eta)$, tel que pour tout $\delta \leqslant \delta_0(n, v, \varepsilon, \eta)$, si*

1. *(M^n, g) est une variété avec $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta^2$ et $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$;*
2. *$\mathscr{N} \subset B_2(p)$ est une (k, δ, η)-région collier;*
3. *$u : B_4(p) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, δ)-splitting harmonique,*

alors pour tout $x \in \mathscr{C}$ et pour tout $r \in [r_x, 1]$ il existe une matrice $k \times k$ triangulaire inférieure $T_{x,r}$ telle que l'application

$$T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$$

est un (k, ε)-splitting harmonique. De plus, $\|T_{x,r}\| \leqslant r^{-\varepsilon}$ et $u : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^k$ est bi-Hölder : pour tout $y, z \in B_r(x)$

$$(1-\varepsilon)d(y,z)^{1+\varepsilon} \leqslant \|u(z) - u(y)\| \leqslant (1+\varepsilon)d(y,z).$$

Nous allons donner quelques précisions sur la démonstration du théorème de transformation dans la dernière section de ce texte. En choisissant $k = n$, ce résultat fournit une nouvelle preuve du théorème 2.13 : si une boule $B_4(p)$ est GH-proche d'une boule euclidienne $\mathbb{B}^n_4$, alors il existe une application harmonique et bi-Hölder sur $B_1(p)$ (voir la section 7.5 del'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Pour montrer la régularité bi-Lipschitz de u sur un sous-ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon$, les auteurs utilisent le schéma de preuve suivant : ils supposent une régularité Ahlfors plus faible pour μ, c'est-à-dire avec une constante B qui, à la différence de la constante $A(n)$ du théorème 4.2, n'est pas universelle. Avec cette hypothèse supplémentaire, ils démontrent le théorème suivant, qui correspond à leur proposition 9.3, sauf pour le cinquième point, que nous avons intégré au théorème précédent, car sa démonstration ne se sert pas de l'hypothèse de régularité Ahlfors faible.

Théorème 4.4. *Fixons $\varepsilon, \eta, B, v > 0$. Il existe $\delta_0'(n, v, \eta, B)$ tel que pour tout $\delta' \leqslant \delta_0'$ il existe $\delta_0(n, v, \eta, v, \delta')$ tel que pour tout $\delta \leqslant \delta_0$, si :*

1. *(M^n, g) est une variété avec $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta$ et $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$;*
2. *$\mathscr{N} \subset B_2(p)$ est une (k, δ, η)-région collier;*
3. *pour tout $x \in \mathscr{C}$ et $r \geqslant r_x$ tel que $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$*

$$B^{-1} r^k \leqslant \mu(B_r(x)) \leqslant B r^k; \tag{AF}$$

4. *$u : B_4(p) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, δ')-splitting harmonique,*

alors il existe $\mathscr{C}_\varepsilon \subset \mathscr{C} \cap B_{15/8}(p)$ tel que :

(a) $\mu(\mathscr{C}_\varepsilon) \geqslant (1-\varepsilon)\mu(\mathscr{C} \cap B_{15/8}(p))$.

(b) *Pour tout* $x \in \mathscr{C}_\varepsilon$ *et pour tout* $r \geqslant r_x$ *avec* $B_{2r}(x) \subset B_2(p)$, $u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ *est un* (k, ε)*-splitting harmonique.*

(c) $u : \mathscr{C}_\varepsilon \to \mathbb{R}^k$ *est* $(1+\varepsilon)$*-bi-Lipschitz :*

$$(1+\varepsilon)^{-1} d(x,y) \leqslant \|u(x) - u(y)\| \leqslant (1+\varepsilon) d(x,y)$$

En d'autres termes, quitte à se restreindre à un sous-ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon$, la matrice de transformation $T_{x,r}$ est l'identité et l'application u elle même, sans besoin de la composer avec une transformation linéaire, est un (k, ε)-splitting sur les boules centrées en $x \in \mathscr{C}_\varepsilon$. La démonstration de ce dernier théorème nécessite plusieurs résultats intermédiaires, qui occupent les sections de 6 à 8 de l'article.

Sous les hypothèses du théorème 4.4, la k-Ahlfors régularité découle des deux résultats précédents et est démontrée dans le lemme 9.11 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021 : les auteurs se servent de la régularité bi-Lipschitz pour la borne inférieure dans (A), et pour la borne supérieure ils utilisent un argument de recouvrement combiné avec le contrôle Hölder sur les matrices de transformation donné par le théorème 4.3.

4.4. Contrôle de la géométrie et de l'analyse via une quantité monotone

Un point commun entre la théorie de Cheeger–Colding et d'autres problèmes d'analyse géométrique est l'utilisation d'une quantité monotone pour contrôler des propriétés de régularité et de symétrie des boules. Ce principe, illustré brièvement dans la section 2.5, joue un rôle significatif dans la démonstration du théorème 4.4.

Le théorème 2.11 « presque cône en volume implique presque cône métrique » et ses versions successives prouvées par J. Cheeger et A. Naber affirment qu'un contrôle approprié du pincement du rapport de volume implique la GH-proximité à un cône métrique ou à un modèle $\mathbb{R}^k \times C(Z)$, et en particulier l'existence d'une application de splitting. Une des étapes importantes dans le travail de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, pour prouver le théorème 4.4 consiste à montrer que, en remplaçant le pincement du volume par une quantité monotone mieux choisie, il est possible de gagner en régularité sur le splitting (en particulier avec un contrôle sur son hessien).

Pour ce faire, les auteurs utilisent l'entropie locale pointée $\mathscr{W}$, inspirée par la $\mathscr{W}$-entropie de G. Perelman, et qui, comme le rapport de volume, est décroissante. Ils définissent également une notion de k-pincement de $\mathscr{W}$ afin que, si le k-pincement est proche de 0 en un point p à une échelle r, alors il existe un splitting harmonique de $B_r(p)$ dans $\mathbb{R}^k$ (voir la section 4.6 de l'article). En combinant un théorème de splitting optimal et un théorème de transformation amélioré par rapport à l'énoncé ci-dessus, montrés respectivement dans les sections 6 et 7 de l'article, ils prouvent que le contrôle du k-pincement permet de choisir un splitting qui reste un (k, ε)-splitting

à toutes les échelles : c'est le contenu du théorème de non dégénération (voir la section 8). L'ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon$ du théorème 4.4 est alors constitué par les points de l'ensemble des centres où l'on dispose du contrôle du k-pincement de l'entropie locale pointée : son existence est garantie par la condition (b) dans la définition de région collier, les propriétés de $\mathscr{W}$ et l'hypothèse de régularité Ahlfors faible pour μ (voir les lemmes 9.4 et 9.5 de l'article). Cette dernière permet aussi de contrôler la mesure de $\mathscr{C}$ privé de $\mathscr{C}_\varepsilon$. Le théorème de non dégénération et le choix de $\mathscr{C}_\varepsilon$ permettent aussi d'affirmer que pour tout $x \in \mathscr{C}_\varepsilon$ l'application $u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, ε)-splitting à toutes les échelles, ce qui implique la régularité bi-Lipschitz de u sur $\mathscr{C}_\varepsilon$ (voir le lemme 9.6 et la preuve de la proposition 9.3).

5. Limites de variétés à courbure de Ricci bornée

Cette section est dédiée aux résultats de J. Cheeger et A. Naber, puis de ce dernier avec W. Jiang, dans le contexte des limites de variétés non effondrées à courbure de Ricci bornée. Nous résumons les étapes principales de leurs démonstrations avec pour objectif de souligner les points communs et les différences avec les démonstrations de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, présentées dans la section précédente.

5.1. Codimension 4 de l'ensemble singulier

Un des résultats principaux de l'article de Cheeger et Naber, 2015, est la preuve de la conjecture de la codimension 4 pour les limites de variétés non effondrées à courbure de Ricci bornée, sans aucune autre hypothèse supplémentaire. Plus précisément ils ont démontré :

Théorème 5.1. *Soit* (M_i, g_i, p_i) *une suite de variétés telles que* $\| \mathrm{Ric}_{g_i} \| \leqslant (n-1)$ *et* $\mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0$, *convergeant vers* (X, d, p). *Alors* $\dim_{\mathscr{H}} \mathscr{S} \leqslant n-4$.

En termes de la stratification classique, cela signifie que les strates de codimension 2 et 3 sont vides. Pour démontrer le théorème 5.1, il est donc nécessaire de prouver en un premier temps que si $x \in \Sigma^{n-2} = S^{n-2} \setminus S^{n-3}$, alors x appartient à l'ensemble régulier $\mathscr{R}$, ou, de façon équivalente, il admet un cône tangent euclidien. De même, il faut démontrer que si $x \in \Sigma^{n-3}$, alors $x \in \mathscr{R}$. En réalité, une fois que l'occurrence de singularités de codimension 2 a été exclue, un argument topologique par l'absurde mène assez simplement à l'inexistence des singularités de codimension 3, comme le montre le théorème 5.12 de Cheeger et Naber, 2015. Toute la difficulté réside donc dans la démonstration du fait que Σ^{n-2} est vide, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de point admettant un cône tangent de la forme $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, avec $\alpha \in]0, 2\pi[$. Or, dans le cas à courbure de Ricci bornée, un cône tangent est une limite de variétés non effondrées avec courbure de Ricci qui tend vers 0 (section 3.2 de ce texte).

Il faut donc montrer qu'il n'existe pas de telle suite convergeant vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$, $\alpha \in]0, 2\pi[$. J. Cheeger et A. Naber ont ainsi prouvé le théorème suivant.

Théorème 5.2 (Théorème 5.2, Cheeger et Naber, 2015). *Soit (M_i, g_i, p_i) une suite de variétés telles que $\| \mathrm{Ric}_{g_i} \| \leqslant \delta_i$, avec $\delta_i \to 0$ et $\mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0$. Si (M_i, g_i, p_i) converge vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha \in]0, 2\pi]$, alors elle converge vers l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.*

Ce résultat est démontré par l'absurde et repose sur un théorème de « tranches » (slicing theorem), dont l'esprit présente des similarités avec les idées décrites à la section précédente, en particulier avec le principe de propager une propriété d'une échelle aux échelles inférieures. Le point de départ consiste à supposer que (M_i, g_i, p_i) converge vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha < 2\pi$ et à traduire cette information géométrique en termes analytiques : en particulier, grâce à la proposition 2.5, pour $\delta > 0$ et i assez grand il existe un $(n-2, \delta)$-splitting $u_i : B_2(p_i) \to \mathbb{R}^{n-2}$. On se concentre ensuite sur les ensembles de niveau de ce $(n-2, \delta)$-splitting, $u_i^{-1}(s)$ avec $s \in \mathbb{R}^{n-2}$. L'idée intuitive est de montrer qu'en zoomant sur un point $x \in u_i^{-1}(s)$, on retrouve à toutes les échelles $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$. En d'autres termes, on espère que la GH-proximité au modèle se propage aux boules $B_r(x)$ centrées en $x \in u_i^{-1}(s)$, pour tout rayon $r \in]0, 1]$. Or, les auteurs démontrent que cela est vrai pour *la plupart* des valeurs s dans l'image de u_i, quitte à transformer u_i en le composant avec une application linéaire de $\mathbb{R}^{n-2}$. Plus précisément ils prouvent :

Théorème 5.3 (Théorème 1.23, Cheeger et Naber, 2015). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0(n, \varepsilon)$ tel que pour tout $\delta \leqslant \delta_0$ et toute variété (M^n, g) telle que $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta$, si $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^{n-2}$ est un $(n-2, \delta)$-splitting, alors il existe un sous-ensemble $G_\varepsilon \subset \mathbb{B}_1^{n-2}$ qui possède les propriétés suivantes :*

1. *$\mathscr{H}^{n-2}(G_\varepsilon) \geqslant \mathscr{H}^{n-2}(\mathbb{B}_1^{n-2}) - \varepsilon$;*
2. *pour tout $s \in G_\varepsilon$, $u^{-1}(s)$ est non vide ;*
3. *pour tout $x \in u^{-1}(G_\varepsilon)$ et $r \in]0, 1]$, il existe une $(n-2) \times (n-2)$ matrice triangulaire inférieure $T_{x,r}$ telle que la composition $T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^{n-2}$ est un $(n-2, \varepsilon)$-splitting.*

Seule la borne inférieure sur la courbure de Ricci est utilisée pour ce théorème, la borne supérieure jouant un rôle uniquement dans le raisonnement par l'absurde qui démontre le théorème 5.2 et que nous esquissons ci-dessous. Le troisième point du théorème 5.3 provient d'une version différente du théorème de transformation. Pour un $(n-2, \delta)$-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^{n-2}$ et $x \in B_1(p)$, les auteurs définissent une échelle singulière r_x, puis démontrent que pour tout $x \in B_1(p)$ et tout rayon compris entre r_x et 1 il existe une matrice de transformation qui donne un $(n-2, \varepsilon)$-splitting sur $B_r(x)$ quand nous la composons avec u. Cela passe aussi par une démonstration par l'absurde, voir la section 3 de l'article de Cheeger et Naber,

2015. Le but étant d'obtenir un splitting à toutes les échelles, et non seulement pour celles supérieures à r_x, il s'agit ensuite de montrer qu'il n'y a pas trop de points tels que l'échelle singulière est strictement positive. En définissant

$$\mathscr{B} = \bigcup_{x\in B_1(p):r_x>0} B_{r_x}(x),$$

il est en effet possible de contrôler la mesure $\mathscr{H}^{n-2}$ de l'image $u(\mathscr{B}) \subset \mathbb{B}_1^{n-2}$, ce qui permet de définir l'ensemble G_ε du théorème 5.3.

La démonstration du théorème 5.2 est obtenue en combinant le théorème 5.3 et le résultat de ε-régularité de M. Anderson donné dans le théorème 2.15 de ce texte. Ce dernier implique, dans le contexte du théorème 5.2, que la convergence de (M_i, g_i, p_i) vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ est au sens $C^{1,\eta} \cap W^{2,q}$, pour tout $\eta < 1$ et $q < \infty$, en dehors de $\mathbb{R}^{n-2} \times \{o\}$.

Esquisse de la démonstration du théorème 5.2. Considérons une suite qui satisfait les hypothèses du théorème 5.2 et qui converge vers $\mathbb{R}^{n-2} \times C(\mathbb{S}^1_\alpha)$ avec $\alpha < 2\pi$. Pour un $(n-2,\delta)$-splitting $u_i : B_2(p_i) \to \mathbb{R}^{n-2}$ on peut fixer $s_i \in G_{\varepsilon,i}$, puis choisir un point $x_i \in u_i^{-1}(s_i)$ et un rayon r_i de façon à ce que r_i soit le minimum du rayon harmonique sur $u_i^{-1}(s_i)$. Le théorème de ε-régularité 2.15 et le fait que α est strictement inférieur à 2π garantissent que le minimum est atteint et que r_i tend vers 0. La suite des variétés ré-échelonnées $(M_i^n, r_i^{-2} g_i, x_i)$ converge vers une limite $(\mathbb{R}^{n-2} \times S, d, x)$. Le choix de r_i et x_i, la double borne sur la courbure de Ricci et le théorème 2.15 impliquent que S et $X = \mathbb{R}^{n-2} \times S$ sont des variétés lisses et plates. De plus, le non effondrement permet d'obtenir que la croissance du volume sur X est euclidienne. Une surface plate à croissance de volume euclidienne coïncide avec $\mathbb{R}^2$, donc $S = \mathbb{R}^2$ et $X = \mathbb{R}^n$. Mais le théorème 2.15 garantit aussi la continuité du rayon harmonique (voir la discussion qui précède la preuve du théorème 1.1 dans l'article de Anderson, 1990), donc en $x \in X$ on a $r_h(x) = 1$. Cela est incompatible avec le fait que X soit l'espace euclidien, pour lequel le rayon harmonique est infini en tout point. □

5.2. Bornes L^2 a priori sur la courbure de Riemann

Jiang et Naber, 2021, ont démontré que dans le cas d'une double borne sur la courbure de Ricci, non seulement l'ensemble singulier a codimension au moins 4, mais il a aussi mesure de Hausdorff $(n-4)$-dimensionnelle localement finie et il est $(n-4)$-rectifiable. Ce résultat précède l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, et peut être redémontré à partir du théorème 3.8, vrai lorsque Ricci est minoré, et d'un théorème de ε-régularité, spécifique au cas de courbure de Ricci bornée (voir le théorème 6.1 de Cheeger et Naber, 2015, et le théorème 4.34 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

Ils ont également prouvé une borne a priori sur la norme L^2 de la courbure de Riemann : la démonstration utilise quant à elle des techniques nécessitant que la courbure de Ricci soit bornée. Ce résultat avait été démontré auparavant, uniquement en dimension 4, dans le théorème 1.13 de Cheeger et Naber, 2015, et conjecturé vrai en toute dimension dans la conjecture 6.3 de Naber, 2014, et dans la conjecture 9.1 de Cheeger et Naber, 2015.

Théorème 5.4 (Borne L^2, Théorème 1.6 de Jiang et Naber, 2021). *Soit (M^n, g) une variété telle que $\| \operatorname{Ric}_g \| \leqslant (n-1)$ et $\operatorname{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$. Alors il existe une constante $C(n, v) > 0$ telle que :*

$$⨍_{B_1(p)} \|\operatorname{Rm}_g\|^2 dv_g \leqslant C(n, v). \tag{5}$$

La preuve du théorème précédent est fortement liée à l'étude des régions collier. Les auteurs définissent les régions collier $\mathscr{N} \subset B_2(p)$ d'une façon similaire à celle que nous avons décrite dans la section précédente, avec l'information supplémentaire que les singularités à la limite ont codimension supérieure ou égale à 4. Par conséquent, dans le cas à Ricci borné, si $x \in \mathscr{C}$ est l'un de centres d'une région collier, il existe r_x tel que pour tout $r \in [r_x, 1]$ il existe une (δr)-presque isométrie

$$\varphi_{x,r} : B^{\mathbb{R}^{n-4} \times C(S^3/\Gamma)}_{\delta^{-1} r}(0^{n-4}, o) \to B_{\delta^{-1} r}(x),$$

où Γ est un sous-groupe non trivial de $O(4)$. Comme dans le cas de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, les démonstrations reposent sur un théorème de décomposition en régions collier et un théorème de structure des régions collier. Ce dernier présente une différence essentielle avec le théorème 4.2 : en plus de démontrer que la mesure μ associée à la région collier est $(n-4)$-Ahlfors régulière, il donne un contrôle sur la norme L^2 de la courbure de Riemann dans $\mathscr{N} \cap B_1(p)$. Combinée avec le théorème de décomposition, la borne L^2 de la courbure de Riemann dans la région collier permet d'obtenir le théorème 5.4 (nous renvoyons aux sections 1.3.5 et 8 de l'article de Jiang et Naber, 2021).

Il faut donc montrer que pour tout δ' il existe un δ tel que si $\mathscr{N}$ est une $(n-4, \delta)$-région collier dans une variété non effondrée avec $\| \operatorname{Ric}_g \| \leqslant \delta$, alors

$$⨍_{\mathscr{N} \cap B_1(p)} \|\operatorname{Rm}_g\|^2 dv_g \leqslant \delta'. \tag{6}$$

Pour illustrer le bien-fondé de cette inégalité, rappelons que la région collier est la boule $B_2(p)$ privée des boules $B_{r_x}(x)$ avec $x \in \mathscr{C}$ (l'ensemble $\mathscr{C}_0$ est vide dans le cas des variétés lisses). Donc $\mathscr{N}$ est constituée des points « loin » de la strate quantitative de codimension 4, ou en d'autres termes loin des points presque singuliers où la courbure s'accumule et explose. Il est donc raisonnable qu'en dehors des boules $B_{r_x}(x)$ avec $x \in \mathscr{C}$, la courbure de Riemann reste contrôlée.

La démonstration de (6) dépend de l'Ahlfors régularité de la mesure μ et se sert du pincement d'une quantité monotone qui dans ce cas est le « $\mathscr{H}$-volume ».

$$\mathscr{H}_t(x) = \int_M (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{d_g^2(x,y)}{4t}} dv_g(y),$$

Il remplace le rapport de volume et, comme lui, est décroissant. De plus, un contrôle du pincement de $\mathscr{H}_t(x)$ est équivalent à la $(n-4,\delta)$-symétrie des boules centrées en x (voir la section 4.2 de l'article de Jiang et Naber, 2021). Les auteurs démontrent que si $x \in \mathscr{N}$, la norme L^2 de la courbure de Riemann sur une boule $B_r(x)$, où $r = d(x,\mathscr{C})/2$, est contrôlée par le pincement du $\mathscr{H}$-volume. Cette estimée, avec les propriétés géométriques et la monotonie du $\mathscr{H}$-volume, permettent d'obtenir (6) (voir la proposition 4.3 et le théorème 4.1 du même article).

Observons que la démonstration de Jiang et Naber, 2021, de la $(n-4)$-Ahlfors régularité de la mesure μ associée à une région collier $\mathscr{N}$ présente certains points en commun et plusieurs différences avec ce qui a été présenté dans la section précédente. Nous pouvons identifier trois étapes principales dans la preuve :

1. Construction d'une application bi-Hölder ϕ de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^{n-4}$, qui suffit pour prouver la borne inférieure dans la $(n-4)$-Ahlfors régularité. La construction de ϕ, donnée dans la section 3.3 de l'article, se sert de la définition des régions collier via des GH-presque isométries pour montrer que l'ensemble des centres est un « ensemble de Reifenberg », d'où il existe une application de Reifenberg bi-Hölder de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^{n-4}$.
2. Construction d'une application bi-Lipschitz u sur un sous-ensemble $\mathscr{C}_\varepsilon \subset \mathscr{C}$ dans $\mathbb{R}^{n-4}$ (le théorème 5.2 de l'article, prouvé dans la même section). Cela nécessite de supposer une régularité Ahflors faible. La construction de $\mathscr{C}_\varepsilon$ repose sur le contrôle approprié, dans une région collier, du hessien d'un $(n-4,\varepsilon)$-splitting u. Pour l'obtenir, les auteurs se servent d'un contrôle de la fonction de Green $G_\mu = b^{-2}$ associée à la mesure μ et d'une estimée de superconvexité pour une énergie qui combine le hessien de u et le gradient de b. Cette énergie s'apparente à l'énergie A qui a été introduite et dont la décroissance a été montrée dans l'article de Colding, 2012.
3. Avec un raisonnement par récurrence, à partir de l'Ahlfors régularité faible et des deux points précédents, il est alors possible de démontrer l'Ahlfors régularité souhaitée sur une région collier d'une variété lisse (section 6.2 de l'article). Un argument d'approximation, prouvé dans le théorème 3.19 de l'article, permet ensuite d'obtenir le résultat analogue dans le cas des espaces limites (comme dans les sections 9.4 et 9.5 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

6. Le théorème de transformation

Nous présentons dans cette section le théorème de transformation et sa démonstration, à titre d'exemple représentatif des techniques utilisées dans les trois articles de J. Cheeger, W. Jiang et A. Naber que nous venons de résumer. Dans le théorème de transformation en effet, comme dans beaucoup de résultats dans ces travaux, on se sert d'un argument par l'absurde et on étudie finement les propriétés d'un (k,δ)-splitting. Le théorème de transformation est un des exemples le plus simples de cette étude, qui consiste à traduire des propriétés géométriques des boules en termes analytiques, pour ensuite obtenir de nouvelles informations sur la géométrie. En outre, dans le cas $k = n$, le théorème de transformation permet de revenir sur la théorie de Cheeger–Colding en fournissant une nouvelle preuve du fait que la partie régulière $\mathscr{R}$ d'un espace limite est bi-Hölder homéomorphe à une variété lisse.

Nous commençons par énoncer une version légèrement différente du théorème de transformation, qui, comme montré ci-dessous, implique celle donnée dans le théorème 4.3.

Théorème 6.1 (Théorème 7.7, Cheeger, Jiang et Naber, 2021). *Soient $\varepsilon, \eta, v > 0$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ où ε_0 est donné par la proposition 6.3. Il existe $\delta_1(\varepsilon,\eta,v,n)$ tel que pour tout $\delta \leqslant \delta_1$, si (M^n, g) est une variété qui vérifie*

$$\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta^2 \text{ et } \mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0,$$

et les deux propriétés suivantes :

(i) *il existe $r_0 \in]0,1[$ tel que pour tout $s \in [r_0, 1]$ la boule $B_s(p)$ est (k,δ^2)-symétrique et n'est pas $(k+1,\eta)$-symétrique ;*

(ii) *il existe un (k,δ)-splitting $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$;*

alors pour tout $s \in [r_0, 1]$ il existe une matrice triangulaire inférieure $T_{p,r}$ telle que $T_{p,r} \circ u : B_r(p) \to \mathbb{R}^k$ est un (k,ε)-splitting.

En outre, nous avons un contrôle Hölder de la norme de $T_{p,r}$: $\|T_{p,r}\| \leqslant r^{-\varepsilon}$.

Preuve du théorème 4.3 en connaissant le théorème 6.1. Considérons (M^n, g) une variété telle que $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta^2$, $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v > 0$, contenant une (k,δ,η)-région collier $\mathscr{N} \subset B_2(p)$, avec δ à choisir. Si $\delta < 1/8$, d'après la définition de région collier, condition (c), la boule $B_8(p)$ est (k,δ^2)-symétrique. Pour $\delta' > 0$, à choisir également dans la suite, on considère la quantité $\delta(\delta', n)$ donnée par la proposition 2.5 : pour $\delta^2 \leqslant \delta(\delta', n)$, la proposition 2.5 assure qu'il existe un (k,δ')-splitting harmonique $u : B_2(p) \to \mathbb{R}^k$. Or, en se servant de l'inégalité de Bishop–Gromov, on peut montrer qu'il existe une constante $C_n \geqslant 1$ telle que pour tout $x \in \mathscr{C}$ la restriction de u à $B_2(x)$

est un $(k, C_n\delta')$ splitting. On peut alors choisir $\delta' = \delta'(n, v, \eta, \varepsilon)$ tel que $C_n\delta' \leqslant \delta_1$, où $\delta_1(\varepsilon, \eta, n, v)$ est donné par le théorème 6.1. On pose alors

$$\delta_0(n, v, \varepsilon, \eta) = \min\{1/8, \sqrt{\delta(\delta', n)}, C_n\delta'\}.$$

De cette façon, pour tout $\delta \leqslant \delta_0 \leqslant \delta_1$, si (M^n, g) est une variété non effondrée avec $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta^2$, $\mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v$ et $\mathscr{N} \subset B_2(p)$ est une (k, δ, η)-région collier, pour tout point x de l'ensemble de centres $\mathscr{C}$ on a :

(i) Pour tout $s \in [r_x, 1]$ la boule $B_s(x)$ est (k, δ^2)-symétrique mais pas $(k+1, \eta)$-symétrique.

(ii) $u : B_2(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, δ)-splitting.

On peut donc appliquer le théorème 6.1 et obtenir que pour tout centre de la région collier $x \in \mathscr{C}$ et pour tout r dans $[r_x, 1]$ il existe une matrice triangulaire inférieure $T_{x,r}$ telle que $T_{x,r} \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, ε)-splitting et de plus $\|T_{x,r}\| \leqslant r^{-\varepsilon}$.

Pour ce qui concerne la régularité Hölder de $u : \mathscr{C} \to \mathbb{R}^k$, on fixe $x, y \in \mathscr{C}$ tels que $d(x, y) = r$. On sait qu'il existe $T = T_{x,r}$ telle que $T \circ u : B_r(x) \to \mathbb{R}^k$ est un (k, ε)-splitting. Puisque $B_r(x)$ n'est pas $(k+1, \eta)$-symétrique, il est possible de montrer que la restriction de $T \circ u$ à l'ensemble des centres $\mathscr{C} \cap B_r(x)$ est de plus une (εr)-presque isométrie. Cela implique en particulier que :

$$| \, \|T \circ u(x) - T \circ u(y)\| - d(x, y) \, | \leqslant \varepsilon r,$$

On a choisi y tel que $d(x, y) = r$, donc en se servant de $\|T\| \leqslant r^{-\varepsilon}$, on obtient

$$\|u(x) - u(y)\| \geqslant (1 - \varepsilon) r^{1+\varepsilon}.$$

De plus, u est un (k, δ)-splitting, donc c'est une application $(1+\delta)$-Lipschitz, où δ est choisi en fonction de ε. On a donc la majoration :

$$\|u(x) - u(y)\| \leqslant (1 + \varepsilon) d(x, y),$$

ce qui conclut la preuve. □

Nous nous concentrons désormais sur la démonstration du théorème 6.1. L'argument donné par Cheeger, Jiang et Naber, 2021, repose sur une traduction précise de certaines propriétés géométriques en termes analytiques. Dans ce cas, il s'agit d'étudier des cônes limites $C(Y)$ ayant la propriété d'être k-symétriques mais pas $(k+1, \eta)$-symétriques (cela provient de l'hypothèse (i)). Cette rigidité géométrique peut être transposée en termes de spectre du laplacien sur Y et de comportement des fonctions harmoniques sur $C(Y)$.

6.1. Valeurs propres et fonctions harmoniques sur les cônes limites

Les travaux de Cheeger, 1979, et Cheeger, 1983, ont montré qu'il est possible de donner un sens à l'opérateur laplacien sur des variétés avec des singularités coniques ou plus généralement des « pseudovariétés ». Nous considérons le cas particulier d'un cône $(C(Y), d, o)$ obtenu comme limite de variétés (M_i, g_i, p_i) avec

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1)\delta_i \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v > 0,$$

pour $\delta_i \to 0$. Grâce aux travaux de Ding, 2002, et Cheeger et Colding, 2000, il a été démontré que, à la fois sur le cône limite $C(Y)$ et sur sa section Y, il existe des opérateurs laplaciens $\Delta_{C(Y)}$ et Δ_Y bien définis. De plus, Δ_Y possède un spectre discret $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ avec $\lambda_k \to +\infty$. La première valeur propre non nulle vérifie $\lambda_1 \geqslant n-1$. Enfin, les fonctions propres ϕ_i associées à λ_i sont Lipschitz et les fonctions définies par

$$u(r, y) = r^{\alpha_i}\phi_i(y), \text{ où } \alpha_i > 0 \text{ est tel que } \lambda_i = \alpha_i(n-2+\alpha_i),$$

sont harmoniques sur $C(Y)$.

Il est possible de reformuler ces résultats dans le contexte plus général introduit par Lott–Sturm–Villani et Ambrosio–Gigli–Savaré des espaces métriques mesurés $\mathrm{RCD}(K, N)$: cela signifie que dans un sens « synthétique » la courbure de Ricci est minorée par K et la dimension majorée par N. Par stabilité de la condition RCD sous la convergence de Gromov–Hausdorff mesurée, les cônes limites $C(Y)$ auxquels nous nous intéressons sont des espaces $\mathrm{RCD}(0, n)$, et d'après un résultat de Ketterer, 2015a, leurs sections sont $\mathrm{RCD}(n-1, n)$, d'où l'on peut retrouver la borne inférieure sur λ_1.

Nous allons supposer que $C(Y)$ est k-symétrique. Par conséquent, pour i assez grand il existe un (k, ε_i)-splitting harmonique $u_i : B_1(p_i) \to \mathbb{R}^k$ avec $\varepsilon_i \to 0$. La suite $(u_i)_i$ converge alors vers une application splitting $u : C(Y) \to \mathbb{R}^k$ dont les composantes $(u^1, \ldots, u^k)$ sont harmoniques, linéaires et orthogonales. Puisque une fonction harmonique est de la forme $u^j = r^{\alpha_j}\phi_j$, il en résulte que $\alpha_j = 1$ et $\lambda_j = (n-1)$. Les k premières valeurs propres de Δ_Y coïncident donc avec $(n-1)$. On peut également prouver la réciproque : si les premières k valeurs propres de Y sont égales à $(n-1)$, alors, grâce au théorème 1.4 de Ketterer, 2015b, la section Y est une suspension sphérique et le cône $C(Y)$ scinde un espace euclidien de dimension k. Il est donc raisonnable de penser que si $C(Y)$ est k-symétrique mais pas $(k+1, \eta)$-symétrique, la valeur propre λ_{k+1} doit différer de $(n-1)$ par une constante positive. C'est le contenu de la proposition suivante.

Proposition 6.2 (Proposition 7.3, Cheeger, Jiang et Naber, 2021). *Fixons $\eta > 0$ et considérons une suite de variétés (M_i^n, g_i, p_i) telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1)\delta_i \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v,$$

avec $\delta_i \to 0$. Supposons que (M_i, g_i, p_i) converge vers un cône k-symétrique

$$(C(Y), d, o) = (\mathbb{R}^k \times C(Z), d, o),$$

et que $B_1(p_i)$ n'est pas $(k+1, \eta)$-symétrique. Alors les premières k-valeurs propres λ_j du Laplacien sur la section du cône Y sont égales à $(n-1)$ et il existe $\tau = \tau(n, v, \eta) > 0$ tel que :

$$\lambda_{k+1} > (n-1) + \tau.$$

Les auteurs montrent, par l'absurde, que si λ_{k+1} pouvait être arbitrairement proche de $(n-1)$, alors il serait possible d'obtenir pour un ε assez petit un $(k+1, C\varepsilon)$-splitting sur $C(Y)$, donné par $(x_1, \ldots, x_k, r^{\alpha_{k+1}}\varphi_{k+1}(y))$. Pour i assez grand, on trouverait alors un $(k+1, C\varepsilon)$-splitting sur la boule $B_1(p_i) \subset M_i$, ce qui contredit le fait que $B_1(p_i)$ n'est pas $(k+1, \eta)$-symétrique.

Une conséquence de cette proposition qui joue un rôle important dans la preuve du théorème 6.1 est donnée par le corollaire suivant.

Corollaire 6.3 (Lemme 7.8, CHEEGER, JIANG et NABER, 2021). *Fixons $\eta > 0$. Sous les mêmes hypothèses que dans la proposition précédente, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n, v, \eta)$ tel que pour toute fonction harmonique u sur $C(Y)$, s'il existe une constante $C > 0$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ tels que pour tout $(r, y) \in C(Y)$ nous avons*

$$|u(r, y)| \leqslant Cr^{1+\varepsilon} + C, \tag{7}$$

alors u dépend linéairement de $r(\cdot) = d(\cdot, o)$.

La preuve repose sur le fait qu'une fonction harmonique peut s'écrire

$$u(r, y) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^{\alpha_i} \phi_i(y), \tag{8}$$

où la convergence est au sens $W^{1,2}(C(Y))$. En choisissant ε_0 en fonction de τ donné dans la proposition précédente, il est possible de montrer que si u satisfait la condition (7), alors pour tout $i \geqslant k+1$ nous avons $b_i = 0$. Il ne reste alors que les termes avec $\alpha_i = 1$, et u dépend linéairement de la distance au sommet.

6.2. Esquisse de la preuve par l'absurde du théorème 6.1

Observons tout d'abord que nier la conclusion du théorème 6.1 permet d'obtenir une suite de variétés qui converge vers un cône limite qui est k-symétrique mais pas $(k+1, \eta)$-symétrique. En effet, si le résultat était faux, il existerait un $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ tel que pour tout δ la conclusion du théorème est fausse. Il est alors possible de choisir une suite $\delta_i \to 0$ telle que pour tout i il existe une variété (M_i^n, g_i, p_i) satisfaisant

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant \delta_i \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v,$$

et telle que, pour une certaine échelle, il n'existe pas de matrice de transformation, même si les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées. Il existe donc un rayon r_i vérifiant l'hypothèse (i), donc tel que pour tout $s \in [r_i, 1]$ les boules $B_s(p_i)$ sont (k, δ_i^2)-symétriques mais pas $(k+1, \eta)$-symétriques. Si r_i tend vers 0, ce qui comme nous allons le voir est le cas, nous pouvons considérer la suite de variétés ré-échelonnées $(M_i, r_i^{-2} g_i, p_i)$, qui converge vers un cône limite $(C(Y), d, p)$ k-symétrique $C(Y) = \mathbb{R}^k \times C(Z)$, mais pas $(k+1, \eta)$-symétrique.

En se servant de l'hypothèse (ii), il existe un (k, δ_i)-splitting $u_i : B_2(p_i) \to \mathbb{R}^k$. En revanche u_i ne peut pas être transformé en un (k, ε)-splitting pour toutes les échelles s dans $[r_i, 1[$ à l'aide de la composition avec une application linéaire. Cela signifie qu'à partir d'une certaine échelle, une transformation $T_{p,s}$ n'existe pas : nous pouvons donc considérer le plus petit rayon $s_i \in]r_i, 1]$ pour lequel il existe une transformation T_{p_i,s_i} telle que la composition $T_{p,s_i} \circ u_i$ est un (k, ε)-splitting. En particulier, par définition de s_i, pour l'échelle $s = s_i/10$, il n'existe pas de transformation $T_{p_i,s}$ qui fasse de u_i un (k, ε)-splitting.

Or, le fait que δ_i tend vers 0 implique que les rayons r_i, s_i convergent aussi vers 0. Si ce n'était pas le cas, grâce à l'inégalité de Bishop–Gromov il existerait une constante $C > 0$ telle que u_i restreint à $B_s(p_i)$, $s = s_i/10$, est un $(k, C\delta_i)$-splitting. Pour i assez grand cela impliquerait que u_i est un (k, ε)-splitting sur $B_s(p_i)$, ce qui contredirait donc la définition de s_i.

Il convient alors de considérer les variétés ré-échelonnées $(M_i^n, \tilde{g}_i, p_i)$ avec la métrique $\tilde{g}_i = s_i^{-2} g_i$, qui convergent comme observé ci-dessus vers $C(Y) = \mathbb{R}^{k+1} \times C(Z)$, $C(Y)$ non $(k+1, \eta)$-symétrique. Le but est de faire converger aussi la suite des splittings vers une fonction harmonique sur $C(Y)$ pour pouvoir exploiter le corollaire 6.3.

Pour ce faire on définit sur les variétés $(M_i^n, \tilde{g}_i, p_i)$ les fonctions

$$v_i = s_i^{-1}(T_{p_i,s_i} \circ u_i),$$

où sans perte de généralité nous avons supposé $u_i(p_i) = 0^k$. Avec ce choix, la constante de Lipschitz de v_i pour la métrique $\tilde{g}_i$ coïncide avec celle de $T_{p_i,s_i} \circ u_i$ pour la métrique g_i. Or, les applications $T_{p_i,s_i} \circ u_i$ sont toutes des (k, ε)-splitting, donc les constantes de Lipschitz de $T_{p_i,s_i} \circ u_i$ et v_i sont uniformément bornées par $(1+\varepsilon)$. Grâce à un résultat de convergence pour les fonctions lipschitziennes définies sur des suites convergentes en topologie de Gromov–Hausdorff, la suite $(v_i)_i$ converge vers une fonction harmonique définie sur le cône limite $v : C(Y) \to \mathbb{R}^k$ (voir la proposition 4.28 de Cheeger, Jiang et Naber, 2021).

On utilise alors une estimée pour la norme des matrices de transformation. Les auteurs montrent que pour tout $R \geqslant r \geqslant s_i$,

$$\|T_{x_i,r} \circ T_{x_i,R}^{-1}\| \leqslant \left(\frac{R}{r}\right)^{C\sqrt{\varepsilon}}.$$

Cela permet de montrer que si $\tilde{d}_i$ est la distance associée à $\tilde{g}_i$ et $x \in M_i^n$ est tel que $\tilde{d}_i(x, p_i) = R \in]1, s_i^{-1}]$, on obtient :

$$\|\nabla v_i(x, R)\|_{\tilde{g}_i} \leqslant C(1+\varepsilon)R^{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Ce contrôle passe à la fonction limite v. Il en résulte que pour tout $(R, x) \in C(Y)$ tel que $d(x, o) = R$, on a

$$|v(x, R)| \leqslant CR^{1+\sqrt{\varepsilon}} + C.$$

En sachant que ε est inférieur à ε_0 donné par le corollaire 6.3, on obtient que v est linéaire par rapport à la distance du sommet du cône. Il est possible alors de montrer que pour $v = (v^1, \ldots, v^k)$, les gradients sont linéairement indépendants, et que, sans perte de généralité, v^j coïncide avec la j-ème coordonnée $x^j : \mathbb{R}^k \times C(Z) \to \mathbb{R}$. Cela implique que v est un splitting à toutes les échelles. Pour i assez grand, v_i est alors un (k, ε)-splitting sur la boule $\tilde{B}_{10^{-1}}(p_i)$. En revenant à (M_i^n, g_i, p_i), pour i assez grand, l'application u_i est un (k, ε)-splitting à l'échelle $s_i/10$, ce qui contredit l'hypothèse que u_i ne pouvait pas être transformée en un (k, ε)-splitting à une échelle inférieure à s_i.

6.3. Esquisse d'une preuve due à G. Carron

En exploitant les résultats spectraux sur les cônes limites, il est possible de donner une preuve alternative du théorème de transformation 6.1. Nous expliquons à présent les ingrédients principaux d'une démonstration due à G. Carron.

On considère comme dans la section 6.1 un cône $C(Y)$, limite d'une suite de variétés (M_i, g_i, p_i), non effondrées et dont la courbure de Ricci est minorée. On observe que d'après le résultat de convergence du volume, le théorème 0.1 de l'article de Colding, 1997, les mesures dv_{g_i} associées aux métriques riemanniennes g_i convergent vers une mesure μ sur le cône $C(Y)$. Or, à partir du trou spectral donné par la proposition 6.2 et de la décomposition des fonctions harmoniques (8), on peut obtenir le résultat suivant.

Proposition 6.4. *Fixons $\eta > 0$ et considérons (M_i^n, g_i, p_i) une suite de variétés telles que*

$$\mathrm{Ric}_{g_i} \geqslant -(n-1)\delta_i \text{ et } \mathrm{vol}_{g_i}(B_1(p_i)) > v,$$

avec $\delta_i \to 0$.
Supposons que (M_i, g_i, p_i) converge vers un cône k-symétrique $(C(Y), d, o) = (\mathbb{R}^k \times C(Z), d, o)$ et que $B_1(p_i)$ n'est pas $(k+1, \eta)$-symétrique. Soit $h : C(Y) \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique telle que

$$\varepsilon = \fint_{B_1(o)} |\|\nabla h\|^2 - 1| d\mu \leqslant 1.$$

Alors il existe $\alpha = \alpha(n, v, \eta) > 0$ *et des constantes* c, Γ *telles que pour tout* $\theta \in]0, 1[$

$$\fint_{B_\theta(o)} |\|\nabla h\|^2 - c| d\mu \leqslant \Gamma \theta^\alpha \varepsilon, \quad |c - 1| \leqslant \Gamma \varepsilon.$$

Cela signifie que si h est une fonction harmonique dont le gradient est proche en moyenne de 1 sur la boule unité, alors h reste proche en moyenne d'une fonction linéaire pour toutes les échelles inférieures. Cela est le cas en particulier pour les composantes $(u^1, \dots, u^k)$ d'un (k, δ)-splitting.

L'exposant α dans la proposition précédente dépend du trou spectral τ entre les valeurs propres λ_k et λ_{k+1}.

Proposition 6.5. *Pour tout* $\varepsilon, \eta, v > 0$ *il existe* $\delta_0(n, v, \eta, \varepsilon)$ *tel que pour tout* $\delta \leqslant \delta_0$, *si* (M^n, g) *est une variété telle que*

$$\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\delta \text{ et } \mathrm{vol}_g(B_1(p)) > v,$$

et qui vérifie les hypothèses (i) *et* (ii) *du théorème 6.1, alors il existe* $\lambda \in]r_0, 1[$ *tel que pour tout* $\ell \in \mathbb{N}$ *satisfaisant* $\lambda^\ell \in]r_0, 1[$ *il existe une* $(k \times k)$ *matrice triangulaire inférieure* T_ℓ *telle que :*

1. *La composition* $T_\ell \circ u : B_{\lambda^\ell}(p) \to \mathbb{R}^k$ *est un* (k, ε)*-splitting.*
2. *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que* $\|T_{\ell+1} \circ T_\ell^{-1} - \mathbb{I}_k\| \leqslant C\varepsilon$.

Cela permet en réalité d'obtenir l'existence d'une matrice $T_{p,r}$ pour toutes les échelles $r \in [r_0, 1]$, et donc d'obtenir le même énoncé que celui du théorème 6.1 : grâce à l'inégalité de Bishop–Gromov, pour une échelle r comprise entre $\lambda^{\ell+1}$ et λ^ℓ l'application $T_\ell \circ u$ est une $(k, C(\lambda)\delta)$-splitting. On peut alors choisir δ de façon à ce que $T_\ell \circ u$ soit un (k, ε)-splitting pour tout $r \in]\lambda^{\ell+1}, \lambda^\ell[$. En d'autres termes, la matrice $T_{p,r}$ reste constante égale à T_ℓ pour tout $r \in]\lambda^{\ell+1}, \lambda^\ell[$.

Nous donnons les étapes essentielles de la preuve de la proposition 6.5, en évitant la plupart des détails techniques.

Esquisse de la démonstration. La notation $\psi(\delta)$ indique dans la suite une quantité qui dépend de η, v, n, δ et qui tend vers 0 quand δ tend vers 0.

Étape 1. Puisque les boules $B_1(p)$ sont (k, δ^2)-symétriques mais pas $(k+1, \eta)$-symétriques, elles convergent, pour δ qui tend vers 0, vers la boule unité dans un cône $C(Y) = \mathbb{R}^k \times C(Z)$. Or, les (k, δ)-splittings harmoniques $u : B_1(p) \to \mathbb{R}^k$ possèdent une borne uniforme sur leur constante de Lipschitz, donc d'après la proposition 4.28 de l'article de Cheeger, Jiang et Naber, 2021, ils forment une famille pré-compacte par rapport à la convergence $W^{1,2}$ des fonctions sur des espaces convergeant en topologie de Gromov–Hausdorff. Alors pour δ assez petit, il existe un (k, δ)-splitting u_δ,

que dans la suite nous notons u, et une fonction harmonique $h : B_1^{C(Y)}(o) \to \mathbb{R}^k$ telle que

$$\left| \fint_{B_1(p)} \langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle dv_g - \fint_{B_1^{C(Y)}(o)} \langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle d\mu \right| \leqslant \psi(\delta).$$

Étape 2. La matrice de composantes $H_{ij} = \langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle$ est proche en moyenne de l'identité $\mathbb{I}_k$, c'est-à-dire :

$$\fint_{B_1^{C(Y)}(o)} |\langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle - \delta_{ij}| d\mu \leqslant \delta + \psi(\delta) = \psi_1(\delta). \tag{9}$$

Pour le démontrer, nous définissons $\zeta_{ij}(y, s) = s - \delta_{ij}$ pour tout $i, j = 1, \dots, k$. Puisque $\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle$ converge vers H_{ij} au sens L^1 pour δ qui tend vers 0, et grâce à la convergence des mesures, nous pouvons nous servir d'une remarque dans l'article de Gigli, Mondino et Savaré, 2015 (voir l'égalité (6.6) et ce qui suit, avec $p = 1$) qui, en appliquant ζ_{ij} à $\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle$, permet d'obtenir

$$\left| \fint_{B_1^{C(Y)}(o)} |\langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle - \delta_{ij}| d\mu - \fint_{B_1(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - \delta_{ij}| dv_g \right| \leqslant \psi(\delta).$$

Cette dernière inégalité implique (9), combinée au fait que, par définition de (k, δ)-splitting nous avons

$$\fint_{B_1(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - \delta_{ij}| dv_g \leqslant \delta. \tag{10}$$

Étape 3. Grâce à (9), nous pouvons appliquer à h la proposition 6.4. Il existe donc une matrice A telle que

$$\|A - \mathbb{I}_k\| \leqslant \Gamma \psi_1(\delta) \tag{11}$$

et pour tout $\theta \in]0, 1[$, $i, j = 1, \dots, k$

$$\fint_{B_\theta^{C(Y)}(o)} |\langle \nabla h^i, \nabla h^j \rangle - A_{ij}| d\mu \leqslant \Gamma \theta^\alpha \psi_1(\delta).$$

En se servant de (9), (10) et de l'inégalité de Bishop–Gromov, nous obtenons pour tout $\theta \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \fint_{B_\theta(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j \rangle - A_{ij}| dv_g &\leqslant \Gamma \theta^\alpha \psi_1(\delta) + \theta^{-n} \psi_1(\delta) + \frac{v_{-\delta}(1)}{v_{-\delta}(\theta)} \delta \\ &= \Gamma \theta^\alpha \psi_1(\delta) + \psi_2(\theta, \delta). \end{aligned}$$

Étape 4. L'inégalité (11) implique qu'en choisissant δ tel que $\psi_1(\delta)$ est assez petit, il existe une matrice triangulaire inférieure T qui satisfait

$$^tTAT = \mathbb{I}_k \text{ et } \|T - \mathbb{I}_k\| \leqslant \Gamma\psi_1(\delta).$$

Nous définissons alors pour $\theta \in]0,1[$:

$$v = T \circ u : B_\theta(p) \to \mathbb{R}^k.$$

Avec ce choix de T, l'application v est telle que :

$$\sup_{B_\theta(p)} |\nabla v| \leqslant (1+\delta)(1+\Gamma\psi_1(\delta)) = f(\delta),$$

$$⨍_{B_\theta(p)} |\langle \nabla v^i, \nabla v^j\rangle - \delta_{ij}| \leqslant (1+\Gamma\psi_1(\delta))(\Gamma\theta^\alpha\psi_1(\delta) + \psi_2(\theta,\delta)) = g(\delta,\theta).$$

Étape 5. Observons tout d'abord que, en vertu de l'inégalité de Bishop–Gromov, il existe une constante positive $C_0(n)$ telle que pour tout $r \in [r_0, 1]$, u restreint à $B_r(p)$ est un $(k, Cr^{-n}\delta)$-splitting. En outre, la preuve du lemme 3.34 de l'article de Cheeger et Naber, 2015, fournit un argument pour prouver le fait suivant :

Lemme 6.6. *Il existe une constante $C(n) > 1$ telle que si $\mathrm{Ric}_g \geqslant -(n-1)\eta$ et $u : B_1(p) \to \mathbb{R}^k$ est une fonction harmonique satisfaisant*

$$\sup_{B_1(p)} |\nabla u| \leqslant C(n) \quad \textit{et} \quad ⨍_{B_1(p)} |\langle \nabla u^i, \nabla u^j\rangle - \delta_{ij}| \leqslant \eta,$$

alors u restreinte à la boule $B_{1/2}(p)$ est un $(k, C(n)\sqrt{\eta})$-splitting.

Nous allons choisir θ et δ de façon à ce que l'application v satisfasse les hypothèses du lemme précédent. Nous fixons d'abord δ_0 tel que pour tout $\delta \leqslant \delta_0$ nous avons $f(\delta) \leqslant C(n)$ et de plus

$$(1+\Gamma\psi_1(\delta))\Gamma\psi_1(\delta) < 1.$$

Ensuite nous choisissons $\theta \in]0,1[$ tel que pour tout $\delta \leqslant \delta_0$:

$$(1+\Gamma\psi_1(\delta))\Gamma\psi_1(\delta)\theta^\alpha \leqslant \theta^\alpha := \frac{\varepsilon^2}{2C(n)^2}.$$

Enfin, avec θ fixé ci-dessus, nous choisissons $\delta \in]0, \delta_0[$ tel que

$$(1+\Gamma\psi_1(\delta))\psi_2(\theta,\delta) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{2C(n)^2},$$

et de plus tel que

$$\frac{\delta C_0(n)}{\varepsilon} < \theta = \left(\frac{\varepsilon^2}{2C(n)^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Avec ces choix de θ et δ, nous avons deux possibilités. Si $r_0 > \theta$, alors pour tout $r \in [r_0, 1]$

$$r^n \geqslant r_0^n > \theta > \frac{C_0(n)\delta}{\varepsilon}.$$

Cela implique que u restreint aux boules $B_r(x)$ est un (k,ε)-splitting sans besoin de composer avec une matrice de transformation. Sinon, si $\theta \geqslant r_0$, les choix de δ et θ garantissent que $f(\delta) \leqslant C(n)$ et $g(\theta,\delta) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{C(n)^2}$. En appliquant alors le lemme ci-dessus, nous en déduisons que l'application $v = T \circ u$ restreinte à la boule de rayon $\theta/2$ est un (k,ε)-splitting. Il existe donc $\lambda = \theta/2$ et une matrice triangulaire inférieure $T_1 = T$ telle que

$$T_1 \circ u : B_\lambda(p) \to \mathbb{R}^k$$

est un (k,ε)-splitting. De plus, T_1 est proche de l'identité : $\|T_1 - \mathbb{I}_k\| \leqslant C\varepsilon$. En répétant le même argument sur $B_\lambda(p)$ et l'application $T_1 \circ u$, puis sur $B_{\lambda^2}(p)$ et $T_2 \circ u$, et ainsi de suite tant que λ^ℓ est supérieur à r_0, nous obtenons le résultat souhaité. □

Références

Anderson, M. T. (1989). « Ricci curvature bounds and Einstein metrics on compact manifolds », *J. Amer. Math. Soc.* **2** (3), p. 455-490.

——— (1990). « Convergence and rigidity of manifolds under Ricci curvature bounds », *Invent. Math.* **102** (2), p. 429-445.

——— (1995). « Einstein metrics and metrics with bounds on Ricci curvature ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*. Birkhäuser, Basel, p. 443-452.

Antonelli, G., Brué, E. et Semola, D. (2019). « Volume bounds for the quantitative singular strata of non collapsed RCD metric measure spaces », *Anal. Geom. Metr. Spaces* **7** (1), p. 158-178.

Bamler, R. (2017). « Structure theory of singular spaces », *J. Funct. Anal.* **272** (6), p. 2504-2627.

——— (2018). « Convergence of Ricci flows with bounded scalar curvature », *Ann. of Math.* (2) **188** (3), p. 753-831.

Bando, S., Kasue, A. et Nakajima, H. (1989). « On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth », *Invent. Math.* **97** (2), p. 313-349.

Biquard, O. (2013). « Désingularisation de métriques d'Einstein. I », *Invent. Math.* **192** (1), p. 197-252.

Biquard, O. et Minerbe, V. (2011). « A Kummer construction for gravitational instantons », *Comm. Math. Phys.* **308** (3), p. 773-794.

Breiner, C. et Lamm, T. (2015). « Quantitative stratification and higher regularity for biharmonic maps », *Manuscripta Math.* **148** (3-4), p. 379-398.

Brué, E., Pasqualetto, E. et Semola, D. (2019). « Rectifiability of the reduced boundary for sets of finite perimeter over $RCD(K, N)$ spaces », *arXiv : 1909.00381*.

Burago, D., Burago, Y. et Ivanov, S. (2001). *A course in metric geometry*. T. 33. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, p. xiv+415.

Cheeger, J. (1967). *Comparison and Finiteness Theorems for Riemannian manifolds*. Thesis (Ph.D.)–Princeton University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, p. 75.

——— (1979). « On the spectral geometry of spaces with cone-like singularities », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **76** (5), p. 2103-2106.

——— (1983). « Spectral geometry of singular Riemannian spaces », *J. Differential Geom.* **18** (4), 575-657 (1984).

——— (2001). *Degeneration of Riemannian metrics under Ricci curvature bounds*. Lezioni Fermiane. [Fermi Lectures]. Scuola Normale Superiore, Pisa, p. ii+77.

——— (2003). « Integral bounds on curvature elliptic estimates and rectifiability of singular sets », *Geom. Funct. Anal.* **13** (1), p. 20-72.

——— (2012). « Quantitative differentiation : a general formulation », *Comm. Pure Appl. Math.* **65** (12), p. 1641-1670.

Cheeger, J. et Colding, T. H. (1996). « Lower bounds on Ricci curvature and the almost rigidity of warped products », *Ann. of Math.* (2) **144** (1), p. 189-237.

——— (1997). « On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I », *J. Differential Geom.* **46** (3), p. 406-480.

——— (2000). « On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III », *J. Differential Geom.* **54** (1), p. 37-74.

Cheeger, J., Colding, T. H. et Tian, G. (2002). « On the singularities of spaces with bounded Ricci curvature », *Geom. Funct. Anal.* **12** (5), p. 873-914.

Cheeger, J., Haslhofer, R. et Naber, A. (2013). « Quantitative stratification and the regularity of mean curvature flow », *Geom. Funct. Anal.* **23** (3), p. 828-847.

——— (2015). « Quantitative stratification and the regularity of harmonic map flow », *Calc. Var. Partial Differential Equations* **53** (1-2), p. 365-381.

Cheeger, J., Jiang, W. et Naber, A. (2021). « Rectifiability of singular sets of noncollapsed limit spaces with Ricci curvature bounded below », *Ann. Math.* (2) **193** (2), p. 407-538.

Cheeger, J. et Naber, A. (2013a). « Lower bounds on Ricci curvature and quantitative behavior of singular sets », *Invent. Math.* **191** (2), p. 321-339.

——— (2013b). « Quantitative stratification and the regularity of harmonic maps and minimal currents », *Comm. Pure Appl. Math.* **66** (6), p. 965-990.

——— (2015). « Regularity of Einstein manifolds and the codimension 4 conjecture », *Ann. of Math.* (2) **182** (3), p. 1093-1165.

Colding, T. H. (1997). « Ricci curvature and volume convergence », *Ann. of Math.* (2) **145** (3), p. 477-501.

——— (2012). « New monotonicity formulas for Ricci curvature and applications. I », *Acta Math.* **209** (2), p. 229-263.

Colding, T. H. et Naber, A. (2013). « Characterization of tangent cones of noncollapsed limits with lower Ricci bounds and applications », *Geom. Funct. Anal.* **23** (1), p. 134-148.

Dai, X. et Rong, X., éd. (2012). *Metric and differential geometry*. T. 297. Progress in Mathematics. The Jeff Cheeger anniversary volume, Lectures from the International Conference held at the Chern Institute of Mathematics, Tianjin, and the Capital Normal University, Beijing, May 11–15, 2009. Birkhäuser/Springer, Basel, p. xlviii+361.

De Lellis, C. et al. (2018). « Rectifiability and upper Minkowski bounds for singularities of harmonic Q-valued maps », *Comment. Math. Helv.* **93** (4), p. 737-779.

Ding, Y. (2002). « Heat kernels and Green's functions on limit spaces », *Comm. Anal. Geom.* **10** (3), p. 475-514.

Donaldson, S. K. (2012). « Calabi-Yau metrics on Kummer surfaces as a model gluing problem », in : *Advances in geometric analysis*. T. 21. Adv. Lect. Math. (ALM). Int. Press, Somerville, MA, p. 109-118.

Edelen, N. et Engelstein, M. (2019). « Quantitative stratification for some free-boundary problems », *Trans. Amer. Math. Soc.* **371** (3), p. 2043-2072.

Focardi, M., Marchese, A. et Spadaro, E. (2015). « Improved estimate of the singular set of Dir-minimizing Q-valued functions via an abstract regularity result », *J. Funct. Anal.* **268** (11), p. 3290-3325.

Foscolo, L. (2018). « Gravitational instantons and degenerations of Ricci-flat metrics on the K3 surface », Fields Institute Communications.

Gibbons, G. W. et Pope, C. N. (1979). « The positive action conjecture and asymptotically Euclidean metrics in quantum gravity », *Comm. Math. Phys.* **66** (3), p. 267-290.

Gigli, N., Mondino, A. et Savaré, G. (2015). « Convergence of pointed non-compact metric measure spaces and stability of Ricci curvature bounds and heat flows », *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **111** (5), p. 1071-1129.

Jiang, W. et Naber, A. (2021). « L^2 curvature bounds on manifolds with bounded Ricci curvature », *Ann. Math.* (2) **193** (1), p. 107-222.

Joyce, D. (2000). *Compact manifolds with special holonomy*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, p. xii+436.

——— (2004). « Constructing compact manifolds with exceptional holonomy », in : *Strings and geometry*. T. 3. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 177-191.

Ketterer, C. (2015a). « Cones over metric measure spaces and the maximal diameter theorem », *J. Math. Pures Appl.* (9) **103** (5), p. 1228-1275.

——— (2015b). « Obata's rigidity theorem for metric measure spaces », *Anal. Geom. Metr. Spaces* **3** (1), p. 278-295.

LeBrun, C. et Singer, M. (1994). « A Kummer-type construction of self-dual 4-manifolds », *Math. Ann.* **300** (1), p. 165-180.

Li, N. et Naber, A. (2020). « Quantitative estimates on the singular sets of Alexandrov spaces », *Peking Math. J.* **3** (2), p. 203-234.

Mondino, A. et Naber, A. (2019). « Structure theory of metric measure spaces with lower Ricci curvature bounds », *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*) **21** (6), p. 1809-1854.

Naber, A. (2014). « The geometry of Ricci curvature ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II*. Kyung Moon Sa, Seoul, p. 911-937.

——— (2020). « Lecture notes on rectifiable Reifenberg for measures », in : *Harmonic analysis and applications*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS) ; Princeton, NJ : Institute for Advanced Study (IAS), p. 289-346.

Naber, A. et Valtorta, D. (2017a). « Rectifiable-Reifenberg and the regularity of stationary and minimizing harmonic maps », *Ann. of Math.* (2) **185** (1), p. 131-227.

——— (2017b). « Volume estimates on the critical sets of solutions to elliptic PDEs », *Comm. Pure Appl. Math.* **70** (10), p. 1835-1897.

——— (2019). « Energy identity for stationary Yang Mills », *Invent. Math.* **216** (3), p. 847-925.

Naber, A., Valtorta, D. et Veronelli, G. (2019). « Quantitative regularity for p-harmonic maps », *Comm. Anal. Geom.* **27** (1), p. 111-159.

Petersen, P. (2016). *Riemannian geometry*. Third. T. 171. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Cham, p. xviii+499.

Reifenberg, E. R. (1960). « Solution of the Plateau Problem for m-dimensional surfaces of varying topological type », *Acta Math.* **104**, p. 1-92.

Simon, L. (1996). *Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Based on lecture notes by Norbert Hungerbühler. Birkhäuser Verlag, Basel, p. viii+152.

Tian, G. (1990). « On Calabi's conjecture for complex surfaces with positive first Chern class », *Invent. Math.* **101** (1), p. 101-172.

Topiwala, P. (1987). « A new proof of the existence of Kähler-Einstein metrics on $K3$. I, II », *Invent. Math.* **89** (2), p. 425-448, 449-454.

Ilaria Mondello

Laboratoire d'Analyse et Mathématiques Appliquées
Université Paris Est Créteil
61 Avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil Cedex

E-mail : ilaria.mondello@u-pec.fr

Séminaire BOURBAKI Novembre 2021
73e année, 2021–2022, no 1185, p. 181 à 245
doi: 10.24033/ast.1186

JOININGS CLASSIFICATION AND APPLICATIONS
[*after* Einsiedler and Lindenstrauss]

by **Menny Aka**

Introduction

Fix a group A and consider a set of measure-preserving actions of A on $\mathrm{X_i} = (X_i, \mathscr{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, r$, where X_i is a Borel probability space with a measure μ_i and a σ-algebra $\mathscr{B}_i$. Consider the joint action (also called the diagonal action) of A on

$$\mathrm{X} = (X_1 \times \cdots \times X_r, \mathscr{B}_1 \times \cdots \times \mathscr{B}_r)$$

given by $a.(x_1, \dots, x_r) = (a.x_1, \dots, a.x_r)$. A ($r$-fold) *joining* of the systems $\{\mathrm{X_i}\}_{i=1}^r$ is an A-invariant probability measure μ on X with $(\pi_i)_* \mu = \mu_i$ for $i = 1, \dots, r$ where $\pi_i \colon X \to X_i$ is the natural projection map.

There always exists at least one joining, namely the *trivial joining*, which is the product measure $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_r$. When this is the only possible joining of the systems $\{\mathrm{X_i}\}_{i=1}^r$ one says that these systems are *disjoint*. The systematic study of joinings stems from Furstenberg's seminal paper (Furstenberg, 1967). Furstenberg marked an analogy between joinings and the arithmetic of integers: saying that two measure-preserving systems are disjoint is analogous to saying that their least common multiple is their product. The analogy works in one direction; measure-preserving systems admitting a non-trivial common factor are never disjoint: recall that a *factor* of a measure-preserving system $\mathrm{X} = (X, \mathscr{B}, \mu, A)$ is a measure-preserving system $\mathrm{Y} = (Y, \mathscr{C}, \nu, A)$ and a measure-preserving map $\phi \colon X \to Y$ which intertwines the action of A, that is, for all $a \in A$ we have $a.\phi(x) = \phi(a.x)$ for μ-almost everywhere. Like integers, any measure-preserving system has itself and the trivial system (one-point system) as factors. Moreover, like integers, as stated above, if two measure-preserving systems have a common factor, they have a non-trivial joining, called the relatively independent joining over a common factor (see e.g., Einsiedler and Ward, 2011, §6.5). Furstenberg (1967) asked if this analogy also works in the other direction: if two systems do not have any common factor, must they be disjoint? Rudolph (1979) answered negatively, providing the first counterexamples. Joinings are nonetheless a strong tool in ergodic theory, as exemplified by Glasner (2003)

©Astérisque 438, SMF 2022

which gives a complete treatment of ergodic theory via joinings. The broad applicability of the classification of possible joinings of certain systems was already visible in the work of Furstenberg (1967), where he solves a question in Diophantine approximation using joinings. We refer the reader also to the recent survey of de la Rue (2020) about the broad use of joinings in ergodic theory.

Roughly said, the study of joinings is the study of all possible ways two systems (or r systems) can be embedded as factors of another system, which is in turn spanned by them. When two systems are *not* disjoint, this is a sign that there is strong relation between them. The main topic of this survey is a very good example of this principle. This is a survey of the work of Einsiedler and Lindenstrauss on joinings of higher-rank torus actions on S-arithmetic homogeneous spaces (Einsiedler and Lindenstrauss, 2019), which extends their previous paper (Einsiedler and Lindenstrauss, 2007). They consider torus actions on two (or r) homogeneous spaces which are quotients of S-arithmetic points of perfect algebraic groups, equipped with the uniform Haar probability measure on each quotient. They show in particular that if such systems are not disjoint, there must be a strong *algebraic* relation between the corresponding perfect algebraic groups, exemplifying the principle stated above. This may remind the reader of the folklore Goursat's Lemma from group theory; while the latter is a natural structural theorem about subgroups of a product, the joining theorem of Einsiedler and Lindenstrauss is a striking instance of measure rigidity, where the existence of non-trivial joinings in this setting can only be due to a strong algebraic relation.

The main result of Einsiedler and Lindenstrauss (2019, Theorem 1.7) classifies joinings on higher-rank torus actions on a product of two (or r) homogenous spaces of the form

$$\Gamma_1\backslash\mathbb{G}_1(\mathbb{Q}_S)\times\Gamma_2\backslash\mathbb{G}_2(\mathbb{Q}_S)$$

as we now state after recalling the necessary definitions. The measure spaces we consider are S-arithmetic homogeneous quotients of perfect groups. More precisely, let $\mathbb{G}$ be a perfect Zariski-connected linear algebraic group defined over $\mathbb{Q}$ and let S be a finite set of places of $\mathbb{Q}$. Let $\mathbb{Q}_S$ denote $\prod_{s\in S}\mathbb{Q}_s$ (with $\mathbb{Q}_\infty=\mathbb{R}$). An S-arithmetic quotient is a quotient space of the form $\Gamma\backslash G$ with G being a finite-index subgroup of $\mathbb{G}(\mathbb{Q}_S)$ and Γ is an irreducible arithmetic lattice commensurable to $\mathbb{G}(\mathscr{O}_S)$. Here, $\mathscr{O}_S$ denotes the ring of S-adic integers. Such an S-arithmetic quotient is said to be *saturated by unipotent* if the group generated by all unipotent elements of G acts ergodically on $\Gamma\backslash G$. For example, for $\mathbb{G}=\mathrm{SL}_n$ (or more generally simply-connected algebraic groups) the quotient $\Gamma\backslash\mathbb{G}(\mathbb{Q}_S)$ is saturated by unipotents.

A probability measure μ on an S-arithmetic quotient $\Gamma\backslash G$ is called *algebraic over* $\mathbb{Q}$ if there exists an algebraic group $\mathbb{H}$ defined over $\mathbb{Q}$ and a finite-index subgroup $H<\mathbb{H}(\mathbb{Q}_S)$ such that $\mu=m_{\Gamma Hg}$ where $g\in G$ and $m_{\Gamma Hg}$ denotes the normalized Haar measure on a single (necessarily closed, by the finiteness of μ) orbit - see §2.1 for a detailed definition.

The joinings we aim to classify are joinings of S-arithmetic quotients $X_i = \Gamma_i \backslash G_i$ which are saturated by unipotents, equipped with Haar probability measures $m_{X_i} = m_{\Gamma\backslash G}$, and a torus action which we now define. Following the notation of Einsiedler and Lindenstrauss (2019) we say that a subgroup $A < G$ is of class-$\mathscr{A}'$ if it is simultaneously diagonalizable and the projection of $a \in A$ to $\mathbb{G}(\mathbb{Q}_s)$ for any $s \in S$ satisfies the following: for $s = \infty$ it has only positive real eigenvalues, and for s equal to a finite prime p, we assume that all the eigenvalues are powers of θ_p for some $\theta_p \in \mathbb{Q}_p^\times$ with $\left|\theta_p\right|_p \neq 1$ chosen independently of $a \in A$. A homomorphism $\phi\colon \mathbb{Z}^d \to G$ is said to be of class $\mathscr{A}'$ if it is proper and $\phi(\mathbb{Z}^d)$ is of class-$\mathscr{A}'$. The term *higher-rank torus action* refers to such a homomorphism with $d \geqslant 2$. We are ready to state the main theorem of Einsiedler and Lindenstrauss (2019, Theorem 1.7):

Theorem 1.1 (Einsiedler–Lindenstrauss, 2019). *Let $r, d \geqslant 2$ and let $\mathbb{G}_1, \dots, \mathbb{G}_r$ be perfect algebraic groups defined over $\mathbb{Q}$, $\mathbb{G} = \prod \mathbb{G}_i$, and S be a finite set of places of $\mathbb{Q}$. Let $X_i = \Gamma_i \backslash G_i$ be S-arithmetic quotients for $G_i < \mathbb{G}_i(\mathbb{Q}_S)$ which are saturated by unipotents and set $G = \prod_{i=1}^r G_i$ and $X = \prod_{i=1}^r X_i$. Let $\phi_i\colon \mathbb{Z}^d \to G_i$ be homomorphisms such that $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)\colon \mathbb{Z}^d \to G$ is of class-$\mathscr{A}'$, and such that the projection of ϕ_i to every $\mathbb{Q}$-almost simple factor of $\mathbb{G}_i(\mathbb{Q}_S)$ is proper. Let $A = \phi(\mathbb{Z}^d)$ and suppose μ is an A-invariant and ergodic joining of the actions of $A_i = \phi_i(\mathbb{Z}^d)$ on X_i equipped with the Haar measure m_{X_i}. Then, μ is an algebraic measure defined over $\mathbb{Q}$.*

This theorem exemplifies the above principle concerning disjointness: let $\mathbb{H} < \mathbb{G}$ be the group showing the algebraicity of μ. If $\mathbb{H} = \mathbb{G}$ then μ is the trivial joining. Otherwise, $\mathbb{H}$ arises from a very strong relation between the algebraic groups $\mathbb{G}_i$. Indeed, certain of their $\mathbb{Q}$-simple factors need to be isogenous *over* $\mathbb{Q}$. In particular, if $\mathbb{G}_i$ are pairwise non-$\mathbb{Q}$-isogenous almost simple groups, any joining must be the trivial one. This situation strongly echoes Goursat's Lemma from group theory.

Taking again the broader viewpoint of measure rigidity for torus action (or $\mathbb{Z}^d$-actions) on homogeneous spaces, Theorem 1.1 is the most complete result in this context. Such rigidity results are currently only possible under a positive entropy assumption. In our context, the positive entropy assumption is hidden in the assumption that we join homogeneous spaces equipped with the Haar probably measure on each quotient (we give more details below). Moreover, the assumption that the groups are perfect is essential: considering more general groups in both factors would allow to recast the classification of $\mathbb{Z}^k$-actions on solenoids (including the zero entropy case - a notoriously difficult problem), as a classification problem of joinings.

Theorem 1.1 is already interesting when $r = 2$ and $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_n$ for $n \geqslant 3$ and $d \geqslant 2$, or for $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ and $d = 2$. While reading this survey, the reader is advised to concentrate on these cases. Indeed, the techniques used and the main steps of the proofs of Einsiedler and Lindenstrauss (2007) and Einsiedler and Lindenstrauss (2019) are already visible when one considers the case where $\mathbb{G}_1$

and $\mathbb{G}_2$ are equal to SL_n for $n \geqslant 3$ or to $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$, and where $S = \{\infty\}$, that is, where we consider real Lie groups. Therefore, apart from describing the main result of Einsiedler and Lindenstrauss (2019) in this introduction, we will reduce this survey to these cases.

To end this introduction we present a few images of the following arithmetic application (Aka, Einsiedler, and Shapira, 2016) which appeared at the same time as (Einsiedler and Lindenstrauss, 2019). We discuss further applications in §6.

For $D \in \mathbb{N}$ write

$$\mathcal{S}^2(D) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 : x^2+y^2+z^2 = D, \gcd(x,y,z) = 1\right\}.$$

By Legendre and Gauss we have $\mathcal{S}^2(D) \neq \emptyset$ if and only if $D \neq 0,4,7 \mod 8$. Consider

$$P_D := \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \mathcal{S}^2(D) \subset \mathcal{S}^2 := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}. \tag{1}$$

By a celebrated theorem of Duke (1988), based on a breakthrough of Iwaniec (1987), P_D equidistribute on $\mathcal{S}^2$ when $D \to \infty$ along $D \neq 0,4,7 \mod 8$. That is, the following weak-* convergence

$$\mu_D := \frac{1}{|\mathcal{S}^2(D)|} \sum_{v \in \mathcal{S}^2(D)} \delta_{\frac{v}{\sqrt{D}}} \longrightarrow m_{\mathcal{S}^2}$$

holds, where $m_{\mathcal{S}^2}$ is the uniform (cone) measure on $\mathcal{S}^2$.

We wish to join this equidistribution problem with another equidistribution problem in a natural way. For each $v \in \mathcal{S}^2(D)$ we consider the two-dimensional lattice $\Lambda_v := v^\perp \cap \mathbb{Z}^3$ which we can consider up to rotation as lying in a fixed plane of $\mathbb{Q}^3$. We denote it by $[\Lambda_v]$ and call it *the* (*shape of the*) *orthogonal lattice of* v. The set $Q_D := \left\{[\Lambda_v] : v \in \mathcal{S}^2(D)\right\}$ can be considered as a subset of the modular surface $X_2 := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ which parametrizes the space of two-dimensional lattices up to rotation, and carries a natural invariant probability measure m_{X_2}. A careful analysis (see e.g., Ellenberg, Michel, and Venkatesh, 2013, §5.2) shows that the normalized counting measure on Q_D also equidistributes as $D \to \infty$ to m_{X_2}, by a variant of Duke's Theorem. This construction yields the following natural problem: does the normalized counting measure on

$$J_D := \left\{(v, [\Lambda_v]) : v \in \mathcal{S}^2(D)\right\} \tag{2}$$

equidistribute to the product measure $m_{\mathcal{S}^2} \otimes m_{X_2}$ when $D \to \infty$ with $D \neq 0,4,7 \mod 8$?

We conjecture that it does (mainly because we don't see a reason why it shouldn't). Here is some "visible" evidence: for the D's below, we divide the modular surface X_2 using the height function into two (resp. three) equal m_{X_2}-measure regions

and call lattices in each region non-stretched/stretched (resp. non-stretched/mildly stretched/super-stretched) and color each point on $\frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \mathbb{S}^2(D)$ with a different color according to the type of its orthogonal lattice. In figures 1 and 2 below, one can see the distribution of the corresponding points together with the number of points of each type for $D = 101, 8011, 104851, 14500001$.

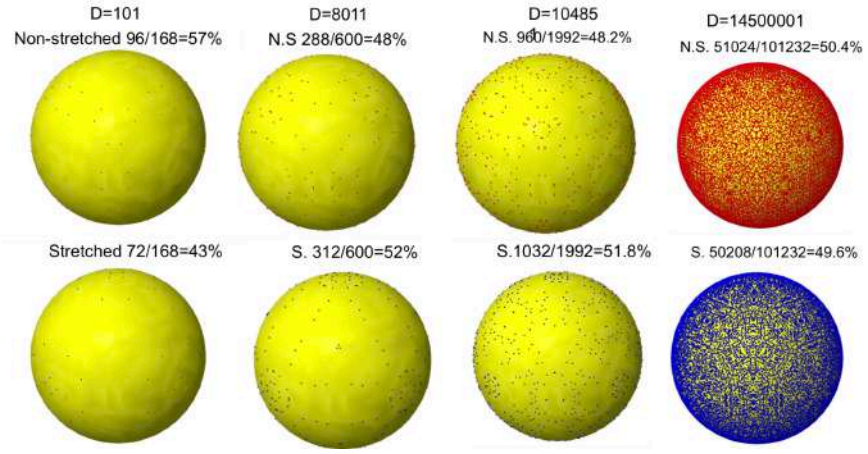


Figure 1: non-stretched vs. stretched

Both equidistribution problems in $\mathbb{S}^2$ and in X_2 may be individually phrased as two individual equidistribution problems on an S-arithmetic (or adelic) quotient as defined above (see § 6.1 for more details). Linnik could prove these results under a congruence condition on D modulo a fixed arbitrary prime (see § 6.1 for more details). It turns out that the coupling of $v \in \mathbb{S}^2(D)$ with its orthogonal lattice $[\Lambda_D]$ gives rise to a joining of the above S-arithmetic quotient. Under congruence conditions at *two* fixed arbitrary primes, one could apply Theorem 1.1 to deduce the equidistribution of the normalized counting measure on J_D to $m_{\mathbb{S}^2} \otimes X_2$ when $D \to \infty$ along $D \neq 0, 4, 7 \mod 8$ and the congruence conditions modulo the above two fixed primes. Recently Blomer and Brumley (2020) showed that under the Generalized Riemann Hypothesis, the above equidistribution holds along $D \neq 0, 4, 7 \mod 8$ without any congruence conditions.

1.1. Bird's-eye view and the organization of this survey

Let's give a (very subjective and entropy-centred) bird's-eye view of the main ingredients used in the proofs of the main theorems of the works Einsiedler and Lindenstrauss (2007, 2019). There are four main ingredients, all related to entropy:

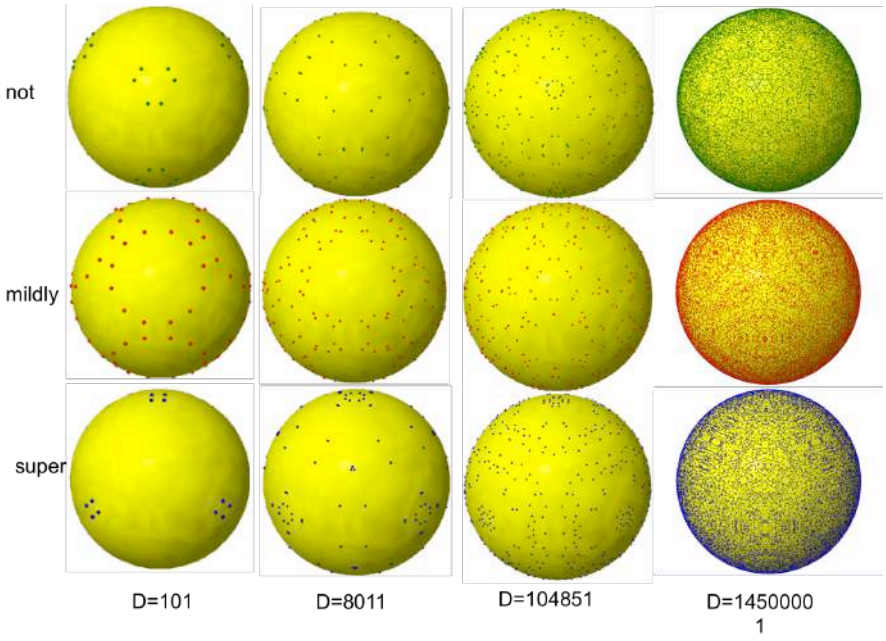


Figure 2: non-stretched vs. mildly stretched vs. super-stretched

- ▷ **Basic ingredient:** Leafwise measures, Lyapunov weights, entropy contribution, and in particular the relation between maximal entropy contribution and invariance.
- ▷ **Second ingredient:** Product structure for coarse Lyapunov weights, Abramov–Rokhlin Formula for coarse Lyapunov weights as a corollary.
- ▷ **Third ingredient:** The high-entropy method.
- ▷ **Fourth ingredient:** The low-entropy method.

As entropy considerations underlie all the above ingredients and every aspect of the work we survey, the title of §2 is entropy. In §2.1 we discuss a general setting and notation for the entire survey. In Sections 2.2-2.4 we review the basic ingredient, giving a bit of intuition and introducing several representative examples that will be discussed throughout the survey. In Sections 2.5-2.8 we discuss the second ingredient. Besides the product structure, which is discussed in §2.5, Lemma 2.7 also plays a central role. Its proof is based on a construction of a special partition (a partition which is subordinate to a given subgroup of a given stable horospherical subgroup). Such constructions play a major role also in the proofs of the results, which constitute the basic ingredient.

Using only the basic and the second ingredients, one can already draw several interesting corollaries, which we discuss in Section 3. For example, Corollary 3.1, which we call the "two ingredients joinings theorem", already gives the ability to reach strong conclusions on joinings in specific situations (which actually arise in applications), and Corollary 3.7 gives an important first step toward proving Theorem 1.1, and is used again and again throughout the proof.

In section 4 we introduce the third ingredient, the high-entropy method, which is summarized in theorem 4.1. The main Theorem of Einsiedler and Lindenstrauss (2007) uses exactly these three ingredients (and could be referred to as the "three ingredients joinings theorem") and the method of its proof is exemplified by classifying all joinings in a specific representative example, see Theorem 4.2.

The main theorem of Einsiedler and Lindenstrauss (2019) (Theorem 1.1) generalizes the main theorem of Einsiedler and Lindenstrauss (2007) in many senses, but the main difference is that algebraic groups $\mathbb{G}_i$ which are products (with at least two factors) of forms of SL_2 had been previously excluded. Indeed, the third ingredient, the high-entropy method, implies nothing when the algebraic groups $\mathbb{G}_i$ are products of rank one groups. To also treat these cases, Einsiedler and Lindenstrauss used the fourth ingredient, the low-entropy method, yielding the "four ingredients joinings theorem" - Theorem 1.1. The general formulation of the low-entropy method may seem intimidating, but the proof of it, although highly intricate, is very concrete. We therefore choose to give a rough sketch of a complete proof of the step involving the low-entropy method for another representative example, see §5. This sketch is based on a corresponding step in the proof of arithmetic quantum unique ergodicity by Lindenstrauss (2006), where the low-entropy method was introduced (compare also to Einsiedler and Lindenstrauss, 2010, Ch.10), and to the corresponding step in Einsiedler, Katok, and Lindenstrauss (2006).

The second part of the survey deals with applications of Theorem 1.1, which we discuss in Section 6. In §6.1 we give a (rather long) survey of how arithmetic problems relate to adelic torus orbits. We hope that the novice reader could gain some intuition about the use of adeles and p-adic numbers in dynamics from this subsection. In §6.2 we finally present several problems which are related (directly or retrospectively) to a coupling of the problems discussed in §6.1. We then explain how and under which conditions, Theorem 1.1 can give key input towards the solutions of these coupled problems. We finally present a new application for groups with high rank in §6.3.

Acknowledgement. — It is a pleasure to thank Manfred Einsiedler for being so generous with his knowledge throughout the years, and in particular, for great walks with Saskia while explaining to me the ideas behind the low-entropy method, leading to the content of §5, for suggesting Theorem 6.9 and for sketching its proof. I would also like to thank Andreas Wieser and Manuel Luethi for our discussions and for

reading parts of a preliminary version of this survey. I also thank Andreas Wieser for Figures 8-10, and Alex Kontorovich for Figure 11. Finally, I would like to thank Clemens Bannwart for generating several figures in Ti*k*Z, and René Rühr for giving good talks about the low-entropy method.

2. Entropy

2.1. Setting

We start with a few general definitions. We recall that the action of G or its subgroups on a homogeneous space of the form $\Gamma\backslash G$ is given by $g.(\Gamma h) := \Gamma h g^{-1}$. Given a closed orbit of the form ΓHg for $H < G$, the group preserving it is $g^{-1}Hg$. If the restriction of a Haar measure to a fundamental domain of $\Gamma \cap \left(g^{-1}Hg\right)$ in $g^{-1}Hg$ has a finite measure, we can normalize it to give a fundamental domain measure one. Pushing it forward via the above action to $\Gamma\backslash G$, we get the *normalized uniform/Haar measure* on the orbit ΓHg.

To ease the notation, we will fix a slightly simplified setting and refer to it below. We use the same notation as in Theorem 1.1 but fix $r = 2$. For clarity purposes, we repeat some notations: we let $\mathbb{G}_1$ and $\mathbb{G}_2$ be two semisimple algebraic groups defined over $\mathbb{Q}$. One may keep in mind the following "baby-cases": $\mathbb{G}_1 = \mathrm{SL}_n, \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_{n'}$ (with $n = n'$ being an interesting case), and the case $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$. As in Theorem 1.1, we let $G_i < \mathbb{G}_i(\mathbb{Q}_S)$ be subgroups, Γ_i be two *irreducible* lattices in G_i and denote $X_i = \Gamma_i\backslash G_i$ and $X = X_1 \times X_2$. We assume that the action of G_i on X_i is saturated by unipotents. In the above "baby-cases" one can think about $S = \{\infty\}$ and $G_i = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ or $G_i = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (or $G_i = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$) where the saturated by unipotents assumption is satisfied. In the "baby-cases" we consider below, all the images of the class $\mathscr{A}'$-homomorphisms we consider, will be embedded in the (product of the) respective diagonal subgroup of SL_n and it will be easy to verify the class-$\mathscr{A}'$ assumption for them. We denote further by $a = (a_1, a_2)$ a diagonalizable element. The spaces X_i are equipped with the Haar measure m_{X_i} and we denote by μ an unknown measure on X, which is normally the unknown joining that we are trying to classify.

In very rough terms, given a joining μ as in the main theorem, Einsiedler and Lindenstrauss utilize and develop methods concerning entropy in order to find that μ is invariant under an unipotent element. Measure rigidity results (Margulis and Tomanov, 1994; Ratner, 1991, 1995) are then employed to conclude that μ is algebraic. It is therefore essential for us to introduce and discuss a few of these entropy methods. These methods were predominantly developed by Einsiedler, Katok, Lindenstrauss and Spatzier.

We will assume that the reader knows the basic definitions and properties of entropy (see e.g., Einsiedler and Lindenstrauss, 2010, §3) and of conditional measures (see e.g., Einsiedler and Ward, 2011, §5.3).

2.2. Weights and Lyapunov weights

For a diagonalizable regular element $a \in G$ the subgroup

$$G_a^- = \left\{ g \in G : a^n g a^{-n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e \right\},$$

where e denotes the identity element in G, is called the *stable horospherical subgroup of* a. Its counterpart $G_a^+ := G_{a^{-1}}^-$ is called the *unstable horospherical subgroup of* a. These groups are central to the study of the action of a on homogeneous spaces of the form $\Gamma\backslash G$. For instance, we will explain later that the entropy $h_\mu(a)$ of the action of a is equal to a quantity that may be calculated solely through G_a^- — the entropy contribution $h_\mu(a, G_a^-)$. For now, let's just say that G_a^- is "defined using the dynamics of a" and that it contains "dynamical information". It turns out that G_a^- is too crude for us in order to extract the information we need for the joinings classification (like invariance under one of its elements). It is therefore interesting to know which subgroups of G_a^- can also be defined "dynamically". To this end, we will need to consider the action of the whole diagonalizable subgroup $A = \phi(\mathbb{Z}^d)$ (as in the notation of Theorem 1.1) and define weights for the action of A.

Recall that the adjoint action of an element $g \in G$ on the Lie algebra $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$ describes locally the conjugation action on G as exp and log (at least in characteristic zero) are local isomorphisms. This in turn describes the local dynamics on a homogeneous space of the form $\Gamma\backslash G$, as each point in $\Gamma\backslash G$ (for a discrete group Γ) is locally isomorphic to G.

Consider now $A = \phi(\mathbb{Z}^d)$ for a class-$\mathscr{A}'$ homomorphism ϕ. A character $\lambda\colon A \to k^\times$ (here $k = \mathbb{Q}_s$ for some $s \in S$) is called a *weight* or a *Lyapunov weight* if there exists a non-zero $\mathrm{x} \in \mathfrak{g}$ which is a common eigenvector for the adjoint action of A, that is, for every $a \in A$ we have $\mathrm{Ad}_a(\mathrm{x}) = \lambda(a)\mathrm{x}$, where Ad denotes the adjoint representation $\mathrm{Ad}_a(\mathrm{x}) = a\mathrm{x}a^{-1}$. Once we consider a character via precomposition with ϕ as a map from $\mathbb{Z}^d$ to $k^\times$, it follows from the class-$\mathscr{A}'$ assumption, that characters are of the form $\lambda(\mathrm{n}) = e^{\mathrm{n}\cdot w_\lambda}$ for some $w_\lambda \in \mathbb{R}^d$ when $k = \mathbb{R}$, and of the form $\lambda(\mathrm{n}) = (\theta_p)^{\mathrm{n}\cdot w_\lambda}$ for some $w_\lambda \in \mathbb{Z}^d$ when $k = \mathbb{Q}_p$ (where θ_p was defined just before Theorem 1.1). For a fixed character λ the set of such common eigenvectors forms the weight spaces $\mathfrak{g}^\lambda$. As A (or rather $\mathrm{Ad}(A)$) is simultaneously diagonalizable, we can decompose $\mathfrak{g}$ as

$$\mathfrak{g} = \sum_{\lambda\in\Phi} \mathfrak{g}^\lambda$$

where Φ is the set of all weights for the action of A. As G_a^- is invariant under conjugation, it follows that

$$\mathrm{Lie}(G_a^-) = \sum_{\lambda\in\Phi, |\lambda(a)|<1} \mathfrak{g}^\lambda \tag{3}$$

and that exp is a global homomorphism from this nilpotent Lie algebra to G_a^-. We may then ask ourselves if $\exp(\mathfrak{g}^\lambda)$ is a subgroup and if it is "dynamically defined". First note that $\mathfrak{g}^\lambda$ is not necessarily a subalgebra when λ^2 is also a weight (in general we have $[\mathfrak{g}^\gamma, \mathfrak{g}^\eta] \subset \mathfrak{g}^{\gamma+\eta}$). But more importantly, in order to find "dynamically-defined" subgroups, we may carry out one of the following two equivalent constructions. We can check which subalgebras of the form $\mathfrak{g}^\lambda$ are indistinguishable from one another using the whole dynamics of A. More precisely, we may say (temporarily) that two characters are equivalent and write $\lambda \sim \lambda'$ if for any $a \in A$ we have

$$\mathfrak{g}^\lambda \subset \mathrm{Lie}(G_a^-) \iff \mathfrak{g}^{\lambda'} \subset \mathrm{Lie}(G_a^-).$$

The union of an equivalence class of weights under this relation forms a subalgebra, and its image under exp is a subgroup of G_a^- for some $a \in A$, which is "defined dynamically". Alternatively, we could have asked: which subgroups are the smallest non-trivial intersection of subgroups of the form G_a^- for various $a \in A$? Both questions lead to the same answer; the resulting subgroups are called the coarse Lyapunov weights. To define these only in terms of the weights, we say that two weights λ and η are equivalent and write $\lambda \sim \eta$, if there exist positive integers m, ℓ with $\lambda^m = \eta^\ell$. The equivalence classes are called *coarse Lyapunov weights*. Given a coarse Lyapunov weight $[\lambda]$, the sum $\sum_{\eta\sim\lambda} \mathfrak{g}^\eta$ is called the *coarse Lyapunov weight space* and is denoted by $\mathfrak{g}^{[\lambda]}$. This is a nilpotent subalgebra and exp defines a global homomorphism from $\mathfrak{g}^{[\lambda]}$ to a nilpotent subgroup denoted by $G^{[\lambda]}$, which is called a *coarse Lyapunov subgroup*.

In order to visualize the weight structure in given examples, it is convenient to consider the logarithm of the (real or p-adic) absolute value of a given character: $\log|\lambda(\mathrm{n})|$. Viewing this as a map from $\mathbb{Z}^d$ to k we get a linear map that can be considered as an element of the dual of $\mathbb{Z}^d \otimes k \cong k^d$. In the real case, $\log\circ\lambda$ is just the inner product with the vector w_λ defined above, so one may identify the weight λ with w_λ. Under this identification, the coarse Lyapunov weight $[\lambda]$ is the union of all weights η such that $w_\eta \in \mathbb{R}^+ \cdot w_\lambda$.

Recall now the setting in §2.1. Theorem 1.1 tells us that the set of possible joinings is strongly connected to the relation between G_1 and G_2, equipped with the corresponding torus action $\phi_i : \mathbb{Z}^2 \to G_i$, $i = 1, 2$. As we will explain later, the first instance where this reflects in the proof is the comparison between the weights structure of G_1 (with respect to ϕ_1) and the weights structure of G_2 (with respect to ϕ_2). We will consider four representing examples (Examples 2.1(1)-2.1(3), and Example 2.2 below). The first three are all with $G_1 = G_2 = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ but equipped

with different torus action. In Example 2.1(1), both weight structures will be identical, which will give rise to the presence of possible "diagonal" joinings, e.g. the one supported on the graph of the identity isomorphism $\mathrm{Id}\colon G_1 \to G_2$. In Example 2.1(2) the weights structures will be "unrelated" to each other, which will allow us to show that there is no non-trivial joining. For this case, we will just need the basic and the second ingredients mentioned in §1.1, and in particular the high or the low entropy method are not needed, see §3.1. In Example 2.1(3), the weights will be related but will have "different speeds". Also in this example, only the trivial joining may occur, but in order to show this one need to use the low entropy method, see §5).

Example 2.1 (Three examples on $(\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2)^2$). Let $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$, $S = \{\infty\}$, $G_i = \mathbb{G}_i(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, $G = G_1 \times G_2$. Let D be the diagonal group in SL_2,

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \; V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} \right\}, \; a_t = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & \\ & e^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

and $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ the corresponding Lie algebras. We consider three different homomorphisms from $\mathbb{Z}^2$ to $D \times D$ (the latter is a subgroup of both G_1 and G_2):

$$\phi(t,s) = (a_t, a_s), \quad \psi(t,s) = (a_{t+s}, a_{t-s}), \quad \tau(t,s) = (a_{2t}, a_{2s}). \tag{4}$$

Each one of them is of class $\mathscr{A}'$-homomorphism and it has a related weight structure: let $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$ and note that with respect to each of the maps in (4), the weight spaces are

$$\mathfrak{h}^{\lambda_1} = \mathfrak{u} \times \{0\}, \; \mathfrak{h}^{-\lambda_1} = \mathfrak{v} \times \{0\}, \; \mathfrak{h}^{\lambda_2} = \{0\} \times \mathfrak{u}, \; \mathfrak{h}^{-\lambda_2} = \{0\} \times \mathfrak{v}$$

but for different characters λ_1 and λ_2:

- ▷ For $\phi(t,s)$: $w_{\lambda_1} = (-1, 0)$ (since $\lambda_1(\phi(t,s)) = e^{(t,s)\cdot(-1,0)} = e^{-t}$), and $w_{\lambda_2} = (0, -1)$.
- ▷ For $\psi(t,s)$: $w_{\lambda_1} = (-1, -1)$ (since $\lambda_1(\psi(t,s)) = e^{(t,s)\cdot(-1,-1)} = e^{-(t+s)}$), and $w_{\lambda_2} = (-1, 1)$.
- ▷ For $\tau(t,s)$: $w_{\lambda_1} = (-2, 0)$ (since $\lambda_1(\tau(t,s)) = e^{(t,s)\cdot(-2,0)} = e^{-2t}$), $w_{\lambda_2} = (0, -2)$.

In general, one has $w_{-\eta} = -w_\eta$, so we omit the weight $-\lambda_i$ above. These roots systems (only the non-trivial weights) are drawn in Figure 3.

We consider now three different torus actions on $\Gamma_1 \backslash \mathbb{G}_1(\mathbb{R}) \times \Gamma_2 \backslash \mathbb{G}_2(\mathbb{R})$ where Γ_1 and Γ_2 are irreducible arithmetic lattices, and classify joining with respect for each of these three actions. These actions are given by the following class-$\mathscr{A}'$ homomorphisms:

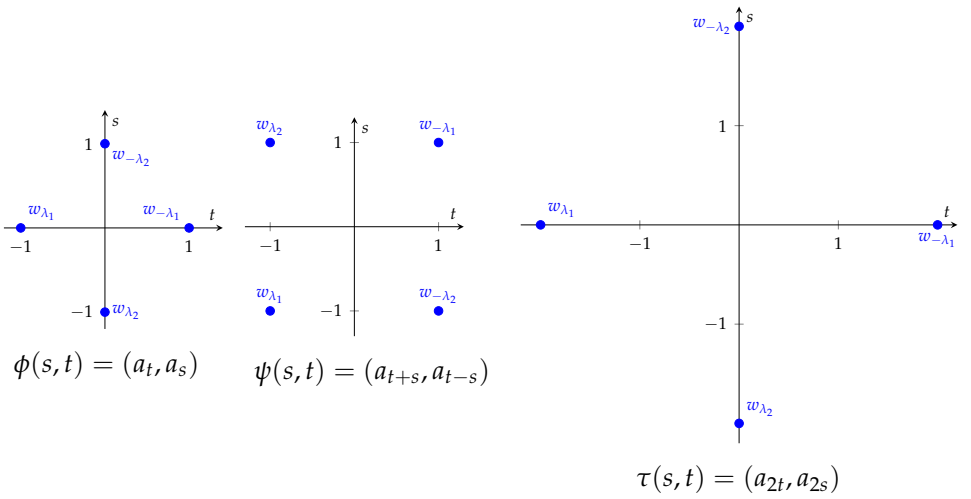


Figure 3: Root systems for $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$

1. $(\phi, \phi) \colon \mathbb{Z}^2 \to (D \times D)^2 < G_1 \times G_2$. ("Identical weights")
2. $(\phi, \psi) \colon \mathbb{Z}^2 \to (D \times D)^2 < G_1 \times G_2$. ("45° rotation")
3. $(\phi, \tau) \colon \mathbb{Z}^2 \to (D \times D)^2 < G_1 \times G_2$. ("Different speeds")

The action of (ϕ, ϕ) has four (non-trivial) weight spaces and four coarse Lyapunov weights, the action of (ϕ, ψ) has eight (non-trivial) weight spaces and eight coarse Lyapunov weights, and the action of (ϕ, τ) has eight (non-trivial) weight spaces but only four coarse Lyapunov weights. The weight spaces may be visualized as in figure 4.

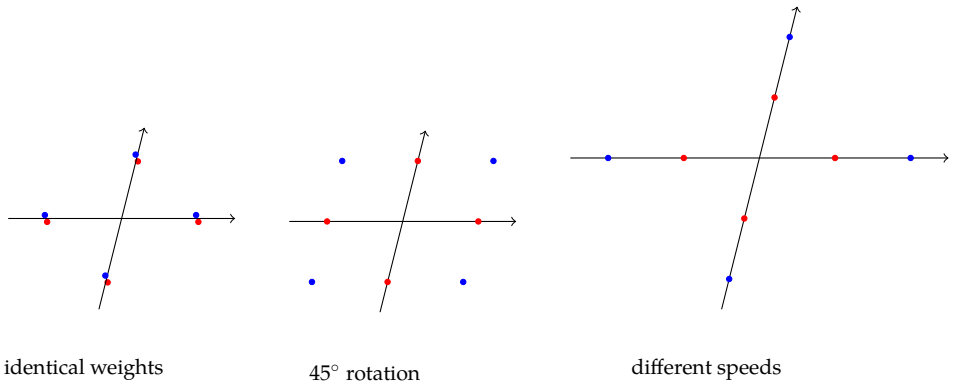


Figure 4: Decomposition of $\mathfrak{sl}_2^4 = (\mathfrak{sl}_2 \times \mathfrak{sl}_2)^2$ into weight spaces

In the examples above, the (non-opposite) weight spaces always commute with each other. As we will see later, this means that the high entropy method (see §4) does not help at all in these cases. This is why these cases were excluded in Einsiedler and Lindenstrauss (2007) and dealt with later in Einsiedler and Lindenstrauss (2019) using the low entropy method (see §5). To give a representing example where there are non-commuting Lyapunov weights, we consider the following example.

Example 2.2. Let $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_3$, $S = \{\infty\}$, $G_i = \mathbb{G}_i(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, G = G_1 \times G_2$. Let $D < G_i$ be the diagonal group and for $i = 1, 2$, let

$$\phi_i : \mathbb{Z}^2 \to D,\ \phi_i(t,s) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & & \\ & e^{-\frac{s}{2}} & \\ & & e^{\frac{t+s}{2}} \end{pmatrix}.$$

The map $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ is of class $\mathscr{A}'$ and we set $A = \phi(\mathbb{Z}^2) < G \times G$.

Let's concentrate for a moment on one of the factors, say on $G_1 = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ and $A_1 := \phi_1(\mathbb{Z}^2)$: for $1 \leqslant i \neq j \leqslant 3$ let $U_{ij} < \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ be the unipotent one-parameter group with 1's on the diagonal and zeroes everywhere except from the ij-entry, and $\mathfrak{u}_{ij}$ the corresponding Lie algebra. Then, the eight-dimensional Lie algebra $\mathfrak{sl}_3$ decomposes into weight spaces as $\mathrm{Lie}(D) \oplus \left(\oplus_{1 \leqslant i \neq j \leqslant 3} \mathfrak{u}_{ij}\right)$. Furthermore, each of the spaces $\mathfrak{u}_{ij}$ forms a coarse Lyapunov weight with respect to ϕ_1, and the reader may calculate the corresponding weights to get the weight diagram in Figure 5, where we denote the weight vector corresponding to $\mathfrak{u}_{ij}$ with w_{ij}.

There are commutation relations between the weight spaces, which are also visible via addition of the vectors w_{ij}: for example $[\mathfrak{u}_{12}, \mathfrak{u}_{23}] = \mathfrak{u}_{13}$. Moreover, one can read from the weight diagram in Figure 5 the decomposition of the Lie algebra of any stable horospherical: for $a = \phi_1(t,s)$, it follows from the definition of the weight spaces and their corresponding weight vectors that $(\mathfrak{sl}_3)_a^-$ is the direct sum of all the weight spaces whose weight vector has a negative inner product with (t,s). That is, the corresponding weight vectors must belong to a half-plane defined by the line $(t,s)^\perp$. Further, note that for each weight space, the corresponding weight vector can be written as a sum of two other weight vectors, such that all three weight vectors belong to a half-plane related to some $a \in A_1$. It follows that each weight space can be written as the commutator of two other weight spaces, all belonging to the same stable horospherical of some $a \in A_1$. This fact will be crucial for us in §4.

Fix now two irreducible lattices Γ_1 and Γ_2 in $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ and let's return to consider joinings for the action of ϕ on $\Gamma_1 \backslash G_1 \times \Gamma_2 \backslash G_2$. We have at least two types of joinings in this setting: the trivial joining, which is the product measure $m_{\Gamma_1 \backslash G_1} \otimes m_{\Gamma_2 \backslash G_2}$, and a "diagonal" joining, for example, the Haar measure supported on an orbit of $\{(g,g) : g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})\} < \mathrm{SL}_3^2(\mathbb{R})$. In Theorem 4.2 we give a more precise statement and see that these are the only possible types of *ergodic* joinings in this case (In general, an arbitrary joining is a convex combination of ergodic joinings).

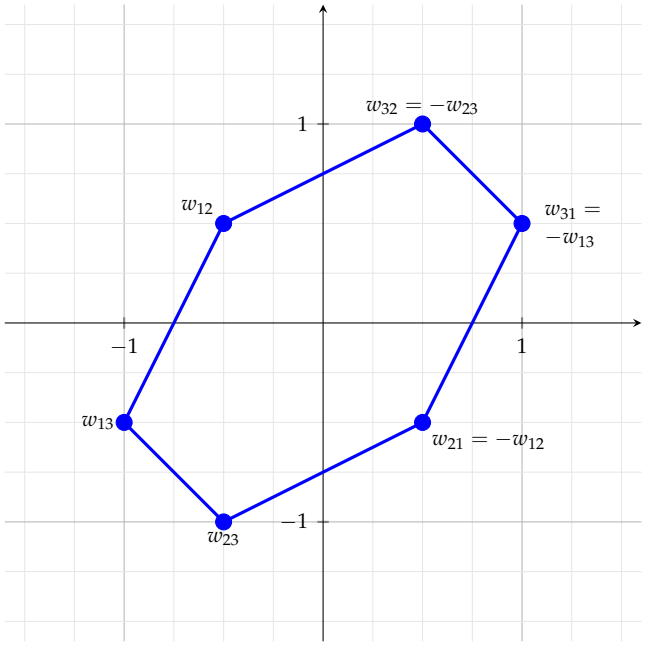


Figure 5: Decomposition of $\mathfrak{sl}_3$ into weight spaces

2.3. Leafwise measures

The joining classification is a part of the classification of measures with torus actions on homogeneous spaces, under the assumptions that some elements act with positive entropy. In the joinings classification, the positive entropy assumption is "hidden" in the fact that each factor is equipped with the Haar measure and therefore the action on each factor has positive entropy, which imply that any non-trivial $a \in A$ has positive entropy (see Remark 2.6). Positive entropy is related to growth/decay properties of the measure. For example, for a hyperbolic toral automorphism positive entropy is equivalent to positive Hausdorff dimension of the measure which, in turn, is equivalent to an almost surely decay property of the measure of r-balls when $r \to 0$. In our context, the action of $a \in A$ on $\Gamma\backslash G$ is not hyperbolic as a commutes with all elements of A. Nevertheless, one could characterize again positive entropy as an almost sure decay property by considering the so-called Bowen-balls. Moreover, as we will state precisely in Proposition 2.4, one can relate the entropy $h_\mu(a)$ of a diagonalizable element a on a homogenous space $\Gamma\backslash G$ to decay of the measure along the stable horospherical subgroup G_a^-. Given the decomposition above of G_a^- to coarse Lyapunov subgroups, one may ask which subgroups of G_a^- contribute entropy. To be able to answer such questions and to be able to state the above statements in a choices-free

way (e.g. independently of a choice of a specific generating partition for the entropy calculation) one is led to the notion of leafwise measures.

The aim of leafwise measures in our context is to describe a given measure μ on $X := \Gamma\backslash G$, as in Theorem 1.1, along orbits of an a-normalized subgroup $U < G_a^-$ with $h_\mu(a) > 0$. For example, along U being a coarse Lyapunov subgroup as above. Unfortunately, normally there exists no countably-generated σ-algebra whose atoms are U-orbits (at least for ergodic systems when individual orbits have measure zero). Therefore, the natural candidates that will describe μ along orbits, conditional measures, cannot be constructed. Leafwise measures are constructed to remedy this problem. Roughly said, if one restricts to a bounded portion of a U-orbit, the orbits of this bounded portion can be the atoms of countably-generated σ-algebra. One considers the conditional measures which respect to such a σ-algebra. In order to get a measure that describes the measure μ along the full orbit, the idea is to consider larger and larger parts of the U-orbits and to patch the resulting conditional measures together using the group U itself as a reference object. This construction results in a family of locally-finite measures $\{\mu_x^U\}_{x\in X}$ on U, called the *leafwise measures* of U. They are defined almost everywhere and up to proportionality (as the "patching" can only be done up to an arbitrary constant). Defining these measures on U rather on the space itself has the advantage that we can directly exploit the group structure on U when we extract information from $\{\mu_x^U\}_{x\in X}$.

In this next subsection, we give a precise definition of leafwise measures and their characterizing property. The best way to understand their essence is via Einsiedler and Lindenstrauss (2010, §6) where the above patchwork is carried out carefully.

2.3.1. *Definition of leafwise measures.* — The setting that we have in mind is a homogeneous space $X = \Gamma\backslash G$, an acting diagonalizable element $a \in G$ which has positive entropy with respect to an a-invariant measure μ and a closed subgroup $U < G_a^-$. Note that a priori μ has no known invariance under U. To help the reader to see what is essential for the construction, we use a slightly generalized setting in the following proposition, which defines the leafwise measures. The subgroup H that appears in the proposition will be later G_a^- or an a-normalized subgroup of it.

Proposition 2.3. *Let $X = \Gamma\backslash G$ be an S-adic homogeneous space and μ a locally-finite measure on X. Let $H < G$ be a closed subgroup which acts freely on X almost everywhere, that is, for a.e. $x \in X$ the map*

$$h \in H \mapsto h.x := xh^{-1} \tag{5}$$

is injective. Then, there exists a set of full measure $X' \subset X$ and family $\{\mu_x^H\}_{x\in X'}$ of locally-finite measures on H, unique up-to proportionality, having the following properties.

1. *(Characterizing property - describing μ along H) Let $Y \subset X$ be a measurable set with $\mu(Y) < \infty$ and $\mathscr{A}$ be a countably generated σ-algebra on Y which is H-*subordinate

(*that is, its atoms* $[y]_{\mathscr{A}}$ *are bounded pieces of an* H*-orbit, or more precisely, there exists a bounded open subset* $V_y \subset H$ *with* $[y]_{\mathscr{A}} = V_y.y$*. The subset* V_y *is called the shape of the atom* $[y]_{\mathscr{A}}$*). Then, the leafwise measure* μ_y^H *describes the conditional measure* $\mu_y^{\mathscr{A}}$ *in the following sense:*

$$\mu_y^{\mathscr{A}} = \frac{1}{\mu_y^H(V_y)} \left(\mu_y^H|_{V_y}.y\right)$$

where $\mu_y^H|_{V_y}$ *stands for the restriction of* μ_y^H *to* V_y *and* $\mu_y^H|_{V_y}.y$ *for pushing this measure under the map* (5)*.*

2. (*Compatibility/Shifting formula*) *The measure* μ_x^H *describes the orbit* $H.x$ *with* $e \in H$ *corresponding to* $x \in X$*. In particular, the following* shifting formula *holds:*

$$(R_h)_* \mu_{h.x}^H \propto \mu_x^H \tag{6}$$

where $R_h \colon H \to H$ *is defined by* $h' \mapsto h'h$ *and* $\propto$ *denote proportionality of measures.*

We normalize[(1)] *the measures* μ_x^H *to have* $\mu_x^H(B_1^H) = 1$ *where* B_1^H *is the ball of radius* 1 *in* H *around* e*. We further have*

3. (*Invariance*) *The measure* μ *is* H*-invariant if and only if* μ_x^H *is equal to the Haar measure on* H *for almost every* $x \in X$*.*

4. (*Measure preservation implies equivariance*) *Assume further that there exists* $a \in G$ *that normalizes* H *and preserves the measure* μ*. Then*

$$\mu_{a.x}^H \propto (\theta_a)_* \mu_x^H \tag{7}$$

where $\theta_a : H \to H$ *is defined by* $h \mapsto aHa^{-1}$*. If particular, if* θ_a *acts trivially on* H*, we have* $\mu_{a.x}^H = (\theta_a)_* \mu_x^H$ (*by the above normalization*)*.*

Properties 2 and 4 can be visualized as follows: Imagine that the colour intensity in Figure 6 represents the distribution of the given measure μ. An embedding of an H-orbit $H.x = H.(h.x)$ gives rise to compatible distributions $\mu_x^H, \mu_{h.x}^H$ on H in the sense that wrapping them on the orbit with $e \in H$ corresponding to the point $x \in X$ (resp. to the point $h.x \in X$) will be compatible to the given distribution of the measure. This compatibility give rise to the shifting property stated in equation (6).

Similarly, imagine that the given measure μ gives rise to some distribution along a given H-orbit $H.x$ as in Figure 7. Imagine further that the a action contracts the neighbourhood around x. Then, the distribution along the orbit $H.(a.x)$ is just a contracted version of the distribution along $H.x$. This gives rise to the equivariance property stated in equation (7).

(1) See Einsiedler and Lindenstrauss (2010, §6.29) for a discussion of possible normalizations.

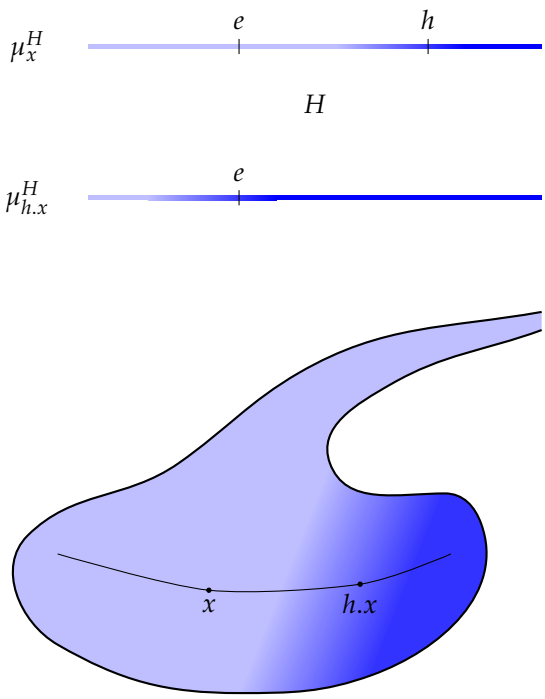


Figure 6: Shifting property

We note that the assumption (5) in Proposition 2.3 holds when $H = U$ for an a-normalized subgroup $U < G_a^-$: if $u.x = x$ for some $u \in U$ then $aua^{-1}.(a.x) = a.x$. Since $U < G_a^-$ this shows that the injectivity radius of $a^n.x$ goes to zero. So either $u.x = x$ cannot hold (e.g., when X is compact) or x fails Poincaré recurrence (with respect to the measure that a preserves) and therefore x belongs to a null set.

2.4. Entropy contribution and invariance

We stated above that the entropy $h_\mu(a)$ is related to a volume decay property for the stable horospherical subgroup. We want now to use the notion of leafwise measures to define this more precisely, and use the same definition to quantify the entropy contribution of (a-normalized) subgroups of the stable horospherical subgroup of a.

Consider the setting of Proposition 2.3 with the additional assumptions in the 4-th item. We denote by $\theta_a \colon G \to G$ the conjugation map by a and recall that B_1^H is the ball of radius one in H around e. The *volume decay entropy at x* is defined by

$$\mathrm{vol}_\mu(a, H, x) = -\lim_{n\to\infty} \frac{\log \mu_x^H\left(\theta_a^n\left(B_1^H\right)\right)}{n}. \tag{8}$$

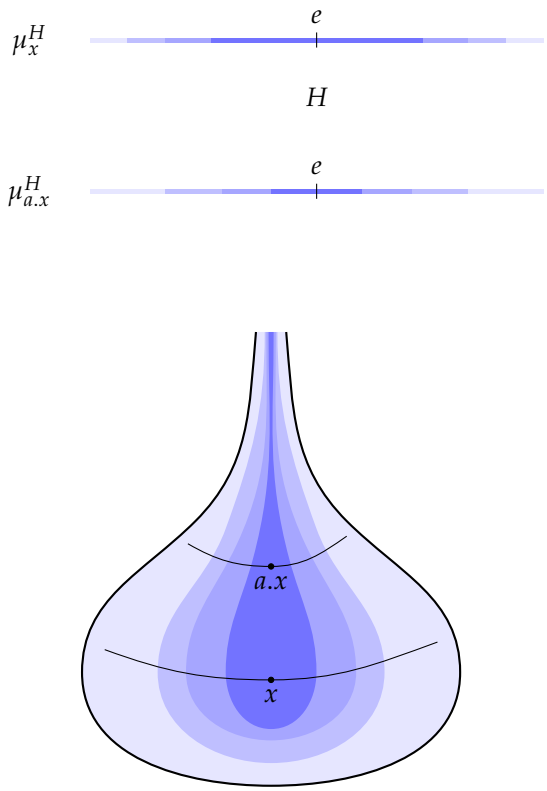


Figure 7: Equivariance property

This limit exists almost everywhere and should be thought of as a pointwise entropy contribution: we define its integral

$$h_\mu(a, H) = \int_X \mathrm{vol}_\mu(a, H, x)\mathrm{d}\mu \tag{9}$$

to be the *entropy contribution of* H.

Proposition 2.4 (Entropy as volume decay). *Let $X = \Gamma\backslash G$ be an S-adic homogeneous space with a probability measure μ which is invariant under a diagonalizable element $a \in G$. Then $h_\mu(a) = h_\mu(a, G_a^-)$.*

The volume decay with respect to the Haar measure m_X is a local quantity that can be directly calculated using the adjoint map on the Lie algebra. For example,

$$\mathrm{vol}_{m_X}(a, G_a^-, x) = -\log\left|\det \mathrm{Ad}_a\,|_{\mathrm{Lie}(G_a^-)}\right|, \quad \text{for every } x \in X.$$

There are many measure-preserving systems where the uniform (e.g. Haar) measure is the unique measure of maximal entropy. For many S-arithmetic quotients this fact can be deduced from the following theorem:

Theorem 2.5. *With the assumptions as in Proposition 2.4, let $U < G_a^-$ be an a-normalized subgroup (e.g. a coarse Lyapunov subgroup). We have*

$$h_\mu(a, U) \leqslant -\log \left| \det \mathrm{Ad}_a \,|_{\mathrm{Lie}(U)} \right| = h_{m_X}(a, U) \tag{10}$$

with equality if and only if μ is U-invariant.

In other words, μ is U-invariant if and only if the entropy contribution of U with respect to μ agrees with the entropy contribution with respect to the Haar measure. One should keep this in mind together with the previous characterization we had for invariance in Proposition 2.3(3).

This theorem together with the decomposition of $\mathrm{Lie}(G_a^-)$ in (3) and the ability to define the entropy contribution for any coarse Lyapunov subgroup raises the question of understanding the relations between $\mu_x^{G_a^-}$ and $\mu_x^{G^{[\lambda]}}$ for the various coarse Lyapunov subgroups $G^{[\lambda]} < G_a^-$. Einsiedler and Katok (2005) show that this relation is quite simple, as we explain in the next subsection. We remark that Proposition 2.4 and the results of the next subsection are variations of preceding results of Ledrappier and Young (1985a,b) for C^2-diffeomorphism of compact manifolds.

2.5. The product structure

The following was proven by Einsiedler and Katok (2005, Theorem 8.4): let $U = G_a^-$ for some diagonalizable element a that preserves a probability measure μ on an S-arithmetic homogeneous space X. Let $G^{[\lambda_1]}, \dots, G^{[\lambda_k]}$ denote all coarse Lyapunov subgroups and for a weight λ, and $\mu_x^{[\lambda]}$ denote the leafwise measure $\mu_x^{G^{[\lambda]}}$. Then, the map

$$\iota \colon \prod_{i=1}^{k} G^{[\lambda_i]} \to U,\ \iota(u_1, \dots, u_k) = u_1 \dots u_k$$

is a homeomorphism and for almost all $x \in X$ we have the so-called "product structure":

$$\mu_x^U \propto \iota_* \left(\mu_x^{[\lambda_1]} \otimes \cdots \otimes \mu_x^{[\lambda_k]} \right). \tag{11}$$

This readily implies the following addition property for entropy contribution:

$$h_\mu(a, G_a^-) = \sum_{i=1}^{k} h_\mu(a, G^{[\lambda_i]}). \tag{12}$$

2.6. Abramov–Rokhlin entropy addition formula

The joinings we consider (as in Theorem 1.1) have natural factors, both of which are equipped with the corresponding Haar measure. This should imply that we have $h_a(\mu) > 0$ for any non-trivial $a \in A$. The Abramov–Rokhlin enables to show this and to calculate the entropy in a step-wise manner through the factors. To state the formula, we shortly recall the definition of conditional entropy.

Given a Borel probability space $(X, \mathscr{B}, \mu)$ and two σ-algebras $\mathscr{A}, \mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ with $\mathscr{C}$ countably generated, one defines the *information function on $\mathscr{C}$ given $\mathscr{A}$* as

$$I_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{A})(x) = -\log \mu_x^{\mathscr{A}}\left([x]_{\mathscr{C}}\right),$$

and *the conditional entropy of $\mathscr{C}$ given $\mathscr{A}$*, $H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{A})$, as the integral of the information function

$$H_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{A}) = \int_X I_\mu(\mathscr{C}|\mathscr{A})(x)\mathrm{d}\mu.$$

One should think about this conditional entropy as measuring how much new information $\mathscr{C}$ has, given the information that we already have from $\mathscr{A}$. To define the conditional entropy of a measure-preserving transformation $T\colon X \to X$, one defines

$$h_\mu(T|\mathscr{A}) = \sup_{\eta: H_\mu(\eta)<\infty} h_\mu(T, \eta|\mathscr{A})$$

with

$$h_\mu(T, \eta|\mathscr{A}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H_\mu(\eta_0^{n-1}|\mathscr{A}).$$

With these definitions, using the setting and the notation from subsection 2.1, the Abramov–Rokhlin entropy addition formula states for a diagonalizable element $a = (a_1, a_2)$ that

$$h_\mu(a) = h_{m_{X_1}}(a_1) + h_\mu\left(a|\pi_1^{-1}\mathscr{B}_{X_1}\right), \tag{13}$$

where $\pi_1 : X \to X_1$ is the natural projection map and $\mathscr{B}_{X_1}$ is the Borel σ-algebra on X_1. By symmetry of the assumptions, the same holds with 1 and 2 interchanged.

Remark 2.6. It follows directly from (13) that any non-trivial $a \in A$ has positive entropy.

2.7. An entropy inequality

One of the main ideas of Einsiedler and Lindenstrauss (2007) is that Abramov–Rokhlin formula (13) may be coupled with (12) to get an "Abramov–Rokhlin type formula/inequality for the entropy contribution". In other words, a main step of the proof of the joining classification is the following inequality, which shows that the entropy contribution with respect to a joining can be bounded in a stepwise manner using the natural factors:

Lemma 2.7. *With the setting of §2.1 let $a = (a_1, a_2)$ be a diagonalizable element with a_i, $i = 1, 2$ acting ergodically on $X_i = \Gamma_i \backslash G_i$ equipped with the Haar measure m_{X_i}, let $U_1 < (G_1)^-_{a_1}$ and $U_2 < (G_2)^-_{a_2}$ be two subgroups, and set $U = U_1 \times U_2 < G$. Assume that U is a-normalized and let μ be a joining on X (that is, an a-invariant measure with $\pi_i(\mu) = m_{X_i}$, $i = 1, 2$). Then, we have*

$$h_\mu(a, U) \leqslant h_{m_{X_1}}(a_1, U_1) + h_\mu(a, \{e\} \times U_2). \tag{14}$$

Moreover, for the stable horospherical subgroup $U = G^-_a$ (that is, for $U_i = (G_i)^-_{a_i}$, $i = 1, 2$) we have equality in (14).

The same results of course hold with 1 and 2 interchanged, by the symmetry of the assumptions of this lemma. The proof of this lemma uses tailor-made partitions which are subordinate to the stable horospherical subgroups $(G_i)^-_{a_i}$ and to the subgroups U_i (see Einsiedler and Lindenstrauss, 2007, Prop. 3.1).

2.8. Equality for coarse Lyapunov weights

Lemma 2.7 together with the product structure (11) implies that we also have equality in (14) for a coarse Lyapunov subgroup U:

Proposition 2.8 (Abramov–Rohklin for Coarse Lyapunov subgroups)**.** *With the setting of Lemma 2.7 the following equality holds for any coarse Lyapunov subgroup $G^{[\lambda]} = G_1^{[\lambda]} \times G_2^{[\lambda]}$*

$$h_\mu(a, G^{[\lambda]}) = h_{m_{X_1}}(a_1, G_1^{[\lambda]}) + h_\mu\left(a, \{e\} \times G_2^{[\lambda]}\right). \tag{15}$$

By symmetry, the same statement holds with 1 *and* 2 *interchanged.*

Proof. This is just simple arithmetic, as the quantities in (15) are additive with respect to a product of measures, and since we have equality for the stable horospherical and an inequality for each coarse Lyapunov weight. More precisely, let $G^{[\lambda]}$ be a Lyapunov weight and choose $a \in G$ such that $G^{[\lambda]} < G^-_a$. Let $G^-_a = G^{[\lambda_1]} \dots G^{[\lambda_k]}$ be the corresponding decomposition of the stable horospherical to coarse Lyapunov subgroups (with, say, $\lambda = \lambda_1$). For each $1 \leqslant \ell \leqslant k$ we have by Lemma 2.7

$$h_\mu(a, G^{[\lambda_\ell]}) \leqslant h_{m_{X_1}}(a_1, G_1^{[\lambda_\ell]}) + h_\mu\left(a, \{e\} \times G_2^{[\lambda_\ell]}\right).$$

By the product structure (11) (applied to μ and also to m_{X_1}) and the definition of entropy contribution the sum of each term over $\ell = 1, \dots k$, sums up to the corresponding term for G_a^-. It follows that

$$h_\mu(a, G_a^-) = \sum_{\ell=1}^{k} h_\mu(a, G^{[\lambda_\ell]}) \tag{16}$$

$$\leqslant \sum_{\ell=1}^{k} h_{m_{X_1}}(a_1, G_1^{[\lambda_\ell]}) + \sum_{\ell=1}^{k} h_\mu\left(a, \{e\} \times G_2^{[\lambda_\ell]}\right) \tag{17}$$

$$= h_{m_{X_1}}(a_1, (G_1)_{a_1}^-) + h_\mu\left(a, \{e\} \times (G_2)_{a_2}^-\right). \tag{18}$$

But we know from Lemma 2.7 that the left-hand side of (16) is equal to the right-hand side of (18), so all the above inequalities must be equalities. □

3. Two corollaries

We can prove now two corollaries of the equality (15). This shows that this equality already contains substantial content – that is the reason we called (15) and the following corollaries the "second ingredient" in the overview in §1.1.

The first corollary is in particular interesting and can be referred to as "the two ingredients joinings theorem": it allows for a complete classification of joinings in some situations, e.g., for Example 2.1(2)). Also, it (or more precisely, Remark 3.2) will be used again and again in various stages of the proof of Theorem 4.2 and in §5. Moreover, this corollary and its proof explain what we are looking for (utilizing entropy methods to gain an unipotent invariance) and also what we cannot hope for (finding unipotent invariance which is trivial in one of the factors). We give more details below.

3.1. Disjointness due to different Lyapunov weights

It may happen that the root structure of G_1 and G_2 are different enough, so that for some Lyapunov weight λ, one of the coarse Lyapunov subgroups $G_1^{[\lambda]}$ or $G_2^{[\lambda]}$ is trivial. This immediately "decouples" the joining:

Corollary 3.1 (Two ingredients joinings theorem). *With the setting of §2.1 let μ be a joining and assume that there is a Lyapunov weight λ such that (say) $G^{[\lambda]} = G_1^{[\lambda]} \times \{e\}$. Then μ is the trivial joining.*

Proof. For the coarse Lyapunov weight $[\lambda]$ we have $G_2^{[\lambda]} = \{e\}$ and since the entropy contribution of the trivial group is zero, (15) reads as follows

$$h_\mu(a, G^{[\lambda]}) = h_{m_{X_1}}(a_1, G_1^{[\lambda]}) + h_\mu\left(a, \{e\} \times G_2^{[\lambda]}\right) = h_{m_{X_1}}(a_1, G_1^{[\lambda]}). \tag{19}$$

But

$$h_{m_{X_1}}\left(a_1, G_1^{[\lambda]}\right) = -\log\left|\det \mathrm{Ad}_{a_1}|_{\mathrm{Lie}\left(G_1^{[\lambda]}\right)}\right| = -\log\left|\det \mathrm{Ad}_{a}|_{\mathrm{Lie}\left(G_1^{[\lambda])}\times\{e\}\right)}\right| \qquad = h_{m_X}\left(a, G_1^{[\lambda]}\times\{e\}\right)\Big),$$

so Theorem 2.5 then implies that μ is invariant under the unipotent group $G_1^{[\lambda]}\times\{e\}$. Recall that an unbounded closed subgroup such as G_1 acts ergodically on X_1 (see e.g. Zimmer, 1984, Theorem 2.2.6). Therefore, we can find an element of the form (u, e) with u acting ergodically on X_1 that preserves μ. This immediately implies disjointness, that is, μ must be the trivial joining (see e.g. Aka, Musso, and Wieser, 2021, Lemma 7.2). □

Remark 3.2. We record the following useful fact from the above proof: having invariance under an element of the form (u, e) with $\langle u\rangle$ unbounded, immediately implies disjointness.

Example 3.3. Consider Example 2.1(2), that is, the "45°-rotation" torus action given by (ϕ, ψ). As we explained there, with this torus action, all the eight coarse Lyapunov weights have the form for which Corollary 3.1 is applicable. Therefore, in this setting, the only possible joining is the trivial joining. We remark that a p-adic variant of exactly this situation arises in the arithmetic application considered in Aka, Einsiedler, and Wieser (2021). See Example 6.7 for more details. It is interesting to remark that the statement of Corollary 3.1 is not explicitly visible in the statement of Theorem 1.1; it is nevertheless there: any non-trivial joining will be related to a local isomorphism between $\mathbb{G}_1$ and $\mathbb{G}_2$. Existence of such an isomorphism implies that the non-trivial weights for G_1 and G_2 must be identical, and therefore rules out the possibility of finding a coarse Lyapunov subgroup for which Corollary 3.1 is applicable.

The proof of Corollary 3.1 hints on how we aim to proceed in general: we aim to utilize entropy considerations to establish that a certain coarse Lyapunov subgroup (which is automatically an unipotent subgroup) has maximal entropy contribution and therefore leaves the joining invariant. Once we establish an unipotent invariance, we can utilize measure rigidity results for unipotent flows as shortly described in §2.1. But in general, this unipotent need not be trivial in one of the factors. here are two examples that the reader should keep in mind:

Example 3.4. When we consider possible joinings for with $G_1 = G_2 = G$ and $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$, and with identical action, we always have the so-called "diagonal-joining": the push-forward of $m_{\Gamma\backslash G}$ under $\iota\colon G \to G\times G$, $\iota(g) = (g, g)$. This fits with the fact that Corollary 3.1 is not applicable, as the weights for G_1 and G_2 are identical so all the (coarse) Lyapunov subgroups a product of *non-trivial* weight spaces.

More generally, if $\Psi\colon \mathbb{G}_1 \to \mathbb{G}_2$ is a $\mathbb{Q}$-algebraic isomorphism, then the push-forward m_{X_1} under $\iota\colon G_1 \to G_1 \times G_2$, $g \mapsto (g, \Psi(g))$ is also a non-trivial joining which is supported on the graph of the isomorphism Ψ. In the case where G_1 and G_2 are simple $\mathbb{Q}$-groups, Theorem 1.1 implies that such joinings are the only possible non-trivial joinings. For a concrete example, see Example 2.2 with $\Gamma_1 = \Gamma_2$. We will prove a classification of all (ergodic) joinings for Example 2.2 in §4.

On the other hand, it may well happen that all the coarse Lyapunov subgroups are product of non-trivial weight spaces, but nevertheless the only possible joining is the trivial one:

Example 3.5. Consider Example 2.1(3), i.e. the "different speeds" action (ϕ, τ). Here, there are also only four weights and all the *coarse* Lyapunov subgroups are a product of non-trivial weight spaces. Nevertheless, it follows from Theorem 1.1 that ergodic (ϕ, τ)-invariant joinings must be trivial: any non-trivial joining must arise from an algebraic automorphism Ψ of $\mathbb{G}_1 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ such that the image $\mathbb{Z}^2$ under (ϕ, τ) belongs to $\{(g, \Psi(g) : g \in G)\}$. But such an automorphism does not exist. It is very interesting to see how this arises in the proof, especially when one compares it to Example 2.1(1): we discuss this in §5.1.2 and §5.1.3.

3.2. Support of the leafwise measures

Our ultimate goal is to show that a joining μ admits some unipotent invariance, for example, under one of the coarse Lyapunov subgroups $G^{[\Lambda]}$, or a non-trivial subgroup of it. By Theorem 2.5 this is equivalent to showing that $G^{[\Lambda]}$ (or a non-trivial subgroup of it) has maximal entropy contribution, and by Proposition 2.3(3) this is also equivalent to showing that $\mu_x^{[\Lambda]}$ equals the Haar measure $m_{G^{[\Lambda]}}$ almost everywhere (or the Haar measure on a non-trivial subgroup of it). In this subsection, we show that a much weaker statement follows from (15), namely that the support of $\mu_x^{[\Lambda]}$ is large (at least once projected, see below) almost everywhere. In the next sections, we will try to use further methods/ingredients (the low and high entropy methods) to upgrade this partial information about the support to $\mu_x^{[\Lambda]}$ to a statement that will imply invariance under $U^{[\Lambda]}$ (or one of its non-trivial subgroups).

In general, we cannot expect $\mu_x^{[\Lambda]}$ to have full support. For instance, in the "identical weights" Example 2.1(1), if μ is the diagonal joining induced by $\iota(g) = (g, g)$, then $\mu_x^{[\Lambda]}$ is supported on

$$\left\{\iota(u) : u \in G_1^{[\Lambda]}\right\} \subset G_1^{[\Lambda]} \times G_2^{[\Lambda]}.$$

But in general, we might hope (since having a joining should imply this fact) that the support will be large once projected to each of the factors. This is indeed the case: recall that by Proposition 2.8 we have equality in (14) for any coarse Lyapunov subgroup. This has the following consequence.

Corollary 3.6. *In the setting of Lemma 2.7 assume that equality holds in* (14) *for* $U = U_1 \times U_2 < G$. *Then,* U_1 *is the smallest connected* a_1*-normalized subgroup of* G_1 *containing* $\pi_1\left(\operatorname{supp} \mu_x^U\right)$ *for almost every* $x \in X$.

Proof. Assume for contradiction that the smallest connected a_1-normalized subgroup of G_1 containing $\pi_1\left(\operatorname{supp} \mu_x^U\right)$ for almost every $x \in X$ is $V_1 \lneq U_1$. We claim that the following strict inequality holds:

$$\begin{aligned} h_\mu\left(a, U_1 \times U_2\right) &= h_\mu\left(a, V_1 \times U_2\right) \\ &\leqslant h_{m_{X_1}}\left(a_1, V_1\right) + h_\mu(a, \{e\} \times U_2) \\ &< h_{m_{X_1}}\left(a_1, U_1\right) + h_\mu(a, \{e\} \times U_2). \end{aligned}$$

Indeed, the first equality follows from the definition of the entropy contribution (8) and (9) (strictly speaking, one needs to verify that for $U' < U$ we have $\left(\mu_x^U\right)|_{U'} = \mu_x^{U'}$, i.e. a leafwise measure variant of the double conditioning formula for conditional measures (see e.g. Einsiedler and Ward, 2011, Prop. 5.20). Now, the first inequality follows from (14) applied to $\left(V_1 \times \{e\}\right)\left(\{e\} \times U_2\right)$. For the last strict inequality, note first that $V_1 \lneq U_1 < (G_1)_{a_1}^-$, so all the directions in $G_{a_1}^-$ are being contracted at least by some factor < 1. Therefore, we have the following strict inequality for the contribution with respect to the Haar measures (see (10)):

$$h_{m_{X_1}}\left(a_1, V_1\right) = -\log\left|\det \mathrm{Ad}_{a_1}|_{\mathrm{Lie}(V_1)}\right| < -\log\left|\det \mathrm{Ad}_{a_1}|_{\mathrm{Lie}(U_1)}\right| = h_{m_{X_1}}\left(a_1, U_1\right).$$

This implies the strict inequality above. But having a strict inequality is a contradiction to our assumption that (14) holds for U. □

Corollary 3.7. *In the setting of §2.1 let* μ *be an ergodic* $A = \phi(\mathbb{Z}^d)$*-invariant joining, and let* $U = U_1 \times U_2$ *be a coarse Lyapunov weight. Let* P_x *be the smallest connected* A*-normalized subgroup of* U *containing* $\operatorname{supp} \mu_x^U$. *Then, there is set* $X' \subset X$ *with* $\mu(X) = \mu(X')$ *and a subgroup* $P < U$ *with* $\pi_i(P) = U_i$ *for* $i = 1, 2$ *such that* $P = P_x$ *for every* $x \in X'$.

Proof. According to Corollary 3.6 we have $\pi_i(P_x) = U_i$ for $i = 1, 2$ for almost all $x \in X$, so we just have to show that P_x is almost everywhere constant. To this end, first we note that $x \mapsto P_x$ is a measurable map (which is not at all obvious: one checks this using the characterizing property in Proposition 2.3, where the set of (connected) subgroups of U is equipped with the topology on the Grassmannian of $\mathrm{Lie}(U)$). Moreover, since P_x is A-normalized, it follows from (7) that for every $a \in A$ and almost every x we have $P_{a \cdot x} = P_x$. By the ergodicity assumption, the A-invariant measurable map $x \mapsto P_x$ must be then almost everywhere constant, as we wanted to show. □

The last corollary could be loosely interpreted, by saying that the leafwise measures of coarse Lyapunov weights of a joining behave like the joining: they project

onto each of their natural factors. In particular, we see that leafwise measures of coarse Lyapunov weights have "interesting" support. In the next two sections (depending on the context, and on if different coarse Lyapunov weights commutes or not) we will see how one could use the non-trivial support of these measures to generate an unipotent invariance.

4. The high rank case

When we have two non-commuting coarse Lyapunov weights, the following theorem (Einsiedler and Katok, 2005), coupled with the input we get from Corollary 3.7, finds an unipotent invariance for us.

Theorem 4.1 (The high entropy method)**.** *In the setting of Section 2.1, let μ be an A-invariant ergodic probability measure and fix $a \in A$. Then, there exist two connected and A-normalized subgroups $H \trianglelefteq P \leqslant G_a^-$ such that the following holds*

1. *For almost every $x \in X$, P is the minimal A-normalized subgroup supporting $\mu_x^{G_a^-}$.*
2. *For almost every $x \in X$, $\mu_x^{G_a^-}$ is left- and right-invariant under H.*
3. *If $[\lambda] \neq [\eta]$ are two different coarse Lyapunov weights with $G^{[\lambda]}, G^{[\eta]} \leqslant G_a^-$ and $g_1 \in P \cap G^{[\lambda]}$, $g_2 \in P \cap G^{[\eta]}$, then $[g_1, g_2] \in H$, that is, $g_1 H$ and $g_2 H$ commute with each other in P/H.*
4. *For every coarse Lyapunov weight $[\lambda]$ with $G^{[\lambda]} < G_a^-$ and for almost every $x \in X$, $\mu_x^{G^{[\lambda]}}$ is left- and right-invariant under $H \cap G^{[\lambda]}$.*

We referred to this theorem as the "third ingredient" in §1.1. We will explain now how the three ingredients we named there allow us to classify joinings when $\mathbb{G}_1$ and $\mathbb{G}_2$ are semisimple without rank one factors. As the main steps of the proof are already visible when one considers the case $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_3$, we will restrict ourselves to this case for simplicity and prove:

Theorem 4.2. *In the setting of Example 2.2 all ergodic joinings are algebraic. More precisely, the only possible ergodic joinings are the trivial one and joinings which are the Haar measure on an orbit of a diagonal embedding of SL_3 into SL_3^2, that is, an orbit of a group of the form $\{(g, \Psi(g)) : g \in \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})\} < \mathrm{SL}_3^2(\mathbb{R})$, for an automorphism $\Psi\colon \mathrm{SL}_3 \to \mathrm{SL}_3$.*

4.1. Proof of Theorem 4.2

Recall that $G_i = \mathbb{G}_i(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$ which is $\mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ in our case and that $G = G_1 \times G_2$. Recall that μ denotes the joining we are trying to identify, and we begin by considering the subgroup $I < G$ which is generated by all one-parameter unipotent subgroups that leave the measure μ invariant. If we knew that μ was algebraic (in the sense of Theorem 4.2), I would have projected onto each factor. Reversing the order, we begin by establishing the latter as a first step towards the algebraicity of μ:

Lemma 4.3. *Let* $\mathfrak{i}$ *be the Lie algebra of* I*. Then, for* $i = 1, 2$ *we have* $\pi_i(\mathfrak{i}) = \mathfrak{g}_i$ *(as above* $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{sl}_3$ *denotes the Lie algebra of* G_i*).*

Proof. As we explain in Example 2.2, we have six non-trivial coarse Lyapunov groups $\mathfrak{g}^{ij} = \mathfrak{u}_{ij} \times \mathfrak{u}_{ij}$. Consider, for example, $\mathfrak{g}^{13}$. We would like to write $\mathfrak{g}^{13}$ as a commutator of two other coarse Lyapunov groups, which appear together with $\mathfrak{g}^{13}$ in some stable horospherical subgroup. More precisely, recall that $A = \phi(\mathbb{Z}^2)$ is a subgroup of the diagonal group and pick $a \in A$ with $\mathfrak{g}_a^- = \mathrm{Lie}(G_a^-) = \mathfrak{g}^{12} \oplus \mathfrak{g}^{13} \oplus \mathfrak{g}^{23}$ (the Lie algebra of the Heisenberg group). For example, one can pick $a = \phi(1, 2)$ with the notation of Example 2.2. Note that $[\mathfrak{g}^{12}, \mathfrak{g}^{23}] = \mathfrak{g}^{13}$. We apply the high entropy Theorem (Theorem 4.1) with these choices and let P and H the subgroups appearing in that theorem. We know that $H \cap G^{13}$ contains all commutators $[g_1, g_2]$ with $g_1 \in P \cap G^{12}$ and $g_2 \in P \cap G^{23}$. Moreover, we know from Corollary 3.7 that $P \cap G^{12}$ must project onto G_i^{12}, $i = 1, 2$, using the notation $G^{ij} = G_1^{ij} \times G_2^{ij}$. The same holds for the projection of $P \cap G^{23}$ on the corresponding two factors. As $[G_i^{12}, G_i^{23}] = G_i^{13}$ we see that H must project onto G_i^{13} for $i = 1, 2$. Going back to the Lie algebra, this means, that for $i = 1, 2$ and $w \in \mathfrak{g}_i^{13} = \mathrm{Lie}(G_i^{13}) = \mathfrak{u}_{13}$, $\mathfrak{i}$ must contain an element whose i-component is w.

As we explain in Example 2.2, each coarse Lyapunov space can be written as commutators of other Lyapunov spaces appearing in the decomposition of some stable horospherical subgroup. Therefore, the above argument can be applied to each of the coarse Lyapunov weight spaces. As $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{sl}_3$, $i = 1, 2$ is generated by $\mathfrak{u}_{ij}$, $i \neq j$, the lemma follows. □

Loosely speaking, we already see the possible joinings only by looking at the possibilities for $H \cap G^{ij}$: it is either two-dimensional and equals G^{ij} itself, or it is one-dimensional and equal to a graph of an isomorphism from U^{ij} to itself. We note just for fun, that if $H \cap G^{ij}$ is two-dimensional for some $i \neq j$, μ will be invariant under an element of the form (u, e) or (e, u) with $u \in G_i$ acting ergodically on the corresponding quotient G_i; in other words, we will be again in the situation of the proof of Corollary 3.1 which shows that in this case, μ must be the trivial joining. For the general case, we will need the following Lemma.

Lemma 4.4. *The Lie algebra* $\mathfrak{i} \cap (\mathfrak{g}_1 \times \{0\})$ *is a Lie ideal in* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ (*and therefore also in* $\mathfrak{g}_1 \times \{0\} \cong \mathfrak{g}_1$). *The same holds for* $\mathfrak{i} \cap (\{0\} \times \mathfrak{g}_2)$.

Proof. Consider $(w, 0) \in \mathfrak{i} \cap (\mathfrak{g}_1 \times \{0\})$ and $(v_1, v_2) \in \mathfrak{g}$. Using Lemma 4.3 pick an element in $\mathfrak{i}$ having the same first component as (v_1, v_2), say $(v_1, v_2') \in \mathfrak{i}$. Then,

$$\mathfrak{g}_1 \times \{0\} \ni ([w, v_1], 0) = [(w, 0), (v_1, v_2)] = [(w, 0), (v_1, v_2')] \in \mathfrak{i},$$

as we wanted to show. □

Proof of Theorem 4.2. In our case $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_3$ is a simple Lie algebra, so the Lie ideals in Lemma 4.4 are either trivial or equal to $\mathfrak{sl}_3$. If one of them is equal to $\mathfrak{sl}_3$, we can find a non-trivial element of the form (u, e) or (e, u) with u unipotent, as in the proof of Corollary 3.1, which shows that μ must be the trivial joining. So we may assume now that both ideals are trivial. By the folklore Goursat's Lemma, $\mathfrak{i}$ must be the graph of an isomorphism, that is,

$$\mathfrak{i} = \{(w, \Phi(w) : w \in \mathfrak{g}_1\}$$

for an *isomorphism* $\Phi \colon \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$. It follows that

$$I = \{(g, \Psi(g) : g \in G_1\}$$

for an *isomorphism* $\Psi \colon G_1 \to G_2$. This isomorphism must intertwine the diagonal action $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, that is, $\phi(s, t) := (\phi_1(s, t), \phi_2(s, t))$ must agree with $(\phi_1(s, t), \Psi(\phi_1(s, t)))$. Indeed, if not, μ would be invariant under two elements having the same first coordinate but a different second coordinate, so we could again find an element of the form (e, a) with a acting ergodically on X_1, preserving μ. This puts us again in the situation of the proof of Corollary 3.1. It follows that $A \subset I$, and therefore μ must be ergodic with respect to the action of I, since μ was ergodic with respect to the action of A. Ratner's measure classification can be then applied with the group I showing that μ is the Haar measure on an orbit of I, which concludes the proof. □

Remark 4.5. We actually get more information about the possible joinings from the above proof. First, the automorphism Ψ must intertwine the action ϕ. Second, if there exists a non-trivial joining, Ratner's Theorem will imply that the lattices Γ_1 and Γ_2 must be commensurable.

The proof of the general theorem, say when $\mathbb{G}_1$ and $\mathbb{G}_2$ are both semisimple of rank $\geqslant 2$, is very similar. One essentially replaces the ad-hoc argument for $\mathfrak{sl}_3$ in the beginning of Lemma 4.3 with a general argument that works for any semisimple Lie algebra without rank one factors; see Einsiedler and Lindenstrauss (2007, Lemma 4.2).

5. Joinings with forms of SL_2

In this section we wish to classify the possible ergodic joinings in Example 2.1(1), the "identical weights" example, and Example 2.1(3), the "different speeds" example. Note that we already used Corollary 3.1 to show that all the possible joinings in Example 2.1(2) are trivial. These sub-examples of Example 2.1 may seem very specific, but they are actually very representative examples. Conceptually, classifying joinings when $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$ is the main new case, which is included in Theorem 1.1, but not included in the results of Einsiedler and Lindenstrauss (2007). Moreover, the above three structures of the torus action cover all possible types of joined actions. Furthermore, an analogous full classification of joinings in a general S-adic version of Example 2.1, for products of SL_2-forms, will suffice for most of the applications discussed in section 6.

As we explained in §1.1, the new ingredient used in Einsiedler and Lindenstrauss (2019) in comparison to Einsiedler and Lindenstrauss (2007) is the low-entropy method. This method was originally developed by Lindenstrauss (2006). We wish to follow the main steps of §7 of this paper (which are also nicely explained in Einsiedler and Lindenstrauss, 2010, §10) in order to sketch a proof of the crucial step, Proposition 5.1, in classifying the possible joinings in the two examples listed above. In some sense, we "merely" run the same argument, that Lindentrauss ran in one factor of the form $\Gamma \backslash (\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))$, in two such factors simultaneously. Our torus action is embedded "diagonally", that is, it acts on both factors simultaneously. This gives rise to several complications (and sometimes to cumbersome notation) that must be taken into account.

Let us recall and set up some notation: we let $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$, $G_i = \mathbb{G}_i(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$ and for simplicity let $\Gamma_1 = \Gamma_2$ be an irreducible lattice in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (e.g., $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{2}])$ diagonally embedded). The letter d denotes a left-invariant metric on G, or on G_i, or on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, depending on the context. Let $X_i = \Gamma_i \backslash G_i$ and set $\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$, $G = G_1 \times G_2$, and $X = X_1 \times X_2$. Note that G (or $\mathbb{G}$) have four factors, first two in G_1 and last two in G_2. We refer to them as the first, second, third, and fourth factor accordingly. Recall the notation of $\phi, \tau \colon \mathbb{Z}^2 \to G_i$ given by $\phi(t,s) = (a_t, a_s)$ and $\tau(t,s) = (a_{2t}, a_{2s})$. We will concentrate on the map $\Phi_1 = (\phi, \phi) \colon \mathbb{Z}^2 \to G$, i.e, on Example 2.1(1), remarking, where needed, what would have changed if we had considered the map $\Phi_2 = (\phi, \tau) \colon \mathbb{Z}^2 \to G$ corresponding to Example 2.1(3). By abuse of notation, we denote $A = \Phi_1(\mathbb{Z}^2)$ or $A = \Phi_2(\mathbb{Z}^2)$ in both cases.

We recall from Example 2.1 that for Φ_1 there are four weight spaces, each giving rise to a different coarse Lyapunov subgroup, and for Φ_2 there are 8 weight spaces, coupled through coarse equivalence into pairs, which give rise to the same four Lyapunov subgroups. We denote by $[\alpha]$ the coarse Lyapunov weight with

$w_\alpha = (-1, 0)$ and by $[\beta]$ be the coarse Lyapunov weight with $w_\beta = (0, -1)$. With U^+ (resp. U^-) denoting the upper (resp. lower) triangular unipotent subgroups in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, the corresponding coarse Lyapunov subgroups in both cases are

$$\begin{aligned} U^{[\alpha]} &= (U^+ \times \{e\}) \times (U^+ \times \{e\}) \\ U^{[\beta]} &= (\{e\} \times U^+) \times (\{e\} \times U^+) \\ U^{[-\alpha]} &= (U^- \times \{e\}) \times (U^- \times \{e\}) \\ U^{[-\beta]} &= (\{e\} \times U^-) \times (\{e\} \times U^-) \,. \end{aligned}$$

We denote by μ the A-invariant joining on X that we wish to identify. Recall that $\mu_x^{[\alpha]}, \mu_x^{[\beta]}, \mu_x^{[-\alpha]}, \mu_x^{[-\beta]}$ denote the leafwise measures corresponding to the coarse Lyapunov subgroup as above. For each of the coarse Lyapunov subgroups (i.e., for $\lambda \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$) let

$$I_x^{[\lambda]} = \left\{ u \in U^{[\lambda]} : u \text{ preserves the measure } \mu_x^{[\lambda]} \right\}. \tag{20}$$

The main goal of this section is to outline a proof of the following proposition:

Proposition 5.1 (Main step). *Let μ be an ergodic joining on X, that is, let μ be an A-invariant ergodic measure on X which projects to the Haar measure on X_i in each factor. For any coarse Lyapunov weight $[\lambda]$, and for μ-almost every x, $I_x^{[\lambda]}$ is not the trivial subgroup.*

We will sketch a proof of this proposition in §5.2.

5.1. Classification under the assumption of Proposition 5.1

5.1.1. *Preparation: coordinates on $U^{[\alpha]}$.* — Throughout this section we will concentrate on $\lambda = \alpha$. First note, that via

$$\mathrm{Lie}(U^{[\alpha]}) \cong \mathbb{R}^2,\ (n_x, 0, n_y, 0) \mapsto (x, y),\ n_x := \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

and the fact that $\exp\colon \mathrm{Lie}(U^{[\alpha]}) \to U^{[\alpha]}$ is bijective, we can identify $\mathrm{Lie}(U^{[\alpha]})$ or $U^{[\alpha]}$ with $\mathbb{R}^2$. For $u \in U^{[\alpha]}$ we define $u(s_1)$ and $u(s_2)$ as the real numbers satisfying

$$u = \left(\begin{pmatrix} 1 & u(s_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e, \begin{pmatrix} 1 & u(s_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e \right). \tag{22}$$

So we can define an element $u \in U^{[\alpha]}$ by specifying $u(s_1)$ and $u(s_2)$ and refer to these as the coordinates of u. Any non-trivial $u \in U^{[\alpha]}$ is contained in a unique one-parameter unipotent subgroup $L_u \subset U^{[\alpha]}$, defined by the line in $\mathrm{Lie}(U^{[\alpha]})$ through $\log(u)$. The x-axis corresponds to $U^+ \times \{e\} \times \{e\} \times \{e\}$, and the y-axis to

$\{e\} \times \{e\} \times U^+ \times \{e\}$. By Remark 3.2, showing invariance of a joining μ under a non-trivial element lying on an axis, immediately implies that μ is the trivial joining.

Identifying $U^{[\alpha]}$ with $\mathbb{R}^2$ as above, let's study the action of $A = \Phi_i(\mathbb{Z}^2)$ on $U^{[\alpha]}$ for $i = 1, 2$ by conjugation. For Φ_1, the element $\Phi_1(1,0)$ acts as scalar multiplication by $e^{-1} = (2.718\dots)^{-1}$ and $\Phi_1(0,1)$ acts trivially. For Φ_2, the element $\Phi_2(1,0)$ acts on $U^{[\alpha]}$ by multiplication with $\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$, and $\Phi_2(0,1)$ acts trivially.

5.1.2. *Classification in Example 2.1*(1). —

Theorem 5.2. *Any ergodic $\Phi_1(\mathbb{Z}^2)$-invariant joining μ is either the trivial joining or a diagonal joining, that is, a joining supported on a graph of an isomorphism of G_1 with G_2 (as is Example 3.4).*

Before proving this theorem, let's first analyze $I_x^{[\lambda]}$ for $\lambda \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$. One can show that the map $x \mapsto I_x^{[\lambda]}$ is measurable, and by (7) we also have that

$$\forall a \in A, \quad I_{a.x}^{[\lambda]} = a I_x^{[\lambda]} a^{-1}. \tag{23}$$

From these two facts we have:

Lemma 5.3. *For any $\lambda \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, the group $I_x^{[\lambda]}$ must be almost everywhere constant.*

Proof. For concreteness, consider $U^{[\alpha]}$. Recall that the element $\Phi_1(1,0)$ acts as scalar multiplication by $e^{-1} = (2.718\dots)^{-1}$ and $\Phi_1(0,1)$ act trivially. Using Poincaré recurrence as in Lindenstrauss (2006, Lemma 7.3), or with an argument similar to the proof of Lemma 5.6 below, one can show that for almost any $x \in X$, if $e \neq u \in I_x^{[\lambda]}$ then $L_u \subset I_x^{[\lambda]}$. Therefore, any subgroup of $U^{[\alpha]}$ is A-normalized. In particular, $I_x^{[\alpha]}$ is A-normalized μ-almost everywhere. Since $A = \Phi_1(\mathbb{Z}^2)$ is assumed to act ergodically on X with respect to μ, this means that $I_x^{[\alpha]}$ is almost everywhere constant. Such an argument holds for any other $\lambda \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$. □

We denote this constant group by $I^{[\lambda]}$ and call it the invariance group for $[\lambda]$. From Item 3 of Proposition 2.3, we have:

Corollary 5.4. *For any $\lambda \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, μ is invariant under $I^{[\lambda]}$.*

This gives us enough information to analyse the ergodic joinings in Example 2.1(1).

Proof of Theorem 5.2. First observe, that each of the coarse Lyapunov subgroups is two-dimensional. By Proposition 5.1 each of the invariance groups is non-trivial. If one of them is two-dimensional, we have found an element for which Remark 3.2 applies, so μ must be the trivial joining.

As we explained above, we know that if $e \neq u \in I^{[\alpha]}$, $L_u \subset I^{[\alpha]}$. Since any one-parameter subgroup of $U^{[\alpha]}$ is $\Phi(1,0)$-normalized (equivalently A-normalized), it might as well be that $I^{[\alpha]}$, and similarly all the other invariance subgroups $I^{[\lambda]}$, are one-dimensional. If one of them is supported on the axes, we will know that μ is trivial, again by applying Remark 3.2. When none of them are, then each of them projects onto both of its factors, so the group generated by them must project onto $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ in each of the four factors (as $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ is generated U^+ and U^-). We implicitly apply Goursat's Lemma: these invariance subgroups might be so compatible with each other, so the group generated by them will be the graph of an automorphism of G_1 into G_2, giving rise to a diagonal joining. Otherwise, there will be an element for which Remark 3.2 applies, resulting in the trivial joining. So this proves (modulo Proposition 5.1) everything we wanted to know about Example 2.1(1). □

5.1.3. *Classification in Example 2.1*(3). —

Theorem 5.5. *Any $\Phi_2(\mathbb{Z}^2)$-invariant joining μ must be the trivial joining.*

To prove this theorem, it is enough to show the following:

Lemma 5.6. *The group $I^{[\alpha]}$ must contain the group corresponding to the x-axis in the identification* (21)*, that is the group $U^+ \times \{e\} \times \{e\} \times \{e\}$.*

A similar statement (and proof) will hold for any $\lambda \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$; it is nonetheless enough to concentrate on $\lambda = \alpha$.

Proof of Lemma 5.6. The main difference to Example 2.1(1), is that not every subgroup of $I_x^{[\alpha]}$ is $\Phi_2(\mathbb{Z}^2)$-normalized. Recall that the element $\Phi_2(1,0)$ acts on $U^{[\alpha]}$ by multiplication with $\begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix}$, and $\Phi_2(0,1)$ acts trivially. Dynamically, we see that $\Phi_2(1,0)^n$ pushes elements not belonging to the axes, towards the x-axis. We claim that this, coupled with Poincaré recurrence, proves the lemma, by an argument inspired by the work of Einsiedler and Katok (2005, p. 206-207): let $\varepsilon > 0$ and use Lusin's Theorem (Federer, 1969, p. 76) to find a set K_ε of measure $1 - \varepsilon$ on which $x \mapsto I_x^{[\alpha]}$ is continuous. Denote $a = \Phi_2(1,0)$ and let $x \in K_\varepsilon$, and $e \neq u \in I_x^{[\alpha]}$ denote the element we get from Proposition 5.1. Poincaré recurrence finds for us, for almost any $x \in K_\varepsilon$, a subsequence

$$a^{n_k} x \to x \text{ with } a^{n_k}.x \in K_\varepsilon. \tag{24}$$

It follows from (23) that the group $I^{[\alpha]}_{a^{n_k}.x}$ contains the image of $\langle u \rangle$, under the action of a^{n_k}, that is $\langle a^{n_k} u a^{-n_k} \rangle$, which is a "squashing" of $\langle u \rangle$ towards the x-axis (here, $\langle u \rangle$ is the group generated by u). By (24), $I_x^{[\alpha]}$ contains all elements in $U^{[\alpha]}$ which are limits of $\langle a^{n_k} u a^{-n_k} \rangle$; that is, the entire group corresponding to the x-axis. Taking $\varepsilon \to 0$ we establish the above for x in a conull set of X, as we wanted to show. □

Proof of Theorem 5.5 . As in §5.1.2, we will have that μ will be invariant under $I^{[\alpha]}$. Lemma 5.6 says that $I^{[\alpha]}$ contains elements for which Remark 3.2 applies, showing that μ must be trivial. □

5.2. Proof of Proposition 5.1

5.2.1. *A small reformulation.* —

Lemma 5.7. *Proposition 5.1 is equivalent to establishing that for any $\lambda \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ and almost any $x \in X$,*

$$\exists e \neq u \in U^{[\lambda]}, \quad (R_u)_* \mu_x^{[\lambda]} \propto \mu_x^{[\lambda]}. \tag{25}$$

Proof. This follows again from Poincaré recurrence and can be proven very similarly to Lindenstrauss (2006, Lemma 7.3) or using a similar argument to the one in the proof of Lemma 5.6. □

Note that if we find two points $x, y \in X$ with $\mu_x^{[\lambda]} = \mu_y^{[\lambda]}$ and $x = u.y$ with $e \neq u \in U^{[\alpha]}$, that is, two points with identical leafwise measure on the same $U^{[\lambda]}$-leaf, we get from (6) that

$$(R_u)_* \mu_x^{[\lambda]} = (R_u)_* \mu_{u.y}^{[\lambda]} \propto \mu_y^{[\lambda]} = \mu_x^{[\lambda]} \tag{26}$$

So x will satisfy (25) with $e \neq u \in U^{[\alpha]}$. This led Lindenstrauss to the following idea.

5.2.2. *An optimistic idea: using Ratner's H-principle.* — For concreteness, assume that $\lambda = \alpha$ and consider Example 2.1(1)(that is, with $A = \Phi_1(\mathbb{Z}^2)$). Using Poincaré recurrence for the action of $\Phi_1(0,1)$, which commutes with $U^{[\alpha]}$, we can find many pairs of nearby points $x, y \in X$, with $\mu_x^{[\alpha]} = \mu_y^{[\alpha]}$, and arbitrarily small displacement g, but not necessarily belonging to the same $U^{[\alpha]}$-leaf. That is, the displacement g does not necessarily belong to $U^{[\alpha]}$ (see Lemma 5.8 below for a more precise statement). Then, in order to achieve a pair of points with the same leafwise measure and on the same $U^{[\alpha]}$-leaf, Lindenstrauss had the following, a priori extremely optimistic, idea to use the H-principle of Ratner as follows: First note, that by (6), shearing two points x and y with $\mu_x^{[\alpha]} = \mu_y^{[\alpha]}$ with the *same* $u \in U^{[\alpha]}$ preserves the equality of the leafwise measures. That is, for any $u \in U^{[\alpha]}$

$$\mu_x^{[\alpha]} = \mu_y^{[\alpha]} \implies \mu_{u.x}^{[\alpha]} = \mu_{u.y}^{[\alpha]}. \tag{27}$$

To see where this is going, think for a moment about $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ and U^+, the upper unipotent subgroup. Ratner's H-principle tells us that shearing along U^+, a pair of nearby points in general position with respect to each other, for the right amount of time, will give us two sheared points that differ, non-trivially, only in the U^+ direction, up

to a small error, which tends to zero with the initial displacement (We will formulate this more precisely for the case at hand in Lemma 5.9). Doing this with pairs having displacement tending to e, and taking a limit of the sheared pairs, we find a pair of points, differing non-trivially, exactly in the U^+-direction, i.e., belonging to the same U^+-leaf. This seminal observation of Ratner essentially amounts to a careful analysis of the matrix multiplication in (31).

So if we pretend that the map $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ is continuous, and find many nearby pairs of points (x_n, y_n) in general position with $\mu_{x_n}^{[\alpha]} = \mu_{y_n}^{[\alpha]}$, the H-principle will give us two points with identical leafwise measure on the same $U^{[\alpha]}$-leaf.

But there is one caveat: the measurable map $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ is a priori not continuous. We can try to use Lusin's Theorem to find a compact set K of arbitrarily large measure on which $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ is continuous. But then, trying to restrict the argument to K stirs up many serious complications. Seeing them, the author of this survey would have turned back and given up. As we will outline below, Lindenstrauss (2006) chose to face them and dealt with each of them with an astonishing mastery.

5.2.3. *Preparations for the H-principle.* — Before we follow Lindenstrauss' footsteps to face all the difficulties that arise, let us write, in our "joined" setting, the information we have for running the H-principle of Ratner.

Lemma 5.8 (Input to the H-machine). *Let X' be a set of positive measure and consider a sequence $\delta_n \to 0$. We can find two sequences $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset X'$ with*

1. *$g_n.x_n = y_n$ and $d(g_n, e) < \delta_n$,*
2. *$g_n = (g_n^{(1)}, g_n^{(2)}, g_n^{(3)}, g_n^{(4)})$ with both $g_n^{(1)}, g_n^{(3)} \notin U^+$,*
3. *$\mu_{x_n}^{[\alpha]} = \mu_{y_n}^{[\alpha]}$ for all $n \in \mathbb{N}$.*

Proof. This essentially follows from Poincaré recurrence for the map

$$b := \Phi_1(0,1) = (e, b_1, e, b_2)$$

and irreducibility of Γ_1 and Γ_2. Indeed, we can assume first without loss of generality that $\mu_x^{[\alpha]}$ is defined for any $x \in X'$. The element b preserves μ so by Poincaré recurrence we can find a sequence $n_k \to \infty$ with $b^{n_k}.x \to x$ and $b^{n_k}.x \in X'$. As b commutes with $U^{[\alpha]}$, we also have by (7), that for every $x \in X'$ and $k \in \mathbb{N}$, $\mu_x^{[\alpha]} = \mu_{b^{n_k}.x}^{[\alpha]}$. This generates for us pairs satisfying Items 1 and 3. To show Item 2, assume for contradiction that we found a pair of nearby points x, y with $g.x = y = b^r.x$ for some large $r \in \mathbb{N}$ and with $g^{(1)} \in U^+$. Note that the first component of $U^{[\alpha]}$, U^+, is contracted by $a := \Phi_1(1,0)$. By Poincaré recurrence, we can find a sequence $m_k \to \infty$ with

$a^{m_k}.x \to x$. Acting on $g.x = b^r.x$ with a subsequence of a^{m_k}, we contract $g^{(1)}$ to the identity and find a pair of nearby points x, y' with

$$\left(e, g^{(2)}, *, *\right).x = (e, b_1^r, e, b_2^r).x$$

with $g^{(2)}$ small and b_1^r large, so Γ_1 must contain a non-trivial element of the form (e, h), which is a contradiction to its irreducibility. The same argument works for $g^{(3)}$, and also for Φ_2 instead of Φ_1. □

5.2.4. *Polynomial divergence - how much should we shear?* — Still ignoring the fact that $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ is not continuous, we fix some notation and explain how much we need to shear the pairs of nearby points we get from Lemma 5.8: for $g_n = (g_n^{(1)}, g_n^{(2)}, g_n^{(3)}, g_n^{(4)})$, the displacements between x_n and y_n from Lemma 5.8, we write

$$g_n^{(1)} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}, \; g_n^{(3)} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_n & \tilde{b}_n \\ \tilde{c}_n & \tilde{d}_n \end{pmatrix}. \tag{28}$$

For δ_n small enough, once we shear x_n and y_n with $u_n \in U^{[\alpha]}$ we get that the displacement between $u_n.x_n$ and $u_n.y_n$ is $u_n g_n u_n^{-1}$. We would like to choose $u_n \in U^{[\alpha]}$ such that $\left\{u_n g_n u_n^{-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ will contain a non-trivial element of $U^{[\alpha]}$ as an accumulation point.

Lemma 5.9. *Recall the notation* (22) *and the setting and notation of Lemma 5.8. Assuming $\delta_n < \delta_0$ for δ_0 small enough, we have the following: for any $\rho \in (0,1)$ there are $C > 0$ and $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ with $S_n \overset{\delta_n \to 0}{\longrightarrow} \infty$ such that for any*

$$s_1^{(n)}, s_2^{(n)} \in T(\rho, S_n) := [\rho S_n, S_n] \cup [-S_n, -\rho S_n],$$

there exist σ_1, σ_2 with at least one of them belonging to $[\frac{1}{C}, C]$ satisfying

$$u_n.y_n = g_n' u_\sigma u_n.x_n, \;\; \text{with } d(g_n', e) < \delta_n^{\frac{1}{2}}. \tag{29}$$

where $u_n, u_\sigma \in U^{[\alpha]}$ are the elements with $u_n(s_i) = s_i^{(n)}$ and $u_\sigma(s_i) = \sigma_i$ for $i = 1, 2$.

In words: for a given $\rho \in (0,1)$ we can find a "timescale" S_n such that shearing x_n and y_n with any element of $U^{[\alpha]}$ with coordinates (s_1, s_2) in the "time window" $T(\rho, S_n)$ results in two points which differ, up to a small correction g_n', by an element $u_\sigma \in U^{[\alpha]}$ belonging, at least in one of its components, to a fixed (that is, independent of n) compact set of non-trivial unipotent elements.

Proof. We choose $C = \frac{1}{\rho}$ and choose S_n as a *minimum* as follows:

$$S_n = \min\left(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}\right) \text{ with } S_n^{(i)} = \min\left(\frac{C}{|d_i - a_i|}, \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{|c_i|}}\right), i = 1, 2. \tag{30}$$

The fact the lemma holds with these choices, goes back to Ratner and is based on the following calculation in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$: let $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ and assume that g is close to the identity, that is, that $|a-1|, |c|, |b|, |d-1| < \delta$. We think of g as the displacement between two δ-close points x and y in general position, for a small δ. We calculate now the displacement g_s between $u.x$ and $u.y$:

$$g_s := \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + cs & b + (d-a)s - cs^2 \\ c & d - cs \end{pmatrix}. \tag{31}$$

For the given $\rho \in (0,1)$ we define $C = \frac{1}{\rho}$ as above and $S = \min\left(\frac{C}{|d-a|}, \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{|c|}}\right)$. We then have for any $s \in T(\rho, S)$, that $g_s \approx \left(\begin{smallmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, for $\sigma \in [\frac{1}{C}, C]$, where $\approx$ stands here for an error smaller then $\delta^{1/2}$. See also Lindenstrauss (2006, Lemmata 7.4&7.5).

The above calculation should be done now for both $g_n^{(1)}$ and $g_n^{(3)}$. As we choose S_n in (30) as a minimum, we can only guarantee that one of the resulting σ's will belong to the interval $[\frac{1}{C}, C]$. See also Remark 5.10 below. □

We refer below to S_n, as the "*shearing timescale*" (for x_n and y_n), and to $T(\rho, S_n)$ as the "*shearing time-window*".

Remark 5.10. We are following the footsteps of the work of Lindenstrauss (2006). But this is where we start to see a slight difference: due to the fact that in our situation we shear according to *two* displacements $g_n^{(1)}, g_n^{(3)}$ and the shearing group $U^{[\alpha]}$ is two-dimensional, we are forced to choose the shearing timescale S_n as a minimum between $S_n^{(1)}$ and $S_n^{(2)}$. Note that $S_n^{(1)}$ (resp. $S_n^{(2)}$) is the time needed for the displacement $g_n^{(1)}$ (resp. $g_n^{(3)}$) to grow in the U^+-direction. It might as well be (and we cannot control this at all since the displacements are given to us from Poincaré recurrence) that the timescale S_n was not large enough for *both* g_n and g_n' to grow. Indeed, for all we know, it may be that $|c_n|$ and $|d_n - a_n|$ might be tiny in comparison to $|\tilde{c}_n|$ and $\left|\tilde{d}_n - \tilde{a}_n\right|$. This must be taken into account once we admit that $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ is not continuous.

5.2.5. *Maximal ergodic theorems.* — Let $\varepsilon > 0$. As said above, by Lusin's Theorem we can find a compact set $K = K_\varepsilon$ of measure $> 1 - \varepsilon$, with $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ being continuous when restricted to K. Using Lemmata 5.8 and 5.9 and their notation, we see that we "just" need to make sure that for every $n \in \mathbb{N}$ we find $u_n \in U^{[\alpha]}$ with

1. $u_n(s_1)$ and $u_n(s_2)$ belonging the time window $T(\rho, S_n)$, and
2. the sheared points $u_n.x_n$, $u_n.y_n$ belonging to K.

If we could ensure this, we would choose accumulation points x and y of $\{u_n.x_n\}, \{u_n.y_n\}$ to find a $u \neq e$ and x and y as in (26) leading to $u \neq e$ and x satisfying (25). But how do we actually know if such u_n exist?

To discuss this further, let's denote by

$$B_S(U^{[\alpha]}) = \left\{ u \in U^{[\alpha]} : u_n(s_1), u_n(s_2) \in [-S, S] \right\}.$$

A maximal ergodic theorem will help us "measure" the subset of $B_S(U^{[\alpha]})$ whose elements satisfy Item 2. More precisely, first notice that if μ was $U^{[\alpha]}$-invariant (which is a ridiculous assumption, since if this invariance was known to us, we wouldn't be having this discussion), then we could have used a maximal ergodic theorem with respect to the action of $U^{[\alpha]} \cong \mathbb{R}^2$. Such a theorem will tell us that we can find a set $X' = X'(K_\varepsilon)$ of measure $1 - C\varepsilon^{1/2}$ (with C being a universal constant), such that for every $x \in X'$ and for all timescales S, we have

$$m_{U^{[\alpha]}} \left(\left\{ u \in B_S(U^{[\alpha]}) : u.x \in K \right\} \right) \geqslant \left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) m_{U^{[\alpha]}} \left(B_S(U^{[\alpha]}) \right). \tag{32}$$

where $m_{U^{[\alpha]}}$ denotes, under the identification (21), the Borel measure on $\mathbb{R}^2$. Having this for x_n and y_n as above would definitely help to choose u_n as above.

But μ cannot be assumed to be $U^{[\alpha]}$-invariant. The only thing we know is that μ is A-invariant. As $U^{[\alpha]}$ is A-invariant, the only information connecting μ and $U^{[\alpha]}$ is that there is a $U^{[\alpha]}$-invariant foliation of the space. Lindenstrauss (together with Rudolph) proves in the Appendix of Lindenstrauss (2006), that this information is enough in order to deduce the existence of $X' = X'(K_\varepsilon)$ exactly as above, satisfying the exact statement as above, but with $m_{U^{[\alpha]}}$ interchanged with $\mu_x^{[\alpha]}$: there exists a set $X' = X'(K_\varepsilon)$ of measure $1 - C\varepsilon^{1/2}$ (with C a universal constant), such that for every $x \in X'$

$$\forall S > 0 \ \mu_x^{[\alpha]} \left(\left\{ u \in B_S(U^{[\alpha]}) : u.x \in K \right\} \right) \geqslant \left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \right) \mu_x^{[\alpha]} \left(B_S(U^{[\alpha]}) \right). \tag{33}$$

This gives us great information with respect to satisfying Item 2, but the minute we try to couple this with satisfying Item 1 we face another problem: let

$$F(\rho, S) = \left\{ u \in U^{[\alpha]} : u_n(s_1), u_n(s_2) \in T(\rho, S) \right\} \subset B_S(U^{[\alpha]})$$

be the points that satisfy Item 1. Note that $F(\rho, S_n)$ is the set of all elements belonging to the timescale S_n and keeping distance ρS_n from the axes, i.e. the complement in $B_{S_n}(U^{[\alpha]})$ of a ρS_n-thickening of the axes. So in order to satisfy Items 1 and 2 simultaneously, we need to know, for the x_n's, y_n's and all timescales S_n given to us by

Lemma 5.9, that $\mu_x^{[\alpha]}(F(\rho, S_n))$ is large in comparison to $\mu_x^{[\alpha]}(B_S(U))$. In other words, that $\mu_x^{[\alpha]}$ is not concentrated near the axes for a typical $x \in X$. How can this be guaranteed? The short answer is, that it can't. We, or more precisely Lindenstrauss, needed to find a workaround. Before describing it, let's see what we can guarantee.

5.2.6. *Where the joining assumption is used.* — As a first step, let's show that $\mu_x^{[\alpha]}$ is not supported *on* the axes. This is based on the following fact about leafwise measures:

Lemma 5.11. *Let U be one of the coarse Lyapunov subgroups above and $U' < U$ an A-normalized connected subgroup. We have*

$$\mu_x^U(U') > 0 \iff \mu_x^U = \mu_x^{U'}.$$

Proof. See Einsiedler and Lindenstrauss (2019, Lemma 5.2). The proof goes via a third equivalence, namely, that the entropy contributions are the same, $h_\mu(a, U) = h_\mu(a, U')$ for every $a \in A$. □

This lemma with $U = U^{[\alpha]}$ and U' denoting one of the subgroups corresponding to the axes, implies, that for the typical points $x \in X'$, where X' is the conull set from Corollary 3.7, we have that $\mu_x^{[\alpha]}$ gives measure zero to both axes. Otherwise, the support of $\mu_x^{[\alpha]}$ will be contained in one of the axes, and won't project surjectively on both factors.

Now, fixing $S = 1$ and taking ρ small enough, it follows that ρ-thickening of the axes inside $B_1(U^{[\alpha]})$ gets arbitrarily small $\mu_x^{[\alpha]}$-mass. In other words, given $\varepsilon > 0$ there exists a set $\tilde{X} \subset X'$ with $\mu(\tilde{X}) > 1 - \varepsilon$, and a $\rho > 0$ such that

$$\mu_x^{[\alpha]}(F(\rho, 1)) > \frac{1}{2}\mu_x^{[\alpha]}(B_1(U^{[\alpha]}))$$

for all $x \in \tilde{X}$.

Now, in the setting of Example 2.1(1), we can use the usual maximal ergodic theorem with the element $a := \Phi_1(1, 0)$ that preserves μ, to conclude the following: there exists a subset $Y \subset X$ with $\mu(Y) > 1 - \varepsilon^{1/2}$ such that for every $x \in Y$ and every $R > 0$, most ($1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ of the times) $r \in [0, R]$ have $a^r.x \in \tilde{X}$. Together with (7), this implies that for $x \in Y$ and most $r \in [0, R]$ we have

$$\mu_x^{[\alpha]}(F(\rho, e^r)) > \frac{1}{2}\mu_x^{[\alpha]}(B_{e^r}(U^{[\alpha]})). \tag{34}$$

In other words, we can find a large set of $x \in X$ and many timescales for which we know that $\mu_x^{[\alpha]}$ is not concentrated near the axes. This is a self-similarity property for $\mu_x^{[\alpha]}$; one can expect such properties for measures invariant under a diagonalizable element with positive entropy.

Remark 5.12. A similar statement holds for Example 2.1(3). The only difference is that we need to replace the $B_{e^r}(U^{[\alpha]})$, which is defined as "the square in $U^{[\alpha]}$ with lengths e^r" with a "rectangle in $U^{[\alpha]}$ with lengths e^r and e^{2r}" (and change similarly all the other sets appearing above).

Having (34) is unfortunately, not enough for running the H-principle argument we are after. We still cannot guarantee that the timescales given to us by Lemma 5.9 are not exactly the problematic scales we don't cover in (34). Lindenstrauss had another rabbit in the hat: he noticed that tweaking the initial pair x_n and y_n from Lemma 5.8 by $a^t := (\Phi_1(1,0))^t$ for $t \in [0, T_n]$ still preserves the equality of the corresponding leafwise measures. Note that $T_n = T_n(\delta_n)$ are needed to be chosen carefully so the displacement between $a^t.x_n$ and $a^t.y_n$ won't grow too much. Having this extra freedom in choosing the initial pairs might give more possible timescales, for which we might be able to guarantee regularity properties as in (34). An intricate calculation shows that this is indeed the case, enabling Lindenstruass to run the H-principle against all odds — see Lindenstrauss (2006, §7.2). Essentially the same calculation (but done in the first and the third component simultaneously), enables us to run it also in our setting. We avoid discussing it here and finish our outline of the proof of Proposition 5.1 under the simplifying assumption that a regularity property as in (34) holds for any scale.

5.2.7. *Proof of Proposition 5.1 under a simplifying self-similarity assumption.* — For concreteness consider $\lambda = \alpha$ and to simplify notation denote $B_S = B_S\left(U^{[\alpha]}\right)$. We assume that there is a $\rho \in (0,1)$ such that for μ-almost every x we have

$$\forall S > 1 \quad \mu_x^{[\alpha]}(F(\rho, S)) > \frac{1}{2}\mu_x^{[\alpha]}(B_S), \tag{35}$$

and outline a proof of Proposition 5.1. The reader may compare this outline to Lindenstrauss (2006, §7.1). Assume, for contradiction, that Proposition 5.1 does not hold. Then, (25) does not hold with $\lambda = \alpha$ on a subset of positive measure which is A-invariant by (23). Ergodicity then implies that for a typical point $x \in X$, (25) does not hold with $\lambda = \alpha$. Now, let $\varepsilon > 0$ and choose a *compact* subset $X_1 \subset X$ with $\mu(X_1) > 1 - \varepsilon$ and with:

1. $\mu_x^{[\alpha]}$ is defined for $x \in X_1$, and the map $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ is continuous on X_1 ,
2. (25) does not hold for $x \in X_1$ (with $\lambda = \alpha$).

By §5.2.5 there exists a compact set X_2 with $\mu(X_2) > 1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ such that any $x \in X_2$ satisfies (33) with $K = X_1$.

Now, use Lemma 5.8 with $X' = X_2$ to find pairs of nearby points as stated there; let x and y be such a pair with distance $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ small enough so that the corresponding timescale S from Lemma 5.9 will be large enough, so that (35) holds.

Let $G_x = \left\{u \in U^{[\alpha]} : u.x \in X_1\right\}$ and $G_y = \left\{u \in U^{[\alpha]} : u.y \in X_1\right\}$. From (33) we know that

$$\mu_x^{[\alpha]}(G_x \cap B_S) \geqslant \left(1 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) \mu_x^{[\alpha]}(B_S)$$

and similarly for y. So,

$$\mu_x^{[\alpha]}\left(G_x \cap G_y \cap B_S\right) \geqslant \mu_x^{[\alpha]}(B_S) - \mu_x^{[\alpha]}(B_S \setminus G_x) - \mu_x^{[\alpha]}(B_S \setminus G_x) \geqslant (1 - 2\varepsilon^{\frac{1}{2}})\mu_x^{[\alpha]}(B_S).$$

In particular for ε small enough, we can find $u \in B_S$ enabling us to use the H-principle to find $x' = u.x, y' = u.y \in X_1$ satisfying

- $\mu_{x'}^{[\alpha]} = \mu_{y'}^{[\alpha]}$
- $y' = (g'u').x'$ with $u' \in U^{[\alpha]}$ having at least one of its coordinates, $u'(s_1)$ or $u'(s_2)$, in $[\frac{1}{C}, C]$, and with $g' \in G$ of size at most $\delta^{\frac{1}{2}}$.

Applying this to all the pairs of nearby points coming from Lemma 5.8, we get pairs $x'_n, y'_n \in X_1$ as above with $\delta_n \to 0$. We choose a subsequence where the resulting u'_n as above all belongs to a compact set in at least one of their coordinates, say their first one. That is, we assume that u'_n satisfy $u'_n(s_1) \in [\frac{1}{C}, C]$ along this subsequence. As X_1 is compact, and $x \mapsto \mu_x^{[\alpha]}$ is continuous on X_1, we explained in §5.2.2 that limit points of $\{x_n\}$ and of $\{y_n\}$ will give us points $x, y = u.x \in X_1$ with $u \neq e$ with equal leafwise measure. That is, we will find $x \in X_1$ satisfying (25), in contradiction to the definition of X_1.

6. Applications of the joinings Theorem

In §6.1 we survey many arithmetic problems and their relation to adelic/p-adic torus orbits; In §6.2 we couple these problems to get problems related to the classification of joinings. We then explain what Theorem 1.1 can say about these coupled problems. Finally, in §6.3 we give a new arithmetic application of Theorem 1.1 for simple groups of high rank.

We recall that when (X, m_X) is a probability measure space we say that a sequence of finite set $A_i \subset X$ *equidistribute*, when the normalized counting measure on A_i converges in the weak-* topology to m_X.

6.1. Torus orbits and arithmetic

6.1.1. *Three classical arithmetic distribution problems.* — Let us first revisit the arithmetic distribution problem we considered in the introduction (see (1) for the notation): the distribution of $\frac{1}{\sqrt{D}}\mathbb{S}^2(D)$ inside $\mathbb{S}^2$ for large $D > 0$ with $D \neq 0, 4, 7 \mod 8$. Note that

the set $\mathrm{S}^2(D)$ can be also considered as the set of integer points on the level set $Q_1 = D$ for the quadratic form $Q_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$.

The second distribution problem we consider is very similar. For $D<0$, one can consider the set of primitive binary quadratic forms with discriminant D

$$\mathrm{Bin}_D = \left\{ q_{(a,b,c)}(x,y) = ax^2+bxy+cy^2 : b^2-4ac = D,\ \gcd(a,b,c)=1 \right\}. \quad (36)$$

By identifying Bin_D with the set of the corresponding coefficient vectors (a,b,c), one can realize Bin_D as the set of integer points on the level set for the quadratic form $Q_2(X,Y,Z) = Y^2-4XZ$:

$$V_D := \left\{ (X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3 : Y^2-4XZ = D \right\} \quad (37)$$

and ask about the distribution of $\frac{1}{\sqrt{|D|}}\mathrm{Bin}_D \subset V_{-1}$ when $D \to -\infty$ (along negative *discriminants*, which are by definition the set on D's with $\mathrm{Bin}_D \neq \emptyset$). Note that the natural "cone" measure on $V_{-1} \subset \mathbb{R}^3$ is infinite. This is not really an issue; one just measures the distribution with respect to all possible quotients of two test functions. But for other reasons, one can reformulate this distribution problem in an equivalent "modular" way, which yields a distribution problem in a finite-measure space. To this end, we recall that Gauss (1986) defined an action of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ on Bin_D by

$$g.q(x,y) := \frac{1}{\det(g)} q\left((x,y)g\right), \quad q(x,y) \in \mathrm{Bin}_D,\ g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

and showed that this action has a finite number of orbits (forming an abelian group, see below). For $q(x,y) \in \mathrm{Bin}_D$ let z_q denote the unique root of $q(z,1)$ belonging to the upper half plane $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(x) \geqslant 0\}$. The set of such roots are called *complex multiplication points*[(2)] or *Heegner points* of discriminant D. Furthermore, let $[z_q]$ denote the orbit of z_q under the action of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ by Möbius transformations on the $\mathbb{H}$. One can then verify that the $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-orbit of $q \in \mathrm{Bin}_D$ corresponds to the $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$-orbit $[z_q]$. So the set $\mathscr{H}_D := \left\{ [z_q] : q \in \mathrm{Bin}_D \right\} \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ is finite. A dual reformulation of the above distribution problem on V_{-1} is the distribution of the normalized counting measures of the finite sets $\mathscr{H}_D$ on $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ equipped with the finite, normalized uniform measure $\frac{3}{\pi}(ds)^2 = \frac{3}{\pi}\frac{(dx)^2+(dy)^2}{y^2}$ when $D \to -\infty$. Figures 8-10 were made by Andreas Wieser to show the distribution of $\mathscr{H}_D$ with growing $|D|$'s.

We shortly mention a third, related distribution problem. In the last distribution problem, one can also consider positive discriminants $D>0$ and the corresponding distribution of $\frac{1}{\sqrt{D}}\mathrm{Bin}_D \subset V_1$ as $D \to \infty$ along positive discriminants. This problem

(2) Equivalently, a point $z \in \mathbb{H}$ is called a *complex multiplication point of discriminant D* if the automorphisms group of the corresponding lattice $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(1,z) \subset \mathbb{C}$ is the quadratic order of discriminant D.

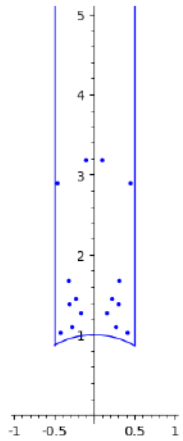


Figure 8:
$D = -1009$

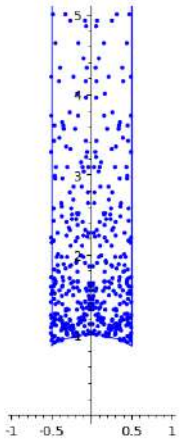


Figure 9:
$D = -105509$

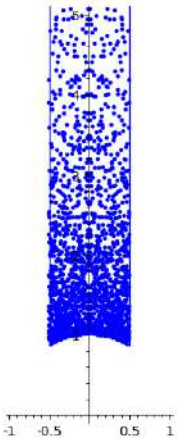


Figure 10:
$D = -1299821$

also admits a modular formulation as above: one sees that $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-orbits in Bin_D correspond to a finite set of closed geodesics on the modular surface $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. See the work of Einsiedler, Lindenstrauss, Michel, et al. (2012) for more details and nice images of this distribution for some large D's. As we partially explain in 6.1.2, roughly speaking, the sets $\mathrm{S}^2(D)$ for $D > 0$, and the sets $\mathscr{H}_D$ or Bin_D for $D < 0$ with $D = 3 \mod 4$, and the sets $\mathscr{H}_{4D}$ or Bin_{4D} for $D < 0$ with $D = 1, 2 \mod 4$, are all torsors[(3)] for the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_D)$ of the quadratic order of discriminant D, and therefore have size $h_D = |\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_D)|$. For $D > 0$, the finite set of closed geodesics corresponding to the $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$-orbits in Bin_D has size h_D. Gauss conjectured by Gauss that for $D > 0$, h_D is infinitely often equal to 1. Figure 11 shows images made by Alex Kontorovich showing the distribution of these geodesics for two comparable discriminants, one with a trivial class group and one with a class group of order 4 (The notation $[a, b, c]$ stands for the binary form $ax^2 + bxy + cy^2$).

We avoid giving historical details for these problems. We just mention that, as the images might suggest, in these three problems the sets $\mathrm{S}^2(D)$ (resp. Bin_D or equivalently $\mathscr{H}_D$) equidistribute with the respect to the natural measures on S^2 (resp. V_{-1},V_1 or equivalently $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$). Under an *auxiliary* congruence condition on D these results were proven by Linnik and Skubenko in the late 50s (see Linnik, 1968). Duke (1988) proved it in full generality, building on a work of Iwaniec (1987). We refer below to these equidistribution results (and some other variants of them mentioned below) collectively as *Duke's Theorem*.

There are several surveys of these results which might interest the reader: for a modern approach to the methods of Linnik and his school, we refer to the work of Einsiedler, Lindenstrauss, Michel, et al. (2012), Ellenberg, Michel, and Venkatesh

[(3)] That is, they are acted upon freely and transitively by $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_D)$

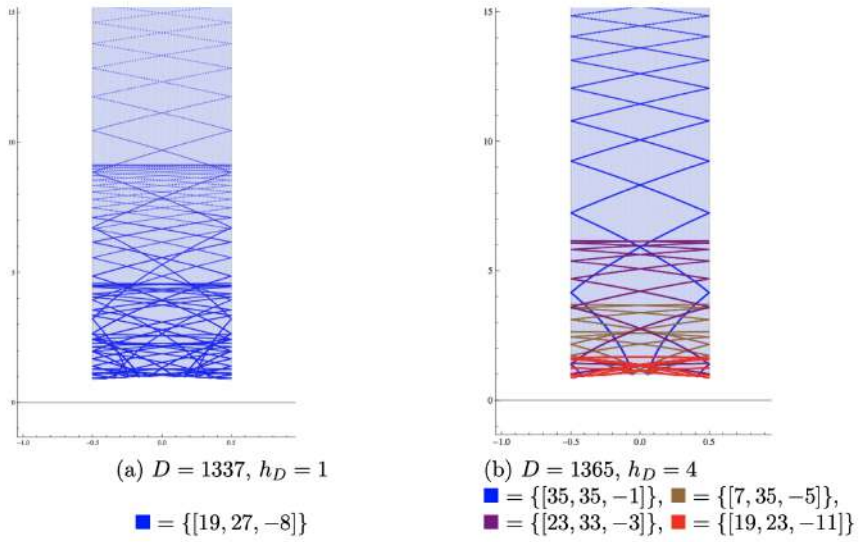


Figure 11: Distribution of closed geodesics (by Alex Kontorovich)

(2013) and to the work of Wieser (2019). Some methods used in these works are partially related to the methods used in the proof of Theorem 1.1. For a broader overview, also on the works of Duke and Iwaniec mentioned above, the reader can consult the survey by Duke (2007) and by Michel and Venkatesh (2006). Finally, these results (and most of the applications mentioned in this survey) are also considered in the recent survey by Lindenstrauss (2021).

6.1.2. *Relation to class groups and adelic torus orbits.* — It is not a priori clear how the above distribution questions relate to questions about the distribution of torus orbits in (S-arithmetic/ adelic) homogeneous spaces. Let us concentrate on the first problem above, the distribution of $\frac{1}{\sqrt{D}}\mathbb{S}^2(D) \subset \mathbb{S}^2$, $D > 0$. We claim that the distribution properties of $\mathbb{S}^2(D)$ can be studied through the distribution properties of an orbit of the group $\mathbb{H}_v(\mathbb{A})$ in the quotient $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{A})$. Here, v denotes a vector in $\mathbb{S}^2(D)$, $\mathbb{H}_v$ denotes the stabilizer group of v with respect to the standard action of SO_3 on the three-dimensional space, and $\mathbb{A}$ denotes the ring of adèles of $\mathbb{Q}$. Note that, in this case, the group $\mathbb{H}_v(\mathbb{A})$ is the adelic points of a rank one, $\mathbb{Q}$-anisotropic algebraic torus. We remark that $\mathrm{SO}_3 = \mathrm{SO}_{Q_1}$ where Q_1 was defined in §6.1.1. Everything we will say below can be done analogously with Q_2 instead of Q_1, when one considers $\mathscr{H}_D$ instead of $\mathbb{S}^2(D)$.

To convince the reader that this relation is plausible, and relate it also to the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$, let us define a map that seems contradictory: we fix a vector $v \in \mathbb{S}^2(D)$ and we wish to define an (essentially bijective) map from a set of double-cosets related to $\mathbb{H}_v$ (see (43)) to the set $\mathbb{S}^2(D)$, by using elements of $\mathbb{H}_v(\mathbb{A}_f)$ to move v *non-trivially* to other vectors in $\mathbb{S}^2(D)$. Here, $\mathbb{A}_f$ denotes the finite adèles. To define this map, we first note that SO_3 has class number one, that is,

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{A}_f) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\,\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}}) \tag{38}$$

where $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ is embedded diagonally in $\mathrm{SO}_3(\mathbb{A}_f)$ and $\widehat{\mathbb{Z}}$ denotes the (compact) ring $\prod_{p \text{ prime}} \mathbb{Z}_p$ (For a proof of (38), one may consult Ellenberg, Michel, and Venkatesh, 2013, §5.1). Note that this fact is true for this specific ternary form Q_1, although general forms can be treated with the same techniques too. One can therefore write any element of $\mathrm{SO}_3(\mathbb{A}_f)$, and in particular any $h = \left(h_p\right)_p \in \mathbb{H}_v(\mathbb{A}_f)$ as

$$h = \gamma^{-1}k, \text{ with } \gamma \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q}),\ k = (k_p)_p \in \mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}}). \tag{39}$$

Using this decomposition we can take $h \in \mathbb{H}_v(\mathbb{A}_f)$ and use it to generate a vector in $\mathbb{S}^2(D)$: for $h = \left(h_p\right)_p \in \mathbb{H}_v(\mathbb{A}_f)$ let γ and $k = (k_p)_p$ be as in equation (39) and define

$$h * v := \gamma.v \in \mathbb{S}^2(D). \tag{40}$$

To show that the vector $h * v$ is indeed in $\mathbb{S}^2(D)$ and that this process is well-defined, first note that for any prime p we have (as γ is diagonally-embedded)

$$\mathbb{Q}^3 \ni \gamma.v = \gamma.h_p.v \overset{(39)}{=} (\gamma\gamma^{-1}k_p).v = k_p.v \in \mathbb{Z}_p^3. \tag{41}$$

As $\mathbb{Q} \cap \widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ we have that $\gamma.v \in \mathbb{Z}^3$ and since we act by the orthogonal group, it has the same length and is therefore indeed an element of $\mathbb{S}^2(D)$. We also have $\gamma.v = k_p.v$ for every prime p. However, $h * v$ does depend slightly on the choices made in (39): choosing a different decomposition in (39) will yield the same vector up-to $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$, so this process gives a well-defined map to $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{S}^2(D)$. The finite group $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$ leaves all the measures we are interested in invariant, so this small detail does not matter too much for us (and we will keep saying, imprecisely, that we got a map to $\mathbb{S}^2(D)$). A priori, there is no reason to believe that we get new vectors from this process, that is, that the image of this map is interesting. Purely algebraically (see Platonov and Rapinchuk, 1994, Theorem 8.2) one can show that the set of new vectors we generate from v out of $\mathbb{H}(\mathbb{A}_f)$ via the above process, is the so-called *genus* of v:

$$\mathrm{gen}(v) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\left\{w \in \mathbb{Q}^3 : \forall p\ w \sim_{\mathbb{Z}_p} v,\ w \sim_{\mathbb{Q}} v\right\} \tag{42}$$

where with $w \sim_R v$ for a ring R we mean that there exists $g \in \mathrm{SO}_3(R)$ with $g.w = v$. Moreover, it follows from purely algebraic considerations, that this process defines a bijection between $\mathrm{gen}(v)$ and the following double quotient:

$$\mathbb{H}_v(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{H}_v(\mathbb{A}_f)/\mathbb{H}_v(\widehat{\mathbb{Z}}). \tag{43}$$

Note that this double quotient is a (abelian) group since $\mathbb{H}_v$ is abelian. Assume for simplicity that D is fundamental. As an algebraic torus, $\mathbb{H}_v$ is isomorphic to the rank one $\mathbb{Q}$-anisotropic torus $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m$ for $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$. This identifies (with small bounded index depending on this isomorphism of the algebraic tori) the double quotient in (43) with the similar double quotient for $\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m$ (see § 6.1.4 for more details). The latter is by definition the idèle class group $K^*\backslash\mathbb{A}_{K,f}^\times/\widehat{\mathscr{O}_{-D}}^\times$, which is isomorphic to the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$. In this specific case, one can show that $\mathrm{gen}(v)$ is equal to $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{S}^2(D)$ (see for example Ellenberg, Michel, and Venkatesh, 2013, §6). In summary, the above describes a (essentially bijective) map from the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$ onto $\mathbb{S}^2(D)$ as promised (ignoring again the division by $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})$ and the above-mentioned small bounded index issues). This map depends of course on the choice of the "base point" v. In Ellenberg, Michel, and Venkatesh (2013, Proposition 3.5) they explain how to construct from these base-dependent maps a base-free way to give $\mathbb{S}^2(D)$ a torsor structure for $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$, that is, how to construct a free and transitive action of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$ on $\mathbb{S}^2(D)$.

We remark that the above algebraic construction does not tell us *anything* about how $\mathbb{S}^2(D)$ distributes, and in particular does not give us any reason to believe that $\frac{1}{\sqrt{D}}\mathbb{S}^2(D)$ equidistributes. In section 6.1.5 we will give a dynamical interpretation of this construction, from which the above construction arises, and through which one can see why $\frac{1}{\sqrt{D}}\mathbb{S}^2(D)$ should equidistribute.

6.1.3. *A hidden distribution problem.* — We shortly describe another arithmetic problem because it relates in a slightly different way to the distribution of adelic torus orbits and because it gives rise naturally to a problem about joinings. We avoid giving many details, skip some definitions, and instead refer the interested reader to the introduction of Aka, Luethi, et al. (2020).

Let $\mathscr{O}_D$ be the quadratic imaginary order with discriminant $D < 0$. We say that an elliptic curve E over $\mathbb{C}$ has complex multiplication (CM) by $\mathscr{O}_D$ if its endomorphism ring is isomorphic to $\mathscr{O}_D$. We let CM_D denote the set of isomorphism classes of elliptic curves having complex multiplication by $\mathscr{O}_D$ (Roughly speaking, one may realize this set as the isomorphism classes of $\{\mathbb{C}/\Lambda_z : [z] \in \mathscr{H}_D\}$ where Λ_z denotes the lattice $\mathrm{span}_{\mathbb{Z}}(1, z) \subset \mathbb{C}$). This set is finite, of order $h_D \asymp |D|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ and consists of curves which are defined over a finite algebraic extension of $\mathbb{Q}$.

Fix an odd prime p and consider now only negative D's for which p is inert in $\mathscr{O}_D$. Fixing an embedding of $\overline{\mathbb{Q}}$ in $\overline{\mathbb{Q}_p}$, one can naturally define the reduction map $\mathrm{red}_p\colon \mathrm{CM}_D \to \mathscr{S}_p$ where $\mathscr{S}_p$ is the set of supersingular elliptic curves over $\overline{\mathbb{F}_p}$. The set $\mathscr{S}_p$ is finite, of order $\asymp \frac{p-1}{12}$. Deuring (1941) showed that any element of $\mathscr{S}_p$ is the reduction of an element of CM_D for some negative D. It raised the question if there is a discriminant D (with p being inert in $\mathscr{O}_D$) for which this reduction map is surjective.

Proving a variant of the works of Duke and Iwaniec mentioned above, and based on a work of Gross (1987), Michel (2004) proved that surjectivity holds for large enough $|D|$. In fact, he explained that this question is a slight variant of the problems considered above: the distribution of the adelic points of a rank one, $\mathbb{Q}$-anisotropic tori in a homogeneous spaces of the form $\mathrm{SO}_Q(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_Q(\mathbb{A})$ for some specific quadratic form Q (related only to p). In §6.1.4 we shortly review a generalized setting, in which one can consider all the above problems in a uniform way. Before we do this, let us just hint how this surjectivity problem could lead to problems involving joinings: fix two odd primes p, q and consider now only negative D's with both p and q being inert in $\mathscr{O}_D$. Is the map $(\mathrm{red}_p, \mathrm{red}_q)$ surjective for $|D|$ large enough? If so, can this be generalized to any finite number of primes?

6.1.4. *A common generalization.* — All the above problems fit in the following setting. Let B be a quaternion algebra over $\mathbb{Q}$. Recall that quaternion algebras over $\mathbb{Q}$ are classified by a finite, even-sized set of places S, where they ramify, that is, where $B \otimes \mathbb{Q}_p$ is a division-algebra. Let Nr be the associated reduced norm and $Q := \mathrm{Nr}\,|_{B^0}$ the quadratic form induced by the restriction of Nr to the traceless quaternions B^0. Recall that

$$\begin{aligned} B^\times \xrightarrow{\pi} PB^\times := B^\times / Z(B^\times) &\cong \mathrm{SO}_Q \\ g &\mapsto \left(x \in B^0 \mapsto gxg^{-1} \in B^0\right) \end{aligned} \tag{44}$$

where $Z(B^\times)$ denotes the center of $B^\times$. For $v \in B^0$, the preimage of the stabilizer group $\mathbb{H}_v < \mathrm{SO}_Q$ under this map is the group of the invertible elements of the ring

$$\mathbb{Q}[v] \cong \mathbb{Q}[X] / \left(X^2 + \mathrm{Nr}(v)\right) =: K,$$

since for $v \in B^0$ we have $v^2 = -v\bar{v} = -\mathrm{Nr}(v) \in \mathbb{Q}$. Let $\mathbb{G}$ denote the algebraic group $PB^\times$ and $\mathbb{T}_v = \mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}}\,\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m < \mathbb{G}$ denote the image of $\mathbb{Q}[v]$ under π in $\mathbb{G}$. Note that $\mathbb{T}_v$ is a rank one $\mathbb{Q}$-anisotropic algebraic torus.

All the above arithmetic problems, and many others, can be recast naturally, as follows. We consider the adelic homogeneous space $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$, and for a *primitive* vector $v \in B^0(\mathbb{Z})$ and call an orbit of the form

$$\mathbb{G}(\mathbb{Q})\mathbb{T}_v(\mathbb{A})\left(g_\infty, g_f\right), \quad \left(g_\infty, g_f\right) \in \mathbb{G}(\mathbb{R}) \times \mathbb{G}(\mathbb{A}_f) \tag{45}$$

a *toral packet* related to v. We equip a toral packet with the pushforward of the natural Haar probability measure on the quotient $\mathbb{T}_v(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}_v(\mathbb{A})$ under the map $t \mapsto t\left(g_\infty, g_f\right)$. One can attach to such an orbit a *discriminant* which is, roughly said, related to $-\mathrm{Nr}(v)$. More precisely, it can be defined as the product of local discriminants; for a non-Archimedean place, say at p, the local discriminant is the

discriminant of the of order $\mathbb{Q}_p[v] \cap g_f(B^0(\mathbb{Z}_p))g_f^{-1}$, and for the Archimedean place, it is a measure of the distortion of the torus $g_\infty^{-1}\mathbb{T}(\mathbb{R})g_\infty$.

For example, for $B = B_{\infty,2}$, which is Hamilton's quaternion algebra, $\mathrm{Nr}\,|_{B^0}$ is the sum of three squares. So for any $v \in B^0(\mathbb{Z})$, we have $\mathbb{S}^2(D) \subset B^0(\mathbb{Z})$ with $D = \|v\|_2^2$. Recall that in this case $\mathbb{G} = PB^\times$ is SO_3 and that $\mathbb{H}_v$ denotes the stabilizer of v. We will explain in §6.1.5, how the toral packet $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\mathbb{H}_v(\mathbb{A})\left(k_v, e_f\right)$ with $k_v \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ moving $(0,0,1)^t$ to $\frac{1}{\sqrt{D}}v$ and $e_f \in \mathbb{G}(\mathbb{A}_f)$ denoting the identity element, relates naturally to the set $\mathrm{gen}(v)$ defined in (42). Note that in this case the local discriminant in the real place is constant, as $k_v^{-1}\mathbb{H}_v(\mathbb{R})k_v$ is the fixed torus $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ (see §6.1.5 for more details). This explains a bit the above terminology: the orbit (45) "codes" a packet of vectors which are in the genus of v.

In this generalized context, we refer to the following statement as Duke's Theorem: toral packets equidistribute, when their discriminants tend to $+\infty$ or $-\infty$, to a $\mathbb{G}(\mathbb{A})^+$-invariant probability measure[(4)] on $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$. Note that in many cases, but not in general, this probability measure could be shown to be $\mathbb{G}(\mathbb{A})$-invariant, i.e. the Haar measure on $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$. This formulation of Duke's Theorem is the conglomeration of several results by many authors, achieved before and after the seminal result of Duke (1988). We refer the reader to Einsiedler, Lindenstrauss, Michel, et al. (2011, Theorem 4.6) for a more precise formulation and for a list of references. Until now, there were three main approaches for proving such a statement: via ergodic theory (essentially Linnik's original method, under a congruence condition assumption), via modular form (as Duke, 1988) and via subconvexity estimates. The last two approaches yield an error estimate. The subconvexity approach works naturally in the generality stated above, and can be further generalized to obtain stronger variants, such as the work of Harcos and Michel (2006) (see also the discussion in Example 6.4 below).

The problems mentioned above fit in the above setup as follows:

- ▷ The distribution of $\mathbb{S}^2(D)$, as already mentioned above, relates to the choice $B = B_{\infty,2}$ for which the norm of $v \in B^0$ calculates as $Q(v) = \mathrm{Nr}(v) = \mathrm{Nr}(xi + yj + zk) = x^2 + y^2 + z^2$.
- ▷ The distribution of $\mathscr{H}_D$ (resp. closed geodesics) in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ relates to the choice $B = B_\emptyset = M_{2\times 2}$ for which the norm of $v \in B^0$ calculates as $Q(v) = \mathrm{Nr}(v) = \mathrm{Nr}\left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & -x \end{smallmatrix}\right) = -\left(x^2 + yz\right)$, where the scalar matrices are identified with the underlying field. This corresponds, when $Q(v) \to \infty$ to the distribution of Heegner points, and when $Q(v) \to -\infty$ to the distribution of closed geodesics.

[(4)] The group $\mathbb{G}(\mathbb{A})^+$ is the image of the adelic points of the algebraic simply-connected cover of $\mathbb{G}$ under the canonical projection map (which is the Spin group of Q in our case).

▷ The problem considered in 6.1.3, that is, the reduction of elliptic curves with CM by $\mathscr{O}_D$ to $\mathscr{S}_p$, the set of supersingular elliptic curves over $\overline{\mathbb{F}_p}$, corresponds to the case $B = B_{\infty,p}$, but in an interesting way: one can show that with this choice the double cosets in

$$\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})/\mathbb{G}(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}}), \tag{46}$$

or said differently, the clopen (closed and open) orbits of $\mathbb{G}(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}})$ on $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$, are in bijection with $\mathscr{S}_p$. As p is inert in $\mathscr{O}_D$ there is an embedding of $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}(\sqrt{D})/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m/\mathbb{G}_m$ into $\mathbb{G}$ and the CM curves are related to a toral packet as above. Surjectivity of red_p translates then to the question if the toral packet visits all the above clopen set, or equivalently, if the projection of toral packet to (46) is surjective. In this respect, this application is closer in nature to the work of Ellenberg and Venkatesh (2008), which is the first instance known to the author where the algebraic ideas we explain here, were coupled with homogeneous dynamics considerations. Duke's theorem implies in this context that $\mathrm{red}_p\colon \mathrm{CM}_D \to \mathscr{S}_p$ is surjective and actually it gives a strengthening of surjectivity: the asymptotic size of the fibres for $E \in \mathscr{S}_p$, $\lim_{D\to-\infty}\frac{\left|\mathrm{red}_p^{-1}(E)\right|}{|\mathrm{CM}_D|}$ is equal to the $m_{\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})}$-measure of the $\mathbb{G}(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}})$-orbit corresponding to E. Here $m_{\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})}$ denotes the natural $\mathbb{G}(\mathbb{A})$-invariant probability measure on $\mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A})$. In this sense, one may say that the projection map red_p equidistributes.

6.1.5. *Why and how this works?* — In section 6.1.2 we defined a map from $\mathbb{H}_v(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{H}_v(\mathbb{A}_f)/\mathbb{H}_v(\widehat{\mathbb{Z}})$ to $\frac{1}{\sqrt{D}}\mathbb{S}^2(D)\subset\mathbb{S}^2$. In this subsection, we would like to reinterpret this map via a projection of a toral packet between two homogeneous spaces. Consider the natural projection

$$\pi\colon \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SO}_3(\mathbb{A}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SO}_3(\mathbb{A})/\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}}) \tag{47}$$

where as above, $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ is diagonally embedded in $\mathrm{SO}_3(\mathbb{A})$. We will show below the identification

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SO}_3(\mathbb{A})/\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}). \tag{48}$$

With this identification assumed, we may interpret π as a covering map

$$\pi\colon \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash\mathrm{SO}_3(\mathbb{A}) \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \tag{49}$$

from an adelic homogeneous space to a real homogeneous space (with compact fibres isomorphic to $\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$). The identification (48) follows "tautologically" from (38):

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{A}) \overset{(38)}{=} \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash \left(\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\,\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}})\right) \tag{50}$$

$$\cong \left(\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\cap \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}})\right)\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}}) \tag{51}$$

$$= \mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}\times\widehat{\mathbb{Z}}) \tag{52}$$

where the third equality follows from the fact that $\mathbb{Z} = \mathbb{Q}\cap\widehat{\mathbb{Z}}$ as subsets of $\mathbb{A}_f$. Dividing now everything from the right by $\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$ gives the desired identification. It is nevertheless useful to explicate this identification to start to "see" dynamics: consider the double coset $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\left(g_\infty, g_f\right)\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$ with $g_\infty \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), g_f \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{A}_f)$. This coset may be identified with $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})g_\infty$ if g_f is "small", that is, if g_f belongs to the compact group $\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$. But if g_f is "large", that is, if $g_f \notin \mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$, we first need to "bring it back to $\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$" using the discrete group $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$. This means that, we first need to find $\gamma \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ with $\gamma g_f =: k \in \mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$ and then, recalling that $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ is embedded diagonally, we have

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})(g_\infty, g_f)\,\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})(\gamma g_\infty, \gamma g_f)\,\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}}) = \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})(\gamma g_\infty, k)\,\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}}).$$

As $k = \gamma g_f$ is "small", the latter is identified as above with $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\gamma g_\infty$.

Although everything we said so far is purely algebraic, the adjectives "small", "large" and the process of "bringing g_f back" stem from a dynamical perspective. Before we can explain this perspective, we just need to understand how the sphere $\mathbb{S}^2$, or more precisely $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{S}^2$, can be described as a homogeneous space. Consider the natural action of $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ on $\mathbb{S}^2$ (or equivalently on $\mathbb{R}^3$) and let $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) := \mathrm{Stab}_{\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})}(e_3) < \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, where e_3 is the unit vector $(0,0,1)^t$. This yield the identification $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{S}^2$ and therefore also

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})/\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{S}^2. \tag{53}$$

Said differently, $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$-orbits in the homogeneous space $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ correspond to points in $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{S}^2$.

After all of these preparations, we are finally ready to state the upshot of this subsection, which we can then also interpret dynamically. For $v \in \mathbb{S}^2(D)$ choose $k_v \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ with $k_v(e_3) = \frac{1}{\sqrt{D}}\cdot v$. With this choice, we have $\mathbb{H}_v(\mathbb{R}) = k_v\,\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})k_v^{-1}$. Tracing through the definitions and identifications above, one is led to the following conclusion: the projection (via π from (49)) of the adelic torus orbit

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\mathbb{H}_v(\mathbb{A})(k_v, e_f) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{A}) \tag{54}$$

to the real homogeneous space $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, where $e_f \in SO_3(\mathbb{A}_f)$ denotes the identity element, is a collection of $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$-orbits which, under (53), corresponds precisely to $\mathrm{gen}(v)$ viewed as a subset of $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z})\backslash \mathbb{S}^2$. We urge the reader to verify this as a good way to repeat all the algebraic considerations above. In particular, this reproduces the map related to $\mathbb{H}_v$ discussed in 6.1.2, and explains how it arises naturally.

Up to now we were just chasing definition and identifications, and from time to time, were hinting at a dynamical interpretation. We finally can explain how dynamics can give us valuable input about the distribution of $\mathrm{gen}(v)$ (which is equal to $\mathbb{S}^2(D)$ in our specific case). For all we know, $\mathrm{gen}(v)$ can be quite a boring set. What we know from the above, is that elements of $\mathrm{gen}(v)$ are of the form $\gamma.v$, $\gamma \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ for γ's that were found in order to "bring large elements in $\mathrm{SO}_3(\mathbb{A}_f)$ back to $\mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$". Let's explain this more precisely, under the assumption that the adelic orbit (54) "goes everywhere". That is, we assume that it is dense in $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{SO}_3(\mathbb{A})$. Then, in particular, for an arbitrary $g_\infty \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ we can find $h \in \mathbb{H}_v(\mathbb{A}_f)$ with

$$\mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})(k_v, h) \approx \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})(g_\infty, e_f). \tag{55}$$

Projecting (55) to the real homogeneous space, this approximation found for us a $\gamma \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{Q})$ with $\gamma h \in \mathrm{SO}_3(\widehat{\mathbb{Z}})$, such that the vector $\gamma v \in \mathbb{Z}^3$ satisfy

$$\gamma.v = \gamma k_v(e_3) \approx g_\infty(e_3) = \text{An arbitrary direction in } \mathbb{S}^2! \tag{56}$$

Note that in order to have a chance that the orbit (54) "will go everywhere", $\mathbb{H}_v(\mathbb{A})$ needs to be a large group. In particular, our dynamical considerations are (unfortunately!) usually restricted to working in one particular place, say at a fixed prime p. This explains the congruence conditions that we must impose on $D = \|v\|^2$ in order to use these dynamical considerations: they are there to verify that $\mathbb{H}_v$ splits at the fixed prime p and consequently to ensure that $\mathbb{H}_v(\mathbb{Q}_p)$ contains large elements.

Remark 6.1. One can consider the above methods in higher dimensions, say, for the quadratic form $\sum_{i=1}^n x_i^2$ with $n \geqslant 6$. The dynamical methods showing the equidistribution of orbits as in (54) with 3 replaced by n are much simpler (they are easy special cases of Mozes and Shah (1995) and Gorodnik and Oh (2011) since $\mathbb{H}_v < \mathrm{SO}_n$ is maximal). Based on this, one can work out from our discussion above a proof of the equidistribution of integer points on $\mathbb{S}^{n-1}$ based on homogeneous dynamics.

6.2. Arithmetically motivated joinings problems

In §6.2.1 we consider several arithmetic problems which are mainly coupling of individual equidistribution problems of the type that we discussed in §6.1. For all the problems presented below, there is no complete solution. In §6.2.2 we discuss partial results have been achieved without using Theorem 1.1. Then, in §6.2.3 we discuss

partial results that use Theorem 1.1. For some of them, Theorem 1.1 gives a key input, which allows for a solution under congruence conditions at two distinct prime numbers. We will also discuss in §6.2.3 why and how these congruence conditions are used in order to make Theorem 1.1 applicable.

6.2.1. *Several explicit and implicit joint distribution problems.* — The first application of Theorem 1.1 was already discussed in the introduction:

Example 6.2. With notation as in equation (2), one asks about the equidistribution of

$$J_D = \left\{ \left(\tfrac{1}{\sqrt{D}} v, [\Lambda_v] \right) : v \in \mathbb{S}^2(D) \right\} \subset \mathbb{S}^2 \times (\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H})$$

when $D \to \infty$ along $D = 0, 4, 7 \mod 8$. Recall from §6.1 that[(5)] $\mathbb{S}^2(D)$ is a torsor of class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$. It turns out, that the set $\left\{ [\Lambda_v] : v \in \mathbb{S}^2(D) \right\}$ is also contained in another torsor of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$: the set $\left\{ [\Lambda_v] : v \in \mathbb{S}^2(D) \right\}$ is a subset of $\mathscr{H}_{-D}$ when $D = 3 \mod 4$ and of $\mathscr{H}_{-4D}$ when $D = 1, 2 \mod 4$, and the containing set in both cases is a torsor of the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$. The novelty of Aka, Einsiedler, and Shapira (2016) was to relate (in the spirit of §6.1) the distribution of J_D to the distribution of a *joined* adelic orbit of a stabilizer group (as in §6.1.2) in a product of two homogeneous spaces, which correspond to $\mathbb{S}^2$ and $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$. This stabilizer group is again a $\mathbb{Q}$-anisotropic algebraic torus of rank one. The distribution of these adelic orbits can be studied via Theorem 1.1, once one assumes congruence conditions on D. We will give more details in §6.2.3.

Although Example 6.2 was motivated by a geometric construction, examining it closely through the $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$-torsor structure on $\mathbb{S}^2(D)$ and on $\mathscr{H}_{-D}$ (or on $\mathscr{H}_{-4D}$), one can see that J_D corresponds to the set

$$\left\{ \left(t.v, t^2.[\Lambda_v] \right) : t \in \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D}) \right\} \tag{57}$$

where t^2 stand for the square of t in the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$. This leads to several interesting and arithmetically motivated, "coupled" problems. Before stating them, we want to stress our point of view in this section: in the first component of (57) we consider an orbit of the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$ and in the second component of (57) we consider an orbit of a subgroup of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$, namely, the subgroup of squares in $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$.

Let us first concentrate on equidistribution in each component, that is, on the interesting problem of *individual* equidistribution of orbits of subgroups of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$, or more generally of cosets of such subgroups. We recall that by Siegel (1935) we know

[(5)] to be completely precise, we must consider $\mathrm{SO}_3(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{S}^2(D)$ and possibly other finite-index issues, but we ignore them for simplicity

that $|\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})| = D^{\frac{1}{2}+o(1)}$. One can easily find (for example for the torsor $\mathscr{H}_{-D}$) subgroups of size $D^{o(1)}$ whose orbits do not equidistribute (see also the work of McMullen (2009) for interesting results in this context). Einsiedler, Lindenstrauss, Michel, et al. (2009, Conjeture 1.11) make a bold conjecture in this context. We phrase it in the above context (e.g., for the $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$-torsors $\mathscr{H}_{-D}$ or $\mathbb{S}^2(D)$), but it can also be phrased for all the problems related to toral packets we considered in §6.1.4.

Conjecture 6.3. *Let $\rho > 0$. Individual equidistribution holds for orbits of cosets of subgroups of size D^{ρ}.*

Note that the generalized Riemann conjecture implies this conjecture for $\rho > \frac{1}{4}$. Harcos and Michel (2006) prove this conjecture for $\rho \in (\frac{1}{2} - \varepsilon_0, \frac{1}{2}]$ for some $\varepsilon_0 > 0$ (e.g. for $\varepsilon_0 = \frac{1}{2827}$ in the context of $\mathscr{H}_{-D}$). See also Aka and Einsiedler (2016) for a much weaker result achieved by homogeneous dynamics techniques. It is a fascinating conjecture from the homogeneous dynamics perspective: until now there are no results that could utilize the algebraic structure of the class group $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$ (as the latter is rather mysterious, this unfortunately makes sense).

Individual equidistribution plays an important role in the following two examples:

Example 6.4. We generalize the above setting. For $1 \leqslant i \leqslant r$ we let X_i denote a measure space with a uniform measure m_{X_i}. The reader should think about $X_i = \mathbb{S}^2$ or about $X_i = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ as in the examples above. Let $\mathscr{G}_D^{(i)} \subset X_i$ denote (identical or different) torsors of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$, for D's in a sequence tending to ∞. Although the above is phrased generally, we actually only consider here the problems we discussed in §6.1 (more precisely, problems that fit to the general formulation given in §6.1.4 or small variants of them). For concreteness, the reader should think about $\mathscr{H}_{-D}$, or $\mathbb{S}^2(D)$, or CM_{-D} from §6.1.3.

Assume that $\mathscr{G}_D^{(i)}$ equidistribute to m_{X_i}. Fix some exponents $k_1, \ldots, k_r$ and base points $g_D^{(i)} \in \mathscr{G}_D^{(i)}$, and consider

$$P_D := \left\{ \left(t^{k_1}.g_D^{(1)}, \ldots, t^{k_r}.g_D^{(r)} \right) : t \in \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D}) \right\}. \tag{58}$$

Does P_D equidistribute to $m_{X_1} \otimes \cdots \otimes m_{X_r}$? A necessary condition is of course that individual equidistribution holds in each component. As we explained before this example, individual equidistribution relates to the growth of the subgroup of k_i-powers in $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$, or equivalently, to the growth of the k_i-torsion subgroup of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$. Assuming a folklore conjecture (see Ellenberg, Pierce, and Wood (2017, (1.2)) and the references within) about the growth of k-torsion in $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$, the growth of the k-powers subgroup of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$ has conjecturally the same exponent as the growth of $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$. Therefore, conjecturally, individual equidistribution follows from the work of Harcos and Michel (2006) mentioned above. This folklore conjecture is holds for $k = 2$, so individual equidistribution in this case is known.

As the work of Harcos and Michel (2006) handles cosets equally well (or just by changing the base point for the torsor), individual equidistribution, under the conjecture about the k-torsion, is true also when we consider a shifted version of P_D: choose arbitrary $t_D^i \in \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$ and consider

$$P_D^{\text{shifted}} := \left\{ \left((t^{k_1} t_D^1).g_D^{(1)}, \dots, (t^{k_r} t_D^r).g_D^{(r)} \right) : t \in \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D}) \right\}. \tag{59}$$

As we said above, the X_i's which are of interest to us in this survey, come from the general setting explained in §6.1.4, and correspond to homogeneous spaces which are related to algebraic groups of the form $\mathbb{G}_i = PB_i^\times$ for quaternion algebras B_i over $\mathbb{Q}$, i.e., to $\mathbb{Q}$-forms of SL_2. We will explain in §6.2.3, that assuming individual equidistribution (for which the shifts t_D^i are irrelevant), we could essentially show via Theorem 1.1, that equidistribution of P_D^{shifted}, for arbitrary shifts, follows in the following cases (as usual, under congruence condition at two primes):

1. All the corresponding $\mathbb{G}_i$ are non-isogeneous over $\mathbb{Q}$.
2. For any $i \neq j$ with $\mathbb{G}_i$ and $\mathbb{G}_j$ being $\mathbb{Q}$-isogeneous, we have $k_i \neq k_j$.

But when the exponents are equal, we cannot expect equidistribution of arbitrary shifts even if individual equidistribution is known. Indeed, say $r = 2$, $X = X_1 = X_2$ and $k_1 = k_2$. If one chooses $t_D^1 = t_D^2$ for every D, the collection P_D^{shifted} will converge to the diagonal joining, that is, to $\iota_*(m_X)$ where $\iota : X \to X \times X, x \mapsto (x, x)$. Also, if the quotient $t_D^1 \left(t_D^2\right)^{-1}$ does not "grow", one cannot expect equidistribution. In order to explain what we mean by "grow", and state a necessary condition for equidistribution, we define a "size"-function N on $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$. Recall that $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$ is the ideal class group of $\mathscr{O}_{-D}$ which, by definition, is the set of classes of invertible fractional ideals in the field of fractions of $\mathscr{O}_{-D}$ modulo principal fractional ideals. Using the Norm map Nr on ideals of $\mathscr{O}_{-D}$, we define for $t \in \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$

$$\mathrm{N}(t) = \min \left\{ \mathrm{Nr}(\mathfrak{a}) : \mathfrak{a} \subset \mathscr{O}_{-D} \text{ is an invertible ideal in the class of } t \right\}.$$

With this size-function N, we can formulate a necessary condition for equidistribution of P_D^{shifted}: for any $1 \leqslant i \neq j \leqslant r$ with $k_i = k_j$ and $\mathbb{G}_i = \mathbb{G}_j$, the shifts must satisfy

$$\mathrm{N}\left(t_D^i {t_D^j}^{-1} \right) \overset{D \to \infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{60}$$

Otherwise, say, if one of these size-functions is bounded by M (say, for some $i \neq j$), any limit measure will be supported on a union of the graphs of Hecke-correspondences of level $\leqslant M$ of a diagonal joining (in the i, j-components). Michel and Venkatesh (2006) conjectured that this is the only obstruction:

Conjecture 6.5 (Mixing conjecture of Michel and Vekatesh). *In the above setting* (*assuming individual equidistribution or just* $k_1 = \cdots = k_r = 1$), *if* (60) *is satisfied, then* P_D^{shifted} *equidistributes to* $m_{X_1} \otimes \cdots \otimes m_{X_r}$.

In a celebrated work, Khayutin (2019) essentially proves this conjecture, under the usual assumption of congruence conditions on D at two primes, and some other (arguably) mild assumptions. More precisely, Khayutin considers the case of the torsors $\mathscr{H}_{-D}$ with $r = 2$ and $k_1 = k_2 = 1$ and proves that under the usual congruence conditions at two arbitrary primes (specifically, $-D$ must be a square modulo these two arbitrary primes) and under the assumption that the Dedekind ζ-function of the fields $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ have no exceptional Landau–Siegel zeroes, equidistribution holds. His methods should work equally well for the general case we stated here (assuming individual equidistribution holds). This is the only application of Theorem 1.1 so far, where Theorem 1.1 does not rule out diagonal joinings, so other tools must be exploited. We will explain how Theorem 1.1 was used by Khayutin in §6.2.3.

Example 6.6. We return to the problem we posed in the end of §6.1.3: is the map $(\text{red}_p, \text{red}_q)$ surjective for $|D|$ large enough? Can this be generalized to any finite number of primes? This arithmetic question is implicitly a joint distribution problem, and fit exactly in the setting we discuss above. It turns out that it can answered positively under congruence conditions at two distinct primes with Theorem 1.1. See §6.2.3 below for more details.

Example 6.7. Going back to Example 6.2, one can consider analogues of it in higher dimensions. Consider $\mathbb{Q}^n$ and fix $0 < k < n$. Let $\mathscr{L}_D$ denote the set of k-dimensional subspaces in $\mathbb{Q}^n$ with discriminant D. By the discriminant of a subspace L we mean the square of the covolume of the lattice $\Lambda_L := \mathbb{Z}^n \cap L$ inside L. One can consider the joint equidistribution of the following three objects: the orientation of L, viewed via the corresponding point in the Grassmannian of k-dimensional subspaces of $\mathbb{Q}^n$, the k-dimensional lattice $[\Lambda_L]$, and the $n-k$ dimensional orthogonal lattice $[\Lambda_{L^\perp}] = [L^\perp \cap \mathbb{Z}^n]$ (both considered up-to rotation). This leads to a similar construction of adelic orbits and therefore to interesting joinings, but in the case where k or $n-k$ are greater than 2, such joinings will be invariant under a group containing unipotent elements. This enables the use of tools from unipotent dynamics to classify the possible joinings.

The remaining case, where $k = 2, n = 4$, turns out to be very much related to the classical problems we considered above: first, for $L \in \mathscr{L}_D$ the lattice in $[\Lambda_L]$ and the orthogonal lattice $[\Lambda_{L^\perp}]$ are both two-dimensional lattices and as such (essentially, up-to primitivity issues) are points in $\mathscr{H}_{-D}$ (e.g. by considering the binary quadratic forms $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)|_{\Lambda_L}$ and $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)|_{\Lambda_{L^\perp}}$). Second, the local isomorphism between SO_4 and $\text{SO}_3 \times \text{SO}_3$ implies that elements $L \in \mathscr{L}_D$ are essentially parameterized by $\mathbb{S}^2(D) \times \mathbb{S}^2(D)$, say by (v_1^L, v_2^L). Hoping for a miracle, one can also

consider the orthogonal lattices $[\Lambda_{v_1^L}] := [(v_1^L)^\perp \cap \mathbb{Z}^3]$ and $[\Lambda_{v_2^L}] := [(v_2^L)^\perp \cap \mathbb{Z}^3]$ and ask about the joint distribution of

$$J_D = \left\{ \left(v_1^L, v_2^L, [\Lambda_L], [\Lambda_{L^\perp}], [\Lambda_{v_1^L}], [\Lambda_{v_2^L}] \right) : L \in \mathscr{L}_D \right\}. \tag{61}$$

Does J_D equidistribute to $(m_{\mathbb{S}^2})^{\otimes 2} \otimes \left(m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \right)^{\otimes 4}$? It turns out, that this geometric construction corresponds to a natural arithmetic problem, of the form we discussed above: with the notation from Example 6.4, consider the $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D})$-torsors

$$X_1 = X_2 = \mathbb{S}^2,\ \mathscr{G}_D^{(1)} = \mathscr{G}_D^{(2)} = \tfrac{1}{\sqrt{D}}\mathbb{S}^2(D),\ X_i = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H},\ \mathscr{G}_D^{(i)} = \mathscr{H}_D,\ i = 3,4,5,6.$$

Then, roughly speaking, and after choosing correctly base points $g_D^{(i)} \in \mathscr{G}_D^{(i)}$, the set J_D in (61) corresponds to

$$\left\{ \left(t.g_D^{(1)}, s.g_D^{(2)}, (ts).g_D^{(3)}, \left(ts^{-1}\right).g_D^{(4)}, \left(t^2\right).g_D^{(5)}, \left(s^2\right).g_D^{(6)} \right) : (t,s) \in (\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{-D}))^2 \right\}. \tag{62}$$

This implies that understanding the distribution of this set, as we will explain in §6.2.3, is closely related to classifying joinings in S-adic analogues of examples 2.1(2) and 2.1(3). We refer the reader to Aka, Einsiedler, and Wieser (2021, §8) for a further discussion of arithmetic distribution problems in the spirit of (62).

Generally, and in particular in homogeneous dynamics, one expects equidistribution to hold, unless there is a "visible" obstacle. In particular, we expect the Mixing conjecture (Conjecture 6.5) to hold, the equidistribution of J_D from Example 6.2 (or equivalently of the set in (57)) to hold, the equidistribution of J_D from Example 6.7 to hold, and after reformulating it as an equidistribution problem, we expect the reduction maps from Example 6.6 to "equidistribute". As we said above, none of these question admits a complete, unconditional solution.

6.2.2. *Partial results without using Theorem 1.1.* — Direct generalization of the methods used in the various analytic proofs of Duke's Theorem can yield averaged results (that is, the equidistribution of the union over $\{D : D \leqslant M\}$ with $M \to \infty$), see the appendix by Ruixiang Zhang in the ArXiv version of Aka, Einsiedler, and Shapira (2015). This is related to the work of Maass (1956), who considered special cases of Example 6.7 also on the average. Similar averaged results of special cases of Example 6.7 were proven by Schmidt (1998) and recently sharpened by Horesh and Karasik (2020).

Blomer and Brumley (2020) found recently an analytic approach to study joined equidistribution problems involving only two individual equidistribution problems as above, for forms of SL_2 when $r = 2$. They can prove the conjectured

equidistribution under the assumption of the generalized Riemann hypothesis, but without the need for auxiliary congruence conditions. This gives a conditional solution to many of the problems considered above, and in particular to the problems mentioned in Example 6.2, and in 6.6 for the reduction with respect to two distinct primes.

6.2.3. *Results toward equidistibution using Theorem 1.1.* — We begin by explaining, in the spirit of §6.1.4, how the problems mentioned in §6.2.1 correspond to "joined" adelic orbits in adelic homogeneous spaces. We then explain the need for auxiliary congruence conditions and how they give rise to a class-$\mathscr{A}'$ homomorphism as in Theorem 1.1, enabling the use of this theorem. Finally, we describe how Theorem 1.1 was used so far to obtain partial solutions of the problems we mentioned in §6.2.1.

Coupling toral packets together. — Going back to the setting of §6.1.4, we consider r quaternion algebras $B_1, \dots, B_r$ over $\mathbb{Q}$ and let $\mathbb{G}_i = PB_i^\times$ be the corresponding algebraic groups. Assume that there exists a rank one $\mathbb{Q}$-anisotropic algebraic torus $\mathbb{T}_n$ such that for any $1 \leqslant i \leqslant r$, there is an embedding $\iota_{i,n} \colon \mathbb{T}_n \to \mathbb{G}_i$ (e.g., via finding corresponding vectors in B_i^0, see §6.1.4) giving rise to a toral packet

$$\mathbb{G}_i(\mathbb{Q})\iota_{i,n}(\mathbb{T}_n(\mathbb{A}))g_{i,n} \subset \mathbb{G}_i(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}_i(\mathbb{A}), \quad g_{i,n} \in \mathbb{G}_i(\mathbb{A}) \tag{63}$$

with discriminant D_n (as in (45)). Assume that $D_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ or $D_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ and that these toral orbits converge to a measure μ_i on $\mathbb{G}_i(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}_i(\mathbb{A})$ when $n \to \infty$. For example, we know by Duke's Theorem (as stated in §6.1.4) that each μ_i must be a $\mathbb{G}_i(\mathbb{A})^+$-invariant measure. Now, let $\mathbb{G} = \prod_{i=1}^r \mathbb{G}_i$, define $\iota_n : \mathbb{T}_n \to \mathbb{G}$ as $\iota_n = (i_{1,n}, \dots, \iota_{r,n})$, and consider the following joined orbit:

$$\mathscr{J}_n := \mathbb{G}(\mathbb{Q})\iota_n(\mathbb{T}_n(\mathbb{A}))\underbrace{(g_{1,n}, \dots, g_{r,n})}_{g_n :=} \subset \mathbb{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{G}(\mathbb{A}). \tag{64}$$

As in (45), we equip $\mathscr{J}_n$ with $m_{\mathscr{J}_n}$, the pushforward of the uniform probability measure on $\mathbb{T}_n(\mathbb{Q})\backslash\mathbb{T}_n(\mathbb{A})$ under $t \mapsto \iota_n(t)g_n$. It follows that any weak-* limit η of $\left\{m_{\mathscr{J}_n}\right\}$ is a probability measure projecting via the natural projections $\pi_i \colon \mathbb{G} \to \mathbb{G}_i$ to the measures μ_i, $i = 1, \dots r$.

To be able to use homogeneous dynamics methods, we must ask ourselves, under which elements of $\mathbb{G}(\mathbb{A})$ is η invariant. Generally, the measure η is invariant under limits in the Chabauty-topology of the subgroups $g_n^{-1}\iota_n(\mathbb{T}_n(\mathbb{A}))g_n$. We already explained in the paragraph after (56), that (most) of the methods in homogeneous dynamics, essentially work only when we restrict to a *fixed* place (or finitely many fixed places). We also gave intuition there to why having "large" elements in the toral packet (or equivalently, having a $\mathbb{Q}_p$-*split* torus $\mathbb{T}_n(\mathbb{Q}_p)$) is needed in order to

expect equidistribution and in order to use dynamical methods. Going back to the situation at hand, we see, that in order to obtain elements at the place p, leaving the measure η invariant, we must look at limits of subgroups of the form

$$g_{n,p}^{-1}\iota_{n,p}(\mathbb{T}_n(\mathbb{Q}_p))g_{n,p} \tag{65}$$

where $g_{n,p}$ denotes the p-adic component of g_n, and similarly for $\iota_{n,p}$. Our only chance to pinpoint a non-trivial element in the limit of these $\mathbb{Q}_p$-tori is to assume that all of them split over $\mathbb{Q}_p$. Asking for this splitting, is equivalent to imposing a congruence condition on the corresponding discriminant D_n modulo p (normally, depending slightly on the exact definition of discriminant, $-D_n$ should be congruent to a square modulo p). Then, in the limit we have two options: either the groups in (65) "degenerate" to a one-parameter unipotent subgroup, in which case, we can use methods from unipotent dynamics mentioned in §2.1 (compare also to the work of Eskin, Mozes, and Shah, 1996), or we can find a $\mathbb{Q}_p$-split torus in the limit (for the problems considered above, the latter is more plausible: if the $\mathbb{Q}_p$-split tori $\mathbb{T}_n$ are the stabilizers of integral vectors, say in $\mathbb{Z}^3$, their Chabauty limit will contain the stabilizer of a vector in $\mathbb{Z}_p^3$). Therefore, fixing two distinct places p and q, and assuming that we don't get any unipotent invariance in the limit, we get invariance under a split torus at p and at q. That is, we can find elements a_p and a_q in the corresponding tori, such that the homomorphism $\phi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{G}(\mathbb{A})$ mapping two generators of $\mathbb{Z}^2$ to the elements of $\mathbb{G}(\mathbb{A})$ corresponding to a_p and a_q, will be of class-$\mathscr{A}'$ and the limit measure η will be invariant under its image. In summary, under the assumption of congruence conditions at two arbitrary fixed primes, η is a joining for which Theorem 1.1 applies.

Under these two congruence conditions, Theorem 1.1 reduces the classification of each of the *ergodic component* of η to an algebraic problem concerning the algebraic nature of $\mathbb{G}_i$ and $\iota_{i,n}$. We remark, that the latter is true, at least up to the so-called character spectrum, that is up-to the difference between $\mathbb{G}(\mathbb{A})^+$-invariance and $\mathbb{G}(\mathbb{A})$-invariance. Indeed, note that the measures μ_i above are known to be in general only $\mathbb{G}_i(\mathbb{A})^+$-invariant. Any input we will get from Theorem 1.1, will give us information on η, up-to the so-called character-spectrum $\mathbb{G}(\mathbb{A})/\mathbb{G}(\mathbb{A})^+$. We will avoid giving more details here about this issue (the interested reader may consult Aka, Luethi, et al. (2020, §9.1) or Khayutin, 2019, §3.3).

We discuss now each of the possible algebraic situations that may occur separately, explain what Theorem 1.1 can tell us in each situation, and say which of the problems we considered in 6.2 fit in each situation. Before starting, note that we formulated Theorem 1.1 in an S-adic setting (see Einsiedler and Lindenstrauss, 2019, Therom 1.8 for an adelic statement), so let's restrict ourselves for simplicity to an S-adic situation where the primes p and q above are contained in S.

Case I: when the groups are non-isogenous over $\mathbb{Q}$. — When the groups $\mathbb{G}_i$ are non-isogenous over $\mathbb{Q}$, Theorem 1.1 tells us that each ergodic component of η must be

invariant under a finite-index subgroup of $\mathbb{G}(\mathbb{Q}_S)$ where $\mathbb{G} = \prod_i \mathbb{G}_i$. Indeed, any stricly-contained algebraic $\mathbb{Q}$-subgroup of $\mathbb{G}$ projecting onto $\mathbb{G}_i$, must give rise to a $\mathbb{Q}$-isogeny between two factors. In other words, essentially (depending on small details as the character spectrum, for example), each ergodic component of η must be the trivial joining, and therefore also η itself. Theorem 1.1 has been applied so far in such situations in the following cases:

- ▷ The desired equidistribution in Example 6.2 follows under congruence conditions at two primes, since the non-$\mathbb{Q}$-isogenous groups SO_3 and SL_2 are considered there. See Aka, Einsiedler, and Shapira (2016) for more details.
- ▷ The equidistribution of P_D or P_D^{shifted} from Example 6.4 follows, under the following three assumptions: congruence conditions at two primes, that individual equidistribution is assumed/known, and that the corresponding $\mathbb{G}_i$ are pairwise non-$\mathbb{Q}$-isogenous. One can find a more detailed treatment in the recent survey of Lindenstrauss (2021, §4).
- ▷ Under congruence conditions at two primes p and q, the desired surjectivity of the reduction map we described in Example 6.6 follows from Theorem 1.1, with respect to finitely many primes $p_1, \ldots, p_r$, different from p and q, as in Example 6.6 . Indeed, the $\mathbb{G}_i$'s here correspond to the non-$\mathbb{Q}$-ismorphic quaternion algebras $B_{\infty,p_1}, \ldots, B_{\infty,p_r}$. See Aka, Luethi, et al. (2020) for more details. This example shows how the fact that ergodic theory handles arbitrary products relatively well, enabling to achieve strong arithmetic applications, related to arbitrary products. As far as the author knows, the surjectivity of the above reduction maps for $r > 1$ was not known before for a *single* discriminant.
- ▷ For the six-fold product considered in (61), the algebraic groups corresponding to the first two factors are identical and non-$\mathbb{Q}$-isogeneous to ones corresponding to the last four identical factors. So, currently, without considering the corresponding embedding $\iota_{i,n}$, as in the general notation above, we can only conclude from Theorem 1.1 the disjointness of the first two factors from the last four factors. In this case, the structure of $\iota_{i,n}$ saves the day; we will discuss it further below.

Case II: when the groups are isogenous over $\mathbb{Q}$*, with a non-compatible torus action.* — To simplify notation, let ν denote an ergodic component of the limit measure η that we are trying to classify. In all the problems we consider here, let's assume that we have congruence conditions at p and q giving rise to $\phi\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{G}(\mathbb{Q}_S)$, a class-$\mathscr{A}'$ homomorphism, with ν being invariant under $\phi(\mathbb{Z}^2)$. Assuming that the groups are isogenous, ν might be supported on a graph of an isogeny, which implies that the invariance group of ν will be supported on a graph of an isogeny too. This invariance group

must also contain $\phi(\mathbb{Z}^2)$. But, the exact structure of ϕ depends on $\iota_{i,n}$. In some cases, this rules out the possibility of being supported on a graph of isogeny, implying that ν must be (essentially) the trivial joining and therefore also η. This is the case in the following examples:

- ▷ Going back to the six-fold product considered in (61), the structure of ϕ in the third and fourth factor is the exact S-adic analogue of Example 2.1.(2), the "45°-rotation" example (strictly speaking, as (62) hints at, we actually consider here a torsor for $(\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_d))^2$ which, together with the two congruence conditions, results in having an embedding of $\mathbb{Z}^4$, rather than $\mathbb{Z}^2$). This "45°-rotation" structure of ϕ enables to rule out rather simply[(6)] any joinings supported on graph of $\mathbb{Q}$-isogenies, as we explained in Example 3.3. So ν, and therefore also η must be (essentially) the trivial joining. See Aka, Einsiedler, and Wieser (2021) for more details.
- ▷ The equidistribution of P_D or P_D^{shifted} from Example 6.4 when $\mathbb{G}_i$ are isogenous to each other is trickier. For concreteness, consider $r=2$ with $\mathbb{G}_1=\mathbb{G}_2$ and with exponents $k_1=1$ and $k_2=2$. In this case individual equidistribution is known, and examining the corresponding to $\iota_{1,n}$ and $\iota_{2,n}$, the resulting class-$\mathscr{A}'$ homomorphism ϕ is the exact S-adic analogue of Example 2.1.(3), the "different speeds" example. Therefore, also in this case, the only possibility for ν and therefore for η is (essentially) the trivial joining. See Lindenstrauss (2021, §4) for more details.

Case III: when the groups are isogenous over $\mathbb{Q}$*, with a compatible torus action.* — The above-mentioned results were "easy" applications of Theorem 1.1. The Mixing Conjecture (Conjecture 6.5) does not fall in the above cases: for concreteness consider again P_D^{shifted} from Example 6.4 with $r=2$, $\mathbb{G}_1=\mathbb{G}_2=\mathrm{SL}_2$ and with exponents $k_1=1$ and $k_2=2$, and $X:=X_1=X_2=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$, which is a case treated in the work of Khayutin (2019). Let m_X denote the uniform measure on X. As we explained above, the structure of ϕ in this case, does not rule out joinings which are supported on a diagonal embedding of SL_2 into $\mathrm{SL}_2\times\mathrm{SL}_2$. So, as far as we know, assuming congruence conditions at two primes and applying Theorem 1.1, we only get that ν, an ergodic component of a limit measure η, can either be the trivial joining or a diagonal joining. This is nonetheless very strong information! It implies the following corollary, which is utilize and generalized by Khayutin in his work:

Corollary 6.8. *Let $U_n\subset X$ be positive measure sets with $m_X(U_n)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ (e.g., a sequence of open neighbourhood of a point/of the cusp). If we can show that*

$$\eta(U_n\times U_n)\ll m_X(U_n)^{1+\varepsilon_0} \tag{66}$$

for some $\varepsilon_0>0$, then almost every ergodic component of η is the trivial joining, and so is η.

(6) A similar argument, as in the "two ingredients joinings theorem"- Corollary 3.1, would suffice here.

Proof. We explained above that Theorem 1.1 implies that almost every ergodic component ν of η is either trivial or diagonal. If ν is the trivial joining, then $\nu(U_n \times U_n) \asymp m_X(U_n)^2$, and if ν is a diagonal joining, then $\nu(U_n \times U_n) \asymp m_X(U_n)$. Assume, for contradiction, that a positive proportion of the ergodic components are diagonal joinings. Then it follows that $\eta(U_n \times U_n) \gg m_X(U_n)^{1+o(1)}$ contradicting (66). □

Said differently, we believe and wish to show that $\eta(U_n \times U_n)$ decays with exponent 2. Using Theorem 1.1, it is enough to establish a decay with any exponent > 1.

We explained above that in the Mixing conjecture (Conjecture 6.5) diagonal joinings correspond to measures supported on Hecke-correspondences. Khayutin strengthens Corollary 6.2.3 to consider what he calls the cross-correlation between two measures, allowing to check a condition similar to (66) for measures ν_D corresponding to P_D^{shifted}, correlated against possible measures which are supported on Hecke-correspondences. He then uses many tools (from analytic number theory and geometric invariant theory) to analyse these cross-correlations and obtain a bound similar to (66).

6.3. An application of Theorem 1.1 for simple groups with high rank

There are no published applications of Theorem 1.1 which are not related to forms of SL_2. There might be several reasons for that: as we've seen above, many classical arithmetic objects are related to toral packets of forms of SL_2. The generalization of these problems to higher dimensions normally involve invariance under a group containing unipotent elements, making Theorem 1.1 either inapplicable or superfluous.

We end this survey by sketching a new application of Theorem 1.1 with $\mathbb{G}_1$ and $\mathbb{G}_2$ being two distinct $\mathbb{Q}$-forms of PGL_3.

Let $\mathbb{G}_1 = \mathrm{PGL}_3$ and set $\Gamma_1 = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{Z})$. Let $\mathbb{G}_2$ be the $\mathbb{Q}$-algebraic group associated to the group of invertible elements of a degree three (i.e., nine-dimensional) division algebra D, modulo its center. Assume that D splits over $\mathbb{R}$, that is $D \otimes \mathbb{R} = M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Let $\mathscr{O}$ be a full order contained in $D(\mathbb{Q})$; one can show that its image in $\mathbb{G}_2(\mathbb{R})$ is an arithmetic, cocompact lattice, which we denote by Γ_2. Set $G_i = \mathbb{G}_i(\mathbb{R})$, $X_i = \Gamma_i \backslash G_i$, $X = X_1 \times X_2$, $\mathbb{G} = \mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_2$, and $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Let m_{X_i} denote the Haar probability measure on X_i.

Theorem 6.9. *Let K_n be a sequence of totally real cubic number fields, with $\mathrm{disc}(K_n) \to \infty$, and such that for $i = 1, 2$ there exist embeddings $\iota_{i,n}$ of $\mathbb{T}_n := \mathrm{Res}_{K_n/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m / \mathbb{G}_m$ into $\mathbb{G}_i$, with $\Gamma_i \iota_{i,n}(\mathbb{T}_n(\mathbb{R}))g_i$ for some $g_i \in G_i$ being a periodic orbit, i.e., it supports a $g_i^{-1}\iota_{i,n}(\mathbb{T}_n(\mathbb{R}))g_i$-invariant probability measure $\nu_{i,n}$. We define $\iota_n = (\iota_{1,n}, \iota_{2,n}) \colon \mathbb{T}_n \to \mathbb{G}$ and consider the "joined" real orbit*

$$\Gamma \iota_n(\mathbb{T}_n(\mathbb{R}))(g_1, g_2) \tag{67}$$

which is also a periodic orbit supporting a probability measure ν_n. Then, any weak- limit of ν_n has full support. More precisely, any weak-* limit of ν_n is the product of m_{X_1} with a weak-* limit μ_2 of $\nu_{2,n}$, and m_{X_2} appears with positive proportion in the ergodic decomposition of μ_2.*

Sketch of proof. We consider first what we know about individual equidistribution. In the first factor, it is a notable result of Einsiedler, Lindenstrauss, Michel, et al. (2011, Theorem 1.4) that $\nu_{1,n}$ converges to m_{X_1}. For the second factor, with easier methods, it is shown in Einsiedler, Lindenstrauss, Michel, et al. (2012), that m_{X_2} must appear with positive proportion in the ergodic decomposition of any weak-* limit of $\nu_{2,n}$. Consider now a weak-* limit of ν_n, and denote it by η. Then η projects to m_{X_1} in the first factor and to a weak-* limit η_2 of $\nu_{2,n}$ in the second factor. As we explained above, the limit measure η is either invariant under a unipotent element (in which case we declare victory), or under a split $\mathbb{R}$-torus action, that is, η is a joining (of m_{X_1} with η_2) with a $\mathbb{Z}^2$-torus action (as the split torus has dimension two). Assume we are in the second case, we let μ denote one of the ergodic components of η with respect to this $\mathbb{Z}^2$-torus action. Also here we know that μ projects to m_{X_1} in the first factor and to a weak-* limit μ_2 of $\nu_{2,n}$ in the second factor. With respect to this torus action in the second factor, we start by considering an ergodic decomposition of μ_2:

$$\mu_2 = \int \mu_2(\xi) d\omega(\xi).$$

Since m_{X_1} is ergodic with respect to the action in the first factor, and the torus action is embedded diagonally in both factors, μ admits an ergodic decomposition of the form

$$\mu = \int \mu(\xi) d\omega(\xi)$$

with $\mu(\xi)$ being a joining of m_{X_1} and $\mu_2(\xi)$. We can then proceed as follows, according to the type of $\mu_2(\xi)$:

- ▷ If $\mu_2(\xi) = m_{X_2}$, a case occurring with positive proportion, then Theorem 1.1 can be applied to $\mu(\xi)$ to conclude that $\mu(\xi) = m_{X_1} \times m_{X_2}$, since $\mathbb{G}_1$ and $\mathbb{G}_2$ are not isogenous over $\mathbb{Q}$.
- ▷ If $\mu_2(\xi) \neq m_{X_2}$ it must have zero entropy (otherwise, by the results of Einsiedler, Katok, and Lindenstrauss (2006) it will be the Haar measure), and since (X_1, m_{X_1}) equipped with the torus action in the first factor is a so-called K-system, it must be disjoint to any zero entropy system (see for example a recent survey by de la Rue, 2020, Theorem 1).

Therefore, disjointness follows in both cases and so

$$\mu = \int \mu(\xi) d\omega(\xi) = \int m_{X_1} \otimes \mu_2(\xi) d\omega(\xi) = m_{X_1} \otimes \left(\int \mu_2(\xi) d\omega(\xi) \right) = m_{X_1} \otimes \mu_2,$$

as we wanted to show. □

References

Aka, M. and Einsiedler, M. (2016). "Duke's theorem for subcollections", *Ergodic Theory Dynam. Systems* **36** (2), pp. 335–342.

Aka, M., Einsiedler, M., and Shapira, U. (2015). "Integer points and their orthogonal lattices", *arXiv preprint arXiv:1502.04209*.

——— (2016). "Integer points on spheres and their orthogonal lattices", *Invent. Math.* **206** (2), pp. 379–396.

Aka, M., Einsiedler, M., and Wieser, A. (2021). "Planes in four space and four associated CM points", *Duke Math. J.* (in press).

Aka, M., Luethi, M., et al. (2020). "Simultaneous supersingular reductions of CM elliptic curves", *arXiv preprint arXiv:2005.01537*.

Aka, M., Musso, A., and Wieser, A. (2021). "Equidistribution of rational subspaces and their shapes", *arXiv preprint arXiv:2103.05163*.

Blomer, V. and Brumley, F. (2020). "Simultaneous equidistribution of toric periods and fractional moments of L-functions", *arXiv preprint arXiv:2009.07093*.

Deuring, M. (1941). "Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper", *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.* **14**, pp. 197–272.

Duke, W. (1988). "Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms", *Invent. Math.* **92** (1), pp. 73–90.

——— (2007). "An introduction to the Linnik problems", in: *Equidistribution in number theory, an introduction*. Vol. 237. NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem. Springer, Dordrecht, pp. 197–216.

Einsiedler, M. and Katok, A. (2005). "Rigidity of measures—the high entropy case and non-commuting foliations", in: vol. 148. Probability in mathematics, pp. 169–238.

Einsiedler, M., Katok, A., and Lindenstrauss, E. (2006). "Invariant measures and the set of exceptions to Littlewood's conjecture", *Ann. of Math.* (2) **164** (2), pp. 513–560.

Einsiedler, M. and Lindenstrauss, E. (2007). "Joinings of higher-rank diagonalizable actions on locally homogeneous spaces", *Duke Math. J.* **138** (2), pp. 203–232.

——— (2010). "Diagonal actions on locally homogeneous spaces", in: *Homogeneous flows, moduli spaces and arithmetic*. Vol. 10. Clay Math. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 155–241.

——— (2019). "Joinings of higher rank torus actions on homogeneous spaces", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **129**, pp. 83–127.

Einsiedler, M., Lindenstrauss, E., Michel, P., et al. (2009). "Distribution of periodic torus orbits on homogeneous spaces", *Duke Math. J.* **148** (1), pp. 119–174.

——— (2011). "Distribution of periodic torus orbits and Duke's theorem for cubic fields", *Ann. of Math.* (2) **173** (2), pp. 815–885.

——— (2012). "The distribution of closed geodesics on the modular surface, and Duke's theorem", *Enseign. Math.* (2) **58** (3-4), pp. 249–313.

Einsiedler, M. and Ward, T. (2011). *Ergodic theory with a view towards number theory*. Vol. 259. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, pp. xviii+481.

Ellenberg, J. S., Michel, P., and Venkatesh, A. (2013). "Linnik's ergodic method and the distribution of integer points on spheres", in: *Automorphic representations and L-functions*. Vol. 22. Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, pp. 119–185.

Ellenberg, J. S., Pierce, L. B., and Wood, M. M. (2017). "On ℓ-torsion in class groups of number fields", *Algebra Number Theory* **11** (8), pp. 1739–1778.

Ellenberg, J. S. and Venkatesh, A. (2008). "Local-global principles for representations of quadratic forms", *Invent. Math.* **171** (2), pp. 257–279.

Eskin, A., Mozes, S., and Shah, N. (1996). "Unipotent flows and counting lattice points on homogeneous varieties", *Ann. of Math.* (2) **143** (2), pp. 253–299.

Federer, H. (1969). *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, pp. xiv+676.

Furstenberg, H. (1967). "Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation", *Math. Systems Theory* **1**, pp. 1–49.

Gauss, C. F. (1986). *Disquisitiones arithmeticae*. Translated and with a preface by Arthur A. Clarke, Revised by William C. Waterhouse, Cornelius Greither and A. W. Grootendorst and with a preface by Waterhouse. Springer-Verlag, New York, pp. xx+472.

Glasner, E. (2003). *Ergodic theory via joinings*. Vol. 101. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xii+384.

Gorodnik, A. and Oh, H. (2011). "Rational points on homogeneous varieties and equidistribution of adelic periods", *Geom. Funct. Anal.* **21** (2). With an appendix by Mikhail Borovoi, pp. 319–392.

Gross, B. H. (1987). "Heights and the special values of L-series", in: *Number theory (Montreal, Que., 1985)*. Vol. 7. CMS Conf. Proc. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 115–187.

Harcos, G. and Michel, P. (2006). "The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points. II", *Invent. Math.* **163** (3), pp. 581–655.

Horesh, T. and Karasik, Y. (2020). "Equidistribution of primitive lattices in $\mathbb{R}^n$", *arXiv preprint arXiv:2012.04508*.

Iwaniec, H. (1987). "Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight", *Invent. Math.* **87** (2), pp. 385–401.

Khayutin, I. (2019). "Joint equidistribution of CM points", *Ann. of Math.* (2) **189** (1), pp. 145–276.

Ledrappier, F. and Young, L.-S. (1985a). "The metric entropy of diffeomorphisms. I. Characterization of measures satisfying Pesin's entropy formula", *Ann. of Math.* (2) **122** (3), pp. 509–539.

——— (1985b). "The metric entropy of diffeomorphisms. II. Relations between entropy, exponents and dimension", *Ann. of Math.* (2) **122** (3), pp. 540–574.

Lindenstrauss, E. (2006). "Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity", *Ann. of Math.* (2) **163** (1), pp. 165–219.

——— (2021). "Recent progress on rigity properties of higher rank diagonalizable actions and applications", *arXiv preprint arXiv:2101.11114*.

Linnik, Y. V. (1968). *Ergodic properties of algebraic fields*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 45. Translated from the Russian by M. S. Keane. Springer-Verlag New York Inc., New York, pp. ix+192.

Maass, H. (1956). "Spherical functions and quadratic forms", *J. Indian Math. Soc.* (*N.S.*) **20**, pp. 117–162.

Margulis, G. A. and Tomanov, G. M. (1994). "Invariant measures for actions of unipotent groups over local fields on homogeneous spaces", *Invent. Math.* **116** (1-3), pp. 347–392.

McMullen, C. T. (2009). "Uniformly Diophantine numbers in a fixed real quadratic field", *Compos. Math.* **145** (4), pp. 827–844.

Michel, P. (2004). "The subconvexity problem for Rankin-Selberg *L*-functions and equidistribution of Heegner points", *Ann. of Math.* (2) **160** (1), pp. 185–236.

Michel, P. and Venkatesh, A. (2006). "Equidistribution, *L*-functions and ergodic theory: on some problems of Yu. Linnik", in: *International Congress of Mathematicians. Vol. II*. Eur. Math. Soc., Zürich, pp. 421–457.

Mozes, S. and Shah, N. (1995). "On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows", *Ergodic Theory Dynam. Systems* **15** (1), pp. 149–159.

Platonov, V. and Rapinchuk, A. (1994). *Algebraic groups and number theory*. Vol. 139. Pure and Applied Mathematics. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen. Academic Press, Inc., Boston, MA, pp. xii+614.

Ratner, M. (1991). "On Raghunathan's measure conjecture", *Ann. of Math.* (2) **134** (3), pp. 545–607.

——— (1995). "Raghunathan's conjectures for Cartesian products of real and *p*-adic Lie groups", *Duke Math. J.* **77** (2), pp. 275–382.

Rudolph, D. J. (1979). "An example of a measure preserving map with minimal self-joinings, and applications", *J. Analyse Math.* **35**, pp. 97–122.

de la Rue, T. (2020). "Joinings in Ergodic Theory", in: *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Ed. by R. A. Meyers. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–20.

Schmidt, W. M. (1998). "The distribution of sublattices of $\mathbf{Z}^m$", *Monatsh. Math.* **125** (1), pp. 37–81.

Siegel, C. (1935). "Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper", ger. *Acta Arithmetica* **1** (1), pp. 83–86.

Wieser, A. (2019). "Linnik's problems and maximal entropy methods", *Monatsh. Math.* **190** (1), pp. 153–208.

Zimmer, R. J. (1984). *Ergodic theory and semisimple groups*. Vol. 81. Monographs in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, pp. x+209.

Menny Aka

ETH Zürich
Department of Mathematics
Rämistrasse 101
8092 Zürich, Switzerland

E-mail: menashea@math.ethz.ch

Séminaire BOURBAKI Novembre 2021
73e année, 2021–2022, no 1186, p. 247 à 279
doi: 10.24033/ast.1187

SHELAH'S CONJECTURE AND JOHNSON'S THEOREM
[*after* Will Johnson]

by **Sylvy Anscombe**

1. Introduction

Beginning in 2019, Will Johnson has a published a remarkable series of papers (Johnson, 2019a,b, 2020a,b,c, 2021a,b) that prove the "Shelah Conjecture" for the case of fields of finite dp-rank. The theorem is:

Theorem 1.1. *If a field K is dp-finite then K is finite, or algebraically closed, or real-closed, or admits a non-trivial henselian valuation.*

The first three cases (finite, algebraically closed, real-closed) are well-understood model theoretically. Combining Johnson's theorem with a result from Halevi, Hasson, and Jahnke (2019), one obtains a straightforward characterization of dp-finite fields and a classification of their complete first-order theories in terms of familiar algebraic properties. A field (or rather its complete theory) is "dp-finite" if it admits a certain notion of rank (or dimension), which takes finite values.

In this note I aim to give a short account of Johnson's work, and the surrounding literature. I will begin with the principal definitions, results, and conjectures in the subject, explain the relationships between the conjectures, including the reduction to the 'V-topology conjecture'. Finally I will sketch the main ideas of Johnson's proof.

Acknowledgement. — The majority of the results, definitions, and ideas are due to Will Johnson. There are many notable exceptions, and I have tried to provide reasonably complete references, but undoubtedly there will be omissions. My intention is that everything without an explicit reference is understood by the reader to be due to Johnson. My thanks to the participants of the reading group on this topic, organised by Franziska Jahnke, as part of the *Decidability, definability and computability in number theory* program at the MSRI; and to Will Johnson who provided a very helpful extended summary to the reading group. Further thanks to Franziska Jahnke, Arno Fehm, Tamara Servi, and Will Johnson for comments on an earlier version. However, all mistakes are my own. My sincere thanks to the organizers of the Séminaire Bourbaki for this invitation.

©Astérisque 438, SMF 2022

Remark 1.2 (Notational conventions). Fields will often be denoted by letters like K, F, L, usually suppressing the field structure (i.e. the addition, multiplication, etc.). By $\mathscr{K} = (K, \ldots)$ we denote an expansion of a field K. Usually an elementary extension or an ultrapower of a field K will be denoted K^*, although a saturated elementary extension (also known as a 'monster model') will be denoted $\mathbb{K}$. The set of prime numbers will be denoted $\mathbb{P}$. Ordered abelian groups are understood to be totally ordered.

2. Some model theory of fields and valued fields

There are many excellent references for introductions to valuations, valued fields, and the model theory of valued fields. For example: Engler and Prestel (2005), Jahnke (2018), and van den Dries (2014).

Definition 2.1. A **valued field** is a pair (K, v) of a field K and a **valuation** $v : K \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \Gamma_v \cup \{\infty\}$, where the **value group** Γ_v is an ordered abelian group, written additively, such that

(i) $v(x) = \infty \iff x = 0$,

(ii) $v(xy) = v(x) + v(y)$, and

(iii) $v(x + y) \geqslant \min\{v(x), v(y)\}$.

The **valuation ring** $\mathscr{O}_v = \{x \in K \mid v(x) \geqslant 0\}$ and the **valuation ideal** $\mathfrak{m}_v = \{x \in K \mid v(x) > 0\}$ each determine the valuation, up to isomorphism of the value group (commuting with the valuations), since:

$$v(x) \leqslant v(y) \iff yx^{-1} \in \mathscr{O}_v \iff xy^{-1} \notin \mathfrak{m}_v,$$

for all $x, y \in K^\times$. There is also the **residue field** $k_v := \mathscr{O}_v/\mathfrak{m}_v$. We say v is trivial if $\Gamma_v = \{0\}$. We say (K, v) is equicharacteristic/equal characteristic if $\mathrm{char}(K) = \mathrm{char}(k_v)$, otherwise we say it is mixed characteristic $(0, p)$ if $\mathrm{char}(K) = 0$ and $\mathrm{char}(k_v) = p$.

Remark 2.2. Two valuations v, w are **equivalent** if $\mathscr{O}_v = \mathscr{O}_w$. As remarked above, this holds if and only if there is an isomorphism $\varphi_\Gamma : \Gamma_v \longrightarrow \Gamma_w$ such that $w = \varphi_\Gamma \circ v$. As an abuse of language and notation, we usually identify equivalent valuations.

Definition 2.3. (K, v) is **henselian** if one (equivalently, all) of the following hold(s):

(i) The valuation v has a unique extension to the algebraic closure of K.

(ii) The valuation v extends uniquely to each finite extension of K.

(iii) For all monic $f \in \mathscr{O}_v[X]$ and $a \in \mathscr{O}_v$, if $f(a) \in \mathfrak{m}_v$ and $f'(a) \notin \mathfrak{m}_v$, there exists a unique $a' \in a + \mathfrak{m}_v$ with $f(a') = 0$.

(iv) For all monic $f \in \mathscr{O}_v[X]$ and $a \in \mathscr{O}_v$ with $v(f(a)) > 2v(f'(a))$, there exists $a' \in \mathscr{O}_v$ with $f(a') = 0$ and $v(a - a') > v(f'(a))$.

(v) All polynomials $f \in X^{n+1} + X^n + \mathfrak{m}_v[X]^{<n}$ have a root in K.

We also say that v itself is henselian. A field K is **henselian** if it admits a non-trivial henselian valuation. A henselian valued field (K, v) (or the valuation v itself) is **defectless** (respectively **separably defectless**) if $[L : K] = (\Gamma_w : \Gamma_v) \cdot [k_w : k_v]$ for every finite (resp. finite separable) extension $(L, w)/(K, v)$.

Henselianity it related to completeness: if $\Gamma_v \cong \mathbb{Z}$ and K is complete with respect to the ultrametric induced by v, then (K, v) is henselian. Every henselian (K, v) of residue characteristic zero is defectless.

Example 2.4. Of course there are so many examples worth discussing at this point, but let me introduce a few key ones.

(i) (K, v_{triv}): any field K can be equipped with the trivial valuation, i.e. such that $\mathscr{O}_v = K$. The value group is $\{0\}$, the residue field is K, and the valuation is henselian.

(ii) $(\mathbb{Q}, v_p)$: for any prime number p there is the **p-adic** valuation on $\mathbb{Q}$, given by

$$v_p(x) := \begin{cases} \ell & \text{for } x = p^\ell m/n,\ p \nmid m, n \text{ and } \ell, m, n \in \mathbb{Z} \\ \infty & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

The value group is $\mathbb{Z}$, the residue field is $\mathbb{F}_p$, and the valuation is not henselian. The p-adic valuations and the trivial valuation are the only valuations on $\mathbb{Q}$, by a theorem of Ostrowski.

(iii) $(\mathbb{C}, v)$: $\mathbb{C}$ admits a large family of non-trivial valuations. Each of these valuations has divisible value group, algebraically closed residue field (all characteristics are possible), and these valuations are henselian and defectless.

(iv) Algebraic fields of positive characteristic (for example $\mathbb{F}_p$ and $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$) admit only the trivial valuation.

(v) $(\mathbb{Q}_p, v_p)$: the **field of p-adic numbers** is the completion of $\mathbb{Q}$ with respect to v_p (i.e. with respect to the absolute value associated to v_p). This completion $\mathbb{Q}_p$ inherits a field structure, and it admits a unique valuation (also denoted v_p) such that $\mathbb{Q}_p$ is complete with respect to v_p. The value group is $\mathbb{Z}$, the residue field is $\mathbb{F}_p$, and the valuation is henselian and defectless.

(vi) $(F((\Gamma)), v_t)$: for each ordered abelian group Γ and each field F we may form the **generalized power series field**/**Hahn series field**, which is

$$F((\Gamma)) := \Big\{ \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma \;\Big|\; a_\gamma \in F \text{ and } \{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\} \text{ is well-ordered} \Big\},$$

with both addition and multiplication 'as you would expect', that is:

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma + \sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma t^\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} (a_\gamma + b_\gamma) t^\gamma,$$

and

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma \cdot \sum_{\gamma\in\Gamma} b_\gamma t^\gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \big(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \big) t^\gamma.$$

We define the ***t*-adic valuation**

$$v_t\big(\sum_\gamma a_\gamma t^\gamma\big) := \min\{\gamma \mid a_\gamma \neq 0\}$$

and $v_t(0) := \infty$. The value group is Γ, the residue field is F, and the valuation is henselian and defectless.

(vii) One very important family of examples is the family of local fields of positive characteristic: $(\mathbb{F}_q((t)), v_t) := (\mathbb{F}_q((\mathbb{Z})), v_t)$, for q a prime power.

Remark 2.5 (Coarsenings and refinements)**.** Let v, w be two valuations on a field K. We say that v is a **coarsening** of w if $\mathscr{O}_v \supseteq \mathscr{O}_w$; in this case we also say that w is a **refinement** of v. This defines a partial order on the set of valuations on K (up to equivalence). In fact the valuations are directed, in that there is a join $v \vee w$ of two valuations, which is the finest common coarsening. The valuation ring of $v \vee w$ is $\mathscr{O}_{v\vee w} = \mathscr{O}_v \mathscr{O}_w$. Moreover the family of valuations coarser than a given one is totally ordered (so, in this sense, the valuations form a tree). The coarsest valuation is v_{triv}. Two valuations v, w are **dependent** if $v \vee w$ is non-trivial, and **independent** otherwise. This is an equivalence relation on the non-trivial valuations.

Remark 2.6. The coarsenings w of a valuation v on a field K (up to equivalence) correspond bijectively to the convex subgroups of Γ_v:

$$\begin{aligned} \{\Delta \trianglelefteq_{\text{convex}} \Gamma_v\} &\longleftrightarrow \{w \supseteq v\} \\ \Delta &\longleftrightarrow [w : x \longmapsto v(x) + \Delta]. \end{aligned}$$

This is surjective because each coarsening $w \supseteq v$ is equivalent to a valuation with value group equal to a quotient of Γ_v by a convex subgroup.

Remark 2.7 (Valuation topology)**.** Let (K, v) be a valued field. We define a field topology T_v on K by declaring a basis of neighbourhoods of 0 to be given by $a \cdot \mathscr{O}_v$, for $a \in K^\times$. Of course, one must check that this really does give a field topology: we will discuss this more later. In fact, two non-trivial valuations induce the same topology if and only if they are dependent.

Remark 2.8. Note that T_v is indiscrete if and only if v is trivial. Some prefer to think of the topology induced by the trivial valuation as the discrete topology: this corresponds to declaring instead the basis to be given by sets of the form $a \cdot \mathfrak{m}_v$. For non-trivial valuations, these two definitions coincide, but for v_{triv} one gets the indiscrete topology or the discrete topology. The reason I prefer the indiscrete topology is that it is the coarsest topology, and $K = \mathscr{O}_{v_{\text{triv}}}$ is the coarsest valuation ring.

Definition 2.9. We introduce several first-order languages.

— $\mathfrak{L}_{\text{oag}} = \{+, -, 0, \leqslant, \infty\}$ is the language of ordered abelian groups (written additively) with an additional symbol ∞. Interpretations will be the disjoint union $\Gamma \sqcup \{\infty\}$, where Γ is an ordered abelian group and ∞ (the interpretation of ∞) is an additional absorbing element 'at infinity', i.e. $x + \infty = \infty$ and $x \leqslant \infty$, for all x.

— $\mathfrak{L}_{\text{ring}} = \{+, -, \cdot, 0, 1\}$ (we will often suppress field structure from notation).

— $\mathfrak{L}_{\text{vf}} = \mathfrak{L}_{\text{ring}} \cup \{\mathscr{O}\}$ where $\mathscr{O}$ is a unary relation interpreted in a valued field (K, v) by the valuation ring $\mathscr{O}_v$.

— $\mathfrak{L}_{\text{div}} = \mathfrak{L}_{\text{ring}} \cup \{|\}$, where $|$ is a binary relation interpreted in a valued field (K, v) by writing $x \mid y$ if and only if $v(x) \leqslant v(y)$.

— $\mathfrak{L}_{\text{vf}-3}$, which is a three-sorted language, with two sorts $\mathbf{K}, \mathbf{k}$ equipped with $\mathfrak{L}_{\text{ring}}$ and a sort $\mathbf{\Gamma}$ equipped with $\mathfrak{L}_{\text{oag}}$. There are two unary function symbols $\mathbf{val} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{\Gamma}$ and $\mathbf{res} : \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{k}$. In a valued field (K, v) we interpret $\mathbf{K}$ by K, $\mathbf{k}$ by the residue field k_v, and $\mathbf{\Gamma}$ by the value group Γ_v (with an extra element ∞). The function symbol $\mathbf{val}$ is interpreted by the valuation, and $\mathbf{res}$ is interpreted by the residue map, extended to have the domain K by mapping each $x \notin \mathscr{O}_v$ to 0.

— $\mathfrak{L}_{\text{Pas}} = \mathfrak{L}_{\text{vf}-3} \cup \{\text{ac}\}$ be the expansion of $\mathfrak{L}_{\text{vf}-3}$ by a unary function symbol $\mathbf{ac} : K \longrightarrow k$, interpreted by an angular component map (which is a group homomorphism $\text{ac} : K^\times \longrightarrow k^\times$, extending the residue map on $\mathscr{O}_v$).

Remark 2.10. The choice of language in which to study valued fields can be very important, for example when considering properties like quantifier elimination. We will mostly be interested in combinatorial properties of the class of definable sets, with no

regard specifically for the complexity of the definitions of those sets. Therefore, it will not matter to us whether we think of valued fields as $\mathfrak{L}_{\mathrm{vf}}$-structures, as $\mathfrak{L}_{\mathrm{div}}$-structures, or as $\mathfrak{L}_{\mathrm{vf}-3}$-structures. The angular component map is not in general definable or interpretable in a valued field, nor does every valued field admit such a map, thus for our purposes the languages $\mathfrak{L}_{\mathrm{vf}-3}$ and $\mathfrak{L}_{\mathrm{Pas}}$ are inequivalent.

For this talk, and for the sake of simplicity, we will study valued fields as $\mathfrak{L}_{\mathrm{vf}-3}$-structures, although we continue to denote them simply as the pair (K, v) of the field and the valuation.

Example 2.11. We can now introduce several important theories.

(i) **ACF** – the $\mathfrak{L}_{\mathrm{ring}}$-theory of algebraically closed fields – is axiomatized by the theory of fields together with sentences expressing for each n and for a model K that every non-constant monic polynomial over K of degree at most n has a root. The completions are

— $\mathbf{ACF}_p := \mathbf{ACF} \cup \{\chi_p\}$, for $p \in \mathbb{P}$, where χ_p is the sentence

$$\underbrace{1 + \ldots + 1}_{p \text{ times}} = 0,$$

and

— $\mathbf{ACF}_0 := \mathbf{ACF} \cup \{\neg\chi_p \mid p \in \mathbb{P}\}$.

(ii) **SCF** – the $\mathfrak{L}_{\mathrm{ring}}$-theory of separably closed fields – is axiomatized by the theory of fields together with sentences expressing for each n and for a model K that every non-constant monic separable polynomial over K of degree at most n has a root. The completions are

— $\mathbf{SCF}_0 := \mathbf{ACF}_0$,

— $\mathbf{SCF}_{p,e} := \mathbf{SCF} \cup \{\varepsilon_{p,e}, \neg\varepsilon_{p,e+1}\}$, for $p \in \mathbb{P}$ and $e \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}$, where $\varepsilon_{p,e}$ is a sentence expressing for a model K that the characteristic is p and the imperfection degree[(1)] of K is at least e, and

— $\mathbf{SCF}_{p,\infty} := \mathbf{SCF} \cup \{\varepsilon_{p,e} \mid e \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}\}$, for $p \in \mathbb{P}$.

(Note that $\mathbf{SCF}_{p,0} \equiv \mathbf{ACF}_p$.)

(iii) **ACVF** – the $\mathfrak{L}_{\mathrm{vf}}$-theory of non-trivially valued algebraically closed fields The completions are

— $\mathbf{ACVF}_{p,p} := \mathbf{ACVF} \cup \{\chi_p\}$, for $p \in \mathbb{P}$,

[(1)] For a field K of characteristic $p \in \mathbb{P}$, a subset $B \subseteq K$ is said to be **p-independent** if $b \notin K^{(p)}(B \setminus \{b\})$, for each $b \in B$. The cardinality of a maximal p-independent subset is called the **imperfection degree** of K. For more information on p-independence, see (Mac Lane, 1939a,b; Teichmüller, 1936).

— $\mathbf{ACVF}_{0,p} := \mathbf{ACVF} \cup \{\neg\chi_l \mid l \in \mathbb{P}\} \cup \{\chi_p^{\mathbf{k}}\}$, for $p \in \mathbb{P}$, where $\chi_p^{\mathbf{k}}$ is the sentence $1^{\mathbf{k}} + \ldots + 1^{\mathbf{k}} = 0^{\mathbf{k}}$ (i.e. the sentence χ_p interpreted in the sort $\mathbf{k}$ for the residue field), and

— $\mathbf{ACVF}_{0,0} := \mathbf{ACVF} \cup \{\neg\chi_l^{\mathbf{k}} \mid l \in \mathbb{P}\}$.

(iv) **SCVF** – the $\mathfrak{L}_{\mathrm{vf}}$-theory of non-trivially valued separably closed fields. The completions are

— $\mathbf{SCVF}_{0,0} := \mathbf{ACVF}_{0,0}$,

— $\mathbf{SCVF}_{0,p} := \mathbf{ACVF}_{0,p}$, for $p \in \mathbb{P}$,

— $\mathbf{SCVF}_{p,e} := \mathbf{SCVF} \cup \{\varepsilon_{p,e}, \neg\varepsilon_{p,e+1}\}$, for $p \in \mathbb{P}$ and $e \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}$, and

— $\mathbf{SCVF}_{p,\infty} := \mathbf{SCVF} \cup \{\varepsilon_{p,e} \mid e \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}\}$, for $p \in \mathbb{P}$.

(Note that $\mathbf{SCVF}_{p,0} \equiv \mathbf{ACVF}_p$.)

(v) $\mathbf{T}_p^{\mathrm{h}}$ and $\mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{h}}$, the theories of henselian valued fields of equal characteristic $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ and of mixed characteristic $(0,p)$, for $p \in \mathbb{P}$, respectively.

(vi) $\mathbf{T}_p^{\mathrm{h}}(k,\Gamma)$, for $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, a field k of characteristic p, and an ordered abelian group Γ, is the theory of henselian valued fields of equal characteristic p, with residue field elementarily equivalent to k and value group elementarily equivalent to Γ.

(vii) $\mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{h}}(k,\Gamma,\gamma)$, for $p \in \mathbb{P}$, a field k of characteristic p, and a pointed ordered abelian group (Γ,γ), is the theory of henselian valued fields of mixed characteristic $(0,p)$, with residue field elementarily equivalent to k and value group (with distinguished element $v(p)$) elementarily equivalent to (Γ,γ).

Theorem 2.12 (Ax and Kochen, 1965a; Ershov, 1965). *For every field k of characteristic zero, and every ordered abelian group Γ, the theory $\mathbf{T}_0^{\mathrm{h}}(k,\Gamma)$ is complete. Consequently, if (K,v) is henselian of equal characteristic zero, its theory is axiomatized by requiring of a model (L,w) that it is*

— *henselian,*

— *that the value group Γ_w is elementarily equivalent to Γ_v, and*

— *that its residue field k_w is elementarily equivalent to k_v.*

Corollary 2.13. *If (K,v) is henselian of equal characteristic 0, then $(K,v) \equiv (k_v((\Gamma_v)), v_t)$.*

Theorem 2.14 (Ax and Kochen, 1965b; Prestel and Roquette, 1984). *For every prime number $p \in \mathbb{P}$, the theory $\mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{h}}(\mathbb{F}_p, \mathbb{Z}, 1)$ is complete. This is the complete theory of the valued field $(\mathbb{Q}_p, v_p)$.*

In fact, the theory of each finite extension $(K, v)/(\mathbb{Q}_p, v_p)$ is axiomatized by axioms that express the following, for a model (L, w):

— *(L, w) is henselian,*

— *the pointed value groups $(\Gamma_w, w(p))$ and $(\Gamma_v, v(p))$ are elementarily equivalent,*

— *the minimal polynomial of a certain 'uniformizer' (element of minimum positive value) of (K, v) has a root in L, and*

— *the residue fields k_w and k_v are isomorphic (note that k_v is finite).*

Note that Theorem 2.12 does not extend straightforwardly to equal positive characteristic: if k is of characteristic $p > 0$ and Γ is an ordered abelian group, it does not follow that $\mathbf{T}_p^{\mathrm{h}}(k, \Gamma)$ is complete.

Example 2.15. We introduce several more theories, based on the properties 'henselian and defectless' or 'henselian and separable defectlessness'.

(viii) $\mathbf{T}_p^{\mathrm{d}}$ and $\mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{d}}$, the theories of henselian and defectless valued fields of equal characteristic $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$ and of mixed characteristic $(0, p)$, for $p \in \mathbb{P}$, respectively.

(ix) $\mathbf{T}_{p,e}^{\mathrm{sd}}$ the theory of henselian and separably defectless valued fields of equal characteristic $p \in \mathbb{P}$ and imperfection degree $e \in \mathbb{N}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$.

(x) $\mathbf{T}_p^{\mathrm{d}}(k, \Gamma)$, $\mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{d}}(k, \Gamma, \gamma)$, and $\mathbf{T}_{p,e}^{\mathrm{sd}}(k, \Gamma)$, are defined similarly, for appropriate p, e, k, Γ, γ.

Defectlessness and separable defectlessness in certain circumstances are strong enough to provide an Ax–Kochen/Ershov Principle in positive characteristic, as we will see in Theorem 2.18.

Remark 2.16. In (viii), note that $\mathbf{T}_0^{\mathrm{d}} \equiv \mathbf{T}_0^{\mathrm{h}}$. In (ix) we allowed $e = 0$ in which case 'separably defectless' coincides with 'defectless', and so $\mathbf{T}_{p,0}^{\mathrm{sd}} \equiv \mathbf{T}_p^{\mathrm{d}}$.

Remark 2.17. Suppose that k is a perfect field of characteristic $p \in \mathbb{P} \cup \{0\}$, that Γ is p-divisible (in the case $p > 0$), and that $\gamma \in \Gamma$ is any distinguished positive element. Then $\mathbf{T}_p^{\mathrm{d}}(k, \Gamma)$ is a theory of tame valued fields of equal characteristic, $\mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{d}}(k, \Gamma, \gamma)$ is a theory of tame valued fields of mixed characteristic, and $\mathbf{T}_{p,e}^{\mathrm{sd}}(k, \Gamma)$ is a theory of separably tame valued fields. The preceding sentence can be taken as the definition of 'tame'; alternatively see Kuhlmann (2016). In particular, $\mathbf{T}_p^{\mathrm{d}}(k, \Gamma)$ is the complete theory of $(k((\Gamma)), v_t)$.

Theorem 2.18 (KUHLMANN, 2016; KUHLMANN and PAL, 2016)**.** *Let k be perfect of characteristic $p \in \mathbb{P}$, let Γ be p-divisible, and let $e \in \mathbb{N}_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$. Then $\mathbf{T}^{\mathrm{d}}_p(k,\Gamma)$ and $\mathbf{T}^{\mathrm{sd}}_{p,e}(k,\Gamma)$ are complete.*

Example 2.19. One further slightly more subtle family of examples. For $p \in \mathbb{P}$, let k be a field of characteristic p, and let (Γ,γ) be a pointed ordered abelian group. Let $\Gamma_{\gamma-}$ denote the largest convex subgroup of Γ not containing γ, and let $\Gamma_{\gamma+}$ denote the smallest convex subgroup of Γ containing γ. Thus, for a valued field (K,v) of mixed characteristic with value group Γ, $(\Gamma_v)_{v(p)-}$ is the largest convex subgroup of Γ not containing $v(p)$, and $(\Gamma_v)_{v(p)+}$ is the smallest convex subgroup of Γ containing $v(p)$. We denote by v_p the coarsening of v corresponding to $(\Gamma_v)_{v(p)-}$, and by v_0 the coarsening of v corresponding to $(\Gamma_v)_{v(p)-}$. Then v_p is the finest coarsening of v that is still of mixed characteristic.

Now, suppose that $\Gamma/\Gamma_{\gamma-}$ is discrete with only finitely many elements between 0 and $\gamma+\Gamma_{\gamma-}$ (i.e. the image of γ in the quotient). We define the theories

(xi) $\mathbf{T}^{\mathrm{sd}}_{(0,p),e}(k,\Gamma,\gamma)$ to be the theory $\mathbf{T}^{\mathrm{h}}_{(0,p)}(k,\Gamma,\gamma)$ together with axioms that express of a model (K,v) that the valued residue field $(k_{v_p},\bar{v})$ is a model of $\mathbf{T}^{\mathrm{sd}}_{p,e}(k,\Gamma_{\gamma-})$.

If k is perfect and $\Gamma_{\gamma-}$ is p-divisible, then this theory expresses that $(k_{v_p},\bar{v})$ is a separably tame valued field.

2.1. NIP and Dp-rank

For background on elementary model theory, see MARKER (2002), and for a thorough introduction to the subject of NIP theories, see SIMON (2015).

Let T be an $\mathfrak{L}$-theory.

Definition 2.20 (NIP)**.** An $\mathfrak{L}$-formula $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ has **IP** (the **independence property**) if there is a model $\mathscr{M} \models T$ and sequences $(\bar{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $M^{\bar{x}}$ and $(\bar{b}_J)_{J\in\mathscr{P}(\mathbb{N})}$ in $M^{\bar{y}}$ such that

$$\mathscr{M} \models \varphi(\bar{a}_i,\bar{b}_J) \iff i \in J.$$

We say that T has **IP** if some formula has IP. Otherwise we say that T has **NIP**.

A sequence $B = (b_n)_{n<\omega}$ of elements of a model is **indiscernible** over a set A if whenever $n_1 < \ldots < n_k$ and $n'_1 < \ldots < n'_k$ then $\mathrm{tp}(b_{n_1},\ldots,b_{n_k}/A) = \mathrm{tp}(b_{n'_1},\ldots,b_{n'_k}/A)$. That is, the type of a tuple from the sequence only depends on the order-type of the indices.

Next, for NIP theories, we introduce dp-rank. In fact, this is a notion of rank on partial types in the theory T. Recall that a partial type $\pi(\bar{x})$ in the theory T is a set of $\mathfrak{L}$-formulas in the free-variables $\bar{x}$ that is consistent with T. Such a partial type $\pi(\bar{x})$

is said to be defined over a subset A of a saturated model of T if all the formulas in $\pi(\bar{x})$ have parameters coming only from A.

Definition 2.21 (Dp-rank)**.** Let A be a subset of a saturated model of T and let $\pi(\bar{x})$ be a partial type defined over A. The **dp-rank** of $\pi(\bar{x})$, denoted dp-rk$(\pi(\bar{x}))$, is the supremum of cardinal numbers κ such that

(*) for some set of mutually indiscernible sequences $\{I_j \mid j < \kappa\}$ of tuples from a saturated model of T, there exists an $\bar{x}$-tuple $\bar{c}$ which realises $\pi(\bar{x})$ such that I_j is not indiscernible over $A \cup \bar{c}$, for all $j < \kappa$.

The dp-rank of T, denoted dp-rk(T), is defined to be the dp-rank of the partial 1-type $x = x$.

We say that T is **strongly dependent** if dp-rk$(T) \leqslant \aleph_0$ but $(*)$ doesn't hold for $\aleph_0$. We say that T is **dp-minimal** if dp-rk$(T) = 1$; and we say that T is **dp-finite** if dp-rk$(T) < \aleph_0$. Thus

$$\text{dp-minimal} \implies \text{dp-finite} \implies \text{strongly dependent} \implies \text{NIP}.$$

Example 2.22.

(i) $(Q, <)$, where Q is simply the set of rational numbers without its field structure, equipped with the usual ordering, under which it is a totally ordered set. This is the theory of the 'dense linear order (without endpoints)'. It is o-minimal: definable subsets of Q are finite unions of intervals. This property implies dp-minimality and NIP.

(ii) $\mathbb{Z}$, the ring of integers. Consider the formula $\varphi(x, y)$ defined to be $\exists z\ xz = y$, and consider an $\aleph_1$-saturated elementary extension $\mathbb{Z}^* \succeq \mathbb{Z}$. For $i \in \mathbb{N}$, let a_i be the i-th prime number, and for each subset J of $\mathbb{N}$, define $b_J := \prod_{i \in J} a_i$ (which makes sense as an element of $\mathbb{Z}^*$). Then $\varphi(a_i, b_J)$ if and only if $i \in J$; so the theory of $\mathbb{Z}$ has IP.

(iii) $\mathbb{Q}$, the field of rational numbers. Since $\mathbb{Z}$ is definable in $\mathbb{Q}$ by a theorem of Robinson, $\mathbb{Q}$ also has IP.

(iv) $\mathbb{C}$ and $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$, the field of complex numbers and the algebraic closure of $\mathbb{F}_p$. These are both strongly minimal (thus stable and dp-minimal, thus NIP), this can be seen directly from quantifier elimination.

(v) $(\mathbb{R}, <)$, the ordered field of real numbers. This admits a quantifier elimination in the language of ordered fields. In particular, it is o-minimal, therefore dp-minimal and NIP.

When it comes to ordered abelian groups, the situation of NIP, dp-finite, and dp-minimal theories are completely understood, by the following three theorems.

Theorem 2.23 (Gurevich and Schmitt, 1984)**.** *The theory of ordered abelian groups is NIP. Thus all $\mathfrak{L}_{\mathrm{oag}}$-theories of ordered abelian groups are NIP.*

Theorem 2.24 (Dolich and Goodrick, 2018; Farré, 2017; Halevi and Palacín, 2019)**.** *Characterization of dp-finite ordered abelian groups: Γ is dp-finite if and only if*

— *for cofinitely many prime numbers p we have $(\Gamma : p\Gamma) < \infty$, and*

— *for every prime number p such that $(\Gamma : p\Gamma) = \infty$, there are only finitely many equivalence classes in the equivalence relation $\sim_p$ defined by:*

$$\gamma_1 \sim_p \gamma_2 \iff H(\gamma_1) = H(\gamma_2),$$

where $H(\gamma)$ is the largest convex subgroup such that $\gamma \notin H + p\Gamma$ (or $H(\gamma) = \emptyset$ if $\gamma \in p\Gamma$).

Theorem 2.25 (Jahnke, Simon, and Walsberg, 2017)**.** *Characterization of dp-minimal ordered abelian groups: Γ is dp-minimal if and only if $\Gamma/p\Gamma$ is finite for all prime numbers p.*

For the purposes of classifying NIP fields and valued fields, a useful and powerful result is the following, which is proved using the Baldwin–Saxl Theorem.

Theorem 2.26 (Kaplan, Scanlon, and Wagner, 2011)**.** *If K is NIP and of characteristic $p > 0$, then K admits no Galois extensions of degree divisible by p.*

Example 2.27.

(i) Let (K, v) be a henselian valued field of equicharacteristic 0. Then (K, v) is NIP in $\mathfrak{L}_{\mathrm{vf}-3}$ if and only if k_v is NIP in $\mathfrak{L}_{\mathrm{ring}}$, by Delon (1981) and Gurevich and Schmitt (1984).

(ii) Consider $(\mathbb{Q}_p, v_p)$: this is NIP by Bélair (1999), and dp-minimal by Dolich, Goodrick, and Lippel (2011).

(iii) Consider $(\mathbb{F}_p((t)), v_t)$ is not NIP — see Kaplan, Scanlon, and Wagner (2011).

(iv) Consider $(F((\Gamma)), v_t)$: if $\mathrm{char}(F) = 0$ then we can apply (i); otherwise, Γ is p-divisible and F is perfect, and this is a prototypical tame valued field of equal positive characteristic. Such tame valued fields are NIP if and only if the residue field is NIP, and this is proved in detail by Jahnke and Simon (2020).

(**v**) Separably tame valued fields are also discussed by Jahnke and Simon (2020) as well as by Anscombe and Jahnke (2019). We will state this in more detail in the final section of the talk.

Next we recall three technical and very useful theorems that we will make use of a number of times. We denote by T^{eq} the theory T expanded by all interpretable sets, and by $\mathscr{M}^{\mathrm{sh}}$ the structure $\mathscr{M}$ expanded by all externally definable sets, i.e. those sets definable using parameters from an elementary extension.

Theorem 2.28 (Shelah, 2009). *T is NIP (resp. strongly dependent) if and only if T^{eq} is NIP (resp. strongly dependent).*

Theorem 2.29 (Shelah, 2014). *If $\mathscr{M}$ is NIP (resp. strongly dependent, resp. dp-minimal) then $\mathscr{M}^{\mathrm{sh}}$ is NIP (resp. strongly dependent, resp. dp-minimal).*

Theorem 2.30 (Jahnke and Koenigsmann, 2015). *For each $p \in \mathbb{P}$ there is a formula $\varphi_p(x)$ in the language of rings that defines the valuation ring of the canonical p-henselian valuation v_K^p in every field.*

I won't say any more about the canonical p-henselian valuation, except that v_K^p is always a refinement of the canonical henselian valuation v_K, and so if K is henselian then v_K^p is non-trivial and defines the henselian topology.

Finally, Jahnke has proved the 'henselian expansion theorem':

Theorem 2.31 (Jahnke, 2016). *If (K, v) is henselian and K is NIP then (K, v) NIP.*

2.2. The conjectures and theorems

An early result in the direction of classifying the theories of fields satisfying one of the model theoretic dividing lines, is the following.

Theorem 2.32 (Macintyre, 1971). *If K is an infinite field of finite Morley rank then K is algebraically closed.*

The conjecture that motivates this whole subject is —roughly speaking— that every NIP field has a non-trivial henselian valuation, unless there is a silly reason why not. A little more precisely, unless the field is an algebraic extension of $\mathbb{F}_p$, or it is an archimedean real closed field. Note that a real-closed field admits a non-trivial henselian valuation if and only if its ordering is non-archimedean. The usual formulation is the following:

Conjecture 2.33 (Shelah's Conjecture, (**SC**)). *If K is NIP then K is either*

(**i**) *finite, or*

(**ii**) *algebraically closed, or*

(**iii**) *real closed, or*

(**iv**) *henselian.*

Closely related to Shelah's Conjecture, is the following:

Conjecture 2.34 (Henselianity Conjecture, (**HC**)). *Let (K, v) be NIP. Then v is henselian.*

In Halevi, Hasson, and Jahnke (2020) it is proved that (**HC**) is a consequence of (**SC**). Denote by $(\mathbf{SC})_{<\omega}$ and $(\mathbf{HC})_{<\omega}$ the specializations of the above conjectures to the case of dp-finite fields. We are now in a position to precisely state Johnson's theorem.

Theorem 2.35 (Johnson's Theorem). $(\mathbf{SC})_{<\omega}$ *holds: if K is dp-finite then K is either*

(**i**) *finite, or*

(**ii**) *algebraically closed, or*

(**iii**) *real closed, or*

(**iv**) *henselian.*

Theorem 3.4 of Halevi, Hasson, and Jahnke (2019) gave a conjectural characterization of the strongly dependent fields, equivalent to Shelah's Conjecture for strongly dependent fields. Specializing to the case of dp-finite fields, and by combining with Johnson's Theorem, we have the following:

Corollary 2.36 (Characterization of dp-finite fields). *A field K is dp-finite if and only if there is a henselian defectless valuation v on K such that*

(**i**) *k_v is algebraically closed, real closed, or p-adically closed (including finite extensions),*

(**ii**) *Γ_v is dp-finite (as an ordered abelian group), and*

(**iii**) *if (K, v) has residue characteristic p then $[-v(p), v(p)] \subseteq p \cdot \Gamma_v$.*

Furthermore, there is an Ax–Kochen/Ershov Principle for dp-finite valued fields: the theory of a dp-finite valued field (K, v) is determined by the theory of k_v and the theory of Γ_v (in the mixed characteristic case we name the constant $v(p)$ in Γ_v).

Theorem 3.13 of Halevi, Hasson, and Jahnke (2019) rephrases their conjectural characterization into a conjectural classification of the complete theory of a strongly dependent field equipped with its canonical henselian valuation. Again, specializing this to the dp-finite case and combining this with Johnson's Theorem yields:

Corollary 2.37 (Classification of complete theories of dp-finite fields)**.** *Let K be an infinite dp-finite field and let v_K be the (possibly trivial) canonical henselian valuation on K. One the following holds:*

(i) $(K, v_K) \models \mathbf{T}_0^{\mathrm{h}}(\mathbb{C}, \Gamma)$,

(ii) $(K, v_K) \models \mathbf{T}_0^{\mathrm{h}}(\mathbb{R}, \Gamma)$,

(iii) $(K, v_K) \models \mathbf{T}_p^{\mathrm{d}}(\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}, \Gamma)$,

(iv) (K, v_K) *is elementarily equivalent to a finite extension of a model of* $\mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{h}}(\mathbb{F}_p, \Gamma, \gamma)$, *where γ is the minimum positive element of Γ,*

(v) $(K, v_K) \models \mathbf{T}_{(0,p)}^{\mathrm{d}}(\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}, \Gamma, \gamma)$, *where $\Gamma_{\gamma+}$ is p-divisible,*

and where in all cases Γ is strongly dependent.

All these theories are complete (in case (iv) the complete theories can also be described).

Returning to the case of strongly dependent fields, since all the fields occurring in the characterization above are dp-finite, these result show that if Shelah's Conjecture holds for strongly dependent fields, then in fact all strongly dependent fields are dp-finite, and so the above would also classify the complete theories of strongly dependent fields. This idea of conjecturally classifying complete theories was later extended to the case of NIP fields in Anscombe and Jahnke (2019).

2.3. Reduction

I want to discuss the reduction of Shelah's Conjecture to the apparently weaker problem of finding a 'unique definable V-topology' on every infinite unstable dp-finite field. For the present, a 'V-topology' is simply a field topology induced by a valuation or absolute value, and a topology is 'definable' if there is a definable family of sets that form a base for the filter of neighbourhoods of 0. We will discuss these notions more carefully later.

Conjecture 2.38 (V-topology conjecture, **(VC)**)**.** *If $(K, \ldots)$ is NIP then either*

(i) *K is finite, or*

(ii) *K is separably closed, or*

(iii) *K admits a unique definable V-topology.*

Remark 2.39 (It's easy to define the henselian topology!). If (K, v) is henselian, and K is not separably closed, then T_v is definable: let $f \in \mathscr{O}_v[X]$ be monic, non-linear, separable, and irreducible; then

$$\mathfrak{m}_v \subseteq \frac{1}{f(K)} - \frac{1}{f(K)} \subseteq \mathscr{O}_v.$$

This uses henselianity together with some simple calculations of valuations. The moral is: if the henselian topology exists, it's easy to define it; but if we don't know the henselian topology exists, we don't know we have defined anything useful.

Conjecture 2.40 (V-topological henselianity conjecture, **(VHC)**). *If $\mathscr{K} = (K, \ldots)$ is NIP then $\mathscr{K}$ admits at most one definable V-topology.*

Proposition 2.41 (Reductions).

(i) **(SC)** $\Longrightarrow$ **(HC)**

(ii) **(HC)** $\Longrightarrow$ **(VHC)**

(iii) **(HC)** $\Longleftarrow$ **(VHC)**

(iv) **(SC)** $\Longrightarrow$ **(VC)**

(v) **(SC)** $\Longleftarrow$ **(VC)**

Proof sketch.

(i) Omitted. See Halevi, Hasson, and Jahnke (2020).

(ii) Suppose **(HC)**. Let $\mathscr{K} = (K, \ldots)$ be NIP. Suppose that T_τ and T_σ are two definable V-topologies on K. Passing to an elementary extension if necessary, we may suppose that both topologies are valuation topologies, corresponding to valuations u, v say. These valuations are externally definable, thus NIP. Thus they are both henselian, by **(HC)**. Either u, v are dependent, in which case $T_u = T_v$ and we are done, or u, v, are independent, in which case K is separably closed, by the theorem of F.K. Schmidt. If K is separably closed, it admits no definable non-trivial topology.

(iii) Suppose **(VHC)**. Let $\mathscr{K} = (K, v, \ldots)$ be a NIP expansion of a valued field. If v is not henselian, then there is a finite extension L/K to which v admits two distinct prolongations, w_1, w_2 say. All of this is interpretable in the theory of $\mathscr{K}$, so (L, w_1, w_2) is a NIP bi-valued field. Moreover, w_1 and w_2 are incomparable. Let $M := L(w_1 \vee w_2)$ be the residue field of L with respect to the join of w_1 and w_2. Each w_i induces a valuation $\bar{w}_i$ on M; and $\bar{w}_1$ and $\bar{w}_2$ are independent. Again, by interpretability, the bi-valued field $(M, \bar{w}_1, \bar{w}_2)$ is NIP. This contradicts **(VHC)**.

(**iv**) Suppose (**SC**). Let $\mathscr{K} = (K, \ldots)$ be NIP. By (**i**) and (**ii**), (**HC**) and (**VHC**) hold, so $\mathscr{K}$ admits at most one definable V-topology. Applying (**SC**) we have four cases. If K is finite or separable closed then we are done. If K is real closed then the topology is definable: $[-1, 1]$ is definable. Otherwise, if K is henselian then there is a definable non-trivial p-henselian valuation v^p, by a theorem of Jahnke and Koenigsmann (Theorem 2.30), and moreover v^p induces the henselian topology. There is only one such topology on a non-separably closed field, thus (**VC**) holds.

(**v**) Suppose (**VC**). Let K be NIP and neither finite, nor algebraically closed, nor real closed. If K is separably closed then (since it's not algebraically closed) it admits a non-trivial henselian valuation. Therefore, by (**VC**), we may assume that K is not separably closed, and admits a unique definable V-topology T. Let $(K^*, T^*) \succeq (K, T)$ be $\aleph_1$-saturated. Then T^* is a definable V-topology on K^*. Note also that K^* is neither finite, nor separably closed, nor real closed. By (Halevi, Hasson, and Jahnke, 2020), there is a valuation ring $\mathscr{O}$ on K^* that is externally definable and which induces T^*. By Shelah's expansion theorem, $(K^*, \mathscr{O})$ is NIP. By (**ii**), (**HC**) holds, and so $\mathscr{O}$ is henselian. By Jahnke–Koenigsmann (Theorem 2.30), there is a definable non-trivial p-henselian valuation v^p that induces T^*. Since it is definable, also in K there is a non-trivial definable valuation v on K that induces T. By (**HC**) again, v is henselian. □

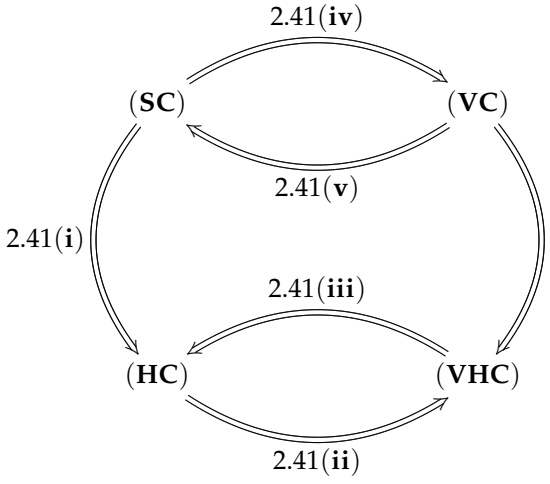


Figure 1: Illustration of Proposition 2.41

Remark 2.42. These equivalences also hold for the dp-finite conjectures.

2.4. Strategy of the proof of $(\mathbf{VC})_{<\omega}$

(**i**) Reduce $(\mathbf{SC})_{<\omega}$ to $(\mathbf{VC})_{<\omega}$ (done!).

(**ii**) Introduce the notion of a heavy set, using dp-rank.

(**iii**) Form the 'canonical topology' from these big sets, and show that it is a group topology on the additive group.

(**iv**) Introduce W-rings and W-topologies.

(**v**) Define another topology, defined by a lattice of subgroups, show this topology is a W-topology.

(**vi**) Show that these two topologies coincide, and so the canonical topology is a W-topology.

(**vii**) Show there is a unique definable V-topology.

Remark 2.43. Johnson's PhD thesis (Johnson, 2016) contained the proof of Shelah's Conjecture in the case of dp-minimal fields, i.e. for K of dp-rank equal to 1. There are several notable simplifications. For example, the required notion of 'heavy' is simply 'infinite'.

3. Field topologies and V-topologies

We consider topologies T on abelian groups, rings, and fields. For simplicity we usually work in a field K, or in its additive group. For more details see the books of Warner (1989, 1993). Johnson's approach to field topologies builds on Prestel and Ziegler (1978).

Definition 3.1. A topology on an abelian group $(G, +, -, 0)$ is a **group topology** if $+$ and $-$ are continuous. A topology on a ring $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ is a **ring topology** if it is a group topology on the additive group $(R, +, -, 0)$ and multiplication $\cdot$ is continuous. A topology on a field $(K, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ is **field topology** if it is a ring topology on $(K, +, \cdot, -, 0, 1)$ and multiplicative inversion $^{-1} : K^\times \longrightarrow K^\times$ is continuous (with respect to the topology induced on $K^\times$).

3.1. Filters and filter bases

Given a topology T on a set X, and $x \in X$, denote by $\mathscr{N}_T(x)$ the filter of neighbourhoods of x. For an abelian group G (written additively), the map

$$\begin{aligned} \Psi : \{\text{group topologies on } G\} &\longrightarrow \{\text{filters on } G\} \\ T &\longmapsto \mathscr{N}_T(0) \end{aligned}$$

is injective; i.e. the filter of neighbourhoods of zero determines the topology, since $U \subseteq G$ is T-open if and only if for each $a \in U$, we have $U - a \in \mathscr{N}_T(0)$. In the other direction, a filter τ on G is equal to $\mathscr{N}_T(0)$ for a group topology T on G if and only if both of the following hold:

(i) For every $U \in \tau$, $0 \in \tau$.

(ii) For every $U \in \tau$ there exists $V \in \tau$ such that $V - V \subseteq U$.

This characterizes the image of Ψ. Denote by T_τ the group topology determined by a filter τ satisfying (i) and (ii). Then, by changing the codomain of Ψ, we get a bijection:

$$\begin{aligned} \Psi : \{\text{group topologies on } G\} &\longrightarrow \{\text{filters on } G \text{ satisfying (i,ii)}\} \\ T &\longmapsto \mathscr{N}_T(0) \\ T_\tau &\longmapsfrom \tau. \end{aligned}$$

In other words, (i) and (ii) axiomatize the set of filters equal to $\mathscr{N}_T(0)$, for a group topology T on G, within the set of filters on G. However, following (Prestel and Ziegler, 1978), Johnson works with filter bases instead of filters (see the discussion later in 3.3). Thus we suppose from now on that τ is a filter base, and not *a priori* a filter. Every filter base τ generates a filter $\langle\tau\rangle := \{U \mid \exists V \in \tau : V \subseteq U\}$. Then τ satisfies (i,ii) if and only if $\langle\tau\rangle$ satisfies (i,ii) (with $\langle\tau\rangle$ replacing τ). For a filter base τ satisfying (i) and (ii), denote by $T_\tau = T_{\langle\tau\rangle}$ the group topology it generates. The composition $\Phi := \Psi^{-1} \circ [\tau \mapsto \langle\tau\rangle]$ is a map

$$\begin{aligned} \{\text{group topologies on } G\} &\longleftarrow \{\text{filter bases on } G \text{ satisfying (i,ii)}\} : \Phi \\ T_\tau &\longmapsfrom \tau. \end{aligned}$$

We are interested now in the pre-image under Φ of various classes of topologies. For example, if we are working with a field K instead of simply a group G, we want to understand the preimage under Φ of the field topologies on K.

Consider the following conditions on a filter base τ:

(iii) For any $x \in K^\times$ there exists $U \in \tau$ such that $x \notin U$.

(iv) For every $U \in \tau$ there exists $a \in U \setminus \{0\}$.

(v) For every $x \in K$ and $U \in \tau$, there exists $V \in \tau$ such that $x \cdot U \subseteq V$.

(vi) For every $U \in \tau$ there exists $V \in \tau$ such that $V \cdot V \subseteq U$.

(vii) For every $U \in \tau$ there exists $V \in \tau$ such that $(1+V)^{-1} \subseteq 1+U$.

For example (where in each case I mean to indicate that the set on the right is the preimage under Φ of the set on the left):

$$\begin{aligned}\{\text{Hausdorff group topologies on } G\} &\twoheadleftarrow \{\text{filter bases on } G \text{ satisfying (i–iii)}\}\\ \{\text{non-discrete group topologies on } G\} &\twoheadleftarrow \{\text{filter bases on } G \text{ satisfying (i,ii,iv)}\}\\ \{\text{ring topologies on } R\} &\twoheadleftarrow \{\text{filter bases on } R \text{ satisfying (i,ii,v,vi)}\}\\ \{\text{field topologies on } K\} &\twoheadleftarrow \{\text{filter bases on } K \text{ satisfying (i,ii,v–vii)}\}.\end{aligned}$$

Note that the axioms are interpreted in a group G, ring R, or field K as appropriate. For example, axiom **(iii)** is interpreted in a group G by replacing K with G.

3.2. Bounded sets, locally bounded topologies, and V-topologies

Definition 3.2. Suppose $T = T_\tau$ is a non-discrete Hausdorff ring topology on a field K. A set $B \subseteq K$ is **bounded** if for any $U \in \tau$ there exists $a \in K^\times$ with $a \cdot B \subseteq U$. We denote by $\langle\tau\rangle^\perp$ the set of bounded sets. The topology $T = T_\tau$ is called **locally bounded** if $\langle\tau\rangle \cap \langle\tau\rangle^\perp \neq \emptyset$.

Note that the notions of 'bounded' and 'locally bounded' do not depend on our choice of τ, as long as it generates the given topology. Note also that a locally bounded topology is by definition a non-discrete Hausdorff ring topology.

Remark 3.3. $T_\tau \longmapsto \langle\tau\rangle^\perp$ is injective, i.e. $\langle\tau\rangle^\perp$ determines T_τ.

Definition 3.4. $T = T_\tau$ is a **V-topology** if it is a locally bounded field topology and for all $B \subseteq K^\times$ we have $B \in \langle\tau\rangle^\perp$ if and only if $K \setminus B^{-1} \in \langle\tau\rangle$.

Consider two more axioms for filter bases:

(viii) There exists $U \in \tau$ such that for every $V \in \tau$ there is some $a \in K^\times$ with $a \cdot U \subseteq V$.

(ix) For every $U \in \tau$ there exists $V \in \tau$ such that $(K \setminus U) \cdot (K \setminus U) \subseteq K \setminus V$.

Then we have:

$$\begin{aligned}\{\text{locally bounded topologies on } R\} &\twoheadleftarrow \{\text{filter bases on } R \text{ satisfying (i–vi,viii)}\}\\ \{V\text{-topologies on } K\} &\twoheadleftarrow \{\text{filter bases on } K \text{ satisfying (i–ix)}\}.\end{aligned}$$

Remark 3.5. Valuations, absolute values, and orderings all induce V-topologies. If $\leqslant$ is a non-archimedean ordering, then the topology $T_{\leqslant}$ coincides with T_v where v is the valuation with corresponding valuation ring equal to the $\leqslant$-convex hull of $\mathbb{Q}$. Apart from the trivial topology, distinct V-topologies are incomparable.

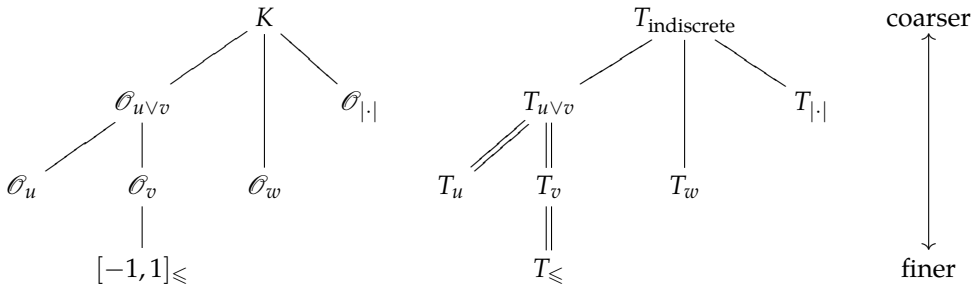


Figure 2: Valuations, orderings, absolute values, and V-topologies

Theorem 3.6 (Fleischer, 1953; Kowalsky and Dürbaum, 1953)**.** *T is a V-topology if and only if T is induced by a valuation or an absolute value.*

Remark 3.7. The moral of this theorem is that the map from valuation rings $\mathcal{O}_v$ to V-topologies T_v is nearly surjective. If we begin with a V-topology T, then (K, T) is locally equivalent to a topological field (K^*, T_v) where T_v is a valuation topology.

3.3. Local equivalence

What is the right framework in which to study a topological field (K, T)? Of course we could simply view (K, T) as a two-sorted first-order structure, with K given the language of rings, and T as a pure set, as well as the membership relation $\in$ between the two sorts. But this is simply too strong a language, and in any case it will be more suitable to study 'filtered fields', which are pairs (K, τ) of a field and a filter base. We consider the fragment of the two-sorted language consisting of those sentences in which universal quantifiers over a variable U from the sort τ may only be followed by positive occurrences of U; and in which existential quantifiers over a variable U from τ may only be followed by negative occurrences of U. Sentences of this form are called **local sentences**. Two filtered fields (K, τ) and (K', τ') are **locally equivalent** if they satisfy the same local sentences. In fact, if τ and τ' are two bases for the filter of neighbourhoods of 0 in the same topology (i.e. $T_\tau = T_{\tau'}$), then (K, τ) and (K, τ') are locally equivalent.

3.4. Definable topologies

What does it mean for a topology to be definable? We say a group topology T is **definable** it there is a definable family τ of sets which is a base for the filter of neighbourhoods of 0 in T, i.e. $T = T_\tau$. We say sets X, Y are co-embeddable if there are $a, b \neq 0$ such that $aX \subseteq Y$ and $bY \subseteq X$.

Proposition 3.8. *Let T be a topology. Then T is definable if and only if there is a definable family forming a base for the filter of open neighbourhoods of 0 in T.*

If T_τ is a locally bounded topology, then $\langle\tau\rangle \cap \langle\tau\rangle^\perp$ is a co-embeddability class. Furthermore, in this case T_τ is definable if and only if there is a definable bounded neighbourhood of 0.

3.5. Dr Johnson's Dictionary: from topologies to rings and back

Let $\mathscr{K}^* = (K^*, \ldots) \succeq (K, \ldots) = \mathscr{K}$ be an elementary extension of an expansion of a field.

Definition 3.9. Let $T = T_\tau$ be a group topology on the additive group of K. Define

$$I_\tau := \bigcap \{U^* \mid U \in \tau\}.$$

This is a subgroup of the additive group of K^*, called the **group of (additive) K-infinitesimals** with respect to τ.

Definition 3.10. Let $T = T_\tau$ be a locally bounded topology on K. Define

$$R_\tau := \bigcup \{U^* \mid U \in \langle\tau\rangle^\perp\}.$$

This is a subring of K^*, called the **ring of bounded elements**.

Remark 3.11. — These definitions do not depend on the choice of filter base τ.

— The subgroup I_τ is type-definable over K. The map $T_\tau \longmapsto I_\tau$ is a bijection from group topologies on K to additive subgroups of K^* that are type-definable over K. (One needs to check that all such subgroups really induce a group topology on K.)

— The subring R_τ is $\bigvee$-definable over K (i.e. a union of sets definable over K). The map $T_\tau \longmapsto R_\tau$ is an injection from locally bounded topologies on K to subrings of K^* that are $\bigvee$-definable over K.

— The subrings coming from locally bounded topologies can be characterized: the proper subrings R of K^* with $K \subseteq R \subset \mathrm{Frac}(R) = K^*$, that are $\bigvee$-definable over K, and moreover that are co-embeddable with a definable set.

— Since this construction is the same one as in Theorem 3.6, the subrings coming from V-topologies are certainly non-trivial valuation rings containing K that are also $\bigvee$-definable over K. This is a characterization.

4. W_n-rings, W_n-topologies, and back to V-topologies

For a type-definable subgroup G, G^{00} denotes the smallest type-definable subgroup of G of bounded (i.e. small) index in G. In NIP theories G^{00} always exists.

4.1. W_n-rings

Let R be an integral domain. Consider the set of R-submodules of R. Equipped with join (given by sum: $M \vee N := M + N$) and meet (given by $M \wedge N := (M \cap N)^{00}$), this is a modular lattice. The **breadth**[(2)] of such a lattice is the largest n such that it admits an embedding from the powerset of $\{1, \ldots, n\}$, construed as a lattice. The breadth of the lattice of R-submodules of R is called the **weight** of R, denoted $\mathrm{wt}(R)$. A ring R is said to be a W_n**-ring** if $\mathrm{wt}(R) \leqslant n$; and R is said to be a W**-ring** if it is a W_n-ring for some $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 4.1. *Suppose that R is an algebra over an infinite field, or more generally that $R/\mathfrak{m}$ is infinite for every maximal ideal $\mathfrak{m} \lhd R$. Then $\mathrm{wt}(R) \leqslant \text{dp-rk}(R)$.*

4.2. W_n-topologies

Let R be W_n-ring, i.e. an integral domain R with weight$(R) \leqslant n$. Then R is non-trivial if $R \neq \mathrm{Frac}(R)$. A W_n-ring R induces a topology $T_R := T_{\tau_R}$ on $\mathrm{Frac}(R)$, where $\tau_R = \{aR \mid a \in K^\times\}$ is the set of principal fractional ideals of R.

Definition 4.2. A W_n**-topological field** is a topological field (K, T) that is locally equivalent to $(\mathrm{Frac}(R), T_R)$, for some non-trivial W_n-ring R. A topological field is W**-topological** if it is W_n-topological for some $n \in \mathbb{N}$.

Remark 4.3. Let R be a non-trivial W_n-ring. Then T_R is a Hausdorff non-discrete ring topology on $K = \mathrm{Frac}(R)$. Both the following are bases for the filter of neighbourhoods of 0 in T_R:

— τ_R (by definition), and

— the set $\{I \trianglelefteq R \mid I \neq \{0\}\}$ of non-zero ideals of R.

Since R is a proper subset of $K := \mathrm{Frac}(R)$, the maximal ideals of R are non-zero. Because R is a W_n-ring, there are only finitely many maximal ideals. Therefore their intersection is non-zero; so the Jacobson radical of R is non-zero. Therefore T_R is a field topology (not just a ring topology).

(2) Breadth is called 'cube rank' in Johnson's preprints.

4.3. Dictionary: from W-topologies to W-rings

Again, let $\mathscr{K}^* = (K^*, \ldots) \succeq (K, \ldots) = \mathscr{K}$ be an elementary extension of an expansion of a field. The next proposition answers the question: which subrings of K^* come from W-topologies on K?

Proposition 4.4. *Let $R \subseteq K^*$ be $\bigvee$-definable over K with $K \subseteq R \subset \mathrm{Frac}(R) = K^*$.*

- **(i)** *$R = R_\tau$ for a locally bounded topology T_τ on K if and only if R is co-embeddable with a definable set.*
- **(ii)** *$R = R_\tau$ for some W_n-topology T_τ if and only if R is a W_n-ring.*
- **(iii)** *$R = R_\tau$ for some V-topology T_τ if and only if R is a valuation ring.*

Parts (i) and (iiii) were already stated above.

Definition 4.5. Let T_τ be a W-topology on K. The **integral closure** of T_τ is the topology $\tilde{T}_\tau$ on K corresponding to the subring of K^* that is the integral closure of R_τ in K^*. The **local components** of T_τ are the topologies T_i on K corresponding to the subrings of K^* that are the localizations of R_τ at maximal ideals.

Remark 4.6. These notions are well-defined: for example, if T_σ is a W-topology, for some filter base σ, then the integral closure of R_σ in K^* is in the image of the dictionary $T_\tau \longmapsto R_\tau$.

Remark 4.7. Note also that a W-topology T_τ has exactly one local component if and only if R_τ is a local ring.

Proposition 4.8. *Let T_τ be a W-topology on K with integral closure $\tilde{T}_\tau$ and local components $T_1, \ldots, T_n$.*

- **(i)** *Indeed there are finitely many local components T_i.*
- **(ii)** *The integral closure $\widetilde{(T_i)}$ of each local component T_i coincides with the corresponding local component $(\tilde{T})_i$ of the integral closure.*
- **(iii)** *The topologies $\tilde{T}_i$ are exactly the V-topologies coarsening T_τ.*
- **(iv)** *T_τ is an 'independent sum' of the T_i, i.e. $(K, T) \longrightarrow \prod_i (K, T_i)$ is an embedding with dense image.*

Lemma 4.9 (Sufficient condition for unique V-topological coarsening). *Let T_τ be a W-topology on K. Suppose one of the following holds:*

- **(i)** *The characteristic of K is not 2 and the squaring map $X^2 : K^\times \longrightarrow K^\times$ is open.*
- **(ii)** *The characteristic of K is $p > 0$ and the Artin–Schreier map $\mathscr{P} : K \longrightarrow K$ is open.*

Then T_τ has a unique V-topological coarsening.

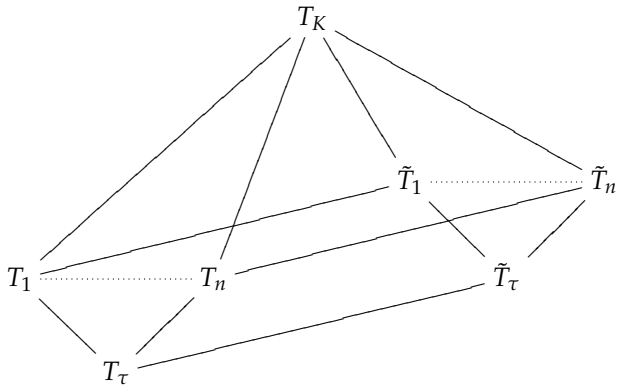


Figure 3: W-topologies and local components

5. Finding the canonical topology

The first attempt to generalise the definition of the topology from the dp-minimal setting (where it was introduced in Johnson, 2016) to the dp-finite setting appeared in Sinclair (2018).

5.1. Broad and narrow sets

Let $\mathscr{K} = (K, \ldots)$ be NIP and 'eliminating $\exists^\infty$'. This latter condition is: for every formula $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ there exists $n \in \mathbb{N}$ such that, for all $\bar{a}$, $\varphi(\bar{a}, \bar{y})$ defines either a set of order $\leqslant n$ or an infinite set.

Definition 5.1. Let $X_1, \ldots, X_n$ be infinite definable subsets of K. A subset $Y \subseteq \prod_i X_i$ is **broad** as a subset of $\prod_i X_i$ if for all $m \in \mathbb{N}$ there exist sets $S_i \subseteq X_i$, for $i = 1, \ldots, n$, such that

(i) $|S_i| = m$, for each i, and

(ii) $\prod_i S_i \subseteq Y$.

If Y is not broad, it is called **narrow**.

Lemma 5.2.

(i) *Narrow subsets of $\prod_i X_i$ form an ideal.*

(ii) *Broadness and narrowness are definable in families.*

Suppose that $\mathscr{K}$ is dp-finite (and eliminates $\exists^\infty$).

Definition 5.3. We say that $X \subseteq K$ is **rank-minimal** if X is infinite, and for every infinite definable subset $Y \subseteq X$ we have $\text{dp-rk}(Y) = \text{dp-rk}(X)$.

Any dp-minimal set is rank-minimal, and any infinite definable set contains a rank-minimal subset.

Lemma 5.4. *Let $X_1, \ldots, X_n \subseteq K$ be rank-minimal. Then a definable subset $Y \subseteq \prod_i X_i$ is broad if and only if* $\text{dp-rk}(Y) = \text{dp-rk}(\prod_i X_i)$.

Given a definable set X, we say that there is **definability of full rank** for X if the condition $\text{dp-rk}(X) = \text{dp-rk}(Y)$ is definable as Y ranges over definable families of subsets of X. Johnson proves definability of full rank for products $\prod_i X_i$ of rank-minimal sets X_i.

5.2. Heavy and light sets

Let $\mathscr{K}$ be dp-finite. A **coordinate configuration** is a tuple $(X_1, \ldots, X_n, P, Y)$ where

(i) each X_i is a rank-minimal definable subset of K,

(ii) $P \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$ is a broad (= full-rank) definable set, and

(iii) the map $P \longrightarrow K$, $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_i x_i$ has finite fibres, and image Y.

Note and define:

$$\text{rank}(X_1, \ldots, X_n, P, Y) := \text{dp-rk}(Y) = \text{dp-rk}(P) = \text{dp-rk}(\prod_i X_i) = \sum_i \text{dp-rk}(X_i).$$

Moreover, definability of full rank on $\prod_i X_i$ implies definability of full rank on P, which in turns implies definability of full rank on Y. Define the **critical rank** ρ of K to be the maximum rank of any coordinate configuration. A critical coordinate configuration is a coordinate configuration of rank ρ.

Definition 5.5. Fix a critical coordinate configuration $(X_1, \ldots, X_n, P, Y)$ on K. A definable subset $S \subseteq K$ is **heavy** if there is $\delta \in K$ such that $\text{dp-rk}(Y \cap (S + \delta)) = \text{dp-rk}(Y)$. Otherwise S is **light**.

In the end, it turns out that 'heavy' is the same as 'full rank'.

Proposition 5.6 (Properties of heavy and light sets). *Let X, Y be definable subsets of K.*

(i) *If X is finite, then X is light.*

(ii) *If X, Y are light, then $X \cup Y$ is light.*

(iii) *If Y is light and $X \subseteq Y$, then X is light.*

(iv) *If $\{D_b\}_b$ is a definable family of subsets of K, then $\{b \mid D_b \text{ is light}\}$ is definable.*

(v) *If X is heavy, then $\alpha \cdot X$ is heavy, for all $\alpha \in K^\times$.*

(vi) *If X is heavy, then $\alpha + X$ is heavy, for all $\alpha \in K$.*

(vii) *If $\text{dp-rk}(X) = \text{dp-rk}(K)$, then X is heavy.*

(viii) *If X, Y are heavy, then so is $X \ominus Y := \{\delta \in K \mid X \cap (Y + \delta) \text{ is heavy}\}$.*

5.3. Finding a definable filter base

Remark 5.7. Let $X, Y \subseteq K$. We have the following implications:

— X, Y definable $\implies$ $X \ominus Y$ definable.

— X, Y heavy $\implies$ $X \ominus Y$ heavy.

Definition 5.8. The family of **canonical basic neighbourhoods** is:

$$\mathscr{B} := \{X \ominus X \mid X \text{ is heavy}\}.$$

Lemma 5.9 (Properties of $\mathscr{B}$, cf subsection 3.1)**.** *$\mathscr{B}$ is a filter base, i.e.*

— $\emptyset \notin \mathscr{B}$,

— *for all $U, V \in \mathscr{B}$ there exists $W \in \mathscr{B}$ with $W \subseteq U \cap V$;*

and

(i) *for every $U \in \mathscr{B}$, $0 \in U$,*

(ii) *for every $U \in \mathscr{B}$ there exists $V \in \mathscr{B}$ with $V - V \subseteq U$,*

(iv) *for every $U \in \mathscr{B}$ there exists $a \in U \setminus \{0\}$,*

(v) *for every $x \in K$ and $U \in \mathscr{B}$, there exists $V \in \mathscr{B}$ such that $x \cdot U \subseteq V$.*

If K is not of finite Morley rank, then

(iii) *For any $x \in K^\times$ there exists $U \in \mathscr{B}$ such that $x \notin U$.*

To conclude: $T_{\mathscr{B}}$ is a non-discrete group topology on the additive group of K, and scalar multiplication is continuous. If K is not of finite Morley rank, then $T_{\mathscr{B}}$ is Hausdorff.

Proof sketch. Let us address just the last point: that if K is not of finite Morley rank then $T_{\mathscr{B}}$ is Hausdorff. It suffices to find a heavy set X such that $X \ominus X$ is a proper subset of K. Using Morley rank > 1 find infinitely many pairwise distinct broad global types. Using the summation map, find two disjoint heavy sets $X, Y \subseteq K$. Note that $X \ominus Y \neq \emptyset$, so let $\delta \in X \ominus Y$. Observe that $\delta \notin (X \cap (Y + \delta)) \ominus (X \cap (Y + \delta))$, so the latter is an element of $\mathscr{B}$ that is a proper subset of K. □

Definition 5.10. $T_{\mathscr{B}}$ is the **canonical topology**.

Define $I_K := I_{\mathscr{B}}$ to be the group of (additive) K-infinitesimals for the canonical topology $T_{\mathscr{B}}$. Then I_K is a K-linear subspace of $\mathbb{K}$ that is type-definable over K.

5.4. Lattice of additive subgroups

Consider a monster model $(\mathbb{K}, \ldots)$ of a complete theory of unstable dp-finite fields. Let Λ be a lattice of (additive) subgroups of $\mathbb{K}$. Recall that in such a lattice the meet operation is given by $G \wedge H = (G \cap H)^{00}$. We write $(*)$ for the conjunction of the following properties of Λ:

— $\{0\} \notin \Lambda$ (doesn't contain the trivial subgroup),

— $\Lambda \setminus \{\mathbb{K}\} \neq \emptyset$ (contains a proper subgroup),

— $\mathbb{K}^\times \cdot \Lambda = \Lambda$, i.e. if $G \in \Lambda$ and $a \in \mathbb{K}^\times$ then $aG \in \Lambda$,

— Λ has finite breadth.

Proposition 5.11. *Let Λ be a lattice of additive subgroups of $\mathbb{K}$ of rank $\leqslant n$ satisfying $(*)$. Then Λ is a basis for the filter of neighbourhoods of 0 in a W_n-topology T_Λ on $\mathbb{K}$.*

Proposition 5.12. *Let κ be such that $|G/G^{00}| < \kappa$ for any type-definable additive subgroup G of $\mathbb{K}$. Let $K \preceq \mathbb{K}$ be a small model with $|K| > \kappa$. Let Λ_K be the lattice of non-zero K-linear subspaces of $\mathbb{K}$ that are type-definable over K. Then Λ_K satisfies $(*)$.*

Proof sketch. There are two subtleties:

— Why is the intersection of two elements of Λ_K a non-trivial subgroup?

— Why is there any element of Λ_K besides $\mathbb{K}$?

The first point is a calculation of dp-rank: any two elements of Λ_K have dp-rank equal to dp-rk$(\mathbb{K})$, and their direct sum has dp-rank twice that. The second point is answered by I_K: this is a non-trivial K-linear subspace of $\mathbb{K}$ that is type-definable over K. Since $\mathbb{K}$ is not stable, $T_{\mathscr{B}}$ is Hausdorff, and thus I_K is non-trivial. □

Therefore, Λ_K defines a W_n-topology T_{Λ_K} on $\mathbb{K}$.

5.5. Conclusion: the topologies coincide

We continue to work with a dp-finite field K which is not of finite Morley rank, and a monster model $\mathbb{K} \succ K$. So far we have two topologies on $\mathbb{K}$: (i) the canonical topology $T_{\mathscr{B}}$ coming from heavy sets, and which we know to be a non-discrete Hausdorff group topology on the additive group of $\mathbb{K}$ (with continuous scalar multiplication); and (ii) the topology T_{Λ_K} coming from the lattice of additive subgroups of $\mathbb{K}$ that are type-definable over K, and which we know to be a W_n-topology. Really this latter topology is not one, but several, depending on the subfield K.

With the following three theorems, Johnson concludes his proof of the dp-finite Shelah conjecture.

Theorem 5.13 (Proposition 6.1, Johnson, 2020b)**.**

(i) *The canonical topology $T_{\mathscr{B}}$ coincides with the topology T_{Λ_K} for a small model $K \prec \mathbb{K}$.*

(ii) *The canonical topology $T_{\mathscr{B}}$ on $\mathbb{K}$ is a definable field topology.*

Proof sketch. **(i)** Let $K \prec \mathbb{K}$ be a small model as in Proposition 5.12. Let T_{Λ_K} be the W-topology on $\mathbb{K}$ defined by the lattice Λ_K, as above. Note that T_{Λ_K} is a W_n-topology, where $n \leqslant \text{dp-rk}(K)$. Let $G \in \langle \Lambda_K \rangle \cap \langle \Lambda_K \rangle^{\perp}$. Let $K' \prec \mathbb{K}$ be another small model, with $K \preceq K'$, such that $\{0\} \subset I_{K'} \subseteq G$. Certainly $I_{K'} \in \langle \Lambda_K \rangle$. A little more work shows that $I_{K'}$ is co-embeddable with a K'-definable set D. Therefore $\{a \cdot D \mid a \neq 0\}$ is a base for the filter of neighbourhoods of T_{Λ_K}, i.e. D defines T_{Λ_K}. Since $I_{K'}$ and D are co-embeddable, we can reduce to the case that D is already in $\mathscr{B}$, in which case T_{Λ_K} is a coarsening of $T_{\mathscr{B}}$. Finally, let $V \in \mathscr{B}$ and find $a \neq 0$ such that $a \cdot D \subseteq V$. Therefore D also defines $T_{\mathscr{B}}$.

(ii) We now know that $T_{\mathscr{B}}$ coincides with T_{Λ_K}, which is a W_n-topology, so in particular a field topology. The definability is as in **(i)**. □

In fact the canonical topology is uniformly definable across all small models:

Theorem 5.14 (Theorem 6.3, Johnson, 2020b)**.** *There is a definable family of sets that forms a basis for the filter of neighbourhoods of* 0 *in the canonical topology on K, for every small model $K \prec \mathbb{K}$.*

Theorem 5.15 (Theorem 6.6, Johnson, 2020b)**.** *The V-topological coarsenings of the canonical topology on K coincide with the definable V-topologies on K.*

Proof sketch. Suppose that T_τ is a definable V-topology, let $B \in \langle \tau \rangle \cap \langle \tau \rangle^{\perp}$ be a bounded neighbourhood of 0. Show that B is heavy. So $B - B$ is a bounded neighbourhood of 0 in T_τ, and it contains the basic neighbourhood $B \ominus B$ of the topology

$T_{\mathscr{B}}$. Therefore T_τ is a coarsening of $T_{\mathscr{B}}$. Finally one shows that each V-topological coarsening of $T_{\mathscr{B}}$ is definable. □

Let $\mathscr{K} = (K, \ldots)$ be an expansion of a field K, which is allowed to be the trivial expansion.

Theorem 5.16 (Johnson's concluding arguments)**.**

(i) *If $\mathscr{K}$ is unstable and dp-finite, then it admits a unique definable V-topology — $(\mathbf{VC})_{<\omega}$.*

(ii) *If (K, v) is a dp-finite valued field, then v is henselian — $(\mathbf{HC})_{<\omega}$.*

(iii) *If K is dp-finite, and neither finite nor algebraically closed nor real closed, then K admits a non-trivial definable henselian valuation — $(\mathbf{SC})_{<\omega}$ + definability.*

(iv) *The conjectural classification of dp-finite theories of fields holds!*

Proof sketch.

(i) Let T_τ be a definable V-topology on K. We have seen that T_τ is a coarsening of the canonical topology on K. Then one must verify the conditions of Lemma 4.9 for the canonical topology (see Proposition 5.17(4) of Johnson, 2019a), so that it has a unique V-topological coarsening.

(ii) As in Proposition 2.41(iii).

(iii) As in Proposition 2.41(v).

(iv) As for Corollary 2.37: the dp-finite Shelah conjecture $(\mathbf{SC})_{<\omega}$ and the work of Halevi–Hasson–Jahnke together yield a characterization of dp-finite fields and a classification of complete dp-finite theories of fields. □

6. Further results and questions

Of course, the big open problem is **(SC)**. We can't say much in the general NIP setting, for a field K or for a valued field (K, v), but we do have the following theorem, which is derived from a theorem about NIP henselian valued fields.

Theorem 6.1 (Anscombe and Jahnke, 2019)**.** *Suppose that* **(SC)** *holds. If a field K is NIP then it is finite or admits a henselian valuation v, such that one of the following holds:*

(I) $(K, v) \models \mathbf{T}_0^{\mathrm{h}}(\mathbb{C}, \Gamma)$*, or equivalently,* $(K, v) \equiv (\mathbb{C}((\Gamma)), v_t)$*,*

(II) $(K, v) \models \mathbf{T}_0^{\mathrm{h}}(\mathbb{R}, \Gamma)$*, or equivalently,* $(K, v) \equiv (\mathbb{R}((\Gamma)), v_t)$*,*

(iii) $(K, v) \models \mathbf{T}^{\mathrm{sd}}_{p,e}(\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}, \Gamma)$, *for* $p \in \mathbb{P}$, $e \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, *and* Γ *p-divisible,*

(iv) (K, v) *is elementarily equivalent to a finite extension of a model of* $\mathbf{T}^{\mathrm{h}}_{(0,p)}(\mathbb{F}_p, \Gamma, \gamma)$, *where* γ *is the minimum positive element of* Γ, *or equivalently,* $(K, v) \equiv (L((\Delta)), w \circ v_t)$ *where* $\Delta = \Gamma/\Gamma_{\gamma+}$ *and* (L, w) *is a finite extension of* $(\mathbb{Q}_p, w)$,

(v) (K, v) *is elementarily equivalent to a finite extension of a model of* $\mathbf{T}^{\mathrm{sd}}_{(0,p),e}(\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}, \Gamma, \gamma)$, *where the image of* γ *is the minimum positive element of* $\Gamma/\Gamma_{\gamma-}$, *and* $\Gamma_{\gamma-}$ *is p-divisible,*

(vi) $(K, v) \models \mathbf{T}^{\mathrm{d}}_{(0,p)}(\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}, \Gamma, \gamma)$, *where* $\Gamma_{\gamma+}$ *is p-divisible.*

Note that (iii) includes the case that K is perfect, in which case $(K, v) \equiv (\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}((\Gamma)), v_t)$.

Proof sketch. In fact we seek a classification of NIP theories of henselian valued fields (K, v), in terms of a given NIP residue field theory. That is, one finds a list of algebraic conditions **A** such that an henselian valued field (K, v) field is NIP if and only if **A** holds and the residue field k_v is NIP. To prove such a theorem, identify **A** principally by repeated application of Kaplan–Scanlon–Wagner (Theorem 2.26). Then prove that under assumptions **A** there is a 'transfer principle' for NIP: if k_v is NIP then (K, v) is NIP. This requires adapting arguments from Jahnke and Simon (2020), in particular proving stable embeddedness of the value group and residue field under assumptions **A**. □

Corollary 6.2. **(SC)** *implies the* **stable fields conjecture***: a stable field is finite or separably closed.*

Proof. This can be read off the classification. □

Finally, in positive characteristic, Johnson resolved the Henselianity Conjecture for NIP fields.

Theorem 6.3 (Johnson's Henselianity Theorem)**.** *Let* (K, v) *be NIP of positive characteristic. Then* v *is henselian.*

References

Anscombe, S. and Jahnke, F. (2019). "Characterizing NIP henselian fields", arXiv: 1911.00309 [math.LO].

Ax, J. and Kochen, S. (1965a). "Diophantine problems over local fields. I", *Amer. J. Math.* **87**, pp. 605–630.

——— (1965b). "Diophantine problems over local fields. II. A complete set of axioms for p-adic number theory", *Amer. J. Math.* **87**, pp. 631–648.

Bélair, L. (1999). "Types dans les corps valués munis d'applications coefficients", *Illinois J. Math.* **43** (2), pp. 410–425.

Delon, F. (1981). "Types sur $\mathbf{C}((X))$", in: *Study Group on Stable Theories* (*Bruno Poizat*), *Second year: 1978/79* (*French*). Secrétariat Math., Paris, Exp. No. 5, 29.

Dolich, A. and Goodrick, J. (2018). "A characterization of strongly dependent ordered Abelian groups", *Rev. Colombiana Mat.* **52** (2), pp. 139–159.

Dolich, A., Goodrick, J., and Lippel, D. (2011). "Dp-minimality: basic facts and examples", *Notre Dame J. Form. Log.* **52** (3), pp. 267–288.

Engler, A. J. and Prestel, A. (2005). *Valued fields*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, pp. x+205.

Farré, R. (2017). "Strong ordered abelian groups and dp-rank", *arXiv:1706.0547v1* [*math.LO*].

Fleischer, I. (1953). "Sur les corps localement bornés", *C. R. Acad. Sci. Paris* **237**, pp. 546–548.

Gurevich, Y. and Schmitt, P. H. (1984). "The theory of ordered abelian groups does not have the independence property", *Trans. Amer. Math. Soc.* **284** (1), pp. 171–182.

Halevi, Y., Hasson, A., and Jahnke, F. (2019). "A conjectural classification of strongly dependent fields", *Bull. Symb. Log.* **25** (2), pp. 182–195.

——— (2020). "Definable V-topologies, Henselianity and NIP", *J. Math. Log.* **20** (2), pp. 2050008, 33.

Halevi, Y. and Palacín, D. (2019). "The dp-rank of abelian groups", *J. Symb. Log.* **84** (3), pp. 957–986.

Jahnke, F. (2016). "When does NIP transfer from fields to henselian expansions?", *preprint, arXiv:1607.02953*.

——— (2018). "An introduction to valued fields", in: *Lectures in model theory*. Münst. Lect. Math. Eur. Math. Soc., Zürich, pp. 119–149.

Jahnke, F. and Koenigsmann, J. (2015). "Uniformly defining p-henselian valuations", *Ann. Pure App. Logic* **166**, pp. 741–754.

Jahnke, F. and Simon, P. (2020). "NIP henselian valued fields", *Arch. Math. Logic* **59** (1-2), pp. 167–178.

Jahnke, F., Simon, P., and Walsberg, E. (2017). "Dp-minimal valued fields", *J. Symb. Log.* **82** (1), pp. 151–165.

Johnson, W. (2016). "Fun with Fields". PhD thesis. University of California, Berkeley.

——— (2019a). "Dp-finite fields II: the canonical topology and its relation to henselianity", arXiv: `1910.05932 [math.LO]`.

——— (2019b). "Dp-finite fields III: inflators and directories", arXiv: `1911.04727 [math.LO]`.

Johnson, W. (2020a). "Dp-finite fields IV: the rank 2 picture", arXiv: 2003.09130 [math.LO].

——— (2020b). "Dp-finite fields V: topological fields of finite weight", arXiv: 2004.14732 [math.LO].

——— (2020c). "Dp-finite fields VI: the dp-finite Shelah conjecture", arXiv: 2005.13989 [math.LO].

——— (2021a). "Dp-finite fields I(A): The infinitesimals", *Ann. Pure Appl. Logic* **172** (6), Paper No. 102947, 39.

——— (2021b). "Dp-finite fields I(B): Positive characteristic", *Ann. Pure Appl. Logic* **172** (6), Paper No. 102949, 33.

Kaplan, I., Scanlon, T., and Wagner, F. O. (2011). "Artin-Schreier extensions in NIP and simple fields", *Israel J. Math.* **185**, pp. 141–153.

Kowalsky, H.-J. and Dürbaum, H. (1953). "Arithmetische Kennzeichnung von Körpertopologien", *J. Reine Angew. Math.* **191**, pp. 135–152.

Kuhlmann, F.-V. (2016). "The algebra and model theory of tame valued fields", *J. Reine Angew. Math.* **719**, pp. 1–43.

Kuhlmann, F.-V. and Pal, K. (2016). "The model theory of separably tame valued fields", *J. Algebra* **447**, pp. 74–108.

Mac Lane, S. (1939a). "Modular fields. I. Separating transcendence bases", *Duke Math. J.* **5** (2), pp. 372–393.

——— (1939b). "Steinitz field towers for modular fields", *Trans. Amer. Math. Soc.* **46**, pp. 23–45.

Macintyre, A. (1971). "On ω_1-categorical theories of fields", *Fund. Math.* **71** (1), 1–25. (errata insert).

Marker, D. (2002). *Model theory*. Vol. 217. Graduate Texts in Mathematics. An introduction. Springer-Verlag, New York, pp. viii+342.

Prestel, A. and Roquette, P. (1984). *Formally p-adic fields*. Vol. 1050. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, pp. v+167.

Prestel, A. and Ziegler, M. (1978). "Model-theoretic methods in the theory of topological fields", *J. Reine Angew. Math.* **299(300)**, pp. 318–341.

Shelah, S. (2009). "Dependent first order theories, continued", *Israel J. Math.* **173**, pp. 1–60.

——— (2014). "Strongly dependent theories", *Israel J. Math.* **204** (1), pp. 1–83.

Simon, P. (2015). *A guide to NIP theories*. Vol. 44. Lecture Notes in Logic. Association for Symbolic Logic, Chicago, IL; Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, pp. vii+156.

Sinclair, P. (2018). "Relationships between model theory and valuations of fields". PhD thesis. McMaster University.

Teichmüller, O. (1936). "p-Algebren", *Deutsche Math.* **1**, pp. 362–388.

VAN DEN DRIES, L. (2014). "Lectures on the model theory of valued fields", in: *Model theory in algebra, analysis and arithmetic*. Vol. 2111. Lecture Notes in Math. Springer, Heidelberg, pp. 55–157.

WARNER, S. (1989). *Topological fields*. Vol. 157. North-Holland Mathematics Studies. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 126. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. xiv+563.

——— (1993). *Topological rings*. Vol. 178. North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, pp. x+498.

Sylvy Anscombe

Université Paris Cité and Sorbonne Université
CNRS, IMJ-PRG, F-75013 Paris, France

E-mail:
sylvy.anscombe@imj-prg.fr

Séminaire BOURBAKI Novembre 2021
73e année, 2021–2022, no 1187, p. 281 à 294
doi: 10.24033/ast.1188

HIGH-DIMENSIONAL EXPANDERS
[*after* Gromov, Kaufman–Kazhdan–Lubotzky, and others]

by **Uli Wagner**

1. Introduction

Informally speaking, expander graphs combine two seemingly contradictory properties: they are very sparse yet at the same time highly connected. There are several different ways of quantifying mathematically what it means for a graph to be "highly connected", leading to different definitions of *expansion* (which, however, turn out to be essentially equivalent). Arguably the most elementary one is *edge expansion*:

Definition 1.1 (Edge Expansion)**.** Let $X = (V, E)$ be a graph.[(1)] For disjoint subsets $S, T \subset V$, let $E(S, T)$ denote the set of edges of X between S and T. We say that X is η-edge expanding, for some $\eta \geqslant 0$, if

$$\frac{|E(S, V \setminus S)|}{|E|} \geqslant \eta \cdot \frac{\min\{|S|, |V \setminus S|}{|V|} \qquad (\forall S \subset V, S \neq \emptyset, V) \tag{1}$$

The *edge expansion* of X (also called *Cheeger constant*) is defined as the optimal η such that (1) holds, i.e.,

$$h(X) := \min_{S\colon \emptyset \neq S \subsetneq V} \frac{|E(S, V \setminus S)|}{\min\{|S|, |V \setminus S|\}} \cdot \frac{|V|}{|E|} \tag{2}$$

By definition, we have $h(X) > 0$ if and only if X is connected.

As a trivial example (which, however, will play an important role later on, for generalizations to higher dimensions), the complete graph K_n on n vertices satisfies

$$h(K_n) = 1 + o(1)$$

(1) Throughout we will assume all graphs to be finite, simple (no loops or multiple edges) and undirected, unless explicitly stated otherwise. For disjoint subsets S, T of V, we will denote by $E(S, T) := \{vw \in E\colon v \in S, w \in T\}$ the set of edges between S and T, and for a vertex a vertex $v \in V$, we denote by $\deg(v) = |\{w \in V \mid vw \in E\}|$ the *degree* (also called *valency*) of v in X.

©Astérisque 438, SMF 2022

Definition 1.2. An infinite family of finite graphs X_n, $n \in \mathbb{N}$, is called a family of (bounded-degree) *expander graphs* if the graphs are of uniformly bounded degree and their edge expansion is uniformly bounded away from zero, i.e., there are $\eta > 0$ and $k \in \mathbb{N}$ such that $h(X_n) \geqslant \eta$ and $\deg_{X_n}(v) \leqslant k$ for all vertices v of X_n and all $n \in \mathbb{N}$.

Families of expander graphs were shown to exist by probabilistic arguments by Kolmogorov and Barzdin (1993) and Pinsker (1973). The first explicit construction of a family expander graphs was given by Margulis (1973) (using Kazhdan's Property (T)), and by now, many different constructions are known. Expansion and expander graphs play an important role in many different areas of mathematics and computer science and are the source of deep connections between them, see for instance the surveys by Hoory, Linial, and Wigderson (2006) or Lubotzky (2012).

The goal of this *exposé* is to offer a glimpse of the emerging theory of *high-dimensional expanders*, which is still in a formative stage, but has already led to a number of striking results and applications (see, e.g., Lubotzky (2018) for a recent survey, including many topics that we will neglect). One interesting aspect is that even the definition of higher-dimensional expansion is not at all obvious and that, unlike in the case of graphs, there is a rich array of mutually non-equivalent notions of high-dimensional expansion, each of interest in its own right and with its own applications.

Here we will mainly focus on three notions of high-dimensional expansion that have a strong topological flavor and that have played an important role in the development of the field in the last decade: the first is *topological expansion* (also called the *topological overlap property*), which is defined in terms of maps from a d-dimensional simplicial complex to $\mathbb{R}^d$; the second is *coboundary expansion*, which generalizes edge-expansion of graphs and provides a quantitative version of vanishing $\mathbb{F}_2$-cohomology of a complex in higher dimensions; the third is *cosystolic expansion*, which is a weakening of coboundary expansion that allows for non-vanishing $\mathbb{F}_2$-cohomology. Infomally, these notions are related by the following series of implications:

coboundary expansion $\Rightarrow$ cosystolic expansion $\Rightarrow$ topological expansion

2. Topological Overlap and Topological Expanders

As a starting point, let us consider the following classical result in discrete geometry, due to Boros and Füredi (1984) (for $d = 2$) and Bárány (1982) (for general d), which at first may seem to have little to do with to expansion:

Theorem 2.1. *Let P be a set of n points in $\mathbb{R}^2$. Then there exists a point $\mathbb{R}^2$ that is contained in at least*

$$\left(\frac{2}{9}+o(1)\right)\binom{n}{3}$$

of the triangles (convex hulls of triples of points) spanned by the points in P.

More generally, for every set P of n points in $\mathbb{R}^d$, there exists a point $\mathbb{R}^d$ that is contained in at least

$$(c_d+o(1))\binom{n}{d+1}$$

of the affine d-simplices (convex hulls of $d+1$ points) spanned by the points in P, where $c_d>0$ is a constant that depends only on d.

Theorem 2.1 has led to a host of related results and applications, see Matoušek (2002, Ch. 9). Determining the optimal value of the constant c_d is a well-known open problem. It is known that $c_2 = 2/9$ is optimal, and an analogous construction in higher dimensions shows $c_d \leqslant \frac{(d+1)!}{(d+1)^{d+1}} = e^{-\Theta(d)}$ (Bukh, Matoušek, and Nivasch, 2010). On the other hand, Bárány's proof yields $c_d \geqslant (d+1)^{-d}$, and despite several later improvements, the best known lower bound is still of the form $e^{-\Theta(d\log d)}$.

Theorem 2.1 can be restated as follows. Let Δ_n^d denote the complete d-dimensional simplicial complex on n vertices (in other words, the d-dimensional skeleton of the $(n-1)$-dimensional simplex). Then, for every *affine* map $F\colon \Delta_n^d \to \mathbb{R}^d$, there is a point $p\in\mathbb{R}^d$ that is contained in the F-images of at least a $(c_d+o(1))$-fraction of the d-dimensional faces of Δ_n^d.

Gromov (2010) showed that this remains true for arbitrary continuous maps:

Theorem 2.2 (Gromov). *For every continuous map $F\colon \Delta_n^d \to \mathbb{R}^d$, there is a point $p\in\mathbb{R}^d$ that is contained in the F-images of at least a $(c_d^{\mathrm{top}}+o(1))$-fraction of the d-dimensional faces of Δ_n^d, where c_d^{top} is a constant depending only on d.*

Gromov's argument yields a lower bound of $c_d \geqslant c_d^{\mathrm{top}} \geqslant \frac{2d}{(d+1)!(d+1)}$, recovering the optimal constant $c_2 = c_2^{\mathrm{top}} = 2/9$ in the plane, and improving on the previously known bounds for c_d by a factor exponential in d for general dimensions; however, the lower bound is still of the form $e^{-\Theta(d\log d)}$ and thus far from the upper bound.

One aspect that makes Theorem 2.2 interesting is that for $d\geqslant 2$ and an arbitrary continuous map $F\colon \Delta_n^d \to \mathbb{R}^d$, there is no obvious candidate for the point p. (By contrast, for $d=1$, we can simply take p to be the median of the images of the vertices; moreover, for *affine* maps, as in Theorem 2.1, one can show that the *centerpoint* of the vertex images, a generalization of the median, works in any dimension d, albeit leading to a non-optimal constant, see Bukh, Matoušek, and Nivasch (2010).)

Gromov's argument[(2)] for the existence of a suitable point p relies on a certain higher-dimensional expansion property of Δ_n^d, *coboundary expansion*, which generalizes edge-expansion of graphs (corresponding to 1-dimensional coboundary expansion); the formal definition will be given in Section 3 below. Interestingly, the notion of coboundary expansion also arose independently (and earlier) in a different context, in the work of Linial and Meshulam (2006) on *random complexes*.

Gromov's proof of Theorem 2.2 is remarkably robust and yields a much more general result as well as a whole new circle of questions:

Definition 2.3. Let X be a finite d-dimensional simplicial complex.

1. We say that X has the *ε-topological overlap property*, for some real parameter $\varepsilon > 0$, if for every continuous map $F\colon X \to \mathbb{R}^d$, there exists a point $p \in \mathbb{R}^d$ that is contained in at least an ε-fraction of the F-images of d-dimensional faces of X.

2. An infinite family of d-dimensional complexes is a family of *topological expanders* if all the complexes in the family have the ε-topological overlap property, for a uniform $\varepsilon > 0$.

In this language, Theorem 2.1 says that for every d, the complete complexes Δ_n^d form a family of geometric expanders (cf., Remark 2.7), and Theorem 2.2 asserts that they form a family of topological expanders. As remarked above, Gromov's proof leads to a more general result, which can be informally summarized as follows (see Theorem 4.2 below for the formal statement): *every d-dimensional complex that has the coboundary expansion property in dimensions $1, \dots, d$ satisfies the topological overlap property*, with an overlap constant ε that depends on d and on the coboundary expansion constants of X. Gromov (2010) showed that various other families of d-dimensional complexes are coboundary expanders, hence topological expanders, e.g., spherical buildings; however, none of these examples are of *bounded degree*, i.e., for each of these complexes, the number of d-faces containing a given vertex (or even containing a given $(d-1)$-face) tends to infinity with the size of the complex.

This naturally raises the question whether there are, for instance, families of 2-dimensional topological expanders that are of *bounded degree*, either *in the weak sense* that every edge is contained in a bounded number of triangles, or *in the strong sense* that every vertex is contained in a bounded number of triangles.

Both of these questions have been answered affirmatively, the first by Lubotzky and Meshulam (2015), using a probabilistic construction based on *random Latin squares*, and the second by Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky (2016), using a construction of *Ramanujan complexes* given by Lubotzky, Samuels, and Vishne (2005).

[(2)] As explained in Guth (2014), the argument can be seen as analogous to the proof of the *Waist Inequality* in Gromov (1983).

Let us state these results. For the first, let $n \in \mathbb{N}$ and let $T_n = V_1 * V_2 * V_3$ be the *complete tripartite* 2*-dimensional complex* on three pairwise disjoint sets V_1, V_2, V_3 of n vertices each. (Thus, a subset $\sigma \subseteq V_1 \sqcup V_2 \sqcup V_3$ is a face of $V_1 * V_2 * V_3$ if and only if $|\sigma \cap V_i| \leqslant 1$ for $i = 1, 2, 3$.) Thus, T_n has $3n$ vertices, $3n^2$ edges (1-simplices), and n^3 triangles (2-simplices).

For our purposes, a *Latin square* is a collection L of triangles of T_n such that every edge of T_n is contained in *exactly one* triangle in L. (Hence, for every vertex $v \in V_i$ of T_n, the *link* $L_v := \{\sigma \setminus v \mid \sigma \in L\}$ forms a *perfect matching* in the complete bipartite graph $V_j * V_k$ on the remaining two vertex sets, $j, k \neq i$.) Let $\mathscr{L}_n$ denote the set of all Latin squares. For $D \in \mathbb{N}$, define a random subcomplex $Y(n, D)$ as follows: Choose D Latin squares $L_1, \ldots, L_D \in \mathscr{L}_n$ independently uniformly at random, and let $Y(n, D)$ be the subcomplex of T_n that has the same 1-skeleton as T_n as whose triangles are exactly the triangles in $L_1 \cup \cdots \cup L_D$.

Theorem 2.4 (Lubotzky and Meshulam). *There exist constants $D \in \mathbb{N}$ and $\varepsilon > 0$ such that asymptotically almost surely (with probability tending to 1 as $n \to \infty$), the random complex $Y(n, D)$ has the ε-topological overlap property. Thus, there exists an infinite family of 2-dimensional topological expanders that are of bounded degree in the weak sense.*

More precisely, Lubotzky and Meshulam show that, asymptotically almost surely, $Y(n, D)$ has 2-dimensional coboundary expansion at least η, for some other constant $\eta > 0$. The topological overlap property then follows from Gromov's result (since the 1-skeleton of $Y(n, D)$, which is a complete tripartite graph, is a very good edge expander).

The second construction, of a family of 2-dimensional topologocial expanders that are of bounded degree in the strong sense that the number of triangles containing a given vertex is bounded by some uniform constant for all complexes is the family, is considerably more elaborate, and we will treat it mostly as a "black box", focusing on the properties used in Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky (2016) to prove the topological overlap property.

Let q be a large but fixed prime power. For an integer $r \geqslant 2$. The *spherical building* $S(r, q)$ is defined as the complex of *flags* of nonempty proper linear subspaces of $\mathbb{F}_q^r$, i.e., the vertices of $S(d, q)$ are the nonempty proper linear subspaces $W \subset \mathbb{F}_q^r$, and a set $\{W_0, W_1, \ldots, W_k\}$ of subspaces forms a k-dimensional simplex of $S(r, q)$ if and only if $W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_k$ (possibly after reordering the W_i). Thus, $S(r, q)$ is a simplicial complex of dimension $r - 2$.

Let us say that a finite 3-dimensional complex X is *magical* if it has the following properties:

1. For every vertex v of X, the *link* X_v of v in X is isomorphic to $S(4, q)$. It follows that the 1-skeleton $X^{(1)}$ of X is a k-regular graph, where $k \sim q^4$ is the number of vertices of $S(4, q)$ (proper nonempty subspaces of $\mathbb{F}_q^4$).

2. The second-largest eigenvalue of the adjacency matrix of the 1-skeleton $X^{(1)}$ is at most $6\sqrt{k}$.

An infinite family of magical 3-dimensional complexes is constructed in Lubotzky, Samuels, and Vishne (2005). (Using more proper terminology, these complexes are 3-dimensional non-partite Ramanujan complexes obtained as (non-partite) quotients of the Bruhat–Tits building of type $\tilde{A}_2$ associated with the local field $\mathbb{F}_q((t))$.)

The main result of Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky (2016) can be stated as follows:

Theorem 2.5 (Kaufman, Kazhdan, and Lubotzky). *There exist constants $\varepsilon > 0$ and $q_0 \in \mathbb{N}$ such that for every prime power $q \geqslant q_0$ and every magical 3-dimensional complex as defined above, the 2-skeleton $X^{(2)}$ has the ε-topological overlap property. Thus, there exists an infinite family of 2-dimensional topological expanders that are of bounded degree in the strong sense.*

In the rest this exposé, we will discuss some of the concepts and ideas that underlie the proofs of Theorems 2.2, 2.4, and 2.5, in particular the notions of *coboundary expansion* (and a technical, but important, generalization, *cosystolic expansion*), and we will provide an outline of the proof of Gromov's *Topological Overlap Theorem* that coboundary expansion implies topological overlap.

Remark 2.6. Both Theorems 2.4 and Theorem 2.5 have been generalized to arbitrary dimension d, the former by Lubotzky, Luria, and Rosenthal (2019) (building on the breakthrough work of Keevash (2014) on designs) and the latter by Evra and Kaufman (2016).

Remark 2.7. If, in Definition 2.3, we additionally require all maps to be affine, we arrive at the analogous notions of the *geometric overlap property* and families of *geometric expanders*. Fox et al. (2012) provide several constructions (both probabilistic ones and deterministic ones based on Ramanujan complexes) showing that, for every d, there exist infinite families of geometric expanders that are of bounded degree in the strong sense.

3. Coboundary and Cosystolic Expansion

Let X be a finite d-dimensional simplicial complex. We denote by $X(k)$ the set of k-dimensional faces (or k-faces) of X, for $k \in \{-1, 0, \dots, d\}$, and by $C^k(X) := C^k(X; \mathbb{F}_2)$ be the space of k-dimensional simplicial cochains with coefficients in $\mathbb{F}_2$, i.e., the space of functions $f\colon X(k) \to \mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$. Equivalently, we can view $\mathbb{F}_2$-valued cochains as subsets of $X(k)$ via the correspondence $f \leftrightarrow S = \operatorname{supp}(f) \subseteq X(k)$.
Let

$$0 \longrightarrow \underbrace{C^{-1}(X)}_{\cong \mathbb{F}_2} \xrightarrow{\delta} C^0(X) \xrightarrow{\delta} C^1(X) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} C^d(X) \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

be the *simplicial cochain complex*[3] of X, where the *coboundary operator* $\delta\colon C^{k-1}(X) \to C^k(X)$ is given by

$$\delta f(\sigma) := \sum_{\tau \in X(k-1), \tau \subset \sigma} f(\tau) \qquad (\sigma \in X(k)) \tag{4}$$

The simple but fundamental fact underlying the definition of cohomology is that the composition $\delta \circ \delta$ of consecutive coboundary operators is zero, i.e., the space $B^k(X) := \mathrm{im}(\delta\colon C^{k-1}(X) \to C^k(X))$ of *k-dimensional coboundaries* is a subspace of the space $Z^k(X) := \ker(\delta\colon C^k(X) \to C^{k+1}(X))$ of *k-dimensional cocycles*; the quotient $H^k(X) := Z^k(X)/B^k(X)$ is the k-dimensional (reduced) *cohomology group* of X (with $\mathbb{F}_2$-coefficients) of X.

In particular, vanishing cohomology $H^k(X) = 0$ means that if $f \in C^k(X)$ satisfies $\delta f = 0$ then $f \in B^k(X)$. The notion of coboundary expansion provides a way of quantifying this, saying, roughly, that if $f \in C^k(X)$ is "far from" $B^k(X)$ then "δf must be "large". To make this precise, we need to be able measure the "size" of a cochain.

Definition 3.1. Suppose that we have a discrete probability measure π_k on the set $X(k)$ of k-simplices of X, i.e., an assignment $X(k) \ni \tau \mapsto \pi_k(\tau) \geqslant 0$ with $\sum_{\tau \in X(k)} \pi_k(\tau) = 1$. Then the *weighted Hamming norm* (with respect to π_k) of a cochain $f \in C^k(X)$ is defined as

$$\|f\| = \|f\|_{\pi_k} := \pi_k(\mathrm{supp}(f)) = \sum_{\tau \in \mathrm{supp}(f)} \pi_k(\tau)$$

In what follows, we will mainly use two special cases:

1. (*Uniform weights*) The uniform distribution $\pi_k(\sigma) = 1/|X(k)|$.
2. (*Garland weights*) The distribution on $X(k)$ given by

$$\pi_k(\tau) = \frac{|\sigma \in X(d) \mid \tau \subseteq \sigma\}|}{|X(d)| \cdot \binom{d+1}{k+1}}.$$

   This corresponds to choosing a random $\tau \in X(k)$ by first chosing $\sigma \in X(d)$ uniformly at random and then choosing τ uniformly at random among the k-simplices contained in σ.

In what follows, suppose we have fixed a weighted Hamming norm on $C^k(X)$, for k between -1 and d.

[3] More precisely, we work with the *augmented* cellular cochain complex of X, unless stated otherwise, i.e., we consider X to have a unique (-1)-dimensional cell, the empty cell $\emptyset$, which is incident to every vertex of X.

Definition 3.2 (Cofilling/Coisoperimetric Inequality)**.** Let $L > 0$. Given $b \in B^k(X)$, we call $f \in C^{k-1}(X)$ a *cofilling* for b if $\delta f = b$. We say that X satisfies an *L-cofilling inequality* (or *coisoperimetric inequality*) in dimension k if, for every $b \in B^k(X)$, there exists a cofiling $f \in C^{k-1}(X)$ such that $\|f\| \leqslant L\|b\|$.

Any two cofillings of a given coboundary differ by a cocycle. Thus, X satisfies an L-cofilling inequality in dimension k if and only if

$$\|\delta f\| \geqslant \frac{1}{L} \cdot \min\{\|f + z\| : z \in Z^{k-1}(X)\} \qquad \text{for all} \quad f \in C^{k-1}(X). \tag{5}$$

We can strengthen (5) by replacing cocycles with coboundaries and obtain a condition that also allows us to draw conclusions about the cohomology of X. For $f \in C^{k-1}(X)$, let

$$\|[f]\| := \min\{\|f + \delta g\| : g \in C^{k-2}(X)\} \tag{6}$$

denote the distance (with respect to the norm $\|\cdot\|$) of f to the space $B^{k-1}(X)$ of coboundaries.

Definition 3.3 (Coboundary Expansion)**.** Let $\eta > 0$. We say that X is *η-expanding* in dimension k, if for every $(k-1)$-cochain $f \in C^{k-1}(X)$,

$$\|\delta f\| \geqslant \eta \cdot \|[f]\|. \tag{7}$$

The k-dimensional coboundary expansion (or Cheeger constant) of X is defined as

$$h^{(k)}(X) := \min_{f \in C^{k-1} \setminus B^{k-1}} \frac{\|\delta f\|}{\|[f]\|}$$

Example 3.4. With respect to uniform weight, 1-dimensional coboundary expansion is the same as edge expansion of graphs as defined in the introduction, i.e., $h^{(1)}(X) = h(X^{(1)})$.

Lemma 3.5. *Let $\eta > 0$, and assume that $\|f\| > 0$ for all $f \in C^{k-1}(X) \setminus \{0\}$ (equivalently, that all simplices have positive weight). A complex X is η-expanding in dimension k if and only if $H^{k-1}(X) = 0$ and X satisfies a $1/\eta$-coisoperimetric inequality in dimension k.*

Proof. Suppose that X is η-expanding in dimension k. Clearly, (7) implies (5), i.e., X satisfies a $1/\eta$-cofilling inequality. Moreover, if $f \in C^{k-1}(X) \setminus B^{k-1}(X)$ then, by our assumption on the weights, $\|[f]\| > 0$, hence $\|\delta f\| > 0$, hence $f \notin Z^{k-1}(X)$. Thus, $Z^{k-1}(X) = B^{k-1}(X)$, i.e., $H^{k-1}(X) = 0$.

Conversely, assume that $H^{k-1}(X) = 0$. Then $Z^{k-1}(X) = B^{k-1}(X)$, so (7) and (5) are equivalent. □

Definition 3.6. An infinite family of d-dimensional simplicial complexes is a family of coboundary expanders if $h^{(k)}(X) \geqslant \eta$ for all complexes in the family and all $1 \leqslant k \leqslant d$, for some constant $\eta > 0$.

The following lemma, which first observed by Linial and Meshulam (2006) and Meshulam and Wallach (2009) in their study of *random complexes* and later, independently, by Gromov (2010), provides a first example of such a family:

Lemma 3.7. *Let Δ_n^d be the complete d-dimensional complex on n vertices.* (*Note that uniform weights and Garland weights agree in this case.*)

Δ_n^d has coboundary expansion $h^{(k)}(\Delta_n^d) \geqslant 1$ for $1 \leqslant k \leqslant d$.

Proof. Because we are working with uniform weights and the k-skeleton of Δ_n^d equals Δ_n^k, it is enough to consider the case $d = k$. Given $b \in B^d(\Delta_n^d)$ and a vertex v, define $b_v \in C^{d-1}(\Delta_n^d)$ by $b_v(\tau) = b(\tau \cup \{v\})$ if $v \notin \tau$, and $b_v(\tau) = 0$ otherwise. Then $\delta b_v = b$ for all v, and $\mathbb{E}_v \|b_v\| = \|b\|$. Thus, Δ_n^d satisfies a coisoperimetric inequality with constant 1, and since $H^{d-1}(\Delta_n^d) = 0$, this is equivalent to coboundary expansion 1, by the preceding lemma. □

Definition 3.8 (Large Cosystoles). Let $\vartheta > 0$. We say that a simplical complex X has *ϑ-large cosystoles* in dimension j if $\|\alpha\| \geqslant \vartheta$ for every $\alpha \in Z^j(X) \setminus B^j(X)$.

Example 3.9. Consider the case $k = 1$, with the normalized Hamming norm. In this case, η-expansion in dimension 1 corresponds to η-edge expansion of a graph (the 1-skeleton of the complex). An L-cofilling inequality in dimension 1 means that every connected component of the graph is $1/L$-edge expanding. Having ϑ-large cosystoles in dimension 0 means that every connected component contains at least a ϑ-fraction of the vertices.

4. Cosystolic Expansion implies Topological Overlap

Local Sparsity of X. — For the formal statement of the overlap theorem, we need one more technical condition on X.

Definition 4.1. (Local Sparsity) Let $\varepsilon > 0$. We say that X is *locally ε-sparse* if

$$\|\{\sigma \in X(k) \mid v \in \sigma\}\| \leqslant \varepsilon$$

for every vertex v of X and $0 \leqslant k \leqslant d$, i.e., v is contained in at most an ε-fraction of k-simplices of X.

We are now ready to state Gromov's theorem.

Theorem 4.2 (Gromov's Topological Overlap Theorem). *For every $d \geqslant 1$ and $L, \vartheta > 0$ there exists $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(d, L, \vartheta) > 0$ such that the following holds:*

Let X is a finite d-dimensional simplicial complex, and suppose that

1. *X satisfies a L-cofilling inequality in dimensions $1, \dots, d$;*
2. *X has ϑ-large cosystoles in dimensions $0, \dots, d-1$; and*
3. *X is locally ε-sparse for some $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.*

Then for every continuous map $F\colon X \to \mathbb{R}^d$ there exists a point $p \in M$ such that

$$\|\{\sigma \in X(d) \mid p \in f(\sigma)\}\| \geqslant \mu, \tag{8}$$

where $\mu = \mu(d, \varepsilon, L, \vartheta) > 0$ is a constant that depends only on d, ε, L, and ϑ.

Remark 4.3. The conclusion of the theorem remains true if $\mathbb{R}^d$ is replaced by an arbitrary piecewise-linear manifold M, with a constant μ that is independent of M—it depends only on whether a map $X \to M$ may be surjective (which can only happen if M is bounded) or not.

We can view the map $F\colon X \to \mathbb{R}^d$ as a map $F\colon X \to S^d$ whose image avoids some point v_0 of S^d. Moreover, by a straightforward compactness argument, we may assume, without loss of generality, that the F map is piecewise linear with respect to the standard structure of S^d as a piecewise linear manifold, i.e., that F is a simplicial map with respect to some subdivision of X and some triangulation of S^d that is piecewise linearly homeomorphic to $\partial\Delta^{d+1}$, the boundary of the $(d+1)$-dimensional simplex. By standard general position arguments from piecewise linear topology, we may then assume that there exists another triangulation T of S^d such that F is in *general position* with respect to T, so that for all simplices σ of X and τ of T, $F(\sigma)$ and τ intersect transversely in a finite number of points if $\dim\sigma + \dim\tau = d$, and $F(\sigma) \cap \tau = \emptyset$ if $\dim\sigma + \dim\tau < d$. This allows us to define, for any k-simplex τ of T, a $(d-k)$-dimensional cochain $F^{\pitchfork}(\tau) \in C^{d-k}(X)$ that assigns, to every $(d-k)$-simplex σ of X the *algebraic intersection number*

$$F^{\pitchfork}(\tau)(\sigma) := |\sigma \cap F^{-1}(\tau)| \pmod 2$$

By linearity, we can extend this to an *intersection number homomorphism*

$$F^{\pitchfork}\colon C_k(T) \to C^{d-k}(X), \tag{9}$$

from arbitary *k-chains* ($\mathbb{F}_2$-linear combinations of k-simplices) of T to cochains of X.

It is straightforward to check that $F^{\pitchfork}$ is a *chain-cochain map*, i.e., that it commutes with the boundary and coboundary operators in the following sense:

Lemma 4.4. *For every $0 \leqslant k \leqslant d$ and every k-chain $c \in C_k(T)$, $F^{\pitchfork}(\partial c) = \delta F^{\pitchfork}(c)$.*

Moreover, by subdividing T further if necessary and using the local sparsity of X, it is easy to see that we may assume that T is *sufficiently fine* in the sense that, for every $k > 0$ and every k-simplex τ of T,

$$\|F^{\pitchfork}(\tau)\| \leqslant d\varepsilon \tag{10}$$

Proof of Theorem 4.2. Let μ and ε_0 be parameters that we will determine in the course of the proof. We assume that X satisfies the assumptions of the theorem, in particular that it is locally ε-sparse for some $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Let $F\colon X \to \mathbb{R}^d \subset S^d$ be a map. By the discussion above, we may assume that F is piecewise linear and in general position with respect to a sufficiently fine triangulation T of S^d and that the image of F avoids some vertex v_0 of the triangulation, hence

$$F^{\pitchfork}(v_0) = 0.$$

We wish to show that there is a vertex v of T such that the intersection number cochain $F^{\pitchfork}(v) \in C^d(X)$ satisfies $\|F^{\pitchfork}(v)\| \geqslant \mu$. We assume that this is not the case, i.e., that

$$\|F^{\pitchfork}(v)\| < \mu$$

for every vertex v of T, and we proceed to derive a contradiction.

To this end, we will inductively construct a *chain-cochain homotopy* $H\colon C_*(T) \to C^{d-1-*}(X)$ that shows that $F^{\pitchfork}$ is *nulhomotopic*; that is, that is, for every k, we will construct a homomorphism

$$H\colon C_k(T) \to C^{d-1-k}(X)$$

such that

$$F^{\pitchfork}(c) = H(\partial c) + \delta H(c) \tag{11}$$

for $c \in C_k(T)$. We stress that for this proof, we work with *non-augmented* chain and cochain complexes as in (**??**), i.e., we use the convention that $C^{-1}(X) = 0$. It follows that $H(c) = 0$ for $c \in C_d(M)$.

The chain-cochain nullhomotopy H will yield the desired contradiction: Given the triangulation T of S^d, the formal sum of all d-dimensional simplices of T is a d-dimensional cycle ζ (which represents the fundamental class $[S^d] \in H_d(S^d)$). Note that $F^{\pitchfork}(\zeta) = \mathbf{1} \in C^0(X)$ (every vertex v of X is mapped into the interior of a unique d-simplex of M). This is a contradiction, since

$$0 \neq \mathbf{1} = F^{\pitchfork}(\zeta) = \underbrace{H(\partial\zeta)}_{=0 \text{ since } \partial\zeta=0} + \delta \underbrace{H(\zeta)}_{=0} = 0.$$

To complete the proof, it remains construct H, which we will do by induction on k.

For $k = 0$, we observe that for every vertex v of T, the cochain $F^\Phi(v)$ is a coboundary: Since S^d is connected, hence there is a 1-chain (indeed, a path) c in T with $\partial c = v - v_0$, hence $F^\Phi(v) = F^\Phi(v) - F^\Phi(v_0) = F^\Phi(v - v_0) = \delta F^\Phi(c)$. For every vertex v of T, we set $H(v)$ to be a cofilling of $F^\Phi(v) - G(v)$ of minimal norm (if there is more than one minimal cofilling, we choose one arbitrarily). Thus, the homotopy condition (11) is satisfied for 0-chains (since chains and cochains of dimension less than zero or larger than d are, by convention, zero).

By choice of $H(v)$ and the coisoperimetric assumption on X, we have

$$\|H(v)\| \leqslant L \underbrace{\|F^\Phi(v)\|}_{<\mu} < s_0 := L\mu.$$

Inductively, assume that we have already defined H on chains of dimension less than k and that $\|H(\rho)\| < s_i$ for every i-simplex of T, $i < k$, where s_i is a parameter that we will determine inductively. Thus, if τ is a k-simplex of T, then $H(\partial\tau)$ is already defined and has norm less than $(k+1)s_{k-1}$.

Moreover, we have $\|F^\Phi(\tau)\| \leqslant d\varepsilon$, by the sparsity assumption on X and since the triangulation T is sufficiently fine.

By construction, $z := F^\Phi(\tau) - H(\partial\tau)$ is a $(d-k)$-dimensional cocycle, and

$$\|z\| \leqslant \|F^\Phi(\tau) - H(\partial\tau)\| < d\varepsilon + (k+1)s_{k-1}. \tag{12}$$

If z is cohomologically trivial, i.e., $z \in B^{d-k}(X)$, then we define $H(\tau)$ to be a minimal cofilling of z and extend H to $C_k(T)$ by linearity. By assumption on X, we get

$$\|H(\tau)\| < s_k := L\left(d\varepsilon + (k+1)s_{k-1}\right).$$

Note that this recursion yields $s_k = d\varepsilon(L + \cdots + L^k) + (k+1)!L^{k+1}\mu$.

If z is nontrivial,[(4)] then by the assumption on large cosystoles and (12),

$$\vartheta \leqslant \|z\| < d\varepsilon + (k+1)s_{k-1},$$

which is a contradiction if we choose μ and ε_0 (and hence ε) sufficiently small with respect to d, L and ϑ. □

[(4)] Note that in the special case that X is connected and $k = d$, the only nontrivial 0-cocycle is $z = \mathbf{1}^0_X$, hence $\|z\| = 1$.

References

Bárány, I. (1982). "A generalization of Carathéodory's theorem", *Discrete Math.* **40** (2-3), pp. 141–152.

Boros, E. and Füredi, Z. (1984). "The number of triangles covering the center of an n-set", *Geom. Dedicata* **17** (1), pp. 69–77.

Bukh, B., Matoušek, J., and Nivasch, G. (2010). "Stabbing simplices by points and flats", *Discrete Comput. Geom.* **43** (2), pp. 321–338.

Evra, S. and Kaufman, T. (2016). "Bounded degree cosystolic expanders of every dimension". In: *STOC'16—Proceedings of the 48th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*. ACM, New York, pp. 36–48.

Fox, J. et al. (2012). "Overlap properties of geometric expanders", *J. Reine Angew. Math.* **671**, pp. 49–83.

Gromov, M. (1983). "Filling Riemannian manifolds", *J. Differential Geom.* **18** (1), pp. 1–147.

——— (2010). "Singularities, expanders and topology of maps. Part 2: From combinatorics to topology via algebraic isoperimetry", *Geom. Funct. Anal.* **20** (2), pp. 416–526.

Guth, L. (2014). "The waist inequality in Gromov's work", in: *The Abel Prize 2008–2012*. Ed. by H. Holden and R. Piene. Springer, Heidelberg, pp. 181–195.

Hoory, S., Linial, N., and Wigderson, A. (2006). "Expander graphs and their applications", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **43** (4), pp. 439–561.

Kaufman, T., Kazhdan, D., and Lubotzky, A. (2016). "Isoperimetric inequalities for Ramanujan complexes and topological expanders", *Geom. Funct. Anal.* **26** (1), pp. 250–287.

Keevash, P. (2014). "The existence of designs". Preprint, `https://arxiv.org/abs/1401.3665`.

Kolmogorov, A. N. and Barzdin, Y. M. (1993). "On the realization of networks in three-dimensional space", in: *Selected Works of Kolmogorov*. Ed. by A. N. Shiryaev. Vol. 3. Kluwer Academic Publishers.

Linial, N. and Meshulam, R. (2006). "Homological connectivity of random 2-complexes", *Combinatorica* **26** (4), pp. 475–487.

Lubotzky, A. (2012). "Expander graphs in pure and applied mathematics", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **49** (1), pp. 113–162.

——— (2018). "High dimensional expanders". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp. 705–730.

Lubotzky, A., Luria, Z., and Rosenthal, R. (2019). "Random Steiner systems and bounded degree coboundary expanders of every dimension", *Discrete Comput. Geom.* **62** (4), pp. 813–831.

Lubotzky, A. and Meshulam, R. (2015). "Random Latin squares and 2-dimensional expanders", *Adv. Math.* **272**, pp. 743–760.

Lubotzky, A., Samuels, B., and Vishne, U. (2005). "Explicit constructions of Ramanujan complexes of type $\tilde{A}_d$", *European J. Combin.* **26** (6), pp. 965–993.

Margulis, G. A. (1973). "Explicit constructions of expanders", *Problemy Peredači Informacii* **9** (4), pp. 71–80.

Matoušek, J. (2002). *Lectures on discrete geometry*. Vol. 212. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, pp. xvi+481.

Meshulam, R. and Wallach, N. (2009). "Homological connectivity of random k-dimensional complexes", *Random Structures Algorithms* **34** (3), pp. 408–417.

Pinsker, M. S. (1973). "On the complexity of a concentrator". In: *7th International Teletraffic Conference, Stockholm*, pp. 318/1–318/4.

Uli Wagner

IST Austria, Am Campus 1,
3400 Klosterneuburg, Austria

E-mail: uli@ist.ac.at

Séminaire BOURBAKI Janvier 2022
73e année, 2021–2022, no 1188, p. 295 à 333
doi: 10.24033/ast.1189

AVERAGE DISTORTION EMBEDDINGS, NONLINEAR SPECTRAL GAPS, AND A METRIC JOHN THEOREM

[*after* Assaf Naor]

by **Alexandros Eskenazis**

1. Introduction

Preamble. The main purpose of this survey is to present a concise exposition of some applications of the theory of nonlinear spectral gaps which can serve as a roadmap for newcomers in the field and experts alike. Having as our main focus a result (Theorem 1.1) of Naor (2021), we shall highlight some ideas which have played a pivotal role in recent developments and mention connections with classical geometric and algorithmic questions. The material of this paper is a mere expository repackaging of a selection of such developments and any difference in presentation is solely cosmetic.

Let $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$, $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ be two metric spaces and $D \in [1, \infty)$. We say that $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ embeds into $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ with bi-Lipschitz distortion at most D if there exists a scaling factor $\sigma \in (0, \infty)$ and a map $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ such that

$$\forall\, x, y \in \mathcal{M}, \qquad \sigma d_{\mathcal{M}}(x, y) \leqslant d_{\mathcal{N}}\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \sigma D d_{\mathcal{M}}(x, y). \tag{1}$$

Following Naor (2021), we say that an *infinite*[(1)] metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ embeds into $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ with q-average distortion D, where $q > 0$, if for every Borel probability measure μ on $\mathcal{M}$, there exists $\sigma = \sigma_\mu \in (0, \infty)$ and a σD-Lipschitz map $f = f_\mu : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ with

$$\iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} d_{\mathcal{N}}\big(f(x), f(y)\big)^q \, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\mu(y) \geqslant \sigma^q \iint_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} d_{\mathcal{M}}(x, y)^q \, \mathrm{d}\mu(x)\, \mathrm{d}\mu(y). \tag{2}$$

If the target space $\mathcal{N}$ is a normed space, the parameter σ_μ can be omitted by rescaling.

The author was supported by a Junior Research Fellowship from Trinity College, Cambridge.

(1) The study of average distortion embeddings for *finite* metric spaces goes back at least to the work of Rabinovich (2003) (see also Abraham, Bartal, and Neiman, 2011 for various related notions).

©Astérisque 438, SMF 2022

The θ-snowflake of a metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ is the metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}}^{\theta})$, $\theta \in (0,1]$. The primary goal of this survey is to present a self-contained proof of the following deep embedding theorem of Naor (2021) in which asymptotically optimal bounds for the quadratic average distortion (i.e. corresponding to exponent $q = 2$ in equation (2) above) of $\frac{1}{2}$-snowflakes of finite-dimensional normed spaces into the separable Hilbert space ℓ_2 are established. The, so called, *average John theorem* reads as follows.

Theorem 1.1 (Average John). *There exists a universal constant $C \in (0,\infty)$ such that the $\frac{1}{2}$-snowflake of any finite-dimensional normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ admits an embedding into ℓ_2 with quadratic average distortion at most $C\sqrt{\log(\dim(X)+1)}$.*

Theorem 1.1 is a metric counterpart of a classical theorem of John (1948), asserting that any finite-dimensional normed space embeds into ℓ_2 with bi-Lipschitz distortion at most $\sqrt{\dim(X)}$. This statement is famously optimal, e.g. for $X = \ell_1^d$ or $X = \ell_\infty^d$, yet Naor's theorem shows that an exponential improvement of the relevant distortion is possible if one relaxes the pointwise lower bound of the bi-Lipschitz condition (1) to the averaged requirement (2) and replaces the normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ by its $\frac{1}{2}$-snowflake. Before explaining the ideas that come into the proof of Theorem 1.1, it is worth pointing out that both of these modifications of John's theorem are necessary in order to deduce bounds for the distortion which are subpolynomial on $\dim(X)$. In fact, the average John theorem is optimal in three distinct ways.

• If one is interested in bi-Lipschitz embeddings of snowflakes of normed spaces X into ℓ_2 in lieu of average distortion embeddings, then the relevant distortion has to depend polynomially on $\dim(X)$. Indeed, in Naor (2021, Lemma 2), it is shown that the bi-Lipschitz distortion required to embed the θ-snowflake of ℓ_∞^d into ℓ_2 is at least a constant multiple of $d^{\theta/2}$. The proof relies on metric cotype.

• The exponent $\frac{1}{2}$ is the least amount of snowflaking that one needs to perform in order to obtain embeddings whose quadratic average distortion depends subpolynomially on $\dim(X)$. More specifically, in Naor (2021, Lemma 13) it is shown that for any $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}]$, the quadratic average distortion required to embed the $(\frac{1}{2}+\varepsilon)$-snowflake of ℓ_1^d into ℓ_2 is at least a constant multiple of d^{ε}. The proof relies on Enflo type.

• Finally, $\sqrt{\log\dim(X)}$ is the asymptotically optimal bound for the quadratic average distortion required to embed the $\frac{1}{2}$-snowflake of an arbitrary finite-dimensional space X into ℓ_2. This will be further explained (for $X = \ell_\infty^d$) in Remark 6.2 below.

In the rest of the introduction, we shall describe the strategy of the proof of the average John theorem and introduce the necessary background.

1.1. Nonlinear spectral gaps

Let $\triangle^{n-1} = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \in [0,1]^n : \sum_{i=1}^n \pi_i = 1\}$ be the n-dimensional standard simplex. Consider a (row)-stochastic matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(\mathbb{R})$, that is, a matrix for which $(a_{i1}, \dots, a_{in}) \in \triangle^{n-1}$ for every $i \in \{1, \dots, n\}$. Given a vector $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) \in \triangle^{n-1}$, we say that the matrix A is π-reversible if $\pi_i a_{ij} = \pi_j a_{ji}$ for every $i, j \in \{1, \dots, n\}$. These objects admit a classical probabilistic interpretation. Consider the discrete-time homogeneous Markov chain $(X_t)_{t \geqslant 0}$ on the state space $\{1, \dots, n\}$ with transition probabilities given by

$$\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}, \qquad \mathbb{P}\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = a_{ij}, \tag{3}$$

where $t \geqslant 0$. If the transition matrix A is π-reversible, then π is also a stationary distribution for the process $(X_t)_{t \geqslant 0}$, that is, if X_0 is distributed according to π then so is X_t for any $t \geqslant 1$. This is expressed algebraically by the matrix identity $\pi A = \pi$, where π is thought of as a row-vector. In the probabilistic framework above, reversibility simply means that the Markov process is invariant under time reversal in the sense that $(X_0, X_1, \dots, X_T)$ has the same joint distribution as $(X_T, X_{T-1}, \dots, X_0)$ for any $T \in \mathbb{N}$.

Consider the Hilbert space $L_2(\pi) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{L_2(\pi)})$ whose (semi-)norm is given by

$$\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_{L_2(\pi)} = \Big(\sum_{i=1}^n \pi_i x_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Analytically, the stochastic matrix A is π-reversible if and only if it defines a self-adjoint contraction on $L_2(\pi)$ with real eigenvalues which we shall denote by $1 = \lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A) \geqslant -1$. The spectral gap of A is the algebraic quantity $1 - \lambda_2(A)$ which is known to encode important combinatorial properties of the matrix. It is a simple linear algebra exercise to show that the reciprocal $\gamma(A) \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \lambda_2(A))^{-1}$ of the spectral gap is the least constant $\gamma \in (0, \infty]$ for which the inequality

$$\forall\, x_1, \dots, x_n \in \ell_2, \qquad \sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j \|x_i - x_j\|_{\ell_2}^2 \leqslant \gamma \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} \|x_i - x_j\|_{\ell_2}^2 \tag{5}$$

holds true. It is a well-known consequence of Cheeger's inequality (see, e.g., Davidoff, Sarnak, and Valette (2003)) that upper bounds on $\gamma(A)$ are equivalent to good expansion properties of the underlying weighted graph defined by A.

The above analytic characterization of a spectral gap as an optimal constant in a functional inequality was the starting point for the theory of *nonlinear spectral gaps*, of which Theorem 1.1 is the latest application. Let $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ be a metric space and $p \in (0, \infty)$. If $\pi \in \triangle^{n-1}$ and A is a π-reversible stochastic matrix, the spectral gap of

A with respect to d_M^p, denoted by $\gamma(A, d_M^p)$, is the least $\gamma \in (0, \infty]$ such that

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n \in M, \qquad \sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j d_M(x_i, x_j)^p \leqslant \gamma \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} d_M(x_i, x_j)^p. \tag{6}$$

If the metric d_M is inherited by a norm $\|\cdot\|$, we will denote $\gamma(A, d_M^p)$ by $\gamma(A, \|\cdot\|^p)$. As explained in Mendel and Naor (2014), unless M is a singleton, if $\gamma(A, d_M^p)$ is finite then $\lambda_2(A)$ is bounded away from 1 by a positive quantity depending only on $\gamma(A, d_M^p)$. On the other hand, obtaining sensible upper bounds for $\gamma(A, d_M^p)$ in terms of the usual spectral gap $1 - \lambda_2(A)$ is a notoriously hard task even for very structured metric spaces (M, d_M). This difficulty reflects the fact that nonlinear spectral gap inequalities (6) capture delicate interactions of spectral properties of the matrix A and geometric characteristics of the underlying metric space (M, d_M).

The study of nonlinear spectral gap inequalities (6) has led to very fruitful investigations which have been impactful in various areas of mathematics and theoretical computer science such as metric geometry, geometric group theory, operator algebras, Alexandrov geometry and approximation algorithms. We refer, for instance, to the works of Matoušek (1997), Gromov (2003), Lafforgue (2008, 2009), Pisier (2010), Naor and Silberman (2011), Kondo (2012), Mendel and Naor (2013, 2014, 2015), Mimura (2015), Andoni, Naor, Nikolov, et al. (2018a,b) and Naor (2014, 2017, 2021) (see also Section 6 below for a high-level exposition of some of those). The pertinence of nonlinear spectral gaps to the study of average distortion embeddings into normed spaces and Theorem 1.1 stems from an important duality principle which was discovered by Naor (2014) and which we shall now describe.

1.2. Duality

Fix $\pi \in \triangle^{n-1}$ and a π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$. Let (M, d_M) be a metric space, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be a normed space and assume that the θ-snowflake of M embeds into Y with q-average distortion $D \in [1, \infty)$. Then, for $x_1, \ldots, x_n \in M$, there exist $y_1, \ldots, y_n \in Y$ such that $\|y_i - y_j\|_Y \leqslant D d_M(x_i, x_j)^\theta$ for every $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ and

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j \|y_i - y_j\|_Y^q \geqslant \sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j d_M(x_i, x_j)^{\theta q}. \tag{7}$$

Therefore, we have

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j d_M(x_i, x_j)^{\theta q} \overset{(7)}{\leqslant} \gamma(A, \|\cdot\|_Y^q) \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} \|y_i - y_j\|_Y^q \leqslant D^q \gamma(A, \|\cdot\|_Y^q) \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} d_M(x_i, x_j)^{\theta q}$$

which implies that $\gamma(A, d_M^{\theta q}) \leqslant D^q \gamma(A, \|\cdot\|_Y^q)$. Moreover[(2)], as tensorization gives the identity $\gamma(A, \|\cdot\|_Y^q) = \gamma(A, \|\cdot\|_{\ell_q(Y)}^q)$ and $\gamma(A, \|\cdot\|_W^q)$ is

[(2)]As usual, we denote by $\ell_q(Y) = \big\{y = (y_n)_{n \geqslant 1} \in Y^{\mathbb{N}} : \|y\|_{\ell_q(Y)} \overset{\text{def}}{=} \big(\sum_{n \geqslant 1} \|y_n\|_Y^q\big)^{1/q} < \infty\big\}$.

only determined by the finite-dimensional structure of W, the above simple argument shows that if the θ-snowflake of $\mathcal{M}$ embeds with q-average distortion $D \in [1,\infty)$ into any Banach space Z which is finitely representable in $\ell_q(Y)$, then $\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^{\theta q}) \leqslant D^q \gamma(A, \|\cdot\|_Y^q)$ for any π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$. The first important step towards Theorem 1.1 is the following striking converse to this implication, proven by Naor (2014, Theorem 1.3).

Theorem 1.2 (Naor's duality principle). *Suppose that $q, D \in [1,\infty)$ and $\theta \in (0,1]$. Let $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ be a metric space and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be a Banach space such that for every $n \in \mathbb{N}$ and $\pi \in \triangle^{n-1}$, every π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisfies*

$$\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^{\theta q}) \leqslant D^q \gamma(A, \|\cdot\|_Y^q). \tag{8}$$

Then, for any $\varepsilon > 0$ the θ-snowflake of $\mathcal{M}$ embeds into some ultrapower[(3)] of $\ell_q(Y)$ with q-average distortion at most $D + \varepsilon$.

We emphasize that Theorem 1.2 is an *existential* result whose proof does not shed any light on any additional properties of the average distortion embeddings at hand. Its proof consists of an elegant Hahn–Banach separation argument which we shall present in Section 2. In the setting of the average John theorem, the metric space $\mathcal{M}$ is a finite-dimensional normed space $(X, \|\cdot\|_X)$, Y is the Hilbert space ℓ_2, $q = 2$ and $\theta = \frac{1}{2}$. As any ultrapower of ℓ_2 is itself a Hilbert space (see Heinrich, 1980), Naor's duality theorem shows that the embedding statement of Theorem 1.1 is equivalent to the following comparison estimate for nonlinear spectral gaps.

Theorem 1.3. *Let $(X, \|\cdot\|_X)$ be a finite-dimensional normed space. Then, for every $n \in \mathbb{N}$ and $\pi \in \triangle^{n-1}$, every π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisfies*

$$\gamma(A, \|\cdot\|_X) \leqslant \frac{C \log(\dim(X)+1)}{1-\lambda_2(A)}, \tag{9}$$

where $C \in (0,\infty)$ is a universal constant.

Theorem 1.3 has implicitly appeared as a special case of a much more general result concerning nonlinear spectral gaps of complex interpolation spaces (Naor, 2021, Theorem 25). This family of substantially stronger nonlinear spectral gap inequalities can be used to prove (via Theorem 1.2) the existence of refined average distortion embeddings of snowflakes of Banach spaces which are not captured by Theorem 1.1. This task is undertaken in great detail in Naor (2021), yet most of these results go beyond the scope of the present survey. In Section 4, we shall present a self-contained

[(3)] We refer to Heinrich (1980) for background on ultraproducts of Banach spaces. For the purposes of this discussion it suffices to say that an ultrapower $Z^{\mathcal{U}}$ of a Banach space Z is a Banach space containing Z with various compactness properties such that any finite-dimensional subspace of $Z^{\mathcal{U}}$ embeds into Z with distortion $1+\varepsilon$ for any $\varepsilon > 0$.

proof of Theorem 1.3 which completely avoids the complex interpolation machinery of Naor (2021) and is a modification of an argument which appeared in Naor (2018, Section 5). In Section 5, we shall present some extensions and refinements of Theorems 1.1 and 1.3 and highlight some key ideas from their proofs in Naor (2021).

1.3. Extrapolation

As explained above, the forthcoming proof of Theorem 1.3 does not rely on any sophisticated analytic machinery beyond elementary spectral properties of matrices. We will however use the following extrapolation principle for Poincaré inequalities.

Proposition 1.4. *For every $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ there exist $c(p,q), C(p,q) \in (0,\infty)$ such that the following conclusion holds. For every normed space $(X, \|\cdot\|_X)$, every $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in \triangle^{n-1}$ and every π-reversible stochastic matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$, we have*

$$c(p,q) \cdot \gamma(B, \|\cdot\|_X^q)^{\frac{p}{q}} \leqslant \gamma(B, \|\cdot\|_X^p) \leqslant C(p,q) \cdot \gamma(B, \|\cdot\|_X^q). \tag{10}$$

Proposition 1.4 is the vector-valued version (due to Cheng (2016) and de Laat and de la Salle (2021)) of the extrapolation principle for Poincaré inequalities (Matoušek, 1997). In Section 3, we shall also discuss a strengthening of Proposition 1.4 and its relation to a long-standing problem in the nonlinear theory of Banach spaces.

1.4. Historical discussion

Motivated by a classical theorem of Ribe (1976) and kickstarted by Bourgain (1986), the *Ribe program* is a vast research program in metric geometry which aims to uncover deep structural analogies between the local theory of normed spaces and (nonlinear) metric spaces. In the nearly four decades that lapsed since Bourgain's formalization of its objectives, the Ribe program has been an extraordinary source of surprising phenomena which arise when one studies metric spaces through the lens of Banach space theory and, vice versa, when one considers normed spaces as objects in the metric category. Numerous such key insights obtained in the last two decades originate in works of Naor and his collaborators. We refer to the surveys of Kalton (2008), Naor (2012, 2018), Ball (2013), Baudier and Johnson (2016) and Godefroy (2017) and to the monograph of Ostrovskii (2013) for a snapshot of some of these advances and their applications to other areas of mathematics and theoretical computer science.

Theorem 1.1 is a prime example of a result conceptually belonging in the Ribe program for multiple reasons. Firstly, the statement of the theorem contains a highly nonlinear operation (snowflaking) performed on a norm and the desired embedding itself is not realized by a linear operator despite the fact that both the source and the target space are linear. Moreover, as already mentioned, the proof of Theorem 1.1

relies on the theory of nonlinear spectral gaps, a large part of which has been developed in the context of the Ribe program (see the discussion on expanders with respect to Banach spaces in Section 6.3 below). Finally, as discussed in Naor (2021, Section 1.4), Naor's initial interest in this research direction stemmed from a question regarding the embeddability of expanders into low-dimensional normed spaces raised by Andoni, Nguyen, et al. (2017) in the context of the approximate nearest neighbor search problem. A negative answer to this question (see Theorem 6.1 below) by Naor (2017, 2021) which follows easily from Theorem 1.1 shall be explained in detail in Section 6.1. Theorem 6.1 also provides a new negative answer to an old question of Johnson and Lindenstrauss (1984) who asked whether every n-point metric space admits a bi-Lipschitz embedding with constant distortion into a d-dimensional normed space, where $d = O(\log n)$. This question had previously been answered negatively by Arias-de-Reyna and Rodríguez-Piazza (1992) for small distortions and Matoušek (1996) in general. Naor's works provide a novel and more robust approach to this problem as they highlight a specific criterion (spectral gap) which implies the intrinsic high-dimensionality of the metric space at hand. Johnson and Lindenstrauss raised this question as a step towards finding a metric version of the aforementioned classical theorem of John (1948). A deep and impactful nonlinear John theorem was discovered via a completely different route in the influential work of Bourgain (1985). Quite surprisingly, Theorem 1.1, which answers negatively the question of Johnson and Lindenstrauss, is itself a metric version of John's theorem.

Structure of the paper. In Sections 2 and 3 we present the proofs of Theorem 1.2 and Proposition 1.4 respectively. In Section 4 we use Proposition 1.4 to prove Theorem 1.3 which, combined with Theorem 1.2, completes the proof of Theorem 1.1. In Section 5 we present some refinements of Theorems 1.1 and 1.3 from Naor (2021) and highlight key ideas used in their proofs. Finally, Section 6 contains a high-level account of further geometric and algorithmic applications of the theory of nonlinear spectral gaps.

Asymptotic notation. In what follows we use the convention that for $a, b \in [0, \infty]$ the notation $a \gtrsim b$ (respectively $a \lesssim b$) means that there exists a universal constant $c \in (0, \infty)$ such that $a \geqslant cb$ (respectively $a \leqslant cb$). The notations $\lesssim_\xi$ and $\gtrsim_\chi$ mean that the implicit constant c depends on ξ and χ respectively.

Acknowledgement. — I am very grateful to Florent Baudier, Manor Mendel and Assaf Naor for helpful discussions and constructive feedback.

2. Duality and average distortion

In this section we present the proof of Naor's duality Theorem 1.2. Despite the fact that the theorem is stated for an *arbitrary* metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$, the crux of the argument is the following special case in which $\mathcal{M}$ is assumed to be *finite*. The general case follows by a (standard yet lengthy) discretization and compactness argument which can be found in Naor (2021, Section 7). The finitary version stated below was proven in the case that π is the normalized counting measure in Naor (2014, Theorem 1.3), where it is said that the argument is inspired by the proof of Ball (1992, Lemma 1.1).

Theorem 2.1 (Naor's duality – finitary version). *Suppose that $q, D \in [1,\infty)$, $\theta \in (0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ and fix $\pi \in \mathrm{int}(\triangle^{n-1})$. Let $\mathcal{M} = (\{x_1,\ldots,x_n\}, d_{\mathcal{M}})$ be a metric space and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be a Banach space such that every π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$*

$$\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^{\theta q}) \leqslant D^q \gamma(A, \|\cdot\|_Y^q). \tag{11}$$

Then, for any $\varepsilon > 0$ there exists $m \in \mathbb{N}$ and a function $f = f_\varepsilon : (\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}}^\theta) \to \ell_q^m(Y)$ which is $(D+\varepsilon)$-Lipschitz satisfying the condition

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j \|f(x_i) - f(x_j)\|_{\ell_q^m(Y)}^q \geqslant \sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^{\theta q}. \tag{12}$$

Proof. It clearly suffices to assume that $\theta = 1$ as otherwise we can simply apply the same result to the θ-snowflake of $\mathcal{M}$. Let $\mathcal{C} \subseteq M_n(\mathbb{R})$ be the class of all symmetric $n \times n$ matrices (c_{ij}) for which there exist $y_1,\ldots,y_n \in Y$, not all of which are equal, with

$$\forall\, i,j \in \{1,\ldots,n\}, \qquad c_{ij} = \frac{\sum_{r,s=1}^n \pi_r \pi_s d_{\mathcal{M}}(x_r,x_s)^q}{\sum_{r,s=1}^n \pi_r \pi_s \|y_r - y_s\|_Y^q} \cdot \|y_i - y_j\|_Y^q. \tag{13}$$

Moreover, let $\mathcal{P} \subseteq M_n(\mathbb{R})$ be the class of all symmetric $n \times n$ matrices with nonnegative entries and vanishing diagonal and consider the convex hull $\mathcal{Q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{conv}(\mathcal{C} + \mathcal{P})$.

Let $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ be the $n \times n$ matrix with entries given by $t_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (D+\varepsilon)^q d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^q$ for $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. We shall prove that $T \in \mathcal{Q}$. Suppose that this is not the case. Then, by the Hahn–Banach separation theorem, there exists a nonzero symmetric $n \times n$ matrix $H = (h_{ij})_{i,j=1}^n$ with vanishing diagonal such that

$$\inf_{(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^n h_{ij} b_{ij} \geqslant (D+\varepsilon)^q \sum_{i,j=1}^n h_{ij} d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^q. \tag{14}$$

Since $\mathcal{Q}$ contains a translate of $\mathcal{P}$, choosing $(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{P}$ whose only nonzero entries are those indexed by (k,ℓ) and (ℓ,k), where $k \neq \ell$, we deduce that $h_{ij} \geqslant 0$ for every $i,j \in \{1,\ldots,n\}$. Moreover, as $\pi_i \neq 0$ for every $i \in \{1,\ldots,n\}$, we can define the parameter

$$\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} \frac{1}{\pi_i} \sum_{r \neq i} h_{ir} \in (0,\infty) \tag{15}$$

and consider the matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ whose entries are given by

$$\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}, \qquad a_{ij} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{h_{ij}}{\sigma\pi_i}, & \text{if } i \neq j \\ 1 - \frac{1}{\sigma\pi_i}\sum_{r\neq i} h_{ir}, & \text{if } i = j \end{cases}. \tag{16}$$

By construction, A is a π-reversible stochastic matrix as the choice of σ guarantees that its entries are nonnegative. Moreover, inequality (14) can be equivalently rewritten as

$$\inf_{(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} b_{ij} \geqslant (D+\varepsilon)^q \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^q. \tag{17}$$

Combining (17) with the definition (6) of nonlinear spectral gaps, we deduce that

$$\inf_{(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} b_{ij} \geqslant \frac{(D+\varepsilon)^q}{\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^q)} \sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^q \tag{18}$$

On the other hand, since $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{Q}$, we have

$$\begin{aligned} \inf_{(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{Q}} \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} b_{ij} &\leqslant \inf_{(b_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{C}} \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} b_{ij} \\ &= \inf_{y_1,\dots,y_n \in Y} \frac{\sum_{r,s=1}^n \pi_r\pi_s d_{\mathcal{M}}(x_r,x_s)^q}{\sum_{r,s=1}^n \pi_r\pi_s \|y_r - y_s\|_Y^q} \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} \|y_i - y_j\|_Y^q \\ &= \frac{1}{\gamma(A, \|\cdot\|_Y^q)} \cdot \sum_{r,s=1}^n \pi_r\pi_s d_{\mathcal{M}}(x_r,x_s)^q. \end{aligned} \tag{19}$$

Combining (18), (19) and rearranging, we deduce that $\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^q) \geqslant (D+\varepsilon)^q \gamma(A, \|\cdot\|_Y^q)$ which contradicts the assumption (11), thus proving that $T \in \mathcal{Q}$.

Since $T \in \mathcal{Q}$ and all matrices in $\mathcal{P}$ have nonnegative entries, we deduce that there exists $m \in \mathbb{N}$, $(\mu_1,\dots,\mu_m) \in \triangle^{m-1}$ and n-tuples of points $\{y_1(k),\dots,y_n(k)\} \subset Y$ not all of which are equal for each $k \in \{1,\dots,m\}$ such that

$$(D+\varepsilon)^q d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^q \geqslant \sum_{k=1}^m \underbrace{\mu_k \frac{\sum_{r,s=1}^n \pi_r\pi_s d_{\mathcal{M}}(x_r,x_s)^q}{\sum_{r,s=1}^n \pi_r\pi_s \|y_r(k) - y_s(k)\|_Y^q}}_{w_k} \cdot \|y_i(k) - y_j(k)\|_Y^q, \tag{20}$$

for every $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Consider the mapping $f : \mathcal{M} \to \ell_q^m(Y)$ given by

$$\forall\, i \in \{1,\dots,n\}, \qquad f(x_i) = \big(w_1^{1/q} y_i(1), \dots, w_m^{1/q} y_i(m)\big). \tag{21}$$

Then, for $i,j \in \{1,\dots,n\}$ we have

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_{\ell_q^m(Y)} = \Big(\sum_{k=1}^m w_k \|y_i(k) - y_j(k)\|_Y^q\Big)^{\frac{1}{q}} \overset{(20)}{\leqslant} (D+\varepsilon) d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j), \tag{22}$$

which is equivalent to $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant D + \varepsilon$. Finally,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \pi_j \|f(x_i) - f(x_j)\|^q_{\ell_q^m(Y)} &= \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \pi_j \sum_{k=1}^{n} w_k \|y_i(k) - y_j(k)\|_Y^q \\ &\overset{(20)}{=} \sum_{i,j=1}^{n} \pi_i \pi_j \sum_{k=1}^{m} \mu_k \frac{\sum_{r,s=1}^{n} \pi_r \pi_s d_M(x_r, x_s)^q}{\sum_{r,s=1}^{n} \pi_r \pi_s \|y_r(k) - y_s(k)\|_Y^q} \cdot \|y_i(k) - y_j(k)\|_Y^q, \quad (23) \\ &= \sum_{r,s=1}^{n} \pi_r \pi_s d_M(x_r, x_s)^q\end{aligned}$$

which proves the average lower bound and completes the proof. □

Remark 2.2. It is worth emphasizing that Naor's Theorem 2.1 is an important addition to a long list of results in which the existence of a map with favorable metric properties is proven using duality or by exploiting the cone structure of ℓ_p-distance matrices. We refer, for instance, to the works of Schoenberg (1938), Bretagnolle, Dacunha-Castelle, and Krivine (1965/1966), Krivine (1965), Wells and Williams (1975) on isometric embeddings, Maurey (1974) on factorization theory, Matoušek (2002, Proposition 15.5.2) on bi-Lipschitz embeddings, Ball (1990), Eskenazis (2021) on metric dimension reduction and Ball (1992), Mendel and Naor (2013) on extensions of Lipschitz mappings.

3. Extrapolation and snowflake embeddings

In this section we present the proof of Proposition 1.4. The argument relies on some elementary properties of the vector-valued Mazur map (Mazur, 1929). If (Ω, μ) is a measure space, $(X, \|\cdot\|_X)$ is a normed space and $p, q \in [1, \infty)$, consider the map $\mathsf{M}_{p,q} : L_p(\mu; X) \to L_q(\mu; X)$ whose action on $f \in L_p(\mu; X)$ is given by

$$\forall\, \omega \in \Omega, \qquad (\mathsf{M}_{p,q} f)(\omega) = \frac{f(\omega)}{\|f(\omega)\|_X^{1-\frac{p}{q}}} \quad (24)$$

when $f(\omega) \neq 0$ and $(\mathsf{M}_{p,q} f)(\omega) = 0$ when $f(\omega) = 0$. We will use the following lemma.

Lemma 3.1. *Let $p, q \in [1, \infty)$. For any normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ and any functions $f, g : \Omega \to X$ with $\max\{\|f\|_{L_p(\mu;X)}, \|g\|_{L_p(\mu;X)}\} \leqslant 1$, we have*

$$\left\|\mathsf{M}_{p,q} f - \mathsf{M}_{p,q} g\right\|_{L_q(\mu;X)} \lesssim_{p,q} \left\|f - g\right\|_{L_p(\mu;X)}^{\min\{\frac{p}{q}, 1\}}. \quad (25)$$

Proof. The scalar-valued case $X = \mathbb{R}$ of the proposition is classical[(4)] and can be found in Benyamini and Lindenstrauss (2000, Section 9.1). Consider two functions $\theta, \phi : \Omega \to \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$ such that $f = \|f\|_X \theta$ and $g = \|g\|_X \phi$. Then, we have $\mathsf{M}_{p,q} f = \|f\|_X^{p/q} \theta$ and $\mathsf{M}_{p,q} g = \|g\|_X^{p/q} \phi$ which imply the inequality

$$\begin{aligned} \|\mathsf{M}_{p,q} f - \mathsf{M}_{p,q} g\|_{L_q(\mu;X)} &= \big\| \|f\|_X^{\frac{p}{q}} \theta - \|g\|_X^{\frac{p}{q}} \phi \big\|_{L_q(\mu;X)} \\ &\leqslant \underbrace{\big\| \|f\|_X^{\frac{p}{q}} - \|g\|_X^{\frac{p}{q}} \big\|_{L_q(\mu;\mathbb{R})}}_{①} + \underbrace{\big\| \|g\|_X^{\frac{p}{q}} (\theta - \phi) \big\|_{L_q(\mu;X)}}_{②}. \end{aligned} \tag{26}$$

By the scalar-valued version of (25) applied to $\|f\|_X$ and $\|g\|_X$, we have

$$① \lesssim_{p,q} \big\| \|f\|_X - \|g\|_X \big\|_{L_p(\mu;\mathbb{R})}^{\min\{\frac{p}{q},1\}} \leqslant \big\| f - g \big\|_{L_p(\mu;X)}^{\min\{\frac{p}{q},1\}}. \tag{27}$$

Moreover, if $\mathrm{d}\nu = \|g\|_X^p \, \mathrm{d}\mu$, then $\nu(\Omega) \leqslant 1$ and thus for $q \leqslant p$ we have

$$\begin{aligned} ② &= \|\theta - \phi\|_{L_q(\nu;X)} \leqslant \|\theta - \phi\|_{L_p(\nu;X)} = \big\| \|g\|_X \theta - \|g\|_X \phi \big\|_{L_p(\mu;X)} \\ &\leqslant \big\| \|g\|_X - \|f\|_X \big\|_{L_p(\mu;\mathbb{R})} + \big\| \|f\|_X \theta - \|g\|_X \phi \big\|_{L_p(\mu;X)} \leqslant 2 \|f - g\|_{L_p(\mu;X)}. \end{aligned} \tag{28}$$

On the other hand, if $p \leqslant q$, Hölder's inequality gives

$$② = \|\theta - \phi\|_{L_q(\nu;X)} \leqslant \|\theta - \phi\|_{L_p(\nu;X)}^{\frac{p}{q}} \cdot \|\theta - \phi\|_{L_\infty(\nu;X)}^{1 - \frac{p}{q}} \overset{(28)}{\leqslant} 2 \|f - g\|_{L_p(\mu;X)}^{\frac{p}{q}}, \tag{29}$$

which completes the proof of the lemma. □

Equipped with the estimates of Lemma 3.1, we now ready to prove Proposition 1.4.

Proof of Proposition 1.4. We shall first prove the rightmost inequality of (10). Let $x_1, \dots, x_n \in X$ and consider the function $f : \{1, \dots, n\} \to X$ given by $f(i) = x_i$. Unless all the vectors $x_1, \dots, x_n$ are equal, we can rescale so that the constraint

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j \|x_i - x_j\|_X^p = 1 \tag{30}$$

(4) Since $M_{p,q} h = |h|^{p/q} \mathrm{sign}(h)$, the scalar case is a consequence of the pointwise inequalities

$$|\mathrm{sign}(\alpha)|\alpha|^\omega - \mathrm{sign}(\beta)|\beta|^\omega| \leqslant c_1(\omega) |\alpha - \beta|^\omega$$

and

$$|\mathrm{sign}(\alpha)|\alpha|^{\frac{1}{\omega}} - \mathrm{sign}(\beta)|\beta|^{\frac{1}{\omega}}| \leqslant c_2(\omega) \max\{|\alpha|, |\beta|\}^{\frac{1}{\omega} - 1} |\alpha - \beta|$$

which are valid for every $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ and $\omega \in (0, 1]$.

is satisfied, which in particular, by Jensen's inequality, implies that $\|f-\mathbb{E}_\pi f\|_{L_p(\pi;X)}\leqslant 1$, where $\mathbb{E}_\pi f \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \pi_i f(i)$. Consider the function $g=\mathsf{M}_{p,q}(f-\mathbb{E}_\pi f):\{1,\dots,n\}\to X$. Then, we have

$$\begin{aligned}
1&=\sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\|f(i)-f(j)\|_X^p=\sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\|\mathsf{M}_{q,p}g(i)-\mathsf{M}_{q,p}g(j)\|_X^p\\
&\overset{(25)}{\lesssim}_{p,q}\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\|g(i)-g(j)\|_X^q\Big)^{\frac{p}{q}}\leqslant \gamma(B,\|\cdot\|_X^q)^{\frac{p}{q}}\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|g(i)-g(j)\|_X^q\Big)^{\frac{p}{q}}\\
&=\gamma(B,\|\cdot\|_X^q)^{\frac{p}{q}}\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|\mathsf{M}_{p,q}(f-\mathbb{E}_\pi f)(i)-\mathsf{M}_{p,q}(f-\mathbb{E}_\pi f)(j)\|_X^q\Big)^{\frac{p}{q}}\\
&\overset{(25)}{\lesssim}_{p,q}\gamma(B,\|\cdot\|_X^q)^{\frac{p}{q}}\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|f(i)-f(j)\|_X^p\Big)^{\frac{p}{q}}=\gamma(B,\|\cdot\|_X^q)^{\frac{p}{q}}\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|x_i-x_j\|_X^p\Big)^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

where in both inequalities we used that $\max\{\|f-\mathbb{E}_\pi f\|_{L_p(\pi;X)},\|g\|_{L_q(\pi;X)}\}\leqslant 1$. Finally, taking an infimum of the right-hand side over all $x_1,\dots,x_n\in X$ satisfying (30), we deduce that $1\lesssim_{p,q}\gamma(B,\|\cdot\|_X^q)^{p/q}\gamma(B,\|\cdot\|_X^p)^{-p/q}$ which concludes the proof.

The proof of the leftmost inequality is almost identical yet we repeat it for completeness. Let $x_1,\dots,x_n\in X$ and consider the function $\phi:\{1,\dots,n\}\to X$ given by $\phi(i)=x_i$. Without loss of generality, we can again assume that the constraint

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\|x_i-x_j\|_X^q=1, \tag{31}$$

is satisfied, which implies that $\|\phi-\mathbb{E}_\pi\phi\|_{L_q(\pi;X)}\leqslant 1$ by Jensen's inequality. Consider the function $\psi=\mathsf{M}_{q,p}(\phi-\mathbb{E}_\pi\phi):\{1,\dots,n\}\to X$. Then, we have

$$\begin{aligned}
1&=\sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\|\phi(i)-\phi(j)\|_X^q=\sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\|\mathsf{M}_{p,q}\psi(i)-\mathsf{M}_{p,q}\psi(j)\|_X^q\\
&\overset{(25)}{\lesssim}_{p,q}\sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j\|\psi(i)-\psi(j)\|_X^p\leqslant \gamma(B,\|\cdot\|_X^p)\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|\psi(i)-\psi(j)\|_X^p\\
&=\gamma(B,\|\cdot\|_X^p)\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|\mathsf{M}_{q,p}(\phi-\mathbb{E}_\pi\phi)(i)-\mathsf{M}_{q,p}(\phi-\mathbb{E}_\pi\phi)(j)\|_X^p\\
&\overset{(25)}{\lesssim}_{p,q}\gamma(B,\|\cdot\|_X^p)\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|\phi(i)-\phi(j)\|_X^q\Big)^{\frac{p}{q}}=\gamma(B,\|\cdot\|_X^p)\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|x_i-x_j\|_X^q\Big)^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

where in both inequalities we used that $\max\{\|\phi-\mathbb{E}_\pi\phi\|_{L_q(\pi;X)},\|\psi\|_{L_p(\pi;X)}\}\leqslant 1$. Finally, taking an infimum of the right-hand side over all $x_1,\dots,x_n\in X$ satisfying (31), we deduce that $1\lesssim_{p,q}\gamma(B,\|\cdot\|_X^p)\gamma(B,\|\cdot\|_X^q)^{-p/q}$ which concludes the proof. □

Even though the vector-valued version of Matoušek's extrapolation theorem (Proposition 1.4) suffices for the proof of Theorem 1.1 which will be presented in the next section, we digress to mention the following stronger result of Naor (2021).

Proposition 3.2. *Fix $p \in (0,\infty)$ and $\theta \in (0,1)$. There exists $D_0 = D_0(p,\theta) \in (1,\infty)$ such that the θ-snowflake of any normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ embeds with p-average distortion D_0 into X.*

The discussion preceeding the statement of Theorem 1.2 shows that Proposition 1.4 is a formal consequence of Proposition 3.2, whose proof also relies on properties of the vector-valued Mazur map (24). In fact, as explained in Naor (2021, Remark 47), Proposition 3.2 implies improved bounds for the parameters $c(p,q), C(p,q)$ appearing in Proposition 1.4. Proposition 3.2 is the average distortion analogue of the following classical open problem in the nonlinear theory of Banach spaces.

Question 1. *Does there exist $\theta \in (0,1)$ and an infinite-dimensional Banach space $(X, \|\cdot\|_X)$ whose θ-snowflake does not admit a bi-Lipschitz embedding into X?*

A classical result of Schoenberg (1938) implies that for every $\theta \in (0,1)$, the θ-snowflake of L_2 admits an isometric embedding into L_2. Schoenberg's theorem was later extended by Bretagnolle, Dacunha-Castelle, and Krivine (1965/1966), who showed that for every $p \in (0,2]$ and $\theta \in (0,1)$, the θ-snowflake of L_p admits an isometric embedding into L_p. Despite decades of attention, Question 1 remains stubbornly open even for the spaces $X = L_p$, where $p \in (2,\infty)$. In the forthcoming work of Eskenazis and Naor (2021), it is proven that arbitrarily small logarithmic perturbations of this question have a negative answer. More precisely, it is shown that for every $\theta \in (0,1)$, $\eta \in (0, \min\{\theta, 1-\theta\})$ and $p \in (2,\infty)$, the metric transforms $(L_p, \omega_{\theta,\eta} \circ d_{L_p})$ of L_p do not admit a bi-Lipschitz embedding into L_p, where

$$\omega_{\theta,\eta}(t) = t^\theta \log^\eta(1+t) \qquad \text{or} \qquad \omega_{\theta,\eta}(t) = \frac{t^\theta}{1+\log^\eta(1+t)}. \tag{32}$$

We refer to Eskenazis (2019, Chapter 3) for further results in this direction.

4. Proof of the average John theorem

Having established the duality principle of Theorem 1.2 and the extrapolation inequalities of Proposition 1.4, we are well equipped to proceed to the proof of Theorem 1.1 via Theorem 1.3. We start with some preliminary properties of *nonlinear Rayleigh quotients* which will help us analyze nonlinear spectral gaps. The following simplification of the original proof of Theorem 1.1 was sketched in Naor (2021, Remark 31).

4.1. Nonlinear Rayleigh quotients

Fix $p \geqslant 1$, a metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ and a probability measure $\pi \in \triangle^{n-1}$. Let $L_p(\pi;\mathcal{M})$ be the metric space $(\mathcal{M}^n, d_{L_p(\pi,\mathcal{M})})$ whose metric is given by

$$d_{L_p(\pi;\mathcal{M})}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Big(\sum_{i=1}^n \pi_i d_{\mathcal{M}}(x_i,y_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{33}$$

where $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n), \boldsymbol{y} = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathcal{M}^n$. Moreover, we shall use the ad hoc notation $L_p(\pi;\mathcal{M})^\dagger$ for the subset $L_p(\pi;M) \setminus \{(x,\ldots,x) : x \in \mathcal{M}\}$ of $L_p(\pi;\mathcal{M})$.

Let $A \in M_n(\mathbb{R})$ be a row-stochastic matrix that is π-stationary (in the sense that $\pi A = \pi$) and $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in L_p(\pi;\mathcal{M})^\dagger$. Following Naor (2018, Section 5.1), we consider the corresponding nonlinear Rayleigh quotient given by

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, d_{\mathcal{M}}^p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^p}{\sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^p}. \tag{34}$$

By definition, if A is π-reversible, the nonlinear spectral gap (6) satisfies

$$\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^p) = \sup_{\boldsymbol{x}\in L_p(\pi;\mathcal{M})^\dagger} \frac{1}{\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, d_{\mathcal{M}}^p)}. \tag{35}$$

We will need the following properties of nonlinear Rayleigh quotients.

Lemma 4.1. *Let $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ be a metric space, $p \geqslant 1$, $\lambda \in [0,1]$ and $\pi \in \triangle^{n-1}$. If $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ are π-stationary stochastic matrices and $\boldsymbol{x} \in L_p(\pi;\mathcal{M})^\dagger$, then we have*

(i) $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; \lambda A + (1-\lambda)B, d_{\mathcal{M}}^p) = \lambda \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, d_{\mathcal{M}}^p) + (1-\lambda)\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B, d_{\mathcal{M}}^p)$.

(ii) $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; \lambda A + (1-\lambda)\mathsf{Id}_n, d_{\mathcal{M}}^p) = \lambda \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, d_{\mathcal{M}}^p)$, *where Id_n is the identity matrix.*

(iii) $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; AB, d_{\mathcal{M}}^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, d_{\mathcal{M}}^p)^{\frac{1}{p}} + \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B, d_{\mathcal{M}}^p)^{\frac{1}{p}}$.

(iv) $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B^t, d_{\mathcal{M}}^p) \leqslant t^p \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B, d_{\mathcal{M}}^p)$ *for every $t \in \mathbb{N}$.*

Proof. The first property is evident from the definition (34) and the second follows from (i) since $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; \mathsf{Id}_n, d_{\mathcal{M}}^p) = 0$. Moreover, (iv) follows by iterating (iii) so we are left to prove that. Notice that AB is π-stationary and the triangle inequality gives

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i (AB)_{ij} d_{\mathcal{M}}(x_i,x_j)^p\Big)^{\frac{1}{p}} &\leqslant \Big(\sum_{i,j=1}^n \pi_i \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\big(d_{\mathcal{M}}(x_i,x_k) + d_{\mathcal{M}}(x_k,x_j)\big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \Big(\sum_{i,j,k=1}^n \pi_i a_{ik}b_{kj} d_{\mathcal{M}}(x_i,x_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i,j,k=1}^n \pi_i a_{ik}b_{kj} d_{\mathcal{M}}(x_k,x_j)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big(\sum_{i,k=1}^n \pi_i a_{ik} d_{\mathcal{M}}(x_i,x_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{k,j=1}^n \pi_k b_{kj} d_{\mathcal{M}}(x_k,x_j)^p\Big)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned} \tag{36}$$

where in the last equality we used the stationarity of A in the form $\pi_k = \sum_{i=1}^n \pi_i a_{ik}$. The desired inequality (iii) follows from (36) after renormalizing. □

Apart from the elementary properties of Lemma 4.1, we shall also need the following standard computation of nonlinear Rayleigh quotients in Hilbert space. Recall that for every normed space $(X, \|\cdot\|_X)$, every matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ induces a linear operator $B \otimes \mathsf{Id}_X : L_p(\pi; X) \to L_p(\pi; X)$ that is given by $(B \otimes \mathsf{Id}_X)(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j)_{i=1}^n$.

Lemma 4.2. *Fix $\pi \in \triangle^{n-1}$ and let $B \in M_n(\mathbb{R})$ be a π-reversible stochastic matrix. For every Hilbert space $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ and $\boldsymbol{x} \in L_2(\pi; \mathcal{H})^\dagger$ with $\sum_{i=1}^n \pi_i x_i = 0$, we have*

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B^2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2) = 1 - \frac{\|(B \otimes \mathsf{Id}_{\mathcal{H}})\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})}^2}{\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})}^2}. \tag{37}$$

Proof. Let $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ be the inner product of $\mathcal{H}$ and notice that

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j \|x_i - x_j\|_{\mathcal{H}}^2 = 2 \sum_{i=1}^n \pi_i \|x_i\|_{\mathcal{H}}^2 - 2 \left\langle \sum_{i=1}^n \pi_i x_i, \sum_{j=1}^n \pi_j x_j \right\rangle_{\mathcal{H}} = 2\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})}^2, \tag{38}$$

since $\sum_{i=1}^n \pi_i x_i = 0$. Moreover, since B^2 is π-stationary and stochastic, we have

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i (B^2)_{ij} \|x_i - x_j\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{i,j=1}^n \pi_i (B^2)_{ij} (\|x_i\|_{\mathcal{H}}^2 + \|x_j\|_{\mathcal{H}}^2) - 2 \sum_{i=1}^n \pi_i \left\langle x_i, \sum_{j=1}^n (B^2)_{ij} x_j \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$= 2\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})}^2 - 2 \sum_{i=1}^n \pi_i \big\langle x_i, \big((B^2 \otimes \mathsf{Id}_{\mathcal{H}})\boldsymbol{x}\big)_i \big\rangle_{\mathcal{H}} = 2\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})}^2 - 2\|(B \otimes \mathsf{Id}_{\mathcal{H}})\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})}^2,$$

where in the last equality we additionally used the π-reversibility of B. The conclusion now readily follows by the definition (34) of nonlinear Rayleigh quotients. □

4.2. Proof of Theorem 1.3

In the proof of Theorem 1.3 we will use the following pointwise estimate of nonlinear Rayleigh quotients of normed spaces which are isomorphic to a Hilbert space.

Lemma 4.3. *Let $(X, \|\cdot\|_X)$ be a normed space and $D \in [1, \infty)$. Suppose that there exists a Hilbertian norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : X \to \mathbb{R}_+$ such that*

$$\forall\, y \in X, \qquad \|y\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|y\|_X \leqslant D\|y\|_{\mathcal{H}}. \tag{39}$$

Then, for every $\pi \in \triangle^{n-1}$ and every π-reversible stochastic matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B^2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2) \geqslant 1 - \eta^2 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B, \|\cdot\|_X^2) \geqslant \frac{(1 - \eta D)^2}{4}, \tag{40}$$

where $\boldsymbol{x} \in L_2(\pi; X)^\dagger$ and $\eta \in (0, 1/D)$.

Proof. Without loss of generality, we can translate the components x_i of the vector $\boldsymbol{x} \in L_2(\pi; X)^\dagger$ to assume that $\sum_{i=1}^n \pi_i x_i = 0$. Then, the assumption $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B^2, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2) \geqslant 1 - \eta^2$ can be equivalently rewritten due to Lemma 4.2 as

$$\|(B \otimes \mathsf{Id}_{\mathcal{H}})\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})} \leqslant \eta \|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})}. \tag{41}$$

Therefore,

$$\|(B \otimes \mathsf{Id}_X)\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)} \overset{(39)}{\leqslant} D\|(B \otimes \mathsf{Id}_{\mathcal{H}})\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})} \overset{(41)}{\leqslant} \eta D\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;\mathcal{H})} \overset{(39)}{\leqslant} \eta D\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)}, \tag{42}$$

and thus, by the triangle inequality,

$$\|\boldsymbol{x} - (B \otimes \mathsf{Id}_X)\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)} \geqslant \|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)} - \|(B \otimes \mathsf{Id}_X)\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)} \overset{(42)}{\geqslant} (1 - \eta D)\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)}. \tag{43}$$

Since B is row-stochastic, Jensen's inequality for the convex function $\|\cdot\|_X^2$ gives

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i b_{ij}\|x_i - x_j\|_X^2 \geqslant \sum_{i=1}^n \pi_i \Big\|x_i - \sum_{j=1}^n b_{ij}x_j\Big\|_X^2 = \|\boldsymbol{x} - (B \otimes \mathsf{Id}_X)\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)}^2. \tag{44}$$

On the other hand, using the triangle inequality we get

$$\sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j \|x_i - x_j\|_X^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n \pi_i \pi_j (\|x_i\|_X + \|x_j\|_X)^2 \leqslant 4\|\boldsymbol{x}\|_{L_2(\pi;X)}^2. \tag{45}$$

Combining (34), (44), (43) and (45) we deduce that

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; B, \|\cdot\|_X^2) \geqslant \frac{(1 - \eta D)^2}{4}, \tag{46}$$

which concludes the proof. □

Equipped with Lemma 4.3, we can complete the proof of Theorem 1.3. The main idea is to consider a Hilbertian norm which nicely approximates our given norm on $\mathbb{R}^d$ and then use the implication (40). In order to ensure that the assumption of (40) is satisfied we shall apply a trick that was used by Pisier (2010), who attributed it to V. Lafforgue: we will replace A by a large enough power of the form $\left(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\right)^t$. We will then be able to return to an inequality involving A rather than its power using Lemma 4.1.

Proof of Theorem 1.3. Suppose that $X = (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_X)$ and fix $\pi \in \triangle^{n-1}$, a π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ and a vector $\boldsymbol{x} \in L_1(\pi; X)^\dagger$. In view of (35), we need

to prove a lower bound on $\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, \|\cdot\|_X)$. Notice that, by properties (ii) and (iv) of Lemma 4.1, we have the inequality

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, \|\cdot\|_X) = 2\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{x}; \frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}, \|\cdot\|_X\Big) \geqslant \frac{2}{t}\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{x}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^t, \|\cdot\|_X\Big) \tag{47}$$

for every $t \in \mathbb{N}$. Moreover, by the vector-valued extrapolation inequalities of Proposition 1.4 and the expression (35) of nonlinear spectral gaps in terms of nonlinear Rayleigh quotients, we conclude that there exists a point $\boldsymbol{y} \in L_2(\pi; X)^\dagger$ satisfying

$$\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{x}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^t, \|\cdot\|_X\Big) \gtrsim \mathcal{R}\Big(\boldsymbol{y}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^t, \|\cdot\|_X^2\Big). \tag{48}$$

Let $D_X \in [1, \infty)$ be the least constant for which there exists a Hilbertian norm $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ such that the following inequality is satisfied,

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, \qquad \|y\|_{\mathcal{H}} \leqslant \|y\|_X \leqslant D_X \|y\|_{\mathcal{H}}. \tag{49}$$

As $\mathcal{H}$ is isometric to ℓ_2^d, the spectral gap of $\big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\big)^{2t}$ with respect to $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2$ satisfies

$$\gamma\Big(\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^{2t}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2\Big) = \gamma\Big(\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^{2t}, |\cdot|^2\Big) = \frac{1}{1-\big(\frac{1+\lambda_2(A)}{2}\big)^{2t}}. \tag{50}$$

Therefore, for the parameter

$$t^*(A) \stackrel{\text{def}}{=} \left\lceil \frac{\log(2D_X)}{\log(\frac{2}{1+\lambda_2(A)})} \right\rceil \lesssim \frac{\log(D_X+1)}{1-\lambda_2(A)} \tag{51}$$

we have the estimate

$$\gamma\Big(\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^{2t^*(A)}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2\Big) \overset{(50)\wedge(51)}{\leqslant} \frac{1}{1-\frac{1}{4D_X^2}}, \tag{52}$$

which combined with (35) immediately implies that

$$\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{y}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^{2t^*(A)}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}^2\Big) \geqslant 1 - \frac{1}{4D_X^2}. \tag{53}$$

Therefore, in view of (49) and (53), the pointwise estimate of Lemma 4.3 applied to the matrix $B = \big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\big)^{t^*(A)}$ and $\eta = \frac{1}{2D_X}$ implies that

$$\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{y}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^{t^*(A)}, \|\cdot\|_X^2\Big) \geqslant \frac{1}{16}. \tag{54}$$

Finally, combining (47), (48) and (54) for $t = t^*(A)$ we deduce that

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, \|\cdot\|_X) \gtrsim \frac{1}{t^*(A)} \overset{(51)}{\gtrsim} \frac{1-\lambda_2(A)}{\log(D_X+1)}. \tag{55}$$

By John's theorem (John, 1948), since X is d-dimensional we have $D_X \leqslant \sqrt{d}$ and the desired estimate (9) thus follows by rearranging (55) and using (35). □

As explained in the introduction, Theorem 1.1 is equivalent to Theorem 1.3 via the duality principle of Theorem 1.2.

Proof of Theorem 1.1. Combining Theorems 1.3 and 1.2, we deduce that the $\frac{1}{2}$-snowflake of any d-dimensional normed space embeds into an ultrapower of ℓ_2 with quadratic average distortion at most $C\sqrt{\log d}$, where $d \geqslant 2$ and $C \in (0,\infty)$ is a universal constant. This immediately yields the conclusion of Theorem 1.1 since any ultrapower of ℓ_2 is itself a Hilbert space (Heinrich, 1980). □

5. Beyond Hilbertian embeddings

Theorem 1.1 is a special case of a much more general embedding theorem proven by Naor (2021). As a matter of fact, a lot of the ideas required to prove this more general statement have already been used in the Hilbertian case. A key ingredient required to go beyond Theorem 1.1 is the notion of *Markov type* introduced by Ball (1992).

Definition 5.1. A metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ has Markov type $p \in (0,\infty)$ with constant $M \in (0,\infty)$ if for every $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in \triangle^{n-1}$, every π-reversible matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ and every $\boldsymbol{x} \in L_p(\pi;\mathcal{M})$, we have

$$\forall\, t \in \mathbb{N}, \qquad \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A^t, d_{\mathcal{M}}^p) \leqslant M^p t\, \mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, d_{\mathcal{M}}^p). \tag{56}$$

The least such constant $M \in (0,\infty)$ will be denoted by $\mathsf{M}_p(\mathcal{M})$.

In Ball (1992), it was shown that any Hilbert space $\mathcal{H}$ has $\mathsf{M}_2(\mathcal{H}) = 1$. Following Ball, Carlen, and Lieb (1994), we say that a normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ is p-uniformly smooth, where $p \in [1,2]$, if there exists a constant $S \in (0,\infty)$ such that

$$\forall\, x, y \in X, \qquad \frac{\|x\|_X^p + \|y\|_X^p}{2} \leqslant \left\|\frac{x+y}{2}\right\|_X^p + S^p \left\|\frac{x-y}{2}\right\|_X^p. \tag{57}$$

The least such constant $S \in (0,\infty)$ will be denoted by $\mathsf{S}_p(X)$. A deep theorem of Naor, Peres, et al. (2006) asserts that every p-uniformly smooth normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ has Markov type p with constant

$$\mathsf{M}_p(X) \lesssim \mathsf{S}_p(X). \tag{58}$$

An inspection of the proof of Theorem 1.3 reveals that the power of the norm in the estimate (9) can be improved for spaces of Markov type $p \in (1,2]$. Indeed,

replacing (47) with (56) and using the extrapolation inequality (10), we deduce that for every $\boldsymbol{x} \in L_p(\pi; X)^\dagger$ there exists $\boldsymbol{y} \in L_2(\pi; X)^\dagger$ for which we have the estimate

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, \|\cdot\|_X^p) &= 2\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{x}; \frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}, \|\cdot\|_X^p\Big) \\ &\overset{(56)}{\gtrsim}_{\mathsf{M}_p(X)} \frac{1}{t}\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{x}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^t, \|\cdot\|_X^p\Big) \overset{(10)}{\gtrsim} \frac{1}{t}\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{y}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^t, \|\cdot\|_X^2\Big).\end{aligned} \tag{59}$$

Then, repeating the rest of the proof mutatis mutandis, we deduce the bound

$$\gamma(A, \|\cdot\|_X^p) \lesssim_{\mathsf{M}_p(X)} \frac{\log(\dim(X)+1)}{1-\lambda_2(A)}, \tag{60}$$

which, in view of (58) and Theorem 1.2, implies the following embeddability result.

Theorem 5.2. *For every $S \in (0,\infty)$, there exists $C(S) \in (0,\infty)$ such that the following holds. If $p \in [1,2]$ and $(X, \|\cdot\|_X)$ is a finite-dimensional normed space with $\mathsf{S}_p(X) \leqslant S$, then the $\frac{p}{2}$-snowflake of $(X, \|\cdot\|_X)$ admits an embedding into ℓ_2 with quadratic average distortion at most $C(S)\sqrt{\log(\dim(X)+1)}$.*

Theorem 1.1 is a special case of Theorem 5.2 as $\mathsf{S}_1(X) = 1$ for any $(X, \|\cdot\|_X)$. However, Theorem 5.2 is a refinement of the average John theorem in that it captures the fact that more structured normed spaces (i.e. spaces with bounded p-uniform smoothness constant) require a lesser amount of snowflaking in order to be embedded into ℓ_2 with quadratic average distortion which depends subpolynomially on the dimension. It is worth emphasizing that for 2-uniformly smooth spaces (such as $L_r(\mu)$ with $2 < r < \infty$), Theorem 5.2 shows that *no* snowflaking is necessary for such an embedding to exist.

This approach can be further exploited even for target spaces which are not Hilbertian. Following Ball, Carlen, and Lieb (1994), we say that a normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ is q-uniformly convex, where $q \in [2,\infty)$, if there exists a constant $K \in (0,\infty)$ such that

$$\forall\, x, y \in X, \qquad \Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|_X^q + \frac{1}{K^q}\Big\|\frac{x-y}{2}\Big\|_X^q \leqslant \frac{\|x\|_X^q + \|y\|_X^q}{2}. \tag{61}$$

The least such constant $K \in (0,\infty)$ will be denoted by $\mathsf{K}_q(X)$. Observe that $\mathsf{K}_2(\ell_2) = 1$. Theorem 5.2 admits the following non-Hilbertian generalization. We shall denote by $\mathsf{c}_Y(\mathcal{M})$ the infimal distortion of a bi-Lipschitz embedding $f : (\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}}) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$.

Theorem 5.3. *For every $S, K \in (0,\infty)$, there exists $C(S,K) \in (0,\infty)$ such that the following holds. If $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$, $(X, \|\cdot\|_X)$ is a Banach space with $\mathsf{S}_p(X) \leqslant S$ and $(Y, \|\cdot\|_Y)$ is a Banach space with $\mathsf{K}_q(Y) \leqslant K$, then the $\frac{p}{q}$-snowflake of X admits an embedding into $\ell_q(Y)$ with q-average distortion at most $C(S,K)(\log(\mathsf{c}_Y(X)+1))^{1/q}$.*

In view of the duality principle[5] of Theorem 1.2, Theorem 5.3 is equivalent the following nonlinear spectral gap inequality. For every $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in \triangle^{n-1}$ and every π-reversible matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, we have

$$\gamma(A, \|\cdot\|_X^p) \lesssim_{\mathsf{M}_{p(X)},\mathsf{K}_{q(Y)},p,q} \log(\mathsf{c}_Y(X)+1)\gamma(A, \|\cdot\|_Y^q). \tag{62}$$

Fix $\boldsymbol{x} \in L_p(\pi; X)^\dagger$ with $\sum_{i=1}^n \pi_i x_i = 0$. Using Markov type and extrapolation as in (59), we deduce that for any $t \in \mathbb{N}$, there exists $\boldsymbol{y} \in L_q(\pi; X)^\dagger$ with $\sum_{i=1}^n \pi_i y_i = 0$ such that

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{x}; A, \|\cdot\|_X^p) \gtrsim_{\mathsf{M}_{p(X)},p,q} \frac{1}{t}\mathcal{R}\Big(\boldsymbol{y}; \Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^t, \|\cdot\|_X^q\Big). \tag{63}$$

Moreover, if $B_t \overset{\text{def}}{=} (\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2})^t$, the argument of (44) and (45) implies that

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\boldsymbol{y}; B_t, \|\cdot\|_X^q) \gtrsim_q \frac{\|\boldsymbol{y} - (B_t \otimes \mathsf{Id}_X)\boldsymbol{y}\|_{L_q(\pi;X)}^q}{\|\boldsymbol{y}\|_{L_q(\pi;X)}^q} \\ \geqslant \big(1 - \|B_t \otimes \mathsf{Id}_X\|_{L_q^0(\pi;X)\to L_q^0(\pi;X)}\big)^q,\end{aligned} \tag{64}$$

where $L_q^0(\pi; Z) = \{\boldsymbol{z} \in L_q(\pi; Z) : \sum_{i=1}^n \pi_i z_i = 0\}$. Therefore, we have

$$\gamma(A, \|\cdot\|_X^p) \overset{(63)\wedge(35)\wedge(64)}{\lesssim_{\mathsf{M}_{p(X)},p,q}} \frac{t}{\big(1 - \|B_t \otimes \mathsf{Id}_X\|_{L_q^0(\pi;X)\to L_q^0(\pi;X)}\big)^q}. \tag{65}$$

Notice that by the definition of $\mathsf{c}_Y(X)$,

$$\|B_t \otimes \mathsf{Id}_X\|_{L_q^0(\pi;X)\to L_q^0(\pi;X)} \leqslant \mathsf{c}_Y(X)\|B_t \otimes \mathsf{Id}_Y\|_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)} \tag{66}$$

and moreover

$$\begin{aligned}\|B_t \otimes \mathsf{Id}_Y\|_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)} &= \Big\|\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big)^t \otimes \mathsf{Id}_Y\Big\|_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)} \\ &\leqslant \Big\|\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big) \otimes \mathsf{Id}_Y\Big\|^t_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)}.\end{aligned} \tag{67}$$

Combining (65), (66) and (67), we finally deduce that for any $t \in \mathbb{N}$,

$$\gamma(A, \|\cdot\|_X^p) \lesssim_{\mathsf{M}_{p(X)},p,q} t \cdot \Big(1 - \mathsf{c}_Y(X)\Big\|\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\Big) \otimes \mathsf{Id}_Y\Big\|^t_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)}\Big)^{-q}. \tag{68}$$

[5] Observe that a direct application of Theorem 1.2 and (62) would imply that the $\frac{p}{q}$-snowflake of X admits such an embedding into an ultrapower of $\ell_q(Y)$ rather than $\ell_q(Y)$ itself. Taking an ultrapower in this statement is redundant if X is assumed to be p-uniformly smooth and Y is q-uniformly convex, as was shown in Naor (2021, Corollary 23). We shall not address this delicate issue here.

Optimizing over t we thus conclude that

$$\gamma(A, \|\cdot\|_X^p) \lesssim_{\mathsf{M}_{p(X)},p,q} \frac{\log(\mathsf{c}_Y(X)+1)}{\log\left(1/\left\|\left(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\right)\otimes \mathsf{Id}_Y\right\|_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)}\right)} \tag{69}$$

Observe that so far we have been very closely following the Hilbertian proof. Indeed, if Y is a Hilbert space and $q = 2$, then the operator norm appearing in (69) is simply $\frac{1+\lambda_2(A)}{2}$ and thus (9) follows from (69) and John's theorem which asserts that $\mathsf{c}_{\ell_2}(X) \leqslant \sqrt{\dim X}$. In the general (Banach space-valued) setting of Theorem 5.3, we need a more robust argument to show that the operator norm $\left\|\left(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}\right)\otimes \mathsf{Id}_Y\right\|_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)}$ is bounded away from 1 by a quantity which depends on the nonlinear spectral gap $\gamma(A, \|\cdot\|_Y^q)$. To do this, we will leverage the q-uniform convexity of the normed space $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Fix a metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ and $q \in (0,\infty)$. If $\pi \in \triangle^{n-1}$ and $A \in M_n(\mathbb{R})$ is a π-reversible stochastic matrix, the *nonlinear absolute spectral gap* of A with respect to $d_{\mathcal{M}}^q$, denoted by $\gamma_+(A, d_{\mathcal{M}}^q)$, is the least constant $\gamma_+ \in (0,\infty]$ such that

$$\forall\, x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in \mathcal{M}, \qquad \sum_{i,j=1}^n \pi_i\pi_j d_{\mathcal{M}}(x_i,y_j)^q \leqslant \gamma_+ \sum_{i,j=1}^n \pi_i a_{ij} d_{\mathcal{M}}(x_i,y_j)^q. \tag{70}$$

The terminology stems from the fact that $\gamma_+(A, |\cdot|^2) = (1-\max_{i=2,\ldots,n}|\lambda_i(A)|)^{-1}$, where $1=\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)\geqslant -1$ are the eigenvalues of A. Nonlinear spectral gaps and nonlinear absolute spectral gaps are related via the following inequalities.

Lemma 5.4. *Fix $q \in [1,\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ and $\pi \in \triangle^{n-1}$. For every π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ and every metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$, we have*

$$2\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^q) \leqslant \gamma_+\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}, d_{\mathcal{M}}^q\Big) \leqslant 2^{2q+1}\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^q). \tag{71}$$

The elementary proof of Lemma 5.4 can be found in Naor (2014, Lemma 2.3). The pertinence of absolute spectral gaps in the ensuing discussion is that, in the case of uniformly convex spaces, they have a useful connection to vector-valued operator norms of adjacency matrices. This is manifested by the following proposition of Mendel and Naor (2014, Lemma 6.6), whose proof relies on Pisier's martingale cotype inequality for q-uniformly convex spaces (Pisier, 1975a).

Proposition 5.5. *Fix $q \in [2,\infty)$ and let $(Y, \|\cdot\|_Y)$ be a q-uniformly convex normed space. Then, for every $n \in \mathbb{N}$, $\pi \in \triangle^{n-1}$ and every π-reversible stochastic matrix $C \in M_n(\mathbb{R})$, we have*

$$\|C\otimes \mathsf{Id}_Y\|_{L_q^0(\pi;Y)\to L_q^0(\pi;Y)} \leqslant \Big(1-\frac{1}{(2^{q-1}-1)\mathsf{K}_q(Y)^q\gamma_+(C, \|\cdot\|_Y^q)}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{72}$$

Proposition 5.5 is proven by Mendel and Naor (2014) for the special case that π is the uniform measure on $\{1,\dots,n\}$ and C is a symmetric stochastic matrix. The proof of the general statement presented here is similar to this special case and we thus omit it. Plugging the bound (72) in (69) for $C = \frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}$, we finally deduce that

$$\gamma(A, \|\cdot\|_X^p) \overset{(69)\wedge(72)}{\lesssim_{\mathsf{M}_{p(X),\mathsf{K}_q(Y),p,q}}} \log(\mathsf{c}_Y(X)+1)\gamma_+\Big(\frac{A+\mathsf{Id}_n}{2}, \|\cdot\|_Y^q\Big) \overset{(71)}{\lesssim_q} \log(\mathsf{c}_Y(X)+1)\gamma(A,\|\cdot\|_Y^q). \qquad \square \tag{73}$$

6. Geometric and algorithmic applications

In this final section, we present a selection of geometric and algorithmic applications of nonlinear spectral gaps (mostly without proofs) and related open questions.

6.1. Nonembeddability of expanders into low-dimensional normed spaces

Let $G = (V,E)$ be a d-regular graph on the vertex set $\{1,\dots,n\}$. We shall denote by A_G the normalized adjacency matrix of G, that is, the $n\times n$ symmetric stochastic matrix whose entries are given by $(A_G)_{ij} = \frac{\mathbf{1}_{\{i,j\}\in E}}{d}$, where $i,j\in\{1,\dots,n\}$. A sequence $\{G_n = (V_n,E_n)\}_{n=1}^\infty$ of d-regular graphs with $|V_n|\to\infty$ as $n\to\infty$ is called an expander graph sequence if $\sup_{n\in\mathbb{N}}\gamma(A_{G_n}) < \infty$. The existence of regular expander graph sequences is a classical fact that can be proven via the probabilistic method (Pinsker, 1973 and Bollobás, 1988), while deterministic constructions are notoriously more involved (see, e.g., the book of Davidoff, Sarnak, and Valette, 2003). Embeddability properties of connected expanders viewed as metric spaces when equipped with the shortest path distance were first investigated by Linial, London, and Rabinovich (1995) who, among other results, showed that if an n-vertex d-regular expander embeds with quadratic average distortion D in a k-dimensional normed space, then $k \gtrsim (\log_d n)^2/D^2$. We shall now present the following (sharp) improvement of Linial, London and Rabinovich's result due to Naor (2017) as a consequence of the average John theorem.

Theorem 6.1. *For every $q\in[1,\infty)$, there exists $c(q)\in(0,\infty)$ such that the following holds for every $\gamma, D\in[1,\infty)$. Let $G=(V,E)$ be a d-regular connected graph on n vertices with $\gamma(A_G)\leqslant\gamma$ and let $(X,\|\cdot\|_X)$ be a normed space such that (G,d_G) admits an embedding into X with q-average distortion at most D. Then,*

$$\dim(X) \geqslant n^{c(q)/\gamma D\log d}. \tag{74}$$

Proof. We shall first prove the case $q = 1$. By the assumption, there exists a D-Lipschitz map[(6)] $f : (G, d_G) \to (X, \|\cdot\|_X)$ satisfying the average lower bound

$$\frac{1}{n^2} \sum_{u,v \in V} \|f(u) - f(v)\|_X \geqslant \frac{1}{n^2} \sum_{u,v \in V} d_G(u,v). \tag{75}$$

Let $k = \dim(X)$. Applying Theorem 1.1 for the measure $\mu = \frac{1}{n} \sum_{u \in V} \delta_{f(u)}$ on X, we deduce that there exists a $O(\sqrt{\log k})$-Lipschitz function $h : (X, \|\cdot\|_X^{1/2}) \to \ell_2$ such that

$$\frac{1}{n^2} \sum_{u,v \in V} \|h(f(u)) - h(f(v))\|_{\ell_2}^2 \geqslant \frac{1}{n^2} \sum_{u,v \in V} \|f(u) - f(v)\|_X. \tag{76}$$

Since the graph G is a regular expander, inequality (5) implies that

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{u,v \in V} \|h(f(u)) - h(f(v))\|_{\ell_2}^2 &\leqslant \frac{2\gamma}{dn} \sum_{\{a,b\} \in E} \|h(f(a)) - h(f(b))\|_{\ell_2}^2 \\ &\lesssim \frac{\gamma \log k}{dn} \sum_{\{a,b\} \in E} \|f(a) - f(b)\|_X \lesssim \gamma D \log k, \end{aligned} \tag{77}$$

where in the last two inequalities we used the Lipschitz conditions for h and f. On the other hand, the graph G is d-regular and therefore, for any fixed $u \in V$ there exist at least $\frac{n}{2}$ vertices $v \in V$ such that $d_G(u,v) \geqslant \lfloor \log_d(n/2) \rfloor$. Hence, we have

$$\frac{1}{n^2} \sum_{u,v \in V} d_G(u,v) \gtrsim \log_d n, \tag{78}$$

which, combined with (75), (76) and (77), implies that

$$\log_d n \lesssim \gamma D \log k, \tag{79}$$

thus completing the proof of (74) for $q = 1$. To address the general case $q \geqslant 1$, we need a slight modification of this argument. It is a formal consequence of Naor (2021, Proposition 6) and Theorem 1.1, that for any $q \geqslant 1$, the $\frac{1}{2}$-snowflake of any finite-dimensional normed space X embeds into ℓ_2 with $(2q)$-average distortion at most $C(q)\sqrt{\log(\dim(X)+1)}$. Considering a $O(\sqrt{\log k})$-Lipschitz embedding satisfying the analogue of (76) with power $2q$ instead of the embedding h and repeating the above argument completes the proof of (74) for general $q \geqslant 1$. □

A few historical comments are in order. Due to the existence of regular expander graph sequences, Theorem 6.1 implies that for arbitrarily large n, there exists an n-point metric space $(\mathcal{M}_n, d_{\mathcal{M}_n})$ such that if $\mathcal{M}_n$ admits an embedding with bi-Lipschitz

(6) As is common, we shall identify the graph G with its vertex set V thus writing $f : G \to X$ rather than $f : V \to X$. Moreover, we will always denote by d_G the shortest path distance on V.

distortion D into a finite-dimensional normed space X, then $\dim(X) \geqslant n^{c/D}$ for some universal constant $c \in (0,\infty)$. Therefore, Theorem 6.1 provides a negative answer to the question of Johnson and Lindenstrauss (1984) discussed in Section 1.4. A different negative answer to this question had been given in important work of Matoušek (1996), who devised an ingenious random family of metric spaces and showed that they satisfy this property using input from real algebraic geometry. It is worth mentioning that a precursor of Theorem 6.1 is a result of Lee, Mendel, and Naor (2005, Proposition 4.1), who showed that if an n-vertex regular expander embeds in ℓ_∞^d with bi-Lipschitz distortion at most D, then $d \geqslant n^{c/D}$ for some universal constant $c \in (0,\infty)$.

Quantitatively, Theorem 6.1 provides a sharp relation between the dimension of the target space X, the number of vertices of G and the distortion D. Indeed, a classical theorem of Johnson, Lindenstrauss, and Schechtman (1987) asserts that for every $n \in \mathbb{N}$ and $D \geqslant 1$, any n-point metric space $\mathcal{M}$ admits a bi-Lipschitz embedding with distortion at most D into some d-dimensional normed space X, where $d \lesssim_D n^{C/D}$ for some universal constant $C \in (0,\infty)$. This result was later refined by Matoušek (1992), who showed that one can always take $X = \ell_\infty^d$ as a target space in this statement.

Remark 6.2. The optimality of Theorem 6.1 which follows from the works of Johnson, Lindenstrauss, and Schechtman (1987) and Matoušek (1992) immediately implies that the $O(\sqrt{\log \dim(X)})$ upper bound for the average distortion in Theorem 1.1 is sharp. Indeed, suppose that the $\frac{1}{2}$-snowflake of $X = \ell_\infty^d$ admitted an embedding into ℓ_2 with quadratic average distortion $o(\sqrt{\log d})$. Then, the proof of Theorem 6.1 would show that if an n-vertex expander embeds with bi-Lipschitz distortion D in ℓ_∞^d, then

$$\log n = o(D \log d). \tag{80}$$

However, this inequality contradicts the embedding theorem of Matoušek (1992).

Following the terminology of Naor (2018), we say that an infinite-dimensional Banach space $(X, \|\cdot\|_X)$ admits (quadratic) average dimension reduction with distortion $D \in (1,\infty)$ if for any $n \in \mathbb{N}$ there exists $k_n = k_n^D(X) \in \mathbb{N}$ satisfying

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log k_n}{\log n} = 0 \tag{81}$$

such that the following condition holds. For any n points $x_1,\ldots,x_n \in X$, there exists a subspace $F = F(x_1,\ldots,x_n)$ of X with $\dim F \leqslant k_n$ and points $y_1,\ldots,y_n \in F$ satisfying $\|y_i - y_j\|_X \leqslant D\|x_i - x_j\|_X$ for every $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ and

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \|y_i - y_j\|_X^2 \geqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^n \|x_i - x_j\|_X^2. \tag{82}$$

As every finite metric space embeds isometrically in ℓ_∞, the aforementioned result of Matoušek (1996) (or Theorem 6.1) implies that ℓ_∞ does not admit average dimension reduction with any distortion $D > 1$. The following tantalizing question remains open.

Question 2. *Does ℓ_1 admit average dimension reduction with any distortion $D > 1$?*

We note that the bi-Lipschitz analogue of Question 2 is answered by a famous theorem of Brinkman and Charikar (2005) (see also Lee and Naor (2004) for a different influential proof) who showed that for arbitrarily large n and $D > 1$ there exists an n-point subset of ℓ_1 which does not admit a bi-Lipschitz embedding into any subspace of ℓ_1 of dimension at most n^{c/D^2}, where $c \in (0, \infty)$ is a universal constant.

6.2. Average distortion embeddings of ℓ_p into ℓ_2

In Theorem 1.1, it was established that any finite-dimensional normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ admits an embedding into ℓ_2 with quadratic average distortion $O(\sqrt{\log(\dim(X)+1)})$ via the nonlinear spectral gap inequality (9). As explained in Remark 6.2, this estimate for the quadratic average distortion is asymptotically optimal yet, quite surprisingly, there exist many non-Hilbertian normed spaces which embed with constant quadratic average distortion in ℓ_2. The following result is the main theorem of Naor (2014).

Theorem 6.3. *There exists $C \in (0, \infty)$ such that for any $p \in (2, \infty)$, the normed space ℓ_p admits an embedding into ℓ_2 with quadratic average distortion Cp.*

Theorem 6.3 is established in Naor (2014) via the nonlinear spectral gap inequality

$$\forall\, p > 2, \qquad \gamma(A, \|\cdot\|_{\ell_p}^2) \lesssim \frac{p^2}{1 - \lambda_2(A)}, \tag{83}$$

which holds for any $\pi \in \triangle^{n-1}$ and any π-reversible stochastic matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, and the duality principle of Theorem 1.2. Once again, (83) is proven in Naor (2014) in the special case that π is the uniform measure on $\{1, \ldots, n\}$ and A is a symmetric stochastic matrix. The proof of the more general statement presented here (which is equivalent to Theorem 6.3) is identical. In Naor (2014), Theorem 6.3 and (83) were used to give new lower bounds for the ℓ_p-distortion of random connected d-regular graphs, Ramanujan graphs and abelian Alon–Roichman graphs, improving earlier results of Matoušek (1997). It is worth pointing out that (83) is no longer valid when $p \in [1, 2)$.

6.3. Expanders with respect to Banach spaces

Combinatorial expanders are ubiquitous geometric objects whose metric structure is notoriously incompatible with Euclidean geometry. Nonlinear spectral gaps allow us to analyze non-Euclidean analogues of these exotic metrics. Let $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ be a metric space. A sequence $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ of d-regular graphs with $|G_n| \to \infty$ is called an expander graph sequence with respect to $\mathcal{M}$ if $\sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma(A_{G_n}, d_{\mathcal{M}}^2) < \infty$. If such graphs exist, we say that $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ admits a sequence of d-regular expanders. The following influential observation on the embeddability of expanders is essentially due to Matoušek (1997).

Proposition 6.4. *Let $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ be a metric space and fix $\gamma, q \in (0,\infty)$. Suppose that $G = (V, E)$ is a d-regular connected graph on n vertices with $\gamma(A_G, d_{\mathcal{M}}^q) \leqslant \gamma$. If (G, d_G) embeds into $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ with q-average distortion at most D, then $D \gtrsim \frac{\log_d n}{\gamma^{1/q}}$.*

Proof. By the assumption, there exists $\sigma \in (0,\infty)$ and a σD-Lipschitz map $f : (G, d_G) \to (\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ satisfying the average lower bound

$$\frac{1}{n^2} \sum_{u,v\in V} d_{\mathcal{M}}\big(f(u), f(v)\big)^q \geqslant \frac{\sigma^q}{n^2} \sum_{u,v\in V} d_G(u,v)^q \gtrsim \sigma^q (\log_d n)^q, \tag{84}$$

where the second inequality follows from (78) and Jensen's inequality. On the other hand, by the definition (6) of $\gamma(A, d_{\mathcal{M}}^q)$, we have

$$\frac{1}{n^2} \sum_{u,v\in V} d_{\mathcal{M}}\big(f(u), f(v)\big)^q \leqslant \frac{2\gamma}{dn} \sum_{\{a,b\}\in E} d_{\mathcal{M}}\big(f(a), f(b)\big)^q \leqslant \gamma\sigma^q D^q, \tag{85}$$

where the last inequality follows from the Lipschitz condition for f. Rearranging, we deduce the desired lower bound for the q-average distortion D. □

Deciding whether a given non-Euclidean metric space admits a sequence of expanders is a notoriously difficult problem in metric geometry, even when specified to normed spaces. By Proposition 6.4, it is clear that if there exists a sequence $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ of regular expanders with respect to a normed space $(X, \|\cdot\|_X)$, then X cannot contain subspaces uniformly isomorphic to $\{\ell_\infty^m\}_{m=1}^{\infty}$ as it would then bi-Lipschitzly contain all finite metric spaces with uniform distortion. Normed spaces which do not uniformly contain $\{\ell_\infty^m\}_{m=1}^{\infty}$ are said to have finite cotype in Banach space theory jargon (Maurey, 2003). Strikingly, this is the only known necessary condition for a normed space to admit an expander graph sequence and the following general question remains open.

Question 3. *Is every combinatorial expander also an expander with respect to any normed space of finite cotype?*

Such implications, asserting that a classical spectral gap implies a nonlinear spectral gap, are currently only known for substantially smaller classes of normed spaces from works of Matoušek (1997), Ozawa (2004), Pisier (2010) and Naor and Silberman (2011). It is worth mentioning that even the following question, which is formally weaker than Question 3 in view of Proposition 6.4, remains open.

Question 4. *Does there exist a sequence of finite metric spaces* $\{(\mathcal{M}_n, d_{\mathcal{M}_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *with* $|\mathcal{M}_n| \to \infty$ *as* $n \to \infty$ *such that for any normed space* $(X, \|\cdot\|_X)$ *of finite cotype, the bi-Lipschitz distortion required to embed* $\mathcal{M}_n$ *into* X *satisfies* $\mathsf{c}_X(\mathcal{M}_n) \gtrsim_X \log |\mathcal{M}_n|$*?*

A positive answer to Question 4 would imply a striking dichotomy in the embeddability of finite metric spaces into infinite-dimensional normed spaces. If such a normed space X does not have finite cotype, then it bi-Lipschitzly contains every finite metric space with distortion $1+\varepsilon$ for any $\varepsilon > 0$ (Maurey, 2003). On the other hand, if X is an arbitrary infinite-dimensional space, then any finite metric space $\mathcal{M}$ admits a bi-Lipschitz embedding into X with distortion $O(\log |\mathcal{M}|)$ by the theorems of Dvoretzky (1961) and Bourgain (1985). A positive answer to Question 4 would imply that this bound is always optimal under the (necessary) assumption that X has finite cotype.

In regard to Question 3, even the *existence* of a sequence $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ of regular graphs which are expanders with respect to any space of finite cotype remains unknown. The strongest available result in this direction is the following profound theorem of Lafforgue (2008), whose proof is an ingenious combination of algebraic and vector-valued harmonic analytic methods. We say that a normed space $(X, \|\cdot\|_X)$ has nontrivial type if X does not contain subspaces uniformly isomorphic to $\{\ell_1^m\}_{m=1}^{\infty}$ (Maurey, 2003). Any space of nontrivial type has finite cotype, but the converse is not true (e.g. for ℓ_1).

Theorem 6.5. *There exists a sequence of regular graphs* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ *which is an expander graph sequence with respect to any normed space of non-trivial type.*

Lafforgue's graphs can be obtained as Cayley graphs of finite quotients of cocompact lattices in $SL_3(\mathbb{Q}_p)$, where p is a prime and $\mathbb{Q}_p$ is the field of p-adic rationals.

A completely different construction of a sequence of regular graphs which are expanders with respect to a large family of norms was presented in work of Mendel and Naor (2014). Theirs is a vector-valued adaptation of the zig-zag product construction of Reingold, Vadhan, and Wigderson (2002) and the resulting graphs are expanders with respect to any normed space which admits an equivalent uniformly convex norm. Clearly any such space has nontrivial type but the converse is not true (Pisier, 1975b). While we will not outline the argument of Mendel and Naor (2014), it is worth pointing out that it consists of a novel construction of a base graph along with an adaptation of the zig-zag iteration of Reingold, Vadhan, and Wigderson

(2002). The necessity of the uniform convexity assumption in this argument stems from this iteration procedure. On the other hand, the construction of the base graph (which was straightforward in the case of combinatorial expanders) has raised influential questions in vector-valued harmonic analysis that led to investigations of independent interest (Mendel and Naor, 2014; Eskenazis and Ivanisvili, 2020, 2021).

6.4. Expanders with respect to Alexandrov spaces

A complete geodesic metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ is an Alexandrov space of nonpositive curvature (or a CAT(0) space) if for any quadruple of points $x, y, z, m \in \mathcal{M}$ such that m is a metric midpoint of x and y, that is, $d_{\mathcal{M}}(m, x) = d_{\mathcal{M}}(m, y) = \frac{1}{2} d_{\mathcal{M}}(x, y)$, we have

$$d_{\mathcal{M}}(z, m)^2 \leqslant \frac{1}{2} d_{\mathcal{M}}(z, x)^2 + \frac{1}{2} d_{\mathcal{M}}(z, y)^2 - \frac{1}{4} d_{\mathcal{M}}(x, y)^2. \tag{86}$$

If the reverse inequality holds true for any such quadruple $x, y, z, m \in \mathcal{M}$, then $\mathcal{M}$ is an Alexandrov space of nonnegative curvature. Alexandrov spaces of nonpositive (respectively nonnegative) curvature are (potentially singular) metric spaces which generalize Riemannian manifolds with nonpositive (resp. nonnegative) sectional curvature.

An argument of Wang (1998) shows that any regular combinatorial expander is also an expander with respect to any Hilbert manifold with a CAT(0) Riemannian metric (see also Naor and Silberman, 2011, Corollary 4.10). The first systematic study of expanders with respect to (non-smooth) Alexandrov spaces of nonpositive curvature was undertaken by Mendel and Naor (2015), who showed the following theorem.

Theorem 6.6. *There exists a CAT(0) space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ and a sequence $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ of 3-regular graphs such that $\sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma(A_{G_n}, d_{\mathcal{M}}^2) < \infty$, yet a random d-regular graph $\mathbf{G}$ on n vertices satisfies $\gamma(A_{\mathbf{G}}, d_{\mathcal{M}}^2) \gtrsim (\log_d n)^2$ with probability $1 - o_n(1)$ as $n \to \infty$.*

Theorem 6.6 reveals a striking difference between nonlinear spectral gaps with respect to Alexandrov spaces of nonpositive curvature and classical spectral gaps, as a random d-regular graph on n-vertices is a combinatorial expander with probability $1 - o_n(1)$ as $n \to \infty$ for any fixed $d \in \mathbb{N}$ (Bollobás, 1988). The following question remains open.

Question 5. *Does every CAT(0) space admit a sequence of regular expanders? More ambitiously, does there exist a sequence of $O(1)$-regular graphs $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ with $|G_n| \to \infty$ such that $\sup_{n \in \mathbb{N}} \gamma(A_{G_n}, d_{\mathcal{M}}^2) < \infty$ for every CAT(0) space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$?*

A positive answer to the stronger statement in Question 5 would imply (in view of Proposition 6.4) the existence of arbitrarily large finite metric spaces requiring logarithmic distortion to be embedded in any Alexandrov space of nonpositive curvature. The following question was asked by Eskenazis, Mendel, and Naor (2019).

Question 6. *Does there exist a sequence of finite metric spaces* $\{(M_n, d_{M_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *with* $|M_n| \to \infty$ *as* $n \to \infty$ *such that for any CAT(0) space* $(N, \|\cdot\|_N)$*, the bi-Lipschitz distortion required to embed* M_n *into* N *satisfies* $\mathsf{c}_N(M_n) \gtrsim \log |M_n|$*?*

In the dual nonnegative curvature regime, the analogue of Question 5 was answered by Andoni, Naor, and Neiman (2018), who showed that there exists an Alexandrov space of nonnegative curvature which does not admit any sequence of regular expanders. Moreover, they asked the following dual to Question 6.

Question 7. *Does there exist an Alexandrov space of nonnegative curvature* (N, d_N) *such that any finite metric space* (M, d_M) *embeds into* N *with bi-Lipschitz distortion* $\mathsf{c}_N(M) \lesssim \sqrt{\log |M|}$*?*

In their paper, they specifically asked Question 7 for the concrete Alexandrov space $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^3)$, which is the space of all Borel probability measures μ on $\mathbb{R}^3$ satisfying $\int_{\mathbb{R}^3} \|x\|_{\ell_2^3}^2 \, \mathrm{d}\mu(x) < \infty$ equipped with the Wasserstein W_2-distance.

6.5. Coarse non-universality

Let (M, d_M) and (N, d_N) be two metric spaces and $\omega, \Omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ two moduli satisfying $\omega \leqslant \Omega$ pointwise and $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$. A mapping $f : M \to N$ is a coarse embedding with lower and upper moduli ω and Ω respectively if

$$\forall\, x, y \in M, \qquad \omega\big(d_M(x,y)\big) \leqslant d_N\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \Omega\big(d_M(x,y)\big). \tag{87}$$

A family of metric spaces $\{(M_\alpha, d_{M_\alpha})\}_\alpha$ is said to embed equi-coarsely into a metric space (N, d_N) if there exist two moduli $\omega, \Omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ satisfying $\omega \leqslant \Omega$ pointwise and $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$ and a family of coarse embeddings $\{f_\alpha : M_\alpha \to N\}_\alpha$ with lower and upper moduli ω and Ω. The pertinence of nonlinear spectral gaps in coarse geometry stems from the following influential observation of Gromov (2000, 2003).

Proposition 6.7. *Fix* $d \in \mathbb{N}$*,* $p \in (0, \infty)$ *and let* (M, d_M) *be a metric space. Suppose that* $\{G_n = (V_n, E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ *is a sequence of connected* d*-regular graphs with* $|V_n| \to \infty$ *and* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma(A_{G_n}, d_M^p) < \infty$*. Then, the family of graphs* $\{(G_n, d_{G_n})\}_{n=1}^{\infty}$ *equipped with their shortest path distances does not equi-coarsely embed into* M*.*

Proof. Let $\gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \gamma(A_{G_n}, d_M^p) < \infty$. Suppose that there exist two moduli $\omega, \Omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ with $\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \infty$ and mappings $f_n : V_n \to M$ with

$$\forall\, x, y \in V_n, \qquad \omega\big(d_{G_n}(x,y)\big) \leqslant d_M\big(f(x), f(y)\big) \leqslant \Omega\big(d_{G_n}(x,y)\big). \tag{88}$$

By definition of nonlinear spectral gaps, we have

$$\frac{1}{|V_n|^2} \sum_{u,v\in V_n} d_M\big(f_n(u), f_n(v)\big)^p \leqslant \frac{2\gamma}{d|V_n|} \sum_{\{a,b\}\in E_n} d_M\big(f_n(a), f_n(b)\big)^p. \tag{89}$$

Moreover, using the upper modulus, we get

$$\frac{2\gamma}{d|V_n|}\sum_{\{a,b\}\in E_n} d_{\mathcal{M}}\big(f_n(a),f_n(b)\big)^p \overset{(88)}{\leqslant} \frac{2\gamma}{d|V_n|}\sum_{\{a,b\}\in E_n}\Omega(1)^p = \gamma\Omega(1)^p. \tag{90}$$

Finally, as each graph G_n is d-regular, for any $u\in V_n$ there exist at least $\frac{|V_n|}{2}$ vertices $v\in V_n$ such that $d_{G_n}(u,v)\geqslant \lfloor \log_d(|V_n|/2)\rfloor$. Thus, the lower modulus gives

$$\frac{1}{|V_n|^2}\sum_{u,v\in V_n} d_{\mathcal{M}}\big(f_n(u),f_n(v)\big)^p \overset{(88)}{\geqslant} \frac{1}{|V_n|^2}\sum_{u,v\in V_n}\omega\big(d_{G_n}(u,v)\big)^p \geqslant \frac{\omega(\lfloor \log_d(|V_n|/2)\rfloor)^p}{2}.$$

Combining all the above, we deduce that

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad \omega(\lfloor \log_d(|V_n|/2)\rfloor)^p \leqslant 2\gamma\Omega(1)^p, \tag{91}$$

which clearly contradicts the coarse condition $\lim_{t\to\infty}\omega(t)=\infty$. □

An important consequence of Gromov's observation is that if $(\mathcal{M},d_{\mathcal{M}})$ admits a sequence of regular expanders $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$, then there exists a metric space (e.g. the disjoint union $\bigsqcup_{n\geqslant 1}(G_n,d_{G_n})$) which does not admit a coarse embedding into $\mathcal{M}$. Consequently, the mere existence of combinatorial expanders implies that Hilbert spaces are not coarsely universal which is a well-known theorem of Dranishnikov et al. (2002). Moreover, Lafforgue's Theorem 6.5 implies the existence of a metric space which does not admit a coarse embedding into any Banach space of non-trivial type. The coarse non-universality of this class was previously established in work of Mendel and Naor (2008) by proving that Banach spaces of non-trivial type with cotype q have *sharp* metric cotype q. Understanding whether every Banach space of cotype q has sharp metric cotype q is the central open problem in the theory of metric cotype of Banach spaces; see Giladi, Mendel, and Naor (2011) for the best known results to date. If this was the case, then the following (currently open) question on coarse embeddings would have a negative answer.

Question 8. *Does every separable metric space embed coarsely into some Banach space of finite cotype?*

It follows from Proposition 6.7 that a negative answer to Question 8 would also be a consequence of the existence of a sequence of regular graphs $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ which are expanders with respect to any normed space of finite cotype simultaneously, let alone from a positive answer to the much stronger Question 3.

Despite the fact that Question 5 on the existence of expanders with respect to Alexandrov spaces of nonpositive curvature remains open, the coarse non-universality of this class was established by Eskenazis, Mendel, and Naor (2019),

thus answering a question raised by Gromov (1993). The main technical contribution of this work is the proof that every CAT(0) space $\mathcal{M}$ has sharp metric cotype 2 which formally implies that ℓ_q does not admit a coarse embedding in $\mathcal{M}$ for any $q > 2$. In contrast to this result, the very surprising fact that there exist coarsely universal Alexandrov spaces of nonnegative curvature was proven by Andoni, Naor, and Neiman (2018).

6.6. Approximate nearest neighbor search

Fix a parameter $c > 1$. The c-Approximate Nearest Neighbor Search problem is defined as follows. Given an n-point dataset $\mathcal{P}$ in some metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$, we want to build a data structure[(7)] that, given any query point $q \in \mathcal{M}$, returns a point $\widehat{p} \in \mathcal{P}$ with $d_{\mathcal{M}}(q, \widehat{p}) \leqslant c \min_{p \in \mathcal{P}} d_{\mathcal{M}}(q, p)$. In practice, this problem can be reduced to its "decision version" (see Har-Peled, Indyk, and Motwani, 2012), which is the c-Approximate *Near* Neighbor Search (c-ANN) problem at a *pre-fixed* distance scale $r > 0$. In the c-ANN problem at scale r, we are again given an n-point dataset $\mathcal{P}$ in some metric space $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ and we want to build a data structure that, given any query point $q \in \mathcal{M}$ for which there exists a point $p^* \in \mathcal{P}$ with $d_{\mathcal{M}}(q, p^*) \leqslant r$, returns a point $\widehat{p} \in \mathcal{P}$ with $d_{\mathcal{M}}(q, \widehat{p}) \leqslant cr$. The main parameters to optimize are the *space* the data structure occupies and the *time* it takes to answer a query. A majority of the research conducted on this problem has focused on d-dimensional normed spaces rather than general metric spaces and moreover most of the algorithms in the literature are *randomized* in the sense that they return a random point $\widehat{p}$ satisfying $d_{\mathcal{M}}(q, \widehat{p}) \leqslant cr$ with probability at least $1 - \delta$ for some pre-fixed confidence parameter $\delta \in (0, 1)$.

The first approaches to the c-ANN problem for d-dimensional norms produced data-independent data structures, in which the memory cells accessed by the algorithm do not depend on the dataset $\mathcal{P}$ but only on the query point q. In particular, building such data structures via (oblivious) metric dimension reduction has been used with great success for the Hilbert space ℓ_2^d (Indyk and Motwani, 1999; Har-Peled, Indyk, and Motwani, 2012), the hypercube $\{-1, 1\}^d$ equipped with the Hamming distance (Kushilevitz, Ostrovsky, and Rabani, 2000) and spaces which (effectively) embed in them (Andoni, Indyk, and Krauthgamer, 2009; Nguyễn, 2014). While dimension reduction techniques yield data structures with polynomial space for these norms, these results are often far from practical due to the large degree of said polynomial. To overcome this barrier, Indyk and Motwani (1999) introduced an influential technique called *Locality-Sensitive Hashing* (LSH) relying on (data-independent) randomized space partitions. Somewhat informally, a distribution $\mathcal{D}$

[(7)] For the purposes of this survey, a data structure of size M is an array $A[1 \dots M]$ of numbers (the "memory") along with an algorithm which, given a point $q \in \mathcal{M}$, returns a point $\widehat{p} \in \mathcal{P}$.

over a family of partitions of $\mathcal{M}$ is called *sensitive* at scale r up to error c if any two points at distance at most r are $\mathcal{D}$-likely to belong in the same cluster of the partition and any two points at distance at least cr are $\mathcal{D}$-unlikely to do so (where the implicit probabilities affect the space and time requirements of the data structure). As shown by Indyk and Motwani (1999), a (computationally efficient) sensitive distribution over random partitions can serve as a pre-filter for the dataset $\mathcal{P}$ as the query point q is very likely to be indistinguishable from its near neighbors but is unlikely to collide with points p having $d_{\mathcal{M}}(q,p) > cr$. Using LSH, they were able to improve the space requirements over the existing c-ANN algorithms to almost linear for large enough accuracy parameters $c > 1$. We refer to the thorough survey of Andoni, Indyk, and Razenshteyn (2018) for a detailed account of these and other contributions on the c-ANN problem and further references.

Despite these advances towards the c-ANN problem, researchers proved strong impossibility results (Motwani, Naor, and Panigrahy, 2007; O'Donnell, Wu, and Zhou, 2014) for the existence of data-independent data structures arising from LSH, thus creating the necessity for the development of efficient data-*dependent* algorithms. Historically, the first such result was proven by Indyk (2001) for ℓ_∞^d. In recent years, this approach has gained a lot of momentum, especially in view of the works of Andoni, Indyk, and Krauthgamer (2009) for the Ulam metric, Andoni, Indyk, Nguyễn, et al. (2014) and Andoni and Razenshteyn (2015) for ℓ_2^d and Andoni, Nguyen, et al. (2017) for 1-symmetric norms. A breakthrough in this direction was presented in the work of Andoni, Naor, Nikolov, et al. (2018a) who showed the following theorem for *general* d-dimensional normed spaces. It is worth emphasizing that their result does not a priori give any bound on the running time of the algorithm, it just restricts the number of memory locations the data structure is allowed to probe.

Theorem 6.8. *Fix $\varepsilon \in (0,1)$ and let X be a d-dimensional normed space. There exists a randomized data structure for $O\big(\frac{\log d}{\varepsilon^2}\big)$-ANN over X with the following properties:*

- *The space used by the data structure is $n^{1+\varepsilon} \cdot d^{O(1)}$;*
- *The query procedure probes $n^{\varepsilon} \cdot d^{O(1)}$ words in memory.*

In order to prove Theorem 6.8, the authors introduced a geometric parameter called the cutting modulus $\Xi(\mathcal{M},\varepsilon)$ associated to a metric space $(\mathcal{M},d_{\mathcal{M}})$ and a parameter $\varepsilon \in (0,1)$, which governs the following data-dependent partitioning scheme: every finite dataset in $\mathcal{M}$ either has a subset of proportional size (measured appropriately) which is contained in a ball of radius $\Xi(\mathcal{M},\varepsilon)$ or admits a cut which is ε-sparse. Relying on this notion, they were able to show the following general partitioning theorem.

Theorem 6.9. *Let $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ be a finite metric space and fix $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$. There exists a collection $\mathcal{C}$ of subsets of $\mathcal{M}$ with $\log|\mathcal{C}| = O\big(\log|\mathcal{M}| \log(\log|\mathcal{M}|/\varepsilon)\big)$ such that for any n-point dataset $\mathcal{P}$ in $\mathcal{M}$, we have one of the following two properties:*

- *Either there exists $x_0 \in \mathcal{M}$ and $R \leqslant \Xi(\mathcal{M}, \varepsilon)$ such that $|\mathcal{P} \cap B_{\mathcal{M}}(x_0, R)| \geqslant \frac{n}{50}$, or*
- *There exists a subcollection $\{S_1, \dots, S_m\} \subseteq \mathcal{C}$ such that*

$$\forall\, i \in \{1, \dots, m\}, \qquad \frac{n}{50} \leqslant |S_i \cap \mathcal{P}| \leqslant \frac{49n}{50} \tag{92}$$

and for every $x, y \in \mathcal{M}$ with $d_{\mathcal{M}}(x, y) \leqslant 1$, we have

$$\#\big\{i \in \{1, \dots, m\} : \mathbf{1}_{S_i}(x) \neq \mathbf{1}_{S_i}(y)\big\} \leqslant 50\varepsilon m. \tag{93}$$

Theorem 6.9 suggests a very natural LSH with approximation $O(\Xi(\mathcal{M}, \varepsilon))$ since, at each step of the algorithm, we either have a dense ball of radius $\Xi(\mathcal{M}, \varepsilon)$ or we have a collection of subsets with a distribution that decreases the size of the dataset and rarely splits the query from its nearby points in the dataset. The relevance of those results with the subject of this survey stems from the fact that Theorem 1.3 implies that if X is a normed space, then the cutting modulus satisfies

$$\Xi(X, \varepsilon) \lesssim \frac{\log(\dim(X) + 1)}{\varepsilon^2}. \tag{94}$$

The main idea of the proof of (94) is to apply (9) to the adjacency matrices of geometric graphs associated to finite subsets of X. If such a graph does not have a subset of proportional size (with respect to the underlying stationary measure) contained in a ball of radius $\Omega(\log(\dim(X)))$, then the nonlinear spectral gap inequality (9) implies that it also cannot have large (classical) spectral gap and thus admits a sparse cut by Cheeger's inequality. A combination of Theorem 6.9 and (94) implies Theorem 6.8. We refer to the work of Andoni, Naor, Nikolov, et al. (2018a) for the precise definition of the cutting modulus and the proofs of these results.

In their follow-up work, Andoni, Naor, Nikolov, et al. (2018b) proved the existence of data structures for ANN over d-dimensional normed spaces with slightly worse (but still subpolynomial) approximation and reasonable bounds for the running time. Some of their results still rely on elements of the theory of nonlinear spectral gaps, whereas others use the existence of a remarkable uniform homeomorphism between spheres of Banach spaces which originates in the resolution of the distortion problem by Odell and Schlumprecht (1994).

References

Abraham, I., Bartal, Y., and Neiman, O. (2011). "Advances in metric embedding theory", *Adv. Math.* **228** (6), pp. 3026–3126.

Andoni, A., Indyk, P., and Krauthgamer, R. (2009). "Overcoming the ℓ_1 non-embeddability barrier: algorithms for product metrics". In: *Proceedings of the Twentieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. SIAM, Philadelphia, PA, pp. 865–874.

Andoni, A., Indyk, P., Nguyễn, H. L., et al. (2014). "Beyond locality-sensitive hashing". In: *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*. ACM, New York, pp. 1018–1028.

Andoni, A., Indyk, P., and Razenshteyn, I. (2018). "Approximate nearest neighbor search in high dimensions". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. IV. Invited lectures*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp. 3287–3318.

Andoni, A., Naor, A., and Neiman, O. (2018). "Snowflake universality of Wasserstein spaces", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **51** (3), pp. 657–700.

Andoni, A., Naor, A., Nikolov, A., et al. (2018a). "Data-dependent hashing via nonlinear spectral gaps". In: *STOC'18—Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*. ACM, New York, pp. 787–800.

——— (2018b). "Hölder homeomorphisms and approximate nearest neighbors", in: *59th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2018*. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, pp. 159–169.

Andoni, A., Nguyen, H. L., et al. (2017). "Approximate near neighbors for general symmetric norms". In: *STOC'17—Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*. ACM, New York, pp. 902–913.

Andoni, A. and Razenshteyn, I. (2015). "Optimal data-dependent hashing for approximate near neighbors". In: *STOC'15—Proceedings of the 2015 ACM Symposium on Theory of Computing*. ACM, New York, pp. 793–801.

Arias-de-Reyna, J. and Rodríguez-Piazza, L. (1992). "Finite metric spaces needing high dimension for Lipschitz embeddings in Banach spaces", *Israel J. Math.* **79** (1), pp. 103–111.

Ball, K. (1990). "Isometric embedding in l_p-spaces", *European J. Combin.* **11** (4), pp. 305–311.

——— (1992). "Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps", *Geom. Funct. Anal.* **2** (2), pp. 137–172.

——— (2013). "The Ribe programme", *Astérisque* (352). Séminaire Bourbaki. Vol. 2011/2012. Exposés 1043–1058, Exp. No. 1047, viii, 147–159.

Ball, K., Carlen, E. A., and Lieb, E. H. (1994). "Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms", *Invent. Math.* **115** (3), pp. 463–482.

Baudier, F. P. and Johnson, W. B. (2016). "*Metric embeddings: bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces* [book review of MR3114782]", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **53** (3), pp. 495–506.

Benyamini, Y. and Lindenstrauss, J. (2000). *Geometric nonlinear functional analysis. Vol. 1*. Vol. 48. American Mathematical Society Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xii+488.

Bollobás, B. (1988). "The isoperimetric number of random regular graphs", *European J. Combin.* **9** (3), pp. 241–244.

Bourgain, J. (1985). "On Lipschitz embedding of finite metric spaces in Hilbert space", *Israel J. Math.* **52** (1-2), pp. 46–52.

——— (1986). "The metrical interpretation of superreflexivity in Banach spaces", *Israel J. Math.* **56** (2), pp. 222–230.

Bretagnolle, J., Dacunha-Castelle, D., and Krivine, J.-L. (1965/1966). "Lois stables et espaces L^p", *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)* **2**, pp. 231–259.

Brinkman, B. and Charikar, M. (2005). "On the impossibility of dimension reduction in l_1", *J. ACM* **52** (5), pp. 766–788.

Cheng, Q. (2016). "Sphere equivalence, property H, and Banach expanders", *Studia Math.* **233** (1), pp. 67–83.

Davidoff, G., Sarnak, P., and Valette, A. (2003). *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*. Vol. 55. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, pp. x+144.

de Laat, T. and de la Salle, M. (2021). "Banach space actions and L^2-spectral gap", *Anal. PDE* **14** (1), pp. 45–76.

Dranishnikov, A. N. et al. (2002). "Uniform embeddings into Hilbert space and a question of Gromov", *Canad. Math. Bull.* **45** (1), pp. 60–70.

Dvoretzky, A. (1961). "Some results on convex bodies and Banach spaces", in: *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960)*. Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford, pp. 123–160.

Eskenazis, A. (2019). *Geometric Inequalities and Advances in the Ribe Program*. Thesis (Ph.D.)–Princeton University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, p. 399.

——— (2021). "ε-isometric dimension reduction for incompressible subsets of ℓ_p". Preprint available at `https://arxiv.org/abs/2109.06602`.

Eskenazis, A. and Ivanisvili, P. (2020). "Polynomial inequalities on the Hamming cube", *Probab. Theory Related Fields* **178** (1-2), pp. 235–287.

——— (2021). "Sharp growth of the Ornstein–Uhlenbeck operator on Gaussian tail spaces". To appear in *Israel J. Math.*. Preprint available at `https://arxiv.org/abs/2011.01359`.

Eskenazis, A., Mendel, M., and Naor, A. (2019). "Nonpositive curvature is not coarsely universal", *Invent. Math.* **217** (3), pp. 833–886.

Eskenazis, A. and Naor, A. (2021). "On coarse and uniform embeddings into L_p". Preprint.

Giladi, O., Mendel, M., and Naor, A. (2011). "Improved bounds in the metric cotype inequality for Banach spaces", *J. Funct. Anal.* **260** (1), pp. 164–194.

Godefroy, G. (2017). "De Grothendieck à Naor: une promenade dans l'analyse métrique des espaces de Banach", *Gaz. Math.* (151), pp. 13–24.

Gromov, M. (1993). "Asymptotic invariants of infinite groups", in: *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*. Vol. 182. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 1–295.

——— (2000). "Spaces and questions", *Geom. Funct. Anal.* (Special Volume, Part I). GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), pp. 118–161.

——— (2003). "Random walk in random groups", *Geom. Funct. Anal.* **13** (1), pp. 73–146.

Har-Peled, S., Indyk, P., and Motwani, R. (2012). "Approximate nearest neighbor: towards removing the curse of dimensionality", *Theory Comput.* **8**, pp. 321–350.

Heinrich, S. (1980). "Ultraproducts in Banach space theory", *J. Reine Angew. Math.* **313**, pp. 72–104.

Indyk, P. (2001). "On approximate nearest neighbors under l_∞ norm", in: vol. 63. 4. Special issue on FOCS 98 (Palo Alto, CA), pp. 627–638.

Indyk, P. and Motwani, R. (1999). "Approximate nearest neighbors: towards removing the curse of dimensionality", in: *STOC '98 (Dallas, TX)*. ACM, New York, pp. 604–613.

John, F. (1948). "Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions", in: *Studies and Essays Presented to R. Courant on his 60th Birthday, January 8, 1948*. Interscience Publishers, Inc., New York, N. Y., pp. 187–204.

Johnson, W. B. and Lindenstrauss, J. (1984). "Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space", in: *Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn., 1982)*. Vol. 26. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 189–206.

Johnson, W. B., Lindenstrauss, J., and Schechtman, G. (1987). "On Lipschitz embedding of finite metric spaces in low-dimensional normed spaces", in: *Geometrical aspects of functional analysis (1985/86)*. Vol. 1267. Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, pp. 177–184.

Kalton, N. J. (2008). "The nonlinear geometry of Banach spaces", *Rev. Mat. Complut.* **21** (1), pp. 7–60.

Kondo, T. (2012). "CAT(0) spaces and expanders", *Math. Z.* **271** (1-2), pp. 343–355.

Krivine, J.-L. (1965). "Plongement des espaces normés dans les L^p pour $p > 2$", *C. R. Acad. Sci. Paris* **261**, pp. 4307–4310.

Kushilevitz, E., Ostrovsky, R., and Rabani, Y. (2000). "Efficient search for approximate nearest neighbor in high dimensional spaces", *SIAM J. Comput.* **30** (2), pp. 457–474.

Lafforgue, V. (2008). "Un renforcement de la propriété (T)", *Duke Math. J.* **143** (3), pp. 559–602.

——— (2009). "Propriété (T) renforcée banachique et transformation de Fourier rapide", *J. Topol. Anal.* **1** (3), pp. 191–206.

Lee, J. R., Mendel, M., and Naor, A. (2005). "Metric structures in L_1: dimension, snowflakes, and average distortion", *European J. Combin.* **26** (8), pp. 1180–1190.

Lee, J. R. and Naor, A. (2004). "Embedding the diamond graph in L_p and dimension reduction in L_1", *Geom. Funct. Anal.* **14** (4), pp. 745–747.

Linial, N., London, E., and Rabinovich, Y. (1995). "The geometry of graphs and some of its algorithmic applications", *Combinatorica* **15** (2), pp. 215–245.

Matoušek, J. (1992). "Note on bi-Lipschitz embeddings into normed spaces", *Comment. Math. Univ. Carolin.* **33** (1), pp. 51–55.

——— (1996). "On the distortion required for embedding finite metric spaces into normed spaces", *Israel J. Math.* **93**, pp. 333–344.

——— (1997). "On embedding expanders into l_p spaces", *Israel J. Math.* **102**, pp. 189–197.

——— (2002). *Lectures on discrete geometry*. Vol. 212. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, pp. xvi+481.

Maurey, B. (1974). *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L^p*. Astérisque, No. 11. With an English summary. Société Mathématique de France, Paris, pp. ii+163.

——— (2003). "Type, cotype and K-convexity", in: *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2*. North-Holland, Amsterdam, pp. 1299–1332.

Mazur, S. (1929). "Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnels", fre. *Studia Math.* **1** (1), pp. 83–85.

Mendel, M. and Naor, A. (2008). "Metric cotype", *Ann. of Math.* (2) **168** (1), pp. 247–298.

——— (2013). "Spectral calculus and Lipschitz extension for barycentric metric spaces", *Anal. Geom. Metr. Spaces* **1**, pp. 163–199.

——— (2014). "Nonlinear spectral calculus and super-expanders", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **119**, pp. 1–95.

——— (2015). "Expanders with respect to Hadamard spaces and random graphs", *Duke Math. J.* **164** (8), pp. 1471–1548.

Mimura, M. (2015). "Sphere equivalence, Banach expanders, and extrapolation", *Int. Math. Res. Not. IMRN* (12), pp. 4372–4391.

Motwani, R., Naor, A., and Panigrahy, R. (2007). "Lower bounds on locality sensitive hashing", *SIAM J. Discrete Math.* **21** (4), pp. 930–935.

Naor, A. (2012). "An introduction to the Ribe program", *Jpn. J. Math.* **7** (2), pp. 167–233.

Naor, A. (2014). "Comparison of metric spectral gaps", *Anal. Geom. Metr. Spaces* **2** (1), pp. 1–52.

——— (2017). "A spectral gap precludes low-dimensional embeddings", in: *33rd International Symposium on Computational Geometry*. Vol. 77. LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, Art. No. 50, 16.

——— (2018). "Metric dimension reduction: a snapshot of the Ribe program". In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. I. Plenary lectures*. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp. 759–837.

——— (2021). "An average John theorem", *Geom. Topol.* **25** (4), pp. 1631–1717.

Naor, A., Peres, Y., et al. (2006). "Markov chains in smooth Banach spaces and Gromov-hyperbolic metric spaces", *Duke Math. J.* **134** (1), pp. 165–197.

Naor, A. and Silberman, L. (2011). "Poincaré inequalities, embeddings, and wild groups", *Compos. Math.* **147** (5), pp. 1546–1572.

Nguyễn, H. L. (2014). *Algorithms for High Dimensional Data*. Thesis (Ph.D.)–Princeton University.

O'Donnell, R., Wu, Y., and Zhou, Y. (2014). "Optimal lower bounds for locality-sensitive hashing (except when q is tiny)", *ACM Trans. Comput. Theory* **6** (1), Art. 5, 13.

Odell, E. and Schlumprecht, T. (1994). "The distortion problem", *Acta Math.* **173** (2), pp. 259–281.

Ostrovskii, M. I. (2013). *Metric embeddings*. Vol. 49. De Gruyter Studies in Mathematics. Bilipschitz and coarse embeddings into Banach spaces. De Gruyter, Berlin, pp. xii+372.

Ozawa, N. (2004). "A note on non-amenability of $\mathcal{B}(l_p)$ for $p = 1, 2$", *Internat. J. Math.* **15** (6), pp. 557–565.

Pinsker, M. S. (1973). "On the complexity of a concentrator". In: *7th International Teletraffic Conference*.

Pisier, G. (1975a). "Martingales with values in uniformly convex spaces", *Israel J. Math.* **20** (3-4), pp. 326–350.

——— (1975b). "Un exemple concernant la super-réflexivité", in: *Séminaire Maurey-Schwartz 1974–1975: Espaces L^p applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Annexe No. 2*, p. 12.

——— (2010). "Complex interpolation between Hilbert, Banach and operator spaces", *Mem. Amer. Math. Soc.* **208** (978), pp. vi+78.

Rabinovich, Y. (2003). "On average distortion of embedding metrics into the line and into l_1". In: *Proceedings of the Thirty-Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. ACM, New York, pp. 456–462.

Reingold, O., Vadhan, S., and Wigderson, A. (2002). "Entropy waves, the zig-zag graph product, and new constant-degree expanders", *Ann. of Math.* (2) **155** (1), pp. 157–187.

Ribe, M. (1976). "On uniformly homeomorphic normed spaces", *Ark. Mat.* **14** (2), pp. 237–244.

Schoenberg, I. J. (1938). "Metric spaces and positive definite functions", *Trans. Amer. Math. Soc.* **44** (3), pp. 522–536.

Wang, M.-T. (1998). "A fixed point theorem of discrete group actions on Riemannian manifolds", *J. Differential Geom.* **50** (2), pp. 249–267.

Wells, J. H. and Williams, L. R. (1975). *Embeddings and extensions in analysis*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 84. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, pp. vii+108.

Alexandros Eskenazis

Trinity College
University of Cambridge
Cambridge, CB2 1TQ, United Kingdom

Institut de Mathématiques de Jussieu
CNRS & Sorbonne Université
Paris, 75252, France

E-mail: ae466@cam.ac.uk

Séminaire BOURBAKI Janvier 2022
743e année, 2021–2022, no 1189, p. 335 à 352
doi: 10.24033/ast.1190

LOCAL MARKED LENGTH SPECTRUM RIGIDITY
[*after* Guillarmou and Lefeuvre]

by **Ursula Hamenstädt**

1. Introduction

The search for characterizing a smooth Riemannian metric on a smooth closed manifold M by easy to define geometric quantities has a long and fruitful history, usually described as rigidity problems.

A particularly appealing rigidity problem can be formulated as follows. Consider a closed manifold M of dimension $n \geqslant 2$, equipped with a Riemannian metric g_0 of nonpositive sectional curvature. By the Hadamard Cartan theorem, the universal covering $\tilde{M}$ of M is diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$ and hence M is a classifying space for its fundamental group $\pi_1(M)$. Each nontrivial conjugacy class c in $\pi_1(M)$ can be represented by a closed geodesic γ_c, of minimal length $L(\gamma_c)$ in the corresponding free homotopy class. If we denote by $\mathscr{C}$ the set of all conjugacy classes in $\pi_1(M)$, then the metric g_0 determines a function $L_{g_0} : \mathscr{C} \to (0, \infty)$ by defining $L_{g_0}(c) = L_{g_0}(\gamma_c)$ $(c \in \mathscr{C})$. This function is called the *marked length spectrum* of g_0. It also makes sense for metrics on M which are not nonpositively curved.

The following conjecture was formulated by Burns and Katok Burns and Katok (1985) but may have been known earlier.

Conjecture 1.1. *Let g_0 be a negatively curved Riemannian metric on a closed manifold M. If g is another metric on M so that $L_g = L_{g_0} : \mathscr{C} \to (0, \infty)$, then g, g_0 are strongly isometric.*

Here two metrics g, g_0 are called *strongly isometric* if there exists a diffeomorphism ϕ isotopic to the identity such that $\phi^* g = g_0$. The following major progress towards this conjecture is the main result of Guillarmou and Lefeuvre (2019).

Theorem 1.2 (Guillarmou and Lefeuvre). *Let g_0 be a smooth nonpositively curved metric on a closed manifold M of dimension n whose geodesic flow is Anosov. Then there exists a neighborhood U of g_0 in the C^N-topology for some $N > 3n/2 + 8$ such that any metric in U with the same marked length spectrum as g_0 is strongly isometric to g_0.*

©Astérisque 438, SMF 2022

One may also consider a similar question where we replace the function L_{g_0} by the *unmarked length spectrum*, that is, we just look at the *set* of lengths of closed geodesics on M, viewed as a subset of $(0, \infty)$ with no additional structure. However, this question has a negative answer, already for closed hyperbolic surfaces. The first examples of non-isometric hyperbolic surfaces with the same unmarked length spectrum are due to Vigneras Vignéras (1980).

The goal of this survey is to give a short historical account on partial results towards the marked length spectrum conjecture and to outline the main steps of the proof of Theorem 1.2, giving a more detailed explanation of its assumptions along the way.

2. Earlier results towards the marked length spectrum conjecture

Nonpositively curved Riemannian metrics on closed oriented surfaces of genus $h \geqslant 2$ have always been considered as a test case for the understanding of negatively curved metrics on manifolds of all dimensions, although the analogy is problematic due to the fact that by uniformization, any smooth metric g on such a surface S is *conformally equivalent* to a hyperbolic metric. That is, there is a smooth function ρ on S so that the metric $e^{\rho} g$ is of constant curvature -1. This gives strong additional constraints which do not exist in higher dimension.

In contrast to hyperbolic metrics on closed manifolds of dimension at least 3, a hyperbolic metric on a surface S of genus $h \geqslant 2$ is not unique up to isometry: There is an entire moduli space of isometry classes of hyperbolic metrics on S of dimension $6h - 6$. Such hyperbolic metrics can be constructed explicitly, and there is a collection of $6h - 5$ conjugacy classes of *simple* closed curves on S, that is, curves without self-intersection, whose lengths completely determine the hyperbolic metric Schmutz (1993).

Understanding the marked length spectrum of a negatively curved metric g on S in a fixed conformal class is already interesting. The corresponding rigidity question was answered affirmatively by Katok Katok (1988). His argument immediately extends to the following

Theorem 2.1 (Katok). *Let g, g_0 be two smooth conformally equivalent Riemannian metrics of negative curvature on a closed manifold M of dimension $n \geqslant 2$. If g, g_0 have the same marked length spectrum then they are isometric.*

The proof of this result is quite short. We present a sketch as it rests on two basic principles which are important cornerstones for later progress. For this and for later use, define the *geodesic flow* Φ^t on the unit tangent bundle $P : T^1M \to M$ of

a Riemannian manifold (M, g) by $\Phi^t v = \gamma_v'(t)$ where γ_v is the geodesic with initial velocity v. The flow Φ^t preserves the *Lebesgue Liouville measure* μ, which is locally defined by a smooth volume form on T^1M whose integration over the fibers of the bundle T^1M equals the volume element of the metric g on M. Periodic orbits of Φ^t are precisely the unit tangent lines of closed geodesics.

If M is closed and the metric on M is negatively curved, then the flow Φ^t is an *Anosov flow*: Let X be its generator. There exists a $d\Phi^t$-invariant decomposition

$$TT^1M = E^+ \oplus E^- \oplus \mathbb{R}X, \tag{1}$$

and there exists a number $\alpha > 0$ with

$$\|d\Phi^{\mp t} w\| \leqslant e^{-\alpha t}\|w\|$$

for every $w \in E^{\pm}$, with a suitable choice $\| \ \|$ of a norm on TT^1M defined by some Riemannian metric. The decomposition (1) is called the *Anosov splitting*. It is known to be Hölder continuous, but in general, it is not smooth.

The Anosov property for Φ^t has the following two consequences. First, the normalized Lebesgue Liouville measure $\hat{\mu} = \mu/\mu(T^1M)$ is *ergodic* for Φ^t. This means that whenever $A \subset T^1M$ is a Φ^t-invariant Borel set, then either $\hat{\mu}(A) = 0$ or $\hat{\mu}(T^1M - A) = 0$. In particular, by the *Birkhoff ergodic theorem*, for any L^2-integrable function f on T^1M and for $\hat{\mu}$-almost every $v \in T^1M$, we have

$$\int f d\hat{\mu} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(\Phi^s v) ds.$$

Here the existence of the limit on the right hand side of this equation is part of the statement of the theorem.

Furthermore, the following *Anosov closing lemma* holds true. Let d be any distance function on T^1M defined by a Riemannian metric. Then for any $\delta > 0$, there are numbers $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$, and $T_0 = T_0(\delta) > 0$ with the following property. If for some $v \in T^1M$ and some $T > T_0$, we have $d(v, \Phi^T v) < \varepsilon$, then there exists a periodic orbit η for Φ^t, of period $L(\eta) \in [T - \delta, T + \delta]$, such that $d(\Phi^t v, \eta(t)) < \delta$ for all $t \in [0, T]$.

Since continuous functions on compact spaces are uniformly continuous, one obtains as a consequence of the Birkhoff ergodic theorem and the Anosov closing lemma the following.

Corollary 2.2. *Let $f : T^1M \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Then for every $\varepsilon > 0$ and $T_0 > 0$, there exists a periodic point v for Φ^t of period $T > T_0$ such that*

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(\Phi^t v) dt - \int f d\hat{\mu}\right| < \varepsilon.$$

Sketch of a proof of Theorem 2.1. Let g, g_0 be negatively curved metrics on the same closed manifold M such that $g = \rho g_0$ for a smooth function ρ on M. Assume that g, g_0 have the same marked length spectrum. By perhaps exchanging g and g_0 we may assume that $\mathrm{vol}(M, g) \leqslant \mathrm{vol}(M, g_0)$ (here vol denotes the volume).

Denote by $P : T^1M_0 \to M$ the unit tangent bundle of M for the metric g_0, equipped with the Lebesgue Liouville measure μ, and let ω be the volume element of g_0 on M. Then $\rho^{n/2}\omega$ is the volume element for the metric g on M and hence naturality under pull-back shows that

$$\int_{T^1M_0} (P^*\rho)^{n/2} d\mu = \mathrm{vol}(S^{n-1})\mathrm{vol}(M, g) = \mathrm{vol}(T^1M, g) \leqslant \mu(T^1M_0). \tag{2}$$

On the other hand, the integral of the function $\rho^{1/2}$ over each closed geodesic γ for the metric g_0, parameterized by arc length, is the g-length of γ. As the marked length spectra of g and g_0 coincide, this length is not smaller than the g_0-length $L_{g_0}(\gamma)$ of γ. Thus if we denote by Φ^t the geodesic flow on T^1M_0, then for every periodic orbit η of Φ^t, we have

$$\int_\eta (P^*\rho)^{1/2} dt \geqslant L(\eta) \tag{3}$$

where $L(\eta)$ is the period of the orbit (which is just the length of the corresponding closed geodesic for g_0).

Write $\hat{\mu} = \mu/\mu(T^1M_0)$. By Corollary 2.2, since the function $(P^*\rho)^{1/2}$ on T^1M_0 is continuous and fulfills the inequality (3) for all periodic orbits η for Φ^t, we have

$$\int_{T^1M_0} (P^*\rho)^{1/2} d\hat{\mu} \geqslant 1. \tag{4}$$

Together with inequality (2), this shows that $\int_{T^1M_0} (P^*\rho)^{1/2} d\hat{\mu} \geqslant 1 \geqslant \int_{T^1M_0} (P^*\rho)^{n/2} d\hat{\mu}$. It now follows from the Hölder inequality that this is possible only if the function ρ is constant and hence if g, g_0 are isometric. □

The proof of Theorem 2.1 motivates the following extension of Conjecture 1.1.

Conjecture 2.3. *Let g, g_0 be two negatively curved metrics on a closed manifold M. If $L_g(c) \geqslant L_{g_0}(c)$ for each conjugacy class $c \in \mathscr{C}$, then $\mathrm{vol}(M, g) \geqslant \mathrm{vol}(M, g_0)$, with equality only if g, g_0 are strongly isometric.*

Shortly after the appearance of the article of Katok, Conjecture 1.1 for surfaces was settled by Otal Otal (1990) and, independently, Croke Croke (1990). They showed

Theorem 2.4 (Croke, Otal). *Let g, g_0 be two smooth nonpositively curved metrics on a closed surface of genus $h \geqslant 2$. If g, g_0 have the same marked length spectrum, then they are isometric.*

The approach of both authors is similar and rests on the following two facts. The first fact is valid in all dimensions.

Fact 1: If two metrics g, g_0 on a closed manifold M of dimension $n \geqslant 2$ are non-positively curved, have the same marked length spectrum and Anosov geodesic flows Φ^t on their unit tangent bundles T^1M, T^1M_0, then these geodesic flows are *time preserving conjugate*: There exists a Hölder continuous map $F : T^1M \to T^1M_0$ such that $\Phi^t \circ F = F \circ \Phi^t$. The map F gives information on the coupling of lengths of periodic orbits which are in a suitable sense close to each other.

Fact 2: For a closed surface S with non-positively curved metric g, one can reconstruct the Lebesgue Liouville measure on the unit tangent bundle T^1S of S from the marked length spectrum using the fact that for surfaces, geodesics which intersect transversely a given open geodesic segment in the universal covering $\tilde{S}$ of S form an open subset of the space of all geodesics on $\tilde{S}$ whose measure (for the projection to the space of geodesics on $\tilde{S}$ of the Liouville measure on the unit tangent bundle of $\tilde{S}$) equals π times the length of the segment. As a consequence, if two such metrics g, g_0 have the same marked length spectrum, then the time preserving conjugacy between their geodesic flows conjugates the Liouville measures for g, g_0, and the volumes of S with respect to g, g_0 coincide.

Embarking from these two facts, the proof of the marked length spectrum rigidity theorem for surfaces uses an ingenious and fairly elementary but purely 2-dimensional construction.

The only global result which is known in all dimensions is the following special case of Conjecture 1.1 Hamenstädt (1999).

Theorem 2.5 (Hamenstädt). *Let (M, g_0) be a closed rank 1 locally symmetric manifold. If g is another negatively curved metric on M with the same marked length spectrum as g_0, then the metrics g, g_0 are strongly isometric.*

The proof of this result consists of two independent steps. The first step resembles the approach for surfaces. Namely, it is shown that whenever g, g_0 are metrics on M with Anosov geodesic flow and such that the Anosov splitting for g_0 is of class C^1, and if the metrics have the same marked length spectrum, then the volumes of g, g_0 coincide. In fact, a time preserving conjugacy between the geodesic flows for g, g_0 maps the Lebesgue Liouville measure for g to the Lebesgue Liouville measure for g_0. Examples of metrics with C^1-Anosov splitting are locally symmetric metrics or metrics whose sectional curvature is strictly $1/4$-pinched.

With this information, the rigidity statement follows from the following deep theorem of Besson, Courtois and Gallot Besson, Courtois, and Gallot (1995). For its formulation, define the *volume entropy* of a negatively curved metric on a closed manifold M to be the quantity

$$h_{\mathrm{vol}} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \log \mathrm{vol}(B(x, R))$$

where $B(x, R)$ is the ball of radius R about x in the universal covering $\tilde{M}$ of M. The limit is known to exist and to be independent of the basepoint x.

Theorem 2.6 (Besson, Courtois and Gallot). *Let g_0 be a negatively curved locally symmetric metric on a closed Riemannian manifold M of dimension at least 3 and let g be another metric of negative curvature. If the volume entropy of g is not bigger than the volume entropy of g_0, then* $\mathrm{vol}(M,g) \geqslant \mathrm{vol}(M,g_0)$*, with equality if and only if g and g_0 are isometric.*

Now for a metric g with the same marked length spectrum as the locally symmetric metric g_0, the volume entropies (which are the topological entropies of the geodesic flows) coincide, and the volumes also coincide by Theorem 2.5. Hence the metrics are isometric by Theorem 2.6.

It took twenty more years for a complete solution of a local version of Conjecture 1.1. The approach of Guillarmou and Lefeuvre Guillarmou and Lefeuvre (2019) introduces new tools towards this question, mainly from microlocal analysis. The remainder of this note is devoted to a discussion of the main parts of the work of Guillarmou and Lefeuvre. This is organized into three sections, each of which focusses on a different aspect of the proof.

3. Controlling the action of the diffeomorphism group

Let M be a smooth closed manifold of dimension $n \geqslant 2$. Denote by $\mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M)$ the group of diffeomorphisms of M which are isotopic to the identity, equipped with the $C^{N+1,\alpha}$-topology, where $N \geqslant 1$ is some fixed integer. This topology is defined using an auxiliary Riemannian metric to measure norms of differentials, and a suitable covering by charts to obtain a Hölder structure (see Petersen, 2016 for more information on the latter). If g is any non-positively curved metric on M and if $\phi \in \mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M)$, then the g-length of any conjugacy class in the fundamental group of M coincides with its $\phi^* g$-length. Thus to understand the marked length spectrum rigidity question, it is necessary to understand the action of $\mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M)$ on the space of Riemannian metrics.

It is well known that through any given metric g_0, it is possible to construct a slice transverse to the orbit of the group $\mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M)$ in an open neighborhood of g_0 in the space of metrics, equipped with the $C^{N,\alpha}$-topology. Such a slice is by no means unique, and the first step will be to find a slice which is adapted to the marked length spectrum problem.

The space of smooth metrics is an open convex subset of the vector space of smooth section of the 2-fold symmetric tensor product S^2T^*M of T^*M. Let ∇ be the Levi Civita connection of g_0 and let $\sigma : \otimes^{m+1}T^*M \to S^{m+1}T^*M$ be the symmetrization operator. The *symmetrized derivative* is defined by

$$\delta^* = \sigma \circ \nabla : C^\infty(M; S^m T^*M) \to C^\infty(M; S^{m+1}T^*M).$$

Note that if $\rho \in C^\infty(M; T^*M)$ is a smooth one-form, then

$$\delta^*\rho = -\frac{1}{2}L_{\rho^\sharp} g_0 \tag{5}$$

where $\rho^\sharp$ is the vector field dual to ρ and, as usual, $L_{\rho^\sharp}$ denotes the Lie derivative.

The *divergence operator* is the formal adjoint

$$\delta f = -\mathrm{Tr}(\nabla f)$$

of δ^* where the trace is taken in the first two variables. A symmetric tensor field f is *divergence free* if $\delta f = 0$.

The formula (5) shows that the image of the operator δ^*, acting on 1-forms, consists precisely of the infinitesimal deformations of the metric with a 1-parameter group of diffeomorphisms. It is now natural to try to find a slice in the space of all metrics transverse to the orbit of the diffeomorphism group by first constructing a good closed subspace in the vector space of sections of S^2T^*M, equipped with a suitable structure of a Banach space, which is complementary to the image of δ^*. Note that the vector space of smooth sections of S^2T^*M is just the tangent space of the space of metrics on M.

Elliptic theory provides a natural approach to this problem. Namely, the second order self adjoint (for the standard L^2-metric) differential operator

$$\delta\delta^* : C^\infty(M; S^2T^*M) \to C^\infty(M; S^2T^*M)$$

is elliptic (Sharafutdinov (1994) p.84), and this is used by Sharafutinov Sharafutdinov (1994) and Croke and Sharafutinov to show

Theorem 3.1 (Theorem 2.2 of Croke and Sharafutdinov (1998)). *For $N > 1, \alpha \in (0,1)$, a tensor field $f \in C^{N,\alpha}(M; S^2T^*M)$ admits a unique decomposition*

$$f = f^s + \delta^* p, \quad \delta f^s = 0.$$

Furthermore, there exists a number $C_1 = C_1(N,\alpha) > 0$ such that

$$\|f^s\|_{C^{N,\alpha}(M;S^2T^*M)} \leqslant C_1 \|f\|_{C^{N,\alpha}(M;S^2T^*M)}.$$

The mechanism behind this result is that as

$$\langle \delta\delta^* v, v\rangle = \langle \delta^* v, \delta^* v\rangle$$

for all smooth sections v of T^*M, the kernel of δ^* coincides with the kernel of $\delta\delta^*$, and this is a finite dimensional vector space consisting of smooth one-forms by ellipticity of the operator $\delta\delta^*$. Here $\langle , \rangle$ denotes the L^2-inner product.

As a consequence, the restriction of the operator δ to $\mathrm{Im}(\delta^*)$ is injective. As $\mathrm{Im}(\delta) = \mathrm{Im}(\delta\delta^*)$, and as the kernel of $\delta\delta^*$ is a finite dimensional vector space of smooth sections, there exists a unique p orthogonal to this kernel so that $\delta\delta^* p = \delta f$. Then putting $f^s = f - \delta^* p$ defines a decomposition as claimed.

Theorem 3.1 was used by Croke and Sharafutinov to establish an infinitesimal version of Theorem 1.2 which rules out nontrivial deformations of a given Riemannian metric preserving the marked length spectrum. For the formulation of their result and later use let T^1M be the unit tangent bundle of the metric g_0 and define an evaluation operator

$$\pi : C^{N,\alpha}(M; S^2T^*M) \to C^{N,\alpha}(T^1M), \quad \pi f(v) = f(v,v).$$

Theorem 3.2 (Corollary 1.6 of Croke and Sharafutdinov (1998)). *Let (M, g_0) be a closed non-positively curved manifold, with Anosov geodesic flow, and let $f \in C^{N,\alpha}(M; S^2T^*M)$ be such that $\int_\gamma \pi f(\gamma') = 0$ for every closed geodesic γ on M. Then there exists a smooth 1-parameter group of diffeomorphisms ψ_t such that*

$$f = \frac{d}{dt}|_{t=0} \psi_t^* g_0.$$

Remark 3.3. Corollary 1.6 of Croke and Sharafutdinov (1998) is stated for negatively curved metrics on M. However, the proof only uses non-positive curvature and an Anosov geodesic flow.

Let $\mathrm{Met}^{N,\alpha}$ be the convex cone of all Riemannian metrics on M of class $C^{N,\alpha}$. Its tangent space at the smooth metric g_0 is the vector space $C^{N,\alpha}(M; S^2T^*M)$. Theorem 3.1 shows that there exists a direct decomposition of this tangent space into the infinitesimal deformations by diffeomorphisms, and the kernel of the divergence operator δ. Note that δ depends on the metric g_0.

To pass from infinitesimal to local, it is natural to use an implicit function theorem for Banach spaces. The first step towards this goal is to establish a local version of Theorem 3.1 and show that near g_0, metrics g for which the tensor field $g - g_0$ is divergence free define a slice transverse to the orbit of the diffeomorphism group.

Namely, the natural map

$$\mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M) \times \mathrm{Met}^{N,\alpha} \to \mathrm{Met}^{N,\alpha} \tag{6}$$

is smooth. The vector space $V \subset C^{N,\alpha}(M; S^2T^*M)$ of divergence free symmetric 2-tensors is closed and transverse to the image of the tangent space of $\mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M)$ at the identity. Thus by the inverse function theorem for Banach manifolds, there exists a neighborhood $\mathscr{U}$ of (Id, g_0) in $\mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M) \times V$ such that the restriction to $\mathscr{U}$ of the map defined in equation (6) is a diffeomorphism onto its image, which is a neighborhood of g_0 in $\mathrm{Met}^{N,\alpha}$. This then leads to the following slice result.

Proposition 3.4 (Lemma 4.1 of Guillarmou and Lefeuvre (2019)). *For any $N > 1$ and $\alpha \in (0,1)$ there exist numbers $\varepsilon > 0$ and $C_2 > 0$ such that for any g satisfying $\|g - g_0\|_{C^{N,\alpha}} < \varepsilon$, there exists a unique $\phi \in \mathrm{Diff}_0^{N+1,\alpha}(M)$ close to* Id *such that $\phi^* g - g_0$ is divergence free with respect to g_0 and $\|\phi^* g - g_0\|_{C^{N,\alpha}} < C_2 \|g - g_0\|_{C^{N,\alpha}}$. Moreover, $g \hookrightarrow \phi$ is smooth.*

As a consequence, it is enough to study metrics in the slice obtained from g_0 by adding a divergence free symmetric tensor field. We call this slice the slice of divergence free metrics (note that it depends on g_0). Theorem 3.2 provides an infinitesimal rigidity result, but this does not suffice to control the marked length spectrum on metrics near g_0 in the slice. Establishing a method to obtain such a control is the main novelty of the work of Guillarmou and Lefeuvre. The remainder of this section introduces the strategy used.

First, to be able to work in the tangent space of $\mathrm{Met}^{N,\alpha}$ at a nonpositively curved metric g_0 whose geodesic flow is Anosov, it is convenient to normalize the marked length spectrum at g_0 as follows.

Let as before $\mathscr{C}$ be the set of all conjugacy classes of $\pi_1(M)$. Define

$$\mathscr{L} : \mathrm{Met}^{N,\alpha} \subset C^{N,\alpha}(M; S^2T^*M) \to \ell^\infty(\mathscr{C}), \quad \mathscr{L}(g)(c) = \frac{L_g(c)}{L_{g_0}(c)}.$$

The map $\mathscr{L}$ is a map between Banach spaces, and standard estimates show that it is differentiable. A calculation establishes the formula

$$d\mathscr{L}_{g_0}(h)(c) = \frac{1}{2L_{g_0}(c)} \int_0^{L_{g_0}(c)} h_{\gamma_c(t)}(\gamma_c'(z), \gamma_c'(t))dt \tag{7}$$

where γ_c is the geodesic for g_0 in the free homotopy class c. This expression is called the *X-ray transform*. It contains the infinitesimal information on the behavior of the marked length spectrum under a smooth deformation of the metric g_0.

Denote by $\mathbf{1}$ the function which gives the value 1 to each $c \in \mathscr{C}$. From formula (7) and an estimate established with fairly standard methods one obtains

Proposition 3.5 (Proposition 2.1 of Guillarmou and Lefeuvre (2019)). *There exists a constant $C_3 = C_3(g_0) > 0$ such that*

$$\|\mathscr{L}(g) - \mathbf{1} - d\mathscr{L}_{g_0}(g - g_0)\|_{\ell^\infty} \leqslant C_3 \|g - g_0\|^2_{C^3(M;S^2T^*M)}$$

for all g in a sufficiently small neighborhood of g_0 in the C^3-topology.

Let us inspect the terms in the estimate of Proposition 3.5. A tangent vector at g_0 of the space of smooth metrics on M is a smooth section h of S^2T^*M. At each point $x \in M$, the matrix $h(x)$ is symmetric and hence it can be diagonalized with respect to g_0. This means that there is an orthonormal basis $e_1, \ldots, e_n$ of eigenvectors for h,

with corresponding eigenvalues $a_1, \dots, a_n$. Then for any unit vector $v \in T^1_x M$, we have

$$|h(x)(v,v)| \leqslant \max\{|a_i| \mid i\} = \|h(x)\|$$

where $\|h(x)\|$ is the spectral norm of the symmetric matrix $h(x)$. As

$$\|d\mathscr{L}_{g_0}(h)\|_{\ell^\infty} \leqslant \frac{1}{2}\sup\{\|h(x)\| \mid x\} \leqslant \frac{1}{2}\|h\|_{C^0(M;S^2T^*M)}$$

by equation (7), Proposition 3.5 makes the approximation of the X-ray transform near g_0 by its derivative quantitative.

This is however not enough for an application of the inverse function theorem to a neighborhood of g_0 in the slice of divergence free metrics towards the local marked length spectrum rigidity. Namely, although it follows from Theorem 3.2 that on a tangent vector to this slice at g_0, the differential of the X-ray transform does not vanish, the result is not quantitative. Indeed, the standard tool for obtaining a norm control which is sufficient for an application of the implicit function theorem is to *invert* the derivative of the map considered and establish a norm control for this inverse.

The idea for obtaining such a control is as follows. Instead of working directly with the X-ray transform, one may work with distributions on T^1M contained in a suitably chosen Sobolev space. The distributions of interest are the functions πf where f is a divergence free section of S^2T^*M. Instead of inverting the X-ray transform, one may try to invert the generator X of the geodesic flow, viewed as a first order differential operator on T^1M, on a suitably chosen space of distributions, and, similarly to the statement of Theorem 3.1, use this to analyze the kernel of X consisting of invariant distributions which give rise to nontrivial contributions for the X-ray transform.

That this program can be made precise and quantitative using tools from microlocal analysis is the main achievement of the article Guillarmou and Lefeuvre (2019) and leads to its main technical result. In its formulation, the diffeomorphism ϕ is as in Proposition 3.5, that is, it is such that $\phi^* g - g_0$ is divergence free. Furthermore, $H^{-1-s}(M; S^2T^*M)$ is the L^2-based Sobolev space of sections of S^2T^*M.

Theorem 3.6 (Theorem 3 of Guillarmou and Lefeuvre (2019))**.** *Let (M, g_0) be as before and let $N > 3n/2 + 8$. For all small $s > 0$, there are $\nu = \mathscr{O}(s)$ and $C_4 = C_4(g_0) > 0$ such that the following holds: There exists $\varepsilon > 0$ such that for any C^N-metric g satisfying $\|g - g_0\|_{C^N(M)} < \varepsilon$, there is a diffeomorphism ϕ close to* Id *such that*

$$\|\phi^* g - g_0\|_{H^{-1-s}(M;S^2T^1M)} \leqslant C_4 \cdot \|g - g_0\|^{(1+\nu)/2}_{C^N(M)} \cdot \|\mathscr{L}(g) - \mathbf{1}\|^{(1-\nu)/2}_{\ell^\infty(\mathscr{C})}$$

where $\mathbf{1}(c) = 1$ for each $c \in \mathscr{C}$.

Theorem 3.6 immediately implies Theorem 1.2. Namely, if g_0, ε are as in the statement of Theorem 3.6 and if $\|g - g_0\|_{C^N(M)} < \varepsilon$ is such that g, g_0 have the same marked length spectrum, then $\mathscr{L}(g) = \mathbf{1}$. Thus if ϕ is a diffeomorphism as in Theorem 3.6, then Theorem 3.6 shows that

$$\|\phi^* g - g_0\|_{H^{-1-s}(M;S^2T^*M))} = 0.$$

But $g_0, \phi^* g$ are metrics of class C^N for $N > 3/2n + 8$ and hence this is possible only if $\phi^* g = g_0$, that is, if g and g_0 are strongly isometric.

The remaining two sections are devoted to discuss the main ingredients of the proof of Theorem 3.6.

4. Inversion on a space of distributions

The assumption that the geodesic flow Φ^t for the metric g_0 is an Anosov flow enters in the proof of Theorem 3.2 in the form of a so-called *Livshitz theorem* for a cohomology equation defined by the flow. This can be viewed as a structural result for the kernel of the linear operator $d\mathscr{L}_{g_0}$, acting on sufficiently regular sections of S^2T^*M. It is based on an analysis of the behavior of the restriction of a function on T^1M to *strong stable* and *strong unstable* manifolds for the Anosov flow, which are leaves of a foliation of T^1M tangent to the subbundles of TT^1M arising in the Anosov splitting.

To make this precise let us denote as before by X the generator of the geodesic flow. View the vector field X as a first order linear differential operator on smooth functions on T^1M. If $F : T^1M \to \mathbb{R}$ is smooth, then the function $f = X(F)$ satisfies $\int_\gamma f(\Phi^t v)dt = 0$ for each periodic orbit γ for the geodesic flow.

Vice versa, by De la Llave, Marco, and Moriyón (1986), the latter property characterizes the range of X: If $f : T^1M \to \mathbb{R}$ is sufficiently regular, and if the integral of f over each periodic orbit for Φ^t vanishes, then there exists a function F of controlled regularity such that $f = X(F)$.

The case of interest is when $f = \pi\sigma$ for a smooth section σ of S^2T^*M. Namely, the X-ray transform of a section σ of S^2T^*M is up to the factor $1/2$ obtained by integration of the function $\pi\sigma$ with respect to the countably many Φ^t-invariant Borel probability measures on T^1M which are the normalizations of the Lebesgue measures on the periodic orbits. Each such measure in turn can be viewed as a distribution on T^1M, and this distribution lies in the kernel of the adjoint of the operator X.

Now by invariance of the Lebesgue Liouville measure μ under the geodesic flow, we have $\langle X\rho, \psi\rangle = -\langle \rho, X\psi\rangle$ for any smooth functions ρ, ψ where $\langle , \rangle$ is the L^2 inner product on T^1M. Hence the densely defined operator $-iX$ is self-adjoint on L^2.

The spectral theorem for self-adjoint operators tells us that $\mathrm{Spec}_{L^2}(-iX) \in \mathbb{R}$. This implies that for $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, the resolvents

$$R_-(\lambda) = (-X - \lambda)^{-1}, R_+(\lambda) = (-X + \lambda)^{-1}$$

are well defined on $L^2(T^1M)$, and they can be determined explicitly. Namely, we have

$$R_+(\lambda)f(y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\Phi^t(y))dy, \quad R_-(\lambda)f(y) = -\int_{-\infty}^0 e^{\lambda t} f(\Phi^t(y))dt. \quad (8)$$

In particular, these resolvents depend analytically on λ.

We are interested in inverting the operator $-X$, that is, in the case $\lambda = 0$. To this end one can try to meromorphically extend the resolvent operators across the imaginary line and study its behavior at $\lambda = 0$. For this it is necessary to work with a suitably defined space of distributions on which such an extension acts and which is invariant under the extension. The setup for this construction is the following theorem of Faure and Sjöstrand (Theorem 1.4 of Faure and Sjöstrand (2011)).

Theorem 4.1 (Faure and Sjöstrand). *There exists a number $c > 0$, and for all $s > 0$ and $r < 0$, there is a Hilbert space $\mathscr{H}^{r,s}$ such that $-X$ defines a maximal closed unbounded operator on $\mathscr{H}^{r,s}$. Furthermore, $H^s(T^1M) \subset \mathscr{H}^{r,s} \subset H^r(T^1M)$, and if $\mathrm{Re}(\lambda) > -c\ \min(|r|, s)$, then*

$$-X - \lambda : \mathrm{Dom}(X) \cap \mathscr{H}^{r,s} \to \mathscr{H}^{r,s}$$

(here $\mathrm{Dom}(X) = \{u \in \mathscr{H}^{r,s}; Xu \in \mathscr{H}^{r,s}\}$) is an unbounded Fredholm operator of index 0 depending analytically on λ. The operator $-X - \lambda$ is invertible for $\mathrm{Re}(\lambda)$ large enough on these spaces, the inverse coincides with $R_-(\lambda)$ when acting on $H^s(T^1M)$, and it extends meromorphically to the half-plane $\mathrm{Re}(\lambda) > -c\min(|r|, s)$, with poles of finite multiplicity as a bounded operator on $\mathscr{H}^{r,s}$. For $-X + \lambda$, the same holds with a Sobolev space $\mathscr{H}^{s,r}$ satisfying the same properties.

As a consequence of this theorem, near $\lambda = 0$, the operators $-X - \lambda$ are all Fredholm operators of index 0, defined on the same subdomain of a fixed Hilbert space, with range in this Hilbert space. Furthermore, this Hilbert space is determined by two numbers $s > 0, r < 0$, it is a subspace of the Sobolev space $H^r(T^1M)$, and for small enough $s > 0$, it contains the densely embedded space of L^2-functions on which the resolvent of $-X - \lambda$ for $\mathrm{Re}(\lambda) \neq 0$ can be written down explicitly.

The explicit formula (8) allows to estimate for $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ the expression

$$\lambda\langle R_+(\lambda)u, v\rangle = \int_0^T \int_{T^1M} \lambda e^{-\lambda t} u(\Phi^t y)v(y)d\hat{\mu}(y)dt + \int_T^\infty \int_{T^1M} \lambda e^{-\lambda t} u(\Phi^t y)v(y)d\hat{\mu}(y)dt \quad (9)$$

where as before, $\hat{\mu}$ denotes the normalized Lebesgue Liouville measure. Now the geodesic flow on T^1M is contact Anosov and hence *mixing* for $\hat{\mu}$, that is, if $u, v \in L^2(T^1M)$ then we have

$$\int_{T^1M} u(\Phi^t y)v(y)d\hat{\mu}(y) \to \langle u, 1\rangle\langle v, 1\rangle \quad (t \to \infty).$$

Thus for large T, the second summand on the right hand side of equation (9) is arbitrarily close to $e^{-\lambda T}\langle u, 1\rangle\langle v, 1\rangle$, where in this estimate, the number T can be chosen independent of λ, while the first term is bounded from above by $(1 - e^{-\lambda T})\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}$. Letting λ tend to zero and using the same reasoning for $R_-(\lambda)$ then shows the following

Lemma 4.2 (Lemma 2.5 of GUILLARMOU (2017)). *The only pole of $R_\pm(\lambda)$ on the imaginary line $i\mathbb{R}$ is $\lambda = 0$, and it is a simple pole of residue $\pm 1 \otimes 1$.*

Here the notation $1 \otimes 1$ stands for the L^2-orthogonal projection onto the space of constant functions, which by ergodicity equals the eigenspace of X acting on L^2-functions for the eigenvalue 0.

One can now look at the second term R_0 in the Laurent expansion for R_+ at 0 acting on the Hilbert space $\mathscr{H}^{r,s}$ and the second term $-R_0^*$ in the Laurent expansion of R_- at 0 acting on the Hilbert space $\mathscr{H}^{s,r}$ $(s > 0, r < 0)$ which appear in Theorem 4.1. These operators are characterized by

$$R_+(\lambda) = \frac{1 \otimes 1}{\lambda} + R_0 + \mathscr{O}(\lambda), \quad R_-(\lambda) = -\frac{1 \otimes 1}{\lambda} - R_0^* + \mathscr{O}(\lambda).$$

Multiplying the first equation with $-X + \lambda$ from the left yields

$$\mathrm{Id} = 1 \otimes 1 + (-X + \lambda)R_0 + \mathscr{O}(\lambda)$$

and hence, putting $\lambda = 0$, we have

$$\mathrm{Id} - 1 \otimes 1 = -XR_0 = -R_0X = XR_0^* = R_0^*X$$

as operators $C^\infty(T^1M) \to C^{-\infty}(T^1M)$. This identity extends to those Sobolev spaces on which the operators are bounded. The following result of Guillarmou establishes the important properties of these operators.

Theorem 4.3 (Theorem 2.6 of GUILLARMOU (2017)). *For all $s > 0$ and $r < 0$, the operator $\Pi = R_0 + R_0^* : H^s(T^1M) \to H^r(T^1M)$ is bounded and satisfies*

$$X\Pi f = 0 \text{ for all } f \in H^s(T^1M),$$
$$\text{and } \Pi X f = 0 \text{ for all } f \in H^{s+1}(T^1M).$$

Furthermore, if $f \in H^s(T^1M)$ is orthogonal to the constant functions, then for $u_+ = -R_0 f \in \mathscr{H}^{s,r}$, $u_- = R_0^* f \in \mathscr{H}^{r,s}$ we have $Xu_+ = Xu_- = f$. Moreover, $f \in \ker(\Pi) \cap H^s(T^1M)$ if and only if there exists $s' > 0$ and $u \in H^{s'}(T^1M)$ such that $Xu = f$. In this case the solution u is in fact contained in $H^s(T^1M)$.

This theorem identifies the intersection of the range of the differential operator X with the Sobolev space $H^s(T^1M)$ with the kernel of the pseudo-differential operator Π. Furthermore, its image is contained in the kernel of X and hence in the space of invariant distributions which should control an extension of the X-ray transform. As Π is bounded, one may hope to quantify the idea that functions of the form $\pi\sigma$ where σ is a sufficiently regular divergence free section of S^2T^*M give rise to non-trivial X-ray transforms.

Since the operator $\Pi : H^s(T^1M) \to H^r(T^1M)$ is a bounded pseudo-differential operator of degree -1, and is constructed from the resolvent of an elliptic operator, it is natural to expect that it is elliptic as well. The evaluation operator $\pi : C^k(M; S^2T^*M) \to C^k(T^1M)$, $\pi\sigma(v) = \sigma(v,v)$, extends to a map $H^s(M; S^2T^*M) \to H^s(T^1M)$, again denoted by π, and by Theorem 3.2 and Theorem 4.3, the image under π of the space of divergence free sections of S^2T^*M is complementary to the kernel of Π, at least whenever these sections are sufficiently regular.

The strategy is now to show that the restriction of Π to the closure in $H^s(T^1M)$ of the set of functions of the form πf is injective, where f is a divergence free section of S^2T^*M. The following statement says that this holds indeed true, with controlled norm.

Theorem 4.4 (Lemma 3.3 of Guillarmou and Lefeuvre (2019)). *There exists a number $C_5 > 0$ such that*

$$\|f\|_{H^{-s-1}(M;S^2T^*M)} \leqslant C_5(\|\Pi\pi f\|_{H^{-s}(T^1M)} + |\langle \pi f, 1\rangle|_{L^2(T^1M)})$$

for all $f \in H^{-s}(M; S^2T^*M) \cap \ker \delta$ and $s > 0$.

The proof of Theorem 4.4 uses in an essential way additional insight into the restriction of the operator Π to the space πf where f is a divergence free section of S^2T^*M. Namely, denote by $\pi_* : C^{-\infty}(T^1M) \to C^{-\infty}(S^2T^*M)$ the push-forward on distributions defined by

$$\langle \pi_* u, f\rangle = \langle u, \pi f\rangle.$$

Building on the earlier works Faure and Sjöstrand (2011) and Dyatlov and Zworski (2016), Theorem 3.5 of Guillarmou (2017) shows that the operator $\Pi_0 = \pi_*\Pi\pi$ is a self-adjoint pseudo-differential operator of order -1 on S^2T^*M, and its restriction to the kernel of δ is elliptic in the following sense. There exist pseudo-differential operators P, S, R of order $1, -2, -\infty$ so that

$$P\Pi_0 = \mathrm{Id} + \delta^* S\delta + R.$$

Lemma 3.6 of Guillarmou, 2017 then shows that in the situation at hand, the restriction of $\Pi\pi$ to the space of divergence free distributions which vanish on constants is injective, and this is used together with boundedness of pseudodifferential operators on Sobolev spaces to establish Theorem 4.4.

5. Stability estimates

Theorem 4.4 is not sufficient to complete the proof of Theorem 3.6. Namely, although Π is a pseudo-differential operator of degree -1 and bounded, and it is constructed from the resolvents of $-X \pm \lambda$, it is a priori unclear how the norm of $\Pi\pi f$ in $H^{-s}(T^1M)$ relates to the ℓ^∞-norm of $\mathscr{L} - \mathbf{1}$. Thus it remains to convert the term on the right hand side of Theorem 4.4 to a term involving the X-ray transform, provided that the divergence free section f of S^2T^*M is sufficiently regular.

This is done by interpolation between Sobolev spaces. The link to the X-ray transform is through Corollary 2.2 and a conversion of an L^1-norm using a positivity statement. The latter builds on the following result of Lopes and Thieullen (2005).

Theorem 5.1 (Lopes and Thieullen). *Let $\alpha \in (0,1]$ and let X be the generator of the geodesic flow of g_0. There exists $C_6 = C_6(g_0) > 0$ and $\beta \in (0,1)$ such that for any $u \in C^\alpha(T^1M)$ satisfying*

$$\int_\gamma u \geqslant 0 \quad \text{for every periodic orbit } \gamma \text{ for } \Phi^t,$$

there exist $h \in C^{\alpha\beta}(T^1M)$ and $F \in C^{\alpha\beta}(T^1M)$ such that $F \geqslant 0$ and $u + Xh = F$. Moreover,

$$\|F\|_{C^{\alpha\beta}} \leqslant C\|u\|_{C^\alpha}.$$

We now apply this result to πf for a section $f \in C^{N,\alpha}(M; S^2T^*M)$ with $\delta f = 0$. Theorem 4.4 states that

$$\|f\|_{H^{-s-1}(M;S^2T^*M)} \leqslant C_5(\|\Pi\pi f\|_{H^{-s}(T^1M)} + |\langle \pi f, 1\rangle|_{L^2(T^1M)}). \tag{10}$$

If $\int_\gamma \pi f \geqslant 0$ for every periodic orbit γ for Φ^t (which is the case if $g_0 + f$ and g_0 have the same marked length spectrum), then Theorem 5.1 shows the existence of a function h satisfying $Xh = F - \pi f$ where $F \geqslant 0$. By the norm bounds in Theorem 5.1, we have $Xh \in C^{\alpha\beta}(T^1M)$ and hence the function Xh is contained in the domain of the operator Π and in fact lies in the kernel of Π. Thus in the inequality (10), one may replace πf by $\pi f + Xh$.

On the other hand, by Theorem 4.3 for $s > 0$ and $r = -s$, the operator Π is bounded as an operator $H^s(T^1M) \to H^{-s}(T^1M)$ and therefore we obtain

$$\|f\|_{H^{-s-1}(M;S^2T^*M)} \leqslant C_7\|\pi f + Xh\|_{H^s(T^1M)}$$

for a universal constant $C_7 > 0$.

For ease of notations, in the remainder of this section, $C > 0$ denotes a constant which is universal but whose precise value may change from line to line.

Standard interpolation between Sobolev spaces yields

$$\|f\|_{H^{-s-1}(M;S^2T^*M)} \leqslant C \cdot \|\pi f + Xh\|^{\nu}_{H^{\beta}(T^1M)} \cdot \|\pi f + Xh\|^{1-\nu}_{L^2} \tag{11}$$

where $\nu = \frac{s}{\beta}$. Furthermore, we have

$$\|\pi f + Xh\|_{L^2} \leqslant \|\pi f + Xh\|^{1/2}_{L^\infty} \cdot \|\pi f + Xh\|^{1/2}_{L^1}. \tag{12}$$

Since the function $\pi f + Xh$ is *non-negative*, we also have

$$\|\pi f + Xh\|_{L^1} = \int_{T^1M} (\pi f + Xh) d\mu = \int_{T^1M} \pi f d\mu. \tag{13}$$

Now Corollary 2.2 and the formula for the X-ray transform shows that

$$|\int \pi f d\mu| \leqslant (2\mathrm{vol}(T^1M)) \cdot \|d\mathscr{L}_{g_0}(f)\|_{\ell^\infty(\mathscr{C})}. \tag{14}$$

Inequalities (12, 13, 14) together yield

$$\|\pi f + Xh\|_{L^2} \leqslant C \cdot \|\pi f + Xh\|^{1/2}_{L^\infty} \cdot \|d\mathscr{L}_{g_0}(f)\|^{1/2}_{\ell^\infty(\mathscr{C})}$$

and

$$\|f\|_{H^{-1-s}(M;S^2T^*M)} \leqslant C \cdot \|\pi f + Xh\|^{\nu}_{H^{\beta}(T^1M)} \cdot \|\pi f + Xh\|^{(1-\nu)/2}_{L^\infty} \cdot \|d\mathscr{L}_{g_0}(f)\|^{(1-\nu)/2}_{\ell^\infty(\mathscr{C})}. \tag{15}$$

Replacing the first two terms on the right hand side of this inequality by $\|f\|^{(1+\nu)/2}_{C^\alpha}$ where $\alpha > \beta$ is as in Theorem 5.1 is the statement of Theorem 5 of Guillarmou and Lefeuvre, 2019.

For the completion of Theorem 3.6 in the special case that $\int_\gamma \pi f \geqslant 0$ for every periodic orbit γ for Φ^T, which suffices for the completion of the proof of Theorem 1.2, one may now use Proposition 3.5 to replace the term $\|d\mathscr{L}_{g_0}(f)\|_{\ell^\infty(\mathscr{C})}$ by $\|\mathscr{L}(g_0 + f) - \mathbf{1}\|_{\ell^\infty(\mathscr{C})}$. This is not possible directly as it induces an error term, quadratic in the C^3-norm of f. Instead, taking advantage of the freedom to choose s and ν, the completion of the proof of Theorem 3.6 requires some additional estimates but no fundamental new idea.

As another beautiful application of this line of ideas, one obtains a local version of Conjecture 2.3.

Theorem 5.2 (Theorem 2 of Guillarmou and Lefeuvre (2019)). *Let (M, g_0) be a closed manifold of non-positive curvature whose geodesic flow is Anosov and let $N > \frac{n}{2} + 2$. There exists $\varepsilon > 0$ such that for any smooth metric g satisfying $\|g - g_0\| < \varepsilon$, the following holds true. If $L_g(\gamma) \geqslant L_{g_0}(\gamma)$ for all conjugacy classes $c \in \mathscr{C}$ of $\pi_1(M)$, then $\mathrm{vol}(M, g) \geqslant \mathrm{vol}(M, g_0)$, with equality only if there exists a diffeomorphism ϕ of M with $\phi^* g = g_0$.*

References

Besson, G., Courtois, G., and Gallot, S. (1995). "Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative." *Geom. Funct. Anal.* **5** (5), pp. 731–799.

Burns, K. and Katok, A. (1985). "Manifolds with non-positive curvature", *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **5**, pp. 307–317.

Croke, C. B. (1990). "Rigidity for surfaces of non-positive curvature", *Comment. Math. Helv.* **65** (1), pp. 150–169.

Croke, C. B. and Sharafutdinov, V. A. (1998). "Spectral rigidity of a compact negatively curved manifold", *Topology* **37** (6), pp. 1265–1273.

De la Llave, R., Marco, J. M., and Moriyón, R. (1986). "Canonical perturbation theory of Anosov systems and regularity results for the Livsic cohomology equation", *Ann. Math.* (2) **123**, pp. 537–611.

Dyatlov, S. and Zworski, M. (2016). "Fonctions zêta dynamiques pour les flots d'Anosov en utilisant l'analyse microlocale", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **49** (3), pp. 543–577.

Faure, F. and Sjöstrand, J. (2011). "Upper bound on the density of Ruelle resonances for Anosov flows", *Commun. Math. Phys.* **308** (2), pp. 325–364.

Guillarmou, C. (2017). "Invariant distributions and X-ray transform for Anosov flows", *J. Differ. Geom.* **105** (2), pp. 177–208.

Guillarmou, C. and Lefeuvre, T. (2019). "The marked length spectrum of Anosov manifolds", *Ann. Math.* (2) **190** (1), pp. 321–344.

Hamenstädt, U. (1999). "Cocycles, symplectic structures and intersection", *Geom. Funct. Anal.* **9** (1), pp. 90–140.

Katok, A. (1988). "Four applications of conformal equivalence to geometry and dynamics", *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **8**, pp. 139–152.

Lopes, A. O. and Thieullen, P. (2005). "Sub-actions for Anosov flows", *Ergodic Theory Dyn. Syst.* **25** (2), pp. 605–628.

Otal, J.-P. (1990). "Le spectre marqué des longueurs des surfaces à courbure négative. (The spectrum marked by lengths of surfaces with negative curvature)", *Ann. Math.* (2) **131** (1), pp. 151–162.

Petersen, P. (2016). *Riemannian geometry*. Vol. 171. Cham: Springer, pp. xviii + 499.

Schmutz, P. (1993). "Die Parametrisierung des Teichmüllerraumes durch geodätische Längenfunktionen", *Comment. Math. Helv.* **68** (2), pp. 278–288.

Sharafutdinov, V. A. (1994). *Integral geometry for tensor fields. Transl. from the Russian*. Utrecht: VSP, p. 271.

Vignéras, M.-F. (1980). "Variétés riemanniennes isospectrales et non isométriques", *Ann. Math.* (2) **112**, pp. 21–32.

Ursula Hamenstädt

Department of Math., University Bonn
Endenicher Allee 60
53115 Bonn, Germany

E-mail: ursula@math.uni-bonn.de

Séminaire BOURBAKI Juin 2022
73e année, 2021–2022, no 1190, p. 353 à 401
doi: 10.24033/ast.1191

RECENT PROGRESSES ON THE SUBCONVEXITY PROBLEM

by **Philippe Michel**

The subconvexity problem aims at providing non-trivial (i.e. subconvex) bounds for central values of automorphic L-functions; the main conjecture in this area is the Generalized Lindelöf Hypothesis which itself is a consequence of the Generalized Riemann Hypothesis. This lecture will survey several advances that have been made on this question during the past ten years: these include, the delta-symbol approach of R. Munshi, the Weyl type bounds of I. Petrow and M. Young (both use the Dirichlet L-series representation of the central values) and the works of P. Nelson and A. Venkatesh (which use the automorphic period representations for the central value)

1. Introduction

The Riemann zeta function is initially defined as the converging series

$$\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

for $\mathfrak{Re}\, s > 1$. As is well known it has an analytic continuation to $\mathbf{C}$ (with a simple pole at $s = 1$) and satisfies a functional equation relating its values at s and at $1 - s$. In particular the most mysterious region (from the analytic viewpoint at least) to study $\zeta(s)$ is the *critical strip* $0 \leqslant \mathfrak{Re}\, s \leqslant 1$.

One hundred years ago, Weyl (1921) introduced an important technique (now called the *Weyl differencing method*) to investigate the growth of the Riemann zeta function along the edge of the critical strip, that is $\zeta(1 + it)$ for $t \to \infty$.

During the same year, Hardy and Littlewood realized the potential of Weyl's method and announced strong *upper bounds* for $\zeta(s)$ for s *inside* the critical strip and in particular along its center, the *critical line* $\mathfrak{Re}\, s = 1/2$: using Weyl's method, they obtained the upper bound

$$\zeta(1/2 + it) = O(1 + |t|^{1/6}). \tag{1.1}$$

©Astérisque 438, SMF 2022

This bound improved significantly on Lindelöf's 1908 bound

$$\zeta(1/2+it) = O(1+|t|^{1/4}) \tag{1.2}$$

which was a consequence of the *Phragmen–Lindelöf convexity principle* (itself, a consequence of the maximum principle). Hardy and Littlewood did not publish their proof in details, but it should have been as follows: by their *approximate functional equation* formula for $\zeta(s)$ (published in 1927), one has for $|t| \geqslant 1$,

$$\zeta(1/2+it) = \sum_{n\leqslant(|t|/2\pi)^{1/2}} \frac{1}{n^{1/2+it}} + \pi^{1/2-s}\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\Gamma(s/2)} \sum_{n\leqslant(|t|/2\pi)^{1/2}} \frac{1}{n^{1/2-it}} + O(|t|^{-1/4}). \tag{1.3}$$

In particular, bounding all the terms in this sum trivially, one recover Lindelöf's bound (1.2) and going beyond amounts to detect further cancellations coming from the oscillations of the argument of $n^{-1/2\pm it}$, $n \leqslant (|t|/2\pi)^{1/2}$ when t is large. This is precisely what Weyl's method was able to capture and this eventually led to (1.1).

This so-called *Weyl bound* was the first example of a *subconvex bound* (because it improve a bound derived from a convexity principle) for the very first L-function.

The *Subconvexity Problem* is the general problem of obtaining *subconvex* bounds for the values of general L-functions along the critical line.

2. L-functions and the convexity bound

We will describe shortly the class of L-functions we will be considering but for the moment we will isolate the most basic properties they satisfy (or sometimes are expected to satisfy). In any case an L-function will be a non-zero Dirichlet series

$$L(\pi,s) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\lambda_\pi(n)}{n^s}$$

associated to an arithmetic function $\lambda_\pi\colon \mathbf{N}_{>0} \to \mathbf{C}$, absolutely converging for $\mathfrak{Re}\, s > 1$, coming with some additional data and enjoying (amongst others) the following analytic properties (see Iwaniec and Kowalski, 2004, §5.1)

1. *Euler product.* For $\mathfrak{Re}\, s > 1$, the serie $L(\pi,s)$ factors into an Euler product of *local L-factors* of degree $\leqslant d$: for $\mathfrak{Re}\, s > 1$,

$$L(\pi,s) = \prod_p L_p(\pi,s),\ L_p(\pi,s) := \prod_{i=1}^{d}\big(1-\frac{\alpha_{\pi,i}(p)}{p^s}\big)^{-1},$$

for p ranging over the set of prime number; the $\alpha_{\pi,i}(p)$, $i = 1,\cdots,d$ are complex numbers satisfying $|\alpha_{\pi,i}(p)| < p$. In particular the arithmetic function $n \mapsto \lambda_\pi(n)$ is multiplicative: $\lambda_\pi(1) = 1$ and $\lambda_\pi(mn) = \lambda_\pi(m)\lambda_\pi(n)$ if $(m,n) = 1$.

2. *Non-archimedean local parameters.* The multiset $\{\alpha_{\pi,i}(p),\ i = 1, \cdots, d\}$ is called the set of *local parameters* of $L(\pi, s)$ at p and $L_p(\pi, s)$ is called the local factor at p. Moreover, there exists an integer $q(\pi) \geqslant 1$ (the *arithmetic conductor* of the L-function) such that if p does not divide $q(\pi)$

$$\left|\prod_{i=1}^{d} \alpha_{\pi,i}(p)\right| = 1,$$

so that the local factor has degree d exactly. The primes p not dividing $q(\pi)$ are then called *unramified*.

3. *Archimedean local parameters.* This collection of non-archimedean local parameters is completed by a multiset of complex numbers, $\{\mu_{\pi,i},\ i = 1, \cdots, d\}$ satisfying $\mathfrak{Re}\, \mu_{\pi,i} < 1$ and called *the local parameters at* ∞; associated to it is a corresponding archimedean local factor which this time, is a product of Gamma functions

$$L_\infty(\pi, s) = \prod_{i=1}^{d} \Gamma_{\mathbf{R}}(s - \mu_{\pi,i}).$$

4. *Analytic continuation and functional equation*: so far $L(\pi, s)$ was essentially specified by a collection of local factors $L_p(\pi, s)$ which could be largely random. What qualifies it as an L-function is the following properties of global nature: the function $s \mapsto L(\pi, s)$ admits meromorphic continuation to $\mathbf{C}$ with at most finitely many poles. Moreover $L(\pi, s)$ satisfies a functional equation of the shape

$$\Lambda(\pi, s) = \varepsilon(\pi)\overline{\Lambda(\pi, 1 - \bar{s})}$$

where $\varepsilon(\pi)$ (the root number) is a complex number of modulus 1, and $\Lambda(\pi, s)$ (the *completed L-function*) is given by

$$\Lambda(\pi, s) := q(\pi)^{s/2} L_\infty(\pi, s).L(\pi, s)$$

for $q(\pi) \geqslant 1$ the arithmetic conductor mentioned above. The pole of the completed L-function are located on the vertical lines $\mathfrak{Re}\, s = 0, 1$ and the sum of their orders is bounded by $\leqslant 2d$ and outside of these poles, $\Lambda(\pi, s)$ has rapid decay in any bounded vertical strip $\{s,\ A \leqslant \mathfrak{Re}\, s \leqslant B\}$.

Remark 1. In particular the *dual* Dirichlet series given by

$$L(\pi^\vee, s) := \overline{L(\pi, \bar{s})} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\overline{\lambda_\pi(n)}}{n^s},\ \mathfrak{Re}\, s > 1$$

qualify as an L-function with $q(\pi^\vee) = q(\pi)$.

2.1. The Convexity Bound

Given $L(\pi, s)$ an L-function as above; we would like to evaluate the growth of $L(\pi, 1/2 + it)$ as $t \to \infty$. Since for $\mathfrak{Re}\, s > 1$, $L(\pi, s)$ is given by a converging Euler product, we expect and often understand "well" the analytic behaviour of $L(\pi, s)$ in this region (for instance $L(\pi, s)$ has no zeros there); in particular for any $\varepsilon > 0$, we have

$$L(\pi, 1 + \varepsilon + it) \ll_{d,\varepsilon} 1.$$

By the functional equation (and the known properties of the Gamma function) we then expect and often understand "well" the behaviour of $L(\pi, s)$ when $\mathfrak{Re}\, s < 0$; by Stirling's formula, the previous bound implies that for t large enough

$$L(\pi, -\varepsilon + it) \ll_{\varepsilon} |t|^{(1+\varepsilon)\frac{d}{2}}.$$

For σ in the interval $[-\varepsilon, 1 + \varepsilon]$, the convexity principle (see Iwaniec and Kowalski, 2004, Chap. 5, A.2) then implies that $L(\pi, s)$ is bounded by the convex multiplicative combination of the bounds at the extremities:

$$L(\pi, \sigma + it) \ll |t|^{\frac{d}{2}(1-\sigma+O(\varepsilon))}$$

and for $\sigma = 1/2$ one obtains (in the s variable)

$$L(\pi, 1/2 + it) \ll_{\varepsilon} |t|^{\frac{d}{4}+\varepsilon}.$$

In this bound we have ignored the other quantities on which $L(\pi, s)$ might depend: the conductor and the spectral parameter. The above argument can be refined to take these into account by introducing the *analytic conductor* of $L(\pi, s)$: it is defined (in a ad-hoc way) for $s = 1/2 + it$ by

$$Q(\pi, s) = q(\pi) \prod_{i=1}^{d} (1 + |\mu_{\pi,i} - it|) = q(\pi) q_{\infty}(\pi, s);$$

also to simplify notations we will write

$$Q(\pi) = Q(\pi, 1/2),\ q_{\infty}(\pi) = q_{\infty}(\pi, 1/2) = \prod_{i=1}^{d} (1 + |\mu_{\pi,i}|).$$

With suitable additional assumption on $L(\pi, s)$, one can obtain the

Convexity Bound. *Let $L(\pi, s)$ be an L-function of degree $d \geqslant 1$, for any $\varepsilon > 0$ and $s = \frac{1}{2} + it$, $i \in \mathbf{R}$, one has*

$$L(\pi, s) \ll_{d,\varepsilon} Q(\pi, s)^{1/4+\varepsilon}. \tag{2.1}$$

We will give here an alternative proof similar to that given in the introduction: for this we need a modern form of the approximate functional equation (2.2). By an appropriate Mellin transformation, a contour shift and the functional equation, one can show that (Iwaniec and Kowalski, 2004, Thm 5.3 & Prop. 5.4):

Approximate Functional Equation. *Let $L(\pi, s)$ be an L-function satisfying the analytic properties above. There exist two smooth functions*

$$V_s, V_{1-s} \colon \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{C}$$

whose derivatives have rapid decay: for any $y > 0$, any integer $a \geqslant 0$ and any $A > 0$ one has

$$y^a V_\bullet^{(a)}(y) \ll_{d,A,a,\mathfrak{Re}\, s} (1+y)^{-A}$$

(although these functions might depend on the archimedean parameters of π, the implicit constants depend only on d, A and a) such that

$$L(\pi, s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_\pi(n)}{n^s} V_s\Big(\frac{n}{Q(\pi,s)^{1/2}}\Big) + \varepsilon(\pi, s) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\overline{\lambda_\pi}(n)}{n^{1-s}} V_{1-s}\Big(\frac{n}{Q(\pi,s)^{1/2}}\Big) + R(\pi, s) \tag{2.2}$$

where $\varepsilon(\pi, s)$ is a complex number of modulus 1 and $R(\pi, s)$ is a contribution from the poles of $\Lambda(\pi, s)$ and is zero if $\Lambda(\pi, s)$ is entire.

Proof of the convexity bound. We sketch the proof (in a slightly stronger form) assuming that $L(\pi, s)$ is entire and that its local parameters satisfy the following Ramanujan–Peterson type bound

$$\forall p,\ i = 1, \dots, d,\ |\alpha_{\pi,i}(p)| \leqslant 1.$$

In particular the coefficients $\lambda_\pi(n)$ are bounded by

$$|\lambda_\pi(n)| \leqslant \tau_d(n) = \sum_{n_1 \cdots n_d = n} 1$$

the d-th order divisor function. By the approximate functional equation we have taking $A \geqslant 2$

$$L(\pi, s) \ll_{d,A} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau_d(n)}{n^{1/2}} \Big(1 + \frac{n}{Q(\pi,s)^{1/2}}\Big)^{-A} \ll_d Q(\pi, s)^{1/4} \log^{d-1}(Q(\pi, s)). \qquad \square$$

Remark 2. While the convexity bound is trivial to prove in favourable cases such that this one here, it is not obvious in general (see Molteni, 2002 and Brumley, 2004).

2.2. The Subconvexity Problem

The Subconvexity Problem can be loosely stated as

Subconvexity Problem (ScP). *Given $L(\pi, s)$ an L-function, show that there exists $\delta = \delta(d) > 0$ such that for $s = \frac{1}{2} + it$, $t \in \mathbf{R}$*

$$L(\pi, s) \ll_d Q(\pi, s)^{1/4-\delta} \tag{2.3}$$

where the implicit constant depends at most on d.

Remark 3. Weyl's bound (representing 33% of the GLH) is particularly strong (more examples below). However we want to insist that one is usually satisfied with obtaining *some* positive δ and sometimes one is happy with even less (see §4.3). On the other hand, there are some situations where the size of the exponent is critical, for instance Ghosh and Sarnak, 2012; Humphries and Radziwiłł, 2021

Sometimes this is too much to ask and one look instead for simpler variants in which some of the numerical parameters on which $Q(\pi, s)$ depends (i.e. the complex variable s, the arithmetic conductor $q(\pi)$ or the archimedean conductor $q_\infty(\pi)$) vary and the others remain fixed; for instance

Subconvexity Problem (s-aspect). *Prove that there exists $\delta = \delta(d) > 0$ such that $L(\pi, s)$ satisfies for $s = \frac{1}{2} + it$, $i \in \mathbf{R}$ on the critical line*

$$L(\pi, s) \ll_{d, Q(\pi, 1/2)} |s|^{d(1/4-\delta)}$$

where the implicit constant depends at most on d, the arithmetic conductor and the archimedean parameters.

Subconvexity Problem ($q(\pi)$-aspect). *Prove that there exists $\delta = \delta(d) > 0$ such that $L(\pi, s)$ satisfies for $s = \frac{1}{2} + it$, $i \in \mathbf{R}$ on the critical line*

$$L(\pi, s) \ll_{d, s, \pi_\infty} q(\pi)^{1/4-\delta}$$

where the implicit constant depends at most on d, s and the archimedean parameters.

Subconvexity Problem ($q(\pi_\infty)$-aspect). *Prove that there exists $\delta = \delta(d) > 0$ such that $L(\pi, s)$ satisfies for $s = \frac{1}{2} + it$, $i \in \mathbf{R}$ on the critical line*

$$L(\pi, s) \ll_{d, s, q(\pi)} q_\infty(\pi)^{1/4-\delta}$$

and the implicit constant depends at most on d, s and the arithmetic conductor.

In any case, the "horizon" of the Subconvexity Problem is the

Generalized Lindelöf Hypothesis (GLH). *Given $L(\pi, s)$ an L-function of degree $d \geqslant 1$, for any $\varepsilon > 0$ and $s = \frac{1}{2} + it,\ t \in \mathbf{R}$, one has*

$$L(\pi, s) \ll_{d,\varepsilon} Q(\pi, s)^{\varepsilon}. \tag{2.4}$$

The GLH is itself a consequence of the:

Generalized Riemann Hypothesis (GRH). *The zero of $\Lambda(\pi, s)$ are all located on the critical line $\{s \in \mathbf{C},\ \mathfrak{Re}\, s = 1/2\}$.*

2.3. Examples of L-functions

The very first example is of course the *Riemann's zeta function*

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

which has degree 1, root number one, arithmetic conductor 1 and a simple pole at $s = 1$.

2.3.1. *Dirichlet L-functions.* — The next class of examples are the *Dirichlet L-functions* associated to primitive Dirichlet characters modulo an integer q: given $\chi\colon (\mathbf{Z}/q\mathbf{Z})^{\times} \to \mathbf{C}^{\times}$, such a character, its L-function is given by

$$L(\chi, s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1},$$

where χ is extended to a function on $\mathbf{Z}$ by q-periodicity and by 0 along the integers not coprime with q. Dirichlet L-functions have also degree 1, their root number is equal to a unitary multiple of the normalized Gauss sum

$$g_\chi := q^{-1/2} \sum_{a \,(\mathrm{mod}\, q)} \chi(a) e(\frac{a}{q}),\ e(z) = \exp(2\pi i z),$$

their arithmetic conductor is q and they are holomorphic everywhere. Moreover $\chi^{\vee} = \chi^{-1}$.

2.3.2. *Hecke L-functions.* — Examples in degree 2 include the Hecke L-functions attached to a holomorphic Hecke eigen-cuspform of weight $k \geqslant 1$ for a congruence subgroup of level q for some integer $q \geqslant 1$,

$$\Gamma_0(q) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}), c \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q) \right\},$$

$$L(f,s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\lambda_f(n)}{n^s}, \text{ where } f(z) = \sum_{n \geqslant 1} \lambda_f(n) n^{k/2} e(nz),\ \Im\mathrm{m}\, z > 0;$$

these L-functions are of degree 2 with arithmetic conductor $q(f) = q$ and archimedean parameters $\{-(k-1)/2, -(k+1)/2\}$.

2.3.3. *Godement–Jacquet L-functions.* — All these examples are special cases of "*standard*" Godement–Jacquet L-functions attached to an automorphic cuspidal representation of the linear group GL_d, i.e. an irreducible infinite dimensional representation $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A})$ contained in the space $L^2(\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q})\backslash \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}); \omega)$ for $\omega\colon \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$ a unitary character (we denote the set of such representation $\mathscr{A}_0(GL_d)$). Any such π decomposes as a restricted product of local irreducible unitary representations of $\mathrm{GL}_d(\mathbf{R})$ and $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$

$$\pi \simeq \pi_\infty \otimes \bigotimes\nolimits_p' \pi_p$$

almost all of which are unramified principal series (i.e. admit a non-zero $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}_p)$-invariant vector). To each local representation π_v is attached a multiset of local parameters, a local L-factor $L(\pi_v, s) = L_v(\pi, s)$ and if $v = p$ a local conductor $q(\pi_p) \geqslant 1$ equal to 1 if π_p is unramified; the automorphy of π implies (see Godement and Jacquet, 1972) that the global Euler product

$$L(\pi, s) = \prod_p L_p(\pi, s)$$

has all the basic properties mentioned above and has conductor $q(\pi) = \prod_p q(\pi_p)$; in addition the dual L-function $L(\pi^\vee, s)$ is the standard L-function of the contragredient representation of π. In fact, standard L-functions satisfy more analytic properties (like a zero free region à la Hadamard-de la Vallée–Poussin) but to establish these, one needs the theory of

2.3.4. *Rankin–Selberg L-functions.* — Rankin–Selberg L-functions are Euler product attached to pairs of automorphic representations $(\pi, \pi') \in \mathscr{A}_0(GL_d) \times \mathscr{A}_0(GL_{d'})$,

$$L(\pi \times \pi', s) = \prod_p L_p(\pi \times \pi', s).$$

They have been introduced and studied by Rankin and Selberg for pairs of classical modular forms, and the general analytic theory was developped by Jacquet, Piatetski-Shapiro and Shalika. The local factor at a prime p not dividing $q(\pi)q(\pi')$ is given by

$$L_p(\pi \times \pi', s) = \prod_{i=1}^{d} \prod_{i'=1}^{d'} \left(1 - \frac{\alpha_{\pi,i}(p)\alpha_{\pi',i'}(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

but at the other prime it is much less explicit.

One knows that Rankin–Selberg L-functions enjoy all the basic analytic properties mentioned above and are holomorphic everywhere excepted if $d = d'$ and $L(\pi', s) = L(\pi, s + it)$, $t \in \mathbf{R}$ in which case $L(\pi \times \pi', s)$ has a simple pole at $s = 1 - it$.

The case of Rankin–Selberg L-functions leads to further variations of the Subconvexity problem: one can look for subconvex bounds for $L(\pi \times \pi', s)$ when the first representation π is considered fixed and only the second π' has its parameters varying: one has the following relation between analytic conductors

$$Q(\pi', s)^d \ll_\pi Q(\pi \times \pi', s) \ll_\pi Q(\pi', s)^d$$

and the subconvexity problem admits the following variant:

Subconvexity Problem (π'-aspect). *Prove that there exists $\delta = \delta(d, d') > 0$ such that the Rankin–Selberg L-function $L(\pi \times \pi', s)$ satisfies, for $s = \frac{1}{2} + it$, $i \in \mathbf{R}$*

$$L(\pi \times \pi', s) \ll_{\pi, d'} Q(\pi', s)^{d(1/4 - \delta)}$$

where the implicit constant depends at most on d' and π.

2.3.5. *Automorphic L-functions for reductive groups.* — More generally given a reductive group $G_{/\mathbf{Q}}$, $\pi \in \mathscr{A}(G)$ an automorphic representation and

$$r\colon {}^L G = \widehat{G}(\mathbf{C}) \rtimes \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$$

a finite dimensional complex representation of its L-group, one can form a partial Euler product (S is a finite set of primes including all the ramified primes)

$$L^S(\pi, r, s) = \prod_{p \notin S} L_p(\pi, r, s)$$

converging for $\mathfrak{Re}\, s$ sufficiently large and which (conjecturally on the local Langlands correspondence) can be completed to a full Euler product $L(\pi, r, s)$ satisfying (conjecturally) all the basic properties mentioned above.

For instance Godement–Jacquet L-functions correspond to the standard representation

$$\mathrm{St}_d\colon \mathrm{GL}_d(\mathbf{C}) \to \mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$$

and *Rankin–Selberg L-functions* correspond to the product $G = \mathrm{GL}_d \times \mathrm{GL}_{d'}$ and the product of the standard representations $\mathrm{St}_d \times \mathrm{St}_{d'}$.

Remark 4. Such constructions can also be made by replacing $\mathbf{Q}$ by a general number field K; any such L-function can then be viewed as an L-function over $\mathbf{Q}$ of degree $d[K:Q]$.

Remark 5. By the functoriality principle of Langlands, it is expected any such L-function can be decomposed as a product of standard Godement–Jacquet L-functions (over K and in fact over $\mathbf{Q}$). Notable examples are the Rankin–Selberg L-functions and the first symmetric power L-functions of automorphic representations of GL_2 (Clozel and Thorne, 2015; Cogdell et al., 2004; Gelbart and Jacquet, 1978; Newton and Thorne, 2021a,b; Ramakrishnan, 2000).

3. 100 years of Subconvexity

3.1. Weyl's bound

As pointed out in the introduction, this year marks the 100th anniversary of the first subconvex *Weyl* bound by

$$\zeta(1/2+it) \ll_\varepsilon (1+|t|)^{1/6+\varepsilon}.$$

This bound represents 33% of the Lindelöf Hypothesis. Weyl's *differenting method* was the starting point of van der Corput's method also known as the theory of *exponent pairs* which enable to bound sums of analytic exponentials. Weyl's original $1/6$ exponent has since been improved, notably by Bombieri–Iwaniec and Huxley; the current record is held by Bourgain (2017) who used the decoupling techniques he developed with C. Demeter to reach the exponent $1/6 - 1/84$ (see the presentation by Pierce, 2019 of the decoupling method in this seminar).

3.2. Burgess's bound

Nearly 40 years after Weyl's bound, Burgess obtained the first subconvex bound for Dirichlet L-functions in the conductor aspect: if $q > 1$ is cube-free and χ is a non-trivial Dirichlet character of conductor q, one has

$$L(\chi, s) \ll_{\varepsilon,s} q^{3/16+\varepsilon}; \tag{3.1}$$

Burgess's bound represents 25% of GLH in the q-aspect. Burgess's method is quite singular and has not been much used in the context of the subconvexity problem (see however Friedlander and Iwaniec (1985) and Kowalski, Michel, and Sawin (2017) for variants of Burgess's method in different but related contexts). On the other hand, Burgess's bound was improved for moduli having suitable divisibility properties (by using arithmetic variants of van der Corput's method) see Heath-Brown (1996) and Blomer and Milićević (2015) for representative examples. However, one had to wait for almost 40 years and a new approach to see this bound further improved (see below).

3.3. 1980-2000: Kloostermania and modular forms

That period witnessed a flurry of subconvex bounds (in various aspects) for Hecke L-functions of modular forms and their Rankin–Selberg L-functions (Blomer, Harcos, and Michel, 2007; Conrey and Iwaniec, 2000; Duke, Friedlander, and Iwaniec, 1993, 1994b, 2002; Good, 1981; Harcos and Michel, 2006; Jutila and Motohashi, 2005; Kowalski, Michel, and VanderKam, 2002; Michel, 2004; Sarnak, 2001). The main approach was via the *method of moments* (see below) and the main technical tools were the spectral theory of automorphic forms, Kuznetsov's trace formula and its associated Kloosterman sums; during the course of the proofs of several of these cases it emerged that the Subconvexity problem is closely tied to another classical problem of analytic number theory, namely the *Shifted convolution Problem* which asks to evaluate correlation sums between two sequences of additively shifted Fourier coefficients of modular forms: the problem was to evaluate various sums of the shape (or linear combinations thereof)

$$S(f,g;h)=\sum_{\substack{m,n\\ am+bn=h}}\lambda_f(m)\lambda_g(n)V\big(\frac{m}{M},\frac{n}{N}\big),\ V\in\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^2)$$

for a,b,h non zero integers.

Amongst these numerous contributions two are worth mentioning for the purpose of this survey.

The first is the work of Duke, Friedlander, and Iwaniec (1993, 1994b, 2002) who complemented the method of moments with the fundamental *Amplification method* and also introduced *the δ-symbol method* to resolve some instance of the Shifted convolution Problem.

The second contribution is the work of Conrey and Iwaniec (2000) who used the method of moments together with the spectral theory of GL_2-automorphic forms to reach the *Weyl bound* (i.e. 33% of GLH) when χ is a *quadratic character* of modulus q: for $\mathfrak{Re}\, s=1/2$, one has

$$L(\chi,s)\ll_{\varepsilon,s} q^{1/6+\varepsilon};\tag{3.2}$$

improving on Burgess's 40 years old bound. Recently, Petrow and Young (2019, 2020) have proven the Conrey–Iwaniec bound for arbitrary Dirichlet characters and in the s-aspect as well:

Theorem 1 (Petrow–Young). *Let $\chi \pmod q$ be a primitive Dirichlet character (possibly complex, possibly with modulus q divisible by cubes) for $\mathfrak{Re}\, s=1/2$, one has*

$$L(\chi,s)\ll_\varepsilon (|s|q)^{1/6+\varepsilon}.$$

We will briefly discuss their proof in the present report.

3.4. 2000-today: Extension to number fields

In the beginning of the 2000's the subconvexity problem started to be systematically considered for L-functions defined over a general number field.

An important example is the work of Cogdell, Piatetski-Shapiro and Sarnak who solved an instance of the subconvexity problem for character twists of L-functions of Hilbert modular forms over a totally real field; they then used it to resolve the last remaining case of Hilbert's 11th problem (the Hasse principle for representations of algebraic integers by ternary quadratic forms defined over a totally real fields). Their proof went by generalising to totally real fields some classical techniques existing over $\mathbf{Q}$ and in particular an instance of the Shifted convolution Problem (see Cogdell (2003) for a survey.

A change of paradigm occurred with the work of Venkatesh (2010) who, inspired by some earlier work of Bernstein and Reznikov (2010) formulated the subconvexity problem as the problem of bounding certain *automorphic periods*; combining local and global aspects of the theory of automorphic representations and transposing some classical techniques to the adelic setting –like the amplification method–, Venkatesh established some important new cases (sometimes new even over $\mathbf{Q}$) of the subconvexity problem for standard L-functions of Hecke characters, $\mathrm{GL}_{2,K}$ standard L-functions, $\mathrm{GL}_{2,K}\times\mathrm{GL}_{2,K}$ Rankin–Selberg L-functions as well as $\mathrm{GL}_{2,K}\times\mathrm{GL}_{2,K}\times\mathrm{GL}_{2,K}$ triple product L-functions for K an arbitrary number field. Venkatesh's adelic periods approach together with other arguments eventually led to the complete resolution of the subconvexity problem (simultaneously in all aspects) for $\mathrm{GL}_{1,K}$ and $\mathrm{GL}_{2,K}$ standard L-functions over an arbitrary number field K (Michel and Venkatesh, 2010).

Recently Nelson (2020) widely expended the period approach of Michel and Venkatesh (2010) to provide an adelic treatment of the work of Conrey–Iwaniec–Petrow–Young and obtained the following Weyl type bound:

Theorem 2 (Nelson). *Given $K/\mathbf{Q}$ a number field and*

$$\chi\colon K^\times\backslash\mathbf{A}_K^\times\to\mathbf{C}^{(1)}$$

a Hecke character of finite order with cube-free conductor $\mathfrak{q}(\chi)\subset\mathscr{O}_K$, the Weyl bound holds

$$L(\chi,s)\ll_{[K:\mathbf{Q}],\varepsilon,s}\mathrm{Nr}_{K/\mathbf{Q}}(\mathfrak{q}(\chi))^{1/6+\varepsilon}. \tag{3.3}$$

It is believable that Nelson's proof carries over to yield the Weyl bound simultaneously for all aspects and without cube-freeness assumption.

Also recently Balkanova, Frolenko and Wu gave another fairly different approach to this bound (at the moment for K totally real) (Balkanova, Frolenkov, and Wu, 2021; Wu, 2021).

3.5. 2010-today: subconvexity in higher ranks

The past decade has also witnessed the development of subconvex bounds for L-functions attached to automorphic forms/representations on GL_d for $d \geqslant 3$.

One of he first examples is due to Li (2011) who solved the problem in the s-aspect for the Standard L-function $L(\mathrm{sym}^2 f, s)$ of the symetric square (or Gelbart–Jacquet) lift attached to a modular form f of level 1: *there is an absolute constant $\delta > 0$ such that*

$$L(\mathrm{sym}^2 f, s) \ll_f |s|^{3/4-\delta}.$$

Li also solved the problem for the value at $s = 1/2$ of the Rankin–Selberg L-function $L(\mathrm{sym}^2 f \times g, s)$ of the symmetric square lift of f and a modular form g of level 1 in the $q_\infty(g)$-aspect: *there is an absolute constant $\delta > 0$ such that*

$$L(\mathrm{sym}^2 f \times g, 1/2) \ll q_\infty(g)^{3/4-\delta}.$$

Li's proof use the method of moments (by evaluating a first moment through the Kuznetsov formula) together in a crucial fact (due to Lapid) that the central value $L(\mathrm{sym}^2 f \times g, 1/2)$ is non-negative. A bit later, by a similar approach, Blomer (2012) also proved a subconvex bound for character twist L-functions: *there is an absolute constant $\delta > 0$ such that for $\chi \pmod q$ a quadratic character, one has*

$$L(\mathrm{sym}^2 f \times g \times \chi, 1/2) \ll q^{3/2-\delta}.$$

Here again the restriction to a quadratic character is necessary to ensure the non-negativity of the central value $L(\mathrm{sym}^2 f \times g \times \chi, 1/2)$.

3.5.1. *Munshi's δ-symbol method.* — Munshi (2015a,b) introduced his own variant of the δ-symbol method (see below) to obtain subconvex bounds for the standard L-function $L(\varphi, s)$ attached to a φ a spherical (i.e. $\mathrm{SO}_3(\mathbf{R})$-invariant) GL_3-automorphic form of level 1:

Theorem (Munshi). *There is an absolute constant $\delta > 0$ such that for $\mathfrak{Re}\, s = 1/2$ and χ a Dirichlet character of prime modulus q, one has*

$$L(\varphi, s) \ll_\varphi |s|^{3/4-\delta},\ L(\varphi \times \chi, s) \ll_{s,\varphi} q(\chi)^{3/4-\delta}.$$

A few years later, Holowinsky and Nelson (2018) discovered a simplification of Munshi's original approach that led to a drastic improvement of the value of the exponent δ; eventually Lin (2021) used the Holowinsky–Nelson method to obtain a joint subconvex bound: for q and $\chi \pmod q$ a Dirichet character, one has

$$L(\varphi \times \chi, s) \ll_{\varepsilon,\varphi} Q(\chi, s)^{3/4-1/36+\varepsilon}.$$

Subsequently, Munshi (2021) perfected the δ-symbol method and solved the subconvexity problem for $\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$ Rankin–Selberg L-functions in the s-aspect:

Theorem (Munshi). *Given φ as above and g a modular form, both of level* 1*, one has*

$$L(\varphi \times g, s) \ll_{\varepsilon,\varphi,g} |s|^{\frac{3}{2}-\frac{1}{51}+\varepsilon}.$$

Building on this work, several new cases of subconvexity were established: Sharma (2019) solved the problem for arbitrary character twists of prime conductor:

Theorem 3 (Sharma). *For $\chi \pmod q$ a Dirichlet character of prime conductor, one has*

$$L(\varphi \times g \times \chi, s) \ll_{\varepsilon,\varphi,g,s} q^{\frac{3}{2}-\frac{1}{32}+\varepsilon}.$$

There have since be several further developments: for instance in a very recent preprint, Kumar (2020) has announced the resolution of the problem in the $q_\infty(g)$-aspect:

$$L(\varphi \times g, s) \ll_{\varepsilon,\varphi,s} q_\infty(g)^{\frac{3}{4}-\frac{1}{102}+\varepsilon}.$$

3.5.2. *Further subconvex bounds in higher rank.* — All the high rank cases discussed so far concerned situations where the varying quantities are attached to automorphic forms/representations of small rank (GL_1 or GL_2).

Blomer and Buttcane (2020) solved for the first time, a subconvexity problem for L-functions in a generic family of GL_3 automorphic representations: *there is an absolute constant $\delta > 0$ such given some constant $C > 1$ and φ be a spherical GL_3-cusp form of level* 1 *whose archimedean parameters $\{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}$ satisfy a non-degeneracy assumption*

$$\forall 1 \leqslant i \neq j \leqslant 3,\ C^{-1} \leqslant \frac{|\mu_i|}{\max(|\mu_1|,|\mu_2|,|\mu_3|)} \leqslant C,\ C^{-1} \leqslant \frac{|\mu_i - \mu_j|}{\max(|\mu_1|,|\mu_2|,|\mu_3|)}. \quad (3.4)$$

One has

$$L(\varphi, s) \ll_{s,C} q_\infty(\varphi)^{1/4-\delta}. \quad (3.5)$$

Their proof used the method of moments (the fourth moment of $L(\varphi, s)$) supplemented by the amplification method. The evaluation of the fourth moment was based on the Kuznetzov formula for GL_3 which was developed by Buttcane in a series of papers (Buttcane, 2016, 2020, 2021).

3.6. Subconvexity in arbitrarily large rank

We conclude this long enumeration with the most recent works of Nelson (2021a,b) and Nelson and Venkatesh (2021).

3.6.1. *L-functions associated with unitary groups.* — Let $E/\mathbf{Q}$ be a quadratic field, $n \geqslant 1$, and let $U(V)$ and $U(W)$ be respectively the unitary groups of a non-degenerate $n+1$-dimensional hermitian space V/E and of $W \subset V$ the orthocomplement of some non-zero vector; let π and σ be respectively automorphic cuspidal representations of $U(V)$ and $U(W)$ which are everywhere tempered. By the works of Mok (2015) and Kaletha et al. (2014) are naturally associated to π and σ two automorphic representations π_E and σ_E of $\mathrm{GL}_{n+1,E}$ and $\mathrm{GL}_{n,E}$; let

$$L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, s) =: L(\pi, \sigma, s)$$

be their associated Rankin–Selberg L function (it has degree $2(n+1)n$ as an L-function "over" $\mathbf{Q}$).

Nelson (2021b) has solved the subconvexity problem for the central value L-function $L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2)$ for representations π, σ satisfying the following additional conditions

- $U(W)$ is anisotropic.
- The representations π and σ are everywhere tempered.
- The pair (π, σ) is everywhere locally distinguished (i.e. for every place v, one has $\mathrm{Hom}_{U(W)(\mathbf{Q}_v)}(\pi_v, \sigma_v) \neq \{0\}$).
- There is a fixed finite set of places S of $\mathbf{Q}$ containing the archimedean place outside of which π and σ are unramifed.
- For every prime $p \in S$, the local component π_p and σ_p belong to fixed compact sets Π_p, Σ_p of the unitary duals of $U(V)(\mathbf{Q}_p)$ and $U(W)(\mathbf{Q}_p)$. In particular

  $$q(\pi_E \times \sigma_E^\vee) \ll 1$$

  where the implicit constant depends on the Π_p, Σ_p, $p \in S$.
- There is some constant $1 < C$ such that for

  $$T := \max(\{|\mu_{\pi_E,i}|,\ 1 \leqslant i \leqslant 2(n+1)\} \cup \{|\mu_{\sigma_E,j}|,\ 1 \leqslant j \leqslant 2n\})$$

  the maximal value of the archimedean parameters of $L(\pi_E, s)$ and $L(\sigma_E, s)$, then

  $$C^{-1} \leqslant \frac{q_\infty(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2)}{T^{2(n+1)n}} \leqslant C \tag{3.6}$$

Theorem 4 (Nelson). *Under the assumption above, there exists $\delta = \delta(n) > 0$ such that*

$$L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2) \ll q_\infty(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2)^{1/4-\delta} \tag{3.7}$$

where the implicit constant depends on n, C, and the compact sets Π_p, Σ_p, $p \in S$. In fact the subconvex exponent $\delta = \delta(n) > 0$ is explicit and is the inverse of a polynomial of degree 5 in n.

The proof which we discuss in §8.4 uses the method of moments (the first moment of $L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2)$) supplemented by the amplification method and also a crucial use of the *positivity* of the central value $L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2)$ (which again follows from the validity of the conjectures of Gan–Gross–Prasad and Harris). The evaluation of the first moment is performed by a relative trace formula approach and the choice of the test function builds crucially on the methods developed by Nelson and Venkatesh (2021).

Remark 6. In stating this subconvex bound, one could have removed the condition that (π, σ) is everywhere locally distinguished: by the Gan–Gross–Prasad–Harris conjecture which has been established in this case (see Beuzart-Plessis, 2019, for a recent account), one has

$$L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2) = 0$$

if the pair (π, σ) is not everywhere locally distinguished. However this condition is essential for the proof.

Remark 7. The subconvex bound is valid more generally when the unitary groups are defined over a general number field F (relatively to a quadratic extension E/F).

3.6.2. *Non-conductor dropping.* — The technical looking condition (3.6) – analogous to the non-degeneracy condition (3.4) – states that the archimedean parameters of $L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, s)$ are all approximately of the same size T, so the conductor of $L(\pi_E \times \sigma_E, 1/2)$ is a big as it could be; in particular the parameters of π_E and σ_E are away from one another:

$$\forall i, j,\ |\mu_{\pi_E,i} - \mu_{\sigma_E,j}| \gg T.$$

This condition is therefore called the *non-conductor dropping assumption*.

An important special case where the non-conductor dropping assumption holds if when σ_E is fixed and all the archimedean parameters of π_E are large and of about the same size and *vice versa*.

3.6.3. *Extension to the split case.* — A few months ago, (Nelson, 2021a) has announced the resolution of subconvexity problem in the $q_\infty(\pi)$-aspect (cf. (2.3)) for standard L-functions of automorphic representations of $\mathrm{GL}_{n+1,\mathbf{Q}}$ *for any* n under a non-conductor dropping assumption:

Let π an automorphic cuspidal representation of GL_{n+1}, whose archimedean are all of about the same size: there is some absolute constant $1 < C$ such that for

$$T := \max(\{|\mu_{\pi_E,i}|,\ 1 \leqslant i \leqslant (n+1)\}$$

one has

$$C^{-1} \leqslant \frac{q_\infty(\pi, 1/2)}{T^{n+1}} \leqslant C. \tag{3.8}$$

There exists $\delta = \delta(n) > 0$ (explicit) such that

$$L(\pi, 1/2) \ll_{q(\pi),C} q_\infty(\pi)^{\frac{1}{4}-\delta}. \tag{3.9}$$

An important special case is when π is of the shape

$$\pi = \pi_0 \times |\cdot|_{\mathbf{A}}^{it},\ t \in \mathbf{R}$$

when π_0 is a *fixed* and $t \to \infty$: the non-conductor dropping condition (3.8) is automatically satisfied and for $s = 1/2 + it$, one has

$$L(\pi, 1/2) = L(\pi_0, s) \ll_{\pi_0} |s|^{\frac{n+1}{4}-\delta};$$

this solves the subconvexity problem in the s-aspect for all standard L-functions !

Nelson's proof (which I have not been able to absorb yet) can be interpreted as a "degenerate specialisation" of Nelson (2021b) when

- E is the *split* quadratic algebra $E = \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ so that $\mathrm{GL}_{n+1,E} \simeq \mathrm{GL}_{n+1} \times \mathrm{GL}_{n+1}$, $U(E^{n+1}) \simeq \mathrm{GL}_{n+1}$, $\mathrm{GL}_{n,E} \simeq \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$, $U(E^n) \simeq \mathrm{GL}_n$,
- $\pi = \pi$ and $\sigma = 1 \boxplus \cdots \boxplus 1$ is the least cuspidal (Siegel) Eisenstein series of GL_n. In particular
$$L(\pi_E \otimes \sigma_E, 1/2) = |L(\pi, 1/2)|^{2n}$$
and
$$q_\infty(\pi_E \otimes \sigma_E) \asymp |T|^{(n+1)2n}.$$

However the "adaptation" of the proof of Theorem 4 to this very degenerate situation comes with considerable technical difficulties due to the fact that σ is not cuspidal.

Remark 8. In fact Nelson's bound (3.9) generalizes (up to the value of δ) all the results enumerated in §3.5 concerning the s or the archimedean aspect, including the case of $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3$ Rankin-Selberg L-functions (which are GL_6 standard L-functions by Kim and Shahidi, 2002) as well the cases of GL_2 and $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ L-function (which are GL_4 standard L-functions by Ramakrishnan, 2000) in these same aspects, as long the the non-conductor dropping assumption is satisfied.

Remark 9. The non-conductor dropping assumption is a generic condition. However there are some natural situations where the L-functions are evaluated at conductor dropping points (see for instance Phillips and Sarnak, 1985). Removing this assumption is an therefore important and technical challenge which is so far resolved only in few cases: for all GL_1 and GL_2 L-functions and for some cases of $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ L-functions (see for instance Michel and Venkatesh, 2010 which used an argument borrowed from Michel, 2004).

4. Some applications of the subconvexity problem

The intensive activity surrounding the subconvexity problem during the past 40 years was largely driven by external applications: in this section we provide a sample of these:

4.1. Representation by ternary quadratic forms

We start with the following classic theorem

Theorem (Duke, 1988). *Let $d > 0$ be a square-free integer not congruent to $7 \pmod 8$, then d is representable as a sum of three squares:*

$$R_3(d) = \{(a,b,c) \in \mathbf{Z}^3,\ a^2+b^2+c^2 = d\} \neq \emptyset.$$

Moreover as $d \to \infty$

$$r_3(d) = |R_3(d)| = d^{1/2+o(1)}$$

and the set $d^{-1/2}.R_3(d) \subset S^2 \subset \mathbf{R}^3$ become equidistributed on the unit sphere relative to the rotationally invariant probability measure μ_{S^2}. More precisely there exists an absolute constant $\delta > 0$ such that for φ any continuous function on S^2 one has

$$\frac{1}{r_3(d)} \sum_{\substack{(a,b,c)\\ a^2+b^2+c^2=d}} \varphi\Big(\frac{a}{d^{1/2}}, \frac{b}{d^{1/2}}, \frac{c}{d^{1/2}}\Big) = \mu_{S^2}(\varphi) + O_\varphi(d^{-\delta}). \tag{4.1}$$

Proof. By approximation and symmetry it is sufficient to prove (4.1) when φ is a non-constant harmonic homogeneous polynomial which is $\mathrm{SO}_3(\mathbf{Z})$-invariant; moreover we may also assume that φ is an eigenfunction of the Hecke operators $T_p,\ p \neq 2$ on the sphere obtained from Hurwitz quaternions of norm p (see Sarnak, 1990). By a formula of Waldspurger (1985) there exists an holomorphic Hecke eigenform φ^{JL} such that

$$\Big|\frac{1}{r_3(d)} \sum_{\substack{(a,b,c)\\ a^2+b^2+c^2=d}} \varphi\Big(\frac{a}{d^{1/2}}, \frac{b}{d^{1/2}}, \frac{c}{d^{1/2}}\Big)\Big|^2 = c(\varphi,d)\frac{L(\varphi^{JL},1/2)L(\varphi^{JL}\times\chi_{-d},1/2)}{d^{1/2}}$$

where $0 < c(\varphi,d) = d^{o_\varphi(1)}$ and χ_{-d} is the Kronecker symbol of the imaginary quadratic field $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. The conductor of the L-function $L(\varphi^{JL}\times\chi_{-d},1/2)$ satisfies

$$Q(\varphi^{JL}\times\chi_{-d},1/2) \asymp Q(\varphi^{JL},1/2)d^2$$

and we have a subconvex bound (establishd in Duke, Friedlander, and Iwaniec (1993) for the first time)

$$L(\varphi^{JL}\times\chi_{-d},1/2) \ll_\varphi (q^2)^{1/4-\delta}.$$

It follows that

$$\frac{1}{r_3(d)} \sum_{\substack{(a,b,c)\\ a^2+b^2+c^2=d}} \varphi\big(\frac{a}{d^{1/2}}, \frac{b}{d^{1/2}}, \frac{c}{d^{1/2}}\big) \ll_\varphi d^{-\delta}. \qquad \square$$

Remark 10. Duke's original proof was a bit different: the "Weyl" in (4.1) is up to a constant the Fourier coefficient of a theta series and Duke used a method of Iwaniec (1987) to bound such coefficients non-trivially. The two proofs are in fact connected by another formula of Kohnen and Zagier (1981) and Waldspurger (1981).

This proof is one of several examples of a general scheme of applications of subconvexity to certain equidistribution problems on arithmetic locally homogeneous spaces. For such problems, one is reduced to showing that some Weyl sums converge to 0 and, by a general version of *Weyl's equidistribution criterion*, one may assume that the test functions attached to them are automorphic forms. In that case, the Weyl sums are related to values of L-function and a subconvex bound is often just what is needed to establish the convergence to 0 (see also Einsiedler et al., 2011 and the presentation given by Breuillard, 2010 in this seminar for an exotic example combining subconvexity and ergodic theory).

As already pointed out, a striking application of the subconvexity problem for L-functions defined over a general number field is surveyed in Cogdell (2003) (see Blomer and Harcos, 2010 for a complete proof): the resolution of the last remaining case of *Hilbert's 11th problem* (which we state here in a simplified form) by extending to totally real number field an earlier result of Duke and Schulze-Pillot (1990) over $\mathbf{Q}$.

Theorem (Cogdell – Piatetski-Shapiro – Sarnak)**.** *Let K be a totally real number field with ring of integers $\mathcal{O}_K$ and $q\colon \mathcal{O}_K^3 \to \mathcal{O}_K$ be a non-degenerate, totally definite, integrally valued ternary quadratic form. Any sufficiently large and square-free integer $d \in \mathcal{O}_K$, which is locally representable (integrally) by q is representable (integrally) by every form in the genus of q.*

4.2. The Quantum Unique Ergodicity conjecture

Given $X = \Gamma\backslash\mathbf{H}$ a compact hyperbolic Riemann surface with hyperbolic probability measure μ_X and $(\varphi_j)_{j\geqslant 1}$ an orthonormal basis of Laplace eigenvalues with $\lambda_j \to \infty$. The behaviour of φ_j as $j \to \infty$ has been much studied in the context of the Quantum Chaos and in particular the sequence of probability measures

$$d\mu_j(z) := |\varphi_j(z)|^2 d\mu_X(z).$$

By a general result of Schnirelman, Zelditch and Collin de Verdière for almost every j (i.e. outside a subsequence of density zero)

$$\mu_j \to \mu_X,\ j \to \infty$$

and Rudnick and Sarnak have surmised that this is always the case: this is the *Quantum Unique Ergodicity (QUE) Conjecture*.

Much progress have been made when X is arithmetic (for instance if Γ comes from a congruence subgroup of an indefinite quaternion algebra defined over $\mathbf{Q}$). In particular Lindenstrauss (2006) proved the conjecture when the φ_j are also eigenforms of the Hecke operators. Lindenstrauss's proof is based on ergodic theory however the conjecture can also be approached through the subconvexity problem.

Let φ and g be Hecke cuspforms for some congruence subgroup of $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ and trivial nebentypus; let $L(\mathrm{sym}_2\varphi, s)$ and $L(\mathrm{sym}_2\varphi \times g, s)$ be the standard and Rankin–Selberg L-functions associated to the the symetric square lift of (the representation generated by) φ and (the representation generated by) g.

The following corollary is a consequence of formulas by Ichino (2008) and Watson (2002) which relate the Weyl sums of the QUE equidistribution problem to central value of special triple product L-functions

$$L(\varphi \times \varphi \times g, s) = L(g, s)L(\mathrm{sym}_2\varphi \times g, s).$$

Corollary. *The resolution of the subconvexity problem for*

$$L(\mathrm{sym}_2\varphi, s) \text{ and } L(\mathrm{sym}_2\varphi \times g, 1/2)$$

in the $q_\infty(\mathrm{sym}_2\varphi)$-aspect implies the Quantum Unique Ergodicity Conjecture for compact and and non-compact arithmetic hyperbolic surfaces. Moreover if ψ is a smooth compactly supported function on X, one has, for some $\delta > 0$

$$\mu_j(\psi) = \mu_X(\psi) + O_\psi(\lambda_j^{-\delta}).$$

Remark 11. If φ has a special shape, the L-function $L(\mathrm{sym}_2\varphi \times g, s)$ factor into a product of lower degree L function for which the subconvexity problem is known and hence the QUE conjecture: this is the case when φ is an Eisenstein series or a CM form (the base change of a Hecke character of a quadratic field), see Luo and Sarnak (1995) and Sarnak (2001).

4.3. Weak Subconvexity

This point is the perfect moment to introduce another variant of the Subconvexity Problem. As we have seen in the beginning, if $L(\pi, s)$ is an L-function of degree d whose local non-archimedean parameters are all bounded by 1, an immediate application of the approximate functional equation yield the convexity bound

$$L(\pi, s) \ll_d Q(\pi, s)^{1/4}(\log Q(\pi, s))^{d-1}$$

and in fact this can be improved to a log-free convexity bound (Heath-Brown, 2009)

$$L(\pi, s) \ll_d Q(\pi, s)^{1/4}.$$

The *Weak Subconvexity Problem* asks, not for a saving by a positive power of $Q(\pi, s)$, but rather for a saving of a power of $\log(Q(\pi, s))$, for instance

Weak Subconvexity Problem. *Prove that for any $\varepsilon > 0$,*

$$L(\pi, s) \ll_{d,\varepsilon} Q(\pi, s)^{1/4} (\log Q(\pi, s))^{\varepsilon - 1}.$$

Soundararajan (2010) developed a set of techniques to solve this problem for a very general class of L-functions (see also the recent Soundararajan and Thorner, 2019). The methods involved have little to do with the general theory of automorphic forms but rather with the basic analytic properties of their L-functions (zero-free regions etc.) along with the general theory of multiplicative functions. In particular, Soundararajan solved the Weak Subconvexity Problem for L-functions of interest to the Quantum Unique Ergodicity Conjecture:

Theorem (Soundararajan, 2010). *Let φ be an holomorphic Hecke-cuspform of weight $k \geqslant 2$ and g be a Hecke cuspform, one has*

$$L(\mathrm{sym}_2 \varphi, s) \ll_{\varepsilon, s} k^{1/2} (\log k)^{\varepsilon - 1}$$

and

$$L(\mathrm{sym}_2 \varphi \times g, 1/2) \ll_{\varepsilon, g} k (\log k)^{\varepsilon - 1}.$$

Remarkably this weak subconvex bound paired with additional methods from classical analytic number theory enabled Holowinsky and Soundararajan (2010) to solve the holomorphic version of the QUE conjecture which so far does not seem accessible to ergodic methods.

Given φ a holomorphic Hecke cuspform of weight k for $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, one defines the associated probability measure on the modular curve $Y_0(1) = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \backslash \mathbf{H}$

$$d\mu_\varphi(z) := \frac{y^k |\varphi(z)|^2}{\|\varphi\|^2} d\mu_{Y_0(1)}(z),\ \|\varphi\|^2 = \mu_{Y_0(1)}(y^k |\varphi(z)|^2) = \frac{3}{\pi} \int_{Y_0(1)} y^k |\varphi(z)|^2 \frac{dxdy}{y^2}.$$

Theorem (Holowinsky–Soundararajan). *For φ as above, one has*

$$\mu_\varphi \to \mu_{Y_0(1)},\ k \to \infty.$$

More precisely, there exists $\delta > 0$ such that for ψ a smooth compactly supported function, one has,

$$\mu_\varphi(\psi) = \mu_{Y_0(1)}(\psi) + O_\psi((\log k)^{-\delta}).$$

As striking corollary (due to Rudnick, 2005) concerns the distribution of the *zeros* of the modular form φ:

Theorem (Rudnick). *For φ as above let*

$$\mathscr{Z}(\varphi) = \{z_0 \in Y_0(1),\ \varphi(z_0) = 0\}$$

be the multiset of zeros of φ (one has $|\mathscr{Z}(\varphi)| \simeq k/12$). As $k \to \infty$, the multiset $\mathscr{Z}(\varphi)$ becomes equidistributed on $Y_0(1)$ for the measure $\mu_{Y_0(1)}$: for ψ a smooth, compactly supported function, one has, as $k \to \infty$,

$$\frac{1}{|\mathscr{Z}(\varphi)|} \sum_{z_0 \in \mathscr{Z}(\varphi)} \psi(z_0) = \mu_{Y_0(1)}(\psi) + o_\psi(1).$$

In particular the multiplicity of any zero of φ is $o(k)$.

5. The method of moments

One of the most useful method to solve the subconvexity problem is the *method of moments* whose principle is as follows:

To simplify notation we assume $s = 1/2$ and write $Q(\pi)$ for the analytic conductor $Q(\pi, 1/2)$. Given $L(\pi_0, 1/2)$ a central L-value attached to some automorphic object π_0 one is interested in bounding, one choose a suitable family $\mathscr{F}$ of similar objects containing π_0 and such that for $\pi \in \mathscr{F}$

$$Q(\pi) \asymp Q(\pi_0).$$

For k an integer we consider the normalized k-th moment

$$\mathscr{M}_k(\mathscr{F}) = \sum_{\pi \in \mathscr{F}} L(\pi, 1/2)^k \text{ if } k \text{ is odd},$$

$$\mathscr{M}_k(\mathscr{F}) = \sum_{\pi \in \mathscr{F}} |L(\pi, 1/2)|^k \text{ if } k \text{ is even}.$$

If the family $\mathscr{F}$ is large and regular enough, we expect to be able to prove (unconditionally) that the Generalized Lindelöf Hypothesis holds on average: for any $\varepsilon > 0$,

$$\mathscr{M}_k(\mathscr{F}) \ll_\varepsilon Q(\pi_0)^\varepsilon |\mathscr{F}|. \tag{5.1}$$

Suppose this is the case; then if k is even or for k odd, if we know in addition that

$$\forall \pi \in \mathscr{F},\ L(\pi, 1/2) \geqslant 0,$$

we obtain (removing all non-negative terms but the one of interest)

$$L(\pi_0, 1/2) \leqslant \mathscr{M}_k(\mathscr{F})^{1/k} \ll_\varepsilon Q(\pi_0)^\varepsilon |\mathscr{F}|^{1/k}.$$

Is $\mathscr{F}$ is small enough, so that for some $\delta > 0$, one has

$$|\mathscr{F}| \leqslant Q(\pi_0)^{k/4-\delta}$$

we would solve the problem.

Remark 12. Here to simplify the discussion, the family $\mathscr{F}$ was presented as a finite set with the uniform counting measure. In reality $\mathscr{F}$ is rather to be a subspace of a space of automorphic representation (which could contain both discrete and continuous component) and comes equipped with a measure whose total volume is $|\mathscr{F}|$.

5.1. Computing moments: approximate functional equation

To evaluate the moments $\mathscr{M}_k(\mathscr{F})$ the most naive (but often successful way) is to use an approximate functional equation like (2.2) to represent the central value $L(\pi, 1/2)$ as finite sums of length $\asymp Q(\pi)^{1/2}$, expand the k-th power and invert summations. Before doing so, it is beneficial to remember that the powers $L(\pi, s)^l$, $l \geqslant 1$ can also be considered as L-functions: namely as a Rankin–Selberg L-function of π against the automorphic isobaric sum representation $\boxplus^l 1$ which is directly related to Eisenstein series. In elementary terms, one has the approximate identity between Dirichlet series

$$L(\pi, 1/2)^l \asymp \sum_{n \ll Q(\pi)^{l/2}} \frac{\lambda_\pi(n)\tau_l(n)}{n^{1/2}}$$

for τ_l the divisor function of order l. For instance, if $k = 2l$ is even, the k-th moment would look like

$$\sum_{\pi \in \mathscr{F}} \sum_{m,n \ll Q(\pi_0)^{l/2}} \frac{\tau_l(m)\tau_l(n)\lambda_\pi(m)\overline{\lambda_\pi}(n)}{m^{1/2}n^{1/2}} = \sum_{m,n \ll Q(\pi_0)^{l/2}} \frac{\tau_l(m)\tau_l(n)}{m^{1/2}n^{1/2}} \sum_{\pi \in \mathscr{F}} \lambda_\pi(m)\overline{\lambda_\pi}(n).$$

One can then evaluate the inner sum over the family $\mathscr{F}$

$$\sum_{\pi \in \mathscr{F}} \lambda_\pi(m)\overline{\lambda_\pi}(n)$$

by means of a "trace formula": this formula identify the sum with a sum of "geometric terms" which depend on m, n and involve a suitable transform of the characteristic function of $\mathscr{F}$ (or rather of the measure whose support is $\mathscr{F}$); one can then recombine the various m, n sums together: in the classical setting the "trace formula" is often the Kutnetzov formula either for GL_2 or for GL_3 and the geometric terms are sums of Kloosterman sums in 2 or 3 variables.

5.2. The Amplification method

It happens (more often than not) that one can achieve (5.1) for the limit case

$$|\mathscr{F}| = Q(\pi_0)^{k/4+o(1)} \tag{5.2}$$

but not for higher k so this just does not solve the problem. In such a situation, a technique due to Iwaniec comes to the rescue, the *Amplification method*: in this limiting

situation, one is often able to achieve a precise asymptotic formula for the relevant moment:

$$\mathscr{M}_k(\mathscr{F}) = |\mathscr{F}|(1 + O(|\mathscr{F}|^{-\eta}), \tag{5.3}$$

for some $\eta > 0$ and $Q \asymp Q(\pi_0)$.

Iwaniec's starting point is that it is possible to distinghish the given representation π_0 from the others $\pi \in \mathscr{F}$ via their first few coefficients $\lambda_{\pi_0}(\ell)$, $\lambda_\pi(\ell)$, $\ell \leqslant L$: indeed Rankin-Selberg theory often provide orthogonality relations of the shape

$$\sum_{\ell \leqslant L} \lambda_\pi(\ell)\overline{\lambda}_{\pi_0}(\ell) = c(\pi_0)\delta_{\pi=\pi_0}L + O_{\pi,\pi_0}(L^{1-\delta}),$$

where $c(\pi_0) > 0$ and for some exponent $\delta > 0$. The dependency with respect to π and π_0 in the error term above is usually prohibitive. At least, can one observe that the dependency in π can be controlled through the averaging over $\mathscr{F}$; unfortunately the dependency in π_0 usually remains. Nevertheless this gave Iwaniec the idea to evaluate moments in which each π is weighted by an additional quadratic term (called an "amplifier") of the shape

$$|A_0(\pi)|^2 = \big|\sum_{\ell \leqslant L} x_{0,\ell}\lambda_\pi(\ell)\big|^2.$$

One then form the amplified moment

$$\mathscr{M}_k^a(\mathscr{F}) = \sum_{\pi \in \mathscr{F}} |A_0(\pi)|^2 L(\pi, 1/2)^k. \tag{5.4}$$

The expected effect is that

- ▷ at least, for L a small enough positive power of $|\mathscr{F}|$, the new measure on $\mathscr{F}$ provided by these additional weights does not change too much the total volume of $\mathscr{F}$ so that
$$\mathscr{M}_k^a(\mathscr{F}) \ll |\mathscr{F}|^{1+o(1)} \tag{5.5}$$
- ▷ The weight of the specific π_0 is a bit large
$$|A_0(\pi_0)|^2 \gg L^{\alpha - o(1)} \tag{5.6}$$
for some $\alpha > 0$ (by preservation of the volume, one expects the weight of any $\pi \neq \pi_0$ to be small although, because of positivity, it is not necessary to prove this explicitly).

By positivity one obtains

$$L^{\alpha-o(1)}L(\pi_0, 1/2)^k \ll |A_0(\pi_0)|^2 L(\pi_0, 1/2)^k \leqslant \mathscr{M}_k^a(\mathscr{F}) \ll |\mathscr{F}|^{1+o(1)}$$

so that in the limiting case (5.2)

$$L(\pi_0, 1/2) \ll |\mathscr{F}|^{1/k+o(1)} L^{-\alpha/k} = Q(\pi_0, 1/2)^{1/4} L^{-\alpha/k}$$

which gives (often barely) a subconvex bound.

More precisely, the amplified moment $\mathscr{M}_k^a(\mathscr{F})$ equals

$$\sum_{\pi\in\mathscr{F}} |A_0(\pi)|^2 L(\pi, 1/2)^k = \sum_{\ell_1,\ell_2\leqslant L} x_{0,\ell_1}\overline{x_{0,\ell_2}} \sum_{\pi\in\mathscr{F}} \lambda_\pi(\ell_1)\overline{\lambda_\pi(\ell_2)} L(\pi, 1/2)^k \tag{5.7}$$

and one is reduced to estimate the inner sums on the righthand side of (5.7). The analysis of these twisted moment is similar to the standard one (with the classical approach using the approximate functional equation this amounts to use the multiplicativity properties of $\lambda_p i$ to essentially replace $\lambda_\pi(m)\overline{\lambda}_\pi(n)$ by $\lambda_\pi(\ell_1 m)\overline{\lambda}_\pi(\ell_2 n)$). If L is small enough compared to $|\mathscr{F}|$, one finds some form of asymptotic orthogonality relation

$$\sum_{\pi\in\mathscr{F}} \lambda_\pi(\ell_1)\overline{\lambda_\pi(\ell_2)} L(\pi, 1/2)^k \ll \delta_{\ell_1=\ell_2}|\mathscr{F}|^{1+o(1)} + L^{2A}|\mathscr{F}|^{1-\eta}$$

where the exponent A could be large but is *fixed*. Consequently instead of (5.3), one obtains

$$\mathscr{M}_k^a(\mathscr{F}) = \sum_{\ell\leqslant L} |x_{0,\ell}|^2 (|\mathscr{F}|^{1+o(1)} + L^{2A+2}|\mathscr{F}|^{-\eta}),$$

which assuming that the amplifier is normalized, ie. $\sum_{\ell\leqslant L} |x_{0,\ell}|^2 = |\mathscr{F}|^{o(1)}$, yields (5.5) as long as

$$L \leqslant |\mathscr{F}|^{\eta/(2A+2)}.$$

5.2.1. *Amplifiers do exists.* — It remains to exhibit coefficients $(x_{0,\ell})_\ell$, satisfying (5.6).

In the case of Dirichlet characters $\chi \pmod q$ it suffices to take $x_{0,\ell} = \overline{\chi}_0(\ell)/\ell^{1/2}$ so that

$$A_0(\pi) = \frac{1}{2}\delta_{\pi=\pi_0} L^{1/2} + q^{o(1)} L^{-1/2}.$$

For higher degrees, it is still possible to construct amplifiers using the combinatorial properties of Hecke operators: for instance for $d = 2$ and f a Hecke eigenform, the relation valid for any prime p not dividing the level of f,

$$\lambda_f(p)^2 - \lambda_f(p^2) = \chi_f(p)$$

allows for such a construction (Duke, Friedlander, and Iwaniec, 1994b) with $\alpha = 1/2$. In higher degree d similar constructions exists (see Blomer and Maga, 2016) with $\alpha = 1/d$.

6. The bound of Conrey, Iwaniec, Petrow and Young

In this section we briefly explain the principle of proof of Theorem 1 (in the q aspect only). It is based on the two facts:

- ▷ If $f(z)$ is a primitive Hecke cuspform with trivial nebentypus, one has the inequality due to Guo (1996)
$$L(f,1/2) \geqslant 0.$$
- ▷ Let $E_{\chi,\overline{\chi}}(s,z)$ be the Eisenstein series (of level q^2 and trivial nebentypus) constructed out of a "new" flat section of the induced representation $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GL}_2}(\chi,\overline{\chi})$, then for $s=it$, one has
$$L(E_{\chi,\overline{\chi}}(it,\bullet),1/2) = |L(\chi,1/2+it)|^2.$$

We denote by $\mathscr{B}_0(q,\chi^{-2})$ an orthogonal basis made of weight 0 Maass forms f with Laplace eigenvalue
$$\lambda_f = (1/2+it_f)(1/2-it_f) = 1/4+t_f^2 > 0 \text{ i.e. } t_f \in \mathbf{R}\cup]-i/2, i/2[,$$
which are also eigenform of the Hecke operators $T_p, (p,q)=1$; we also denote by $\mathscr{B}_E(q,\chi^{-2})$ an orthonormal basis made of (flat sections) of the induced representations having the same level and nebentypus (such basis decomposes into a disjoint union indexed by the pairs of characters (χ_1,χ_2) such that $\chi_1\cdot\chi_2=\chi^{-2}$).

Using Atkin–Lehner Theory, Petrow and Young show that one can find bases as above so that, for any $f\in\mathscr{B}_0(q,\chi^{-2})$ and any $E(f_s,\bullet)$, $f\in\mathscr{B}_E(q,\chi^{-2})$ the twisted L-function (formed out of the Fourier expansion)
$$L(f\times\chi,1/2) \text{ or } L(E(f_s)\times\chi,1/2)$$
is a positive multiple (with constant 1 if the form is a newform) of the L-value
$$L((f\times\chi)^{new},1/2) \text{ or } L((E(f_s)\times\chi)^{new},1/2)$$
of the newform underlying $f\times\chi$ or $E(f_s)\times\chi$; in particular, this twisted L-function is non-negative.

For $T\geqslant 1$, let $h_T\colon \mathbf{R}\cup]-i/2,i/2[\to\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ a suitably smooth non-negative function vanishing for $|t|\geqslant T$, Petrow and Young compute the cubic moment
$$\mathscr{M}_3(h) = \sum_{f\in\mathscr{B}_0(q,\chi^{-2})} h(t_f)w_f L(f\times\chi,1/2)^3 + \sum_{f\in\mathscr{B}_E(q,\chi^{-2})} \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{R}} h(t)w_f(t)L(E(f_{it})\times\chi,1/2)^3 dt$$

where the $w_f, w_f(t)$ are non-negative weights (involving the values at 1 of the adjoint L-functions) satisfying

$$w_f = (q(1+|t_j|))^{o(1)},\ w_f(t) = (q(1+|t|))^{o(1)}.$$

The outcome of this computation is the following

Theorem 5 (Petrow–Young). *Notations as above, there is an absolute constant A such that for $T \geqslant 1$,*

$$\mathscr{M}_3(h_T) \ll_\varepsilon T^A q^{1+\varepsilon}.$$

In particular, by positivity, one has, for $f \in \mathscr{B}_0(q,\chi^{-2})$ or $f \in \mathscr{B}_E(q,\chi^{-2})$,

$$L(f\times\chi,1/2) \ll (1+|t_f|)^A q^{1/3+\varepsilon},\ L(E(f_{it})\times\chi,1/2) \ll (1+|t|)^A q^{1/3+\varepsilon}.$$

In particular when $f \in \mathscr{B}_E(q,\chi^{-2})$ is the "new" flat section of the pair $(1,\chi^{-2})$, one has

$$L(E(f_{it})\times\chi,1/2) = |L(\chi,1/2+it)|^2 \ll (1+|t|)^A q^{1/3+\varepsilon}.$$

Remark 13. In fact Petrow and Young have showed that one could take $A = 1+\varepsilon$ above so that the Weyl bound holds simultaneously in the q and s-aspect.

6.1. Sketch of the proof

Applying the approximate functional equation to

$$L(f\times\chi,1/2) \text{ and } L(f\times\chi,1/2)^2$$

converts these L-values into finite sums of length $\approx q(1+|t_j|)$ and $\approx q^2(1+|t_j|)^2$ respectively; inverting summations and applying Kuznetzov's formula, the evaluation of the third moment is then essentially reduced to that of the following kind of sum:

$$q\sum_{n_1,n_2,n_3\ll q}\frac{\chi(n_1)\overline{\chi}(n_2n_3)}{\sqrt{n_1n_2n_3}}\sum_{c\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,q)}\frac{S_{\overline{\chi}^2}(n_1,n_2n_3;c)}{c}g\Big(\frac{\sqrt{n_1n_2n_3}}{c}\Big)$$

where

$$S_{\overline{\chi}^2}(n_1,n_2n_3;c) = \sum_{\substack{x\,(\mathrm{mod}\,c)\\(x,c)=1}}\overline{\chi}^2(x)e\Big(\frac{n_1x+n_2n_3\overline{x}}{c}\Big),\ x.\overline{x}\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,c)$$

is a twisted Kloosterman sum and g_T is a function depending on h_T. The computation then proceeds by applying the Poisson summation formula to each variable n_1, n_2, n_3. We won't be able to provide more details of the subsequent, very delicate analysis of

this sum, except to say that, at the end, the main object of interest is the following Mellin transform (to simplify, we assume that q is prime)

$$\sum_{\psi \,(\mathrm{mod}\, q)} g_\chi(\psi) L(\psi, s_1) L(\overline{\psi}, s_2) L(\psi, s_3) L(\overline{\psi}, s_4) \tag{6.1}$$

where ψ runs over multiplicative characters modulo q, the $s_i = \frac{1}{2} + it_i$, $i \leqslant 4$ are complex numbers, all on the critical line (and for all practical purposes, one can imagine they are all equal to $1/2$) and $g_\chi(\psi)$ is the following exponential sum,

$$g_\chi(\psi) = \sum_{u,v} \chi(u)\overline{\chi}(u+1)\overline{\chi}(v)\overline{\chi}(v+1)\psi(uv-1).$$

This algebraic exponential sum in two variables can be bounded using the theory of ℓ-adic sheaves and Deligne's Weil II main theorem (Petrow and Young, 2020, Thm 6.9): *for q a prime, one has*

$$|g_\chi(\psi)| = O(q). \tag{6.2}$$

Therefore, using the fourth moment crude bound

$$\sum_{\psi \,(\mathrm{mod}\, q)} |L(\psi, s_1) L(\overline{\psi}, s_2) L(\psi, s_3) L(\overline{\psi}, s_4)| \ll_{s_i} q^{1+o(1)} \tag{6.3}$$

(i.e. GLH holds on average for the fourth power of Dirichlet L-functions), one obtains

$$\sum_{\psi \,(\mathrm{mod}\, q)} g_\chi(\psi) L(\psi, s_1) L(\overline{\psi}, s_2) L(\psi, s_3) L(\overline{\psi}, s_4) \ll_{\varepsilon, s_1, \ldots, s_4} q^{2+o(1)} \tag{6.4}$$

which implies (5) when q is prime.

Remark 14. This analysis essentially carries over when q is composite but cube free (although the proof becomes much more involved in its combinatorial aspects). On the other hand, when q contains large cube divisors, the bound (6.2) fails when ψ belongs to certain cosets of the group of characters modulo q; it is eventually possible to "compensate" this loss by bounding the fourth moment (6.3) along such bad (and sparse) cosets of character and to obtain Weyl's bound for a general modulus q (see Petrow and Young, 2019).

Remark 15. The bound (6.4) is probably not optimal: indeed the function

$$\psi \mapsto g_\chi(\psi)$$

is highly oscillating (just compute its first and second moments) in fact, it should satisfy a Sato–Tate law as in Katz, 2012); on the other hand the function

$$\psi \mapsto L(\psi, s_1) L(\overline{\psi}, s_2) L(\psi, s_3) L(\overline{\psi}, s_4)$$

is not expected to oscillate a lot: if $s_1 = \cdots = s_4 = 1/2$, this is just $|L(\psi, 1/2)|^4$ and Young has given an asymptotic formula for the average of this function with a main term of size $q(\log q)^{O(1)}$ and a power saving error term (Young, 2011). In fact, replacing $q^{2+o(1)}$ by $q^{2-\delta}$, $\delta > 0$ in (6.4) would allow to apply the amplification method and to improve the Weyl type exponent $1/6$ in Theorem 1 (at least for the q aspect).

6.2. Motohashi's formula

As we have discussed above, the proof of Theorem 1 builds on a connection between the cubic moment of Hecke L-functions $\mathscr{M}_3(h)$ and the fourth moment of Dirichlet L-functions (6.1). Such a connection is not at all accidental and was discovered by Motohashi (1993, 1997) for modular forms of level 1: his formula relates cubic moments of modular forms of level 1 to the fourth moment of Riemann's ζ-function on the critical line and takes the following form: for g an holomorphic function of rapid decay in a sufficiently wide horizontal strip $\{|\mathfrak{Im}\, t| \leqslant A\}$, $A \geqslant 1$ one has (see Motohashi, 1997, Chap. 4)

$$\int_{\mathbf{R}} |\zeta(1/2+it)|^4 g(t)dt = \mathscr{M}_{3,0}(\tilde{g}) + \mathscr{M}_{3,E}(\tilde{g}) + \mathscr{M}_{3,h}(\tilde{g}) + \mathscr{Z}(g)$$

where $\tilde{g}\colon \mathbf{R} \cup i\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ is an explicit transform of g involving hypergeometric and Gamma functions, $\mathscr{Z}(g)$ is an explicit linear form and

$$\mathscr{M}_{3,0}(\tilde{g}) = \sum_{f \in \mathscr{B}_0(1)} \tilde{g}(t_f) w_f L(f, 1/2)^3,$$

for $\mathscr{B}_0(1)$ an orthonormal basis of Hecke Maass cuspforms of level 1 while

$$\mathscr{M}_{3,E}(\tilde{g}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \tilde{g}(t) w_f(t) L(E(it, \bullet), 1/2)^3 dt$$

for $E(it, \bullet)$ the non-holomorphic Eisenstein series of level 1 (normalized so that $L(E(it, \bullet), 1/2) = |\zeta(1/2+it)|^2$) and $\mathscr{M}_{3,h}(\tilde{g})$ is the similar cubic moment involving orthonormal bases of holomorphic Hecke cuspforms of level 1 and even weight $k \geqslant 2$.

Therefore the work of Conrey–Iwaniec–Petrow–Young provides a sort of approximate inversion of Motohashi's formula for χ-twist of modular forms of level q and nebentypus χ^{-1}.

7. Subconvexity via the δ-symbol

In this section, we present Munshi's use of the δ-symbol in the context of the subconvexity problem; we will, in fact, discuss in detail Sharma's Theorem 3 which is another instance of Munshi's approach.

The δ-symbol is designed to evaluate how two arithmetic functions correlate with one another: consider the correlation sum

$$\sum_{n\leqslant N}\lambda_f(n)\lambda_g(n)=\sum_{m,n\leqslant N}\sum\lambda_f(m)\lambda_g(n)\delta_{m=n}.$$

As in the circle method, the principle is to have a workable analytic expression for the Kronecker symbol

$$\delta_{m=n}=\delta_{m-n=0}$$

allowing to somewhat separate the m and n variables from one another. The detection of the condition $m-n=0$ is build on congruences (using the obvious fact that all non-zero integers divide 0 while only very few integers divide a given non-zero integer). There are multiple versions of this method: the first instance can be found in Duke, Friedlander, and Iwaniec (1994a); here is another one from Heath-Brown (1996)

Theorem (Heath-Brown). *There exist a non-negative function smooth $h\colon \mathbf{R}_{>0}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ supported in the domain $x\leqslant\max(1,2|y|)$ and such that for any $A\geqslant 1$ and $C\geqslant 1$*

$$\delta_{n=0}=\frac{1+O_A(C^{-A})}{C^2}\sum_{c\geqslant 1}\sum_{\substack{u(c)\\(u,c)=1}}e\Big(\frac{un}{c}\Big)h\Big(\frac{c}{C},\frac{n}{C^2}\Big).$$

For the purpose of this exposition, this formula means that for $|n|\leqslant N\leqslant C^2/2$, one can make the approximation

$$\delta_{n=0}\asymp\frac{1}{C^2}\sum_{c\leqslant C}\sum_{\substack{u(c)\\(u,c)=1}}e\Big(\frac{un}{c}\Big).$$

We can now describe the proof of Sharma's Theorem 3 as presented in Sharma (2019). Let φ be a GL_3 cuspform of level 1, g a modular cuspform of level 1 and χ a non-trivial Dirichlet character of prime modulus; the objective is solve the subconvexity problem for the Rankin–Selberg L-function $L(\varphi\times g\times\chi,s)$ as $q\to\infty$ along the primes: in that case the analytic conductor is $\approx q^6$.

From the approximate functional equation for $L(\varphi\times g\times\chi,s)$, Sharma's theorem essentially amounts to a bound of the shape

$$\sum_{n\sim q^3}\frac{\lambda_\varphi(1,n)}{\sqrt{n}}\lambda_g(n)\chi(n)\ll q^{3/2-\delta}\tag{7.1}$$

where $(\lambda_\varphi(r,m))_{r,m}$ are the Fourier coefficients of φ and $(\lambda_g(n))_n$ are those of g.

Applying directly the δ-symbol to detect the condition $m-n=0$ for the two sequences $(\lambda_\varphi(1,m)/\sqrt{m})_{m\sim q^3}$ and $(\lambda_g(n)\chi(n))_{n\sim q^3}$ would produce a sum over the

additive characters of modulus $c \leqslant C$ with $C = (q^3)^{1/2} = q^{3/2}$. Instead, following Munshi, one perform a "reduction trick": one first detect the congruence $m - n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)$ and then apply the δ-symbol to the (smaller) quotient $\frac{m-n}{q}$; in other terms, we write

$$\delta_{m-n=0} = \delta_{m-n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)} \times \delta_{\frac{m-n}{q}=0}.$$

The first condition is detected through additive characters modulo q:

$$\delta_{m-n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q)} = \frac{1}{q} \sum_{u \,(\mathrm{mod}\, q)} e\big(\frac{um}{q}\big) e\big(-\frac{un}{q}\big)$$

and combining with the δ-symbol we obtain (using that q is prime)

$$\delta_{m-n=0} \approx \frac{1}{qC^2} \sum_{c\leqslant C} \sum_{\substack{u \,(\mathrm{mod}\, cq) \\ (u,cq)=1}} e\big(\frac{um}{cq}\big) e\big(-\frac{un}{cq}\big)$$

for $C \asymp (q^2)^{1/2} = q$.

Remark 16. Therefore the size of the set of additive characters involved in the δ-symbol is the same ($qC^2 \asymp q^3$) but its structure has changed and is better adapted to the present situation (because of the multiplicative character $\chi \,(\mathrm{mod}\, q)$ in the second sequence). This reduction is one of the key innovations responsible for the success of Munshi's δ-symbol method.

Our sum of interest becomes

$$\frac{1}{qC^2} \sum_{c\leqslant C} \sum_{\substack{u \,(\mathrm{mod}\, cq) \\ (u,cq)=1}} \Big(\sum_{m\sim q^3} \frac{\lambda_\varphi(1,m)}{\sqrt{m}} e\big(\frac{um}{cq}\big) \Big) \Big(\sum_{n\sim q^3} \lambda_g(n)\chi(n) e\big(-\frac{un}{cq}\big) \Big)$$

and one can now work separately on the inner m and n sums which are sums of Fourier coefficients of automorphic forms twisted by additive characters.

The automorphy of the GL_3, level 1 cuspform φ and of the GL_2 level q^2 (twisted) cuspform $g \times \chi$ and in particular the properties of their respective Whittaker models implies that these sums essentially transform as follow:

$$\sum_{m\sim q^3} \frac{\lambda_\varphi(1,m)}{\sqrt{m}} e\big(\frac{um}{cq}\big) \asymp \sum_{m \ll (cq)^3/q^3} \frac{\overline{\lambda_\varphi(1,m)}}{\sqrt{m}} \frac{S(\overline{u}m, 1; cq)}{\sqrt{cq}}$$

$$\sum_{n\sim q^3} \lambda_g(n)\chi(n) e\big(-\frac{un}{cq}\big) \asymp \frac{q^3}{cq} \sum_{n \ll \frac{(cq)^2}{q^3}} \overline{\lambda_g(n)} \frac{1}{q^{1/2}} \sum_{b \,(\mathrm{mod}\, q)} \overline{\chi}(b) e\big(\frac{\overline{bc+un}}{cq}\big)$$

where $S(\overline{u}m, 1; cq)$ is the classical Kloosterman sum.

Summing over the u variable yields a sum of the shape

$$\frac{1}{qC^2}\frac{q^2}{C}C^{1/2}\sum_{c\leqslant C}\sum_{m\ll c^3}\frac{\overline{\lambda_\varphi(1,m)}}{\sqrt{m}}\sum_{n\ll c^2/q}\overline{\lambda_g(n)}e\big(\frac{m\overline{n}\bar{q}}{c}\big)U(m,n,c;q).$$

where

$$U(m,n,c;q)=\frac{1}{q}\sum_{\substack{u(q)\\(u,q)=1}}S(\bar{c}^3\bar{u}m,1;q)\sum_{b\,(\mathrm{mod}\,q)}\overline{\chi}(b)e\big(\frac{t\,\overline{b+u}}{q}\big).$$

To proceed further, another key observation is necessary: the variable $m\ll C^3$ is *long* compared to C^2q so it is reasonable to "smooth" that variable (i.e. remove $\overline{\lambda_\varphi(1,m)}$) using the Cauchy–Schwarz inequality: the sum is bounded by

$$\leqslant\frac{q}{C^{5/2}}\Big(\sum_{m\sim C^3}\frac{|\lambda_\varphi(1,m)|^2}{m}\Big)^{1/2}\times$$
$$\Big(\sum_{\substack{c,c'\ll C\\ n,n'\ll C^2/q}}\sum\overline{\lambda_g(n)}\lambda_g(n')\sum_{m\ll C^3}e\big(\frac{m\overline{n}\bar{q}}{c}\big)e\big(-\frac{m\overline{n'}\bar{q}}{c'}\big)U(m,n,c;q)\overline{U(m,n',c';q)}\Big)^{1/2}$$

The diagonal term ($c=c'$, $n=n'$) in the inner sum yields a contribution of size $\ll qC^{1/2}\approx q^{3/2}$ (using that the algebraic exponential sum U is bounded by $O(q^{1/2})$). Outside of the diagonal, one applies the Poisson summation formula on the m-sum: one obtains a sum of length $\ll C^3/C^2q=C/q\approx 1$ involving the Fourier transform $(\mathrm{mod}\,qcc')$ of the function

$$x\,(\mathrm{mod}\,qcc')\mapsto e\big(\frac{x\overline{n}\bar{q}}{c}\big)e\big(-\frac{x\overline{n'}\bar{q}}{c'}\big)U(x,n,c;q)\overline{U(x,n',c';q)}.$$

The hardest cases are the generic ones $(c,n)\neq(c',n')$ and involve bounding some algebraic exponential sums modulo q in 7 variables:

$$\frac{1}{q^{1/2}}\sum_{x\,(\mathrm{mod}\,q)}U(x,n,c;q)\overline{U(x,n',c';q)}e\big(\frac{-xy}{q}\big).$$

Using the Newton polygon non-degeneracy criterion of Adolphson and Sperber (1989), Sharma shows that Deligne's bound $O(q^{-5/2}q^{7/2})=O(q)$ is satisfied (see also Lin, Michel, and Sawin (2021) for a more systematic proof using the general properties of hypergeometric sums and sheaves): eventually the sum (7.1) is bounded by

$$\ll q^{o(1)}(qC^{1/2}+\text{intermediate terms}+q^{3/4}C^{1/2})\ll q^{o(1)}(q^{3/2}+\text{intermediate terms}+q^{5/4}).$$

The main term in this bound (coming from the diagonal term) just misses the target but one can improve the situation by a further trick (akin to an *amplification*) which eventually yields the subconvex bound

$$L(\varphi\times g\times\chi,s)\ll_{\varphi,g,s}q^{3/2-1/16+o(1)}.$$

8. Subconvexity via automorphic periods

The use of automorphic periods in the context of the subconvexity problem was pionereed by Venkatesh (2010) inspired in parts by the earlier works Bernstein and Reznikov (2010) and Clozel and Ullmo (2005). The automorphic period approach, when it works, has the advantage to extending seemlessly to L-functions defined over a general number field. In this section we review this circle of ideas.

In very rough terms, the general shape of an automorphic period is as follows: G is a reductive group (defined over $\mathbf{Q}$) $H \subset G$ is a $\mathbf{Q}$-subgroup, $\pi \in \mathscr{A}(G)$, $\sigma \in \mathscr{A}(H)$ are automorphic representations for G and H and $\varphi \in \pi$, $\psi \in \sigma$ are automorphic forms in these representation: their associated automorphic period is the integral (normalized à la Waldspurger)

$$\mathscr{P}(\varphi, \psi) = \int_{[H]} \varphi(h)\psi(h)dh$$

where $[H] := H(\mathbf{A})/H(\mathbf{Q})$.

8.1. Subconvex bound for twisted Hecke L-function (after Venkatesh)

We sketch the principles of this approach in one of the simplest yet meaningful case of the Hecke L-function $L(\pi \times \chi, 1/2)$.

Let $\chi\colon \mathbf{Q}^\times\backslash\mathbf{A}^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$ be a idele character and $\pi \in \mathscr{A}_0(\mathrm{GL}_2)$ be an automorphic cuspidal representation: for $\varphi \in \pi \subset L^2_0(\mathrm{GL}_2, 1)$ an automorphic form which corresponds to a pure tensor (i.e. $\varphi \simeq \otimes_v \varphi_v$ in the Whittaker model), one has, for suitable choices of measures, the following identity between global and local integrals (see Jacquet and Langlands, 1970)

$$\mathscr{P}(\varphi, \chi) := \int_{[A]} \varphi(h)\chi(h)dh = \Lambda(\pi \times \chi, 1/2) \prod_v \frac{\int_{A(\mathbf{Q}_v)} \varphi_v(h)\chi_v(h)dh}{L_v(\pi \times \chi, 1/2)} \tag{8.1}$$

where

$$A = \left\{ h = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_2$$

is the subgroup of upper-diagonal matrices, $[A] = A(\mathbf{Q})\backslash A(\mathbf{A})$ and

$$\chi(h) := \chi(\det(h)) = \chi(t).$$

By the Plancherel formula, one has

$$\sum_{\chi \in \widehat{[A]}} |\mathscr{P}(\varphi, \chi)|^2 = \int_{[A]} |\varphi(h)|^2 dh$$

(we have written the integral over the space of unitary characters $\widehat{[A]}$ as a discrete sum although it has continuous components) and the left-hand side can be seen as a second moment of $L(\pi \times \chi)$ weighted by local integrals.

Suppose that χ_0 corresponds to some Dirichlet character, ramified at a finite prime q and π is everywhere unramified (corresponds to a weight 0 Maass form of level 1); let $\varphi^{new} \simeq \otimes_v \varphi_v^{new} \in \pi$ be the new vector, let n_q be the q-adic unipotent matrix

$$n_q := \begin{pmatrix} 1 & 1/q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_q)$$

and set

$$\varphi_0 := n_q.\varphi^{new}.$$

An evaluation of the local period $\int_{A(\mathbf{Q}_q)} \varphi_q^{new}(h.n_q)\chi_{0,v}(h)dh$ (Michel and Venkatesh, 2010, § 3.3.2) shows that

$$\mathscr{P}(\varphi_0, \chi_0) \asymp \frac{L(\pi \times \chi_0, 1/2)}{q^{1/2}} \tag{8.2}$$

and by positivity

$$\frac{|L(\pi\times\chi_0, 1/2)|^2}{q} \ll \frac{1}{q} \sum_{\chi \,(\mathrm{mod}\, q)} \int_{t\in[-1,1]} |L(\pi\times\chi, 1/2+it)|^2 dt \ll \int_{[A]} |\varphi^{new}(h.n_q)|^2 dh$$

Since $\int_{[A]} |\varphi^{new}(h.n_q)|^2 dh \ll 1$, we "trivially" recover the convexity bound. To go further, we will pretend that $[A]$ is compact ($[A]$ does not even have finite volume): this issue can be addressed rigorously by a suitable regularization/truncation argument; alternatively, one might look instead for a similar integral when A is an anisotropic torus (modulo the center): the argument would then be completely rigorous and, in effect, would yield subconvex bounds for certain Rankin–Selberg L-functions. We consider then the spectral decomposition

$$n_q.|\varphi^{new}|^2 = \|\varphi^{new}\|_2^2.1 + \sum_{\psi\in\mathscr{B}_0(1)} \langle |\varphi^{new}|^2, \psi\rangle n_q.\psi + \text{Eisenstein spectrum contribution} \tag{8.3}$$

where $\mathscr{B}_0(1)$ is an orthonormal basis of spherical automorphic cuspforms of level 1. The cuspidal contribution is bounded by (Michel and Venkatesh, 2010, § 4.4.2)

$$\sum_{\psi\in\mathscr{B}_0(1)} \langle |\varphi^{new}|^2, \psi\rangle \int_{[A]} \psi(h.n_q)dh = \sum_{\psi\in\mathscr{B}_0(1)} \langle |\varphi^{new}|^2, \psi\rangle \mathscr{P}(n_q.\psi, 1) \ll q^{-\delta},\ \delta > 0$$

and similarly for the Eisenstein spectrum contribution. We therefore obtain an asymptotic formula

$$\int_{[A]} |\varphi^{new}(h.n_q)|^2 dh = \int_{[\mathrm{GL}_2]} |\varphi^{new}(g)|^2 dg + O(q^{-\delta}). \tag{8.4}$$

Since there is a main term, this not good enough. To get away with it, Venkatesh applies an adelic version of the *amplification method*: the contribution of χ_0 is amplified by replacing φ^{new} by the slighly more complicated vector

$$A_0(\varphi^{new}) = \sum_{l \leqslant L} \overline{\chi_0}(l) a(l)_l . \varphi^{new}$$

where $L < q$ is some parameter and

$$a(l)_l := \prod_{p|l} \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \prod_{p|l} A(\mathbf{Q}_p).$$

One obtains instead that for some $\theta, A > 0$

$$L^2 \frac{|L(\pi \times \chi_0, 1/2)|^2}{q} = (\sum_{l \leqslant L} \chi_0(l)\overline{\chi_0}(l))^2 \frac{|L(\pi \times \chi_0, 1/2)|^2}{q}$$
$$\ll \int_{[\mathrm{GL}_2]} |A_0(\varphi^{new})|^2 dg + L^A q^{-\delta} \ll L^{2-2\theta} + L^A q^{-\delta};$$

for this one open the square and expand the l-sum in the corresponding "main term" and use the decay of "matrix coefficients"

$$\int_{[\mathrm{GL}_2]} \overline{\varphi^{new}}(g) \varphi^{new}(a(l^{-1}l')g) dg \ll [l, l']^{-2\theta}.$$

Eventually this yields

$$L(\pi \times \chi_0, 1/2) \ll q^{1/2-\delta'}$$

upon choosing L a suitable positive power of q.

Remark 17. Wu (2014) showed that any exponent

$$\delta' < \frac{1}{8}(1 - 2\theta)$$

is admissible in the bound above.

8.2. Computing moments via automorphic periods

Identities relating values of L-functions to automorphic periods such as (8.1) exist for numerous pairs (G, H) and take usually the shape

$$\frac{|\int_{[H]} \varphi(h)\psi(h)dh|^2}{\langle \varphi, \varphi \rangle \langle \psi, \psi \rangle} = c(\pi, \sigma) \Lambda(\pi, \sigma, 1/2) \prod_v \int_{H(\mathbf{Q}_v)} \frac{\langle h.\varphi_v, \varphi_v \rangle \langle h.\psi_v, \psi_v \rangle}{\langle \varphi_v, \varphi_v \rangle \langle \psi_v, \psi_v \rangle} dh \quad (8.5)$$

where the terms in the local integrals are matrix coefficients of the local representations constituting π and σ and $c(\pi,\sigma)$ is a positive global factor of great theoretical significance for which we will only retain the estimate

$$c(\pi,\sigma) = Q(\pi,\sigma,1/2)^{o(1)}.$$

The Hecke–Jacquet–Langlands identity (8.1) (squared) is an example for the pair $(G,H) = (\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2, A \times A)$; the case of $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ Rankin–Selberg L-functions corresponds to $G = \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$, $H = \mathrm{GL}_2$ (diagonally embedded) (and ψ an Eisenstein serie); similarly Waldspurger's formula discussed in §4.1 corresponds to $G = \mathrm{PB}^\times$ for B a quaternion algebra, H a (non-split) torus associated with a quadratic subfield of B or equivalently $G = SO(V)$, $H = \mathrm{SO}(W)$ with $W \subset V$, $\dim V = \dim W + 1 = 3$; finally the $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ triple product L-functions in section §4.3 corresponds to $G = \mathrm{SO}(V), H = SO(W)$ for $W \subset V$ and $\dim V = \dim W + 1 = 4$. All these cases are examples of Gan–Gross–Prasad pairs for which the formula (8.5) is conjectured in a very precise form (Gan et al., 2012).

Identities such as (8.5) make it possible to compute weighted first/second moments of $L(\pi,\sigma,1/2)$ by averaging the left-hand size of (8.5) over orthogonal families $(\varphi,\psi) \in (\pi,\sigma)$ of forms and their representations. Various kinds of averages are possible: for instance, one could fix $\varphi_0 \in \pi_0$ and average over an orthonormal basis of automorphic forms on $[H]$ (we call this situation the vertical direction) or one could fix $\psi_0 \in \sigma_0$ and average over an orthonormal basis of automorphic forms on $[G]$ (we call this the horizontal direction).

8.3. An example in the vertical direction

The case discussed in Section 8.1 is along the vertical direction and, as we have seen, by Plancherel formula, this amounts to evaluate the integral along $[H]$ of the restriction of $|\varphi_0|^2_{[H]}$; after decomposing spectrally the square $|\varphi_0|^2$ along a basis of automorphic forms on G and and integrating the resulting linear combination over $[H]$ one obtains (at least formally) an equality with another sum of periods:

$$\sum_{\sigma\in\mathscr{A}(H)}\sum_{\psi\in\mathscr{B}_\sigma}\frac{|\int_{[H]}\varphi_0(h)\psi(h)dh|^2}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle\langle\psi,\psi\rangle} = \int_{[H]}\frac{|\varphi_0(h)|^2}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle}dh$$
$$= \sum_{\pi'\in\mathscr{A}(G)}\sum_{\varphi'\in\mathscr{B}_{\pi'}}\langle\frac{|\varphi_0)|^2}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle},\varphi'\rangle\int_{[H]}\varphi'(h)dh.$$

(again we write the integrals over the space of automorphic representations of G and H as discrete sums although then might contain continuous components). These kind of considerations played an important role in Michel and Venkatesh (2010) and Venkatesh (2010); of course this identity needs to be complemented by

additional technical arguments to address convergence issues related to the possible non-compactness of the adelic quotients.

Another striking example, we describe Nelson's proof of Weyl's bound for L-functions of finite order Hecke characters over a general number field F (Theorem 2, Nelson, 2020). We start by explaining how the Conrey–Iwaniec–Petrow–Young–Motohashi formula can be derived (at least formally) from automorphic periods consideration.

Let $E(g)$ be an Eisenstein series attached to the induced representation $\mathrm{Ind}_{\mathrm{B}}^{\mathrm{GL}_2}(1,1)$ and consider the (non-convergent) automorphic period

$$\int_{[A]} |E(h)|^2 dh$$

Decomposing (formally) $|E|^2$ along a basis automorphic forms with trivial central characters we obtain

$$|E|^2 = \sum_{\pi} \sum_{\varphi \in \mathscr{B}_\pi} \langle |E|^2, \varphi \rangle \varphi$$

so that

$$\int_{[A]} |E(h)|^2 dh = \sum_{\pi} \sum_{\varphi \in \mathscr{B}_\pi} \langle |E|^2, \varphi \rangle \int_{[A]} \varphi.$$

For π generic and $\varphi \in \pi$ a factorable vector, the integral along $[A]$ (possibly after analytic continuation and regularisation) is equal, up to local factors, to the Hecke L-function $L(\pi, 1/2)$; the inner product (again possibly after analytic continuation and regularisation), is a Rankin–Selberg integral factoring as a product of local integrals times the Rankin–Selberg L-function

$$\Lambda(\pi \times (1 \boxplus 1), 1/2) = \Lambda(\pi, 1/2)^2$$

and therefore

$$\int_{[A]} |E(h)|^2 dh = \sum_{\pi \ gen.} \Lambda(\pi, 1/2)^3 \times \text{local terms} + \text{non-generic contrib.}$$

Alternatively (this was the starting point in § 8.1) we have, by Plancherel formula, (again formally) for the torus quotient $[A] \simeq \mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times$

$$\int_{[A]} |E(h)|^2 dh \simeq \sum_{\omega \in \widehat{[A]}} |\int_{[A]} E(h)\omega(h) dh|^2$$

and by Hecke theory, the Hecke integral $\int_{[A]} E(h)\omega(h)dh$ (after analytic continuation) factors as a product of local terms times $L(\omega, 1/2)^2$. Therefore, one expects a relation of the shape

$$\sum_{\pi \in \mathscr{A}^{gen}(\mathrm{GL}_2, 1)} \Lambda(\pi, 1/2)^3 w(\pi) = \sum_{\omega \in \widehat{\mathbf{Q}^\times \backslash \mathbf{A}^\times}} \tilde{w}(\omega) |\Lambda(\omega, 1/2)|^4 + \text{non-generic contrib}$$

where the weights $w(\pi)$ and $\tilde{w}(\chi)$ depend on the local components of the flat section f used to define the Eisenstein series E.

Nelson (2020, Thm 10.4) has provided a rigorous derivation of this identity over a general number field F; the non-generic contribution is then made of 15 additional degenerate terms that arise during various regularisation processes.

Moreover, for $\chi\colon F^\times\backslash\mathbf{A}_F^\times \to \mathbf{C}^{(1)}$, a Hecke character of finite order and with cube-free conductor $\mathfrak{q} \subset \mathscr{O}_F$, Nelson has given examples of non-negative weights $w(\pi)$ whose support contains χ-twists $\pi' \times \chi$ where π' is generic, has conductor divisible by $\mathfrak{q}^2$ and central character χ^{-2}; n particular the twist has trivial central character and

$$L(\pi' \times \chi, 1/2) \geqslant 0.$$

Nelson has also bounded adequately the corresponding weights $\tilde{w}(\omega)$ (using in particular the bound (6.2) of Petrow and Young) and he eventually obtained the Weyl bound (3.3).

8.4. An example in the horizontal direction

We conclude this survey with a discussion of the proof of Theorem 4 by Nelson.

Let us recall that the objective is the subconvexity problem for the central value of a certain Rankin–Selberg L-function

$$L(\pi_E \times \sigma_E^\vee, 1/2)$$

where π_E (resp. σ_E) is a certain automorphic cuspidal representations of $\mathrm{GL}_{n+1,E}$ (resp. $\mathrm{GL}_{n,E}$) where $E/\mathbf{Q}$ is a quadratic field. The representations π_E, σ_E are obtained respectively from automorphic representations π and σ of the unitary group $U(V) =: G$ of an hermitian space of dimension $n+1$ and its subgroup $U(W) =: H$ for W a non degenerate subspace of dimension n.

To simplify slightly this discussion, we assume that σ (and hence σ_E) is *fixed*. Moreover to ease future notations, we will write π_0 for π.

By (3.6), the archimedean Langlands parameters of $\pi_{0,E}$ have size $\asymp T \geqslant 1$ for T large; in particular the analytic conductor

$$Q(\pi_{0,E} \times \sigma_E^\vee, 1/2) \asymp T^{2n(n+1)},$$

and the convexity bound in the T aspect becomes

$$L(\pi_{0,E} \times \sigma_E^\vee, 1/2) \ll T^{\frac{n(n+1)}{2}+o(1)}$$

and the purpose of Theorem 4 is to improve this bound.

The proof is via automorphic periods: for $(G,H) = (U(V), U(W))$, the conjecture of Gan–Gross–Prasad predicts that for suitable cuspidal automorphic representations

π, σ of G and H and automorphic forms in these $\varphi \in \pi, \psi \in \sigma$, the square of the period $|\mathscr{P}(\varphi, \psi)|^2$ satisfy the identity (8.5) with

$$L(\pi, \sigma, s) = L(\pi_E \times \sigma_E^\wedge, s).$$

This conjecture has been established under the assumptions of Theorem 4 thanks to the work of Jacquet–Rallis, Waldspurger, Zhang, Yun and many others (see Beuzart-Plessis, 2019, for a recent survey and Beuzart-Plessis, Chaudouard, and Zydor, 2020, for some recent developments).

Therefore, the objective is to bound non trivially a unitary period $\mathscr{P}(\varphi_0, \psi_0)$ for a *suitable* choice of automorphic forms φ_0, ψ_0. Such a bound is obtained again by estimating an *amplified* second moment of the periods $\mathscr{P}(\varphi, \psi_0)$ for φ varying over a basis of automorphic forms. This second moment is realized via the *Relative Trace Formula* pioneered by Jacquet to establish instances of the functoriality principle and identities between automorphic periods and values of L-functions; for an early example using of the Relative Trace Formula to compute moments of L-functions (in the case $G = \mathrm{GL}_2$ and $H = A$ the diagonal torus) see Ramakrishnan and Rogawski (2005).

Let us recall its basic principles.

Given $f \in \mathscr{C}_c^\infty(G(\mathbf{A}))$ a smooth compactly supported function, let

$$K_f(x, y) = \sum_{\gamma \in G(\mathbf{Q})} f(x^{-1}\gamma y)$$

be the automorphic kernel of the convolution map on $L^2([G])$

$$\varphi \mapsto R(f)\varphi \colon x \mapsto \int_{G(\mathbf{A})} f(g)\varphi(xg)dg.$$

Decomposing this kernel over an orthonormal basis of automorphic forms (again we ignore the possible non-compactness of $[G]$) , one has

$$K_f(x, y) = \sum_{\pi \in \mathscr{A}(G)} \sum_{\varphi \in \mathscr{B}_\pi} R_f(\overline{\varphi})(x)\varphi(y)$$

and

$$\iint_{[H]\times[H]} K_f(x, y)\overline{\psi}_0(x)\psi_0(y)dxdy = \sum_{\pi \in \mathscr{A}(G)} \sum_{\varphi \in \mathscr{B}_\pi} \overline{\mathscr{P}(R_{\overline{f}}(\varphi), \psi_0)}\mathscr{P}(\varphi, \psi_0). \quad (8.6)$$

Via the formula (8.5) the left-hand side of this equality is a weigthed sum of the L-values $L(\pi_E \times \sigma_E^\wedge, 1/2)$ for π ranging over the automorphic representations of G. The next step is to construct an adequate function f and a vector $\psi_0 \in \sigma$ such that

- ▷ All the weights in the above sum are non-negative: this is easily achieved by taking f to be a convolution $f_1 * f_1^\wedge$ for f_1 smooth compactly supported and $f_1^\wedge(g) := \overline{f}_1(g^{-1})$.

▷ The weight assigned to the specific L-function $L(\pi_{E,0} \times \sigma_E^\wedge, 1/2)$ is 1 say (and is significantly smaller for automorphic representations π having their archimedean parameters away from whose of π_0).

The design of f and ψ_0 is in fact a local problem and the crucial place is the archimedean one. For this, Nelson uses his earlier work with Venkatesh (Nelson and Venkatesh, 2021) which constitutes a far reaching and quantitative extension of Kirillov's *orbit method*.

8.4.1. *The orbit method after Nelson–Venkatesh.* — Given a Lie group $G(\mathbf{R})$ with Lie algebra $\mathfrak{g}$ and dual $\mathfrak{g}^*$, the orbit method (see Kirillov, 2004) postulates, and sometimes establishes rigorously (for instance in the case of compact or nilpotent groups) a correspondence

$$\pi \in \mathrm{Irr}^t(G(\mathbf{R})) \Longleftrightarrow \mathscr{O}_\pi \subset \mathfrak{g}^*$$

between the tempered unitary dual of $G(\mathbf{R})$ and the set of co-adjoint orbits (the $G(\mathbf{R})$-orbit in $\mathfrak{g}^*$ under the conjugation); in addition it relates the Fourier transform along some co-adjoint orbit $\mathscr{O}_\pi$ to the infinitesimal character χ_π of π (see Rossmann, 1978, for the case of reductive groups).

Nelson and Venkatesh, 2021 go further by establishing, an approximate correspondence between balls of symplectic volume 1 in the co-adjoint orbit $\mathscr{O}_\pi$ and unitary *vectors* in π. More precisely, using method from microlocal analysis, Nelson and Venkatesh associate to a bump function a on $\mathfrak{g}^*$ concentrated around a ball of volume one in $\mathscr{O}_\pi$, a family of operators $(\mathrm{Op}_{\pi,h}(a))_{h>0}$ indexed by a real parameter $h \to 0$ (these are obtained by convolving the group action with the Fourier transform of $\xi \mapsto a(h\xi)$ to $\mathfrak{g}$ precomposed with the logarithmic map). They show that as $h \to 0$, $\mathrm{Op}_{\pi,h}(a)$ is approximately of rank 1 (by computing its trace via Kirillov's formula) and those image contains an approximate eigenvector under the action of $\exp(hx)$ for any $x \in \mathfrak{g}$ sufficiently small. Moreover, this analysis remain valid even if π is varying, as long as h is a bit smaller than the inverse squareroot of any of the parameters of π.

The orbit method also extends to the relative setting: given $H(\mathbf{R}) \subset G(\mathbf{R})$ a subgroup (with Lie algebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ and dual $\mathfrak{h}^* \twoheadleftarrow \mathfrak{g}^*$) such that $(G(\mathbf{R}), H(\mathbf{R}))$ form a Gan–Gross–Prasad pair, and given $\pi \in \mathrm{Irr}^t(G(\mathbf{R}))$, $\sigma \in \mathrm{Irr}^t(H(\mathbf{R}))$ two tempered representations: the question of whether these representations are distinguished by one another (i.e. whether σ occurs in the decomposition of $\pi_{|H(\mathbf{R})}$) should be readable from the relative positions of their respective coadjoint orbits $\mathscr{O}_\pi$, $\mathscr{O}_\sigma$ Guillemin and Sternberg, 1982. The most natural condition is that the projection of $\mathscr{O}_\pi$ to $\mathfrak{h}^*$ (by restriction of a linear form on $\mathfrak{g}$ to $\mathfrak{h}$) intersects $\mathscr{O}_\sigma$ (the representations are called *orbit*-distinguished). The theory of Nelson and Venkatesh provides again a quantitative version of this principle: under the slightly stronger condition that the representations are *stably orbit*-distinguished (there is $\xi \in \mathscr{O}_\pi$ whose projection intersects $\mathscr{O}_\sigma$ and with finite H-stabilizer) their methods allow the construction of *good test* vectors: vectors in π whose projection to σ is "large".

We will not provide more details (this circle of ideas should deserve another full Bourbaki seminar). We will simply state informally its first application to the theory of L-functions: an asymptotic formula for the first moment of $L(\pi_E \times \sigma_E^\wedge, 1/2)$ but in the *vertical direction*.

Theorem (NELSON and VENKATESH, 2021, Thm. 1.1). *Let $\pi \in \mathscr{A}(G)$ be* fixed, *then under some suitable assumptions* (*similar to whose of Theorem 4*) *one has, as $T \to \infty$*

$$\frac{1}{|\mathscr{F}_{\pi,T}|} \sum_{\sigma \in \mathscr{F}_{\pi,T}} c(\pi,\sigma) L(\pi_E \times \sigma_E^\wedge, 1/2) = \frac{1}{2} + o(1)$$

where σ runs over the automorphic representations of H globally distinguished by π whose archimedean parameters are all contained in the interval $[T/2, T]$.

The mechanism of the proof is similar to (but much more sophisticated than) the approach described in § 8.1: it consists in using the Nelson–Venkatesh version of the orbit method (with parameter $h = 1/T$) to construct a suitable family of automorphic forms $\varphi_T \in \pi$ (which are pure tensors of L^2-norm 1). By Parseval, the square of the L^2-norm of the restriction $\varphi_{T|[H]}$ is equal to the sum over a basis of automorphic forms for H, of the squared periods $|\mathscr{P}(\varphi_T, \psi)|^2$. The conclusion follow from (8.5) and the following asymptotic formula, similar in spirit to (8.4) but proven using Ratner's theory:

$$\int_{[H]} |\varphi_T(h)|^2 dh \simeq \int_{[G]} |\varphi_T(g)|^2 dg = 1 + o(1),\ T \to \infty.$$

Remark 18. Since the error terms $o(1)$ in the formula and Theorem above build on Ratner's theory these are not explicit and it is not possible (for now) to use the amplification method as in §8.1.

8.4.2. *End of the proof of Nelson's Theorem 4.* — Using the orbit method described above, Nelson constructs, a smooth compactly supported function $f = f_T = f_{1,T} * f_{1,T}^\wedge$ and a vector $\psi = \psi_T \in \sigma$. These are again local problems and the most important place is the archimedean one.

The construction of the archimedean component f_∞ of f is roughly as follows: let $\mathscr{O}_{\pi_0} \subset \mathfrak{g}^*$ be the coadjoint orbit corresponding to π_0 and $\tau \in \mathscr{O}_{\pi_0}$ an element of size $\asymp T$ whose restriction

$$\tau_H := \tau_{|\mathfrak{h}} \in \mathfrak{h}^*$$

belongs to $\mathscr{O}_\sigma$ (such a τ exists because π_0 and σ are distinguished). From the element τ_H, Nelson constructs the vector $\psi \in \sigma$ (whose archimedean component is the "microlocalized" vector at τ_H). The fonction $f_{1\infty}$ is obtained by composing the logarithm map near the identity with the Fourier transform of a bump function on $\mathfrak{g}^*$ which is concentrated in a "tube" centered at τ, of length $h^{-1} = T^{1/2+\varepsilon}$ in the direction of $\mathscr{O}_\pi$

and of width T^ε transversally to $\mathscr{O}_\pi$ for $\varepsilon > 0$ to be chosen arbitrarily small; the fact that the bump function has a thinner support transversal to $\mathscr{O}_\pi$ requires a refinement of the microlocal calculus developed in Nelson and Venkatesh, 2021 (which was designed for lengths equal to $T^{1/2+\varepsilon}$ in all directions). Consequently f_∞ (obtained from $f_{1\infty}$ by convolution) is a smooth function supported in an absolutely bounded neighborhood of the identity e_G with a pike there:

$$f_\infty(e_G) = T^{(1/2+\varepsilon)n(n+1)+\varepsilon.n} = T^{n(n+1)/2+o(1)}.$$

These constructions single out on the righthand side of (8.6), a family, $\mathscr{F}_{T,\sigma}$ say, of automorphic cuspidal representations of G distinguished by σ, whose archimedean parameters have size $T^{1+o(1)}$ along with vectors for which the local integrals along $H(\mathbf{R})$ of their matrix coefficients against whose of φ (see the righthand side of (8.5)) can be evaluated precisely and such that for any such $\pi \in \mathscr{F}_{T,\sigma}$, one has

$$L(\pi_E \times \sigma_E^\wedge, 1/2) = T^{n^2/2+o(1)} \sum_{\varphi \in \mathscr{B}_\pi} \overline{\mathscr{P}(R_{\overline{f}}(\varphi), \psi)} \mathscr{P}(\varphi, \psi).$$

A version of Weyl's law (following from the orbit method and the definition of f) shows that the size of this family is

$$|\mathscr{F}_{T,\sigma}| = f_\infty(e_G) = T^{\frac{1}{2}n(n+1)+o(1)}.$$

By positivity and (8.6) we obtain that

$$\begin{aligned}\frac{1}{T^{\frac{n(n+1)}{2}+o(1)}} \sum_{\pi \in \mathscr{F}_{T,\sigma}} L(\pi_E \times \sigma_E^\wedge, 1/2) &\ll \frac{1}{T^{\frac{n}{2}+o(1)}} \sum_{\pi \in \mathscr{A}(G)} \sum_{\varphi \in \mathscr{B}_\pi} \overline{\mathscr{P}(R_{\overline{f}}(\varphi), \psi)} \mathscr{P}(\varphi, \psi) \\ &\ll \frac{1}{T^{\frac{n}{2}+o(1)}} \iint_{[H]\times[H]} \sum_{\gamma \in G(\mathbf{Q})} f(x^{-1}\gamma y)\overline{\psi}(x)\psi(y)dxdy\end{aligned}$$

It remains to analyse the right hand side of this expression: this is the *geometric part* of the relative pre-trace formula. It then "suffices" to show that

$$\frac{1}{T^{\frac{n}{2}+o(1)}} \iint_{[H]\times[H]} \sum_{\gamma \in G(\mathbf{Q})} f(x^{-1}\gamma y)\overline{\psi}(x)\psi(y)dxdy \ll T^{-\delta}$$

for some $\delta > 0$: indeed by positivity

$$\frac{1}{T^{\frac{n(n+1)}{2}+o(1)}} L(\pi_{0,E} \times \sigma_E^\wedge, 1/2) \leqslant \frac{1}{T^{\frac{n(n+1)}{2}+o(1)}} \sum_{\pi \in \mathscr{F}_{T,\sigma}} L(\pi_E \times \sigma_E^\wedge, 1/2) \ll T^{-\delta}$$

and consequently

$$L(\pi_{0,E} \times \sigma_E^\wedge, 1/2) \ll T^{\frac{n(n+1)}{2}-\delta/2}.$$

For this last point, the rapid decay of f and ψ implies that the γ-sum contains an absolutely bounded number of terms. Moreover the contribution of the γ close to $Z_G(\mathbf{R}).H(\mathbf{R})$ can be precisely evaluated and if a too obvious choice is made for the non-archimedean components of f (i.e. the characteristic functions of small enough open compact subgroups), this contribution will result in a *main term* of size $T^{o(1)}$ which is not good enough. Fortunately, one can incorporate in the definition of f an *amplifier* along the lines of § 5.2 (for instance by altering f at a number of small places where E splits) to make this main term small.

Eventually, the remaining (and perhaps hardest) step of the whole proof is to bound of contribution of the (finitely many) $\gamma \in G(\mathbf{Q})$ which are away from $Z_G(\mathbf{R}).H(\mathbf{R})$ (say at distance $\geqslant T^{\eta}$ for $\eta > 0$ small): one has to show that for $\mathscr{H}$ a fundamental domain of $[H]$ one has for any such γ

$$\frac{1}{T^{\frac{n}{2}}} \iint_{\mathscr{H}\times\mathscr{H}} f(x^{-1}\gamma y)\overline{\psi}(x)\psi(y)dxdy \ll T^{-\delta},\ \delta = \delta(\eta) > 0.$$

The (almost) invariance of ψ under the the action of centralizer of τ_H, $H(\mathbf{R})_{\tau_H}$ makes it possible to reduce the proof to the following local *volume bound* whose importance was emphasized by Marshall in a non-archimedean setting: *given $\Omega \subset H(\mathbf{R})$ a compact set; for $x, y \in \mathscr{H}$ and $\gamma \in G(\mathbf{R})$ at distance $\geqslant T^{\eta}$, $\eta > 0$ from $Z_G(\mathbf{R}).H(\mathbf{R})$, one has*

$$\mathrm{Vol}\left(\left\{z \in H(\mathbf{R})_{\tau_H},\ f_\infty(x^{-1}\gamma yz) \neq 0\right\} \cap \Omega\right) \ll_\Omega T^{-\delta'},\ \delta' = \delta'(\eta) > 0.$$

Nelson proved this bound by establishing a stronger bound:

$$\mathrm{Vol}\left(\left\{z \in Z_H(\mathbf{R}),\ f_\infty(x^{-1}\gamma yz) \neq 0\right\} \cap \Omega\right) \ll_\Omega T^{-\delta'}.$$

We refer to Nelson, 2021b, Thm 4.2, §14 and §15 for precise statements and their proofs.

Acknowledgement. — I would like to thank Valentin Blomer, Farrell Brumley, Paul Nelson, Ian Petrow, Akshay Venkatesh and Han Wu for several enlightening discussions, explanations and sometimes collaborations, through the years and until now, on the multiple aspects of the subconvexity problem. I also thank all the participants of the Bonn–Paris hybrid working group "Microlocal methods in automorphic forms" which took place during the acdemic year 2021-22 and was devoted to the the study of Nelson and Venkatesh, 2021. I would also like to thank Nicolas Bourbaki for his invitation to present this material at the Bourbaki seminar and for his careful reading of the manuscript and for catching (too) many typos in previous versions. This work is supported by the Swiss National Science Fundation (grant 200021_197045).

References

Adolphson, A. and Sperber, S. (1989). "Exponential sums and Newton polyhedra: cohomology and estimates", *Ann. of Math.* (2) **130** (2), pp. 367–406.

Balkanova, O., Frolenkov, D., and Wu, H. (2021). *On Weyl's Subconvex Bound for Cube-Free Hecke characters: totally Real Case*. arXiv: 2108.12283 [math.NT].

Bernstein, J. and Reznikov, A. (2010). "Subconvexity bounds for triple L-functions and representation theory", *Ann. of Math.* (2) **172** (3), pp. 1679–1718.

Beuzart-Plessis, R. (2019). "Progrès récents sur les conjectures de Gan-Gross-Prasad [d'après Jacquet-Rallis, Waldspurger, W. Zhang, etc.]" In: 414, Séminaire Bourbaki. Vol. 2017/2018. Exposés 1136–1150, Exp. No. 1140, 167–204.

Beuzart-Plessis, R., Chaudouard, P.-H., and Zydor, M. (2020). *The global Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups: the endoscopic case*. arXiv: 2007.05601 [math.RT].

Blomer, V. (2012). "Subconvexity for twisted L-functions on GL(3)", *Amer. J. Math.* **134** (5), pp. 1385–1421.

Blomer, V. and Buttcane, J. (2020). "On the subconvexity problem for L-functions on GL(3)", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **53** (6), pp. 1441–1500.

Blomer, V. and Harcos, G. (2010). "Twisted L-functions over number fields and Hilbert's eleventh problem", *Geom. Funct. Anal.* **20** (1), pp. 1–52.

Blomer, V., Harcos, G., and Michel, P. (2007). "Bounds for modular L-functions in the level aspect", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **40** (5), pp. 697–740.

Blomer, V. and Maga, P. (2016). "Subconvexity for sup-norms of cusp forms on PGL(n)", *Selecta Math.* (*N.S.*) **22** (3), pp. 1269–1287.

Blomer, V. and Milićević, D. (2015). "p-adic analytic twists and strong subconvexity", *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (4) **48** (3), pp. 561–605.

Bourgain, J. (2017). "Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta function", *J. Amer. Math. Soc.* **30** (1), pp. 205–224.

Breuillard, E. (2010). "Équidistribution des orbites toriques sur les espaces homogènes (d'après M. Einsiedler, E. Lindenstrauss, Ph. Michel, A. Venkatesh)", in: 332. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011, Exp. No. 1008, ix, 305–339.

Brumley, F. (2004). *Distinguishing cusp forms on the general linear group*. Thesis (Ph.D.)–Princeton University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, p. 84.

Buttcane, J. (2016). "The spectral Kuznetsov formula on $SL(3)$", *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (9), pp. 6683–6714.

——— (2020). "Kuznetsov, Petersson and Weyl on GL(3), I: The principal series forms", *Amer. J. Math.* **142** (2), pp. 595–626.

——— (2021). "Kuznetsov, Petersson and Weyl on GL(3), II: The generalized principal series forms", *Math. Ann.* **380** (1-2), pp. 231–266.

Clozel, L. and Thorne, J. A. (2015). "Level raising and symmetric power functoriality, II", *Ann. of Math.* (2) **181** (1), pp. 303–359.

Clozel, L. and Ullmo, E. (2005). "Équidistribution de mesures algébriques", *Compos. Math.* **141** (5), pp. 1255–1309.

Cogdell, J. W. (2003). "On sums of three squares", in: vol. 15. 1. Les XXIIèmes Journées Arithmetiques (Lille, 2001), pp. 33–44.

Cogdell, J. W. et al. (2004). "Functoriality for the classical groups", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (99), pp. 163–233.

Conrey, J. B. and Iwaniec, H. (2000). "The cubic moment of central values of automorphic *L*-functions", *Ann. of Math.* (2) **151** (3), pp. 1175–1216.

Duke, W. (1988). "Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms", *Inventiones mathematicae* **92** (1), pp. 73–90.

Duke, W., Friedlander, J. B., and Iwaniec, H. (1993). "Bounds for automorphic *L*-functions", *Invent. Math.* **112** (1), pp. 1–8.

——— (1994a). "A quadratic divisor problem", *Invent. Math.* **115** (2), pp. 209–217.

——— (1994b). "Bounds for automorphic *L*-functions. II", *Invent. Math.* **115** (2), pp. 219–239.

——— (2002). "The subconvexity problem for Artin *L*-functions", *Invent. Math.* **149** (3), pp. 489–577.

Duke, W. and Schulze-Pillot, R. (1990). "Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattice points on ellipsoids", *Invent. Math.* **99** (1), pp. 49–57.

Einsiedler, M. et al. (2011). "Distribution of periodic torus orbits and Duke's theorem for cubic fields", *Ann. of Math.* (2) **173** (2), pp. 815–885.

Friedlander, J. B. and Iwaniec, H. (1985). "Incomplete Kloosterman sums and a divisor problem", *Ann. of Math.* (2) **121** (2). With an appendix by Bryan J. Birch and Enrico Bombieri, pp. 319–350.

Gan, W. T. et al. (2012). *Sur les conjectures de Gross et Prasad. I.* Astérisque No. 346 (2012) (2012). Société Mathématique de France, Paris, pp. xi+318.

Gelbart, S. and Jacquet, H. (1978). "A relation between automorphic representations of GL(2) and GL(3)", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **11** (4), pp. 471–542.

Ghosh, A. and Sarnak, P. (2012). "Real zeros of holomorphic Hecke cusp forms", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*) **14** (2), pp. 465–487.

Godement, R. and Jacquet, H. (1972). *Zeta functions of simple algebras*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260. Springer-Verlag, Berlin-New York, pp. ix+188.

Good, A. (1981). "Beiträge zur Theorie der Dirichletreihen, die Spitzenformen zugeordnet sind", *J. Number Theory* **13** (1), pp. 18–65.

Guillemin, V. and Sternberg, S. (1982). "Geometric quantization and multiplicities of group representations", *Invent. Math.* **67** (3), pp. 515–538.

Guo, J. (1996). "On the positivity of the central critical values of automorphic L-functions for GL(2)", *Duke Math. J.* **83** (1), pp. 157–190.

Harcos, G. and Michel, P. (2006). "The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points. II", *Invent. Math.* **163** (3), pp. 581–655.

Heath-Brown, R. (1996). "A new form of the circle method, and its application to quadratic forms", *J. Reine Angew. Math.* **481**, pp. 149–206.

——— (2009). "Convexity bounds for L-functions", *Acta Arith.* **136** (4), pp. 391–395.

Holowinsky, R. and Nelson, P. D. (2018). "Subconvex bounds on GL_3 via degeneration to frequency zero", *Math. Ann.* **372** (1-2), pp. 299–319.

Holowinsky, R. and Soundararajan, K. (2010). "Mass equidistribution for Hecke eigenforms", *Ann. of Math.* (2) **172** (2), pp. 1517–1528.

Humphries, P. and Radziwiłł, M. (2021). *Optimal Small Scale Equidistribution of Lattice Points on the Sphere, Heegner Points, and Closed Geodesics*. arXiv: 1910.01360 [math.NT].

Ichino, A. (2008). "Trilinear forms and the central values of triple product L-functions", *Duke Math. J.* **145** (2), pp. 281–307.

Iwaniec, H. (1987). "Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight", *Invent. Math.* **87** (2), pp. 385–401.

Iwaniec, H. and Kowalski, E. (2004). *Analytic Number Theory*. Vol. 53. Colloquium Publications. American Mathematical Society.

Jacquet, H. and Langlands, R. P. (1970). *Automorphic forms on* GL(2). Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114. Springer-Verlag, Berlin-New York, pp. vii+548.

Jutila, M. and Motohashi, Y. (2005). "Uniform bound for Hecke L-functions", *Acta Math.* **195**, pp. 61–115.

Kaletha, T. et al. (2014). *Endoscopic Classification of Representations: Inner Forms of Unitary Groups*. arXiv: 1409.3731 [math.NT].

Katz, N. M. (2012). *Convolution and equidistribution*. Vol. 180. Annals of Mathematics Studies. Sato-Tate theorems for finite-field Mellin transforms. Princeton University Press, Princeton, NJ, pp. viii+203.

Kim, H. H. and Shahidi, F. (2002). "Functorial products for $GL_2 \times GL_3$ and the symmetric cube for GL_2", *Ann. of Math.* (2) **155** (3). With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart, pp. 837–893.

Kirillov, A. A. (2004). *Lectures on the orbit method*. Vol. 64. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, pp. xx+408.

Kohnen, W. and Zagier, D. (1981). "Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip", *Invent. Math.* **64** (2), pp. 175–198.

Kowalski, E., Michel, P., and Sawin, W. (2017). "Bilinear forms with Kloosterman sums and applications", *Ann. of Math.* (2) **186** (2), pp. 413–500.

Kowalski, E., Michel, P., and VanderKam, J. (2002). "Rankin-Selberg L-functions in the level aspect", *Duke Math. J.* **114** (1), pp. 123–191.

Kumar, S. (2020). *Subconvexity bound for* $\mathrm{GL}(3) \times \mathrm{GL}(2)$ *L-functions in* $\mathrm{GL}(2)$ *spectral aspect*. arXiv: 2007.05043 [math.NT].

Li, X. (2011). "Bounds for $\mathrm{GL}(3) \times \mathrm{GL}(2)$ L-functions and $\mathrm{GL}(3)$ L-functions", *Ann. of Math.* (2) **173** (1), pp. 301–336.

Lin, Y. (2021). "Bounds for twists of $\mathrm{GL}(3)$ L-functions", *J. Eur. Math. Soc.* (*JEMS*) **23** (6), pp. 1899–1924.

Lin, Y., Michel, P., and Sawin, W. (2021). *Algebraic twists of* $\mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_2$ *L-functions*. arXiv: 1912.09473 [math.NT].

Lindenstrauss, E. (2006). "Invariant measures and arithmetic quantum unique ergodicity", *Ann. of Math.* (2) **163** (1), pp. 165–219.

Luo, W. Z. and Sarnak, P. (1995). "Quantum ergodicity of eigenfunctions on $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbf{H}^2$", *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (81), pp. 207–237.

Michel, P. (2004). "The subconvexity problem for Rankin-Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points", *Annals of Mathematics* **160** (1), pp. 185–236.

Michel, P. and Venkatesh, A. (2010). "The subconvexity problem for GL_2", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (111), pp. 171–271.

Mok, C. P. (2015). "Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups", *Mem. Amer. Math. Soc.* **235** (1108), pp. vi+248.

Molteni, G. (2002). "Upper and lower bounds at $s = 1$ for certain Dirichlet series with Euler product", *Duke Math. J.* **111** (1), pp. 133–158.

Motohashi, Y. (1993). "An explicit formula for the fourth power mean of the Riemann zeta-function", *Acta Math.* **170** (2), pp. 181–220.

——— (1997). *Spectral theory of the Riemann zeta-function*. Vol. 127. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, pp. x+228.

Munshi, R. (2015a). "The circle method and bounds for L-functions—III: t-aspect subconvexity for $\mathrm{GL}(3)$ L-functions", *J. Amer. Math. Soc.* **28** (4), pp. 913–938.

——— (2015b). "The circle method and bounds for L-functions—IV: Subconvexity for twists of $\mathrm{GL}(3)$ L-functions", *Ann. of Math.* (2) **182** (2), pp. 617–672.

——— (2021). "Subconvexity for $\mathrm{GL}(3) \times \mathrm{GL}(2)$ L-functions in t-aspect", *Journal of the European Math. Soc.* to appear.

Nelson, P. D. (2020). *Eisenstein series and the cubic moment for PGL*(2). arXiv: 1911.06310 [math.NT].

——— (2021a). *Bounds for standard L-functions*. arXiv: 2109.15230 [math.NT].

——— (2021b). *Spectral aspect subconvex bounds for* $\mathrm{U}_{n+1} \times \mathrm{U}_n$. arXiv: 2012.02187 [math.NT].

Nelson, P. D. and Venkatesh, A. (2021). "The orbit method and analysis of automorphic forms", *Acta Math.* **226** (1), pp. 1–209.

Newton, J. and Thorne, J. A. (2021a). "Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **134**, pp. 1–116.

——— (2021b). "Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms, II", *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **134**, pp. 117–152.

Petrow, I. and Young, M. P. (2019). *The fourth moment of Dirichlet L-functions along a coset and the Weyl bound*. arXiv: 1908.10346 [math.NT].

——— (2020). "The Weyl bound for Dirichlet L-functions of cube-free conductor", *Ann. of Math.* (2) **192** (2), pp. 437–486.

Phillips, R. S. and Sarnak, P. (1985). "On cusp forms for co-finite subgroups of PSL$(2, \mathbf{R})$", *Invent. Math.* **80** (2), pp. 339–364.

Pierce, L. B. (2019). "The Vinogradov mean value theorem [after Wooley, and Bourgain, Demeter and Guth]", in: 407. Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135, Exp. No. 1134, 479–564.

Ramakrishnan, D. (2000). "Modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for SL(2)", *Ann. of Math.* (2) **152** (1), pp. 45–111.

Ramakrishnan, D. and Rogawski, J. (2005). "Average values of modular L-series via the relative trace formula", *Pure Appl. Math. Q.* **1** (4, Special Issue: In memory of Armand Borel. Part 3), pp. 701–735.

Rossmann, W. (1978). "Kirillov's character formula for reductive Lie groups", *Invent. Math.* **48** (3), pp. 207–220.

Rudnick, Z. (2005). "On the asymptotic distribution of zeros of modular forms", *Int. Math. Res. Not.* (34), pp. 2059–2074.

Sarnak, P. (1990). *Some applications of modular forms*. Vol. 99. Cambridge Tracts in Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, pp. x+111.

——— (2001). "Estimates for Rankin-Selberg L-functions and quantum unique ergodicity", *J. Funct. Anal.* **184** (2), pp. 419–453.

Sharma, P. (2019). *Subconvexity for* GL$(3) \times$ GL(2) *twists in level aspect*. arXiv: 1906.09493 [math.NT].

Soundararajan, K. (2010). "Weak subconvexity for central values of L-functions", *Ann. of Math.* (2) **172** (2), pp. 1469–1498.

Soundararajan, K. and Thorner, J. (2019). "Weak subconvexity without a Ramanujan hypothesis", *Duke Math. J.* **168** (7). With an appendix by Farrell Brumley, pp. 1231–1268.

Venkatesh, A. (2010). "Sparse equidistribution problems, period bounds and subconvexity", *Ann. of Math.* (2) **172** (2), pp. 989–1094.

Waldspurger, J.-L. (1981). "Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi-entier", *J. Math. Pures Appl.* (9) **60** (4), pp. 375–484.

——— (1985). "Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie", *Compositio Math.* **54** (2), pp. 173–242.

WATSON, T. C. (2002). *Rankin triple products and quantum chaos*. Thesis (Ph.D.)–Princeton University. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, p. 81.
WEYL, H. (1921). "Zur Abschätzung von $\zeta(1+ti)$." German. *Math. Z.* **10**, pp. 88–101.
WU, H. (2014). "Burgess-like subconvex bounds for $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_1$", *Geom. Funct. Anal.* **24** (3), pp. 968–1036.
——— (2021). *On Motohashi's formula*. arXiv: 2001.09733 [math.NT].
YOUNG, M. P. (2011). "The fourth moment of Dirichlet *L*-functions", *Ann. of Math.* (2) **173** (1), pp. 1–50.

Philippe Michel

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
CH-1015 Lausanne, Suisse

E-mail: philippe.michel@epfl.ch

Séminaire BOURBAKI Janvier 2022
73e année, 2021–2022, no 1191, p. 403 à 432
doi: 10.24033/ast.1192

FINITE TIME BLOW UP FOR THE COMPRESSIBLE FLUIDS AND FOR THE ENERGY SUPERCRITICAL DEFOCUSING NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION

[*after* **Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski and Jérémie Szeftel**]

by **Galina Perelman**

Introduction

The problem of finite time breakdown of solutions starting from smooth initial data is one of the central problems in the theory of nonlinear evolution PDEs. In this talk we will address this problem in the context of the following two models: the isentropic compressible Navier-Stokes equation and its inviscid Euler limit on the one hand and the defocusing nonlinear Schrödinger equation on the other hand. The aim of the talk is to report on breakthrough progress recently made in a series of works of F. Merle, P. Raphaël, I. Rodnianski and J. Szeftel who showed that both models in a suitable range of parameters, admit a finite time blow up regime governed by appropriate self-similar solutions of the underlying Euler equation. We start by briefly overviewing the history of the blow up problem for each of these models and explaining the connection between them.

The motion of isentropic compressible viscous fluids in $\mathbb{R}^d$ is governed by the compressible Navier-Stokes equations:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v + \nabla P(\rho) = \mu \Delta v + \mu' \nabla \operatorname{div} v \\ (\rho, v)|_{t=0} = (\rho_0, v_0), \end{cases} \tag{1}$$

where $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ is the velocity field, $\rho : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ is the density of the fluid, μ, μ' are viscosity coefficients satisfying $\mu \geqslant 0$, $\mu' \geqslant \left(1 - \frac{2}{d}\right) \mu$ and $P = P(\rho)$ is the pressure that we will assume to be given by:

$$P(\rho) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \rho^\gamma, \quad \gamma > 1. \tag{2}$$

©Astérisque 438, SMF 2022

In the inviscid limit $\mu = \mu' = 0$ one obtains the compressible Euler equations:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \rho \partial_t v + \rho v \cdot \nabla v + \nabla P(\rho) = 0 \\ (\rho, v)|_{t=0} = (\rho_0, v_0). \end{cases} \tag{3}$$

We will be interested in solutions (ρ, v) that decay to zero at spatial infinity[(1)] keeping the density strictly positive:

$$\lim_{|x|\to\infty} (\rho(t,x), v(t,x)) = 0, \quad \rho(t,x) > 0, \tag{4}$$

and will focus mainly on the 3d case.

Solutions to (1) satisfy formally the mass and momentum conservation law

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0 dx, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho(t) v(t) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_0 v_0 dx,$$

and the energy identity

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} \rho(t) |v(t)|^2 + \frac{1}{\gamma} \rho^\gamma(t) \right) dx + \int_0^t (\mu \|\nabla v(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \mu' \|\operatorname{div} v(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}) ds = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{1}{2} \rho_0 |v_0|^2 + \frac{1}{\gamma} \rho_0^\gamma \right) dx.$$

Note also that the Navier-Stokes equation (1) is preserved by the scaling

$$(\rho(t,x), v(t,x)) \mapsto (\lambda^{\frac{2(\mathrm{r}-1)}{\gamma-1}} \rho(\lambda^{\mathrm{r}} t, \lambda x), \lambda^{\mathrm{r}-1} v(\lambda^{\mathrm{r}} t, \lambda x)), \ \lambda > 0, \tag{5}$$

with $\mathrm{r} = \frac{2\gamma}{\gamma+1}$. The Euler equation (3) is invariant with respect to transformations (5) for any r.

Smooth, suitably decaying initial data (ρ_0, u_0) with strictly positive density are known to give rise to unique local in time strong solutions to (1), (3) (see Section 1 for the precise statements and references), that however do not always exist for all times, the conservation laws being far too weak to prevent the formation of singularities. Finite time breakdown of strong solutions to (1) starting from initial data with non-vanishing density, non-vanishing momentum and with suitable decay at infinity was shown by Rozanova (2008) in the case of $d \geqslant 3$, $\gamma \geqslant \frac{2d}{d+2}$, see also Xin (1998) where the case of non-barotropic compressible Navier-Stokes equations with compactly supported initial data was considered. For the 3d Euler equation (3)

(1) For the Euler equation the behavior at infinity is less important because of the domain of dependence principle.

the corresponding results go back to the work of Sideris (1985) who exhibited an open set of smooth initial data corresponding to compactly supported perturbations of constant states, including arbitrary small disturbances, that lead to classical solutions with a finite lifespan. However the proofs of Rozanova (2008), Sideris (1985), and Xin (1998), being based on convexity type arguments give no information on the nature of the singularity that develops.

For the compressible Euler equations, the typical singularity (at least for "small" initial data) is a shock[(2)]. In dimension one, the fact that initially smooth solutions can form shock singularities even when the initial data are small and compactly supported perturbations of a constant state is known since the works of Riemann. We refer to the monographs Dafermos (2010) and Majda (1984) for the details and references of the 1d theory which by now is quite complete. An important advance in understanding of multidimensional shock formation was achieved by Alinhac (1999, 2001), who considered a general class of quasilinear wave equations in dimensions two and three, including the irrotational compressible Euler equations, and showed that the failure of the Klainerman null condition in the equation leads for non-degenerate small compactly supported initial data to finite time shock formation caused by the crossing of characteristics (see also the precursor work of John, 1985). While giving a detailed description of the solutions up to the first singular time, the results of Alinhac (1999, 2001) leave open a more general question of the maximal smooth development of the initial data. For the 3d relativistic Euler equations, the latter was studied in the seminal work of Christodoulou (2007), see also Christodoulou and Miao (2014) for the non-relativistic case. The results of Christodoulou (2007) and Christodoulou and Miao (2014) cover the case of small compactly supported initial perturbations of constant state solutions, showing shock formation in irrotational space-time regions and giving a precise description of the corresponding portion of the boundary of the maximal classical development of the data. We also refer to the works of Buckmaster, Drivas, et al. (2021), Buckmaster, Shkoller, and Vicol (2019a,b, 2020), Christodoulou (2019), and Luk and Speck (2018, 2021) for further developments in the study of shock formation for the compressible Euler equations, including the results going beyond the irrotational and isentropic regimes.

[(2)] Shock singularity means that the velocity and density remain bounded while some of their first order derivatives blow up.

Shocks are not the only possible singularities for (3). Stronger singularities with both the density and the velocity blowing up, may occur as well. It has been known since the works of Guderley (1942) and Sedov (1959) that (3) has a family of spherically symmetric self-similar solutions

$$\rho(t,x) = \frac{1}{(T-t)^{\frac{2(\mathrm{r}-1)}{\mathrm{r}(\gamma-1)}}} \mathscr{R}\left(\frac{x}{(T-t)^{\frac{1}{\mathrm{r}}}}\right),\ v(t,x) = \frac{1}{(T-t)^{1-\frac{1}{\mathrm{r}}}} \mathscr{V}\left(\frac{x}{(T-t)^{\frac{1}{\mathrm{r}}}}\right). \quad (6)$$

Although typically these solutions are either non global or non-smooth (that is the profiles $\mathscr{R}$ and $\mathscr{V}$ are non-smooth), Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022b) proved that in a suitable range of parameter γ, and for a suitable sequence of blow up rates r, (3) admits global, decaying at infinity, C^∞ self-similar solutions. Furthermore, Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022c) showed that these C^∞ self-similar solutions can be used as a leading order approximation to generate finite energy[3] blow up solutions for both the Euler equation (3) and the Navier-Stokes equation (1). For the Navier-Stokes equation this gives the first result with a complete description of singularity formation. The C^∞ smoothness of the self-similar profiles plays a crucial role in the analysis of Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022c).

What is even more remarkable is that the above self-similar eulerian solutions can be also used to produce finite time blow up solutions for the defocusing nonlinear Schrödinger equation (NLS):

$$\begin{cases} iu_t = -\Delta u + |u|^{2p}u, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad p > 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d). \end{cases} \quad (7)$$

The term "defocusing" refers to the sign "+" before the nonlinearity.

The NLS equation (7) is invariant with respect to the scaling:

$$u(t,x) \mapsto \lambda^{\frac{1}{p}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \lambda > 0, \quad (8)$$

which preserves the homogeneous Sobolev norm $\|u_0\|_{\dot{H}^{s_c}(\mathbb{R}^d)}$ with $s_c = \frac{d}{2} - \frac{1}{p}$.

Local well-posedness of (7) is classical and goes back to the works of Ginibre and Velo (1979). The Cauchy problem (7) is known to be locally well-posed in H^s for[4] $s \geqslant \max\{0, s_c\}$ (see e.g. Cazenave (2003) and Cazenave and Weissler (1990) and

[3] Although decaying at infinity, these self-similar solutions have infinite energy, see Section 3.

[4] In the case when p is not an integer one has also to assume that s is compatible with the smoothness of the nonlinear term.

references therein). For $s \geqslant \max\{1, s_c\}$, the solutions satisfy on their lifespan the mass and energy conservation laws:

$$M(u(t)) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} |u(t,x)|^2 dx = M(u_0),$$

$$E(u(t)) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\nabla u(t,x)|^2 + \frac{1}{p+1} |u(t,x)|^{2p+2} \right) dx = E(u_0).$$

In the case $s > s_c$ the lifespan of the solutions admits a lower bound depending only on the H^s norm of initial data[(5)], which in a standard way, implies that the solution of (7) is either global or its H^s norm becomes unbounded in finite time. By the mass and energy conservation, this ensures global well-posedness in H^s, $s \geqslant 1$, in the energy subcritical case $s_c < 1$. Global well-posedness is known to persist in the energy critical case $s_c = 1$ ($p = \frac{2}{d-2}, d \geqslant 3$). This was proved (after considerable efforts) by Bourgain (1999), Grillakis (2000), Tao (2005) for spherically symmetric initial data, and by Colliander et al. (2008), Ryckman and Visan (2007), and Visan (2007) for general data. We also refer to the seminal paper of Kenig and Merle (2006) where the powerful technology of concentration compactness/rigidity method was introduced.

The question whether finite time blow up occurs in the energy supercritical case $s_c > 1$ ($p > \frac{2}{d-2}, d \geqslant 3$) remained completely open for long time. On the one hand, numerical simulations as well as the global well-posedness results for the log-supercritical equations (see e.g. Tao, 2007), the nonexistence of soliton like solutions and the expected nonexistence of the self-similar blow up supported the hypothesis of global well-posedness. On the other hand, Tao (2018) exhibited examples of energy supercritical defocusing NLS systems for which finite time blow up does happen.

A decisive breakthrough has been achieved by Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a) who considered the energy supercritical NLS

$$iu_t = -\Delta u + |u|^{2p} u, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad p > \frac{2}{d-2} \tag{9}$$

in dimensions $5 \leqslant d \leqslant 9$ and showed that there exist, for certain choices of p, C^∞ well localized initial data leading to solutions blowing up in finite type. The construction of Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a) relies on the hydrodynamic formulation of the NLS equation (9) arising via the Madelung transform $u = \rho e^{i\varphi}$ that allows to view (9), at least in some regimes, as a perturbation of the compressible Euler equation (3) and to use the C^∞ self-similar solutions of the latter to produce finite time blow up solutions to (9).

[(5)] In fact, one has a slightly stronger result including the persistence of regularity: if $u_0 \in H^{s'}$ with $s' > s$, then the solution stays in $H^{s'}$ as long as it exists in H^s.

The remainder of the text is organized as follows. In Section 1 we recall the basic local well-posedness results for the Navier-Stokes and Euler equations (1), (3). In Section 2 we introduce the changes of variables that allow to treat both the Navier-Stokes equation (1) and the NLS equation (9) as a perturbation of the Euler equation (3). In Section 3 we introduce the C^∞ self-similar solutions to (3) discovered in Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022b) and describe their main properties. In Section 4 we formulate the main blow up results of Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a,c). The proofs of these results are outlined in Section 5.

Throughout this text we will use the letters c, C to denote universal positive constants which may vary from line to line. If we need the implied constant to depend on parameters, we shall indicate this by subscripts. We also use the notation $A \lesssim B$ to denote a bound of the form $A \leqslant CB$.

Acknowledgement. — I would like to thank Raphaël Danchin for helpful discussions on the subject of this talk and Jérémie Szeftel for the time he took to answer my numerous questions.

1. Local existence results for the compressible Navier-Stokes and Euler equations

Local existence and uniqueness of strong solutions to the Navier-Stokes equation (1) for sufficiently regular initial data with densities bounded away from zero are known since the works of Itaya (1976), Nash (1962), and Serrin (1959), see also Danchin (2001). The case of general non negative densities in dimension 3 was treated by Cho, Choe, and Kim (2004) and Choe and Kim (2003) who in particular, proved the following theorem.

Theorem 1.1 (Cho, Choe, and Kim, 2004; Choe and Kim, 2003). *Let $d = 3$, $\mu > 0$, and assume that $\rho_0 \in H^1 \cap W^{1,6}$, $v_0 \in \dot{H}^1 \cap \dot{H}^2$ such that*

$$\rho_0^{-1/2} \left(\nabla P(\rho_0) - \mu \Delta v_0 - \mu' \nabla \operatorname{div} v_0 \right) \in L^2.$$

Then there exists a unique maximal strong solution

$$(\rho, v) \in C([0,T), H^1 \cap W^{1,6}) \times C([0,T), \dot{H}^1 \cap \dot{H}^2)$$

to (1) *and either $T = +\infty$ or*

$$\limsup_{t \to T} (\|\rho(t)\|_{H^1 \cap W^{1,6}} + \|\nabla v(t)\|_{L^2}) = \infty.$$

We also refer to Feireisl (2004) and Lions (1998) for the theory of weak global solutions that exist under finite energy assumptions in the range $\gamma > d/2$.

For the Euler equation (3) one has the following classical result:

Theorem 1.2 (Chemin, 1990; Makino, Ukai, and Kawashima, 1987)**.** *Assume that* $\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}, v_0 \in H^s$ *for some* $s > \frac{d}{2}+1$*. Then there exists a unique maximal strong solution* $(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}, v) \in C([0,T), H^s \times H^s)$ *to* (3) *and either* $T = +\infty$ *or*

$$\int_0^T (\|\nabla(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}})(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|\nabla v(s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)})ds = \infty.$$

2. Reduction to the self-similar Euler equation

In this section we reformulate the equations (1), (9) in the eulerian self-similar coordinates.

2.1. Self-similar change of coordinates in (1)

We are interested in spherically symmetric solutions with non vanishing density. Setting

$$\rho(t,x) = 2^{-\frac{1}{p}}\varrho^2(\frac{t}{2},x),\ v(t,x) = \nabla\varphi(\frac{t}{2},x),\ \partial_t\varphi(t,0) = -\varrho^{2p}(t,0), \quad p = \gamma - 1, \tag{10}$$

we obtain

$$\begin{cases} \partial_t\varrho + 2\nabla\varphi\cdot\nabla\varrho + \varrho\Delta\varphi = 0 \\ \partial_t\varphi + |\nabla\varphi|^2 + \varrho^{2p} = \mathscr{F}(\varrho,\varphi), \end{cases} \tag{11}$$

where

$$\mathscr{F}(\varrho,\varphi) = 2^{1+\frac{1}{p}}(\mu+\mu')\int_0^r \frac{\partial_{r'}\Delta\varphi(r')}{\varrho^2(r')}dr'.$$

We next transform (11) to similarity coordinates setting

$$\varrho(t,x) = \lambda^{\frac{\mathrm{r}-1}{p}}(\tau)R(\tau,y), \quad \varphi(t,x) = \lambda^{\mathrm{r}-2}(\tau)\Phi(\tau,y), \tag{12}$$

with

$$y = \lambda(\tau)x, \quad \lambda(\tau) = e^\tau, \quad \frac{d\,\tau}{d\,t} = e^{\mathrm{r}\tau}. \tag{13}$$

This leads to the following system

$$\begin{cases} \partial_\tau R + (\frac{\mathrm{r}-1}{p} + \Lambda)R + 2\nabla\Phi\cdot\nabla R + R\Delta\Phi = 0 \\ \partial_\tau\Phi + (\mathrm{r}-2+\Lambda)\Phi + |\nabla\Phi|^2 + R^{2p} = b_{ns}^2(\tau)\mathscr{F}(R,\Phi), \end{cases} \tag{14}$$

where

$$\Lambda = y\cdot\nabla, \quad b_{ns}(\tau) = e^{-\varepsilon_{ns}\tau},\ \varepsilon_{ns} = \frac{1}{2}\left((l+1)\mathrm{r}-2-l\right),\ l = \frac{2}{p}.$$

The parameter ε_{ns} mesures compatibility between the Navier-Stokes and Euler dynamics: for $\varepsilon_{ns} > 0$ the viscosity term in (14) decays as $\tau \to +\infty$, which means that the Euler dynamics dominates as one approaches the singularity.

2.2. Hydrodynamic formulation of the NLS equation

We now show that the NLS equation (9) can be also transformed to the form (14). For non vanishing solutions, setting

$$u(t,x) = e^{i\varphi(t,x)}\varrho(t,x), \quad \varrho > 0, \tag{15}$$

one can rewrites (9) as the system

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\varrho + \varrho\Delta\varphi = 0 \\ \partial_t \varphi + |\nabla\varphi|^2 + \varrho^{2p} = \frac{\Delta\varrho}{\varrho}, \end{cases} \tag{16}$$

that can be viewed as the Euler equation

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\varrho + \Delta\varrho = 0 \\ \partial_t \varphi + |\nabla\varphi|^2 + \varrho^{2p} = 0 \end{cases} \tag{17}$$

perturbed by the term $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$ corresponding to the so-called quantum pressure. This hydrodynamic formulation was known since the work of Madelung (1927) and was extensively exploited for studying both the NLS equations and the compressible fluids, see e.g. Alazard and Carles (2009), Audiard and Haspot (2018), Carles, Danchin, and Saut (2012), Chiron and Rousset (2009), and Grenier (1998).

Passing in (16) to the self-similar coordinates (12), (13) one obtains

$$\begin{cases} \partial_\tau R + (\frac{\mathrm{r}-1}{p} + \Lambda)R + 2\nabla\Phi \cdot \nabla R + R\Delta\Phi = 0 \\ \partial_\tau \Phi + (\mathrm{r} - 2 + \Lambda)\Phi + |\nabla\Phi|^2 + R^{2p} = b_s^2(\tau)\frac{\Delta R}{R}, \end{cases} \tag{18}$$

where

$$b_s(\tau) = e^{-\varepsilon_s \tau}, \quad \varepsilon_s = \mathrm{r} - 2. \tag{19}$$

Thus in the regime $\mathrm{r} > 2$, $\tau \to +\infty$, (18) can be viewed as a perturbation of the Euler equation

$$\begin{cases} \partial_\tau R + (\frac{\mathrm{r}-1}{p} + \Lambda)R + 2\nabla\Phi \cdot \nabla R + R\Delta\Phi = 0 \\ \partial_\tau \Phi + (\mathrm{r} - 2 + \Lambda)\Phi + |\nabla\Phi|^2 + R^{2p} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

3. Self-similar Euler profiles

Self-similar solutions to the Euler equation (3) written in the self-similar variables (10), (12), (13) correspond to[6] stationary solutions of the system (20):

$$\begin{cases} (\frac{\mathrm{r}-1}{p}+\Lambda)R+2\nabla\Phi\cdot\nabla R+R\Delta\Phi=0 \\ (\mathrm{r}-2+\Lambda)\Phi+|\nabla\Phi|^2+R^{2p}=0. \end{cases} \tag{21}$$

Without loss of generality one can assume that

$$R(0)=1. \tag{22}$$

In the radial setting (21) can be mapped into an autonomous system of ODE via the Emden transform (see Guderley, 1942; Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel, 2022b; Sedov, 1959):

$$\sigma(s)=\frac{\sqrt{2p}}{r}R^p(r),\quad w(s)=-\frac{2}{r}\Phi'(r),\quad s=\ln r,\ r=|y|. \tag{23}$$

In terms of σ, w (21) takes the form

$$\begin{cases} (w-1)w'+l\sigma\sigma'+w^2-\mathrm{r}w+l\sigma^2=0 \\ \frac{\sigma}{l}w'+(w-1)\sigma'+\frac{\sigma}{l}\big[(d+l)w-\mathrm{r}l\big]=0, \end{cases} \tag{24}$$

which gives

$$w'=-\frac{\Delta_1}{\Delta_0},\quad \sigma'=-\frac{\Delta_2}{\Delta_0},$$

with

$$\begin{aligned} &\Delta_0=(w-1)^2-\sigma^2, \\ &\Delta_1=w(w-1)(w-\mathrm{r})-d(w-w_e)\sigma^2,\quad w_e=\frac{l(\mathrm{r}-1)}{d}, \\ &\Delta_2=\frac{\sigma}{l}\left[(l+d-1)w^2-(l+d+l\mathrm{r}-\mathrm{r})w+l\mathrm{r}-l\sigma^2\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

The phase portrait of (24) on the plane (σ, w) depends strongly on the parameters r, l, d. An important role is played by the points where

$$\Delta_0=\Delta_1=\Delta_2=0. \tag{26}$$

Relevant to us will be the range

$$d\geqslant 2,\ \ l>0,\ \ 1<\mathrm{r}<\mathrm{r}^*(d,l)=1+\frac{d-1}{(\sqrt{l}+1)^2}. \tag{27}$$

[6] Here and below we always assume $r\neq 2$.

In this case the system (26), in addition to the point $P_1 = (0,1)$, has two distinct solutions $P_2 = (\sigma_2, w_2)$ and $P_3 = (\sigma_3, w_3)$ with $w_e < w_2 < w_3 < 1$, belonging to the line $\sigma + w = 1$.

Another two important points are $P_0 = (0,0)$ and $P_4 = (\sigma_4, w_4)$ with $\sigma_4 = \frac{\mathrm{r}\sqrt{d}}{d+l}$, $w_4 = \frac{l\mathrm{r}}{d+l}$, both being solutions of

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0.$$

The positions of P_4 with respect to the sonic line $\sigma + w = 1$ is given by

$$\sigma_4 + w_4 < 1 \text{ iff } \mathrm{r} < \mathrm{r}_*(d,l) = \frac{d+l}{\sqrt{d}+l}.$$

Observe that

$$\mathrm{r}_*(d,l) \leqslant \mathrm{r}^*(d,l),$$

with the equality if and only if $l = d$, the latter case corresponds to a degenerate triple point configuration $P_2 = P_3 = P_4$ and will be excluded from the analysis below.

We set

$$\mathrm{r}^{**}(d,l) = \begin{cases} \mathrm{r}_*(d,l) & \text{if } l < d \\ \mathrm{r}^*(d,l) & \text{if } l > d, \end{cases}$$

and limit ourselves to the case

$$\begin{array}{c} 1 < \mathrm{r} < \mathrm{r}_*(d,l) \quad \text{for } \ 0 < l < d, \\ \mathrm{r}_*(d,l) < \mathrm{r} < \mathrm{r}^*(d,l) \quad \text{for } \ l > d. \end{array} \tag{28}$$

Note that

(a) (compatibility between the eulerian regime and the Navier Stokes equation):

$$\mathrm{r}^{**}(3,l) > \frac{l+2}{l+1} \ \ (\text{i.e. } \varepsilon_{ns}\big|_{d=3,\mathrm{r}=\mathrm{r}^{**}} > 0) \quad \Leftrightarrow \quad l > \sqrt{3}. \tag{29}$$

(b) (compatibility between the eulerian regime and the NLS equation):

$$\mathrm{r}^{**}(d,l) > 2 \ \ (\text{i.e. } \varepsilon_s\big|_{\mathrm{r}=\mathrm{r}^{**}} > 0) \ \Leftrightarrow \quad l < d - 2\sqrt{d}. \tag{30}$$

Thus $\varepsilon_s > 0$ requires $d \geqslant 5$, and $p > \frac{2}{d-2\sqrt{d}} > \frac{2}{d-2}$.

One can check easily the following properties.

(i) Near the origin the system (21), (22) has a unique spherically symmetric C^∞ solution that in terms of σ, w corresponds to the unique (up to the translations) solution of (24) verifying

$$\sigma(s) \to +\infty, \quad w(s) \to w_e = \frac{l(\mathrm{r}-1)}{d}, \quad \text{as } s \to -\infty.$$

This solution reaches the point P_2 in finite time $s_2 = \ln r_2$.

(ii) There exists a one parameter family of solutions that are attracted to P_0 as $s \to +\infty$ and arrive at P_2 at time s_2. These solutions correspond to spherically symmetric solutions to (21) that are C^∞ on the interval $(r_2, +\infty)$ and have the following asymptotic behavior as $r \to +\infty$:

$$R(r) \sim \frac{1}{r^{\frac{\mathrm{r}-1}{p}}}, \quad \Phi(r) \sim \frac{1}{r^{\mathrm{r}-2}}.$$

(iii) Gluing the solution of (i) to any solution of (ii) gives a global spherically symmetric solution to (21), (22) which is C^∞ away from $r = r_2$ and at $r = r_2$ generically, has a finite regularity C^K determined by the eigenvalues $\lambda_\mp$ of the corresponding Jacobian matrix at P_2, that under the assumption (28) satisfy $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ (see Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022b) for the details).

It turns out that this limited regularity is not enough for the analysis developed in Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a,c). Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022b) performed a careful study of the flow near the point P_2 in the regime

$$0 < \mathrm{r}^{**}(d,l) - \mathrm{r} \ll 1,$$

that corresponds to $0 < -\lambda_+ \ll 1$, $-\lambda_- \sim 1$ and managed to exhibit a large set of parameters (d,l) for which there exists a sequence $\mathrm{r}_n \to \mathrm{r}^{**}(d,l)$ such that the C^∞ spherically symmetric solution to (21), (22) coming from the origin extends in a C^∞ way to the interval $[r_2, \infty)$. Below we summarize the results of Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022b) that will be needed to treat the Navier-Stokes and nonlinear Schrödinger equations.

Theorem 3.1 (Existence and properties of C^∞ solutions to (21), Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel, 2022b). *There exists a set $\mathscr{P} \subset [2, +\infty[\times (\mathbb{R}_+^* \setminus \{d\})$ such that the following holds. For any $(d,l) \in \mathscr{P}$ there exists a sequence $1 < \mathrm{r}_n < \mathrm{r}^{**}(d,l)$ with $\lim_{n\to\infty} \mathrm{r}_n = \mathrm{r}^{**}(d,l)$ such that (21), (22) with $\mathrm{r} = \mathrm{r}_n$ admit a global C^∞ spherically symmetric solution $(R_P(y), \Phi_P(y))$, $R_P > 0$, with the following asymptotics as $|y| \to \infty$,*

$$R_P(y) = \frac{c_R}{|y|^{\frac{\mathrm{r}-1}{p}}}\left(1 + O\left(\frac{1}{|y|^{\mathrm{r}}}\right)\right), \quad \Phi_P(y) = \frac{c_\Phi}{|y|^{\mathrm{r}-2}}\left(1 + O\left(\frac{1}{|y|^{\mathrm{r}}}\right)\right), \quad c_R > 0, \tag{31}$$

that can be differentiated any number of times.
Furthermore, there exists $c = c(d,l,\mathrm{r}) > 0$ such that

1. (global repulsivity)

$$\begin{array}{l} 1 - w - w' \geqslant c \\ (1 - w - w')^2 - (\sigma + \sigma')^2 \geqslant c \end{array} \qquad \forall\, s \in \mathbb{R}. \tag{32}$$

2. (improved repulsivity inside the light cone)

$$-w' - \frac{(1-w)\sigma'}{\sigma} \geqslant c, \quad \forall s \leqslant s_2 \text{ (i.e. } |y| \leqslant r_2). \tag{33}$$

The set $\mathscr{P}$ contains in particular,

- ▷ *the pairs $(3,l)$ for all $l > \sqrt{3}$, $l \neq 3$, except a (possibly empty) sequence $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ whose accumulation points can be only at $\{3,+\infty\}$;*
- ▷ *the pairs*[7] $(5,\frac{1}{2}), (6,1), (8,2), (9,2)$.

Remarks.

1. Returning to the Euler equation (3) one obtains the existence of a family of spherically symmetric self-similar solutions of the form (6) that are C^∞ smooth away from the concentration point $(T,0)$ and have the following asymptotics as $\frac{|x|}{(T-t)^{\frac{1}{\mathrm{r}}}} \to \infty$,

$$\rho(t,x) \sim \frac{c_R^2}{2^{\frac{1}{p}}|x|^{\frac{2(\mathrm{r}-1)}{\gamma-1}}}, \quad v(t,x) \sim (2-\mathrm{r})c_\Phi \frac{x}{|x|^{\mathrm{r}}}. \tag{34}$$

   Because of this slow decay at infinity these solutions do not have finite energy.

2. As we will see in Subsection 5.2, the properties (32), (33) ensure the coercivity of the corresponding linearized operator which is fondamental for the analysis below.

4. Main results

We are now in position to state the blow up results for the Navier Stokes equation (1) and the NLS equation (9) proved in Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a,c).

[7] The proof of the existence part of Theorem 3.1 requires the non degeneracy of some explicite series $S_\infty(d,l)$, that for the pairs $(5,\frac{1}{2}), (6,1), (8,2), (9,2)$ was checked numerically, see Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022b). There is nothing specific in this choice of parameters. They are merely convenient examples with $p(l) \in \mathbb{N}$ for which the conditions $S_\infty(d,l) \neq 0$ and (32), (33) meet the requirement $l < d - 2\sqrt{d}$ (i. e. $\varepsilon_s|_{\mathrm{r}=\mathrm{r}_*(d,l)} > 0$, see (30)) that will be used in the case of the nonlinear Schrödinger equation.

Theorem 4.1 (Implosion for the 3d compressible Navier-Stokes equation, Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel, 2022c). *Let $d = 3$, $\mu + \mu' \geqslant 0$, and $l = \frac{2}{\gamma - 1}$. Assume that $l > \sqrt{3}$, $l \neq 3$ and l avoids the exceptional sequence $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of Theorem 3.1. Then for any n sufficiently large there exists a finite co-dimensional manifold of smooth spherically symmetric initial data $(\rho_0, v_0) \in H^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^3)$ such that the corresponding solution (ρ, v) to (1) blows up in finite time $0 < T < +\infty$ at $x = 0$, and as $t \to T$, one has*

$$\rho(t,\cdot) = 2^{-\frac{1}{p}} \mu_n^{l(\mathrm{r}_n - 1)}(t)\big(R_P^2(\mu_n(t)\cdot) + o_{L^\infty}(1)\big),$$
$$v(t,\cdot) = \mu_n^{\mathrm{r}_n - 1}(t)\big(\nabla\Phi_P(\mu_n(t)\cdot) + o_{L^\infty}(1)\big),$$

where

$$\mu_n(t) = \left(\frac{2}{\mathrm{r}_n(T-t)}\right)^{\frac{1}{\mathrm{r}_n}},$$

and r_n, R_P, Φ_P are given by Theorem 3.1. In particular,

$$\|v(t)\|_{L^\infty} = \frac{c_v(1+o(1))}{(T-t)^{\frac{\mathrm{r}_n - 1}{\mathrm{r}_n}}}, \quad \|\rho(t)\|_{L^\infty} = \frac{c_\rho(1+o(1))}{(T-t)^{\frac{l(\mathrm{r}_n-1)}{\mathrm{r}_n}}}, \quad \text{as } t \to T,$$

for some positive constants c_v, c_ρ.

In the case of the nonlinear Schrödinger equation one has:

Theorem 4.2 (Finite time blow up for the energy supercritical defocusing NLS, Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel, 2022a). *Let $l = \frac{2}{p}$ and assume that*

$$(d, l) \in \{(5, \frac{1}{2}), (6,1), (8,2), (9,2)\}.$$

Then for any n sufficiently large there exists a finite co-dimensional manifold of smooth spherically symmetric initial data $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R}^d)$ such that the corresponding solution u to (9) blows up in finite time $0 < T < +\infty$ at $x = 0$ with

$$\|u(t)\|_{L^\infty} = \frac{c_u(1+o(1))}{(T-t)^{\frac{\mathrm{r}_n - 1}{p\mathrm{r}_n}}}, \quad \text{as } t \to T,$$

where r_n are as in Theorem 3.1. Furthermore, the following properties hold:

(*i*) *u does not vanish and setting $u(t,x) = e^{i\varphi(t,x)}\varrho(t,x)$, $\varrho > 0$, one has*

$$\varrho(t) = \lambda_n^{\frac{\mathrm{r}_n - 1}{p}}(t)\big(R_P(\lambda_n(t)\cdot) + o_{L^\infty}(1)\big), \quad \varphi(t) = \lambda_n^{\mathrm{r}_n - 2}(t)\big(\Phi_P(\lambda_n(t)\cdot) + o_{L^\infty}(1)\big),$$
as $t \to T$, with $\lambda_n(t) = \frac{1}{(\mathrm{r}_n(T-t))^{\frac{1}{\mathrm{r}_n}}}$;

(*ii*) *there exists $1 < s_n < s_c$ such that*

$$\lim_{t\to T} \|u(t)\|_{H^{s_n}} = +\infty.$$

Remarks.

1. The results of Theorem 4.1 hold also for the Euler equation (3) in the range $d = 3$, $0 < l < \sqrt{3}$ and $d = 2$, $l > 0$, see Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022c).

2. The proof of Theorems 4.1, 4.2 gives a much more precise description of the constructed solutions. In particular, it shows that as $t \to T$, $\rho(t,x)$, $v(t,x)$, $u(t,x)$ converge in a suitable sense to some limiting profiles $\bar{\rho}, \bar{v}, \bar{u}$ that belong to $H^\infty(|x| \geqslant R)$, $\forall\, R > 0$, and have the following behavior as $|x| \to 0$:

$$\bar{\rho}(x) = \frac{\rho^*}{|x|^{\frac{2(\mathrm{r}_n-1)}{p}}}(1+o(1)),$$
$$\bar{v}(x) = v^* \frac{x}{|x|^{\mathrm{r}_n}}(1+o(1)),$$
$$\bar{u}(x) = u^* \frac{e^{i\frac{\varphi^*}{|x|^{\mathrm{r}_n-2}}}}{|x|^{\frac{\mathrm{r}_n-1}{p}}}(1+o(1)),$$

   for some constants $v^*, \varphi^* \in \mathbb{R}$, $\rho^* > 0$, $u^* \neq 0$.

3. The growth of the subcritical Sobolev norms in Theorem 4.2 (ii) seems to be a general feature of the energy supercritical defocusing blow up, see the recent work of Bulut (2020), in a contrast to the focusing energy supercritical blow up regime exhibited in Merle, Raphaël, and Rodnianski (2015) where all subcritical Sobolev norms remain bounded.

5. Outline of the proof of Theorems 4.1 and 4.2

In this section we present the main lines of the proofs of Theorems 4.1 and 4.2. We first explain the general strategy which is the same in both cases and then give some related details.

5.1. General strategy

One starts by rewriting the Navier-Stokes and nonlinear Schrödinger equations in the self-similar variables ((10), (12), (13) for the Navier -Stokes equation and (15), (12), (13) for the NLS) which leads to the system

$$\begin{cases} \partial_\tau R + (\frac{\mathrm{r}-1}{p} + \Lambda)R + 2\nabla\Phi\cdot\nabla R + R\Delta\Phi = 0 \\ \partial_\tau \Phi + (\mathrm{r}-2+\Lambda)\Phi + |\nabla\Phi|^2 + R^{2p} = b^2(\tau)F(R,\Phi), \end{cases} \tag{35}$$

where

$$b(\tau) = e^{-\varepsilon\tau} \quad \text{with} \quad \varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{2}((l+1)\mathrm{r} - l - 2) > 0 & \text{for the Navier} - \text{Stokes equation} \\ \mathrm{r} - 2 > 0 & \text{for the NLS equation} \end{cases} \tag{36}$$

and

$$F(R,\Phi) = \begin{cases} \mathscr{F}(R,\Phi) & \text{for the Navier} - \text{Stokes equation} \\ \frac{\Delta R}{R} & \text{for the NLS equation.} \end{cases} \tag{37}$$

In terms of the renormalized flow (35), Theorems 4.1, 4.2 amount to exhibiting a finite co-dimensional manifold of smooth spherically symmetric well localized initial data such that the corresponding solution to (35) is global in self-similar time $\tau \in [\tau_0, +\infty)$, close in a suitable topology to the stationary eulerian solution (R_P, Φ_P) and has a non-vanishing density.

The first step of the proof consists in establishing a finite co-dimensional local eulerian linear stability of profiles (R_P, Φ_P). This will be done by means of general semi-group methods. The arguments rely heavily on the C^∞ smoothness of the profiles (R_P, Φ_P) and on the repulsivity property (33), and produce a local exponential decay of the eulerian linearized flow modulo a finite number of unstable directions, see Subsection 5.2. These unstable directions are responsible for the fact that the results of Theorems 4.1, 4.2 hold for a finite co-dimensional manifold of initial data. The second (and final) step of the analysis consists in proving global nonlinear stability. The proof is based on a bootstrap argument involving carefully chosen weighted Sobolev norms that are controlled by combining the local eulerian linear decay established on the previous step with global energy type estimates for the full flow (35). In this part of the analysis there are some differences in the treatment of the Navier-Stokes equation and the NLS equation, in particular in the choice of the norms. In Subsection 5.3 we will briefly describe the main bootstrap assumptions used in the proof of Theorem 4.2 and will indicate the arguments allowing one to improve them. We refer to Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022c) for the corresponding analysis for the Navier-Stokes equation.

5.2. Linear analysis

In this subsection we consider the linearization of the Euler equation (20) around (R_P, Φ_P) and introduce the functional framework allowing to deduce the local exponential decay[(8)] of the linearized flow from the classical semi-group theory.

[(8)] modulo a finite number of directions

5.2.1. *Linearized equations.* — Linearizing the Euler equation (20) around the stationary profile (R_P, Φ_P) one gets the following system for $q = R - R_P$, $\psi = \Phi - \Phi_P$:

$$\begin{cases} \partial_\tau q = -(\ell + \frac{\mathrm{r}-1}{p} + \Delta\Phi_P)q - 2\nabla R_P \cdot \nabla\psi - R_P\Delta\psi \\ \partial_\tau \psi = -(\ell + \mathrm{r} - 2)\psi - 2pR_P^{2p-1}q \end{cases} \tag{38}$$

where

$$\ell = \Lambda + 2\nabla\Phi_P \cdot \nabla = H\Lambda, \quad H = 1 + \frac{2}{r}\Phi_P' = 1 - w. \tag{39}$$

Some preliminary indications of the decay properties of the linearized flow (38) can be already obtained from classical energy identities. Namely, denoting

$$\mathscr{E}_k(q,\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(2pR_P^{2p}q_k^2 + R_P^2|\nabla\psi_k|^2\right) dy, \quad q_k = \Delta^k q,\ \psi_k = \Delta^k\psi, \tag{40}$$

and computing $\frac{d}{d\tau}\mathscr{E}_k$, one gets

$$\frac{d}{d\tau}\mathscr{E}_k = -4k\mathscr{Q}_k(q,\psi) + \mathrm{lot}, \tag{41}$$

where the quadratic form $\mathscr{Q}_k(q,\psi)$ can be written as the sum:

$$\mathscr{Q}_k(q,\psi) = \mathscr{Q}_k^{(0)}(q,\psi) + \mathscr{Q}_k^{(1)}(q,\psi)$$

with

$$\mathscr{Q}_k^{(0)}(q,\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} dy \left[(H + r\partial_r H)(2pR_P^{2p}q_k^2 + R_P^2(\partial_r\psi_k)^2) + 4p^2R_P^{2p}\partial_r R_P q_k \partial_r\psi_k\right],$$

and

$$|\mathscr{Q}_k^{(1)}(q,\psi)| \lesssim \frac{1}{k}\mathscr{E}_k(q,\psi).$$

The repulsivity conditions (32) ensure that $H + r\partial_r H = 1 - w - w' > c > 0$ and

$$(H + r\partial_r H)^2 - 2p^3R_P^{2p-2}(\partial_r R_P)^2 = (1 - w - w')^2 - (\sigma + \sigma')^2 \geqslant c,$$

which implies

$$\mathscr{Q}_k^{(0)}(q,\psi) \geqslant c\mathscr{E}_k.$$

Therefore one obtains

$$\frac{d}{d\tau}\mathscr{E}_k \leqslant -2ck\mathscr{E}_k + \mathrm{lot}, \quad \forall\ k \geqslant k^*, \tag{42}$$

provided k^* is large enough. However the need to take care of the lower order terms complicates significantly the analysis.

5.2.2. *Local decay slightly beyond the light cone.* — The proof of local exponential decay of the linear flow (38) modulo a finite number of unstable directions, will be achieved by localizing (38) on a zone going slightly beyond the light cone $|y| = r_2$, and by showing that in some properly chosen weighted Sobolev spaces the corresponding linear operator is a finite rank perturbation of a maximally dissipative operator. One can then propagate this decay to any compact set by using the finite speed of propagation. The latter will be done directly on the nonlinear level.

We start by rewriting (38) as a wave equation for $\phi = R_P\psi$:

$$(D_\tau^2 - 2pQ\Delta)\phi + A_0 D_\tau \phi + A_1\phi = 0, \tag{43}$$

with

$$\begin{aligned} &D_\tau = \partial_\tau + \ell, \quad Q = R_P^{2p}, \\ &A_0 = \mathrm{r} - 2 + 2(p+1)H_1, \quad H_1 = -\tfrac{lR_P}{R_P}, \\ &A_1 = \ell H_1 + (2p+1)H_1(r - 2 + H_1) + 2pR^{2p-1}\Delta R_p. \end{aligned} \tag{44}$$

Introducing the new variable

$$\eta = \partial_\tau\phi + a\ell\phi,$$

with a small parameter a:

$$0 < a \ll 1,$$

one can next transform (44) to the following system for (ϕ, η):

$$\partial_\tau X = \mathscr{M} X, \quad X = \begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{45}$$

where

$$\begin{aligned} &\mathscr{M} = \begin{pmatrix} -a\ell & 1 \\ D_a\Delta - (1-a)A_2\ell - A_1 & -(2-a)\ell - A_0 \end{pmatrix}, \\ &D_a = 2pQ - (1-a)^2 r^2 H^2 = r^2(\sigma^2 - (1-a)^2(w-1)^2), \\ &A_2 = A_0 - (1-a)(d-2)H + (1-a)\Lambda H. \end{aligned}$$

The function $D_0(r) = D_a(r)\big|_{a=0} = -r^2\Delta_0$ vanishes on the the light cone $r = r_2$ and is strictly positive inside of it. It is also easy to check that $\Delta_0'(s_2) > 0$. By the implicit function theorem one deduces that for all a small enough there exists a locally unique $r(a)$, depending smoothly on a, such that $r(0) = r_2$ and

$$D_a(r(a)) = 0, \quad D_a(r) > 0 \text{ on } 0 \leqslant r < r(a).$$

Furthermore, since $r'(0) = \frac{2\sigma_2^2}{\partial_r\Delta_0|_{r=r_2}} > 0$, one has

$$r(a) > r_2, \ \ \forall\ 0 < a \ll 1.$$

We next commute the flow (45) with the derivatives. Denoting

$$\phi_k = \Delta^k \phi, \;\; \eta_k = \Delta^k \eta, \;\; X_k = \begin{pmatrix} \phi_k \\ \eta_k \end{pmatrix},$$

one has

$$\partial_\tau X_k = \mathscr{M}_k X_k + \begin{pmatrix} \tilde{\mathscr{M}}_k^1 X \\ \tilde{\mathscr{M}}_k^2 X \end{pmatrix}, \tag{46}$$

where

$$\mathscr{M}_k = \begin{pmatrix} -a\ell - 2ka(H+\Lambda H) & 1 \\ \mathscr{L}_k & -(2-a)\ell - 2k(2-a)(H+\Lambda H) - A_0 \end{pmatrix}, \tag{47}$$
$$\mathscr{L}_k = D_a\Delta + (\tfrac{2k}{r}\partial_r D_a - (1-a)HA_2)\Lambda,$$

and where the $\tilde{\mathscr{M}}_k^j X$'s satisfy the following pointwise bounds[9]

$$|\nabla \tilde{\mathscr{M}}_k^1 X| \lesssim_k \sum_{|\alpha|\leqslant 2k} |\nabla^\alpha \phi|, \quad |\tilde{\mathscr{M}}_k^2 X| \lesssim_k \sum_{|\alpha|\leqslant 2k} |\nabla^\alpha \phi| + \sum_{|\alpha|\leqslant 2k-1} |\nabla^\alpha \eta|. \tag{48}$$

The operator $\mathscr{L}_k$ can be written as

$$\mathscr{L}_k = \frac{1}{g_k r^{d-1}} \partial_r D_a g_k r^{d-1} \partial_r,$$

with g_k given by

$$g_k(r) = e^{\int_0^r \mathscr{G}_k(r')dr'}, \quad \mathscr{G}_k = (2k-1)\frac{\partial_r D_a}{D_a} - (1-a)\frac{rHA_2}{D_a}. \tag{49}$$

Clearly, $g_k \in C^\infty_{rad}(|y| < r_a)$ and $g_k > 0$. Furthermore, for $0 \leqslant a \leqslant a^*$ small enough, there holds

$$\mathscr{G}_k(r) = \frac{\kappa(k,a) + O(r - r(a))}{r - r(a)}, \quad \text{as } r \to r(a),$$

with

$$\kappa(k,a) = 2k - 1 + \kappa_0 + O(a), \quad \kappa_0 = \frac{HA_2|_{a=0, r=r_2}}{\Delta_0'(s_2)}, \quad \text{as } a \to 0,$$

which shows that as $r \to r(a)$,

$$g_k(r) = c_{k,a}(r(a) - r)^{\kappa(k,a)}(1 + O(r - r(a))) \quad \text{with } \kappa(k,a) > 0, \quad c_{k,a} > 0, \tag{50}$$

for all $k \geqslant k_1$ sufficiently large[10] and $0 \leqslant a \leqslant a^*$ sufficiently small.

[9] We use ∇^α with $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ to denote the derivative $\partial_{y_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{y_d}^{\alpha_d}$.
[10] As $r \to r^{**}(d,l)$, $\kappa_0 = O(\frac{1}{|\lambda_+|})$ which means that one needs $k_1 \gtrsim \frac{1}{|\lambda_+|}$.

We are now in position to introduce the functional framework that turns the operator $\mathscr{M}$ into a finite rank perturbation of a maximally dissipative operator. Let $k \geqslant k_1$ large enough so that (50) holds. Fix a positive cut-off function $\chi \in C^\infty_{rad}(\mathbb{R}^d)$ equal to 1 in a neighborhood of $y = 0$ and supported strictly inside the light cone $|y| < r_2$. Let

$$\mathscr{D}_0 = C^\infty_{rad}(B_a, \mathbb{C}^2),$$

where $B_a = \{|y| \leqslant r(a)\}$. We denote by $\mathbb{H}_{2k}$ the completion of $\mathscr{D}_0$ for the scalar product[(11)]

$$\left\langle X, \tilde{X} \right\rangle = \int dy g_k(y) \left[D_a \nabla \phi_k \cdot \nabla \overline{\tilde{\phi}_k} + \chi \phi \overline{\tilde{\phi}} + \eta_k \overline{\tilde{\eta}}_k + \chi \eta \overline{\tilde{\eta}} \right].$$

Consider the operator $\mathscr{M}$ on $\mathbb{H}_{2k}$ with domain

$$D(\mathscr{M}) = \{X \in \mathbb{H}_{2k},\ \mathscr{M} X \in \mathbb{H}_{2k}\}.$$

The repulsivity condition (33) ensure the following dissipativity property which is at the heart of the proof of Theorems 4.1 and 4.2.

Proposition 5.1 (Maximal dissipativity, Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel, 2022a)**.** *There exists $c^* > 0$, $k_* \gg 1$, $0 < a^* \ll 1$ such that for all $k \geqslant k_*$ and all $0 < a \leqslant a^*$ there exist $N = N(a,k)$ directions $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant N} \subset \mathbb{H}_{2k}$ such that the operator $\mathscr{M}$ admits the representation*

$$\mathscr{M} = \tilde{\mathscr{M}} + \mathscr{K},$$

where

$$\mathscr{K} = \sum_{i=1}^N \langle \cdot, X_i \rangle X_i$$

and $\tilde{\mathscr{M}}$ is dissipative with the bound:

$$\mathrm{Re} \left\langle \tilde{\mathscr{M}} X, X \right\rangle \leqslant -c^* k a \langle X, X \rangle, \quad \forall\ X \in D(\mathscr{M}).$$

and maximal:

$$\forall \lambda > 0, \quad \mathrm{Im}(\tilde{\mathscr{M}} - \lambda) = \mathbb{H}_{2k}.$$

We will briefly outline the arguments giving the dissipativity, referring to Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a) for details and for the proof of the maximality. Computing $\mathrm{Re} \langle \mathscr{M} X, X \rangle$ with $X = \binom{\phi}{\eta}$, and taking into account (46), (47), one gets

$$\mathrm{Re} \langle \mathscr{M} X, X \rangle \leqslant (I) + (II) + (III), \tag{51}$$

[(11)] The function g_k is extended by zero outside the ball B_a.

where

$$(I) = -(2-a)\int dy A_3 g_k |\eta_k|^2, \tag{52}$$

$$(II) = -a\int dy A_4 g_k D_a |\nabla \phi_k|^2, \tag{53}$$

$$A_3 = 2k(H+\Lambda H) - \tfrac{\Lambda(Hg_k)}{2g_k} - \tfrac{d}{2}H + \tfrac{A_0}{2-a}, \tag{54}$$

$$A_4 = 2k(H+\Lambda H) - \tfrac{\Lambda(HD_a g_k)}{2D_a g_k} + \Lambda H - (\tfrac{d}{2}-1)H, \tag{55}$$

and where the remainder (III) admits the bound:

$$|(III)| \leqslant \varepsilon \langle X, X\rangle + C_{\varepsilon,k}\left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 2k-1}\int dy g_k |\nabla^\alpha \eta|^2 + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 2k}\int dy g_k |\nabla^\alpha \phi|^2\right], \tag{56}$$

for any $\varepsilon > 0$.

It follows from the definition of the measure g_k (see (49)) that

$$A_3 = \frac{2k}{D_a}\left\{(H+\Lambda H)D_0 - \frac{1}{2}H\Lambda D_0 + O(\frac{1}{k}) + O(a)\right\},$$

$$A_4 = \frac{2k}{D_a}\left\{(H+\Lambda H)D_0 - \frac{1}{2}H\Lambda D_0 + O(\frac{1}{k}) + O(a)\right\}.$$

Computing the expression $(H+\Lambda H)D_0 - \frac{1}{2}H\Lambda D_0$ one finds

$$(H+\Lambda H)D_0 - \frac{1}{2}H\Lambda D_0 = -r^2\sigma^2\Big[w' + (1-w)\frac{\sigma'}{\sigma}\Big],$$

which in virtue of (33) leads to the bound:

$$A_3, A_4 \geqslant \frac{4kc}{r(a)-r}, \quad \forall 0 \leqslant r < r(a),$$

for all a sufficiently small and all k sufficiently large. Returning to (51), one gets

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\langle \mathscr{M} X, X\rangle \leqslant -2cak\left[\int dy g_k D_a \frac{|\nabla\phi_k|^2}{r(a)-|y|} + \int dy g_k \frac{|\eta_k|^2}{r(a)-|y|}\right]\\ +C_k\left[\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 2k-1}\int dy g_k|\nabla^\alpha\eta|^2 + \sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 2k}\int dy g_k|\nabla^\alpha\phi|^2\right].\end{aligned} \tag{57}$$

Standard compactness arguments combined with the Hardy inequalities ensure then the existence of a finite number of directions $(Y_i)_{1\leqslant i\leqslant N(k,a)}$, $Y_i \in \mathbb{H}_{2k}$, such that

$$\operatorname{Re}\langle \mathscr{M} X, X\rangle \leqslant -cak\langle X, X\rangle + C_{k,a}\sum_{i=1}^{N}|\langle X, Y_i\rangle|^2$$

(see Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel, 2022a).

Therefore, setting

$$\mathscr{K} = \sum_{i=1}^{N} \langle \cdot, X_i \rangle X_i,$$

with $X_i = \sqrt{C_{k,a}} Y_i$, yields

$$\operatorname{Re} \langle (\mathscr{M} - \mathscr{K}) X, X \rangle \leqslant -cak \langle X, X \rangle .$$

As a classical consequence of Proposition 5.1 one obtains the following result, see Engel and Nagel (2000) and Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a) for a proof.

Proposition 5.2 (Finite co-dimensional exponential decay). *Let $k \geqslant k_*$, $0 < a \leqslant a^*$ with k_*, a^* given by Proposition 5.1. Let $\sigma(\mathscr{M})$ denote the spectrum of $\mathscr{M}$. Then the following holds.*

(*i*) *The set $\Lambda(\mathscr{M}) = \sigma(\mathscr{M}) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda \geqslant 0\}$ is finite and each eigenvalue $\lambda \in \Lambda(\mathscr{M})$ has a finite multiplicity. Denoting P the spectral projection of $\mathscr{M}$ corresponding to the set $\Lambda(\mathscr{M})$, one has*

$$\mathbb{H}_{2k} = V \oplus U,$$

with $V = \operatorname{Im} P$, $U = \operatorname{Ker} P$ preserved by the semi-group $e^{\tau \mathscr{M}}$.

(*ii*) (*Exponential decay on U*). *There exist C, $\delta_0 = \delta_0(k,a) > 0$ such that*

$$\forall\ X \in U, \quad \|e^{\tau \mathscr{M}} X\|_{\mathbb{H}_{2k}} \leqslant C e^{-\delta_0 \tau} \|X\|_{\mathbb{H}_{2k}},\ \forall\ \tau \geqslant 0. \tag{58}$$

5.3. Bootstrap: the NLS case

In this subsection we briefly sketch the bootstrap schema leading to the proof of Theorem 4.2. Recall that to prove Theorem 4.2 one has to exhibit a finite co-dimensional manifold of C^∞ well localized initial data such that the corresponding solution to (35) is global in self-similar time $\tau \in [\tau_0, +\infty)$, close in a suitable topology to the stationary eulerian solution (R_P, Φ_P) and has a non-vanishing density. This will be achieved by choosing τ_0 sufficiently large. Going back to (9) then yields solutions that blow up at $T = \frac{e^{-\mathrm{r}\tau_0}}{\mathrm{r}}$.

5.3.1. *Damping of the blow up profile outside of the singularity.* — Because of the slow decay at infinity (see (31)) the profile (R_P, Φ_P) has infinite energy and thus to produce finite energy solutions to (9) one has to localize it in the region $|y| \gg 1$. This can be

done by choosing a C^∞ smooth radial strictly positive cut-off function $\zeta_D(x)$ that has a sufficiently rapide decay at infinity and is equal to 1 in a neighborhood of 0, say

$$\zeta_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } |x| \leqslant 5 \\ < x >^{-n_p + \frac{\mathrm{r}-1}{p}} & \text{for } |x| \geqslant 10, \end{cases} \quad \zeta_D > 0,$$

with some large enough $n_P = n_P(d) \gg 1$, and setting

$$R_D(\tau, y) = \zeta_D(x) R_P(y), \quad x = \lambda^{-1}(\tau) y,$$

the phase Φ_P being kept unchanged. In the original variables, this leads to an approximate solution $u_D(t,x)$ to (9) that decays at infinity as $< x >^{-n_P}$ and that stabilises in the limit $|y| \to \infty$, $|x| \to 0$:

$$\begin{aligned} u_D(t,x) &= \lambda^{\frac{\mathrm{r}-1}{p}}(\tau) e^{i\lambda^{\mathrm{r}-2}(\tau)\Phi_P(y)} R_D(\tau, y) \\ &= \frac{c_R}{|x|^{\frac{\mathrm{r}-1}{p}}} e^{i\frac{c_\Phi}{|x|^{\mathrm{r}-2}}(1+O(|y|^{-\mathrm{r}}))} \left(1 + O(|y|^{-\mathrm{r}})\right). \end{aligned}$$

As a consequence, the additional source terms induced in (35) by this localization are exponentially decaying as $\tau \to \infty$ and therefore can be safely controlled.

We will look for solutions to (35) as perturbations of the profile (R_D, Φ_P) writing

$$R = R_D + q, \quad \Phi = \Phi_P + \psi, \quad \phi = R_P \psi.$$

5.3.2. *Initial data.* — Here we describe the set of initial data for (q, ψ) that we are going to consider. The statements of Theorem 4.2 will hold on a finite co-dimensional subset of such data.

Let a^*, k_* be as in Proposition 5.1 and k^* given by (42). Let $0 < a < a^*$ and $k_0 \geqslant k_*$, $k_{max} \geqslant k^*$ such that

$$\frac{d}{2} \ll k_0 \ll k_{max}, \quad n_P \ll k_{max}.$$

($2k_{max} + 1$ will be the maximal Sobolev regularity required for the solutions). By Proposition 5.2, there exist[(12)] $\delta_0 > 0$, $C > 0$ such that

$$\forall\ X \in U, \quad \|e^{\tau \mathscr{M}} X\|_{\mathrm{H}_{2k_0}} \leqslant C e^{-\delta_0 \tau} \|X\|_{\mathrm{H}_{2k_0}},\ \forall\ \tau \geqslant 0. \tag{59}$$

[(12)] One can always assume δ_0 to be sufficiently small and in particular to satisfy $\delta_0 < 2(\mathrm{r}-2)$.

The set of admissible initial data $(q(\tau_0), \psi(\tau_0))$ will be defined by the following conditions.

(ii) *Bound on local low Sobolev norms*:

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant 2k_0+1}\int_{|y|\leqslant 3\lambda_0} dy < y >^{2(|\alpha|-\nu_0-\delta_0)} \left(R_P^{2p}|\nabla^\alpha q(\tau_0)|^2 + |\nabla^\alpha \phi(\tau_0)|^2\right) \leqslant e^{-2\delta_0\tau_0}, \tag{60}$$

with $\lambda_0 = \lambda(\tau_0)$ and

$$\nu_0 = \frac{d}{2} - (\mathrm{r}-1)(1+\frac{1}{p}).$$

(i) *Bound on the unstable modes*:

$$\|PX(\tau_0)\|_{\mathbb{H}_{2k_0}} \leqslant e^{-\frac{5}{3}\delta_0\tau_0}, \tag{61}$$

where as before, $X(\tau) = \binom{\phi(\tau)}{\eta(\tau)}$, $\eta(\tau) = \partial_\tau\phi + a\ell\phi$.

(iii) *Interior pointwise assumptions*: for all $0 \leqslant k \leqslant 2k_{max}+1$,

$$\sum_{|\alpha|=k}\left\|\frac{< y >^k \nabla^\alpha q(\tau_0)}{R_D(\tau_0)}\right\|_{L^\infty(|y|\leqslant\lambda_0)} + \| < y >^{r-2+k} \nabla^\alpha\psi(\tau_0)\|_{L^\infty(|y|\leqslant\lambda_0)} \leqslant \lambda_0^{-c_0}, \tag{62}$$

for some constant $c_0 > 0$ small enough.

(iv) *Exterior pointwise bounds*: for all $0 \leqslant k \leqslant 2k_{max}+1$,

$$\left\|\frac{r^{k+1}\partial_r^k q(\tau_0)}{R_D(\tau_0)}\right\|_{L^\infty(|y|\geqslant\lambda_0)} + \|r^{k+1}\partial_r^k\psi(\tau_0)\|_{L^\infty(|y|\geqslant\lambda_0)} \leqslant \lambda_0^{-C_0}, \tag{63}$$

for some large enough constant C_0.

Without loss of generality one can also assume that[13]

$$u_0 \in H^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{64}$$

Remark. Note that the bounds (62), (63) imply that for τ_0 sufficiently large,

$$\left\|\frac{q(\tau_0)}{R_D(\tau_0)}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \ll 1, \tag{65}$$

so that in particular u_0 does not vanish.

[13] Explicitly, $u_0(x) = \lambda_0^{\frac{\mathrm{r}-1}{p}} e^{i\lambda_0^{\mathrm{r}-2}\Phi_0(\lambda_0 x)} R_0(\lambda_0 x)$ with $\Phi_0 = \Phi_P + \psi(\tau_0)$ and $R_0 = R_D(\tau_0) + q(\tau_0)$.

5.3.3. *Bootstrap assumptions and their improvements.* — For $u_0 \in H^\infty(\mathbb{R}^d)$, the standard local well-posedness theory for (9) guarantees the existence of a unique maximal solution[(14)] $u \in C([0,T'), H^\infty(\mathbb{R}^d))$ with the blow up criterion

$$T' < +\infty \implies \lim_{t \to T'} \|u(t)\|_{H^s} = \infty, \quad s > s_c.$$

The assumption (63) ensures that for any $\varepsilon > 0$,

$$< x >^{n_P - \frac{d}{2} + |\alpha| - \varepsilon} \nabla^\alpha u_0 \in L^2, \quad 0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2k_{max} + 1.$$

Propagating this decay to the solution one can show that there exists $0 < T'' \leqslant T'$ such that $|u(t,x)| > 0$ on $[0,T'') \times \mathbb{R}^d$, which allows one to introduce the hydrodynamical variables (q, ψ) on this interval.

Consider now the time interval $[\tau_0, \tau^*)$ such that the following bounds hold on $[\tau_0, \tau^*)$.

▷ *Control of the unstable modes*:

$$\|e^{-\tau \mathscr{N}} PX(\tau)\|_{\mathbb{H}_{2k_0}} \leqslant e^{-\frac{19}{15}\delta_0 \tau}, \tag{66}$$

where $\mathscr{N}$ denotes the nilpotent part of the restriction of $\mathscr{M}$ on V:

$$\mathscr{M}\big|_V = \mathscr{N} + \text{diag}.$$

▷ *Local decay of low Sobolev norms*: for some universal constant $C = C(k_0)$,

$$\|q\|_{H^{2k_0}(|y| \leqslant \hat{r})} + \|\psi\|_{H^{2k_0+1}(|y| \leqslant \hat{r})} \leqslant \hat{r}^C e^{-\frac{3}{4}\delta_0 \tau}, \quad \forall\, 1 \leqslant \hat{r} \leqslant \lambda(\tau). \tag{67}$$

▷ *Pointwise bounds*:

$$\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{4}{3}k_{max}} \|R_D^{-1} < y >^{n(|\alpha|)} \nabla^\alpha q\|_{L^\infty} \leqslant \beta, \tag{68}$$

and

$$\sum_{1 \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{4}{3}k_{max}} \Big[\| < y >^{r-2+n(|\alpha|)} \nabla^\alpha \psi\|_{L^\infty(|y| \leqslant \lambda)} + b^{-1} \| < y >^{n(|\alpha|)} \nabla^\alpha \psi\|_{L^\infty(|y| \geqslant \lambda)} \Big] \leqslant \beta \tag{69}$$

for some sufficiently small constant $0 < \beta \ll 1$, where

$$n(k) = \begin{cases} k & \text{if } k \leqslant \frac{8}{9}k_{max} \\ \frac{1}{2}k_{max} & \text{if } k > \frac{8}{9}k_{max}. \end{cases}$$

In particular,

$$\left\| \frac{q(\tau)}{R_D(\tau)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \beta.$$

(14) Recall that in our case $p \in \mathbb{N}$.

▷ *Assumptions on global weighted Sobolev norms*. One introduces the following homogeneous weighted Sobolev norms for $0 \leqslant m \leqslant 2k_{max}$:

$$\|q,\psi\|_m^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d} dy \chi_m [b^2 |\nabla\nabla^\alpha q|^2 + R_D^{2p} |\nabla^\alpha q|^2 + R_D^2 |\nabla\nabla^\alpha \psi|^2], \;\; b(\tau) = e^{-(\mathfrak{r}-2)\tau},$$

where the weights χ_m are defined as follows:

$$\chi_m(\tau,y) = \frac{< x >^{2\tilde{\sigma}(m)}}{< y >^{2\sigma(m)}}, \quad x = \lambda^{-1}(\tau) y,$$

$$\sigma(m) = \begin{cases} \nu_0 + \nu - m & \text{if } \; m \leqslant \frac{8}{9} k_{max} + 1 \\ \alpha(m - 2k_{max}) & \text{if } \; \frac{8}{9} k_{max} + 1 \leqslant m \leqslant 2k_{max}, \end{cases}$$

$$\tilde{\sigma}(m) = \begin{cases} n_P + \nu_0 - \frac{d}{2} + 1 + 2\nu & \text{if } \; m \leqslant \frac{4}{3} k_{max} + 1 \\ \tilde{\alpha}(2k_{max} - m) & \text{if } \; \frac{4}{3} k_{max} + 1 \leqslant m \leqslant 2k_{max}, \end{cases}$$

with a small constant $0 < \nu \ll 1$ to be adjusted along the proof and with the constants α, $\tilde{\alpha}$ fixed by requiring σ et $\tilde{\sigma}$ to be continuous functions of m. Note that $\sigma(2k_{max}) = \tilde{\sigma}(2k_{max}) = 0$ so that the highest Sobolev norm $\|q,\psi\|_{2k_{max}}$ is unweighted:

$$\|q,\psi\|_{2k_{max}}^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d} dy [b^2 |\nabla\nabla^\alpha q|^2 + R_D^{2p} |\nabla^\alpha q|^2 + R_D^2 |\nabla\nabla^\alpha \psi|^2].$$

The norms $\|q,\psi\|_m^2$ are required to satisfy on $[\tau_0, \tau^*)$ the following bound:

$$\|q,\psi\|_m^2 \leqslant \beta, \quad \forall \; 0 \leqslant m \leqslant 2k_{max}. \tag{70}$$

The assumptions on initial data ensure that for τ_0 sufficiently large ($\tau_0 \gg -\ln\beta$) the bounds (66), (67), (70), (68), (69) hold at least in a neighborhood of τ_0. The following proposition states that all the bootstrap bounds, except for the bound (66) controlling the unstable modes, can be improved on the interval $[\tau_0, \tau^*)$, which by standard Brouwer type arguments immediately implies Theorem 4.2 (see Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel, 2022a).

Proposition 5.3 (Bootstrap). *Assume that the bounds* (66), (67), (70), (68), (69) *hold on the interval* $[\tau_0, \tau^*)$ *with* β *small enough and* τ_0 *large enough. Then the bounds* (67), (70), (68), (69) *can be strictly improved on* $[\tau_0, \tau^*)$. *Consequently,* $\tau^* < +\infty$ *implies*

$$\|e^{-\tau^* \mathscr{N}} PX(\tau^*)\|_{\mathbb{H}_{2k_0}} = e^{-\frac{19}{15}\delta_0 \tau^*}.$$

We refer to Merle, Raphaël, Rodnianski, and Szeftel (2022a) for the detailed proof of Proposition 5.3 and limit ourselves here to indicating very briefly the general line of the arguments. The proof is based on systematic use of the energy identities for the full nonlinear Schrödinger energies that one combines with the linear local decay (59).

The global Sobolev norms $\|q,\psi\|_m$, $0 \leqslant m \leqslant 2k_{max}$, are controlled by the energies[(15)]

$$I_m = \int_{\mathbb{R}^d} dy \chi_m [b^2 |\nabla \partial^m q|^2 + 2p R_D^{2p-1} R |\partial^m q|^2 + R^2 |\nabla \partial^m \psi|^2], \quad \partial^m = (\partial_{y_1}^m, \dots, \partial_{y_d}^m), \tag{71}$$

for which one proves (under the bootstrap assumptions) the following differential inequalities

$$\frac{d}{d\tau} I_m \leqslant -2\varkappa(m) I_m + e^{-\varpi\tau}, \quad \forall\, 0 \leqslant m \leqslant 2k_{max} - 1, \tag{72}$$

with some constant $\varpi > 0$ independent of ν and $\varkappa(m)$ given by

$$\varkappa(m) = m + \sigma(m) - \nu_0 \geqslant \nu > 0,$$

and for the highest energy:

$$\frac{d}{d\tau} \tilde{I}_{2k_{max}} \leqslant -ck_{max} I_{2k_{max}} + e^{-c\tau_0}, \tag{73}$$

with $\tilde{I}_{2k_{max}} = I_{2k_{max}}(1 + o(1))$ as $\beta \to 0$. The proof of (72), (73) uses in a substantial way the following interpolation bound for $0 \leqslant m \leqslant 2k_{max} - 1$,

$$\sum_{|\alpha|=m} \int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{\chi_m}{< y >^\sigma} [b^2 |\nabla \nabla^\alpha q|^2 + R_D^{2p} |\nabla^\alpha q|^2 + R_D^2 |\nabla \nabla^\alpha \psi|^2] \lesssim e^{-c_\sigma \tau}, \quad \forall\, \sigma > 0,$$

that one deduces from (67), (70). The contribution of the quantum pressure in (35), which leads to a loss of derivatives if one works with the eulerian energies (40), is taken care of by b^2-terms in (71). The highest energy being unweighted, the loss of derivatives coming from the weights χ_m occurs only on the levels $m \leqslant 2k_{max} - 1$ and can be handled by (70) due to the fact that the weights $\sigma(m)$, $\tilde{\sigma}(m)$ are adjusted in such a way that $\alpha + \tilde{\alpha} \leqslant 1$ (for k_{max} large enough).

An improvement of the L^∞ bounds (68), (69) is obtained by combining (72) with the following inequalities that are direct consequences of Sobolev embeddings and of the radiality of q and ψ:

$$\sum_{0 \leqslant |\alpha| \leqslant \frac{4}{3} k_{max}} \| R_D^{-1} < y >^{n(|\alpha|)} \nabla^\alpha q \|_{L^\infty} \lesssim \lambda^\nu \sum_{m=0}^{2k_{max}-1} \|q,\psi\|_m,$$

(15) For even m one can replace ∂^m by $\Delta^{\frac{m}{2}}$.

and

$$\sum_{1\leqslant|\alpha|\leqslant\frac{4}{3}k_{max}}\Big[\|<y>^{r-2+n(|\alpha|)}\nabla^{\alpha}\psi\|_{L^{\infty}(|y|\leqslant\lambda)}+b^{-1}\|<y>^{n(|\alpha|)}\nabla^{\alpha}\psi\|_{L^{\infty}(|y|\geqslant\lambda)}\Big]\lesssim\lambda^{\nu}\sum_{m=0}^{2k_{max}-1}\|q,\psi\|_{m}.$$

To improve the bound (67) for low Sobolev norms one first uses the linear exponential decay (59) to deduce

$$\|q\|_{H^{2k_0}(|y|\leqslant\tilde{r}(a))}+\|\psi\|_{H^{2k_0+1}(|y|\leqslant\tilde{r}(a))}\lesssim e^{-\delta_0\tau},\tag{74}$$

with, say, $\tilde{r}(a)=\frac{r_2+r(a)}{2}$, and then transforms (74) into the following weighted decay estimates

$$\sum_{0\leqslant|\alpha|\leqslant2k_0}\int_{|y|\leqslant2\lambda}dy<y>^{2(|\alpha|-\nu_0-\delta_0)}\Big[R_P^{2p}|\nabla^{\alpha}q|^2+|\nabla\nabla^{\alpha}\phi|^2\Big]\lesssim e^{-\frac{8}{5}\delta_0\tau}.\tag{75}$$

The proof of (75) is based on an eulerian energy estimate with a properly chosen time dependent localisation of (q,Φ) and uses in an essential way the fact that (74) holds in a region strictly including the light cone $r=r_2$. At this stage the quantum pressure term is treated as a perturbation. Estimate (75) closes the remaining bootstrap bound (67) and thus concludes the proof of Proposition 5.3.

References

Alazard, T. and Carles, R. (2009). "Loss of regularity for supercritical nonlinear Schrödinger equations", *Mathematische Annalen* **343**, pp. 397–420.

Alinhac, S. (1999). "Blowup of small data solutions for a quasilinear wave equation in two space dimensions", *Ann. of Math.* (2) *Second Series* **149** (1), pp. 97–127.

——— (2001). "The null condition for quasilinear wave equations in two space dimensions. II", *Amer. J. Math.* **123** (6), pp. 1071–1101.

Audiard, C. and Haspot, B. (2018). "From the Gross-Pitaevskii equation to the Euler-Korteweg system, existence of global strong solutions with small irrotational initial data." *Ann. Mat. Pura Appl.* **197** (3), pp. 721–760.

Bourgain, J. (1999). "Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case." *J. Amer. Math. Soc.* **12**, pp. 145–171.

Buckmaster, T., Drivas, T. D., et al. (2021). *Simultaneous development of shocks and cusps for 2D Euler with azimuthal symmetry from smooth data*. arXiv:2106.02143.

Buckmaster, T., Shkoller, S., and Vicol, V. (2019a). *Formation of point shocks for 3D compressible Euler*. arXiv:1912.04429.

Buckmaster, T., Shkoller, S., and Vicol, V. (2019b). *Formation of shocks for 2D isentropic compressible Euler*. arXiv: 1907.03784.

——— (2020). *Shock formation and vorticity creation for 3D Euler*. arXiv:2006.14789.

Bulut, A. (2020). *Blow-up criteria below scaling for defocusing energy-supercritical NLS and quantitative global scattering bounds*. arXiv:2001.05477.

Carles, R., Danchin, R., and Saut, J.-C. (2012). "Madelung, Gross-Pitaevskii and Korteweg", *Nonlinearity* **25** (10), pp. 2843–2873.

Cazenave, T. (2003). *Semilinear Schrödinger equations*. Courant Lecture Notes in Mathematics 10. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences and American Mathematical Society.

Cazenave, T. and Weissler, F. (1990). "The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation", *Nonl. Anal. TMA* **14** (10), pp. 807–836.

Chemin, J.-Y. (1990). "Dynamique des gaz à masse totale finie", *Asymptotic Analysis* **3**, pp. 215–220.

Chiron, D. and Rousset, F. (2009). "Geometric optics and boundary layers for nonlinear Schrödinger equations", *Comm. Math. Phys.* **288** (2), pp. 503–546.

Cho, Y., Choe, H. J., and Kim, H. (2004). "Unique solvability of the initial boundary value problems for compressible viscous fluids", *J. Maths. Pures Appl.* **83**, pp. 243–275.

Choe, H. J. and Kim, H. (2003). "Strong solutions of the Navier-Stokes equations for isentropic compressible fluids", *J. Diff. Eq.* **190**, pp. 504–523.

Christodoulou, D. (2007). *The formation of shocks in 3-dimensional fluids*. EMS Monographs in Mathematics. EMS, Zurüch.

——— (2019). *The shock development problem*. EMS Monographs in Mathematics. EMS, Zürich.

Christodoulou, D. and Miao, S. (2014). *Compressible flow and Euler's equations*. Surveys of Modern Mathematics 9. International Press, Somerville, MA and Higher Education Press, Beijing.

Colliander, J. E. et al. (2008). "Global well-posedness and scattering for the energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^3$", *Ann. of Math.* (2) **167** (3), pp. 767–865.

Dafermos, C. (2010). *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Fundamental Principles of Mathematical Sciences 325. Springer-Verlag.

Danchin, R. (2001). "Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases", *Comm. PDE* **26** (7-8), pp. 1183–1233.

Engel, K.-J. and Nagel, R. (2000). *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Vol. 194. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York.

Feireisl, E. (2004). *Dynamics of viscous compressible fluids*. Vol. 26. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford University Press, Oxford.

Ginibre, J. and Velo, G. (1979). "On a class of nonlinear Schrödinger equations. I. The Cauchy problem, general case", *J. Funct. Anal.* **32** (1), pp. 1–32.

Grenier, E. (1998). "Semiclassical limit of the nonlinear Schrödinger equation in small time", *Proc. Amer. Math. Soc.* **126** (2), pp. 523–530.

Grillakis, M. (2000). "On nonlinear Schrödinger equations", *Comm. PDE* **25** (9-10), pp. 1827–1844.

Guderley, G. (1942). "Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstösse in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse." *Luftfahrtforschung* **19**, pp. 302–311.

Itaya, N. (1976). "On the initial value problem of the motion of compressible viscous fluid, especially on the problem of uniqueness", *J. Math. Kyoto Univ.* **16** (2), pp. 413–427.

John, F. (1985). "Blow-up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimensions", *Mat. Apl. Comput.* **4** (1), pp. 3–18.

Kenig, C. and Merle, F. (2006). "Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case", *Invent. Math.* **166** (3), pp. 645–675.

Lions, P.-L. (1998). *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. Compressible models*. Vol. 10. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York.

Luk, J. and Speck, J. (2018). "Shock formation in solutions to the 2D compressible Euler equations in the presence of non-zero vorticity", *Invent. Math.* **214** (1), pp. 1–169.

——— (2021). *The stability of simple plane-symmetric shock formation for 3D compressible Euler flow with vorticity and entropy*. arXiv:2107.03426.

Madelung, E. (1927). "Quantentheorie in hydrodynamischer Form", *Z. Phys.* **40** (34), pp. 322–326.

Majda, A. (1984). *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*. Vol. 53. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York.

Makino, T., Ukai, S., and Kawashima, S. (1987). "On compactly supported solutions of the compressible Euler equation", in: *Recent topics in nonlinear PDE, III (Tokyo, 1986)*. North-Holland Math. Stud. 148, Lecture Notes Numer. Appl. Anal. 9. North-Holland, Amsterdam, pp. 173–183.

Merle, F., Raphaël, P., and Rodnianski, I. (2015). "Type II blow up for the energy supercritical NLS", *Camb. J. Math.* **352**, pp. 439–617.

Merle, F., Raphaël, P., Rodnianski, I., and Szeftel, J. (2022a). "On blow up for the energy super critical defocusing nonlinear Schrödinger equations", *Invent. Maths.* **227** (1), pp. 247–413.

——— (2022b). "On the implosion of a compressible fluid I: Smooth self-similar inviscid profiles", *Ann. of Math.* **196** (2), pp. 567–778.

Merle, F., Raphaël, P., Rodnianski, I., and Szeftel, J. (2022c). "On the implosion of a compressible fluid II: Singularity formation", *Ann. Math.* **196** (2), pp. 779–889.

Nash, J. (1962). "Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général", *Bull. Soc. Math. France* **90**, pp. 487–497.

Rozanova, O. (2008). "Blow-up of smooth highly decreasing at infinity solutions to the compressible Navier-Stokes equations." *J. Diff. Eq.* **245** (7), pp. 1762–1774.

Ryckman, E. and Visan, M. (2007). "Global well-posedness and scattering for the defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^{1+4}$", *Amer. J. Math.* **129** (1), pp. 1–60.

Sedov, L. I. (1959). *Similarity and dimensional methods in mechanics.* Academic Press, New York-London.

Serrin, J. (1959). "On the uniqueness of compressible fluid motions", *Arch. Rational Mech. Anal.* **3**, pp. 271–288.

Sideris, T. C. (1985). "Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids", *Comm. Math. Phys.* **101** (4), pp. 475–485.

Tao, T. (2005). "Global well-posedness and scattering for the higher-dimensional energy-critical non-linear Schrödinger equation for radial data", *New York J. of Math.* **11**, pp. 57–80.

——— (2007). "Global regularity for a logarithmically supercritical defocusing nonlinear wave equation for spherically symmetric data", *J. Hyperbolic Diff. Eq.* **4** (2), pp. 259–265.

——— (2018). "Finite time blowup for a supercritical defocusing nonlinear Schrödinger system, Anal. PDE 11 (2018), no. 2, 383-438." *Anal. PDE* **11** (2), pp. 383–438.

Visan, M. (2007). "The defocusing energy-critical nonlinear Schrödinger equation in higher dimensions", *Duke Math. J.* **138** (2), pp. 281–374.

Xin, Z. (1998). "Blowup of smooth solutions to the compressible Navier-Stokes equation with compact density", *Comm. Pure Appl. Math.* **51** (3), pp. 229–240.

Galina Perelman

LAMA UMR 8050
Université Paris-Est Créteil
61, avenue du Général de Gaulle
94010 Créteil Cedex, France

E-mail: galina.perelman@u-pec.fr

Séminaire BOURBAKI Avril 2022
73e année, 2021–2022, no 1192, p. 433 à 451
doi : 10.24033/ast.1193

VERS LA CONJECTURE DE KANNAN–LOVÁSZ–SIMONOVITS
[*d'après* Yuansi Chen]

par **Guillaume Aubrun**

1. Introduction

1.1. Profil isopérimétrique

Soit (X, d) un espace métrique muni d'une mesure borélienne μ. Si A est une partie de X et $\varepsilon > 0$, on note A_ε la réunion des boules ouvertes de rayon ε dont le centre appartient à A. Si A est un borélien, on peut définir sa mesure de bord comme

$$\mathrm{bord}_\mu(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon}.$$

Le profil isopérimétrique de l'espace métrique mesuré (X, d, μ) est défini comme la solution du problème de minimisation suivant, pour un réel t donné

$$I_\mu(t) = \inf\{\mathrm{bord}_\mu(A) \,:\, A \subset X \text{ borélien}, \mu(A) = t\}.$$

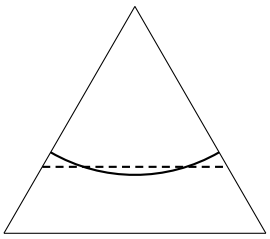


Figure 1 – Si on veut partitionner un triangle équilatéral en deux parties de même aire, la coupe rectiligne la plus courte est comparable (environ 5% plus longue) à la coupe curviligne la plus courte. La conjecture KLS affirme que le même phénomène est vrai pour un convexe de dimension arbitraire.

Autrement dit, à mesure fixée, on veut minimiser la mesure de bord. La solution exacte du problème isopérimétrique n'est connue que dans de rares situations très

©Astérisque 438, SMF 2022

symétriques. À défaut, on peut se satisfaire d'une solution approximative. Nous nous plaçons dans cette optique, dans le cas particulier où X est un convexe de volume fini et strictement positif de l'espace euclidien usuel $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$ et où la mesure μ est la mesure de Lebesgue restreinte à X. Dans ce contexte, la conjecture de Kannan, Lovász et Simonovits (1995), ou conjecture KLS, affirme que restreindre l'infimum dans la définition de $I_\mu(1/2)$ aux parties A de la forme $X \cap H$, où H est un demi-espace de $\mathbf{R}^n$, n'affecte sa valeur que par une constante multiplicative indépendante de la dimension. Si la conjecture KLS est toujours ouverte, des progrès spectaculaires vers sa résolution ont été accomplis par Chen (2021).

Ce texte est organisé comme suit. Dans une première partie, on donne une présentation de la conjecture KLS et des conjectures liées. La seconde partie introduit le schéma de localisation stochastique d'Eldan, qui est l'outil principal sur lequel repose la preuve de Chen. La preuve elle-même est détaillée dans une troisième partie.

Précisons quelques notations utilisées dans le texte. Étant données deux quantités réelles strictement positives A et B dont la valeur peut dépendre de plusieurs paramètres, la notation $A \lesssim B$ (ou de manière équivalente $B \gtrsim A$) signifie que l'ensemble des valeurs prises par le quotient A/B est une partie majorée de $\mathbf{R}$. La notation $A \asymp B$ signifie l'on a simultanément $A \lesssim B$ et $B \lesssim A$.

1.2. Mesures log-concaves

Dans ce texte, toutes les mesures considérées seront implicitement des mesures de probabilité. On dit qu'une mesure μ sur $\mathbf{R}^n$ est log-concave si elle admet une densité $p\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et si $\log p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$ est une fonction concave.

Un exemple fondamental de mesure log-concave est donnée par la mesure uniforme sur un ensemble convexe borné d'intérieur non vide de $\mathbf{R}^n$. Les mesures gaussiennes sont également log-concaves. Pour des questions de géométrie des convexes, il est souvent utile de considérer la classe des mesures log-concaves, qui jouit de plus grandes propriétés de stabilité. Retenons en particulier le théorème de Prékopa qui affirme qu'une marginale d'une mesure log-concave est log-concave ; ce qu'on veut dire par là est que si μ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$, son image par une surjection linéaire de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^m$ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^m$.

Notons également la caractérisation suivante : une mesure absolument continue μ sur $\mathbf{R}^n$ est log-concave si et seulement si elle vérifie l'inégalité de Brunn–Minkowski

$$\mu(tA + (1-t)B) \geqslant \mu(A)^t \mu(B)^{1-t}$$

pour tout réel t de $[0,1]$ et pour toutes parties compactes A, B de $\mathbf{R}^n$.

Un résultat remarquable (Milman, 2009 ; Sternberg et Zumbrun, 1999) qui sera très utile pour nos considérations, est que la log-concavité peut se lire sur le profil isopérimétrique.

Théorème 1.1. *Si μ est une mesure* log*-concave sur $\mathbf{R}^n$, son profil isopérimétrique I_μ est une fonction concave qui vérifie $I_\mu(t) = I_\mu(1-t)$. Elle est donc maximale en* $1/2$.

Soit μ une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$ de densité p. La concavité du profil isopérimétrique implique en particulier la minoration suivante : pour $t \in [0,1]$

$$I_\mu(t) \geqslant 2I_\mu(1/2)\min(t,1-t) \geqslant 2I_\mu(1/2)t(1-t). \tag{1}$$

Si $A \subset \mathbf{R}^n$ est une partie régulière (ce qu'on peut définir par exemple en disant que sa frontière est de classe C^2), sa mesure de bord, que l'on notera $\mu^+(\partial A)$ plutôt que $\mathrm{bord}_\mu(A)$, s'écrit comme

$$\mu^+(\partial A) = \int_{\partial A} p(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

On peut restreindre l'infimum définissant le profil isopérimétrique aux parties régulières, c'est-à-dire que pour tout $t \in [0,1]$ on a

$$I_\mu(t) = \inf\{\mu^+(\partial A) \,:\, A \subset \mathbf{R}^n \text{ régulière}, \mu(A) = t\}.$$

1.3. Conjecture de Kannan, Lovász et Simonovits : formulation et historique

Soit μ une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$. On obtient évidemment une majoration du profil isopérimétrique de μ en restreignant le problème de minimisation aux demi-espaces. (On appelle demi-espace de $\mathbf{R}^n$ tout ensemble de la forme $f^{-1}([a,+\infty[)$, où a est un réel et f est une forme linéaire non identiquement nulle sur $\mathbf{R}^n$.) Définissons le profil isopérimétrique linéaire de μ, pour un réel $t \in [0,1]$, comme

$$I_\mu^{\mathrm{lin}}(t) = \inf\{\mu^+(\partial H) \,:\, H \subset \mathbf{R}^n \text{ demi-espace}, \mu(H) = t\}, \tag{2}$$

de sorte que $I_\mu \leqslant I_\mu^{\mathrm{lin}}$. La conjecture KLS postule que le quotient $I_\mu^{\mathrm{lin}}(1/2)/I_\mu(1/2)$ est borné par une constante indépendante de la dimension. Pour l'étudier, posons

$$\mathrm{KLS}_n = \sup\left\{\frac{I_\mu^{\mathrm{lin}}(1/2)}{I_\mu(1/2)} \,:\, \mu \text{ mesure log-concave sur } \mathbf{R}^n\right\}. \tag{3}$$

Conjecture 1.2 (Conjecture KLS). *La suite* (KLS_n) *est bornée.*

Des bornes polynomiales de la forme $\mathrm{KLS}_n \lesssim n^\alpha$ ont été obtenues avec les améliorations successives $\alpha = \frac{1}{2}$ (Kannan, Lovász et Simonovits, 1995), $\alpha = \frac{1}{3} + o(1)$ (Eldan, 2013) puis $\alpha = \frac{1}{4}$ (Lee et Vempala, 2017). Un progrès spectaculaire plus récent, dû à Chen (2021) est l'objet de ce texte [(1)].

[(1)] Un progrès encore plus spectaculaire, l'estimation $\mathrm{KLS}_n \lesssim \log(n)^5$, a été annoncé par Klartag et Lehec (2022) quelques jours avant l'exposé. La preuve présentée utilise également le schéma de localisation stochastique.

Théorème 1.3 (Chen). *Il existe un réel C tel que, pour tout $n \geqslant 3$*

$$\mathrm{KLS}_n \leqslant \exp\left(C\sqrt{\log n}\sqrt{\log\log n}\right).$$

Remarque 1.4. Voici un exemple qui montre que le quotient $I_\mu^{\mathrm{lin}}/I_\mu$ n'est pas majoré uniformément sur $]0,1[$. Soit μ la mesure uniforme sur un disque $D \subset \mathbf{R}^2$. Les solutions du problème isopérimétrique sont les parties dont la frontière est un arc de cercle intersectant ∂D orthogonalement. On en déduit que pour t au voisinage de 0, on a les relations $I_\mu(t) \asymp t^{1/2}$ et $I_\mu^{\mathrm{lin}}(t) \asymp t^{1/3}$.

Remarque 1.5. Appelons mesure log-concave uniforme une mesure log-concave dont la densité est constante sur son support. Nous avons formulé la conjecture KLS en prenant la borne supérieure dans (3) sur l'ensemble des mesures log-concaves sur $\mathbf{R}^n$. On obtient une conjecture formellement équivalente en restreignant la borne supérieure aux mesures log-concaves uniformes. La raison est que toute mesure log-concave est limite de marginales de mesures log-concaves uniformes. En effet, soit une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$ de densité p. Pour un entier s, considérons l'ensemble $K_s \subset \mathbf{R}^{n+s}$ défini par

$$K_s = \{(x,y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s \,:\, \|y\| \leqslant 1 + s^{-1}\log p(x)\}$$

qui est convexe par l'inégalité de Brunn–Minkowski. L'image de la mesure uniforme sur K_s par la projection de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^s$ sur $\mathbf{R}^n$ a une densité proportionnelle à $(1+s^{-1}\log p)_+^s$, qui tend vers p lorsque s tend vers l'infini.

1.4. Profil isopérimétrique linéaire et matrice de covariance

Expliquons comment le problème de minimisation restreint aux demi-espaces peut être résolu approximativement. Si μ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$, on note $\boldsymbol{b}(\mu) = \int \boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x})$ son barycentre, et $\mathsf{Cov}(\mu)$ sa matrice de covariance (ou d'inertie) définie par

$$\mathsf{Cov}(\mu) = \int_{\mathbf{R}^n} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}(\mu))(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}(\mu))^t\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbf{R}^n} \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^t\,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}(\mu)\boldsymbol{b}(\mu)^t.$$

On dira qu'une mesure log-concave est isotrope si elle vérifie les conditions de normalisation $\boldsymbol{b}(\mu) = 0$ et $\mathsf{Cov}(\mu) = \mathrm{Id}$. Si A est une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$, sa norme d'opérateur, qui est sa plus grande valeur propre en valeur absolue, s'écrit

$$\|\mathsf{A}\| = \sup_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbf{R}^n,\ \|\boldsymbol{\theta}\|=1} \langle \mathsf{A}\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle.$$

La proposition suivante montre que le profil isopérimétrique linéaire s'estime aisément à partir de la matrice de covariance.

Proposition 1.6. *On a, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour toute mesure* log-*concave μ sur $\mathbf{R}^n$,*

$$I_\mu^{\mathrm{lin}}(1/2) \asymp \|\operatorname{Cov}(\mu)\|^{-1/2}.$$

Esquisse de démonstration. La première partie de la preuve consiste à démontrer l'inégalité souhaitée en dimension 1, qui s'écrit ainsi : si $p\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ est une densité de probabilité log-concave de médiane m et de variance v, alors

$$p(m) \asymp v^{-1/2}. \tag{4}$$

Cette inégalité peut se démontrer par des considérations élémentaires sur les fonctions d'une variable réelle.

Montrons maintenant le résultat annoncé. Soit $\boldsymbol{\theta}$ un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$ et $H_{\boldsymbol{\theta}}$ l'unique hyperplan orthogonal à $\boldsymbol{\theta}$ vérifiant $\mu(H_{\boldsymbol{\theta}}) = 1/2$. Considérons l'image de la mesure μ par la projection orthogonale de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}\boldsymbol{\theta}$, identifié à $\mathbf{R}$. Par le théorème de Prékopa, cette mesure est log-concave. Sa densité vérifie donc l'inégalité (4) qui se traduit pour la mesure μ en

$$\mu^+(\partial H_{\boldsymbol{\theta}}) \asymp \langle \operatorname{Cov}(\mu)\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}\rangle^{-1/2}.$$

La conclusion de la proposition 1.6 s'en déduit en prenant la borne inférieure sur $\boldsymbol{\theta}$. □

1.5. Constante de Poincaré

Soit μ une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$. On appelle *constante de Poincaré* de μ, et on note $C_P(\mu)$, la plus petite constante vérifiant l'inégalité

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant C_P(\mu) \int_{\mathbf{R}^n} \|\nabla f\|^2 \,\mathrm{d}\mu \tag{5}$$

pour toute fonction régulière $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, où l'on note $\mathbf{Var}_\mu(f) = \int f^2 \,\mathrm{d}\mu - (\int f \,\mathrm{d}\mu)^2$. Son inverse $C_P(\mu)^{-1}$ est le trou spectral de l'opérateur de Laplace–Beltrami sur $L^2(\mu)$; ce dernier est directement relié au profil isopérimétrique par la relation

$$C_P(\mu)^{-1} \asymp I_\mu(1/2)^2. \tag{6}$$

L'inégalité $C_P(\mu)^{-1} \gtrsim I_\mu(1/2)^2$, dite inégalité de Cheeger, est valable dans un contexte beaucoup plus général. Il est connu depuis Buser (1982) et Ledoux (1994) que l'inégalité inverse est vraie sous hypothèse de log-concavité.

Lorsque μ est la mesure uniforme sur un convexe K, sa constante de Poincaré intervient dans des problèmes fondamentaux de géométrie algorithmique en grande dimension. Comment échantillonner un point de K ? Comment estimer le volume de K ? Les meilleurs algorithmes connus à ce jour ont une complexité qui fait intervenir la constante KLS_n et le théorème de Chen a donc des conséquences immédiates pour garantir leur efficacité. Nous renvoyons à Lee et Vempala (2019) pour une présentation détaillée de toutes ces questions.

1.6. Reformulation et liens avec d'autres conjectures

Nous mentionnons deux conjectures plus faibles que la conjecture KLS, pour lesquelles le théorème de Chen a des conséquences directes.

La *conjecture de l'hyperplan* formulée par Bourgain (Bourgain, 1986) a pendant longtemps été un des moteurs principaux de la recherche sur la distribution du volume dans les convexes de grande dimension. Voici une des nombreuses versions équivalentes de la conjecture : soit L_n le plus petit réel tel que, pour toute partie convexe $K \subset \mathbf{R}^n$ de volume 1 on puisse trouver un hyperplan affine H tel que $K \cap H$ ait un volume $(n-1)$-dimensionnel minoré par L_n^{-1}. La conjecture de l'hyperplan affirme que la suite (L_n) est bornée. L'estimation $L_n \lesssim n^{1/4} \log n$ démontrée initialement par Bourgain n'a été que ensuite marginalement améliorée en $L_n \lesssim n^{1/4}$ par Klartag (2006) — un progrès d'apparence modeste mais considéré comme une avancée majeure.

Or on sait depuis Eldan et Klartag (2011) que la conjecture de l'hyperplan est une conséquence formelle de la conjecture KLS, au sens où $L_n \lesssim \mathrm{KLS}_n$. Le théorème de Chen $\mathrm{KLS}_n \lesssim n^{o(1)}$ est donc le premier pas substantiel vers la conjecture de l'hyperplan, 35 ans après sa formulation.

La *conjecture de la couronne mince* a attiré beaucoup d'attention, en particulier à cause de ses conséquences pour le théorème de la limite centrale pour les mesures log-concaves, comme exposé dans Barthe (2010). Elle s'énonce ainsi : si on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ par $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|^2$, alors toute mesure log-concave isotrope μ devrait vérifier

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \lesssim n.$$

Autrement dit, la variance de f est comparable à son espérance, d'où un phénomène de concentration très prononcé de la masse de μ dans une couronne autour de la sphère de rayon $\sqrt{n}$. Il est immédiat que la conjecture de la couronne mince est une conséquence de la conjecture KLS, puisqu'elle est une instance de l'inégalité de Poincaré (5).

1.7. Le cas des mesures strictement log-concaves

Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $\kappa > 0$, notons $\gamma_{n,\kappa}$ la mesure gaussienne sur $\mathbf{R}^n$ centrée et de covariance $\kappa^{-1}\mathrm{Id}$. Sa densité est la fonction

$$f : \boldsymbol{x} \mapsto (\kappa/2\pi)^{n/2} \exp(-\kappa\|\boldsymbol{x}\|^2/2)$$

qui vérifie $\nabla^2[-\log(f)] = \kappa\mathrm{Id}$. C'est l'un des rares exemples où l'on connaît exactement le profil isopérimétrique : par l'inégalité isopérimétrique gaussienne, les solutions du problème isopérimétrique sont des demi-espaces, ce qui s'écrit comme l'égalité

$$I_{\gamma_{n,\kappa}} = I^{\mathrm{lin}}_{\gamma_{n,\kappa}} = I^{\mathrm{lin}}_{\gamma_{1,\kappa}}.$$

On a en particulier

$$I_{\gamma_{n,\kappa}}(1/2) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Si une mesure est "plus log-concave" qu'une de ces mesures gaussiennes, au sens d'un contrôle uniforme de la matrice hessienne, on peut alors contrôler son profil isopérimétrique.

Théorème 1.7. *Soit $\kappa > 0$ et μ une mesure sur $\mathbf{R}^n$ de densité p vérifiant l'inégalité $\nabla^2[-\log p] \geqslant \kappa \mathrm{Id}$ en tout point de son support. Alors $I_\mu \geqslant I_{\gamma_{n,\kappa}}$ et en particulier*

$$I_\mu(1/2) \geqslant \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{2\pi}}.$$

On a de plus $C_P(\mu) \leqslant C_P(\gamma_{n,\kappa}) = \kappa^{-1}$ et $\|\mathrm{Cov}(\mu)\| \leqslant \kappa^{-1}$.

Il existe plusieurs preuves de ce résultat. On peut invoquer un théorème de Caffarelli (2000) qui affirme que, sous l'hypothèse du théorème 1.7, la mesure μ est l'image de la mesure $\gamma_{n,\kappa}$ par une contraction pour la distance euclidienne. Il est immédiat de voir que le profil isopérimétrique augmente sous l'action d'une contraction.

1.8. Réduction à des mesures isotropes à support compact

En conséquence de la proposition 1.6, montrons qu'on peut se restreindre pour l'étude la conjecture KLS à des mesures isotropes, que l'on peut aussi supposer à support dans une boule de rayon de l'ordre de $\sqrt{n}$. On note B_n la boule unité de l'espace euclidien usuel $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|)$.

Proposition 1.8. *Il existe un réel $R > 0$ tel que, si on note KLS'_n la borne supérieure des quantités $I_\mu(1/2)^{-1}$ lorsque μ parcourt l'ensemble des mesures* log*-concaves isotropes sur $\mathbf{R}^n$ à support dans $R\sqrt{n}B_n$, on ait*

$$\mathrm{KLS}_n \asymp \mathrm{KLS}'_n.$$

Démonstration. L'inégalité $\mathrm{KLS}'_n \lesssim \mathrm{KLS}_n$ découle immédiatement de la proposition 1.6. Réciproquement, soit μ une mesure log-concave. Alors μ est l'image d'une mesure isotrope ν par une transformation affine dont la partie linéaire est $\mathrm{Cov}(\mu)^{1/2}$. En particulier, cette transformation affine étant lipschitzienne de constante $L = \|\mathrm{Cov}(\mu)\|^{1/2}$, on a $I_\mu \geqslant L^{-1} I_\nu$ et donc en utisant à nouveau la proposition 1.6

$$\frac{I^{\mathrm{lin}}_\mu(1/2)}{I_\mu(1/2)} \lesssim \frac{I^{\mathrm{lin}}_\nu(1/2)}{I_\nu(1/2)}.$$

Il faut maintenant expliquer comment remplacer ν par une mesure à support dans $R\sqrt{n}B_n$. Pour cela, on utilisera le lemme suivant.

Lemme 1.9. *Soit ν une mesure* log-*concave sur $\mathbf{R}^n$ et K un convexe tel que $\nu(K) \geqslant \frac{9}{10}$. Soit ν_K la mesure obtenue en conditionnant ν à K, définie pour un borélien $A \subset \mathbf{R}^n$ par $\nu_K(A) = \frac{\nu(A \cap K)}{\nu(K)}$. Alors $I_\nu(1/2) \geqslant \frac{7}{10} I_{\nu_K}(1/2)$.*

Soit ν une mesure log-concave et isotrope. Posons $K = r\sqrt{n}B_n$ où $r \geqslant \sqrt{10}$ est une constante à déterminer. Puisque $\int_{\mathbf{R}^n} \|\boldsymbol{x}\|^2 \, \mathrm{d}\nu(\boldsymbol{x}) = n$, il suit de l'inégalité de Markov que $\nu(K) \geqslant 1 - r^{-2} \geqslant \frac{9}{10}$. D'après le lemme 1.9, la mesure ν_K obtenue en conditionnant ν à K vérifie donc $I_\nu(1/2) \geqslant \frac{7}{10} I_{\nu_K}(1/2)$. L'inégalité

$$\frac{1}{2}\mathrm{Id} \leqslant \mathrm{Cov}(\nu_K) \leqslant \frac{10}{9}\mathrm{Id} \tag{7}$$

permettra ensuite de conclure, puisque l'on peut remplacer ν_K par une image linéaire isotrope π qui vérifie $I_{\nu_K} \asymp I_\pi$ et $I^{\mathrm{lin}}_{\nu_K} \asymp I^{\mathrm{lin}}_\pi$. Justifions maintenant que l'on peut choisir $r > 0$ pour garantir (7). On utilisera le résultat élémentaire suivant : il existe un réel C tel que l'inégalité $\int x^4 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant C$ est vraie pour toute mesure log-concave isotrope μ sur $\mathbf{R}$. Soit $\boldsymbol{\theta}$ un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^n$. On a d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \int_K \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2 \mathrm{d}\nu(\boldsymbol{x}) &= 1 - \int_{K^c} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2 \mathrm{d}\nu(\boldsymbol{x}) \\ &\geqslant 1 - \nu(K^c)^{1/2} \left(\int_{\mathbf{R}^n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^4 \mathrm{d}\nu(\boldsymbol{x}) \right)^{1/2} \\ &\geqslant 1 - r^{-1} C^{1/2}. \end{aligned}$$

On peut donc choisir la constante r de telle sorte que l'on ait

$$\frac{1}{2} \leqslant \int_{\mathbf{R}^n} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta} \rangle^2 \mathrm{d}\nu_K(\boldsymbol{x}) \leqslant \nu(K)^{-1} \leqslant \frac{10}{9}$$

pour tout vecteur unitaire $\boldsymbol{\theta}$, ce qui est équivalent à (7). □

Démonstration du lemme 1.9. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ une partie régulière telle que $\nu(A) = 1/2$. Alors

$$\frac{4}{10} \leqslant \frac{\nu(A) - \nu(K^c)}{\nu(K)} \leqslant \nu_K(A) \leqslant \frac{\nu(A)}{\nu(K)} \leqslant \frac{5}{9}$$

et l'inégalité (1) implique $\nu_K^+(\partial A) \geqslant I_{\nu_K}(4/10) \geqslant \frac{8}{10} I_{\nu_K}(1/2)$. On en déduit que $\nu^+(\partial A) \geqslant \nu(K)\nu_K^+(\partial A) \geqslant \frac{7}{10} I_{\nu_K}(1/2)$, d'où le résultat en prenant la borne inférieure sur A. □

2. Le schéma de localisation stochastique

2.1. Préliminaires sur les processus d'Itô

Soit $(\boldsymbol{B}_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbf{R}^n$. Pour tout $t \geqslant 0$, on note $\mathscr{F}_t$ la tribu engendrée par $\{\boldsymbol{B}_s \,:\, s \leqslant t\}$. Tous les processus considérés seront adaptés à la filtration $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. L'intégrale stochastique dans la définition qui suit doit être comprise au sens d'Itô.

Définition 2.1. On appelle *processus d'Itô* un processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ qui peut s'écrire sous la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t \delta_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{B}_s \tag{8}$$

où X_0 est constant et $(\delta_t)_{t\geqslant 0}$, $(\boldsymbol{\sigma}_t)_{t\geqslant 0}$ sont des processus adaptés vérifiant presque sûrement pour tout $t \geqslant 0$ les conditions $\int_0^t |\delta_s| \,\mathrm{d}s < +\infty$ et $\int_0^t \|\boldsymbol{\sigma}_s\|^2 \,\mathrm{d}s < +\infty$. Lorsque presque sûrement $\delta_t = 0$ pour tout t, on dit que $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une *martingale d'Itô*.

Les processus $(\delta_t)_{t\geqslant 0}$ et $(\boldsymbol{\sigma}_t)_{t\geqslant 0}$ sont alors uniques, respectivement notés $(\delta[X_t])_{t\geqslant 0}$ et $(\boldsymbol{\sigma}[X_t])_{t\geqslant 0}$ et appelés *dérive* et *volatilité* de $(X_t)_{t\geqslant 0}$. Il est d'usage d'écrire l'équation intégrale (8) sous la forme différentielle

$$\mathrm{d}X_t = \delta_t \,\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{\sigma}_t, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t \rangle.$$

Rappelons les rudiments de calcul stochastique qui seront utilisés dans la preuve du théorème de Chen. Tout d'abord, si $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô, son espérance se calcule directement en intégrant la dérive comme

$$\mathbf{E}[X_t] = X_0 + \int_0^t \mathbf{E}[\delta[X_s]] \,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

Si $(X_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale d'Itô, on peut calculer sa variance en intégrant la volatilité

$$\mathbf{Var}[X_t] = \int_0^t \mathbf{E}\left[\|\boldsymbol{\sigma}[X_s]\|^2\right] \,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

Soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus d'Itô et $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^2. Alors le processus $(Y_t = f(X_t))_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô, de dérive et de volatilité donnés par la formule d'Itô

$$\delta[Y_t] = f'(X_t)\delta[X_t] + \frac{1}{2} f''(X_t)\|\boldsymbol{\sigma}[X_t]\|^2, \;\; \boldsymbol{\sigma}[Y_t] = f'(X_t)\boldsymbol{\sigma}[X_t].$$

Voici un autre incarnation de la formule d'Itô. Si $(X_t)_{t\geqslant 0}$ et $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ sont des processus d'Itô, leur produit $(X_t Y_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô qui vérifie

$$\delta[X_t Y_t] = X_t \delta[Y_t] + Y_t \delta[X_t] + \langle \boldsymbol{\sigma}[X_t], \boldsymbol{\sigma}[Y_t] \rangle, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}[X_t Y_t] = X_t \boldsymbol{\sigma}[Y_t] + Y_t \boldsymbol{\sigma}[X_t]. \tag{12}$$

Enfin, soit $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus d'Itô et τ un temps d'arrêt. Alors le processus arrêté défini par $Z_t = X_{\min(t,\tau)}$ est aussi un processus d'Itô qui vérifie

$$\delta[Z_t] = \mathbf{1}_{\{t\leqslant\tau\}}\delta[X_t],\ \boldsymbol{\sigma}[Z_t] = \mathbf{1}_{\{t\leqslant\tau\}}\boldsymbol{\sigma}[X_t] \tag{13}$$

Les résultats qui précèdent ont été énoncés pour des processus d'Itô à valeurs scalaires, mais admettent des extensions immédiates au cas de processus d'Itô à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie V. La volatilité d'un tel processus est alors à valeurs dans $V \otimes \mathbf{R}^n$.

2.2. Le processus de localisation stochastique

Soit μ une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^n$. On va définir une martingale d'Itô $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ « à valeurs dans les mesures log-concaves sur $\mathbf{R}^n$ » vérifiant $\mu_0 = \mu$. Ce processus, appelé processus de localisation stochastique, a été introduit dans Eldan (2013) et joue un rôle central dans plusieurs avancées récentes. Nous renvoyons à Eldan (2022) pour un panorama de ces dernières.

Le processus $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ va être construit à partir d'un processus d'Itô $(\boldsymbol{c}_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. On définit ensuite la mesure μ_t comme étant de densité

$$p_t(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Z_t} p(\boldsymbol{x}) \exp\left(\langle \boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{x}\rangle - t\|\boldsymbol{x}\|^2/2\right), \tag{14}$$

où la variable aléatoire Z_t est choisie pour que p_t soit une densité de probabilité. On note $\boldsymbol{b}_t = \boldsymbol{b}(\mu_t)$ son barycentre, $\mathsf{A}_t = \mathsf{Cov}(\mu_t)$ sa matrice de covariance, et T_t son tenseur des moments centrés d'ordre 3, défini comme

$$\mathsf{T}_t = \int_{\mathbf{R}^n} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t)^{\otimes 3} \mathrm{d}\mu_t \in \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n.$$

Théorème 2.2. *Soit μ une mesure* log-*concave sur $\mathbf{R}^n$, de densité p. Il existe un processus d'Itô $(\boldsymbol{c}_t)_{t\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ tel que, avec les notations ci-avant*

1. *pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbf{R}^n$, le processus $(p_t(\boldsymbol{x}))_{t\geqslant 0}$ est une martingale d'Itô de volatilité $\boldsymbol{\sigma}[p_t(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t$,*
2. *le processus $(\boldsymbol{b}_t)_{t\geqslant 0}$ est une martingale d'Itô (à valeurs dans $\mathbf{R}^n$) de volatilité $\boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{b}_t] = \mathsf{A}_t$.*
3. *le processus $(\mathsf{A}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô (à valeurs dans $M_n(\mathbf{R})$) de dérive $\delta[\mathsf{A}_t] = -\mathsf{A}_t^2$ et de volatilité $\boldsymbol{\sigma}[\mathsf{A}_t] = \mathsf{T}_t$.*

Démonstration. On définit le processus d'Itô $(\boldsymbol{c}_t)_{t\geqslant 0}$ comme l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$\boldsymbol{c}_0 = \mathbf{0},\ \ \mathrm{d}\boldsymbol{c}_t = \boldsymbol{b}_t\,\mathrm{d}t + \mathrm{Id}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{B}_t.$$

L'existence et l'unicité du processus $(\boldsymbol{c}_t)_{t\geqslant 0}$ se déduit de l'analogue stochastique du théorème de Cauchy–Lipschitz (voir par exemple Øksendal, 2003, Theorem 5.2.1). La vérification des propriétés annoncées découle d'applications répétées de la formule d'Itô. Soit $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$. D'après la formule d'Itô appliquée à la fonction exponentielle, on en déduit

$$\mathrm{d}\left[e^{\langle \boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{x}\rangle}\right] = e^{\langle \boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{x}\rangle}\left[\langle \boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{x}\rangle + \frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2}\right]\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{x} e^{\langle \boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{x}\rangle}, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle.$$

Si on pose $q_t(\boldsymbol{x}) = e^{\langle \boldsymbol{c}_t, \boldsymbol{x}\rangle - t\|\boldsymbol{x}\|^2/2} p(\boldsymbol{x})$, on a donc

$$\mathrm{d}q_t(\boldsymbol{x}) = q_t(\boldsymbol{x})\left[\langle \boldsymbol{b}_t, \boldsymbol{x}\rangle\,\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle\right].$$

En intégrant sur $\mathbf{R}^n$, il s'ensuit que le processus $Z_t = \int_{\mathbf{R}^n} q_t(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ vérifie (en utilisant la formule $\int_{\mathbf{R}^n} \boldsymbol{x} q_t(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_t Z_t$),

$$\mathrm{d}Z_t = Z_t\left[\|\boldsymbol{b}_t\|^2\,\mathrm{d}t + \langle \boldsymbol{b}_t, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle\right],$$

puis

$$\mathrm{d}Z_t^{-1} = -\frac{1}{Z_t^2}\mathrm{d}Z_t + \frac{1}{Z_t^3}\|\boldsymbol{b}_t Z_t\|^2\,\mathrm{d}t = -\frac{\langle \boldsymbol{b}_t, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle}{Z_t}.$$

Enfin, on calcule la dérivée de $p_t(\boldsymbol{x}) = Z_t^{-1} q_t(\boldsymbol{x})$ comme

$$\begin{aligned}\mathrm{d}p_t(\boldsymbol{x}) &= Z_t^{-1}\,\mathrm{d}q_t(\boldsymbol{x}) + q_t(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}Z_t^{-1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_t\rangle q_t(\boldsymbol{x})}{Z_t}\,\mathrm{d}t\\ &= p_t(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_t\rangle\,\mathrm{d}t + p_t(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle - p_t(\boldsymbol{x})\langle b_t, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle - p_t(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_t\rangle\,\mathrm{d}t\\ &= p_t(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle,\end{aligned}$$

ce qui montre le premier point du théorème. Par intégration de la formule $\mathrm{d}p_t(\boldsymbol{x}) = p_t(\boldsymbol{x})\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle$, on obtient

$$\mathrm{d}\boldsymbol{b}_t = \mathsf{A}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t$$

et on en déduit que

$$\mathrm{d}\mathsf{A}_t = \int_{\mathbf{R}^n} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t)^{\otimes 2}\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t, \mathrm{d}\boldsymbol{B}_t\rangle p_t(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \mathsf{A}_t^2\,\mathrm{d}t$$

qui est le résultat annoncé. □

Retenons comme conséquence du premier point du théorème 2.2 les informations suivantes : pour tout borélien $A \subset \mathbf{R}^n$, le processus $(\mu_t(A))_{t\geqslant 0}$ est une martingale d'Itô de volatilité $\boldsymbol{\sigma}[\mu_t(A)] = \int_A (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t)\,\mathrm{d}\mu_t(\boldsymbol{x})$. De même, si A est une partie régulière, $(\mu_t^+(\partial A))_{t\geqslant 0}$ est une martingale d'Itô.

Il est immédiat d'après la formule (14) que l'on a presque sûrement, pour tout $t > 0$

$$\nabla^2(-\log p_t) \geqslant \nabla^2(-\log p) + t\mathrm{Id} \geqslant t\mathrm{Id}$$

et donc d'après le théorème 1.7

$$I_{\mu_t}(1/2) \gtrsim \sqrt{t}, \;\; C_P(\mu_t) \leqslant 1/t, \;\; \|\mathsf{A}_t\| \leqslant 1/t. \tag{15}$$

La mesure aléatoire μ_t possède ainsi des propriétés isopérimétriques d'autant meilleures que t est grand. La difficulté va être de contrôler le processus de localisation stochastique pour des petits temps ; on cherchera notamment à améliorer la borne (15) pour $t \ll 1$.

2.3. Exemples

Soit μ la mesure gaussienne standard sur $\mathbf{R}^n$. Dans ce cas, le processus de localisation stochastique associé admet une description simple puisqu'il découle de la formule (14) que la mesure aléatoire μ_t est presque sûrement gaussienne. Comme le tenseur des moments d'ordre 3 de toute mesure gaussienne est nul, on en déduit que le processus $(\mathsf{A}_t)_{t\geqslant 0}$ est déterministe et vérifie l'équation différentielle ordinaire $\mathsf{A}_t' = -\mathsf{A}_t^2$ qui se résout en $\mathsf{A}_t = \frac{1}{t+1}\mathrm{Id}$. On a alors

$$\boldsymbol{b}_t = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}_s}{s+1}$$

et à t fixé, $\boldsymbol{b}_t$ suit la loi $N(0, \frac{t}{t+1}\mathrm{Id})$. La mesure μ_t est donc la mesure gaussienne $N(\boldsymbol{b}_t, \frac{1}{t+1}\mathrm{Id})$. On a de plus $\boldsymbol{c}_t = (t+1)\boldsymbol{b}_t$, donc $\boldsymbol{c}_t$ suit la loi $N(0, t(t+1)\mathrm{Id})$.

En dehors du cadre gaussien, il semble difficile d'obtenir des formules explicites. On peut toutefois faire la remarque suivante : si μ^1 et μ^2 sont des mesures log-concaves, respectivement sur $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$, alors $\mu^1 \otimes \mu^2$ est une mesure log-concave sur $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$. Si $(\mu_t^1)_{t\geqslant 0}$ et $(\mu_t^2)_{t\geqslant 0}$ sont les processus de localisation stochastique associés respectivement à μ^1 et μ^2, construits sur des mouvements browniens indépendants, alors le processus $(\mu_t^1 \otimes \mu_t^2)_{t\geqslant 0}$ s'identifie au processus de localisation stochastique associé à $\mu^1 \otimes \mu^2$.

Ce principe se généralise sans difficulté à un plus grand nombre de facteurs. Soit μ la loi exponentielle, c'est-à-dire la mesure log-concave sur $\mathbf{R}$ de densité $p(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\{x\geqslant 0\}}$. Soit $(p_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de localisation stochastique associé et v_t la variance de la densité p_t. On peut observer sur la densité (14) que $v_t \gtrsim 1/t$ avec probabilité positive.

Considérons maintenant la mesure sur $\mathbf{R}^n$ obtenue comme la loi de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle. La matrice de covariance $\mathsf{A}_t^{(n)}$ du processus de localisation associé est diagonale et ses coefficients diagonaux sont des copies indépendantes de v_t. On en déduit l'information suivante : la fonction qui à t

associe $\sup_n \mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_t^{(n)}\|$ est de l'ordre de $1/t$, donc non intégrable au voisinage de 0. L'intérêt de cette remarque est d'expliquer pourquoi l'approche de Chen via la proposition 3.1 ne peut pas suffire à démontrer la conjecture KLS.

3. Preuve du théorème de Chen

Dans cette partie, on démontre le théorème de Chen à l'aide du processus de localisation stochastique. La preuve que nous présentons suit de très près le raisonnement de Klartag (2021) qui incorpore des simplifications attribuées à Daniel Dadush, Ronen Eldan et Joseph Lehec. Rappelons que notre but est de démontrer la borne supérieure

$$\mathrm{KLS}_n \leqslant \exp\left(C\sqrt{\log n}\sqrt{\log\log n}\right).$$

D'après la proposition 1.8, il suffit de montrer que toute mesure μ sur $\mathbf{R}^n$, log-concave, isotrope et à support dans $R\sqrt{n}B_n$ vérifie une estimation du type

$$I_\mu(1/2) \geqslant \exp\left(-C\sqrt{\log n}\sqrt{\log\log n}\right).$$

On note $(\mu_t)_{t\geqslant 0}$ le processus de localisation stochastique associé à μ, p_t la densité de μ_t, $\boldsymbol{b}_t$ son barycentre, A_t sa matrice de covariance et T_t son tenseur de moment centré d'ordre 3.

3.1. La stratégie générale de preuve

La première étape de la preuve de Chen, déjà présente dans les arguments antérieurs, se ramène à contrôler l'évolution de la matrice de covariance au long du processus de localisation stochastique.

Proposition 3.1. *Soit μ une mesure* log*-concave sur $\mathbf{R}^n$. Pour tout $T > 0$, on a l'inégalité*

$$I_\mu(1/2) \gtrsim \sqrt{T}\left(\frac{1}{4} - \int_0^T \mathbf{E}[\|\mathsf{A}_t\|]\,\mathrm{d}t\right).$$

Démonstration. Soit $E \subset \mathbf{R}^n$ une partie régulière vérifiant $\mu(E) = 1/2$. La propriété de martingale implique que $\mathbf{E}[\mu_T(E)] = 1/2$ et donc $\mathbf{Var}[\mu_T(E)] = \frac{1}{4} - \mathbf{E}[\mu_T(E)(1-\mu_T(E))]$. Le cœur de l'argument est l'enchaînement d'inégalités que voici

$$\begin{aligned}
\mu^+(\partial E) &= \mathbf{E}\left[\mu_T^+(\partial E)\right] \\
&\geqslant 2\,\mathbf{E}\left[I_{\mu_T}(1/2)\mu_T(E)(1-\mu_T(E))\right] \\
&\gtrsim \sqrt{T}\left(\frac{1}{4} - \mathbf{Var}[\mu_T(E)]\right). \qquad (16)
\end{aligned}$$

On a utilisé successivement le fait que $(\mu_t^+(\partial E))_{t\geqslant 0}$ est une martingale, l'inégalité (1), p. 435, sur le profil isopérimétrique de la mesure aléatoire μ_T et la borne inférieure presque sûre $I_{\mu_T}(1/2) \gtrsim \sqrt{T}$ observée en (15).

Puisque $(\mu_t(E))_{t\geqslant 0}$ est une martingale d'Itô, sa variance se calcule d'après (10) comme volatilité cumulée

$$\mathbf{Var}[\mu_T(E)] = \int_0^T \mathbf{E}\left[\|\boldsymbol{\sigma}[\mu_t(E)]\|^2\right] \mathrm{d}t. \tag{17}$$

On a

$$\boldsymbol{\sigma}[\mu_t(E)] = \int_E (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t)\, \mathrm{d}\mu_t(\boldsymbol{x})$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\sigma}[\mu_t(E)]\| &= \sup_{\|\boldsymbol{u}\|=1} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}[\mu_t(E)]\rangle \\
&= \sup_{\|\boldsymbol{u}\|=1} \int_E \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t\rangle \, \mathrm{d}\mu_t(\boldsymbol{x}) \\
&\leqslant \left(\sup_{\|\boldsymbol{u}\|=1} \int_E \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t\rangle^2 \, \mathrm{d}\mu_t(\boldsymbol{x})\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\sup_{\|\boldsymbol{u}\|=1} \int_{\mathbf{R}^n} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}_t\rangle^2 \, \mathrm{d}\mu_t(\boldsymbol{x})\right)^{1/2} \\
&= \|\mathsf{A}_t\|^{1/2}.
\end{aligned} \tag{18}$$

On obtient la conclusion en combinant (16), (17) et (18), par passage à la borne inférieure sur E. □

La difficulté est maintenant de contrôler la norme d'opérateur de la matrice de covariance pour des temps aussi grands que possible. La majoration $\|\mathsf{A}_t\| \leqslant 1/t$ valable en toute généralité est insuffisante pour cela.

Introduisons les réels $T_0(\mu)$ et $T_1(\mu)$ définis par les relations

$$T_0(\mu) = \min\left(\frac{1}{48},\ \inf\{t\ :\ \mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_t\| \leqslant 3\}\right),$$

$$\int_0^{T_1(\mu)} \mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_t\|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}.$$

On a alors $I_\mu(1/2) \gtrsim \sqrt{T_1(\mu)}$ d'après la proposition 3.1. La clé de la démonstration réside dans les deux inégalités suivantes

Lemme 3.2. *Si μ est une mesure* log*-concave isotrope sur $\mathbf{R}^n$ à support contenu dans $R\sqrt{n}B_n$, alors*

$$T_0(\mu) \gtrsim \mathrm{KLS}_n^{-2}\,(\log n)^{-1}.$$

Lemme 3.3. *Si μ est une mesure* log*-concave isotrope sur $\mathbf{R}^n$, alors pour tout entier $q \geqslant 2$,*

$$T_1(\mu)^{2q+1} \gtrsim T_0(\mu)^{2q} n^{-1/q}.$$

On peut ainsi mettre en place une boucle de rétroaction : $T_1(\mu)$ est contrôlé par $T_0(\mu)$, lui-même contrôlé par KLS_n ; or l'inégalité $I_\mu(1/2) \geqslant c\sqrt{T_1(\mu)}$ permet de contrôler $T_1(\mu)$ par KLS_n.

En détails, terminons la preuve du théorème de Chen. D'après la proposition 1.8, on peut trouver une mesure log-concave isotrope sur $\mathbf{R}^n$, à support dans $R\sqrt{n}B_n$ et telle que $I_\mu(1/2) \asymp \mathrm{KLS}_n^{-1}$. On a alors, pour tout entier $q \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{KLS}_n &\lesssim T_1(\mu)^{-1/2} \\
&\lesssim T_0(\mu)^{-\frac{q}{2q+1}} n^{\frac{1}{2q(2q+1)}} \\
&\lesssim \mathrm{KLS}_n^{\frac{2q}{2q+1}} n^{\frac{1}{2q(2q+1)}} (\log n)^{\frac{q}{2q+1}}
\end{aligned}$$

et donc il existe un réel $C > 0$ tel que

$$\mathrm{KLS}_n \leqslant (C \log n)^q n^{1/2q}.$$

En choisissant la valeur optimale $q \asymp \sqrt{\log n / \log\log n}$, on obtient le résultat souhaité

$$\mathrm{KLS}_n \leqslant \exp\left(C\sqrt{\log n \log\log n}\right).$$

3.2. Preuve des lemmes 3.2 et 3.3

Le processus $(\mathsf{A}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô à valeurs matricielles. Par conséquent, pour tout entier $q \geqslant 2$, le processus $(\operatorname{tr} \mathsf{A}_t^q)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô à valeurs scalaires. Le lemme suivant, démontré ultérieurement, majore sa dérive.

Lemme 3.4. *Pour tout entier $q \geqslant 2$ un entier, on a l'inégalité*

$$\delta[\operatorname{tr}(\mathsf{A}_t^q)] \leqslant 2q^2 C_P(\mu_t) \operatorname{tr}(\mathsf{A}_t^q).$$

Expliquons comment le lemme 3.4 implique les deux estimations sur $T_0(\mu)$ et $T_1(\mu)$.

Preuve du lemme 3.2. Pout tout $t > 0$, la mesure μ_t est (presque sûrement) à support dans $R\sqrt{n}B_n$ et vérifie donc l'inégalité $\|\mathsf{A}_t\| \leqslant R^2 n$.

En combinant (6) avec la proposition 1.6, on obtient

$$C_P(\mu_t) \asymp \left[I_{\mu_t}(1/2)\right]^{-2} \leqslant \mathrm{KLS}_n^2 \left[I_{\mu_t}^{\mathrm{lin}}(1/2)\right]^{-2} \asymp \mathrm{KLS}_n^2 \|\mathsf{A}_t\|$$

et le lemme 3.4 (appliqué pour un entier $q \geqslant 2$ à déterminer) implique que

$$\delta[\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^q)] \lesssim q^2 \mathrm{KLS}_n^2 \|\mathsf{A}_t\| \,\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^q).$$

Soit τ le temps d'arrêt défini par $\tau = \inf\{t > 0 : \|\mathsf{A}_t\| \geqslant 2\}$. Notons $X_t = \mathrm{tr}(\mathsf{A}_{t\wedge\tau}^q)$ le processus arrêté. Sa dérive, décrite par (13), satisfait

$$\delta[X_t] \lesssim q^2 \mathrm{KLS}_n^2 X_t$$

et donc la fonction $f(t) = \mathbf{E}[X_t]$ vérifie d'après (9) l'inégalité différentielle

$$f'(t) \lesssim q^2 \mathrm{KLS}_n^2 f(t).$$

Puisque $f(0) = n$, on en déduit, pour une constante $C > 0$, la borne $f(t) \leqslant n \exp(Cq^2 \mathrm{KLS}_n^2 t)$ pour tout $t > 0$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_t\| &\leqslant 2 + R^2 n \mathbf{P}(\|\mathsf{A}_t\| \geqslant 2) \\
&\leqslant 2 + R^2 n \mathbf{P}(X_t \geqslant 2^q) \\
&\leqslant 2 + R^2 n 2^{-q}\, \mathbf{E}[X_t] \\
&\leqslant 2 + R^2 n^2 2^{-q} \exp(Cq^2 \mathrm{KLS}_n^2 t).
\end{aligned}$$

Choisissons $q \asymp \log n$ de sorte que $R^2 n^2 2^{-q} \leqslant n^{-1}$. L'inégalité $\mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_t\| \leqslant 3$ est alors vérifiée dès que $Cq^2 \mathrm{KLS}_n^2 t \leqslant \log n$. Nous avons bien démontré

$$T_0(\mu) \gtrsim q^{-2} \mathrm{KLS}_n^{-2} \log n \gtrsim \mathrm{KLS}_n^{-2} (\log n)^{-1}. \qquad \square$$

Preuve du lemme 3.3. D'après (15), on a presque sûrement l'inégalité $C_P(\mu_t) \leqslant 1/t$, que l'on combine avec le lemme 3.4 pour obtenir

$$\delta[\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^q)] \leqslant \frac{2q^2}{t} \,\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^q).$$

Puisque la fonction $x \mapsto x^{1/q}$ est concave, on a

$$\delta[\|\mathsf{A}_t\|_q] \leqslant \frac{2q}{t} \|\mathsf{A}_t\|_q.$$

La fonction $f\colon t \mapsto \mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_t\|_q$ vérifie donc l'inégalité différentielle

$$(\log f)'(t) \leqslant \frac{2q}{t}.$$

Posons $T_0 = T_0(\mu)$ et $T_1 = T_1(\mu)$. Puisque $f(T_0) \leqslant 3n^{1/q}\, \mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_{T_0}\| \leqslant 3n^{1/q}$, on a pour tout $t \geqslant T_0$,

$$\log f(t) - \log f(T_0) \leqslant \int_{T_0}^t \frac{2q}{u}\,\mathrm{d}u = 2q(\log t - \log T_0),$$

ou encore $f(t) \leqslant (t/T_0)^{2q} 3n^{1/q}$. On a donc

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{16} \leqslant \int_{T_0}^{T_1} \mathbf{E}\,\|\mathsf{A}_t\|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{T_0}^{T_1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 3n^{1/q} \int_{T_0}^{T_1} \left(\frac{t}{T_0}\right)^{2q} \mathrm{d}t \leqslant 3n^{1/q} \frac{T_1^{2q+1}}{T_0^{2q}}. \qquad \square$$

3.3. Calculs sur la matrice de covariance

Commençons par démontrer une inégalité qui relie la matrice de covariance et le tenseur de moment centré d'ordre 3 d'une mesure log-concave. Il sera commode d'identifier ce dernier à une application linéaire $\mathsf{T}\colon \mathbf{R}^n \to M_n(\mathbf{R})$. Ainsi, pour tout $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbf{R}^n$, $\mathsf{T}(\boldsymbol{x})$ est une matrice symétrique.

Lemme 3.5. *Soit μ une mesure* log*-concave sur $\mathbf{R}^n$, A sa matrice de covariance et T son tenseur de moment centré d'ordre* 3*. Pour tous $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ dans $\mathbf{R}^n$, on a*

$$[\operatorname{tr}(\mathsf{T}(\boldsymbol{x})\mathsf{T}(\boldsymbol{y}))]^2 \leqslant 4C_P(\mu)\langle \mathsf{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle \operatorname{tr}(\mathsf{A}\mathsf{T}(\boldsymbol{y})^2).$$

Démonstration. On peut supposer que μ est centrée. Soient $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ dans $\mathbf{R}^n$. Puisque $\int_{\mathbf{R}^n}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle \,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{z}) = 0$, on peut écrire par l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\mathsf{T}(\boldsymbol{x})\mathsf{T}(\boldsymbol{y})) &= \int_{\mathbf{R}^n}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle\langle \mathsf{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle \,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{z})\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbf{R}^n}\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\rangle^2\right)^{1/2}\mathbf{Var}_\mu(f)^{1/2}\end{aligned}$$

où $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est la fonction définie par $f(\boldsymbol{z}) = \langle \mathsf{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{z},\boldsymbol{z}\rangle$. Puisque $|\nabla f(\boldsymbol{z})|^2 = 4|\mathsf{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}|^2$, l'inégalité de Poincaré s'écrit alors

$$\mathbf{Var}_\mu(f) \leqslant C_P(\mu)\int_{\mathbf{R}^n}\|\nabla f\|^2 \,\mathrm{d}\mu = 4C_P(\mu)\int_{\mathbf{R}^n}\|\mathsf{T}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}\|^2 \,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{z}) = 4C_P(\mu)\operatorname{tr}(\mathsf{A}\mathsf{T}(\boldsymbol{y})^2),$$

d'où le résultat. □

Démontrons maintenant le lemme 3.4. Le processus $(\mathsf{A}_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus d'Itô à valeurs matricielles, de dérive et de volatilité données par le théorème 2.2 comme

$$\delta[\mathsf{A}_t] = -\mathsf{A}_t^2,\ \boldsymbol{\sigma}[\mathsf{A}_t] = \mathsf{T}_t.$$

Pour tout entier $q \geqslant 1$, le processus $(\mathsf{A}_t^q)_{t\geqslant 0}$ est également un processus d'Itô à valeurs matricielles. Soit $(\boldsymbol{e}_k)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$. En itérant les formules (11)–(12), p. 441, sur le produit de processus d'Itô, on calcule sa dérive comme étant

$$\delta[\mathsf{A}_t^q] = -q\mathsf{A}_t^{q+1} + \sum_{k=1}^n \sum_{1\leqslant i<j\leqslant q} \mathsf{A}_t^{i-1}\mathsf{T}_t(\boldsymbol{e}_k)\mathsf{A}_t^{j-i}\mathsf{T}_t(\boldsymbol{e}_k)\mathsf{A}_t^{q-j-1}.$$

Puisque la matrice $-\mathsf{A}_t^{q+1}$ est de trace négative, on a

$$\delta[\operatorname{tr}(\mathsf{A}_t^q)] \leqslant \sum_{k=1}^n \sum_{1\leqslant i<j\leqslant q} \operatorname{tr}(\mathsf{A}_t^{q+i-j-2}\mathsf{T}_t(\boldsymbol{e}_k)\mathsf{A}_t^{j-i}\mathsf{T}_t(\boldsymbol{e}_k)).$$

Si M est une matrice symétrique positive et N est une matrice symétrique, on a pour tout $0 \leqslant x \leqslant 1$ l'inégalité

$$\mathrm{tr}(M^x N M^{1-x} N) \leqslant \mathrm{tr}(MN^2)$$

(en effet, si on note $f(x)$ le membre de gauche, il suit de l'inégalité de Cauchy–Schwarz que $f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leqslant \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$ et le résultat se déduit de la convexité de $\log f$). On a donc

$$\delta[\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^q)] \leqslant \binom{q}{2} \mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^{q-2} \sum_k \mathsf{T}_t(\boldsymbol{e}_k)^2) = \binom{q}{2} \mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^{q-2} \mathsf{T}_t^* \mathsf{T}_t) \tag{19}$$

Soit $(\boldsymbol{x}_k)$ une base orthonormée de vecteurs propres de la matrice symétrique A_t, vérifiant $\mathsf{A}_t \boldsymbol{x}_k = \lambda_k \boldsymbol{x}_k$ (on omet la dépendance en t pour alléger la notation). On a, en utilisant le lemme 3.5 puis l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^{q-2} \mathsf{T}_t^* \mathsf{T}_t) &= \sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-2} \mathrm{tr}(\mathsf{T}_t(\boldsymbol{x}_k)^2) \\
&\leqslant 2\sqrt{C_P(\mu_t)} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-2} \sqrt{\lambda_k} \sqrt{\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t \mathsf{T}_t(\boldsymbol{x}_k)^2)} \\
&\leqslant 2\sqrt{C_P(\mu_t)} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^q \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k^{q-3} \mathrm{tr}(\mathsf{A}_t \mathsf{T}_t(\boldsymbol{x}_k)^2) \right)^{1/2} \\
&\leqslant 2\sqrt{C_P(\mu_t)} \left(\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^q) \right)^{1/2} \left(\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^{q-2} \mathsf{T}_t^* \mathsf{T}_t) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

et on en déduit l'inégalité $\mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^{q-2} \mathsf{T}_t^* \mathsf{T}_t) \leqslant 4C_P(\mu_t) \mathrm{tr}(\mathsf{A}_t^q)$, qui combinée avec (19) termine la preuve du lemme 3.4.

Références

Barthe, F. (2010). « Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes (d'après Klartag et Fleury-Guédon-Paouris) », in : 332. Séminaire Bourbaki. Volume 2008/2009. Exposés 997–1011, Exp. No. 1007, ix, 287-304.

Bourgain, J. (1986). « On high-dimensional maximal functions associated to convex bodies », *Amer. J. Math.* **108** (6), p. 1467-1476.

Buser, P. (1982). « A note on the isoperimetric constant », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **15** (2), p. 213-230.

Caffarelli, L. A. (2000). « Monotonicity properties of optimal transportation and the FKG and related inequalities », *Comm. Math. Phys.* **214** (3), p. 547-563.

Chen, Y. (2021). « An almost constant lower bound of the isoperimetric coefficient in the KLS conjecture », *Geometric and Functional Analysis* **31** (1), p. 34-61.

ELDAN, R. (2013). « Thin shell implies spectral gap up to polylog via a stochastic localization scheme », *Geom. Funct. Anal.* **23** (2), p. 532-569.

——— (2022). « Analysis of high-dimensional distributions using pathwise methods ». In : *Proceedings of ICM*.

ELDAN, R. et KLARTAG, B. (2011). « Approximately Gaussian marginals and the hyperplane conjecture », in : *Concentration, functional inequalities and isoperimetry*. T. 545. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 55-68.

KANNAN, R., LOVÁSZ, L. et SIMONOVITS, M. (1995). « Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma », *Discrete Comput. Geom.* **13** (3-4), p. 541-559.

KLARTAG, B. (2006). « On convex perturbations with a bounded isotropic constant », *Geom. Funct. Anal.* **16** (6), p. 1274-1290.

——— (jan. 2021). *On Yuansi Chen's work on the KLS conjecture*. Lecture notes for a Winter School at the Hausdorff Institute.

KLARTAG, B. et LEHEC, J. (2022). « Bourgain's slicing problem and KLS isoperimetry up to polylog », *arXiv preprint arXiv :2203.15551*.

LEDOUX, M. (1994). « A simple analytic proof of an inequality by P. Buser », *Proc. Amer. Math. Soc.* **121** (3), p. 951-959.

LEE, Y. T. et VEMPALA, S. S. (2017). « Eldan's stochastic localization and the KLS hyperplane conjecture : an improved lower bound for expansion », in : *58th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2017*. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, p. 998-1007.

——— (2019). « The Kannan-Lovász-Simonovits conjecture », in : *Current developments in mathematics 2017*. Int. Press, Somerville, MA, p. 1-36.

MILMAN, E. (2009). « On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration », *Invent. Math.* **177** (1), p. 1-43.

ØKSENDAL, B. (2003). *Stochastic differential equations*. Sixth. Universitext. An introduction with applications. Springer-Verlag, Berlin, p. xxiv+360.

STERNBERG, P. et ZUMBRUN, K. (1999). « On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint », *Comm. Anal. Geom.* **7** (1), p. 199-220.

Guillaume Aubrun

Université Claude Bernard Lyon 1
Institut Camille Jordan
43 boulevard du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX

E-mail : aubrun@math.univ-lyon1.fr

Séminaire BOURBAKI Avril 2022
73e année, 2021–2022, no 1193, p. 453 à 478
doi: 10.24033/ast.1194

BINARY ADDITIVE PROBLEMS FOR POLYNOMIALS OVER FINITE FIELDS [*after* W. Sawin and M. Shusterman]

by **Emmanuel Kowalski**

1. Introduction

In the study of prime numbers, robust methods have been discovered during the late 19th century and over the course of the 20th century and the early 21st to solve and understand many of the most natural "additive" questions that curiosity had suggested to mathematicians. These methods include (to name a few): L-functions (from Dirichlet and Riemann to Artin and Langlands); sieve methods (Brun, Selberg, Iwaniec); combinations of these (Bombieri, Vinogradov, Maynard, Tao), bilinear forms methods (Vinogradov, Linnik); and ideas from ergodic theory and additive combinatorics (Green, Tao). We refer, for instance, to the surveys [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7] in this seminar for some accounts of these methods and their achievements.

Among the remaining outstanding open questions, we have quite a few belonging to the class of *binary additive problems*, which include what are probably the two most popular among them: the twin prime conjecture, and Goldbach's conjecture for sums of two primes. There are a number of intrinsic limitations to the currently known methods which have blocked all attempts at solving these problems.

We will report in this survey on recent groundbreaking work of W. Sawin and M. Shusterman [37, 38] where, for the first time, problems of this kind are solved in the case of polynomials over a *fixed* finite field, in a very strong quantitative form. Furthermore, we will present results of Sawin [33] where similar ideas are used to prove extremely strong results concerning the level of distribution of arithmetic functions in arithmetic progressions, again in the case of polynomials over *fixed* finite fields.

©Astérisque 438, SMF 2022

Here are simple examples of the main achievements of Sawin and Shusterman. For a polynomial f with coefficients in a finite field k with $|k|$ elements, we denote

$$|f| = |k[\mathrm{T}]/fk[\mathrm{T}]| = |k|^{\deg(f)}$$

(the second formula when $f \neq 0$). Given a finite field k, we also denote by k_0 its prime subfield, so $|k_0|$ is the characteristic of k.[(1)]

Theorem 1.1 (Sawin–Shusterman). *Let k be a finite field such that $|k| > 10^6|k_0|^4$. Let $a \in k[\mathrm{T}]$ be a fixed non-zero polynomial.*

(1) (Twin prime conjecture) *We have*

$$|\{p \in k[\mathrm{T}] \mid \deg(p) = d,\ p \text{ and } p+a \text{ are monic irreducible polynomials}\}| \sim \mathfrak{L}_a \frac{|k|^d}{d^2}$$

as $d \to +\infty$, where

$$\mathfrak{L}_a = \prod_{p|a}\Big(1-\frac{1}{|p|}\Big)^{-1} \prod_{p\nmid a}\Big(1-\frac{2}{|p|}\Big)\Big(1-\frac{1}{|p|}\Big)^{-2},$$

which is a strictly positive absolutely convergent product over all monic irreducible polynomials $p \in k[\mathrm{T}]$.

(2) (Quadratic Bateman–Horn conjecture) *Assume that $|k|$ is odd. We have*

$$|\{f \in k[\mathrm{T}] \mid \deg(f) = d,\ f^2+a \text{ is a monic irreducible polynomial}\}| \sim \frac{\mathfrak{Q}_a}{2}\frac{|k|^d}{d}$$

as $d \to +\infty$, where

$$\mathfrak{Q}_a = \prod_p \Big(1-\frac{\varrho_a(p)}{|p|}\Big)\Big(1-\frac{1}{|p|}\Big)^{-2}, \quad \varrho_a(p) = |\{x \in k[\mathrm{T}]/pk[\mathrm{T}] \mid x^2+a(x) = 0\}|$$

which is a strictly positive conditionally *convergent product over all monic irreducible polynomials $p \in k[\mathrm{T}]$, taken as the limit as $d \to +\infty$ of partial products over polynomials of degree $\leqslant d$.*

Remark 1.2. (1) For integers, one often states the twin prime conjecture simply as the question of existence of infinitely many examples, without emphasizing the quantitative version. In the case of polynomials over finite fields, it is interesting to note that one can prove quite easily that there are infinitely many irreducible polynomials p in $k[\mathrm{T}]$ such that $p+1$ is also irreducible. For instance, if $|k^\times|$ is divisible by an odd prime ℓ, one can look for binomials $p = \mathrm{T}^{\ell^m} - a$ where $m \geqslant 1$, in which case the question is to find some $a \in k^\times$ such that neither a nor $a+1$ is an ℓ-th power in k;

(1) We will reserve the letter p to denote *either* prime numbers or irreducible polynomials, hence we do not want to waste it simply for the characteristic of the fixed field k.

there must be some of them, simply because the group of ℓ-th powers has index $\geqslant 2$ among the non-zero elements of k. (This observation can be found, with applications to ranks of twisted Legendre curves, in a paper of C. Hall, see [20, Cor. 14].)

(2) Observe the restriction on the size of k: although we haven't stated the sharpest forms of the results of Sawin and Shusterman (see [37, Th. 1.1] and [38, Th. 1.2], respectively), they require that $|k|$ be large enough compared to the characteristic of k. We will explain the source of this condition, and observe for the moment only that new ideas seem to be necessary to handle the case when $k = k_0$.

And here is a sample result from [33]:

Theorem 1.3 (Sawin). *Let k be a finite field such that $|k| \geqslant 23173$. For polynomials a and q in $k[\mathrm{T}]$, and for integers $d \geqslant 0$, let*

$$\pi(d; q, a) = \sum_{\substack{\deg(p)=d \\ p \equiv a \bmod q}} 1,$$

where the sum is over monic irreducible polynomials. Furthermore, let $\pi(d)$ be the number of monic irreducible polynomials of degree d.[(2)]

There exists $\mathrm{C} \geqslant 0$ and $\delta > 0$ such that, for all $d \geqslant 1$ and for $q \in k[\mathrm{T}]$ squarefree with $\deg(q) \leqslant 3d/4$ and $a \in k[\mathrm{T}]$ coprime with q, we have

$$\left|\pi(d; q, a) - \frac{\pi(d)}{\varphi(q)}\right| \leqslant \mathrm{C}|k|^{(1-\delta)(d-\deg(q))},$$

where $\varphi(q) = |(k[\mathrm{T}]/qk[\mathrm{T}])^\times|$.

Remark 1.4. (1) Again, there is a more precise version (where, for $|k|$ large enough, the constant $3/4$ may be replaced by any number < 1) in [33, Th. 1.2], but note the absolute bound for the size of k, independent of k_0, which highlights a difference with the previous results.

(2) The analogue of this theorem over number fields would be the fact that the primes have level of distribution $3/4$ in *individual* arithmetic progressions, which is currently unknown even under the assumption of the Generalized Riemann Hypothesis (and would have enormous implications in analytic number theory). In fact, there is (to this writer's knowledge) currently no non-trivial example of a sequence of integers with individual level of distribution $\geqslant 3/4$ (see the paper of Nunes [28] for one of the best results currently known, for squarefree integers, with level of distribution $25/36$; a notable non-trivial sequence with level of distribution arbitrarily close to 1 on average over the modulus is the Thue–Morse sequence, by work of Spiegelhofer [31, Th. 1.1]).

(2) As we will recall below, we have $\pi(d) \sim q^d/d$ (which may be checked elementarily by looking at elements of the extension of degree d of k which generate it; there are $\sim q^d$ such elements, each has minimal polynomial irreducible of degree d, and only d elements have the same minimal polynomial).

The outline of the remaining of this survey is the following:

1. We recall the analogy between integers and polynomials over finite fields, and state in parallel the Bateman–Horn conjecture in both cases.
2. We will explain *why* the case of polynomials over finite fields may be more accessible; in particular, we will explain briefly the simpler setting of the conjecture where the finite field k is allowed to change while the degree of the polynomials p is fixed.
3. We then present the strategy of Sawin and Shusterman – this combines beautifully arguments from algebraic as well as analytic number theory, and algebraic geometry. We attempt especially to focus on the points where the case of polynomials presents new phenomena and methods.
4. We sketch briefly some of the key arguments, chosen to emphasize both the similarities with integers, and some of the new ingredients.

Finally, we wish to point out that the papers we discuss contain a wealth of other results, many of which have considerable independent interest (non only more general, precise and uniform versions of the statements above, but also, e.g., proof of existence of cancellation in sums of the Möbius function evaluated at polynomials, which includes Chowla's conjecture for polynomials over finite fields). We invite the interested reader to go back to the source for more details.

Notation.

If X is a set and f, g are complex-valued functions on X, with $g \geqslant 0$, we write equivalently $f \ll g$ or $f = O(g)$ if there exists a constant $C \geqslant 0$ such that $|f(x)| \leqslant Cg(x)$ for all $x \in X$. We then say that C is an *implied constant*. On the other hand, if X is a topological space and x_0 is in X (or is "at infinity"), we write $f(x) \sim g(x)$ as $x \to x_0$ to mean that g is non-zero close to x_0 and f/g tends to 1 as $x \to x_0$.

Acknowledgement. — Many thanks to C. Dartyge, É. Fouvry, J. Fresán, Ph. Michel and Z. Rudnick for comments and corrections on a draft of this text.

2. The polynomial–integer analogy

We will present the classical analogy between integers and polynomials over finite fields, choosing notation so that the parallel is as literal as possible. In particular, we can then present the general Bateman–Horn conjecture (and "standard" level of distribution conjectures) in a uniform manner.

The analogy goes back at least to a famous paper of Dedekind and Weber [16], and the basic dictionary is well-established:

$\mathbf{Z}$	$k[\mathrm{T}]$ where k is a finite field
$n \geqslant 1$	$f \in k[\mathrm{T}]$ monic
p prime	p monic irreducible polynomial
$\lvert n\rvert$ for $n \in \mathbf{Z}$	$\lvert f\rvert = \lvert k\rvert^{\deg(f)}$ for a polynomial f.

The analogy is reinforced by the fact that both $\mathbf{Z}$ and $k[\mathrm{T}]$ are principal ideal domains, and that prime numbers and monic irreducible polynomials, respectively, are in bijection with the set of non-zero prime ideals in $\mathbf{Z}$ and $k[\mathrm{T}]$. Moreover, it is crucial to the arithmetic part of this analogy that for non-zero integer n or polynomial f, the quotient ring $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ or $k[\mathrm{T}]/fk[\mathrm{T}]$ is finite, and is a finite field if n is prime or f irreducible.

So for instance, the analogue of the Riemann zeta function for $k[\mathrm{T}]$ is

$$\zeta_{k[\mathrm{T}]}(s) = \prod_p (1 - |p|^{-s})^{-1} = \sum_f |f|^{-s},$$

where the product ranges over all monic irreducible polynomials in $k[\mathrm{T}]$, and the sum over all $f \in k[\mathrm{T}]$ monic. The Prime Number Theorem states that the number $\pi(x)$ of prime numbers $p \leqslant x$ satisfies

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \qquad x \to +\infty,$$

and the analogue for irreducible polynomials is that

$$\pi(d) \sim \frac{q^d}{d}, \qquad d \to +\infty.$$

If we note that q^d is the number of monic polynomials of degree d, then the two asymptotic are clearly comparable. Intuitively, the second states that a monic polynomial of degree $d \geqslant 1$ has probability about $1/d$ of being irreducible.

We will use the following notation to have completely uniform statements. We write $\mathscr{O} = \mathbf{Z}$ or $k[\mathrm{T}]$ for some finite field; we denote by n (resp. p) a positive integer or a monic polynomial (resp. a prime number or a monic irreducible polynomial). We call p a *prime* in all cases. We sometimes denote by $\mathscr{O}_+$ either the set of positive integers or the set of monic polynomials.

Certain arithmetic functions have definitions which are identical in both cases. For instance, the function τ maps n to the number of divisors d of n, where divisors are either positive integers or monic (i.e., $d \in \mathscr{O}_+$). By convention, this meaning of

divisors of n will be used below implicitly; similarly, the notation $d \mid n$ will later on always contain this restriction on d, unless otherwise stated. Another crucial function is the Möbius function μ, with $\mu(n) = 0$ unless n is squarefree, in which case $\mu(n) = (-1)^k$ if n is the product of $k \geqslant 0$ primes.

For given non-zero $n \in \mathscr{O}$, we denote by $|n|$ the "norm" $|\mathscr{O}/n\mathscr{O}|$, recovering the usual absolute value of integers, or the previous definition for polynomials.

In some cases, separate definitions are needed to have a uniform presentation. Given a real number $x \geqslant 1$, we will write

$$n \sim x$$

to indicate that either $x < n \leqslant 2x$, or that $|n| = x$ for polynomials (in other words, $x = |k|^{\deg(f)}$, so x can only be a power of $|k|$). We write also

$$\mathbf{log}(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{if } \mathscr{O} = \mathbf{Z} \\ \log(x)/\log(|k|) & \text{if } \mathscr{O} = k[\mathrm{T}]. \end{cases}$$

Furthermore, for non-zero $n \in \mathscr{O}_+$, we define

$$\mathbf{log}(n) = \begin{cases} \log(n) & \text{if } \mathscr{O} = \mathbf{Z} \\ \deg(n) & \text{if } \mathscr{O} = k[\mathrm{T}]. \end{cases}$$

Then, for instance, the von Mangoldt function Λ for $\mathscr{O}$ is defined by

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \mathbf{log}(n) & \text{if } n = p^m \text{ for some prime } p \text{ and integer } m \geqslant 1 \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and satisfies

$$\mathbf{log}(n) = \sum_{d \mid n} \Lambda(d),$$

with the sum over divisors of n (either positive integers, or monic divisors of a monic polynomial). By Möbius inversion, we obtain a formula for $\Lambda(n)$, namely

$$\Lambda(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d)\mathbf{log}(n/d) = -\sum_{d \mid n} \mu(d)\mathbf{log}(d) \tag{1}$$

This equation is a fundamental "detector" of primes (although it also detects the powers of primes, these are often quite easily handled separately, as they are typically much sparser in the applications).

Let $q \in \mathscr{O}_+$ and $a \in \mathscr{O}$. For $x \geqslant 1$, we now define

$$\pi(x; q, a) = \sum_{\substack{p \sim x \\ p \equiv a \bmod q}} 1, \qquad \pi(x) = \sum_{p \sim x} 1.$$

The Prime Number Theorem then has the form

$$\boldsymbol{\pi}(x) \sim \frac{x}{\mathbf{log}(x)}, \qquad x \to +\infty,$$

in all cases.[(3)]

The key conjecture generalizing the main additive problems for primes is the *Bateman–Horn* conjecture. Given a finite family $\mathbf{F} = (\mathrm{F}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ of distinct non-constant irreducible and primitive[(4)] polynomials in $\mathscr{O}[\mathrm{X}]$, this predicts how often an element n with $n \sim x$ will be such that $\mathrm{F}_i(n)$ is prime for all $i \in \mathrm{I}$. (So that, for instance, we recover the twin prime conjecture by taking $\mathrm{F}_1 = \mathrm{X}$, $\mathrm{F}_2 = \mathrm{X} + a$.)

To state it, we first define for p prime the quantity

$$\varrho_{\mathbf{F}}(p) = |\{\alpha \in \mathscr{O}/p\mathscr{O} \mid \mathrm{F}_i(\alpha) = 0 \text{ for some } i \in \mathrm{I}\}|$$

(where $\mathrm{F}_i(\alpha)$ denotes the value in the finite field $\mathscr{O}/p\mathscr{O}$ of the reduction of F_i modulo p, a polynomial in $(\mathscr{O}/p\mathscr{O})[\mathrm{X}]$). One can then show that the infinite product

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{F}} = \prod_p \Big(1 - \frac{\varrho_{\mathbf{F}}(p)}{|p|}\Big)\Big(1 - \frac{1}{|p|}\Big)^{-|\mathrm{I}|},$$

converges, in the sense of the limit as $d \to +\infty$ of the finite products over p with $|p| \leqslant d$, and moreover that the value of the product is zero if and only if there exists some prime p such that $\varrho_{\mathbf{F}}(p) = |p|$.

There is a probabilistic interpretation for these products, which can basically motivate the Bateman–Horn conjecture below (see [8]). We present another well-known heuristic derivation which is closer to a proof (in the sense of being indeed the starting point of rigorous proofs, both in a number of classical results, as illustrated for instance in [24, Ch. 19], and in the works of Sawin and Shusterman). For simplicity, consider the case $|\mathrm{I}| = 1$, so that we have a single polynomial F. Then using (1), we have

$$\begin{aligned}\sum_{n\sim x} \Lambda(\mathrm{F}(n)) &= -\sum_{n\sim x}\sum_{d\mid \mathrm{F}(n)} \mu(d)\mathbf{log}(d)\\ &= -\sum_d \mathbf{log}(d)\mu(d) \sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{O}/d\mathscr{O}\\ \mathrm{F}(\alpha)=0}} \sum_{\substack{n\sim x\\ n\equiv\alpha \bmod d}} 1\end{aligned}$$

(having split the sum over $n \sim x$ such that $d \mid \mathrm{F}(n)$ according to the value $\alpha \in \mathscr{O}/d\mathscr{O}$ of $\mathrm{F}(n)$ modulo d, which must satisfy $\mathrm{F}(\alpha) = 0$).

(3) In the polynomial case, x is taken to vary among powers of $|k|$; if one wishes to avoid this interpretation, define $n \sim x$ to mean $\lfloor x \rfloor = |k|^{\deg(f)}$ instead.

(4) By which we mean that the coefficients of F_i do not have a non-trivial common factor.

The inner sum counts elements in an arithmetic progression, and at least when x is much larger than $|d|$, it is asymptotic to $x/|d|$; if we disregard all error terms, and extend ϱ_{F} to squarefree d by multiplicativity, we obtain the series

$$-x\sum_d \mathbf{log}(d)\frac{\mu(d)\varrho_{\mathrm{F}}(d)}{|d|},$$

and the series itself is formally $xf'(1)$, where[(5)]

$$f(s)=\sum_d \frac{\mu(d)\varrho_{\mathrm{F}}(d)}{|d|^s}=\prod_p\Big(1-\frac{\varrho_{\mathbf{F}}(p)}{|p|^s}\Big)=\zeta_{\mathscr{O}}(s)^{-1}\prod_p\Big(1-\frac{\varrho_{\mathbf{F}}(p)}{|p|^s}\Big)\Big(1-\frac{1}{|p|^s}\Big)^{-1}.$$

Since $\zeta_{\mathscr{O}}(s)$ has a simple pole at $s=1$, with residue equal to 1 for $\mathscr{O}=\mathbf{Z}$ and to $1/\log|k|$ if $\mathscr{O}=k[\mathrm{T}]$, this implies that $f'(1)=\mathfrak{S}_{\mathrm{F}}$.

We can now state the Bateman–Horn conjecture, which essentially claims that this heuristic derivation gives the right answer:

Conjecture 2.1. *If $\mathfrak{S}_{\mathbf{F}}\neq 0$, and if all (F_i) are separable, then as $x\to+\infty$, we have*

$$\sum_{n\sim x}\prod_{i\in\mathrm{I}}\Lambda(\mathrm{F}_i(n))\sim\mathfrak{S}_{\mathbf{F}}x,$$

$$|\{n\sim x\mid \mathrm{F}_i(n)\text{ is prime for all }i\in\mathrm{I}\}|\sim\frac{\mathfrak{S}_{\mathbf{F}}}{\Delta_{\mathbf{F}}}\frac{x}{\mathbf{log}(x)^{|\mathrm{I}|}}$$

where $\Delta_{\mathbf{F}}$ is the product of the degrees of F_i for $i\in\mathrm{I}$.

(Note that the second form of this conjecture can easily be deduced from the first one; the factor $\Delta_{\mathbf{F}}$ is present because $|\mathrm{F}(n)|$ is of size $n^{\deg(\mathrm{F})}$ for $\mathrm{F}\in\mathscr{O}[\mathrm{X}]$.)

Example 2.2. (1) (Twin prime) Take $(\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2)=(\mathrm{X},\mathrm{X}+a)$, where $a\in\mathscr{O}$ is non-zero. Then $\varrho_{\mathrm{F}}(p)=2$ unless $\mathrm{F}(a)=0 \bmod p$, in which case $\varrho_{\mathrm{F}}(p)=1$. It follows that

$$\mathfrak{S}_{(\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2)}=\prod_{p|a}\Big(1-\frac{1}{|p|}\Big)^{-1}\prod_{p\nmid a}\Big(1-\frac{2}{|p|}\Big)\Big(1-\frac{1}{|p|}\Big)^{-2},$$

which coincides with the constant $\mathfrak{L}_a$ in Theorem 1.1, (1).

(2) (Quadratic Bateman–Horn Conjecture) Take $\mathrm{F}=\mathrm{X}^2+a$ for some non-zero $a\in\mathscr{O}$. Then $\mathfrak{S}_{\mathrm{F}}$ coincides with the constant $\mathfrak{Q}_a$ of Theorem 1.1, (2).

Thus Theorem 1.1 confirms these two cases of the Bateman–Horn conjecture, and in fact in quantitative form, as soon as $|k|$ is large enough.

(3) We snuck in the assumption that the polynomials F_i are separable; this is not simply a "belt and suspenders" kind of assumption, but a necessary restriction in

(5) When $\mathscr{O}=k[\mathrm{T}]$, this derivative should be interpreted as $(\log|k|)^{-1}$ times the usual derivative, so that $(s\mapsto|d|^{-s})'=-\mathbf{log}(d)|d|^{-s}$.

many cases. Indeed, Conrad, Conrad and Gross [13] have shown that the asymptotic formula in the conjecture is not always true without such an assumption, and have studied the issue in depth, leading to a corrected conjecture that they expect to hold in all cases (see [13, Conj. 6.2]). A simple example demonstrating the failure of the statement in general is the following (see also [12, Ex. 4.3]): let k be a finite field of odd characteristic and

$$F = X^{4|k|} + T^{2|k|-1} \in \mathscr{O}[X]$$

(e.g., $F = X^{20} + T^9$ if $|k| = 5$); then it is elementary that F is irreducible, and that the corresponding constant $\mathfrak{S}_F$ is non-zero, and yet $F(n)$ is *never* irreducible for $n \in k[T]$ of degree $\geqslant 1$ (see Example 5.3 below).

Crucially, the investigations of Conrad, Conrad and Gross involve the fluctuations of the sign of $\mu(F(n))$ as n varies: the above heuristic can only be potentially correct if the values 1 and -1 exhibit the statistical behavior of a fair coin toss, and it is shown that this is simply not the case.

3. Digression: the case of large finite fields

This section is essentially independent of the remainder of the text, and may be skipped in a first reading. We discuss here the "other" analogue of the basic additive number theory conjectures over $k[T]$, namely the "large finite field" situation. Precisely, consider the single polynomial case of the Bateman–Horn conjecture. We then only consider input polynomials n with a *given* degree d, and vary the base field. Thus, for integers $\nu \geqslant 1$, let k_ν be the extension of k of degree ν in an algebraic closure $\bar{k}$ of k. We are looking at counting $n \in k_\nu[T]$ of degree d such that $F(n)$ is prime in $k_\nu[T]$. Note that there is no analogue of this question for integers!

This problem has a nice geometric interpretation, whose origins lie in work of Birch and Swinnerton-Dyer [10] and Cohen [11]. Indeed, a polynomial $n \in k_\nu[T]$ of degree d is irreducible if and only if n has d distinct roots and if the Frobenius automorphism $\alpha \mapsto \alpha^{|k_\nu|}$ induces on the set of roots of n in $\bar{k}$ a permutation which is a cycle of length d. We view F as a polynomial in $k_\nu[T, X]$. Then the roots of $F(n)$ in $\bar{k}$ are those α such that $F(\alpha, n(\alpha)) = 0$, and are therefore in canonical bijection with the intersection points of the graph of n with the plane curve $\mathscr{C}_F$ defined by $F(\alpha, \beta) = 0$. We can parameterize polynomials of degree d by an algebraic variety $\mathscr{X}_d$, and then construct a covering $\pi\colon \mathscr{Y}_{F,d} \to \mathscr{X}_d$ where the fiber over $n \in \mathscr{X}_d$ is the intersection $\mathscr{C}_F \cap (\text{graph of } n)$.

Thus we are looking for elements in $\mathscr{X}_d(k_\nu)$ where the Frobenius acts in a a specified way on the fiber $\pi^{-1}(n)$; this interpretation brings the problem squarely within the confines of Galois theory for function fields (or for finite-degree coverings of

algebraic varieties). Combined with a suitable version of the Chebotarev Density Theorem, this leads quickly to an *a priori* asymptotic formula of the form

$$|\{n \in k_\nu[T] \mid \deg(n) = d \text{ and } F(n) \text{ is prime}\}| \sim c_F |k|^{\nu d}$$

as $\nu \to +\infty$, for some constant c_F, namely the proportion of elements in the Galois group G of a Galois closure of π which have the cycle type of a single m-cycle.(6) The degree m of π is the "generic" degree of $F(n)$; thus one would like to prove that G is the full symmetric group, in which case $c_F = 1/m$, and the asymptotic formula is then what is expected from the Bateman–Horn conjecture.(7)

Among the (relatively expansive) literature on this question, we refer to the paper [17] of Entin for very general results confirming this prediction; we note that one of Entin's innovations for the computation of the group G is a beautiful idea of using characterizations of permutation groups containing the alternating group by their multiple-transitivity properties.(8)

4. Strategy

We now present a rough sketch of the strategy followed by Sawin and Shusterman to prove Theorem 1.1.(9) As indicated previously, the starting point is the analytic heuristic presented to motivate the conjecture. In the case of the quadratic Bateman–Horn conjecture, we put $F = X^2 + a$ and consider the sum

$$\sum_{n \sim x} \Lambda(F(n)) = -\sum_d \mathbf{log}(d)\mu(d) \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{O}/d\mathscr{O} \\ F(\alpha)=0}} \sum_{\substack{n \sim x \\ n \equiv \alpha \bmod d}} 1.$$

Extracting the main term can be done in the inner sum if d has small enough degree, and it is not very difficult to deduce that

$$-\sum_{|d| \leqslant x} \mathbf{log}(d)\mu(d) \sum_{\substack{\alpha \in \mathscr{O}/d\mathscr{O} \\ F(\alpha)=0}} \sum_{\substack{n \sim x \\ n \equiv \alpha \bmod d}} 1 \sim \mathfrak{S}_F x.$$

What remains to be done (and remains unknown for integers) is to treat d of larger size. This must involve the sign fluctuations of the Möbius function, so we rewrite

(6) We overlook here the potential distinction between the arithmetic and geometric Galois groups of the covering.

(7) Note that if we compute the constant $\mathfrak{S}_F$ when viewing F as an element of $k_\nu[T, X]$, we obtain a quantity that tends to 1 as $\nu \to +\infty$.

(8) This method may be viewed as a permutation-group analogue of the Larsen Alternative, as developed by Katz [27] for the computation of monodromy groups.

(9) We only discuss very briefly some aspects of Theorem 1.3 in Section 8.

the sum as

$$-\sum_{x\leqslant y\leqslant x^2}\mathbf{log}(y)\sum_{b\sim x^2/y}\sum_{\substack{\alpha\in\mathscr{O}/b\mathscr{O}\\ \mathrm{F}(\alpha)=0}}\sum_{\substack{n\sim x\\ n\equiv\alpha \bmod b}}\mu\Big(\frac{n^2+a}{b}\Big), \tag{2}$$

and the saving will come from the inner sum

$$\sum_{\substack{n\sim x\\ n\equiv\alpha \bmod b}}\mu\Big(\frac{n^2+a}{b}\Big) \tag{3}$$

involving the Möbius function.

In the case of the twin primes (with $\mathrm{F}_1 = \mathrm{X}$ and $\mathrm{F}_2 = \mathrm{X}+a$), the procedure is similar; since there are two polynomials involved, the argument is a bit different, and one reduces similarly to sums of the type

$$-\sum_{x^{1/(2-\varepsilon)}\leqslant y\leqslant x}\mathbf{log}(y)\sum_{g\sim x/y}\sum_{q\sim y}\mu(q)\Lambda(gq+a)$$

after extracting the expected main term of the asymptotic from small degree polynomials. Applying the convolution formula (1) again leads to

$$\sum_{x^{1/(2-\varepsilon)}\leqslant y\leqslant x}\mathbf{log}(y)\sum_{g\sim x/y}\sum_{q\sim y}\sum_{b\mid gq+a}\mathbf{log}(b)\mu(b)\mu(q).$$

The sum over b is then split according to whether $\mathbf{log}(b)\leqslant y^{1/2}$ or not, and in the second range the classical trick of switching to the complementary divisor is used as above to sum $\mathbf{log}(c)\mu((gq+a)/c)$ over divisors c of $gq+a$ instead of $\mathbf{log}(b)\mu(b)$. The savings will come from the sum over q, which are of one of the two forms

$$\sum_{q\sim y}\mu(q),\qquad\qquad \sum_{\substack{q\sim y\\ q\equiv -a\bar{g} \bmod b}}\mu(q)\mu\Big(\frac{gq+a}{b}\Big), \tag{4}$$

in the two ranges described previously, respectively.

The key transformative steps that now escape from the common features of integers and polynomials are explained in the next two sections; they are first the existence of an *algebraic formula* for the Möbius function for a polynomial over a finite field, and the use of Deligne's Riemann Hypothesis over finite fields.

5. The Möbius function for polynomials

In final analysis, the most fundamental input to the work of Sawin and Shusterman, and that which explains the difference with the case of integers, is the fact that the Möbius function, whose importance to the study of additive problems is clear from

the previous sections, has an algebraic expression in terms of multiplicative characters in the case of polynomials over finite fields. This observation goes back to Pellet in 1878 at least (see the enlightening discussions in [13] and [12]).

Proposition 5.1. *Let k be a finite field of odd characteristic. Denote by λ_2 the non-trivial multiplicative character of order 2 of $k^\times$, extended to k by putting $\lambda_2(0) = 0$. For any non-zero $f \in k[\mathrm{T}]$, we have*

$$\mu(f) = (-1)^{\deg(f)}\lambda_2(\mathrm{disc}(f)),$$

where $\mathrm{disc}(f)$ *is the discriminant of* f.

Proof. Both sides of this formula vanish for f having a multiple root, so we can assume that f is squarefree.

The Möbius function is of course multiplicative; we next observe that the function $f \mapsto (-1)^{\deg(f)}\lambda_2(\mathrm{disc}(f))$ is also. Indeed, if $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant \deg(f)}$ (resp. $(\beta_j)_{1\leqslant j\leqslant \deg(g)}$) are the roots of a squarefree polynomial f (resp. g) in some algebraic closure $\bar{k}$ of k, then the condition that f and g are coprime means that $\alpha_i \neq \beta_j$ for all (i,j), hence

$$\mathrm{disc}(fg) = \mathrm{disc}(f)\,\mathrm{disc}(g)\gamma^2, \qquad \gamma = \prod_{i,j}(\alpha_i - \beta_j) \in \bar{k}^\times.$$

The Frobenius automorphism Fr_k of $\bar{k}$ (given by $x \mapsto x^{|k|}$) permutes the (α_i) and the (β_j), and it follows that $\mathrm{Fr}_k(\gamma) = \gamma$. So $\gamma \in k^\times$, hence $\lambda_2(\gamma^2) = 1$, and the multiplicativity follows.

We are thus reduced to proving that

$$(-1)^{\deg(f)}\lambda_2(\mathrm{disc}(f)) = -1$$

if f is irreducible. Let again $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant \deg(f)}$ be the roots of f. We have $\lambda_2(\mathrm{disc}(f)) = 1$ if and only if the product

$$\gamma = \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j) \in \bar{k},$$

which satisfies $\gamma^2 = \mathrm{disc}(f)$, belongs to k (and not to the unique quadratic extension of k in $\bar{k}$). Computing $\mathrm{Fr}_k(\gamma)$ we see that $\mathrm{Fr}_k(\gamma) = \varepsilon(\sigma)\gamma$, where $\varepsilon(\sigma)$ is the signature of the permutation of the roots induced by Fr_k. However, the irreducibility of f means (by the elementary Galois theory of finite fields) that this permutation is a cycle of length $\deg(f)$, with signature $(-1)^{\deg(f)-1}$. So we have $\lambda_2(\mathrm{disc}(f)) = \varepsilon(\sigma) = (-1)^{\deg(f)-1}$. □

Remark 5.2. Conrad, Conrad and Gross [13, Th. 2.4] also explain a variant for fields of characteristic 2 (that goes back to work of R. Swan); this involves Witt vectors.

Example 5.3. Assume that $|k|$ is odd and let $\mathrm{F} = \mathrm{X}^{4|k|} + \mathrm{T}^{2|k|-1}$. Consider $f \in k[\mathrm{T}]$ with positive degree. If $f(0) = 0$, we have $\mu(\mathrm{F}(f)) = 0$. Otherwise, $g = \mathrm{F}(f)$ has even degree, so by the formula for the discriminant in terms of roots of the derivative (implicitly used below) we get

$$\mu(\mathrm{F}(f)) = \lambda_2(\mathrm{disc}(g)) = \lambda_2\Big(\prod_{g(\alpha)=0} g'(\alpha)\Big).$$

But $g' = -\mathrm{T}^{2|k|-2}$, so this is $\lambda_2(g(0)^{2|k|-2}) = 1$. In particular, the polynomial $\mathrm{F}(f)$ cannot be irreducible.

The discriminant in the proposition can be transformed further. Recall that $\mathrm{disc}(f)$ is also the resultant of f and f'. Furthermore, for any non-zero polynomial g, there is a Jacobi symbol $f \mapsto (\frac{f}{g})$ modulo g on $k[\mathrm{T}]$, namely

$$\Big(\frac{f}{g}\Big) = \prod_{p^m || g} \Big(\frac{f}{p}\Big)^m$$

where, for p irreducible, we have

$$\Big(\frac{f}{p}\Big) = \begin{cases} 1 & \text{if } f \text{ is a non-zero square in } k[\mathrm{T}]/p \\ 0 & \text{if } p \mid f \\ -1 & \text{if } f \text{ is not a square in } k[\mathrm{T}]/p. \end{cases}$$

Then we have:

Proposition 5.4. *For f non-zero in $k[\mathrm{T}]$, we have*

$$\mu(f) = (-1)^{\deg(f)}\Big(\frac{f'}{f}\Big)$$

See, e.g., [37, Lemma 3.1] for a proof.

Here is the key corollary of these facts used in [37].

Corollary 5.5. *Let q be a monic polynomial in $k[\mathrm{T}]$ and $a \in k[\mathrm{T}]$ coprime to q. Let $\delta \in k[\mathrm{T}]$. There exist $\varepsilon \in \{-1, 0, 1\}$, $s \in k[\mathrm{T}]$ and a real Dirichlet character χ on $k[\mathrm{T}]$ with conductor dividing $d = q^2(\delta + (a/q)') \in k[\mathrm{T}]$ such that*

$$\mu(gq + a) = \varepsilon\chi(g + s)$$

for any polynomial $g \in k[\mathrm{T}]$ with derivative $g' = \delta$, provided $\deg(a) \neq \deg(qg)$.

Proof. This is (essentially) a consequence of the previous propositions combined with quadratic reciprocity in $k[\mathrm{T}]$: we have first

$$\mu(gq+a) = (-1)^{\deg(gq+a)}\lambda_2(\mathrm{disc}(gq+a)) = (-1)^{\deg(gq+a)}\Big(\frac{gq+a}{(gq+a)'}\Big),$$

and then

$$\begin{aligned}\Big(\frac{gq+a}{(gq+a)'}\Big) = \varepsilon_1\Big(\frac{\delta q+gq'+a'}{gq+a}\Big) &= \varepsilon_2\Big(\frac{\delta q^2+gqq'+a'q}{gq+a}\Big)\\ &= \varepsilon_2\Big(\frac{\delta q^2+a'q-aq'}{gq+a}\Big) = \varepsilon_2\Big(\frac{d}{gq+a}\Big)\end{aligned}$$

where ε_1 and ε_2 are in $\{-1,0,1\}$ and depend only on (q,a,δ). By quadratic reciprocity again, this is (up to some $\varepsilon\in\{-1,0,1\}$ again) a real Dirichlet character evaluated at $gq+a$, or a real Dirichlet character evaluated at $g+\bar{q}a$, where $\bar{q}$ is the inverse of q modulo the conductor. □

Remark 5.6. In fact, we see that the conductor of the Dirichlet character can be specified more precisely, and this is important in further arguments.

What is the key lesson from this corollary? It is that *when summing the Möbius function over an arithmetic progression, we are reduced to summing a shifted Dirichlet character, as long as we sum over the $gq+a$ where the derivative of g is fixed*. Thus, we can split a sum like

$$\sum_{g\sim x}\mu(gq+a)$$

according to the value of the derivative, namely

$$\sum_g \mu(gq+a) = \sum_\delta \sum_{g'=\delta}\mu(gq+a) = \sum_\delta \varepsilon(\delta)\sum_{g'=\delta}\chi(g+s(\delta)).$$

Given a fixed g_0 with $g'=\delta$, to say that $g'=\delta$ means that $g=g_0+h(\mathrm{X}^{|k_0|})$ (recall that $|k_0|$ is the characteristic of k) and h is an arbitrary polynomial. If the size k is large enough compared with the characteristic, this means that *the inner sum is still long enough to be usefully attacked using methods from algebraic geometry*, as we now describe. Moreover, note that this principle applies equally well to sums involving a product of values of the Möbius function, such as

$$\sum_{g\sim x}\mu(g)\mu(gq+a),$$

which are in fact the type that occurs in the twin prime problem (because of the two von Mangoldt functions). With an arbitrary finite number of factors (with distinct linear polynomials), the resulting sums are those in the so-called *Chowla conjecture*, and indeed Sawin and Shusterman prove the version for $k[\mathrm{T}]$ of this conjecture (see [37, Th. 1.3]).

6. Algebraic geometry and the Riemann Hypothesis

After the input from the previous section, one is faced with a task of a fairly common kind in analytic number theory: get good bounds (cancellation among the terms) for sums over finite fields which are related to character sums. More precisely, the sums that arise are of the type

$$\sum_{f\in \mathrm{P}_d(k)} t(f)$$

where $d \geqslant 0$ is a fixed integer, the set $\mathrm{P}_d(k)$ is the set of polynomials $f \in k[\mathrm{T}]$ with $\deg(f) < d$, and t is a function on $\mathrm{P}_d(k)$ of "algebraic nature".

The set $\mathrm{P}_d(k)$ can be interpreted as the set of k-rational points on an algebraic variety, indeed simply on the affine space of dimension d, with coordinates $\boldsymbol{a} = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant d-1}$ which are the coefficients of the polynomial f. The function t should be a "trace function"[(10)] on this algebraic variety, e.g.. something like

$$t(f) = \chi(\mathrm{A}(\boldsymbol{a}))\psi(\mathrm{B}(\boldsymbol{a}))$$

where A and B are polynomials in the coefficients (a_i), and we denote by χ (resp. ψ) a multiplicative character of $k^\times$ (resp. a non-trivial additive character of k).

Example 6.1. Let $q \in k[\mathrm{T}]$ be a non-constant polynomial. Consider a non-trivial multiplicative character $\chi\colon (k[\mathrm{T}]/qk[\mathrm{T}])^\times \to \mathbf{C}^\times$. For $m \geqslant 1$ and $h_1, \dots, h_m \in k[\mathrm{T}]$ fixed, it is not very difficult to check that the function

$$t(f) = \chi(f + h_1)\cdots\chi(f + h_m)$$

defined for $f \in \mathrm{P}_d(k)$, can be expressed in the desired form.

So, in effect, we have multi-variable character sums over finite fields, including more complicated variants of those of this simple form. From the fundamental work of Deligne (which, for one-variable sums, goes back to Weil) it is known that such sums can be interpreted using methods of algebraic geometry, and especially that the *general form* of the Riemann Hypothesis [14] can be an extremely powerful tool to prove very strong estimates, potentially best possible in many cases.

We review the mechanism behind this method. The formalism of ℓ-adic cohomology (especially the Grothendieck–Lefschetz trace formula) leads to a transformation of the form

$$\sum_{f\in \mathrm{P}_d(k)} t(f) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} (-1)^j \operatorname{tr}(\mathrm{F}_k \mid \mathrm{H}_c^j)$$

where only finitely many terms (typically, those terms with $0 \leqslant j \leqslant 2d$) can be non-zero, and H_c^j is then a finite-dimensional vector space on which a certain incarnation F_k of the

(10) Precisely, that of some ℓ-adic complex for a prime ℓ invertible in k.

Frobenius automorphism of k acts by a linear transformation; these spaces depend on the summation set P_d as well as on the trace function t.[11]

Deligne's version of the Riemann Hypothesis[12] states that, under certain conditions on t,[13] any complex eigenvalue α of F_k on H_c^j is an algebraic number, and satisfies the bound $|\alpha| \leqslant |k|^{j/2}$. This means that we obtain typically an estimate

$$\Big|\sum_{f\in \mathrm{P}_d(k)} t(f)\Big| \leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant 2d} |k|^{j/2}\dim(\mathrm{H}_c^j) \leqslant \mathrm{C}|k|^{\beta/2}$$

where

$$\beta = \max\{j \mid \mathrm{H}_c^j \neq 0\}, \qquad \mathrm{C} = \sum_j \dim(\mathrm{H}_c^j).$$

Hence, it is clear that a successful application of Deligne's work requires two extra ingredients to reach a non-trivial outcome (and these ingredients must be correspondingly refined to obtain sharper bounds):

1. One should, at the minimum, prove that $\beta < 2d$, since otherwise the bound is of size $|k|^d = |\mathrm{P}_d(k)|$, which is trivial (because the summands $t(f)$ are bounded in practice). Of course, the smaller β is, the better the result.

2. But one must also find a manageable upper-bound for C, which should be as much as possible independent of k, since otherwise it could swamp the gain from the first point (e.g., if $\beta = d-1$ but $\mathrm{C} = |k|$, then the estimate is again trivial).

In the cases considered by Sawin and Shusterman, the base field k is *fixed* and the degree d of the polynomials, hence the dimension of the underlying summation variety, tends to infinity. This has a considerable impact on the ease of applicability of Deligne's work. In particular, note that getting non-trivial bounds now essentially requires that $2d-\beta$ tends to infinity with d (otherwise the gain from the trivial bound is at most $|k|^{\mathrm{A}}$, for some fixed $\mathrm{A} \geqslant 1$, and this is a constant). In practice, we would like to have a power-saving, which means a bound of the type

$$\sum_{f\in \mathrm{P}_d(k)} t(f) \ll |k|^{d(1-\delta)}$$

for some $\delta > 0$), which requires β to grow like $(2-\delta)d$ for some $\delta > 0$ (with $\delta \to 1$ corresponding to square-root cancellation).

(11) We are omitting some considerations involving the choice of an auxiliary prime number ℓ different from the characteristic of k, which are not essential in this sketch.

(12) Which has been called the most important result in number theory of the 20th century.

(13) More precisely, on the geometric object that gives rise to t; these conditions are "local" and usually fairly easily checked.

This is probably the more challenging of the two problems above, but the second is also far from simple, and in fact is closely related. Geometrically, bounding C in this situation corresponds to finding upper-bounds for sums of "Betti numbers" on varieties of increasing dimension. In fact, if we now write C_d for the constant C above, then the bound

$$\Big|\sum_{f\in \mathrm{P}_d(k)} t(f)\Big| \leqslant C_d|k|^{\beta/2}$$

can only be interesting if C_d grows *at most exponentially* with d, say $C_d \leqslant A^d$ for some $A \geqslant 1$. Moreover, if in fact $C_d \geqslant A^d$ with $A > 1$, then the bound now requires, indeed, to prove that $\beta \leqslant 2(1-\delta)d$ for some $\delta > 0$ to be non-trivial, namely

$$\Big|\sum_{f\in \mathrm{P}_d(k)} t(f)\Big| \leqslant A^d|k|^{(1-\delta)d}$$

will give cancellation for $|k|$ large enough (depending on A, roughly $|k| > A^{1/\delta}$).

This point is important, because most of the known explicit upper-bounds for Betti numbers (some of which could in principle be applicable) give an estimate for C which is typically super-exponential (see for instance the bounds by Katz in [26], or the general recent development [36] of Sawin's "quantitative sheaf theory"). Thus Sawin and Shusterman cannot rely on off-the-shelf tools here either.[(14)]

How do Sawin and Shusterman handle these difficulties? Remarkably, the proofs of the two parts of Theorem 1.1, and that of Theorem 1.3, use three different approaches to bounding β and C.

1. In the proof of the twin prime result [37], the key tool are the so-called *vanishing cycles*, a fundamental part of the formalism of étale cohomology, which has its origins in the methods developed by Lefschetz to study algebraic surfaces, by comparing the desired invariants (cohomology groups) of a "generic" variety, and of a "specialization". The (very rough) idea is that a specialization (or "deformation") might become geometrically extremely simple, in such a way that the relevant cohomology groups are easily computable (e.g., by reduction to one-dimensional cases, which are well-understood); if one can control the difference between the generic and special invariants, then one gets information on the difficult case.

(14) Note a difference with many previous applications of Deligne's Riemann Hypothesis in classical analytic number theory, where the underlying summation variety is typically fixed, or of fixed dimension, in which case bounds like those of Katz (and earlier ones due to Bombieri) are quite sufficient, and the key difficulty is to get analogues of the bounds for β (but see also [19] for cases where the Betti number bounds also require some innovation).

2. In the quadratic Bateman–Horn problem [38], the method is in some sense simpler. Indeed, a commonly-used approach to find good bounds on (the analogue of) β for multi-variable exponential sums, already used for instance by Deligne for bounds for additive character sums or hyper-Kloosterman sums [15, Th. 7.4], is the "comparison of cohomology with and without support". Again, very roughly described, this uses the fact that in addition to cohomology groups H_c^j (with compact support), one can define groups H^j (cohomology without support condition); it is a very general fact (Artin's vanishing theorem) that for a variety like an affine space, under some conditions, we have $\mathrm{H}_c^j = 0$ for $0 \leqslant j < d$ (which doesn't help for estimating β) whereas $\mathrm{H}^j = 0$ for $d < j \leqslant 2d$. Hence, if one can prove that $\mathrm{H}^j = \mathrm{H}_c^j$ for (say) $j \neq d$, it follows that $\beta \leqslant d$, and in fact that only H_c^d may be non-zero (and typically is).

3. Both of the previous methods belong to the toolkit of algebraic geometry since the 1960's. However, in Theorem 1.3, Sawin uses a much more recent ingredient, namely the theory of the *characteristic cycle* of Beĭlinson and Saito (see [9] and [30]), combined with bounds (due also to Sawin [35]) for the stalks of perverse sheaves in positive characteristic. The author of this report is far from being able to say much about this topic, except that this provides a means to understand the so-called wild ramification phenomena on algebraic varieties of dimension $\geqslant 2$, somewhat similarly to the way older results like the Euler–Poincaré characteristic formula of Grothendieck–Ogg–Shafarevich describe certain global invariants for wildly ramified sheaves on curves in terms of local data (see for instance [25, 2.3.1]).

In all three cases, what Sawin and Shusterman actually prove is (under suitable assumptions) that $\mathrm{H}_c^j = 0$ except (at worse) for $j \in \{d, d+1\}$. This does not lead to perfect square-root cancellation, but for a fixed finite field, it is essentially as good as that. Moreover, they are also able to obtain upper-bounds for the dimensions of the remaining spaces H_c^d and H_c^{d+1} (this is intuitively reasonable in the first approach at least, because one can expect that a good choice of deformation or specialization will not only reveal vanishing properties, but also give some insight on the dimensions of the spaces when non-zero).

Sawin [32] has written a very insightful and intuitive survey of the applications of the first method (vanishing cycles), which we recommend very warmly (these applications include, e.g., the proof [35] of the function-field version of the Michel–Venkatesh mixing conjecture). Similarly, Sawin and Shusterman [38, § 1.4.1] explain on an intuitive geometric level the ideas used in the second method. For the sake of illustrating the type of arguments involved, we will conclude this section with just a hint of the latter (this method appears in [38, § 3]), noting that it also implies the vanishing statement used in [37]. We assume here familiarity with the formalism

of étale cohomology, and use the corresponding standard notation (but this short discussion can be safely skipped).

Sketch of proof. The sums we consider are over polynomials in $k[\mathrm{T}]$ of degree at most d, viewed as points in $\mathrm{P}_d(k)$, where P_d is the affine d-space of coefficients. We have a fixed squarefree polynomial $g \in k[\mathrm{T}]$ of degree $\geqslant d$, with zero set $\mathrm{Z} \subset \bar{k}$, and a distinguished zero $z_0 \in \mathrm{Z}$. For any $z \in \mathrm{Z}$, we denote by ev_z the morphism $\mathrm{P}_d \to \mathbf{A}^1$ given by evaluation at z.

Fix a prime ℓ distinct from the characteristic of k. The trace functions involved in the sums of interest are associated to an ℓ-adic sheaf $\mathscr{G}$ on P_d such that the pullback of $\mathscr{G}$ to P_d over $\bar{k}$ is of the form

$$\mathscr{F} = \bigotimes_{z\in\mathrm{Z}} \mathrm{ev}_z^* \mathscr{F}_z,$$

where the factors satisfy the following conditions:

1. Each $\mathscr{F}_z$ is an ℓ-adic sheaf on $\mathbf{A}^1_{\bar{k}}$ without punctual sections and tamely ramified at ∞.
2. For the distinguished point z_0, there exists $w_0 \in \bar{k}$ such that $\mathscr{F}_{z_0}$ is the extension by zero from $\mathbf{A}^1 - \{w_0\}$ of $\mathscr{L}_{\chi(\mathrm{T}-w_0)}$, a shifted Kummer sheaf associated to a non-trivial multiplicative character χ.

Remark 6.2. So, if we had $\mathrm{Z} \subset k$, and all the above data were defined over k, we would have the trace function

$$t(f) = \chi(f(z_0) - w_0) \prod_{z\in\mathrm{Z}-\{z_0\}} t_{\mathscr{F}_z}(f(z)).$$

Using the Chinese Remainder Theorem, it is not difficult to show that, for instance, the function $f \mapsto \lambda_2(f+h)$ is of this form.

Under these conditions, we have the following vanishing result (combining the statement of [38, Corollary 3.7, Lemma 3.13] with the remark after [38, Def. 3.8]):

Theorem 6.3. *We have* $\mathrm{H}^j_c(\mathrm{P}_{d,\bar{k}}, \mathscr{F}) = \{0\}$ *unless* $j \in \{d, d+1\}$. *Moreover, the sum of the dimensions of* $\mathrm{H}^j_c(\mathrm{P}_{d,\bar{k}}, \mathscr{F})$ *is at most equal to the coefficient of* B^d *in the polynomial*

$$\prod_{z\in\mathrm{Z}} (\mathrm{rank}(\mathscr{F}_z)(1+\mathrm{B}) + \mathrm{rank}(\widehat{\mathscr{F}_z})\mathrm{B}) \in \mathbf{Z}[\mathrm{B}]$$

where $\widehat{\mathscr{F}_z}$ *is the* ℓ*-adic Fourier transform of* $\mathscr{F}_z$.

The proof of the vanishing is intricate. It is based on the following steps:

Step 1. The shifted sheaf $\mathscr{F}[d]$ is a *perverse sheaf* ([38, Lemma 3.6]). This fundamental "regularity" property implies in particular that $\mathrm{H}^j_c(\mathrm{P}_{d,\bar{k}}, \mathscr{F}) = 0$ for $j < d$; it is derived from the local nature of perverse sheaves, which is used to find an étale-local model of $\mathscr{F}$, and ultimately from the assumption that the $\mathscr{F}_z$ have no punctual sections.

Step 2. Let $\bar{\mathrm{P}}_d$ be the natural compactification of P_d, isomorphic to the projective d-space. Let H_{z_0} in $\bar{\mathrm{P}}_d$ be the projective closure of the affine hyperplane defined by $f(z_0) = w_0$. Let $\widetilde{\mathscr{F}}$ be the extension by zero to $\bar{\mathrm{P}}_d - \mathrm{H}_{z_0}$ of the restriction of $\mathscr{F}$ to $\mathrm{P}_d - \mathrm{H}_{z_0}$. Let v be the open immersion of $\bar{\mathrm{P}}_d - \mathrm{H}_{z_0}$ in $\bar{\mathrm{P}}_d$. There is a general excision long exact sequence

$$\cdots \to \mathrm{H}^j_c(\bar{\mathrm{P}}_d - \mathrm{H}_{z_0}, \widetilde{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^j(\bar{\mathrm{P}}_d - \mathrm{H}_{z_0}, \widetilde{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^j(\mathrm{H}_{z_0}, v_*\widetilde{\mathscr{F}}) \to \cdots$$

which shows that it is enough to check that if $j > d$, we have

$$\mathrm{H}^j(\bar{\mathrm{P}}_d - \mathrm{H}_{z_0}, \widetilde{\mathscr{F}}) = \mathrm{H}^j(\mathrm{H}_{z_0}, v_*\widetilde{\mathscr{F}}) = 0.$$

The vanishing of the left-hand side holds by Artin's vanishing theorem for an ℓ-adic sheaf on an affine variety of dimension d.

Step 3. The trickiest part of the proof is the fact that $\mathrm{H}^j(\mathrm{H}_{z_0}, v_*\widetilde{\mathscr{F}}) = 0$ for $j > d$. Here, the point is that the restriction of $v_*\widetilde{\mathscr{F}}[d]$ to H_{z_0} is at least semi-perverse (by general principles), so its stalks are supported in degree $\leqslant d$. By delicate arguments (which use the full force of the assumptions on the sheaves $\mathscr{F}_z$; in particular, the "multiplicativity" of the Kummer sheaves is exploited, which explains the particular restriction on the special point z_0), Sawin and Shusterman prove ([38, Lemmas 3.4, 3.5]) that $v_*\widetilde{\mathscr{F}}$ is supported on *finitely many points*,[15] hence its cohomology is supported in the same degrees as its stalks.

7. Conclusion of the proof

We now discuss briefly the end of the proofs of both parts of Theorem 1.1, which involve in each case one extra ingredient to handle a small but important range which is not accessible by the previous cohomological estimates or by the determination of the main term.

In the case of twin primes, what remains to be done is to prove estimates for sums of the type

$$\sum_{\substack{g\sim y\\(g,q)=1}} \mu(g)\psi(1/g)$$

for some non-trivial character ψ of $\mathscr{O}/q\mathscr{O}$ (see [37, Th. 5.1]), which are non-trivial "below the Polyá–Vinogradov range". This bound is proved in [37] by adapting methods used by Fouvry and Michel [18] to prove similar bounds over number fields.[16]

In the case of the Bateman–Horn conjecture, the estimate for (3), namely

$$\sum_{\substack{n\sim x\\ n\equiv a \bmod b}} \mu\Big(\frac{n^2+a}{b}\Big)$$

[15] At most those $f \in \bar{\mathrm{P}}_d$ such that $f(z)$ is a singularity of $\mathscr{F}_z$ for more than d zeros z of g.

[16] As pointed out by W. Sawin, *a posteriori*, one could now also apply the results of [34] for this purpose.

is only good enough to deal with the terms where $y \geqslant x^{1+\varepsilon}$ in (2), for some $\varepsilon > 0$ arbitrarily small. It turns out that handling the remaining small range $x \leqslant y \leqslant x^{1+\varepsilon}$ is very involved. Sawin and Shusterman proceed roughly by writing the sum as

$$-\sum_{x\leqslant y\leqslant x^{1+\varepsilon}} \mathbf{log}(y) \sum_{b\sim y} \mu(b) \sum_{\substack{n\sim x\\ n^2+a\equiv 0 \bmod b}} 1.$$

Summing over all solutions of $n^2 + a \equiv 0 \bmod b$ with $n \sim y$, they detect those with $n \sim x$ using additive characters modulo b. This leads to the goal of estimating now sums of the type

$$\sum_{b\sim y} \mu(b) \sum_{n^2+a\equiv 0 \bmod b} \psi(n),$$

where ψ is a non-trivial additive character of $\mathscr{O}/b\mathscr{O}$.

Thus the situation is reminiscent of the question of equidistribution of roots of quadratic congruences, and indeed the long section 7 of [38] handles this problem by developing, in this context, some tools which are close analogues of those involved in the classical studies of quadratic congruences for integers, such as in [22] and [23]. In particular, this includes the parameterization of roots of $n^2 + a = 0$ in terms of classes of binary quadratic forms of discriminant a, which goes back to Gauss in principle (including the distinction between definite and indefinite forms, with analogues of either Heegner points or closed geodesics in the upper half-plane). Ultimately, these parameterizations lead again to sums of trace functions of the type

$$\sum_{\substack{n,m\\ \mathrm{Q}(n,m)\sim x}} \mu(\mathrm{Q}(n,m))\psi(n^{-1}m)$$

where $\mathrm{Q} = \alpha \mathrm{X}^2 + \beta \mathrm{XY} + \gamma \mathrm{Y}^2$ is a quadratic form of discriminant $4\alpha\gamma - \beta^2 = 4a$. Sawin and Shusterman are able to handle such sums by fixing the variable m, and viewing the sum over n as a combination of one or two sums of trace functions over polynomials of a given degree.

Remark 7.1. It is of course natural to ask how far the methods of Sawin and Shusterman can go; for instance, how much harder is the Bateman–Horn conjecture for polynomials F of degree 3? As explained again in [38], it does seem that significant new ideas are involved, despite the fact that Sawin and Shusterman do prove non-trivial bounds for sums of $\mu(\mathrm{F}(n))$ for any separable polynomial F. One issue, valid over the integers also, is that there is currently no satisfactory understanding of the roots of cubic congruences comparable to what is known in the quadratic case.

8. Level of distribution

We conclude with a quick discussion of the results of Sawin [33] concerning the level of distribution of arithmetic functions of polynomials over finite fields. These apply to an extensive class of functions, namely the so-called *factorization functions*, which are roughly those functions f of polynomials $n \in k[\mathrm{T}]$ which can be expressed in terms of the factorization pattern of n, i.e., the number of irreducible factors of each degree.

More precisely, suppose given an integer d and a finite-dimensional representation

$$\varrho\colon \mathfrak{S}_d \to \mathrm{GL}_r(\mathbf{C}).$$

For $n \in k[\mathrm{T}]$ squarefree of degree d, one can define $f_\varrho(n)$ to be the value of the character $\mathrm{tr}\,\varrho$ at the permutation corresponding to the Frobenius acting on the roots of the polynomial n. But there is in fact a natural extension to *all* polynomials of degree d (see [33, § 1.6] and [34, § 3]), namely

$$f_\varrho(n) = \mathrm{tr}(\mathrm{Fr}_k \mid (\mathrm{V}_f \otimes \varrho)^{\mathfrak{S}_d}),$$

where V_f is the permutation representation of $\mathfrak{S}_d$ associated to the permutation action on the tuples $(a_i) \in \bar{k}^d$ such that $f = (\mathrm{T} - a_1)\cdots(\mathrm{T} - a_d)$. This leads to a fairly straightforward interpretation of these arithmetic functions as trace functions, the key point being that if π is the morphism from the affine space of dimension d to the space of monic polynomials of degree d mapping $(a_1, \dots, a_d)$ to $(\mathrm{T} - a_1)\cdots(\mathrm{T} - a_d)$, then the representation V_f (with its Frobenius action) can be identified as the stalk at f of the sheaf $\pi_*\bar{\mathbf{Q}}_\ell$.

Remark 8.1. This construction had already been exploited by Sawin [34] to study sums of factorization functions over "short intervals" (i.e., sums of $f_\varrho(n + a)$ over n of degree $\leqslant d$ where a is a fixed polynomial with $\deg(a) > d$). Other related interesting works in the case of short intervals include those of Rodgers [29] and of Hast–Matei [21].

Example 8.2. The following table indicates which representations give rise to some of the standard arithmetic functions (in the last line, we have a virtual representation, i.e., we take the corresponding linear combinations for the representations indicated):

ϱ	$f_\varrho(n)$
signature	$(-1)^{\deg(n)}\mu(n)$
$(\mathbf{C}^m)^{\otimes d}$	$\tau_m(n)$, the m-th divisor function
$\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i \bigwedge^i(\mathbf{C}^d)$	$\Lambda(n)$

See [33, § 8.1, 8.2, 8.4] as well as [34, § 3].

The main result of Sawin is an explicit upper bound for sums of functions of type f_ϱ on arithmetic progressions to squarefree moduli, which translates to level of distribution $> 1/2$ for individual progressions when $|k|$ is large enough, at least for certain representations ϱ, including those in the table above (see [33, Th. 1.7]):

Theorem 8.3 (Sawin). *Let $q \in k[\mathrm{T}]$ be squarefree and $a \in (k[\mathrm{T}]/qk[\mathrm{T}])^\times$. There exist explicit quantities $c_1(\varrho)$ and $c_2(\varrho)$ such that for any $d \geqslant \deg(q)$, we have*

$$\Big| \sum_{\substack{\deg(n)=d \\ n\equiv a \bmod q}} f_\varrho(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\deg(n)=d \\ (n,q)=1}} f_\varrho(n) \Big| \leqslant 2(c_1(\varrho) + |k|^{1/2} c_2(\varrho))|k|^{(d-\deg(q))/2}.$$

Remark 8.4. (1) For the Möbius or von Mangoldt functions, this theorem improves (except in very few cases) on the corresponding ones from [37] and [38]. However, it is not applicable in the proof of Theorem 1.1, because a function like $\mu(\mathrm{F}(n))$ for F of degree at least 2 is typically *not* a factorization function.

(2) This "direct" translation into trace functions explains why there is no requirement on the size of k, except that it be large enough, in Theorem 1.3.

Reference

[1] J.-M. Deshouillers: *Progrès récents des petits cribles arithmétiques*, Séminaire Bourbaki, exposé 520, Lecture Notes in Math. 510 (1979), Springer.

[2] J.-M. Deshouillers: *Théorème de Fermat: la contribution de Fouvry*, Séminaire Bourbaki, exposé 648, Astérisque 133–134 (1986), SMF.

[3] Ph. Michel: *Progrès récents du crible et applications*, Séminaire Bourbaki, exposé 842, Astérisque 252 (1998).

[4] B. Host: *Progressions arithmétiques dans les nombres premiers* [*d'après B. Green et T. Tao*], Séminaire Bourbaki, exposé 944, Astérisque 307 (2006).

[5] E. Kowalski: *Écarts entre nombres premiers successifs*, Séminaire Bourbaki, exposé 959, Astérisque 311 (2007).

[6] J. Wolf: *Arithmetic and polynomial progressions in the primes* [*after Gowers, Green, Tao and Ziegler*] , Séminaire Bourbaki, exposé 1053, Astérisque 352 (2013).

[7] E. Kowalski: *Gaps between prime numbers and prime numbers in arithmetic progressions, after Y. Zhang and J. Maynard*, Séminaire Bourbaki, exposé 1084, Astérisque 367–368 (2015).

[8] P. T. Bateman and R. A. Horn, *A heuristic asymptotic formula concerning the distribution of prime numbers*, Mathematics of Computation 16 (1962), 363–367.

[9] A. A. Beĭlinson: *Constructible sheaves are holonomic*, Selecta Math. (N.S.) 22 (2016), 1797–1819.

[10] B. Birch and H. Swinnerton-Dyer: *Note on a problem of Chowla*, Acta Arithmetica 5 (1959), 417–423.

[11] S. D. Cohen: *The distribution of polynomials over finite fields*, Acta Arith. 17 (1970), 255–271.

[12] K. Conrad: *Irreducible values of polynomials: a non-analogy*, in "Number fields and function fields – two parallel worlds", 71–85, Progr. Math., 239, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2005.

[13] B. Conrad, K. Conrad and R. Gross: *Prime specialization in genus* 0, Trans. Amer. Math. Soc. 360 (2008), 2867–2908.

[14] P. Deligne: *La conjecture de Weil, II*, Publ. Math. de l'IHÉS 52 (1980), 137–252.

[15] P. Deligne: *Applications de la formule des traces aux sommes trigonométriques*, in SGA $4\frac{1}{2}$, Lecture Notes Math. 569, Springer, 1977.

[16] R. Dedekind and H. Weber: *Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen*, J. reine angew. Math. XCII (1882), 181–290; http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/resolveppn/?PPN=GDZPPN002158280.

[17] A. Entin: *On the Bateman-Horn conjecture for polynomials over large finite fields*, Compositio Math. 152 (2016), 2525–2544.

[18] É. Fouvry and Ph. Michel: *Sur certaines sommes d'exponentielles sur les nombres premiers*, Ann. Sci. ENS 31 (1998), 93–130.

[19] É. Fouvry, E. Kowalski and Ph. Michel: *Algebraic twists of modular forms and Hecke orbits*, Geom. Funct. Anal. 25 (2015), 580–657.

[20] C. Hall: L*-functions of twisted Legendre curves*, J. Number Theory 119 (2006), 128–147.

[21] D.R. Hast and V. Matei: *Higher moments of arithmetic functions in short intervals: a geometric perspective*, IMRN 2018, doi:10.1093/imrn/rnx310.

[22] C. Hooley: *On the number of divisors of quadratic polynomial*s, Acta Math. 110 (1963), 97–114.

[23] H. Iwaniec: *Almost-primes represented by quadratic polynomials*, Invent. math. 47 (1978), 171-188.

[24] H. Iwaniec and E. Kowalski: *Analytic number theory*, AMS Colloquium Publ. 53, AMS (2004).

[25] N.M. Katz: *Gauss sums, Kloosterman sums and monodromy*, Annals of Math. Studies 116, Princeton University Press, 1988.

[26] N.M. Katz: *Sums of Betti numbers in arbitrary characteristic*, Finite Fields Appl. 7 (2001), 29–44.

[27] N.M. Katz: *Larsen's alternative, moments and the monodromy of Lefschetz pencils*, in "Contributions to automorphic forms, geometry and number theory (collection in honor of J. Shalika's 60th birthday)", Johns Hopkins University Press 2004, 521–560.

[28] R. Nunes: *On the least squarefree number in an arithmetic progression*, Mathematika 63 (2017), 483–498.

[29] B. Rodgers: *Arithmetic functions in short intervals and the symmetric group*, Alg. Number Theory 12 (2018), 1243–1279.

[30] T. Saito: *The characteristic cycle and the singular support of a constructible sheaf*, Invent. math. 207 (2017), 597–695.

[31] L. Spiegelhofer: *The level of distribution of the Thue–Morse sequence*, Compositio Math. 156 (2020), 2560–2587.

[32] W. Sawin: *Singularities and vanishing cycles in number theory over function fields*, Res. Math. Sci. 7 (2020), paper no. 12; also arXiv:2005.09693v2.

[33] W. Sawin: *Square-root cancellation for sums of factorization functions over squarefree progressions in* $\mathbf{F}_q[t]$, to appear in Acta Mathematica, arXiv:2102.09730.

[34] W. Sawin: *Square-root cancellation for sums of factorization functions over short intervals in function fields*, Duke Math. J. 170 (2021), 997–1026; arXiv:1809.05137.

[35] W. Sawin: *Bounds for the stalks of perverse sheaves in characteristic p and a conjecture of Shende and Tsimerman*, Invent. math. 224 (2021), 1–32.

[36] W. Sawin, *mis en forme* by A. Forey, J. Fresán and E. Kowalski: *Quantitative sheaf theory*, to appear in Journal of the AMS; arXiv:2101.00635.

[37] W. Sawin and M. Shusterman: *On the Chowla and twin primes conjectures over* $\mathbf{F}_q[\mathrm{T}]$, Annals of Math. 196 (2022), 457–506; arXiv:1808.04001.

[38] W. Sawin and M. Shusterman: *Möbius cancellation on polynomial sequences and the quadratic Bateman-Horn conjecture over function fields*, Inventiones math. 229 (2022), 751–927; arXiv:2008.09905.

Emmanuel Kowalski

ETH Zürich, DMATH, Rämistrasse 101
8092 Zürich, Switzerland

E-mail: kowalski@math.ethz.ch

Séminaire BOURBAKI Avril 2022
73e année, 2021–2022, no 1194, p. 479 à 494
doi : 10.24033/ast.1195

MESURES CRISTALLINES ET APPLICATIONS
[*d'après* P. Kurasov, N. Lev, A. Olevskii, P. Sarnak, et M. Viazovska]

par **Yves Meyer**

Introduction

L'étude des mesures cristallines a une longue histoire qui remonte à la formule sommatoire de Poisson et à la preuve de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta, telle qu'elle fut donnée par Riemann lui-même. Ensuite interviennent Jean-Pierre Kahane, Szolem Mandelbrojt, et Andrew Guinand à la fin des années cinquante. Enfin apparaissent Maryna Viazovska et ses collaborateurs. Une mesure cristalline est une mesure atomique sur $\mathbb{R}^n$ dont le support est localement fini et dont la transformée de Fourier au sens des distributions est également une mesure atomique portée par un ensemble localement fini. L'exemple le plus simple est le peigne de Dirac. Soit λ_j une suite strictement croissante de nombres réels positifs. Sous l'hypothèse $\lambda_{j+1} - \lambda_j \geqslant \beta > 0$, Kahane et Mandelbrojt (1958) ont caractérisé les séries de Dirichlet $\sum_0^\infty c_j \lambda_j^{-s}$ qui convergent dans un demi-plan $\Re s > s_0$ et dont la somme peut se prolonger en une fonction méromorphe dans le plan complexe, ayant un seul pole en $s = 1$, et vérifiant le même type d'équation fonctionnelle que la fonction zêta de Riemann. Ces auteurs montrèrent qu'une mesure cristalline (en fait, un peigne de Dirac généralisé grâce au théorème de Nir Lev et d'Alexandre Olevskii) est toujours attachée à une telle série de Dirichlet. Cette même année Guinand construisait des mesures cristallines très différentes des peignes de Dirac. Puis le sujet fut abandonné pendant près de trente ans. La découverte des quasi-cristaux par Dan Shechtman en 1982 renouvela l'intérêt porté aux mesures cristallines. En premier lieu Lev et Olevskii observèrent que la preuve donnée par Guinand était incomplète et construisirent une mesure cristalline sur la droite réelle qui ne se réduise pas à un peigne de Dirac généralisé. Ensuite David Donoho et Philip Stark observèrent que l'étude des mesures cristallines peut être reliée au principe d'incertitude de Heisenberg en traitement du signal. Enfin Maryna Viazovska montra que les mesures cristallines sont présentes dans le problème suivant que nous désignerons sous le nom de *problème des restrictions*. Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Une fonction f de

©Astérisque 438, SMF 2022

la classe de Schwartz peut-elle être reconstruite en utilisant seulement sa restriction à Λ et la restriction de sa transformée de Fourier à F ? En résolvant le *problème des restrictions* Viazovska a, du même coup, trouvé, en dimension 8 et 24, la solution du problème de Kepler d'empilement optimal de boules d'un rayon donné. Une solution différente du *problème des restrictions* est fournie par un théorème remarquable dû à A. Bondarenko, D. Radchenko et K. Seip.

1. Freeman Dyson

Dans un essai intitulé *Birds and frogs*, Dyson (2009) conjecturait l'existence d'un lien entre les quasi-cristaux et l'hypothèse de Riemann :

> *Like every serious student of pure mathematics, when I was young I had dreams of proving the Riemann Hypothesis. I had some vague ideas that I thought might lead to a proof. In recent years, after the discovery of quasi-crystals, my ideas became a little less vague. I offer them here for the consideration of any young mathematician who has ambitions to win a Fields Medal. Quasi-crystals can exist in spaces of one, two, or three dimensions. From the point of view of physics, the three-dimensional quasi-crystals are the most interesting, since they inhabit our three-dimensional world and can be studied experimentally. From the point of view of a mathematician, one-dimensional quasi-crystals are much more interesting than two-dimensional or three-dimensional quasi-crystals because they exist in far greater variety. The mathematical definition of a quasi-crystal is as follows. a quasi-crystal is a distribution of discrete point masses whose Fourier transform is a distribution of discrete point frequencies. Or to say it more briefly, a quasi-crystal is a pure point distribution that has a pure point spectrum.*

En fait, Dyson n'avait pas complètement tort et nous verrons comment et pourquoi les *mesures cristallines* (et non les quasi-cristaux) sont liées à la fonction zêta de Riemann et à ses généralisations (séries L de Dirichlet, fonction zêta d'Epstein).

2. Définition des mesures cristallines

Quelques notations sont nécessaires. La transformée de Fourier d'une fonction f appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$ est définie par

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-2\pi i\, y \cdot x) f(x)\, dx. \tag{1}$$

On désigne par $\mathscr{F}$ l'opérateur ainsi défini. Alors $\mathscr{F}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est un automorphisme et, par dualité, $\mathscr{F}$ est également un automorphisme sur l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ des distributions tempérées. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est **localement fini** si, pour tout

$R > 0$, l'ensemble des $x \in E$ vérifiant $|x| \leqslant R$ est fini. Enfin δ_a ou $\delta_a(x)$ est la mesure de Dirac en $a \in \mathbb{R}^n$ définie par $\langle \delta_a, f \rangle = f(a)$ pour toute fonction continue f.

Définition 2.1. Une mesure atomique μ sur $\mathbb{R}^n$ est une mesure cristalline si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(1) Le support de μ est un ensemble localement fini,

(2) La mesure μ est une distribution tempérée,

(3) La transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ de μ est aussi une mesure atomique dont le support est un ensemble localement fini.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$ on définit l'exponentielle imaginaire $\mathbf{w}_y$ par $\mathbf{w}_y(x) = \exp(2\pi i x \cdot y)$. Alors $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ et $\widehat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y)\delta_y$ impliquent

$$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda = \sum_{y \in F} a(y)\mathbf{w}_y \tag{2}$$

La série $\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ a un sens géométrique évident parce que Λ est localement fini tandis que la série $\sum_{y \in F} a(y)\mathbf{w}_y$ converge au sens des distributions. On peut donc interpréter (2) en disant que $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ est un objet géométrique bien défini dont le développement en série de Fourier est donné par $\sum_{y \in F} a(y)\mathbf{w}_y$. La mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ appartient-elle à une classe d'objets mathématiques ayant une série de Fourier ? Ce serait le cas si la mesure $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ était presque périodique. Or il n'est pas vrai que toute mesure cristalline soit une mesure presque périodique. C'est cependant le cas pour la mesure cristalline μ construite par Kurasov et Sarnak (2020), mais pas pour sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$. Enfin il est probable que toute mesure cristalline soit une distribution presque périodique (Y. Meyer, 2017a ; Schwartz, 1950).

À chaque mesure cristalline μ est associée une variante de la formule sommatoire de Poisson. En effet, soit μ une mesure cristalline. Alors on a $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ et $\widehat{\mu} = \sum_{y \in F} a(y)\delta_y$. Il en résulte que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c(\lambda)\widehat{f}(\lambda) = \sum_{y \in F} a(y)f(y) \tag{3}$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit d'une nouvelle formule sommatoire de Poisson.

L'exemple le plus simple de mesure cristalline est le peigne de Dirac $\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_k$ pour lequel on a $\widehat{\mu} = \mu$ et donc $\sum_{m \in \mathbb{Z}} f(m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)$ pour toute fonction f de la classe de Schwartz. Il s'agit de la formule sommatoire de Poisson usuelle. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ un réseau et soit

$$\Gamma^* = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \exp(2\pi i y \cdot x) = 1, \forall x \in \Gamma\} \tag{4}$$

le réseau dual. On a alors

$$c_\Gamma \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma) = \sum_{y\in\Gamma^*} \widehat{f}(y) \tag{5}$$

pour toute fonction f de la classe de Schwartz. La constante c_Γ est le volume d'une domaine fondamental pour le réseau Γ. Nous élargissons la définition des peignes de Dirac en y incluant, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et tout réseau Γ, les mesures atomiques de la forme $\sum_{\gamma\in\Gamma+x_0} \delta_\gamma$.

Définition 2.2. Soit $N \geqslant 1$ un entier et soit σ_j, $j = 1, \dots, N$, un peigne de Dirac dont le support est un réseau translaté $x_j + \Gamma_j \subset \mathbb{R}^n$. Soit $F_j \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fini et soit $g_j(x) = \sum_{y\in F_j} c_j(y) \exp(2\pi i y \cdot x)$ une somme trigonométrique finie. Posons $\mu_j = g_j \sigma_j$. Alors $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_N$ est un peigne de Dirac généralisé.

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac généralisé est un peigne de Dirac généralisé. Existe-t-il d'autres mesures cristallines ? Kahane et Mandelbrojt (1958) ont abordé cette question tandis que Guinand (1959) proposait un exemple. Olevskii a attiré mon attention sur cet exemple en me signalant que Guinand n'en donnait pas une démonstration convaincante. La démonstration a pu être complétée grâce à l'aide de Philippe Michel (Y. Meyer, 2017b). Simultanément Lev et Olevskii (2016) construisaient une mesure cristalline qui n'est pas un peigne de Dirac généralisé .

En outre, Lev et Olevskii ont démontré le résultat suivant :

Théorème 2.3 (Lev et Olevskii, 2015). *En dimension* 1 *si μ est une mesure cristalline, si le support Λ de μ et le support S de sa transformée de Fourier sont des ensembles uniformément discrets, alors μ est un peigne de Dirac généralisé.*

Rappelons qu'un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est *uniformément discret* s'il existe un $r > 0$ tel que les boules de rayon r centrées en $\lambda \in \Lambda$ soient deux à deux disjointes. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est *relativement dense* s'il existe un $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ il existe un $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $|x - \lambda| \leqslant R$. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ est un *ensemble de Delone* s'il est uniformément discret et relativement dense. Les mesures cristallines étudiées dans Kahane et Mandelbrojt (1958) sont donc des peignes de Dirac généralisés. Lev et Olevskii ont étendu ce résultat en dimension $n \geqslant 2$ sous l'hypothèse que μ est une mesure positive. Le problème est toujours ouvert si μ est une mesure complexe arbitraire.

3. Mesures cristallines et fonctions zêta

L'utilisation de la formule sommatoire de Poisson dans la preuve de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta remonte à Riemann. En 1958 Titchmarsh, Kahane, Mandelbrojt et Guinand ont défini les mesures cristallines, ce qui leur permit d'étendre cette preuve à d'autres séries de Dirichlet. Plus précisément soit

$\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ une mesure cristalline sur $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il existe un exposant $s_0 > 0$ tel que

$$\sum_{\{\lambda\in\Lambda,\lambda\neq 0\}} |c(\lambda)||\lambda|^{-s_0} \tag{6}$$

soit fini. La même condition est imposée à $\widehat{\mu}$. Ces deux conditions sont satisfaites dans tous les exemples connus de mesures cristallines. À une telle mesure cristalline μ on associe une fonction $\zeta(\mu, s)$ de la variable complexe s définie par $\zeta(\mu, s) = \sum_{\{\lambda\in\Lambda,\lambda\neq 0\}} c(\lambda)|\lambda|^{-s}$, $s \in \mathbb{C}$. Cette fonction $\zeta(\mu, s)$ est évidemment analytique dans le demi plan ouvert défini par $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > s_0$. Si $n = 1$ et si μ est un peigne de Dirac on a $\zeta(\mu, s) = 2\zeta(s)$. Si μ est un peigne de Dirac sur un réseau, alors $\zeta(\mu, s)$ est la fonction zêta d'Epstein. Si χ est un caractère de Dirichlet, si $\chi(-1) = 1$, et si $\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(k)\delta_k$, alors $\zeta(\mu, s) = 2L(s, \chi)$.

Théorème 3.1. *Soit $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda$ une mesure cristalline sur $\mathbb{R}^n$ et soit $\widehat{\mu} = \sum_{y\in F} a(y)\delta_y$ la transformée de Fourier de μ. Soit*

$$\xi(\mu, s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(\mu, s). \tag{7}$$

Alors

$$\xi(\mu, s) - \frac{2a(0)}{n-s} - \frac{2c(0)}{s} = E(\mu, s) \tag{8}$$

est une fonction entière. On a

$$\xi(\mu, s) = \xi(\widehat{\mu}, n-s). \tag{9}$$

Ce théorème appartient au folklore du sujet. La preuve est une transcription de la démonstration par Riemann de l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction zêta. Il résulte de (8) que $\zeta(\mu, s)$ est une fonction méromorphe dans le plan complexe avec éventuellement un pôle en $s = n$. L'application aux séries $L(s, \chi)$ de Dirichlet est frappante. Soit χ un caractère de Dirichlet primitif de module N et $L(s, \chi) = \sum_1^\infty \chi(m)m^{-s}$. On suppose que $\chi(-1) = 1$ et l'on forme

$$\xi(s, \chi) = (N/\pi)^{s/2}\Gamma(s/2)L(s, \chi). \tag{10}$$

On pose $\tau(\chi) = \sum_1^N \chi(n)\exp(2\pi in/N)$ et $\alpha(\chi) = \sqrt{N}/\tau(\chi)$. Alors on a

$$\xi(1-s, \overline{\chi}) = \alpha(\chi)\xi(s, \chi). \tag{11}$$

Cette remarquable équation fonctionnelle découle du théorème 3.1. Pour le voir on pose $\sigma_\chi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi(k)\delta_k$. Cette mesure est un peigne de Dirac généralisé. On a $\zeta(\sigma_\chi, s) = 2L(s, \chi)$. En outre $\widehat{\sigma}_\chi = N^{-1}\tau(\chi)\sum_{m\in\mathbb{Z}} \overline{\chi}(-m)\delta_{m/N}$ et l'on conclut en utilisant le théorème 3.1. Si χ n'est pas le caractère principal, $L(s, \chi)$ est une fonction entière dans le plan complexe. Si χ est le caractère principal, $L(s, \chi)$ est méromorphe avec un pôle en $s = 1$.

4. Autres formules sommatoires

La formule sommatoire de Riemann–Weil s'écrit $\widehat{\mu} = \sigma + \omega$ où μ est une série de mesures de Dirac étendue aux zéros non triviaux de la fonction zêta de Riemann et σ est une série de mesures de Dirac en $\log(p^m)$, p premier, $m = 1, 2, \ldots$ Finalement $\omega(x) = -\log \pi + \Re\psi(1/4 + ix/2)$, $\psi(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma'(x)}$. Alors une décroissance exponentielle doit être imposée à la fonction de test ϕ pour donner un sens à $\langle \omega + \sigma, \phi \rangle$. La formule des traces de Selberg a une structure similaire avec également un terme intégral. Donc les mesures atomiques d'André Weil (1952) et d'Atle Selberg (1956) ne sont pas des mesures cristallines. Nous verrons que la construction de mesures cristallines intervient naturellement dans le *problème des restrictions*. Ce problème sera étudié dans la section 8. Bondarenko, Radchenko et Seip (2020) ont découvert une remarquable solution au *problème des restrictions*. Leur solution s'apparente à la formule sommatoire de Riemann–Weil mais ne comporte pas de terme intégral (voir théorème 9.2).

5. Pavel Kurasov et Peter Sarnak

Pavel Kurasov et Peter Sarnak ont démontré le résultat spectaculaire suivant :

Théorème 5.1. *Il existe un ensemble uniformément discret Λ de nombres réels tel que :*

(*a*) *L'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par Λ est de dimension infinie.*

(*b*) *$\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ est une mesure cristalline.*

La première démonstration de ce résultat par Kurasov utilisait ses travaux sur les *quantum graphs*. Cette preuve se situe dans le sillage de la formule des traces de Selberg. Une seconde démonstration repose sur l'analyse complexe. Enfin, et toujours en une variable réelle, Radchenko et Viazovska (2019a) ont caractérisé les mesures cristallines de la forme $\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$. On consultera aussi Olevskii et Ulanovskii, 2020. Nous présenterons dans la section suivante les grandes lignes d'une preuve géométrique du théorème de Kurasov et Sarnak. Cette nouvelle démonstration ouvre la voie à la construction de mesures cristallines « non triviales » en toute dimension. Une mesure cristalline « triviale » en dimension 2 est le produit tensoriel de deux mesures cristallines en dimension 1.

6. Mesures cristallines et quasi-cristaux

Selon Lagarias (2000), un quasi-cristal est un ensemble de Delone Λ tel que *la mesure de diffraction* de la mesure atomique $\mu_\Lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} \delta_\lambda$ soit aussi une mesure atomique. Plus généralement Lagarias considère les mesures de Radon μ sur $\mathbb{R}^n$ vérifiant

la condition

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\mu|(x+B) = C < \infty \tag{12}$$

où B désigne la boule unité. La mesure μ_Λ vérifie (12) si Λ est un ensemble de Delone. La mesure de diffraction d'une mesure μ vérifiant (12) serait formellement le carré du module de la transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ de μ. Mais $\widehat{\mu}$ est une distribution. La mesure de diffraction $|\widehat{\mu}|^2$ n'a pas de sens et doit être renormalisée. Cette renormalisation s'effectue en « divisant $|\widehat{\mu}|^2$ par des quantités infinies » ce que nous faisons maintenant. Soit χ_R la fonction indicatrice de la boule B_R de centre 0 et de rayon $R \geqslant 1$ et soit $|B_R|$ le volume de cette boule. On remplace μ par sa version tronquée $\chi_R\,\mu$ et l'on calcule le carré du module $|\widehat{\chi_R\,\mu}|^2$ de la transformée de Fourier de cette mesure tronquée. Enfin la mesure de diffraction de μ est la limite, quand R tend vers l'infini, de $g_R = |B_R|^{-1}|\widehat{\chi_R\,\mu}|^2$, en supposant que cette limite existe au sens de la convergence vague des mesures. Nous rencontrons une difficulté si nous essayons d'appliquer cette définition à une mesure cristalline. En effet beaucoup de mesures cristallines ne vérifient pas la condition (12) (Y. Meyer, 2017a). On doit donc adopter une définition plus souple de la mesure de diffraction. Pour ce faire on désigne par ϕ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ positive ou nulle, à support compact et telle que $\|\phi\|_2 = 1$. On pose $\phi_j(x) = \phi(jx), j \geqslant 1$. Finalement la mesure de diffraction de μ est la limite, au sens des distributions, quand j tend vers l'infini, de $j^n|\widehat{\mu} * \phi_j|^2$. Si μ est une mesure presque-périodique dont la série de Fourier est $\sum c_j \exp(2\pi i\omega_j \cdot x)$ sa mesure de diffraction est la mesure atomique $\sum |c_j|^2\delta_{\omega_j}$. Malheureusement une mesure cristalline n'est pas nécessairement une mesure presque-périodique. Cependant si $\mu = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\delta_\lambda = \sum_{y\in F} a(y)\mathbf{w}_y$ est une mesure cristalline et si nous adoptons la définition souple, alors la mesure de diffraction de μ est $\sum_{y\in F} |a(y)|^2\delta_y$.

En quoi les mesures cristallines diffèrent-elles des quasi-cristaux ? Si Λ est un quasi-cristal selon Lagarias et si F est un ensemble fini, alors $\Lambda \cup F$ est aussi un quasi-cristal. Ceci est faux pour les mesures cristallines. Si Λ est un ensemble de Delone et si $\mu_\Lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda} \delta_\lambda$ est une mesure cristalline, Λ est un quasi-cristal, comme le montre la discussion précédente. La réciproque n'est pas vraie. Pour mieux comprendre les ressemblances et les différences entre les quasi-cristaux et les mesures cristallines nous limiterons la discussion à la dimension 1. Voici comment construire une mesure cristalline. On part d'un entier $n \geqslant 2$ et de n nombres réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ qui sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. On désigne par $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ le tore n dimensionel et par $h\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}^n$ l'homomorphisme défini par $h(t) = (\alpha_1 t, \ldots, \alpha_n t)$. Ensuite on désigne par $V \subset \mathbb{T}^n$ une hypersurface sans bord. On suppose que $h(\mathbb{R})$ est partout transverse à V. Soit $d\sigma$ la mesure de surface sur V and soit $\mu = \omega d\sigma$ une mesure supportée par V dont la densité ω est continûment différentiable sur V. Nous sommes presque prêts pour construire une mesure cristalline. Il suffit de dérouler μ sur la droite réelle pour obtenir la mesure atomique $\kappa = \mu \circ h$ qui est notre candidate pour être une mesure

cristalline. Cette mesure κ est une combinaison linéaire de mesures de Dirac portées par $\Lambda = \{t \in \mathbb{R}; h(t) \in V\}$. Si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot x) \tag{13}$$

est la série de Fourier de μ sur $\mathbb{T}^n$ alors

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} a(k) \exp(2\pi i k \cdot \alpha t) \tag{14}$$

est la série de Fourier de la mesure atomique κ. On a posé $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Sous une simple hypothèse spectrale sur μ la mesure atomique κ sera une mesure cristalline. Soit $S \subset \mathbb{Z}^n$ l'ensemble défini par $a(k) \neq 0$. L'hypothèse spectrale est que $F = \{k \cdot \alpha, k \in S\}$ soit localement fini.

Pour démontrer le théorème de Kurasov et Sarnak, il suffit de choisir V et ω de sorte que la propriété spectrale soit satisfaite et que les coefficients de la mesure atomique κ soient égaux à 1. Nous renvoyons à Y. Meyer (2022) pour les détails.

Les quasi-cristaux sont modélisés par les *model sets*. La définition d'un *model set* utilise la recette précédente à ceci près que V est maintenant la projection sur $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ d'une partie compacte d'un hyperplan affine de $\mathbb{R}^n$. Alors si en outre V est une hypersurface sans bord, V est nécessairement un translaté d'un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}^n$. Dans ce cas, Λ est un translaté de $a\mathbb{Z}, a > 0$, et la mesure cristalline est un peigne de Dirac généralisé.

7. Le traitement du signal

Donoho et Stark (1989) ont étudié une classe de signaux f qui peuvent être modélisés par une somme $u + v$ entre une combinaison linéaire u d'un petit nombre de spikes (un spike représente une impulsion très brève et très énergétique) et une combinaison linéaire v d'un petit nombre de structures oscillantes. Le problème est alors d'extraire u du signal donné f. Donoho et Stark (1989) relient ce problème au principe d'incertitude de Heisenberg. Ces modèles font partie du programme plus général des modèles « multi-couches » (F. G. Meyer, Averbuch et Coifman, 2002). Par exemple les images peuvent être modélisées par une somme $u + v$ entre une composante u représentant les objets contenus dans l'image et une composante v représentant les textures et le bruit. La composante u a une représentation concise dans une base d'ondelettes tandis que la texture v doit être analysée dans le domaine de Fourier (Donoho et Stark, 1989 ; F. G. Meyer, Averbuch et Coifman, 2002 ; Tropp, 2008). Nous allons montrer que ces modèles ont un lien avec les mesures cristallines.

Dans la version discrétisée du traitement du signal, la droite réelle est remplacée par l'anneau $\mathbb{Z}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ et les signaux étudiés sont des éléments de l'espace euclidien $\mathscr{H} = \ell^2(\mathbb{Z}_N)$. La norme de $f \in \mathscr{H}$ est simplement $\|f\| = (\sum_{j\in\mathbb{Z}_N} |f(j)|^2)^{1/2}$. La Fast Fourier Transform ou FFT a été développée dans ce cadre discret. On désigne par $|E|$ le cardinal de l'ensemble E. Pour tout $j \in \mathbb{Z}_N$ le *spike* $\mathbf{e}_j \in \mathscr{H}$ est défini par $\mathbf{e}_j(k) = 0$ si $k \neq j$ et $\mathbf{e}_j(j) = 1$. De même pour $k \in \mathbb{Z}_N$ *l'onde* $\mathbf{w}_k \in \mathscr{H}$ est définie par

$$\mathbf{w}_k(m) = N^{-1/2} \exp(2\pi ikm/N),\ 0 \leqslant m \leqslant N-1.$$

La collection $\mathbf{e}_j, j \in \mathbb{Z}_N$, est la base canonique de $\mathscr{H}$ tandis que $\mathbf{w}_k, k \in \mathbb{Z}_N$, est la base de Fourier. Les coefficients de Fourier de $f \in \mathscr{H}$ sont les produits scalaires $\langle f, \mathbf{w}_k\rangle, k \in \mathbb{Z}_N$. Dans ce contexte Donoho et Stark étudient les signaux f qui sont des combinaisons linéaires de quelques spikes et de quelques ondes :

$$f = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \sum_{k\in F} \beta_k \mathbf{w}_k \tag{15}$$

où α_λ et β_k sont des coefficients scalaires et $\Lambda \subset \mathbb{Z}_N$ et $F \subset \mathbb{Z}_N$ sont des ensembles finis de petite cardinalité. Si, Λ et F étant donnés, les vecteurs $\mathbf{e}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, et $\mathbf{w}_k, k \in F$, sont linéairement indépendants, alors $\|f\|$ et $(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha_\lambda|^2 + \sum_{k\in F} |\beta_k|^2)^{1/2}$ sont des normes équivalentes sans que l'on sache pour autant quantifier cette équivalence. Donoho et Stark ont apporté une réponse à ce problème (théorème 7.2). Si, en raisonnant par l'absurde, les $M = |\Lambda| + |F|$ vecteurs $\mathbf{e}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, et $\mathbf{w}_k$, $k \in F$ étaient linéairement dépendants, il existerait une relation de dépendance linéaire nont triviale

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \sum_{k\in F} \beta_k \mathbf{w}_k = 0 \tag{16}$$

Il existerait donc un signal $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda$ qui est porté par Λ et dont la transformée de Fourier $\widehat{f} = -\sum_{k\in F} \beta_k \mathbf{e}_k$ est portée par F. Si $|\Lambda|$ et $|F|$ sont trop petits ceci est interdit par le principe d'incertitude de Heisenberg. Pour préciser ce point on définit un entier H_N par la propriété suivante :

Définition 7.1. L'entier H_N est le plus grand entier H tel que pour tout Λ et tout F la condition $|\Lambda| + |F| \leqslant H$ entraîne que les vecteurs $\mathbf{e}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, et $\mathbf{w}_k$, $k \in F$, sont linéairement indépendants.

Donoho et Stark (1989) ont démontré le théorème suivant :

Théorème 7.2. *Si le produit $|\Lambda||F|$ est strictement inférieur à N, les vecteurs $\mathbf{e}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, $\mathbf{w}_k$, $k \in F$, sont linéairement indépendants. Plus précisément pour tout $f = \sum_{\lambda\in\Lambda} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda + \sum_{k\in F} \beta_k \mathbf{w}_k$ on a, en posant $\gamma_N = (|\Lambda||F|/N)^{1/2} \in (0,1)$,*

$$\|f\| \geqslant (1-\gamma_N)^{1/2} \Big(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\alpha_\lambda|^2 + \sum_{k\in F} |\beta_k|^2\Big)^{1/2} \tag{17}$$

On a également

$$\|f\| \leqslant (1+\gamma_N)^{1/2}(\sum_{\lambda\in\Lambda}|\alpha_\lambda|^2+\sum_{k\in F}|\beta_k|^2)^{1/2} \tag{18}$$

Si $|\Lambda||F| = N$ on ne peut pas conclure. Par exemple, si $|\Lambda| = N$ et $F = \{k_0\}$, les N vecteurs $\mathbf{e}_\lambda$ et le vecteur $\mathbf{w}_{k_0}$, sont linéairement dépendants. Revenons à (16). Pour N donné nous chercherons les relations non triviales de dépendance linéaire les plus courtes possibles. Ce sont les plus intéressantes.

Définition 7.3. Définissons M_N comme la borne inférieure des longueurs $M = |\Lambda| + |F|$ des relations non triviales (16).

On a évidemment $M_N = H_N + 1$. Tao (2005) a complété le théorème 7.2 en démontrant le résultat suivant :

Théorème 7.4 (voir Tropp, 2008, Theorem 4). *On a* $2\sqrt{N} \leqslant M_N \leqslant N+1$ *et* $M_N = N+1$ *si et seulement si N est un nombre premier.*

Disons un mot sur la borne inférieure. Nous supposerons que N est un carré parfait ($N = m^2$) et que $|\Lambda| = |F| = m$. Dans ces conditions on choisit $F = \Lambda = \{0, m, 2m, \dots, (m-1)m\}$. Alors on a

$$\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_m + \cdots + \mathbf{e}_{(m-1)m} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_m + \cdots + \mathbf{w}_{(m-1)m}.$$

On a bien $M = 2m = 2\sqrt{N}$. On retrouve ici la version discrète des peignes de Dirac. Mais si N est un nombre premier ces peignes de Dirac ne peuvent exister.

En partant de la discussion précédente, Kolountzakis (2016) passa du discret au continu et construisit une mesure crystalline sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas un peigne de Dirac généralisé. Supposons que l'entier N soit divisible par 4 et soit un carré parfait. Soit $\Lambda_N = \{\frac{1}{4}N, \frac{1}{4}N+1, \dots, \frac{3}{4}N\}$ et $F_N = \Lambda_N$. On a $|\Lambda_N| + |F_N| = N+2 > N$. Il existe donc un vecteur non nul $f_N \in \mathscr{H}$ dont le support est inclus dans Λ_N et dont le support de la transformée de Fourier est inclus dans F_N. Kolountzakis regarde f_N comme une suite N-périodique définie sur $\mathbb{Z}$. Soit $g_N(x) = \sum_0^{N-1} f_N(k)\exp(2\pi ikx/N)$. Par construction on a $g_N(\ell) = 0$ si $0 \leqslant |\ell| \leqslant (N/4)-1$. Posons $N = m^2$. La mesure atomique $\sigma_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_N(k)\delta_{k/m}$ est m-périodique et l'on a $\widehat{\sigma}_m = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} g_N(\ell)\delta_{l/m}$. Kolountzakis utilise alors la remarque suivante :

Lemme 7.5. *Soit* τ_m, $m = 1, 2, \dots$, *une suite de mesures cristallines. Supposons que* τ_m *ainsi que sa transformée de Fourier soient portées par* $E_m = \{x; |x| \geqslant R_m\}$ *où* R_m *tend vers l'infini avec m. Supposons que* $\sum_1^\infty \tau_m$ *converge au sens des distributions. Alors* $\sum_1^\infty \tau_m$ *est une mesure cristalline.*

Si, par exemple, on impose $\|f_N\|_2 \leqslant 1$, ce qui est évidemment possible, la série $\sum_1^\infty \sigma_m$ converge au sens des distributions vers une mesure atomique σ. D'après le lemme 7.5, σ est une mesure cristalline. Cependant σ n'est pas un peigne de Dirac généralisé. En suivant cette approche on peut facilement construire une mesure cristalline σ, qui n'est pas un peigne de Dirac généralisé, et telle que $\widehat{\sigma} = \beta\sigma$ où $\beta \in \{1, -1, i, -i\}$.

8. Le problème des restrictions

La restriction d'une fonction f à un ensemble E est notée $f|_E$.

Définition 8.1. Soient $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ deux ensembles localement finis. Alors nous dirons que Λ et F se complètent si la propriété suivante est satisfaite : pour toute fonction f appartenant à la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ les propriétés $f|_\Lambda = 0$ et $\widehat{f}|_F = 0$ entraînent $f = 0$.

Une fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ne peut être déterminée par sa restriction à un sous-ensemble fermé Λ de $\mathbb{R}^n$ qui ne soit pas $\mathbb{R}^n$ tout entier. Mais, sous certaines conditions portant sur Λ et F, l'information donnée par $f|_\Lambda$ peut être complétée par celle donnée par $\widehat{f}_F$. Ces deux restrictions $f|_\Lambda$ et $\widehat{f}|_F$ déterminent alors f de façon unique. Cela explique la terminologie employée. Si, par exemple, Λ est un réseau, il n'existe pas d'ensemble localement fini F complétant Λ. En sens inverse, voici un exemple en dimension 1 où Λ et F se complètent. Considérons l'ensemble Λ_j des $x \in 2^{-j}\mathbb{Z}$ vérifiant $|x| > 2^{j-2}$. Soit $\Lambda = \bigcup_0^\infty \Lambda_j$. Enfin soit $F = \Lambda$. Alors Λ et F se complètent. On notera que la mesure cristalline de Kolountzakis est portée par Λ. Le lien entre le *problème des restrictions* et la construction des mesures cristallines sera expliqué ci-dessous. Mais quel est le rôle de la classe de Schwartz dans la définition 8.1 ? Si Λ et F se complètent, si f et $\widehat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^n)$, et si $f|_\Lambda = 0$ et $\widehat{f}|_F = 0$ a-t-on $f = 0$? Nous ne le savons pas. Nous faisons maintenant deux hypothèses sur Λ et F. Ces hypothèses sont vérifiées dans l'énoncé du théorème 8.5, mais non dans celui du théorème 9.2. Rappelons que le cardinal d'un ensemble E est noté $|E|$. On suppose que (i) $|\Lambda \cap \{|x| \leqslant j\}| \leqslant C_0 j^{N_0}$ pour une certaine constante $C_0 > 0$, un certain exposant $N_0 \geqslant 0$ et pour tout $j \geqslant 1$. On suppose également que (ii) la distance entre deux points distincts appartenant à $\Lambda \cap \{|x| \leqslant j\}$ est supérieure ou égale à $C_1 j^{-N_1}$ pour une certaine constante $C_1 > 0$, un certain exposant $N_1 \geqslant 0$ et pour tout $j \geqslant 1$. Dans ces conditions l'ensemble des restrictions à Λ des fonctions $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est exactement l'espace $\mathscr{S}(\Lambda)$ des suites indexées par Λ et ayant une décroissance rapide à l'infini. Nous faisons les mêmes hypothèses (i) et (ii) sur F. Voici l'une des versions quantitatives de la définition 8.1. On pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|$.

Conjecture 8.2. *Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe une constante C et un exposant N tels que, pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait :*

$$\|f\|_\infty \leqslant C \sum_{\lambda\in\Lambda} (1+|\lambda|)^N |f(\lambda)| + C \sum_{y\in F} (1+|y|)^N |\widehat{f}(y)|. \tag{19}$$

Cette conjecture peut être précisée.

Conjecture 8.3. *Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe un opérateur linéaire et continu $B\colon \mathscr{S}(\Lambda) \times \mathscr{S}(F) \mapsto \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tel que pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ on ait*

$$u = f|_\Lambda, v = \widehat{f}|_F \Rightarrow f = B(u,v). \tag{20}$$

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la forme linéaire $f \mapsto f(x_0)$ est évidemment continue sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. C'est donc aussi une forme linéaire continue sur $\mathscr{S}(\Lambda) \times \mathscr{S}(F)$. Il existe donc deux suites à croissance lente $c(\lambda, x_0)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a(y, x_0)$, $y \in F$, telles que $u = f|_\Lambda$ et $v = \widehat{f}|_F$ entraînent $f(x_0) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda, x_0)u(\lambda) + \sum_{y\in F} a(y, x_0)v(y)$. Finalement

$$\delta_{x_0} = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda, x_0)\delta_\lambda + \sum_{y\in F} a(y, x_0)\mathbf{w}_{-y}. \tag{21}$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la transformée de Fourier au sens des distributions de la mesure atomique $\mu = \delta_{x_0} - \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda, x_0)\delta_\lambda$ est la mesure atomique $\sum_{y\in F} a(y, x_0)\delta_{-y}$. Donc μ est une mesure cristalline. Toute solution du *problème des restrictions* donne naissance à une infinité de mesures cristallines, comme le remarque Maryna Viazovska. Mais la réciproque n'est pas vraie. Le peigne de Dirac, qui est une mesure cristalline, ne fournit pas une solution du *problème des restrictions*.

Voici une conjecture légèrement plus forte où l'on précise la dépendance en x_0 des coefficients $c(\lambda, x_0)$ et $a(y, x_0)$ dans (21) :

Conjecture 8.4. *Si Λ et F se complètent et vérifient les propriétés (i) et (ii), il existe deux familles $c_\lambda(x)$, $\lambda \in \Lambda$, et $a_y(x)$, $y \in F$, de fonctions de la classe de Schwartz telles que pour toute fonction f dans la classe de Schwartz on ait*

$$f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda(x) f(\lambda) + \sum_{y\in F} a_y(x)\widehat{f}(y). \tag{22}$$

Nous ne connaissons aucun exemple où $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ soit canoniquement isomorphe à $\mathscr{S}(\Lambda) \times \mathscr{S}(F)$. Dans le cas particulier où $\Lambda = F = \{\pm\sqrt{k}, k = 0, 1, \ldots\}$, Danylo Radchenko et Maryna Viazovska ont démontré le beau résultat suivant :

Théorème 8.5 (Radchenko et Viazovska, 2019b). *En une dimension il existe une suite $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots$, de fonctions de la classe de Schwartz qui sont paires, à valeurs réelles, et telles que pour toute fonction paire f de la classe de Schwartz on ait*

$$f(x) = \sum_0^\infty a_k(x) f(\sqrt{k}) + \sum_0^\infty \widehat{a}_k(x) \widehat{f}(\sqrt{k}) \tag{23}$$

où cette série converge uniformément sur tout compact et au sens des distributions vers f .

Ceci devient faux si f est une fonction impaire. En effet considérons $g(x) = \sin(\pi x^2)/\sinh(\pi x)$. On a $g(x) = 0$ si $x = \pm k^{1/2}$, $k = 0, 1, \ldots$, et la transformée de Fourier de g est $-ig$.

Corollaire 8.6. *Soit $\Lambda = \{\pm\sqrt{k}, k = 0, 1, \ldots\}$ et $F = \Lambda + \{-1, 0, 1\}$. Alors Λ et F se complètent.*

9. Le problème de Kepler

Kepler posa le problème de ranger, dans l'espace usuel, une infinité de boules de rayon donné de façon que la densité de cette disposition soit la plus grande possible. Voici la définition de cette densité. On pose $B_R = \{x; |x| \leqslant R\}$ et l'on désigne par $|B_R|$ le volume de B_R. Ensuite on divise par $|B_R|$ le volume occupé par les boules de rayon donné à l'intérieur de B_R et enfin on calcule la limite supérieure de ce quotient quand R tend vers l'infini. On obtient ainsi la densité de l'empilement. Ce problème peut évidemment être formulé en dimension quelconque. Maryna Viazovska a découvert la disposition optimale en dimensions 8 et 24. Viazovska est partie de l'approche du problème par Henry Cohn et Noam Elkies. Cette approche est basée sur la programmation linéaire utilisée pour les codes correcteurs d'erreurs :

Théorème 9.1 (Viazovska, 2017, 2018). *Soit ϕ une fonction à valeurs réelles appartenant à la classe de Schwartz class $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ et soit $\beta > 0$ un nombre réel tels que $\phi(0) = \widehat{\phi}(0) = 1$, $\phi(x) \leqslant 0$ pour $|x| \geqslant \beta$ et $\widehat{\phi}(y) \geqslant 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$. Alors la densité d'un empilement de boules dans $\mathbb{R}^n$ ne peut dépasser $\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}(\beta/2)^n$.*

Observons que l'on n'affaiblit pas le théorème 9.1 en supposant que ϕ est une fonction radiale. Nous nous concentrerons sur la dimension 8. Le réseau Λ_8 est défini par

$$\Lambda_8 = \{x \in \mathbb{Z}^8 \cup (\mathbb{Z} + 1/2)^8;\ x_1 + \cdots + x_8 \in 2\mathbb{Z}\}. \tag{24}$$

Le réseau dual de Λ_8 est Λ_8. On a donc pour toute fonction f de la classe de Schwartz

$$\sum_{\lambda \in \Lambda_8} f(\lambda) = \sum_{\lambda \in \Lambda_8} \widehat{f}(\lambda). \tag{25}$$

Viazovska (2017, 2018) démontre que la disposition optimale s'obtient avec des boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda \in \Lambda_8$. Ces boules sont deux à deux disjointes (en ignorant les points de contact). Pour démontrer ce résultat Viazovska utilise le théorème 9.1 avec $\beta = \sqrt{2}$. Voici comment Viazovska cherche ϕ (voir aussi Oesterlé, 2019). Si ϕ vérifie les conditions du théorème 9.1, on a $\sum_{\lambda\in\Lambda_8} \phi(\lambda) = 1 - a$ où $a \geqslant 0$ et $\sum_{y\in\Lambda_8} \widehat{\phi}(y) = 1 + b$ où $b \geqslant 0$. Il résulte de (25) que $1 - a = 1 + b$ et donc $a = b = 0$. Il en résulte que ϕ, ainsi que sa transformée de Fourier, sont nulles sur $\Lambda_8 \setminus \{0\}$. Puisque ϕ est une fonction radiale, elle est nulle, ainsi que sa transformée de Fourier, sur toutes les sphères S_m, $m \in \mathbb{N}, n \geqslant 1$, centrées en 0 et de rayon $\sqrt{2m}$. La recherche de ϕ se rattache donc aux problèmes d'interpolation de la section 8. En utilisant cette observation, Viazovska construisit une fonction radiale de la classe de Schwartz $\phi \in \mathbb{R}^8$ telle que $\phi(x) \leqslant 0$ pour $|x| \geqslant \sqrt{2}$, $\widehat{\phi} \geqslant 0$ et $\phi(0) = \widehat{\phi}(0) = 1$. On applique alors le théorème de Cohn et Elkies. La densité d'un empilement de boules de rayon r dans $\mathbb{R}^8$ ne peut donc dépasser $\frac{\pi^4}{384}$. Mais, comme on le vérifie par un calcul direct, $\frac{\pi^4}{384}$ est exactement la densité d'un empilement de boules de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées sur le réseau Λ_8. Cela termine la preuve. Observons qu'il y a exactement 240 sphères S_j de rayon $\sqrt{2}/2$ centrées en $\lambda_j \in \Lambda_8$, $1 \leqslant j \leqslant 240$, qui sont tangentes à la sphère de rayon $\sqrt{2}/2$ centrée en 0. Cette configuration est remarquable parce que 240 ne peut être dépassé. C'est, en effet, le *kissing number* en dimension 8. C'est le plus grand nombre de boules disjointes (d'un rayon donné r) qui sont tangentes à une sphère de rayon r.

Dans la solution du *problème des restrictions* donnée par Bondarenko, Radchenko et Seip (2020) (voir théorème 9.2) l'ensemble des fonctions de test qui est utilisé est un sous-espace $\mathscr{E}$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ composé de fonctions entières. Ceci est, en partie, dû au problème posé par l'hypothèse de Riemann. Rien n'assure donc que les mesures atomiques qui interviennent implicitement dans le théorème 9.2 soient des distributions tempérées.

Théorème 9.2. *Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des zéros non triviaux ρ de la fonction ζ de Riemann. Soit Λ l'ensemble des nombres réels ou complexes $\lambda = \frac{\rho-1/2}{i}$, $\rho \in \mathscr{R}$. Soit $F = \{\frac{\log n}{4\pi}, n \in \mathbb{N}\}$. Alors toute fonction de test paire f dans la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier a un support compact est déterminée de façon unique par ses valeurs prises sur Λ et par les valeurs prises par sa transformée de Fourier sur F. Si un zéro non trivial $\rho = 1/2 + i\lambda$ apparaît avec une multiplicité égale à $m(\rho)$ les valeurs des $m(\rho) - 1$ dérivées $f^{(m)}(\lambda)$, $0 \leqslant m \leqslant m(\rho) - 1$ de f entrent en compte.*

Parce que f est une fonction entière de type exponentiel, elle est déterminée par la connaissance des valeurs $f(\lambda)$. Ceci ne permet cependant pas de reconstruire f de façon stable. Cette reconstruction stable s'effectue grâce à l'information fournie par la restriction à F de la transformée de Fourier de f. On voit ici les différents aspects que peut prendre le *problème des restrictions.*

Références

Bondarenko, A., Radchenko, D. et Seip, K. (2020). *Fourier interpolation with zeros of zeta and L-functions*. arXiv : 2005.02996 [math.NT].

Donoho, D. L. et Stark, P. B. (1989). « Uncertainty principles and signal recovery », English. *SIAM J. Appl. Math.* **49** (3), p. 906-931.

Dyson, F. (2009). « Birds and frogs », English. *Notices Am. Math. Soc.* **56** (2), p. 212-223.

Guinand, A. P. (1959). « Concordance and the harmonic analysis of sequences », English. *Acta Math.* **101**, p. 235-271.

Kahane, J.-P. et Mandelbrojt, S. (1958). « Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson », French. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.* (3) **75**, p. 57-80.

Kolountzakis, M. N. (2016). « Fourier pairs of discrete support with little structure », English. *J. Fourier Anal. Appl.* **22** (1), p. 1-5.

Kurasov, P. et Sarnak, P. (2020). « Stable polynomials and crystalline measures », English. *J. Math. Phys.* **61** (8), p. 083501, 13.

Lagarias, J. C. (2000). « Mathematical quasicrystals and the problem of diffraction. » English. In : *Directions in mathematical quasicrystals*. Providence, RI : AMS, American Mathematical Society, p. 61-93.

Lev, N. et Olevskii, A. (2015). « Quasicrystals and Poisson's summation formula », English. *Invent. Math.* **200** (2), p. 585-606.

——— (2016). « Quasicrystals with discrete support and spectrum », English. *Rev. Mat. Iberoam.* **32** (4), p. 1341-1352.

Meyer, F. G., Averbuch, A. Z. et Coifman, R. R. (2002). « Multilayered image representation : application to image compression », *IEEE Trans. Image Process.* **11** (9), p. 1072-1080.

Meyer, Y. (2017a). « Guinand's measures are almost periodic distributions », English. *Bull. Hell. Math. Soc.* **61**, p. 11-20.

——— (2017b). « Measures with locally finite support and spectrum », English. *Rev. Mat. Iberoam.* **33** (3), p. 1025-1036.

——— (2022). « Curved model sets and crystalline measures », in : *Theoretical Physics, Wavelets, analysis, Genomics. An Indisciplinary Tribute to Alex Grossmann*. Appl. Numer. Harmon. Anal. Birkhäuser/Springer, Cham.

Oesterlé, J. (2019). « Densité maximale des empilements de sphères en dimensions 8 et 24 [d'après Maryna S. Viazovska et al.] » In : 407. Séminaire Bourbaki. Vol. 2016/2017. Exposés 1120–1135, Exp. No. 1133, 455-478.

Olevskii, A. et Ulanovskii, A. (2020). *A Simple Crystalline Measure*. arXiv : 2006.12037 [math.CA].

Radchenko, D. et Viazovska, M. (2019a). « Fourier interpolation on the real line », English. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **129**, p. 51-81.

Radchenko, D. et Viazovska, M. (2019b). « Fourier interpolation on the real line », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **129**, p. 51-81.

Schwartz, L. (1950). *Théorie des distributions. Tome I*. French. Actualités Scientifiques Industrielles No. 1091. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, No. IX. Paris : Hermann & Cie. 148 p. (1950).

Tao, T. (2005). « An uncertainty principle for cyclic groups of prime order », English. *Math. Res. Lett.* **12** (1), p. 121-127.

Tropp, J. A. (2008). « On the linear independence of spikes and sines », English. *J. Fourier Anal. Appl.* **14** (5-6), p. 838-858.

Viazovska, M. (2017). « The sphere packing problem in dimension 8 », *Ann. of Math.* (2) **185** (3), p. 991-1015.

——— (2018). « Sharp sphere packings », English. In : *Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2018, Rio de Janeiro, Brazil, August 1–9, 2018. Volume II. Invited lectures*. Hackensack, NJ : World Scientific ; Rio de Janeiro : Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), p. 455-466.

Yves Meyer

13, rue des Potiers,
92260 Fontenay-aux-Roses

E-mail : Yves.Meyer305@orange.fr

Séminaire BOURBAKI Juin 2022
73e année, 2021–2022, no 1195, p. 495 à 546
doi : 10.24033/ast.1196

LA CONJECTURE DU $K(\pi, 1)$ POUR LES GROUPES D'ARTIN AFFINES
[*d'après* Giovanni Paolini et Mario Salvetti]

par **Thomas Haettel**

Introduction

Les groupes de tresses ont été définis formellement par Artin (1925), et sont depuis un objet d'étude fascinant, grâce à leurs multiples définitions et connexions avec d'autres domaines (nous renvoyons le lecteur à Kassel et Turaev (2008) et Farb et Margalit (2012) pour des introductions aux groupes de tresses). L'une des manières de définir le groupe de tresses à n brins est de le voir comme le groupe fondamental de l'espace de configuration de n points du plan

$$Y = \{F \subset \mathbb{C}, |F| = n\}.$$

Ainsi, si on considère l'arrangement d'hyperplans $\{z_i = z_j\}_{i \neq j}$ dans $\mathbb{C}^n$, alors l'espace de configuration Y peut aussi s'interpréter comme le complémentaire de cet arrangement d'hyperplans

$$\{z \in \mathbb{C}^n \mid z_i \neq z_j \text{ si } i \neq j\},$$

quotienté par l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$.

Chaque tresse peut se représenter comme un lacet dans l'espace de configuration de n points du plan, c'est-à-dire comme n chemins dans le plan ne s'intersectant pas à chaque instant. En représentant le temps par exemple de haut en bas, on peut ainsi obtenir un dessin classique de tresse comme dans la figure 1.

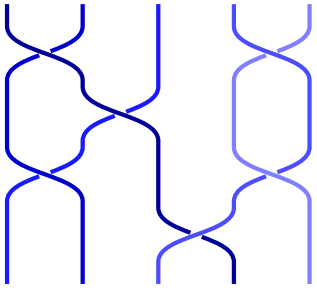


Figure 1 – Une représentation d'une tresse à cinq brins.

©Astérisque 438, SMF 2022

Si l'on considère un groupe de Coxeter W quelconque, il possède une action par réflexions sur un cône d'un espace vectoriel appelé cône de Tits (Bourbaki, 1968) généralisant l'action linéaire de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{R}^n$. On peut lui associer un espace topologique Y_W correspondant au complémentaire de l'arrangement des hyperplans de réflexion. L'exemple le plus simple est donné par le cas d'un groupe de Coxeter affine W, agissant par réflexions sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas, l'espace Y_W est le complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ de la réunion des complexifiés des hyperplans de réflexions, quotienté par W. L'espace Y_W est également appelé l'espace de configuration de type W, par analogie avec le cas des groupes de tresses.

Le groupe fondamental G_W de Y_W est appelé groupe d'Artin, ou groupe d'Artin–Tits, car il a été défini par Tits (1966). Il possède une présentation très simple, analogue à la présentation d'Artin des groupes de tresses (voir dans la partie 2). Cependant, hormis dans des cas très particuliers, la topologie de l'espace de configuration Y_W et les propriétés algébriques du groupe d'Artin G_W restent largement mystérieuses (Charney, 2016 ; Godelle et Paris, 2012 ; McCammond, 2017). Côté algébrique, on ne sait toujours pas si le groupe d'Artin G_W est sans torsion, on ne connaît pas son centre, et on ne sait pas résoudre le problème du mot. Côté topologique, la grande question ouverte concernant cet espace est la suivante :

Conjecture (Conjecture du $K(\pi,1)$). *L'espace de configuration Y_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin G_W.*

Rappelons que Y_W est un espace classifiant pour G_W si $\pi_1(Y_W) = G_W$ et si Y_W est asphérique, c'est-à-dire que pour tout $i \geqslant 2$, nous avons $\pi_i(Y_W) = 0$. Ceci est donc équivalent à la contractibilité du revêtement universel de Y_W. Cette question a été étudiée, essentiellement dans le cas où W est fini, par Arnol'd, Brieskorn, Deligne, Pham et Thom dans les années 1970 (Brieskorn, 1973 ; Deligne, 1972). L'énoncé général de la conjecture du $K(\pi,1)$, pour un groupe de Coxeter quelconque, peut probablement être attribuée à Loojienga et à son élève en thèse van der Lek, qui a montré que le groupe fondamental de Y_W est bien le groupe d'Artin G_W (Lek, 1983). Nous renvoyons le lecteur à Paris (2014) pour une présentation moderne de cette conjecture. Remarquons que si la conjecture du $K(\pi,1)$ est vraie, comme Y_W est asphérique et de dimension finie, cela implique que G_W est sans torsion, et cela implique également que le centre de G_W est connu (Jankiewicz et Schreve, 2021).

La conjecture du $K(\pi,1)$ a été résolue pour les groupes d'Artin de type sphérique, c'est-à-dire ceux dont le groupe de Coxeter est fini, par Deligne (1972). Elle a par la suite été prouvée pour les groupes d'Artin affines de type $\widetilde{A}_n$, $\widetilde{C}_n$ (Okonek, 1979), $\widetilde{B}_n$ (Callegaro, Moroni et Salvetti, 2010) et $\widetilde{G_2}$ (Charney et Davis, 1995b). Les travaux remarquables de Paolini et Salvetti apportent une réponse positive unifiée pour tous les groupes d'Artin affines :

Théorème (Paolini et Salvetti, 2021). *La conjecture du $K(\pi,1)$ est vraie pour tous les groupes d'Artin affines.*

En dehors des cas sphériques et affines, la conjecture du $K(\pi,1)$ a été prouvée pour les groupes d'Artin de dimension au plus 2 ou de type *FC* (Charney et Davis, 1995b ; Hendriks, 1985), ainsi que pour les groupes d'Artin relativement extra-larges (Juhász, 2018).

Remarquons que la stratégie de Deligne consiste à montrer que le revêtement universel de Y_W a le type d'homotopie d'un complexe simplicial, appelé complexe de Deligne, dont il montre qu'il est contractile (Deligne, 1972). Charney et Davis ont muni le complexe de Deligne d'une métrique CAT(0) dans certains cas, ce qui leur permet de montrer sa contractibilité (Charney et Davis, 1995b ; Hendriks, 1985). Cette stratégie de munir le complexe de Deligne d'une métrique à courbure négative est l'objet de plusieurs travaux récents (Boyd, Charney et Morris-Wright, 2020 ; Charney, 2004 ; Godelle, 2007 ; Goldman, 2021 ; Haettel, 2021 ; Morris-Wright, 2021).

On peut également poser la question de l'asphéricité du complémentaire d'un arrangement d'hyperplans ne provenant pas d'un groupe de Coxeter, par exemple le complexifié d'un arrangement d'hyperplans réel quelconque, ou bien provenant d'un groupe de réflexions complexes. Il existe des arrangements d'hyperplans réels linéaires finis complexifiés dont le complémentaire n'est pas asphérique, voir par exemple (Falk, 1995). Cependant, pour les groupes de réflexions complexes finis, le complémentaire de l'arrangement est toujours asphérique (Bessis, 2015).

L'un des intérêts de la conjecture du $K(\pi,1)$ est qu'elle permet de calculer l'homologie et la cohomologie du groupe d'Artin G_W à partir de l'espace de configuration Y_W, ce qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux (Callegaro, Moroni et Salvetti, 2008 ; Callegaro et Salvetti, 2004 ; Charney et Davis, 1995a ; Cohen, 1973 ; De Concini et Salvetti, 2000 ; Paolini, 2019b ; Paolini et Salvetti, 2018 ; Salvetti, 1994).

Une des raisons fondamentales pour lesquelles les groupes de tresses, et plus généralement les groupes d'Artin de type sphérique, sont bien compris est la notion de structure de Garside. Informellement, un groupe est dit de Garside si l'on peut trouver un élément particulier dont les diviseurs engendrent le groupe et forment un treillis (Dehornoy, 2002 ; Dehornoy, Digne et al., 2015 ; Dehornoy et Paris, 1999 ; Garside, 1969). Un groupe de Garside a un problème du mot résoluble, et un espace classifiant combinatoire très simple.

Lorsque W est un groupe de Coxeter fini, on peut considérer le relevé naturel dans G_W de l'élément le plus long du groupe de Coxeter W : cela définit une structure de Garside, appelée structure standard.

Cependant, lorsque le groupe de Coxeter W est infini, il n'y a plus d'élément le plus long, et on ne connaît pas en général de structure de Garside pour G_W. En revanche, déjà pour les groupes d'Artin sphériques, il existe une autre structure de Garside appelée structure duale (Bessis, 2003 ; Birman, Ko et Lee, 1998). L'idée est

de considérer un élément de Coxeter à la place de l'élément le plus long de W. Cela revient, dans le cas du groupe de tresses à n brins, à considérer un $n^{\text{ème}}$ de tour à la place d'un demi-tour. En termes de générateurs, cela revient à considérer toutes les transpositions, et non pas seulement les transpositions entre brins adjacents, voir la partie 2.

Il s'avère qu'il existe également des structures de Garside duales pour des groupes d'Artin non sphériques : Digne (2006, 2012) a montré que pour certains groupes d'Artin affines, le relevé d'un élément de Coxeter définit une structure de Garside duale. Cependant, McCammond (2015) a montré que la propriété de treillis était fausse dans les autres cas.

Pour pallier ce manque, McCammond et Sulway (2017) ont montré qu'il était possible d'agrandir tout groupe d'Artin affine en un groupe appelé groupe cristallographique tressé, qui possède lui une structure de Garside duale. Ceci leur a permis de construire, pour tout groupe d'Artin affine, un espace classifiant de dimension finie, mais avec cependant un nombre infini de cellules. L'une des conséquences des travaux de Paolini et Salvetti est l'amélioration suivante :

Théorème (Paolini et Salvetti, 2021)**.** *Tout groupe d'Artin affine possède un espace classifiant fini.*

Nous allons donner un panorama de la preuve des résultats principaux de Paolini et Salvetti (2021), que nous détaillerons dans la suite du texte.

Fixons un groupe de Coxeter W et un élément de Coxeter w, c'est-à-dire un produit des générateurs standard dans un ordre arbitraire. À partir de l'intervalle $[1, w]$ des diviseurs de w, on peut définir le groupe d'Artin dual W_w associé à w (voir la partie 3). Lorsque W est fini ou affine, le groupe d'Artin dual W_w est isomorphe au groupe d'Artin G_w (Bessis, 2003 ; McCammond et Sulway, 2017), mais c'est une question ouverte en général. Lorsque l'intervalle $[1, w]$ est un treillis, le groupe d'Artin dual W_w est un groupe de Garside, et possède un espace classifiant explicite K_W, qui provient de la réalisation géométrique de cet ensemble ordonné $[1, w]$.

Le premier argument important est de montrer que, même si l'intervalle $[1, w]$ n'est pas un treillis, le complexe d'intervalle K_W reste un espace classifiant (infini) pour le groupe d'Artin dual W_w. Cette preuve repose sur les groupes cristallographiques tressés définis par McCammond et Sulway (2017), qui apparaissent comme produits amalgamés ayant pour facteur le groupe d'Artin G_W. Pour les définir, McCammond et Sulway ont étudié l'ensemble ordonné de toutes les isométries d'un espace euclidien, avec pour partie génératrice l'ensemble des réflexions. On renvoie aux parties 3, 5 et 6 pour les détails.

La suite de la preuve de la conjecture du $K(\pi,1)$ consiste à définir un sous-complexe X'_W de K_W qui aura le même type d'homotopie que l'espace de configuration Y_W. Pour cela, nous allons partir du complexe de Salvetti X_W (Paris, 2014; Salvetti, 1987), qui est un modèle combinatoire bien étudié de l'espace de configuration Y_W, et qui peut se décrire par recollement de sous-complexes correspondant à des sous-groupes paraboliques sphériques. La version duale de cette construction fournit un complexe de Salvetti dual X'_W, qui a le même type d'homotopie que le complexe de Salvetti standard X_W, et qui se réalise naturellement comme sous-complexe de K_W. Cette construction est détaillée dans la partie 4.

La fin de la preuve consiste à montrer que le complexe d'intervalle K_W se rétracte par déformation forte sur son sous-complexe X'_W. Tout d'abord, en étudiant l'action de l'élément de Coxeter w par conjugaison sur K_W, on peut définir un sous-complexe fini K'_W de K_W contenant X'_W, tel que K_W se rétracte sur K'_W. La preuve que K'_W se rétracte sur X'_W est plus technique, et repose notamment sur la construction d'un étiquetage lexicographique sur l'intervalle $[1,w]$. Ceci a pour conséquence intéressante que l'intervalle $[1,w]$, aussi appelé ensemble des partitions non croisées affines, est décortiquable. La preuve de l'existence des deux rétractions de K_W sur K'_W puis X'_W repose sur la théorie de Morse discrète, via la construction de couplages acycliques. Les détails sont donnés dans les parties 7, 8, 9 et 10.

Cette approche duale pour la conjecture du $K(\pi,1)$ est également présentée de manière synthétique dans (Paolini, 2021). En particulier, il est envisageable que cette stratégie puisse fournir une preuve de la conjecture du $K(\pi,1)$ pour d'autres groupes d'Artin : le cas des groupes d'Artin de rang 3 est annoncé dans (Paolini, 2021, Theorem 6.1).

Remerciements. — Nous souhaitons remercier chaleureusement Bérénice Delcroix-Oger, Clément Dupont, Hoel Queffelec, Giovanni Paolini et Luis Paris pour des discussions ayant aidé à la rédaction de ce texte. Nous remercions également Nicolas Bourbaki pour avoir contribué à améliorer ce texte.

1. Groupes de Coxeter et groupes d'Artin

Commençons par rappeler les définitions des groupes de Coxeter et d'Artin. Nous renvoyons le lecteur à (Bourbaki, 1968; Davis, 2015; Godelle et Paris, 2012; Humphreys, 1990; Paris, 2014) pour plus de détails.

Définition 1.1 (Matrice de Coxeter). Considérons un ensemble fini S, une *matrice de Coxeter* $(m_{st})_{s,t\in S}$ est une matrice symétrique telle que pour tout $s \in S$ nous ayons $m_{ss} = 1$, et pour tous $s,t \in S$ distincts nous ayons $m_{st} = m_{ts} \in \{2,3,4,\dots,\infty\}$.

Définition 1.2 (Groupe de Coxeter). Considérons un ensemble fini S, et une matrice de Coxeter $(m_{st})_{s,t\in S}$. Le *groupe de Coxeter* W associé à cette matrice a pour présentation

$$W = \langle S \,|\, \forall s,t \in S \text{ tels que } m_{st} \neq \infty, (st)^{m_{st}} = 1\rangle.$$

Définition 1.3 (Groupe d'Artin). Considérons un ensemble fini S et une matrice de Coxeter $(m_{st})_{s,t\in S}$. Le *groupe d'Artin* G_W associé à cette matrice a pour présentation

$$G_W = \langle S \,|\, \forall s,t \in S \text{ tels que } m_{st} \neq \infty, [sts\cdots]_{m_{st}} = [tst\cdots]_{m_{st}}\rangle,$$

où $[sts\cdots]_m$ désigne le mot de longueur m dont les lettres alternent entre s et t.

Le cardinal de la partie génératrice S est appelé le *rang* du groupe de Coxeter ou du groupe d'Artin. La matrice de Coxeter est souvent représentée par un diagramme de Dynkin, qui est un graphe de sommets S, avec une arête entre les sommets s et t si $m_{s,t} \geqslant 3$, étiquetée par m_{st} dès que $m_{st} \geqslant 4$. Lorsque le diagramme de Dynkin est connexe, c'est-à-dire lorsque le groupe de Coxeter ou d'Artin n'est pas un produit direct des sous-groupes engendrés par les composantes connexes, il est appelé *irréductible*.

Exemple 1.4. Fixons $n \geqslant 2$, et un ensemble $S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$ de cardinal $n-1$. Considérons la matrice de Coxeter $(m_{st})_{s,t\in S}$ de type A_{n-1}, c'est-à-dire définie de la façon suivante : $m_{\sigma_i\sigma_{i+1}} = 3$ et $m_{\sigma_i\sigma_j} = 2$ dès que $|i-j| \geqslant 2$. Le diagramme de Dynkin associé est un chemin de longueur $n-1$ (voir la table 1).

Le groupe de Coxeter associé est le groupe symétrique $W = \mathfrak{S}_n$, et le groupe d'Artin associé est le groupe de tresses $G_W = B_n$ à n brins, avec la présentation d'Artin standard :

$$\begin{aligned} B_n \quad = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \,|\quad & \forall 1 \leqslant i \leqslant n-1, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \\ & \forall |i-j| \geqslant 2, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\rangle. \end{aligned}$$

Voir la figure 2 représentant la relation de tresse $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

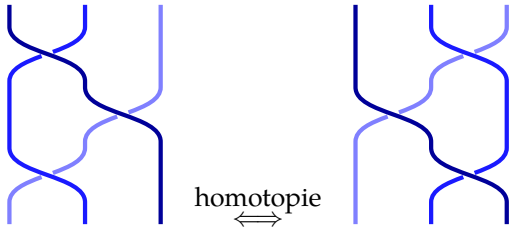


Figure 2 – La relation de tresse $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$.

Exemple 1.5. Fixons $n \geqslant 2$, considérons un ensemble $S = \{\sigma_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\}$ de cardinal n, et la matrice de Coxeter $(m_{st})_{s,t\in S}$ de type $\widetilde{A}_{n-1}$, c'est-à-dire définie de la façon suivante : $m_{\sigma_i\sigma_{i+1}} = 3$ et $m_{\sigma_i\sigma_j} = 2$ dès que $|i-j| \geqslant 2$ modulo n. Le diagramme de Dynkin associé est un n-cycle (voir la table 1).

Le groupe de Coxeter associé est le groupe W agissant sur l'espace euclidien $V = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0\}$, engendré par les réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans d'équations $\{x_i - x_j = k\}$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et $k \in \mathbb{Z}$. Le groupe d'Artin associé G_W est parfois appelé groupe de tresses affine, et admet la présentation suivante :

$$\begin{aligned} G_W \quad = \langle \sigma_i, i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \,|\quad & \forall i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \\ & \forall |i-j| \geqslant 2, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \rangle. \end{aligned}$$

Lorsque $n = 3$, nous noterons pour simplifier les générateurs standards $S = \{a, b, c\}$, et le pavage du plan euclidien V est alors le pavage par des triangles équilatéraux, voir la figure 3. D'autres exemples de groupes de Coxeter affines de rang 3 sont ceux de type $\widetilde{C}_2$ et $\widetilde{G}_2$, voir les figures 4 et 5.

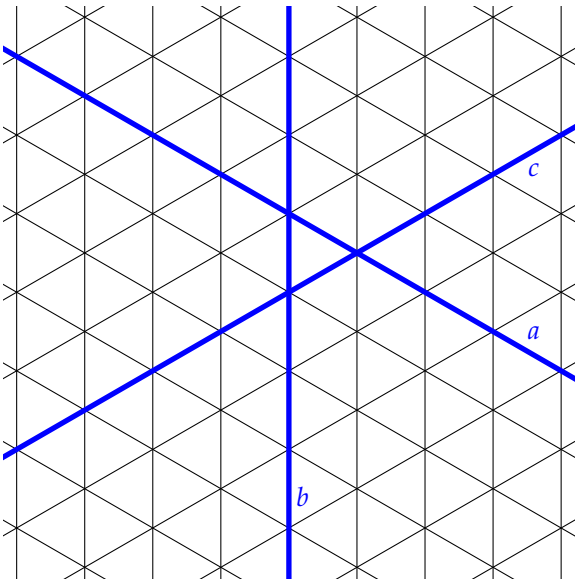


Figure 3 – Le groupe de Coxeter de type $\widetilde{A}_2$ est engendré par les réflexions orthogonales a, b, c.

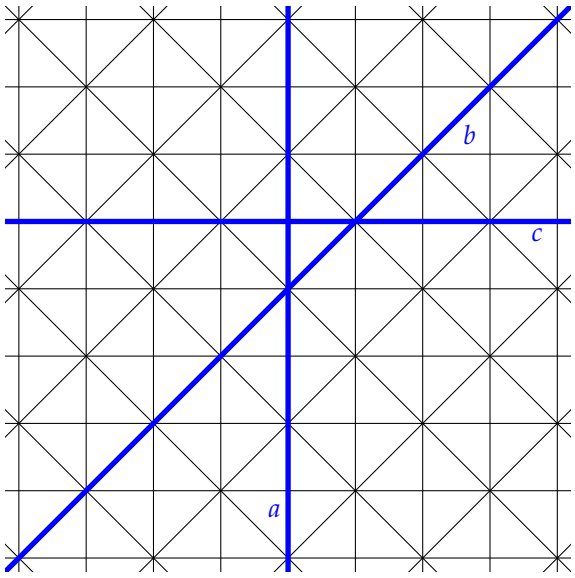


FIGURE 4 – Le groupe de Coxeter de type $\widetilde{C}_2$ est engendré par les réflexions orthogonales a, b, c.

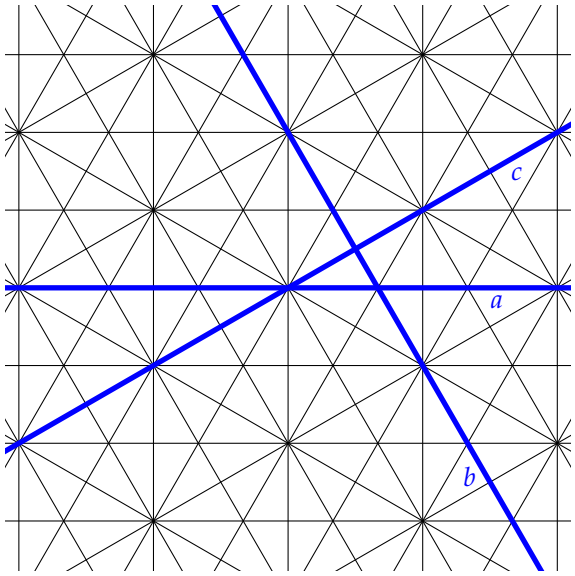


FIGURE 5 – Le groupe de Coxeter de type $\widetilde{G}_2$ est engendré par les réflexions orthogonales a, b, c.

Tout groupe de Coxeter peut être réalisé comme groupe engendré par des réflexions linéaires dans un cône d'un espace vectoriel appelé cône de Tits (Bourbaki, 1968). Par exemple, tout groupe de Coxeter fini de rang n peut être réalisé comme groupe de réflexions orthogonales d'une sphère euclidienne de dimension $n-1$. Dans ce cas, le cône de Tits est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ entier. Ceci explique que lorsque le groupe de Coxeter est fini, le groupe d'Artin associé est dit (*de type*) *sphérique*. Par exemple, c'est le cas des groupes de tresses.

Certains groupes de Coxeter peuvent être réalisés comme groupes de réflexions orthogonales affines d'un espace euclidien $\mathbb{R}^n$: on les appelle alors groupes de réflexions affines, et le groupe d'Artin associé est dit (*de type*) *affine*. Dans ce cas, le cône de Tits est un demi-espace de $\mathbb{R}^{n+1}$. Par exemple, le groupe de Coxeter de type $\widetilde{A}_2$ présenté dans l'exemple 1.5, dans la représentation de Tits, est engendré par des réflexions linéaires, non orthogonales dans $\mathbb{R}^3$, mais qui stabilisent un hyperplan affine et agissent dessus comme réflexions affines orthogonales comme dans la figure 3.

Les diagrammes de Dynkin irréductibles de type sphérique ou affine sont classifiés (Bourbaki, 1968 ; Davis, 2015). Nous avons rappelé la classification des diagrammes cristallographiques (ceux pour lesquels la matrice de Coxeter est à valeurs dans $\{1,2,3,4,6\}$) dans la table 1.

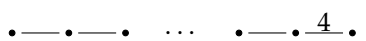
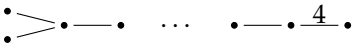
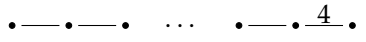
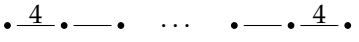
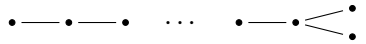
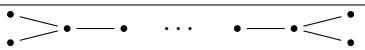
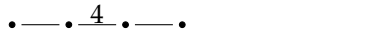
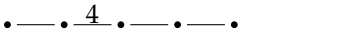
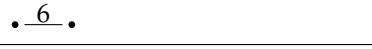
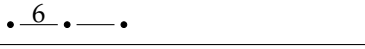
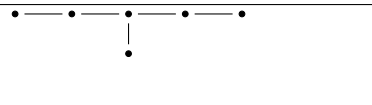
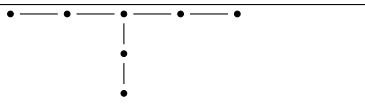
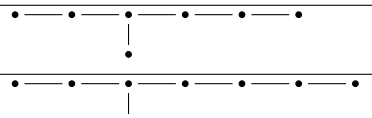
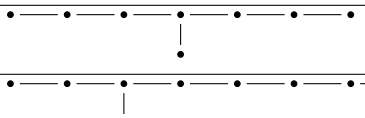
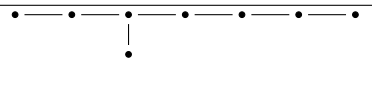
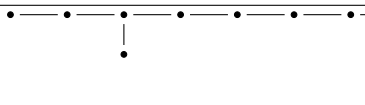
	Type sphérique		Type affine
A_n		$\widetilde{A_n}$	
B_n		$\widetilde{B_n}$	
C_n		$\widetilde{C_n}$	
D_n		$\widetilde{D_n}$	
F_4		$\widetilde{F_4}$	
G_2		$\widetilde{G_2}$	
E_6		$\widetilde{E_6}$	
E_7		$\widetilde{E_7}$	
E_8		$\widetilde{E_8}$	

Table 1 – Diagrammes de Dynkin cristallographiques sphériques et affines.

Si $T \subset S$, on notera W_T le sous-groupe du groupe de Coxeter W engendré par T, appelé *sous-groupe parabolique standard*. C'est aussi un groupe de Coxeter, dont la matrice de Coxeter est donnée par la restriction à T de la matrice d'origine.

Considérons un groupe de Coxeter affine W de rang n, agissant comme groupe de réflexions orthogonales par isométries affines sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. On appelle *réflexion* de W tout élément conjugué à un élément de S. L'ensemble des réflexions est noté R. Considérons l'ensemble $\mathscr{A}$ des hyperplans fixés par les réflexions de R, voir par exemple les figures 3, 4 et 5 représentant les arrangements d'hyperplans en types $\widetilde{A}_2$, $\widetilde{C}_2$ et $\widetilde{G_2}$. Alors l'espace de configuration est le quotient

$$Y_W = \left(\mathbb{C}^n \smallsetminus \bigcup_{H \in \mathscr{A}} H \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C} \right) / W,$$

et son groupe fondamental est le groupe d'Artin de type affine G_W (Lek, 1983). La conjecture du $K(\pi, 1)$ affirme dans ce cas que Y_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin G_W, c'est-à-dire que le revêtement universel de Y_W est contractile.

2. Intervalles et groupes de Garside

Nous allons maintenant donner une présentation rapide des groupes de Garside, et plus généralement des groupes construits à partir d'intervalles. Nous suivrons le point de vue de McCammond et Sulway (McCammond, 2015 ; McCammond et Sulway, 2017), et nous renvoyons le lecteur à (Dehornoy, 2002 ; Dehornoy, Digne et al., 2015 ; Dehornoy et Paris, 1999 ; Digne, 2006, 2012 ; Garside, 1969) pour plus de détails sur les structures de Garside.

Définition 2.1 (Groupe d'intervalle). Soit G un groupe, et $R \subset G$ un sous-ensemble (éventuellement infini) engendrant G tel que $R = R^{-1}$. Supposons qu'à chaque élément $r \in R$ est associé un *poids* $l(r) > 0$, et supposons de plus que $l(R)$ soit un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}$. Supposons également que, pour tout $r \in R$, nous ayons $l(r^{-1}) = l(r)$.

Considérons le graphe de Cayley $\mathrm{Cay}(G, R)$ de G par rapport à R, dont les arêtes orientées sont étiquetées par les éléments de R. Considérons $\mathrm{Cay}(G, R)$ comme un espace métrique, en déclarant qu'une arête étiquetée r est de longueur $l(r)$. Pour tous $g, h \in G$, notons $d_R(g, h)$ la longueur du plus court chemin de g à h dans $\mathrm{Cay}(G, R)$.

Fixons $g \in G$, et considérons l'intervalle

$$[1, g]^G = \{h \in G \mid d_R(1, h) + d_R(h, g) = d_R(1, g)\},$$

c'est aussi la réunion des géodésiques de 1 à g dans $\mathrm{Cay}(G, R)$. On peut également le voir comme un sous-graphe de $\mathrm{Cay}(G, R)$. Remarquons que $[1, g]^G$ est naturellement ordonné, en déclarant que $h \leqslant k$ si $d_R(1, h) + d_R(h, k) + d_R(k, g) = d_R(1, g)$.

Soit $R_g \subset R$ l'ensemble des étiquettes apparaissant parmi les géodésiques de 1 à g. Le *groupe d'intervalle* G_g est le groupe engendré par R_g, avec les relations fournies par les mots apparaissant en lisant les étiquettes des cycles dans $[1, g]^G$.

Remarquons qu'on peut choisir un poids constant égal à 1. Cependant, pour certains groupes de Coxeter affines, nous verrons qu'il est important d'autoriser d'autres poids. Rappelons maintenant ce qu'est un treillis.

Définition 2.2 (Treillis). Un ensemble ordonné P est appelé *treillis* si toute paire d'éléments $p, q \in P$ a une borne inférieure et une borne supérieure.

Nous pouvons maintenant définir les groupes de Garside.

Définition 2.3 (Groupe de Garside). Un groupe G est appelé *groupe de Garside* s'il existe $R \subset G$ et $l\colon R \to \mathbb{R}_+^*$ comme ci-dessus, et un élément $\delta \in G$, tels qu'on ait les propriétés suivantes.

— Le groupe G est engendré par R_δ.

— L'ensemble ordonné $[1, \delta]^G$ est un treillis.

— L'intervalle $[1, \delta]^G$ est *équilibré*, c'est-à-dire que pour tout $h \in G$, nous avons que $h \in [1, \delta]^G$ si et seulement si $\delta h^{-1} \in [1, \delta]^G$.

Remarquons que, selon les auteurs, la notion de groupe de Garside peut éventuellement demander que l'ensemble R_δ soit fini. Dans ce texte, nous autoriserons cet ensemble à être infini, ce qui s'avère nécessaire pour les groupes d'Artin de type affine.

Exemple 2.4. L'exemple le plus simple de groupe de Garside est, pour $n \geqslant 1$, le groupe abélien libre $\mathbb{Z}^n$, avec pour élément de Garside $\delta = (1, 1, \ldots, 1)$. Nous verrons ci-dessous que les groupes de tresses donnent des exemples plus intéressants.

Remarquons que si R est stable par conjugaison dans G, et que le poids de deux éléments conjugués de R est identique, alors la dernière condition de la définition 2.3 est toujours satisfaite. La condition la plus importante est alors que l'intervalle $[1, \delta]^G$ soit un treillis.

Tout groupe d'intervalle peut être réalisé comme groupe fondamental d'un complexe d'intervalle, que nous définissons maintenant.

Définition 2.5 (Complexe d'intervalle). Soit G un groupe, $R \subset G$ une partie génératrice et un poids l comme dans la définition 2.1. Soit $g \in G$ avec un intervalle $[1, g]^G$ équilibré. Considérons comme modèle du simplexe Δ^d de dimension d l'ensemble

$$\Delta^d = \{a \in \mathbb{R}^d \mid 1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_d \geqslant 0\},$$

aussi appelé orthosimplexe de dimension d.

Nous allons définir un Δ-complexe (au sens de Hatcher (2002)), appelé *complexe d'intervalle* de $[1,g]^G$, qui est un recollement de simplexes par identifications de certaines faces. Il y a un d-simplexe noté $[x_1|x_2|\dots|x_d]$ pour chaque chaîne dans l'ensemble ordonné $[1,g]^G \smallsetminus \{1\}$, c'est-à-dire $x_1, x_2, \dots, x_d \in [1,g]^G \smallsetminus \{1\}$ tels que :

— $x_1x_2\cdots x_d \in [1,g]^G$ et

— $l(x_1x_2\cdots x_d) = l(x_1) + l(x_2) + \cdots + l(x_d)$.

Décrivons les recollements des $d+1$ facettes (faces de codimension 1) du d-simplexe $[x_1|x_2|\dots|x_d]$:

— La facette $\{1 = a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_d \geqslant 0\}$ du simplexe $[x_1|x_2|\dots|x_d]$ est identifiée avec le $(d-1)$-simplexe $[x_2|\dots|x_d]$ par $(1, a_2, \dots, a_d) \mapsto (a_2, \dots, a_d)$.

— Pour $1 \leqslant i \leqslant d-1$, la facette $\{1 \geqslant a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_i = a_{i+1} \geqslant \cdots \geqslant a_d \geqslant 0\}$ du simplexe $[x_1|x_2|\dots|x_d]$ est identifiée avec le $(d-1)$-simplexe $[x_1|\dots|x_ix_{i+1}|\dots|x_d]$ par $(a_1, \dots, a_i, a_i, a_{i+2}, \dots, a_d) \mapsto (a_1, \dots, a_i, a_{i+2}, \dots, a_d)$.

— La facette $\{1 \geqslant a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_d = 0\}$ du simplexe $[x_1|x_2|\dots|x_d]$ est identifiée avec le $(d-1)$-simplexe $[x_1|\dots|x_{d-1}]$ par $(a_1, \dots, a_{d-1}, 0) \mapsto (a_1, \dots, a_{d-1})$.

Voir la figure 6 du 2-simplexe $[x_1|x_2]$. Remarquons que ce complexe d'intervalle a un unique sommet noté $[\,]$, et que ses arêtes sont en bijection avec les éléments de $[1,g]^G \smallsetminus \{1\}$.

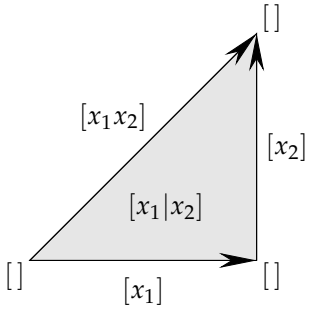


Figure 6 – Le 2-simplexe $[x_1|x_2]$, dont les 3 sommets sont identifiés.

Proposition 2.6. *Le groupe fondamental du complexe d'intervalle associé à $[1,g]^G$ est le groupe d'intervalle G_g.*

Démonstration. Le groupe fondamental du complexe d'intervalle K associé à $[1,g]^G$ admet une présentation déterminée par son 2-squelette :

$$\pi_1(K, [\,]) = \langle [1,g]^G \smallsetminus \{1\} \mid (x_1)(x_2) = (x_1x_2) \text{ pour tout 2-simplexe } [x_1|x_2] \rangle.$$

Le groupe G_g a le même ensemble de générateurs $[1,g]^G \smallsetminus \{1\}$, et a un ensemble de relations plus grand, donné par l'ensemble des cycles dans $[1,g]^G$. Considérons un

cycle $c = (1, y_1, y_2, \dots, y_k = 1)$ basé en 1 dans le graphe $[1, g]^G$. On peut le réécrire comme un produit de cycles de la forme $c_i = (1, y_i, y_{i+1}, 1)$, pour $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Fixons $1 \leqslant i \leqslant k-1$, et supposons par exemple que $y_i < y_{i+1}$. Alors l'image du cycle c_i dans le complexe K borde le 2-simplexe $[y_i | y_i^{-1} y_{i+1}]$, et est donc homotope à zéro. Ainsi chaque cycle c dans $[1, g]^G$ a une image dans K homotope à zéro, donc G_g est bien le groupe fondamental de K. □

Ce point de vue est une méthode efficace pour construire des groupes de Garside et leurs espaces classifiants :

Théorème 2.7 (Charney, Meier et Whittlesey, 2004, Theorem 3.1; Dehornoy et Lafont, 2003, Theorem 0.1). *Si $[1, g]^G$ est un treillis équilibré, alors G_g est un groupe de Garside, et le complexe d'intervalle associé à $[1, g]^G$ est un espace classifiant pour G_g.*

Remarquons qu'une autre preuve de ce résultat, à l'aide d'une métrique à courbure négative, est proposée dans Haettel (2021, Theorem E).

Exemple 2.8 (Groupes de tresses). Considérons le groupe de tresses B_n à n brins, le groupe de Coxeter associé est le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Il peut être muni de deux structures de Garside différentes, la structure de Garside standard et la structure de Garside duale (Bessis, 2003; Birman, Ko et Lee, 1998).

Dans la structure de Garside standard, on considère l'élément de longueur maximale Δ de $\mathfrak{S}_n$ par rapport à la partie génératrice standard S constituée des transpositions $(i, i+1)$. L'élément Δ représente alors le « demi-tour » qui à $i \in \{1, \dots, n\}$ associe $n+1-i$, il est de longueur $\frac{n(n-1)}{2}$ (voir la figure 7). L'intervalle $[1, \Delta]^{\mathfrak{S}_n}$ est ainsi l'ensemble des écritures minimales de Δ comme produit de $\frac{n(n-1)}{2}$ transpositions adjacentes.

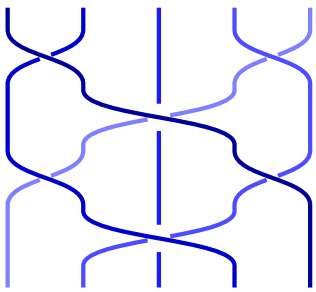


Figure 7 – Une représentation de l'élément de Garside standard Δ de B_5.

Remarquons de plus que les ensembles S et $[1, \Delta]^{\mathfrak{S}_n}$ se relèvent naturellement comme ensembles dans le groupe de tresses B_n, en associant à la transposition $(i, i+1)$ le générateur standard σ_i du groupe de tresses.

Dans le cas $n = 3$, cet intervalle $[1, \Delta]^{\mathfrak{S}_3}$ est constitué de deux chaînes maximales de longueur 3, car $\Delta = (1,2)(2,3)(1,2) = (2,3)(1,2)(2,3)$. Voir la figure 8 pour le complexe d'intervalle associé. Son revêtement universel est homéomorphe au produit d'une droite avec un complexe triangulaire ressemblant à un arbre 3-régulier.

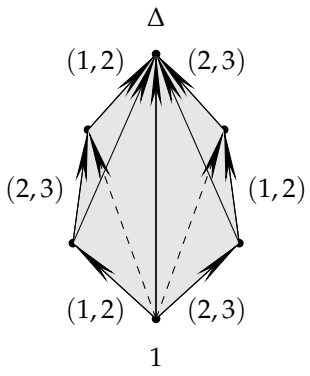


FIGURE 8 – Le complexe d'intervalle de $\mathfrak{S}_3$ pour la structure de Garside standard, obtenu par identification des simplexes ayant le même étiquetage.

Dans la structure de Garside duale, on considère l'ensemble des conjugués de S, c'est-à-dire l'ensemble T de toutes les transpositions de $\mathfrak{S}_n$. On considère un élément δ obtenu comme produit des éléments de S dans un certain ordre, par exemple $\delta = (1,2)(2,3)\cdots(n-1,n)$ qui représente le n-cycle $(1,2,\ldots,n)$ (voir la figure 9). Toutes les écritures minimales de δ comme produit d'élements de T ont $n-1$ éléments, et l'ensemble de ces écritures forme l'intervalle $[1,\delta]^{\mathfrak{S}_n}$. Remarquons que $|\Delta|_S = \frac{n(n-1)}{2} = |T|$, tandis que $|\delta|_T = n-1 = |S|$. Ceci est l'une des justifications pour la terminologie « duale ».

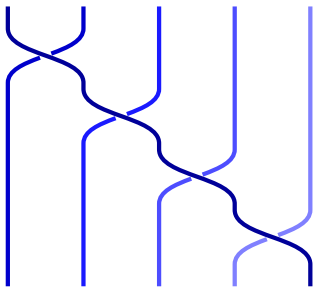


FIGURE 9 – Une représentation de l'élément de Garside dual δ de B_5.

L'intervalle $[1, \delta]^{\mathfrak{S}_n}$ possède également une belle interprétation comme ensemble de partitions non croisées. Considérons l'ensemble U_n des n sommets d'un n-gone régulier dans le plan, alors une partition de U_n est dite *non croisée* si les enveloppes convexes des éléments de la partition ne s'intersectent pas. Il y a un ordre naturel sur l'ensemble des partitions non croisées de n points, donné par le raffinement de partitions. L'intervalle $[1, \delta]^{\mathfrak{S}_n}$ est alors isomorphe au treillis des partitions non croisées de n points. Pour plus de détails sur les partitions non croisées, nous renvoyons le lecteur à (Armstrong, 2009 ; Athanasiadis, T. Brady et Watt, 2007 ; T. Brady, 2001 ; T. Brady et McCammond, 2010 ; T. Brady et Watt, 2008).

Dans le cas $n = 3$, cet intervalle $[1, \delta]^{\mathfrak{S}_3}$ est constitué de trois chaînes maximales de longueur 2, car $\delta = (1,2)(2,3) = (2,3)(1,3) = (1,3)(1,2)$. Voir la figure 10 pour le complexe d'intervalle associé. Son revêtement universel est homéomorphe au produit d'une droite avec un arbre 3-régulier.

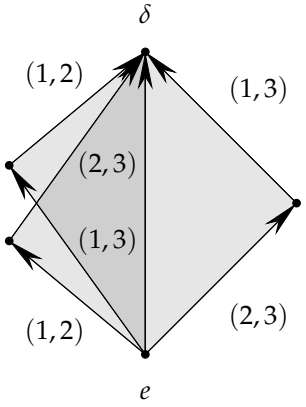


Figure 10 – Le complexe d'intervalle de $\mathfrak{S}_3$ pour la structure de Garside duale, obtenu par identification des simplexes ayant le même étiquetage.

3. Groupes d'Artin duaux

Soit W un groupe de Coxeter, soit R l'ensemble de ses réflexions, et soit $S \subset R$ un ensemble simple de réflexions. Choisissons un poids $l : R \to \mathbb{R}_+^*$ constant égal à 1. Un *élément de Coxeter* w est le produit des éléments de S dans un ordre quelconque. On appelle *groupe d'Artin dual* associé à w le groupe d'intervalle W_w défini à partir de R.

Exemple 3.1 (Interprétation géométrique). Soit W un groupe de Coxeter irréductible fini ou affine, agissant comme groupe de réflexions sur la sphère $M = \mathbb{S}^n$ ou l'espace euclidien $M = \mathbb{R}^n$. L'ensemble des hyperplans des réflexions de R découpe M en composantes connexes, appelées chambres (ouvertes) du complexe de Coxeter. Il existe une chambre C_0 de M dont les réflexions par rapport aux faces sont précisément les

éléments de S. Ainsi un élément de Coxeter w peut être interprété comme le produit des réflexions par rapport aux faces de la chambre C_0, dans un ordre quelconque.

On dit que deux éléments de Coxeter w, w' sont *géométriquement équivalents* s'il existe un automorphisme $\phi\colon W \to W$ préservant l'ensemble R des réflexions, envoyant S sur un ensemble simple de réflexions, et tel que $\phi(w) = w'$. Pour la plupart des groupes de Coxeter sphériques ou affines, tous les éléments de Coxeter sont géométriquement équivalents.

Théorème 3.2 (McCammond, 2015, Corollary 7.6, Corollary 7.8)**.** *Soit W un groupe de Coxeter irréductible de type sphérique ou affine, mais pas de type $\widetilde{A}$. Alors tous les éléments de Coxeter sont géométriquement équivalents.*

Soit W un groupe de Coxeter affine de type $\widetilde{A}_n$. Alors tout élément de Coxeter est géométriquement équivalent à un (p, q)-bigone de Coxeter (voir McCammond, 2015, Definition 7.7, Example 11.6), où $p \geqslant q$ et $p + q = n + 1$.

Exemple 3.3. Considérons le groupe de Coxeter W affine de type $\widetilde{A}_2$, engendré par les trois réflexions a, b, c du plan euclidien bordant la chambre C_0 comme sur la figure 11. Alors $w = abc$ est un exemple d'élément de Coxeter, qui consiste en la translation-réflexion le long de l'axe de Coxeter ℓ représenté sur la figure 11. Remarquons que dans ce cas particulier, tous les éléments de Coxeter sont géométriquement équivalents. Le cas similaire du type $\widetilde{G_2}$ est représenté sur la figure 12.

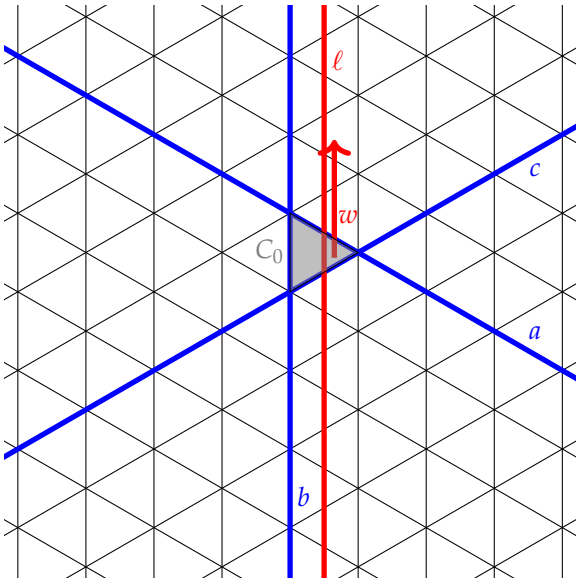


Figure 11 – Un élément de Coxeter pour le groupe de Coxeter affine de type $\widetilde{A}_2$.

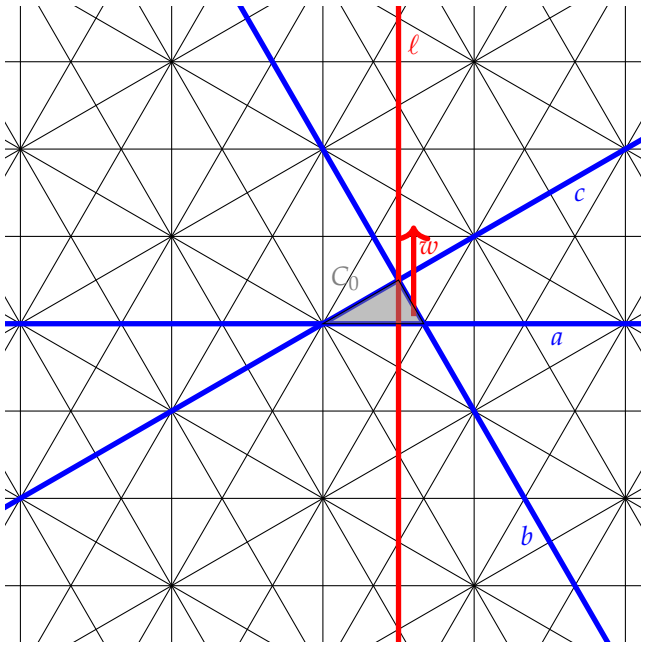


FIGURE 12 – Un élément de Coxeter pour le groupe de Coxeter affine de type $\widetilde{G}_2$.

Remarquons que l'ensemble ordonné $[1, w]^W$ est borné, gradué, de rang $|S|$. De plus, les éléments de S apparaissent tous comme étiquettes d'arêtes du graphe $[1, w]^W$ (PAOLINI et SALVETTI, 2021, Lemma 5.1), ce qui permet de définir un morphisme naturel du groupe d'Artin usuel G_W vers le groupe d'Artin dual W_w associé à w.

Bessis a étudié le cas où W est un groupe de Coxeter fini, et McCammond et Sulway ont étendu ce résultat à tous les groupes de Coxeter affines :

Théorème 3.4 (BESSIS, 2003 ; T. BRADY et WATT, 2002 ; MCCAMMOND et SULWAY, 2017). *Si W est un groupe de Coxeter fini ou affine, le morphisme naturel $G_W \to W_w$ est un isomorphisme pour tout élément de Coxeter w.*

Exemple 3.5. Dans le cas très simple du groupe de Coxeter $\mathfrak{S}_3$, pour l'élément de Coxeter $w = (1, 2, 3)$ correpondant au 3-cycle, la présentation du groupe d'Artin dual est donnée par

$$\langle \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}, \sigma_{2,3} \,|\, \sigma_{1,2}\sigma_{2,3} = \sigma_{2,3}\sigma_{1,3} = \sigma_{1,3}\sigma_{1,2} \rangle,$$

dont il est facile de se convaincre qu'elle donne un groupe isomorphe au groupe de tresses B_3, dont la présentation standard est

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \,|\, \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle.$$

On peut en effet identifier $\sigma_{1,2}$ à σ_1, $\sigma_{2,3}$ à σ_2, et $\sigma_{1,3}$ à la tresse $\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$ permutant les brins 1 et 3.

On ne sait pas si ce résultat peut s'étendre à d'autres groupes de Coxeter que ceux finis ou affines.

Le théorème 3.4 permet dans certains cas de munir le groupe d'Artin dual d'une structure de Garside. Pour cela, nous avons vu que la propriété clé est de savoir si l'intervalle $[1,w]^W$ est un treillis.

Théorème 3.6 (Bessis, 2003 ; T. Brady et Watt, 2008). *Si W est un groupe de Coxeter fini, l'intervalle $[1,w]^W$ est un treillis pour tout élément de Coxeter w. En particulier, le groupe d'Artin dual W_w est un groupe de Garside.*

Si W est un groupe de Coxeter quelconque et w est un élément de Coxeter, on appelle ainsi $[1,w]^W$ l'ensemble ordonné des partitions non croisées associé à W. Il s'avère qu'à part dans le cas où W est fini, il est rare que ce soit un treillis.

Théorème 3.7 (Digne, 2006, 2012 ; McCammond, 2015). *Soit W un groupe de Coxeter irréductible affine, et soit w un élément de Coxeter. Alors l'intervalle $[1,w]^W$ est un treillis si et seulement si W est de type $\widetilde{A}_n$ (lorsque w est un $(n,1)$-bigone), $\widetilde{C}_n$ ou $\widetilde{G}_2$.*

Plus précisément, l'intervalle $[1,w]^W$ est un treillis si et seulement si le système de racines horizontal est irréductible, voir la table 2.

Cependant, McCammond et Sulway ont découvert comment compléter un groupe de Coxeter affine W en un groupe d'isométries euclidiennes C plus grand, tel que l'intervalle $[1,w]^C \supset [1,w]^W$ soit un treillis équilibré. Le groupe d'intervalle associé à $[1,w]^C$, noté C_w, est appelé *groupe cristallographique tressé*, c'est un groupe de Garside. Ceci permet également de réaliser le groupe d'Artin dual W_w comme sous-groupe du groupe de C_w.

Grâce aux groupes cristallographiques tressés, Paolini et Salvetti ont pu montrer que, même en l'absence de treillis, le complexe d'intervalle est un espace classifiant.

Théorème 3.8 (Paolini et Salvetti, 2021, Theorem 6.6). *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, et soit w un élément de Coxeter. Le complexe d'intervalle K_W associé à $[1,w]^W$ est un espace classifiant pour le groupe d'Artin dual W_w.*

Nous allons donner les idées de la preuve de ce théorème dans la partie 6, qui repose sur l'utilisation des groupes cristallographiques tressés.

4. Un modèle dual pour l'espace de configuration

Fixons un groupe de Coxeter quelconque W. Nous allons décrire un CW-complexe modèle de l'espace de configuration Y_W associé à W.

Soit S un ensemble simple de réflexions de W. Notons

$$\Delta_W = \{T \subset S \mid W_T \text{ est fini}\}.$$

Rappelons la définition du complexe de Salvetti de W (Paris, 2014 ; Salvetti, 1987). Pour tout $T \in \Delta_W$, notons D_T le polytope de Coxeter associé à W_T : il peut être défini comme l'enveloppe convexe d'un point générique $x \in \mathbb{R}^T$ dans la représentation de W_T agissant par réflexions orthogonales sur $\mathbb{R}^T$. Les faces de D_T sont en correspondance avec les classes de W_T/W_U, où $U \subset T$, la face correspondant à $wW_U \in W_T/W_U$ s'identifiant avec $w \cdot D_U \subset D_T$ (où l'on voit $w \cdot D_U$ comme l'enveloppe convexe de $wW_U \cdot x$ dans D_T).

Le complexe de Salvetti X_W est le CW-complexe fini, quotient de la réunion disjointe $\bigsqcup_{T\in\Delta_W} D_T$ par les identifications suivantes : si $T \in \Delta_W$, $U \subset T$ et $wW_U \subset W_T/W_U$, alors la face wD_U de D_T est identifiée à D_U. Ce complexe a un seul sommet, correspondant à $D_\emptyset$, et S arêtes, correspondant à $D_{\{s\}}$, pour $s \in S$. On peut ainsi voir X_W comme le recollement des complexes de Salvetti X_T, pour $T \in \Delta_W$.

Exemple 4.1. Si W est un groupe de Coxeter diédral d'ordre $2p$, avec $S = \{a, b\}$, alors le polytope de Coxeter D_S est par exemple le $2p$-gone régulier. Il a un sommet privilégié correspondant à l'élément neutre 1, et le sommet opposé correspondant à l'élément $[aba\cdots]_p = aba\cdots$ (le mot de longueur p). Les deux chemins reliant ces sommets sont étiquetés $[aba\cdots]_p$ et $[bab\cdots]_p$ respectivement.

Le complexe de Salvetti associé à W est le recollement des arêtes de D_S selon leurs étiquettes, voir figure 13.

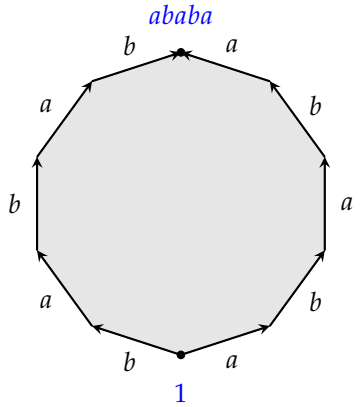


Figure 13 – Le complexe de Salvetti X_W du groupe diédral W d'ordre 2×5, obtenu en identifiant les arêtes selon leur étiquetage.

Exemple 4.2. Si W est un groupe de Coxeter affine de type $\widetilde{A}_2$, avec $S = \{a, b, c\}$, alors Δ_W a trois sous-ensembles maximaux $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ et $\{a, c\}$. Le complexe de Salvetti de W est donc le recollement des trois hexagones $D_{a,b}$, $D_{b,c}$ et $D_{a,c}$ selon les étiquettes de leurs arêtes, voir figure 14.

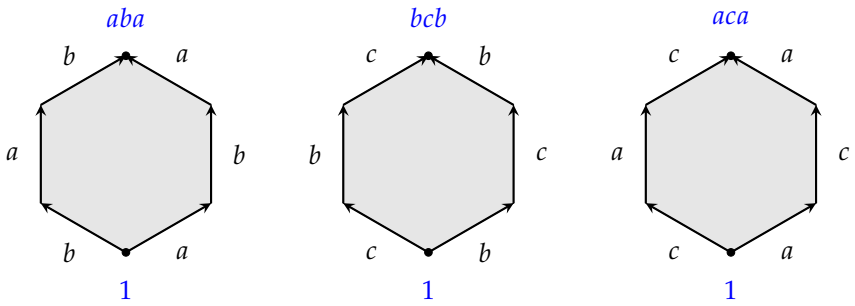


Figure 14 – Le complexe de Salvetti X_W du groupe diédral affine W de type $\widetilde{A}_2$, obtenu en identifiant les arêtes selon leur étiquetage.

L'un des intérêts du complexe de Salvetti est de fournir un modèle combinatoire fini pour l'espace de configuration.

Théorème 4.3 (Salvetti, 1987, 1994). *Pour tout groupe de Coxeter W, le complexe de Salvetti X_W a le même type d'homotopie que l'espace de configuration Y_W.*

Soit R l'ensemble des réflexions de W, et $w = s_1 s_2 \cdots s_n$ un élément de Coxeter obtenu en écrivant le produit des éléments de S dans un certain ordre. Notons K_W le complexe d'intervalle asssocié à $[1, w]^W$. Pour tout $T \in \Delta_W$, remarquons qu'on peut considérer un élément de Coxeter privilégié w_T de W_T, celui obtenu en prenant le produit des éléments de T dans le même ordre que ceux apparaissant dans w.

Nous allons décrire un sous-complexe X'_W de K_W qui aura le type d'homotopie de X_W.

Définition 4.4. Notons X'_W le sous-complexe de K_W constitué des simplexes $[x_1|x_2|\dots|x_d]$ de K_W tels qu'il existe $T \in \Delta_W$ pour lequel $x_1 x_2 \cdots x_d \in [1, w_T]^W = [1, w_T]^{W_T}$. Nous proposons de l'appeler *complexe de Salvetti dual* de W.

Exemple 4.5. Soit W un groupe de Coxeter affine de type $\widetilde{A}_2$, avec $S = \{a, b, c\}$, et considérons comme élément de Coxeter $w = abc$. Alors le complexe de Salvetti dual X'_W est le recollement des trois complexes d'intervalle associés aux intervalle $[1, ab]$, $[1, bc]$ et $[1, ac]$ selon les étiquettes des arêtes, voir figure 15. On pourra noter la similitude avec la figure 14.

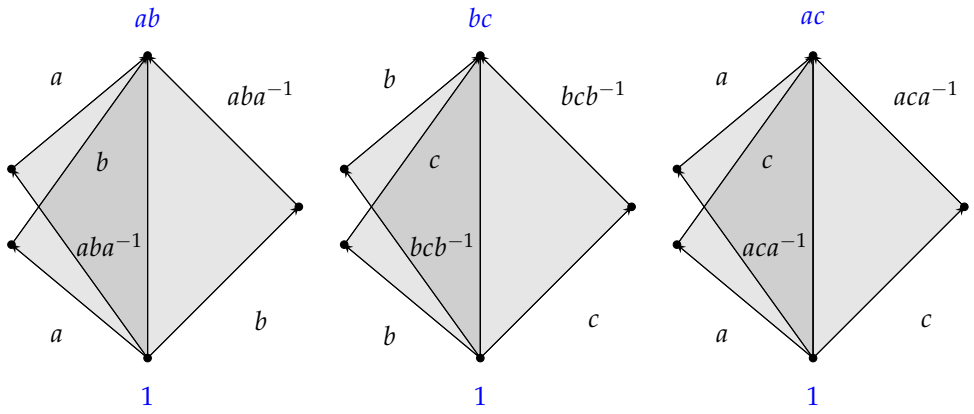


FIGURE 15 – Le complexe de Salvetti dual X'_W du groupe diédral affine W de type $\widetilde{A}_2$.

Remarquons que si W est fini, alors $X'_W = K_W$. Ainsi, si $T \in \Delta_W$, on voit que X'_{W_T} est un espace classifiant pour le groupe d'Artin G_{W_T}. De même, comme la conjecture du $K(\pi,1)$ est connue pour les groupes d'Artin sphériques (DELIGNE, 1972), on sait que X_{W_T} est aussi un espace classifiant pour le groupe d'Artin G_{W_T}.

Théorème 4.6 (PAOLINI et SALVETTI, 2021, Theorem 5.5). *Pour tout groupe de Coxeter W, le complexe de Salvetti dual $X'_W \subset K_W$ a le même type d'homotopie que le complexe de Salvetti X_W et que l'espace de configuration Y_W.*

Démonstration. Pour alléger les notations, dans cette preuve nous allons noter X, X_T, X', X'_T à la place de $X_W, X_{W_T}, X'_W, X'_{W_T}$, pour $T \in \Delta_W$. Nous avons déjà remarqué que, si $T \in \Delta_W$, les complexes X_T et X'_T sont tous deux des espaces classifiants pour le groupe d'Artin sphérique G_{W_T}. Nous allons construire, par induction sur $|T|$, des équivalences d'homotopie $\phi_T : X_T \to X'_T$ telles que, pour tout $U \subset T \in \Delta_W$, nous ayons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_U & \overset{\phi_U}{\to} & X'_U \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_T & \overset{\phi_T}{\to} & X'_T \end{array}$$

Supposons que $T \in \Delta_W$ soit tel que nous ayons déjà défini de telles applications ϕ_U, pour $U \subsetneq T$.

— Si $T = \emptyset$, alors X_T et X'_T sont constitués d'un unique sommet, il n'y a donc qu'une seule application $\phi_T : X_T \to X'_T$.

— Si $T = \{s\}$, alors X_T et X'_T sont constitués d'une arête orientée étiquetée s attachée à l'unique sommet. Considérons un homorphisme cellulaire $\phi_T \colon X_T \to X'_T$ préservant l'orientation.
— Si $T = \{s, s'\}$, alors d'après la preuve de la proposition 1B.9 de Hatcher (2002), l'application $\phi_{\{s\}} \cup \phi_{\{s'\}} \colon X_{\{s\}} \cup X_{\{s'\}} \to X'_T$ peut être étendue en une application $\phi_T \colon X_T \to X'_T$ telle que l'application induite $(\phi_T)_\star \colon \pi_1(X_T, X_\emptyset) \to \pi_1(X'_T, X'_\emptyset)$ soit un isomorphisme. Comme X_T et X'_T sont des espaces classifiants, on en déduit que ϕ_T est une équivalence d'homotopie.
— Si $|T| \geqslant 3$, en utilisant comme précédemment la preuve de la proposition 1B.9 de Hatcher (2002), on construit de même ϕ_T.

Cette construction induit ainsi une application $\phi_W \colon X_W \to X'_W$. En appliquant successivement le théorème 7.5.7 de Brown (2006), on déduit que ϕ_W est une équivalence d'homotopie. □

Remarquons qu'on peut également décrire, à homotopie près, le complexe de Salvetti comme un recollement de complexes d'intervalle analogues à $[1, w_T]^{W_T}$, mais pour la structure de Garside classique de W_T.

Ceci permet ainsi de justifier la dénomination du complexe X'_W comme complexe de Salvetti dual.

5. Factorisations d'isométries euclidiennes

Afin de comprendre l'ensemble des factorisations d'un élément de Coxeter d'un groupe de Coxeter affine, il est utile d'étudier plus généralement les factorisations d'isométries euclidiennes quelconques comme produits de réflexions.

5.1. Un ordre sur les isométries euclidiennes

Notons $V \simeq \mathbb{R}^n$ un espace vectoriel réel de dimension n. Nous allons décrire un ordre sur le groupe L de toutes les isométries euclidiennes affines de V.

Une isométrie $u \in L$ est appelée *elliptique* si elle fixe au moins un point de V. Dans ce cas, notons $\mathrm{Fix}(u) \subset V$ l'ensemble des points fixes de u.

Une isométrie $u \in L$ est appelée *hyperbolique* si elle ne fixe aucun point de V. Dans ce cas, notons $\mathrm{Dep}(u) = \{u(a) - a \,|\, a \in V\} \subset V$ l'ensemble des déplacements de u. C'est un sous-espace affine de V, ayant un unique vecteur μ de norme minimale. Notons $\mathrm{Min}(u) = \{a \in V \,|\, u(a) = a + \mu\}$ l'ensemble des points de E le moins déplacés par u.

Le groupe $L = \mathrm{Isom}(V)$ est engendré par l'ensemble R de toutes les réflexions orthogonales de V (avec un poids constant égal à 1). On peut ainsi calculer le plus petit nombre de réflexions nécessaires $l(u)$ pour écrire une isométrie u donnée.

Proposition 5.1 (N. Brady et McCammond, 2015, Theorem 5.7). *Si $u \in L$ est elliptique, alors $l(u) = \operatorname{codim} \operatorname{Fix}(u)$. Si u est hyperbolique, alors $l(u) = \dim \operatorname{Dep}(u) + 2$.*

On peut ainsi représenter l'ordre associé sur L grâce au modèle simple suivant.

Définition 5.2. Soit $(P, \leqslant)$ l'ensemble ordonné constitué d'un élément noté e^F pour chaque sous-espace affine $F \subset L$, dont la direction est notée $\vec{F}$, ainsi qu'un élément noté h^D pour chaque sous-espace affine $D \subset V \smallsetminus \{0\}$. L'ordre sur P est défini comme suit :

— $e^F \leqslant e^{F'}$ si et seulement si $F' \subset F$,

— $h^D \leqslant h^{D'}$ si et seulement si $D \subset D'$ et

— $e^F \leqslant h^D$ si et seulement si $D^\perp \subset \vec{F}$.

Remarquons que P a pour élément minimal e^V. Considérons l'application invariant, notée *inv* et définie par

$$\begin{aligned} L &\to P \\ v \in L \text{ elliptique} &\mapsto e^{\operatorname{Fix}(v)} \\ v \in L \text{ hyperbolique} &\mapsto h^{\operatorname{Dep}(v)}. \end{aligned}$$

Ce modèle permet de décrire simplement l'intervalle en-dessous de toute isométrie.

Théorème 5.3 (N. Brady et McCammond, 2015, Theorem 8.7). *Pour toute isométrie $u \in L$, l'application invariant est un isomorphisme d'ensembles ordonnés entre l'intervalle $[1, u]^L$ et l'intervalle $[e^V, inv(u)]^P$.*

5.2. Factorisations dans les groupes de Coxeter affines

Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, agissant comme groupe de réflexions sur l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^n$, où n est le rang de W. Soit R l'ensemble de ses réflexions, et soit $S \subset R$ un ensemble simple de réflexions. Rappelons qu'un élément de Coxeter w est le produit des éléments de S dans un ordre quelconque.

Alors l'isométrie w de V est hyperbolique, de longueur $l(w) = n + 1$, et $\operatorname{Min}(w)$ est une droite ℓ appelée *axe de Coxeter*.

Considérons l'arrangement $\mathscr{A}$ de tous les hyperplans des réflexions de R dans V. Les composantes connexes du complémentaire $V \smallsetminus \cup\mathscr{A}$ sont appelées les *chambres* (ouvertes) de $\mathscr{A}$, qui sont les simplexes maximaux d'une structure simpliciale sur V. On pourra ainsi parler des sommets de cette structure.

Une chambre qui intersecte l'axe de Coxeter est appelée *chambre axiale*, et ses sommets sont appelés *sommets axiaux*. Remarquons que les hyperplans fixés par les réflexions de S bordent une chambre axiale particulière notée C_0, voir les figures 11 et 12 pour les types $\widetilde{A}_2$ et $\widetilde{G}_2$.

L'ordre sur le groupe L des isométries de V défini dans la partie 5.1 peut être comparé avec celui de l'intervalle $[1, w]^W$ du groupe de Coxeter W :

Lemme 5.4 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 2.15). *L'inclusion $[1, w]^W \to [1, w]^L$ préserve l'ordre et le rang.*

Cependant, l'ordre sur W n'est pas nécessairement induit par celui de L.

Définition 5.5 (Vertical / Horizontal). La direction de l'axe de Coxeter ℓ est appelée *verticale*, et les directions orthogonales à ℓ sont appelées *horizontales*. Une isométrie elliptique u est appelée *horizontale* si elle déplace chaque point dans une direction horizontale (i.e. $\ell \subset \mathrm{Fix}(u)$), et *verticale* sinon.

Cette notion permet de décrire sommairement les éléments de l'intervalle $[1, w]^W$, et donne une ébauche de l'ordre que l'on va construire sur l'ensemble des réflexions.

Proposition 5.6 (Paolini et Salvetti, 2021, Proposition 2.17). *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, et soit w un élément de Coxeter. Les éléments $u \in [1, w]^W$ se répartissent dans trois rangées, selon les cas suivants (où $v \in W$ tel que $uv = w$ est le complément à droite de u) :*

— *(Rangée du bas) u est elliptique horizontal et v est hyperbolique,*

— *(Rangée du milieu) u et v sont elliptiques verticaux,*

— *(Rangée du haut) u est hyperbolique et v est elliptique horizontal.*

De plus, les rangées du haut et du bas sont finies, tandis que la rangée du milieu est infinie.

On peut même décrire précisément quelles réflexions de W apparaissent dans l'intervalle $[1, w]^W$.

Théorème 5.7 (McCammond, 2015, Theorem 9.6 ; Paolini et Salvetti, 2021, Theorem 3.17). *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, et soit w un élément de Coxeter. Toute réflexion verticale $r \in W$ est dans $[1, w]^W$, et fixe au moins deux sommets axiaux. Une réflexion horizontale $r \in W$ appartient à $[1, w]^W$ si et seulement si r fixe au moins un sommet axial.*

Nous noterons $R_0 = R \cap [1, w]^W$ l'ensemble des réflexions fixant au moins un sommet axial.

La dichotomie entre isométries hyperboliques et elliptiques permet même d'étudier de manière précise l'intervalle situé en-dessous d'une isométrie de $[1, w]^W$, à l'aide de la décomposition hyperbolique-horizontale suivante.

Si $u \in [1, w]^W$, notons W_u le sous-groupe de W engendré par $[1, u]^W$: c'est un groupe de Coxeter, dont l'ensemble des réflexions est $R \cap W_u$ (Humphreys, 1990, Theorem 8.2).

Théorème 5.8 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 3.20, Theorem 3.22). *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, soit $w \in W$ un élément de Coxeter, et soit $u \in [1, w]^W$. Alors u est un élément de Coxeter de W_u. De plus, si u est hyperbolique, il existe une unique décomposition $u = u'h$ dans W telle que :*

1. *u' est hyperbolique, h est elliptique horizontale, et $\ell(u) = \ell(u') + \ell(h)$,*
2. *$W_{u'}$ et W_h commutent, et $W_u = W_{u'} \times W_h$,*
3. *$W_{u'}$ est un sous-groupe affine de Coxeter irréductible, et u' en est un élément de Coxeter,*
4. *W_h est un sous-groupe sphérique de Coxeter engendré par des réflexions horizontales, et h en est un élément de Coxeter,*
5. *$[1, u]^W \simeq [1, u']^W \times [1, h]^W$ (où l'isomorphisme est donné par la multiplication).*

Notons que la preuve de ce résultat repose sur un lemme technique, qui est démontré pour les quatre familles infinies dans Paolini et Salvetti (2021), et est démontré par ordinateur pour les cas exceptionnels dans Paolini (2019a).

5.3. Décomposition horizontale

Nous allons maintenant décrire la structure des isométries horizontales d'un groupe de Coxeter affine, qui ont essentiellement été étudiées dans McCammond et Sulway (2017).

Considérons un groupe de Coxeter affine irréductible W, agissant comme groupe de réflexions sur $\mathbb{R}^n$, où n est le rang de W. Soit $w \in W$ un élément de Coxeter, R l'ensemble des réflexions de W.

Soit Φ le système de racines de W, et Φ_{hor} le système de racines horizontal, c'est-à-dire l'ensemble des racines de Φ qui sont horizontales. D'après McCammond et Sulway (2017, Section 6), ce système se décompose en sous-systèmes de type A : $\Phi_{hor} = \Phi_1 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_k$, où Φ_i est un système de racines de type A_{n_i}. Nous renvoyons à la table 2 pour la liste des différentes décompositions possibles selon le type de W. Rappelons que tous les éléments de Coxeter en type $\widetilde{A}_n$ ne sont pas équivalents, et nous renvoyons à McCammond (2015, Definition 7.7, Example 11.6) pour la définition de (p, q)-bigone de Coxeter.

Exemple 5.9. Considérons le groupe de Coxeter affine W de type $\widetilde{C_n}$, dont l'arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}^n$ est donné par les hyperplans $\{x_i = p\}_{1 \leqslant i \leqslant n, p \in \mathbb{Z}}$ et $\{x_i \pm x_j = p\}_{1 \leqslant i < j \leqslant n, p \in \mathbb{Z}}$. Un choix de chambre fondamentale C_0 est donné par le simplexe ouvert (aussi appelé orthosimplexe) :

$$C_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1\}.$$

Notons $S = \{s_1, s_{1,2}, s_{2,3}, \ldots, s_{n-1,n}, s_n\}$ l'ensemble simple de réflexions de W, par rapport aux hyperplans $\{x_1 = 0\}, \{x_1 = x_2\}, \{x_2 = x_3\}, \ldots, \{x_{n-1} = x_n\}, \{x_n = 1\}$

Type de W	Décomposition du système de racines horizontal
$\widetilde{A}_n$, où w est un (p,q)-bigone	$\Phi_{A_{p-1}} \sqcup \Phi_{A_{q-1}}$
$\widetilde{B}_n$	$\Phi_{A_1} \sqcup \Phi_{A_{n-2}}$
$\widetilde{C}_n$	$\Phi_{A_{n-1}}$
$\widetilde{D}_n$	$\Phi_{A_1} \sqcup \Phi_{A_1} \sqcup \Phi_{A_{n-3}}$
$\widetilde{G}_2$	Φ_{A_1}
$\widetilde{F}_4$	$\Phi_{A_1} \sqcup \Phi_{A_2}$
$\widetilde{E}_6$	$\Phi_{A_1} \sqcup \Phi_{A_2} \sqcup \Phi_{A_2}$
$\widetilde{E}_7$	$\Phi_{A_1} \sqcup \Phi_{A_2} \sqcup \Phi_{A_3}$
$\widetilde{E}_8$	$\Phi_{A_1} \sqcup \Phi_{A_2} \sqcup \Phi_{A_4}$

Table 2 – Décomposition du système de racines horizontal Φ_{hor}, d'après McCammond et Sulway (2017, Table 1).

supportant les faces de C_0. Un élément de Coxeter est $w = s_1 s_{1,2} s_{2,3} \cdots s_{n-1,n} s_n$, dont l'action sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, w \cdot x = (x_n - 2, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}),$$

ainsi l'axe de Coxeter est

$$\ell = \{a + \theta\mu \mid \theta \in \mathbb{R}\}, \text{ où } a = \frac{2}{n}(1,2,3,\dots,n) \text{ et } \mu = -\frac{2}{n}(1,1,\dots,1).$$

Les réflexions horizontales sont celles dont l'hyperplan est orthogonal à μ, c'est-à-dire $\{x_i - x_j = p\}_{1 \leqslant i < j \leqslant n, p \in \mathbb{Z}}$. Il s'agit bien d'un système de racines de type $\widetilde{A}_{n-1}$. Voir la figure 16 représentant pour le type $\widetilde{C}_3$, dans un hyperplan orthogonal à ℓ, le système de racines horizontal, ainsi que la trace de ℓ à l'intérieur de la chambre C_0.

Les réflexions horizontales appartenant à l'intervalle $[1, w]^W$ sont celles fixant au moins un sommet axial, d'après le théorème 5.7. En type $\widetilde{C}_3$, il y en a donc 6, notées a, a', b, b', c, c' sur la figure 16.

Exemple 5.10. Considérons le groupe de Coxeter affine W de type $\widetilde{B_n}$, dont l'arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ dans $\mathbb{R}^n$ est donné par les hyperplans $\{x_i = 2p\}_{1 \leqslant i \leqslant n, p \in \mathbb{Z}}$ et $\{x_i \pm x_j = p\}_{1 \leqslant i < j \leqslant n, p \in \mathbb{Z}}$. Un choix de chambre fondamentale C_0 est donné par le simplexe ouvert :

$$C_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n, x_{n-1} + x_n < 1\}.$$

Notons $S = \{s_1, s_{1,2}, s_{2,3}, \dots, s_{n-2,n-1}, s_{n-2,n-1}, s'_{n-2,n-1}\}$ l'ensemble simple de réflexions de W, par rapport aux hyperplans $\{x_1 = 0\}, \{x_1 = x_2\}, \{x_2 = x_3\}, \dots, \{x_{n-1} = x_n\}$,

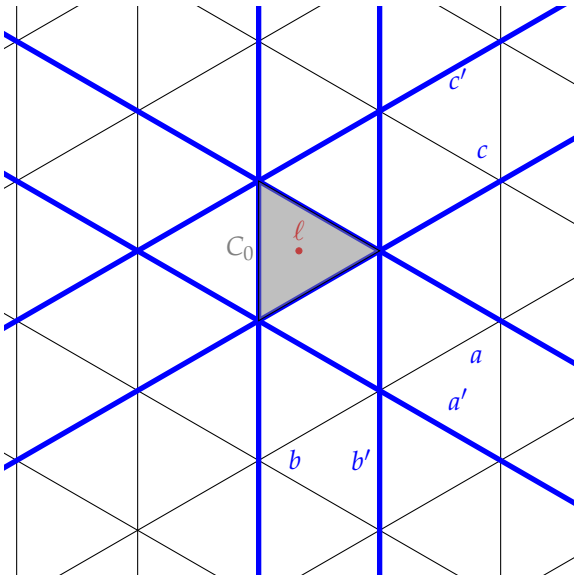


FIGURE 16 – Le système de racines horizontal en type $\widetilde{C}_3$, et les réflexions horizontales de $[1, w]^W$.

$\{x_{n-1} + x_n = 1\}$ supportant les faces de C_0. Un élément de Coxeter est $w = s_1 s_{1,2} s_{2,3} \cdots s_{n-1,n} s_{n-1,n}$, dont l'action sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, w \cdot x = (x_{n-1} - 1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, 1 - x_n),$$

ainsi l'axe de Coxeter est

$$\ell = \{a + \theta\mu \mid \theta \in \mathbb{R}\}, \text{ où } a = \left(\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, \frac{n-1}{n-1}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \mu = -\frac{2}{n-1}(1, 1, \ldots, 1, 0).$$

Les réflexions horizontales sont celles dont l'hyperplan est orthogonal à μ, c'est-à-dire $\{x_i - x_j = p\}_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1, p \in \mathbb{Z}}$ et $\{x_n = 2p\}_{p \in \mathbb{Z}}$. Il s'agit bien d'un système de racines réductible, de type $\widetilde{A}_{n-2} \times \widetilde{A}_1$, préservant la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

6. Groupes cristallographiques tressés

Nous allons donner une idée de la preuve du théorème 3.8, affirmant que le complexe d'intervalle K_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin dual W_w. Nous allons pour cela présenter tout d'abord brièvement la construction des groupes cristallographiques tressés de McCammond et Sulway (2017).

Considérons un groupe de Coxeter affine irréductible W, agissant comme groupe de réflexions sur $\mathbb{R}^n$, où n est le rang de W. Soit $w \in W$ un élément de Coxeter, R l'ensemble des réflexions de W.

Notons R_{hor} l'ensemble des réflexions horizontales de R (i.e. fixant l'axe de Coxeter ℓ), et R_{ver} l'ensemble des réflexions verticales. Notons également T l'ensemble fini des translations de $[1, w]^W$. Chaque élément de R a un poids de 1, et chaque élément de T a un poids de 2.

Notons $k \in \{1, 2, 3\}$ le nombre de composantes irréductibles du système de racines horizontales Φ_{hor}, voir la partie 5. Considérons la décomposition orthogonale de V en $\mathbb{R}\mu \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, où μ est la direction de la droite de Coxeter ℓ, et où $V_1, \dots, V_k$ correspondent à la décomposition $\Phi_{hor} = \Phi_1 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_k$. Pour chaque translation $t \in T$ et pour chaque $1 \leqslant i \leqslant k$, considérons la translation t_i de $\mathbb{R}\mu \oplus V_i$ dont les projections vérifient $p_{\mathbb{R}\mu}(t_i) = \frac{1}{k} p_{\mathbb{R}\mu}(t)$ et $p_{V_i}(t_i) = p_{V_i}(t)$. On a ainsi $t_1 t_2 \dots t_k = t$. L'ensemble de ces translations est noté T_F, elles sont appelées *translations de facteurs*, et elles ont un poids de $\frac{2}{k}$.

Rappelons que W est engendré par R, et qu'il contient T. Nous allons définir trois nouveaux groupes engendrés par certaines réflexions et translations :

— Le *groupe diagonal* D, engendré par R_{hor} et T.

— Le *groupe factorisé* F, engendré par R_{hor} et T_F.

— Le *groupe cristallographique* C, engendré par R et T_F.

Remarquons que, lorsque $k = 1$, nous avons $D = F$ et $W = C$.

Exemple 6.1. Lorsque W est de type $\widetilde{B}_n$, nous avons vu dans l'exemple 5.10 que le système de racines horizontales se décomposait en deux systèmes de types $\widetilde{A}_{n-2}$ et $\widetilde{A}_1$, correspondant à la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Ainsi pour chaque translation $t \in W$, on ajoutera dans T_F les deux translations correspondant aux composantes de t dans la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$.

L'intérêt de ces nouveaux groupes est double. Tout d'abord, l'introduction des translations de facteurs permet de rétablir la propriété de treillis qui manquait lorsque $k > 1$:

Théorème 6.2 (McCammond et Sulway, 2017, Theorem A). *Les intervalles $[1, w]^F$ et $[1, w]^C$ sont des treillis. En particulier, les groupes d'intervalles associés F_w et C_w sont des groupes de Garside.*

Le groupe d'intervalle C_w est appelé *groupe cristallographique tressé*. Les quatre groupes sont étroitement reliés de la manière suivante.

Théorème 6.3 (McCammond et Sulway, 2017, Theorem 9.6). *Les intervalles entre* 1 *et* w *dans les quatre groupes* D, F, W, C *sont reliés ainsi :*

$$\begin{aligned}[1,w]^C &= [1,w]^W \cup [1,w]^F \\ [1,w]^D &= [1,w]^W \cap [1,w]^F.\end{aligned}$$

De plus, les groupes d'intervalles associés D_w, F_w, W_w, C_w *sont tels que* C_w *est un produit amalgamé :*

$$C_w = W_w \underset{D_w}{\star} F_w.$$

Notons K_D, K_F, K_W, K_C les complexes associés respectivement aux intervalles

$$[1,w]^D, [1,w]^F, [1,w]^F, [1,w]^C.$$

Comme les intervalles $[1,w]^F$ et $[1,w]^C$ sont des treillis, nous savons d'après le théorème 2.7 que K_F et K_W sont des espaces classifiants pour F_w et C_w. Nous souhaitons démontrer que K_W est un espace classifiant pour W_w, et il s'avère plus simple de montrer d'abord que K_D est un espace classifiant pour D_w, car ce groupe lui-même est plus simple.

Théorème 6.4 (Paolini et Salvetti, 2021, Theorem 6.5). *Le groupe* D_w *est une extension par* $\mathbb{Z}$ *d'un produit de groupes d'Artin de types* $\widetilde{A_{n_i}}$*, pour* $1 \leqslant i \leqslant k$*. Le complexe* K_D *est un espace classifiant pour* D_w*.*

Démonstration. Considérons le sous-groupe H de D engendré par R_{hor}. D'après les notations de la partie 5, le système de racines horizontal se décompose en systèmes irréductibles $\Phi_{hor} = \Phi_1 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_k$, où chaque Φ_i est de type A_{n_i}. Ainsi H est isomorphe au produit $H = W_1 \times \cdots \times W_k$, où chaque W_i est un groupe de Coxeter affine de type $\widetilde{A}_{n_i}$.

On a une décomposition de l'intervalle

$$[1,w]^W \cap H = ([1,w]^W \cap W_1) \times \cdots \times ([1,w]^W \cap W_k),$$

d'après McCammond et Sulway, 2017, Proposition 7.6, et de plus le groupe H_w associé à l'intervalle $[1,w]^W \cap H$ est un sous-groupe de D_w d'après McCammond et Sulway, 2017, Lemma 9.3. Et le groupe H_w se décompose ainsi en produit de groupes d'Artin affines de type $\widetilde{A}_{n_1}, \ldots, \widetilde{A}_{n_k}$.

Notons K_H le sous-complexe de K_D constitué des simplexes $\sigma = [x_1|\ldots|x_d]$ tels que $\pi(\sigma) = x_1 \cdots x_d \in H$, on sait que le groupe fondamental de K_H s'identifie à H_w.

Considérons l'automorphisme $\phi\colon g \in W \mapsto w^{-1}gw \in W$ de conjugaison par w. Comme ϕ stabilise H, ϕ agit par automorphisme sur K_H, et on peut considérer la suspension Z de K_H par ϕ. Plus précisément, considérons le quotient $Z = K_H \times [0,1]/\sim$,

où le simplexe $([x_1|\dots|x_d],1)$ est identifié avec le simplexe $([\phi(x_1)|\dots|\phi(x_d)],0)$. Nous allons voir que Z est homéomorphe à K_D.

Nous allons tout d'abord définir une structure simpliciale sur Z. Fixons un simplexe $\sigma = [x_1|\dots|x_d]$ de K_H. La cellule $\sigma \times [0,1]$ de Z est découpée en $d+1$ simplexes $\tau_0, \dots, \tau_d$, où

$$\tau_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_d, t) \in \sigma \times [0,1] \mid a_1 \geqslant \dots \geqslant a_i \geqslant 1-t \geqslant a_{i+1} \geqslant \dots \geqslant a_d\}.$$

Soit $y \in T$ le complément à droite de $\pi(\sigma)$, i.e. tel que $x_1 x_2 \cdots x_d y = w$. Alors le simplexe τ_i s'identifie au simplexe $[x_{i+1}|\dots|x_d|y|\phi(x_1)|\dots|\phi(x_i)]$ de K_D. Ainsi Z s'identifie à un sous-complexe simplicial de K_D.

Réciproquement, toute factorisation maximale de w dans D s'écrit

$$w = x'_1 \cdots x'_i y' x'_{i+1} \cdots x'_d,$$

où chaque x'_j est une réflexion horizontale, et où $y' \in T$. Ainsi tout simplexe maximal de K_D est dans Z, donc $Z = K_D$.

On conclut que D_w est une extension par $\mathbb{Z}$ de H_w, et que le revêtement universel de K_D, qui s'identifie à $\widetilde{K_H} \times \mathbb{R}$, est contractile. □

Comme les quatre complexes d'intervalle sont reliés par $K_C = K_W \cup K_F$ et $K_D = K_C \cap K_F$, nous pouvons maintenant apporter une preuve du théorème 3.8 affirmant que K_W est un espace classifiant pour le groupe d'Artin dual W_w.

Preuve du théorème 3.8. Considérons le revêtement universel $\rho\colon \widetilde{K_C} \to K_C$. Nous savons donc que $\widetilde{K_C} = \rho^{-1}(K_W) \cup \rho^{-1}(K_F)$ et que $\rho^{-1}(K_D) = \rho^{-1}(K_W) \cap \rho^{-1}(K_F)$. Considérons la suite exacte longue de Mayer-Vietoris (à coefficients entiers) :

$$\dots \to H_i(\rho^{-1}(K_D)) \to H_i(\rho^{-1}(K_W)) \oplus H_i(\rho^{-1}(K_F)) \to H_i(\widetilde{K_C}) \to \dots$$

D'après le théorème 2.7 et le théorème 6.4, nous savons que $\widetilde{K_C}$ est contractile, et que chaque composante connexe de $\rho^{-1}(K_D)$ et de $\rho^{-1}(K_F)$ est contractile. Ainsi la composante connexe $\widetilde{K_W}$ de $\rho^{-1}(K_W)$ est contractile. □

7. Ordres lexicographiques axiaux

Nous allons présenter une manière géométrique d'ordonner l'ensemble des réflexions d'un groupe de Coxeter inférieures à un élément de Coxeter donné. Ceci permettra dans la suite de montrer que le complexe d'intervalle K_W se rétracte sur le complexe de Salvetti dual X'_W. Par ailleurs, cela implique également que l'ensemble ordonné des partitions non croisées de type affine est lexicographiquement décortiquable.

7.1. Ordre lexicographique et décortiquabilité

Nous allons rappeler ici la définition de la décortiquabilité lexicographique (Björner et Wachs, 1983, 1996 ; Wachs, 2007).

Soit P un ensemble ordonné borné, c'est-à-dire ayant un élément minimal et un élément maximal. Si $p, q \in P$, notons $p \lessdot q$ si $p < q$ et il n'y a aucun élément $r \in P$ tel que $p < r < q$. Le diagramme de Hasse de P est le graphe de sommets P, avec une arête entre p et q si $p \lessdot q$ ou $q \lessdot p$. Notons $\mathscr{E}(P)$ l'ensemble des arêtes du graphe de Hasse de P.

Un *étiquetage des arêtes* de P est une application $\lambda : \mathscr{E}(P) \to \Lambda$ à valeurs dans un ensemble totalement ordonné Λ. Toute chaîne maximale $c = (x \lessdot z_1 \lessdot z_2 \lessdot \cdots \lessdot z_n \lessdot y)$ entre deux éléments $x \leqslant y$ de P est ainsi étiquetée par le mot

$$\lambda(c) = \lambda(x, z_1)\lambda(z_1, z_2) \dots \lambda(z_t, y).$$

On dit que la chaîne c est *croissante* si le mot associé $\lambda(c)$ est strictement croissant. De plus, si $x \leqslant y$ sont deux éléments de P, alors les chaînes maximales entre x et y peuvent être comparées lexicographiquement, ainsi que colexicographiquement (en comparant les lettres de droite à gauche).

Définition 7.1. Un *étiquetage lexicographique* de P est un étiquetage tel que, pour tout intervalle fermé $[x, y] \subset P$, il existe une unique chaîne maximale croissante de x à y, et cette chaîne précède lexicographiquement toutes les autres chaînes maximales. Un ensemble ordonné borné admettant un tel étiquetage lexicographique est dit *lexicographiquement décortiquable*.

Si P est un ensemble ordonné, son complexe d'ordre est le complexe simplicial de sommets P, et dont les simplexes sont donnés par les chaînes de P. L'un des intérêts de la notion d'étiquetage lexicographique réside dans le résultat suivant sur la topologie du complexe d'ordre de P :

Théorème 7.2 (Wachs, 2007, Theorem 3.2.2)**.** *Soit P un ensemble ordonné borné lexicographiquement décortiquable. Alors le complexe d'ordre de P a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères.*

De plus, le produit de deux ensembles ordonnés décortiquables est lui-même décortiquable. Plus précisément :

Théorème 7.3 (Björner et Wachs, 1997, Proposition 10.15)**.** *Soient P_1, P_2 deux ensembles ordonnés admettant des étiquetages lexicographiques $\lambda_i : \mathscr{E}(P_i) \to \Lambda_i$. Considérons un ordre total sur $\Lambda = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$ se restreignant aux ordres de Λ_1 et de Λ_2. Alors $\lambda : \mathscr{E}(P_1 \times P_2) \to \Lambda$ est un étiquetage lexicographique.*

7.2. Ordres axiaux dans le cas fini

Soit W un groupe de Coxeter fini, agissant par isométries linéaires sur $V = \mathbb{R}^n$. Notons $\Phi \subset V$ le système de racines de W, w un élément de Coxeter de W et $\Phi^+ \subset \Phi$ le système positif associé. Notons R l'ensemble des réflexions de W. Si $\alpha \in \Phi$, notons $r_\alpha \in R$ la réflexion orthogonale par rapport à α.

Définition 7.4. Un ordre total $\prec$ sur R est appelé *ordre de réflexion* si, pour toutes racines positives distinctes $\alpha_1, \alpha_2 \in \Phi^+$, et pour toute racine $\alpha \in \Phi^+$ qui est une combinaison linéaire positive de α_1 et α_2, on a

$$r_{\alpha_1} \prec r_\alpha \prec r_{\alpha_2} \text{ ou } r_{\alpha_2} \prec r_\alpha \prec r_{\alpha_1}.$$

Cet ordre est dit *compatible* avec w si, dès que $\alpha, \beta \in \Phi^+$ sont les racines simples d'un sous-système de racines irréductible de rang 2 et que $r_\alpha r_\beta \in [1, w]$, alors $r_\alpha \prec r_\beta$.

L'intérêt de cette notion concerne la décortiquabilité, comme l'ont montré Athanasiadis, Brady et Watt.

Théorème 7.5 (Athanasiadis, T. Brady et Watt, 2007, Theorem 3.5). *Soit W un groupe de Coxeter fini cristallographique, w un élément de Coxeter, et R l'ensemble des réflexions. Si $\prec$ est un ordre de réflexion sur R compatible avec w, alors l'étiquetage associé de $\mathscr{E}([1, w])$ est un étiquetage lexicographique.*

Nous allons maintenant décrire une méthode géométrique simple permettant de construire de tels ordres de réflexions compatibles.

Considérons l'arrangement d'hyperplans $\mathscr{A}$ associé à W. Soit C_0 la chambre du complexe de Coxeter associé à Φ^+. Considérons une droite affine $\ell' = \{a + \theta\mu \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset V$ qui soit générique par rapport à $\mathscr{A}$, où $a \in C_0$ est un point base de ℓ', et $\mu \in V \smallsetminus \{0\}$ oriente la droite ℓ'. On dit qu'un point $b \in \ell'$ est *au-dessus* d'un point $b' \in \ell'$ si $b - b'$ est un multiple positif de μ, et *en-dessous* sinon.

Ceci permet de définir un ordre total sur R :

— en premier viennent les réflexions fixant un point de ℓ' situé au-dessus de a, et r vient avant r' si $\mathrm{Fix}(r) \cap \ell'$ est en-dessous de $\mathrm{Fix}(r') \cap \ell'$,

— ensuite viennent les réflexions fixant un point de ℓ' situé en-dessous de a, et r vient avant r' si $\mathrm{Fix}(r) \cap \ell'$ est en-dessous de $\mathrm{Fix}(r') \cap \ell'$.

Proposition 7.6. *Pour toute telle droite générique ℓ', l'ordre associé est un ordre de réflexion.*

Démonstration. Comme $a \in C_0$, nous savons que pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$ nous avons $\langle a, \alpha \rangle > 0$. Supposons pour simplifier que nous avons renormalisé les racines positives de sorte que $\langle a, \alpha \rangle = 1$.

Pour toute racine positive $\alpha \in \Phi^+$, l'intersection entre l'hyperplan $\mathrm{Fix}(r_\alpha)$ et la droite ℓ' est

$$\mathrm{Fix}(r_\alpha) \cap \ell' = \left\{ a - \frac{1}{\langle \mu, \alpha \rangle} \mu \right\}.$$

Par définition de $\prec$, on a donc que $r_\alpha \prec r_\beta$ si et seulement si $\langle \mu, \alpha \rangle < \langle \mu, \beta \rangle$.

Ainsi, si $\alpha = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$ est une combinaison positive de racines positives, alors $\langle \mu, \alpha \rangle$ est compris entre $\langle \mu, \alpha_1 \rangle$ et $\langle \mu, \alpha_2 \rangle$, donc $r_{\alpha_1} \prec r_\alpha \prec r_{\alpha_2}$ ou $r_{\alpha_2} \prec r_\alpha \prec r_{\alpha_1}$. □

Exemple 7.7. Nous allons maintenant décrire un tel exemple d'ordre de réflexion présenté dans (Athanasiadis, T. Brady et Watt, 2007, Example 3.3). Considérons le groupe de Coxeter $W \simeq \mathfrak{S}_n$ de type A_{n-1}. Choisissons comme élément de Coxeter $w \in W$ le n-cycle $w = (1, 2, \ldots, n) = (1,2)(2,3)\cdots(n-1,n)$, où (i,j) désigne la transposition permutant i et j. L'intervalle $[1, w]$ s'identifie au treillis des partitions non croisées de n points (voir l'exemple 2.8). L'arrangement d'hyperplans associé dans $\mathbb{R}^n$ est $\{x_i - x_j = 0, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Fixons $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Considérons la droite

$$\ell' = \{a + \theta(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}), \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Alors ℓ' intersecte chaque hyperplan $\{x_i - x_j = 0\}$ avec $\theta > 0$, et l'ordre de réflexion associé est le suivant : la transposition (i,j) vient avant la transposition (i',j') si et seulement si $i < i'$, ou $i = i'$ et $j \leqslant j'$. Ceci définit un ordre de réflexion sur W.

De plus, cet ordre est compatible avec l'élément de Coxeter w : un sous-système $\Phi' \subset \Phi$ irréductible de rang 2 correspond au choix d'indices $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, dont les racines simples sont (i,j) et (j,k). Alors $(i,j)(j,k) \in [1,w]^W$, et on a bien $(i,j) \prec (j,k)$.

Ainsi, d'après le théorème 7.5, l'étiquetage associé de $\mathscr{E}([1,w])$ est un étiquetage lexicographique.

7.3. Ordres sur les réflexions horizontales

Nous allons maintenant décrire comment choisir une telle droite ℓ' afin de définir un ordre de réflexion sur l'ensemble des réflexions horizontales.

Notons $\Phi_{hor} = \Phi_1 \sqcup \cdots \sqcup \Phi_k$ la décomposition du système de racines horizontal en k composantes irréductibles, où Φ_i est de type A_{n_i} (voir la partie 5). Choisissons une factorisation horizontale $w = t h_1 \cdots h_k$ de w, où t est une translation, et h_i est un élément de Coxeter pour le sous-groupe parabolique sphérique $W_{h_i} \subset W$ associé à l'intervalle $[1, h_i]^W$.

Lemme 7.8 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 4.5). *Pour tout point $a \in \ell$ sur l'axe de Coxeter, il existe une droite ℓ_i contenant a de direction le sous-espace engendré par Φ_i, telle que l'ordre de réflexion $\prec_{\ell_i}$ sur W_{h_i} associé à ℓ_i soit compatible avec h_i.*

Démonstration. Le groupe de Coxeter W_{h_i} est de type A_{n_i}, on peut donc considérer une droite ℓ' comme dans l'exemple 7.7 puis considérer sa projection sur le sous-espace affine de direction le sous-espace engendré par Φ_i. □

Notons $W_i \subset W$ le sous-groupe de Coxeter de type $\widetilde{A}_{n_i}$ engendré par les réflexions par rapport aux racines de Φ_i.

Nous étendons cet ordre de réflexion à un ordre $\prec_i$ sur $R_{hor} \cap W_i$ de la manière suivante : si $r_1 \prec_{\ell_i} r_2$, alors toute réflexion parallèle à r_1 vient avant toute réflexion parallèle à r_2. Remarquons que deux réflexions parallèles ne peuvent intervenir dans une factorisation minimale de w, ainsi l'ordre entre deux réflexions parallèles peut être choisi arbitrairement.

Considérons un ordre total $\prec_{hor}$ sur R_{hor} tel que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, la restriction de $\prec_{hor}$ à $R_{hor} \cap W_i$ soit égale à $\prec_i$. Ceci nous permet de définir un étiquetage sur l'ensemble des isométries horizontales.

Lemme 7.9 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 4.9). *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, et soit w un élément de Coxeter. Pour tout élément horizontal $u \in [1, w]^W$, l'ordre $\prec_{hor}$ définit un étiquetage lexicographique $\lambda : \mathscr{E}([1, u]) \to R_{hor}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 7.3 garantissant qu'un produit d'ensembles ordonnés décortiquables est décortiquable. □

7.4. Ordres axiaux dans le cas affine

Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, w un élément de Coxeter, et R_0 l'ensemble des réflexions appartenant à $[1, w]^W$. Notons $\ell \subset V$ l'axe de Coxeter, et C_0 une chambre axiale du complexe de Coxeter.

Définition 7.10. Un *ordre axial* sur R_0 est un ordre total comme suit :

- en premier viennent les réflexions verticales fixant un point de ℓ situé au-dessus de C_0, et r vient avant r' si $\mathrm{Fix}(r) \cap \ell$ est en-dessous de $\mathrm{Fix}(r') \cap \ell$: ces réflexions verticales sont appelées *positives* ;
- ensuite viennent les réflexions horizontales de R_{hor}, dans l'un des ordres totaux $\prec_{hor}$ construits dans la partie 7.3 ;
- enfin viennent les réflexions verticales fixant un point de ℓ situé en-dessous de C_0, et r vient avant r' si $\mathrm{Fix}(r) \cap \ell$ est en-dessous de $\mathrm{Fix}(r') \cap \ell$: ces réflexions verticales sont appelées *négatives*.

Si deux réflexions verticales fixent le même point de ℓ, leur ordre est choisi arbitrairement.

Exemple 7.11. Considérons le groupe de Coxeter W de type $\widetilde{A}_2$. Notons a, b, c les générateurs standards de W, et $w = abc$ un élément de Coxeter. Notons $\ell \subset \mathbb{R}^2$ l'axe de Coxeter, comme sur la figure 17. Les intersections de l'axe de Coxeter ℓ avec les hyperplans de réflexions forment une suite de points $(p_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec p_0 et p_1 au bord de la chambre C_0.

D'après le théorème 5.7, les réflexions horizontales de $[1, w]^W$ sont celles qui fixent un sommet axial, il s'agit donc de b et b'. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ pair, notons $c_i \in R$ la réflexion parallèle à $c = c_0$ fixant p_i. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ impair, notons $a_i \in R$ la réflexion parallèle à $a = a_1$ fixant p_i. L'ensemble des réflexions verticales de $[1, w]^W$ est $\{c_i \,|\, i \in \mathbb{Z} \text{ pair }\} \cup \{a_i \,|\, i \in \mathbb{Z} \text{ impair }\}$.

Un ordre axial sur R_0 est donc donné par

$$\underbrace{a_1 \prec c_2 \prec a_3 \prec c_4 \prec \cdots}_{\text{réflexions positives}} \prec \underbrace{b \prec b'}_{\text{réflexions horizontales}} \prec \underbrace{\cdots \prec a_{-3} \prec c_{-2} \prec a_{-1} \prec c_0}_{\text{réflexions négatives}}.$$

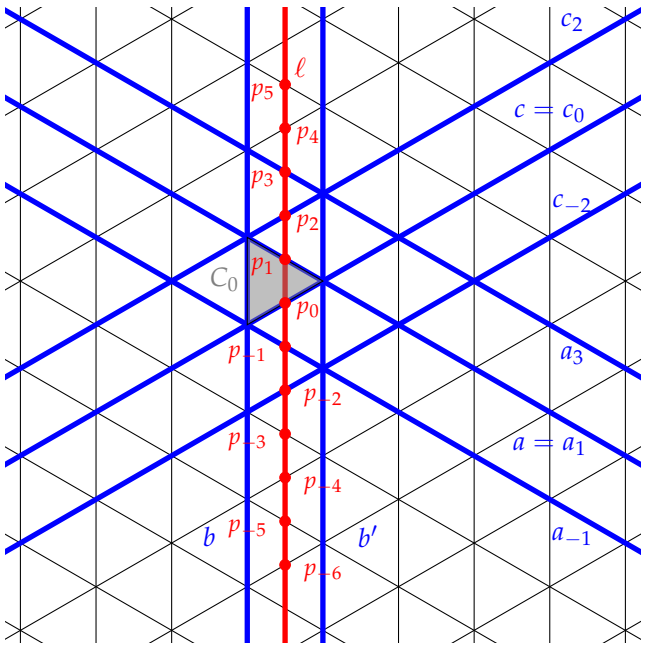


FIGURE 17 – Un ordre axial sur les réflexions en type $\widetilde{A}_2$.

Cet ordre axial permet de montrer l'existence et l'unicité de chaînes lexicographiquement minimales dans les intervalles.

Lemme 7.12 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 4.16). *Considérons un ordre axial $\prec$ sur R_0. Tout intervalle $[u, v]$ contenu dans $[1, w]$ a une unique chaîne maximale lexicographiquement minimale, et celle-ci est croissante. De même, $[u, v]$ a une unique chaîne maximale colexicographiquement maximale, et celle-ci est croissante.*

Démonstration. Nous allons le montrer par récurrence sur la longueur de l'intervalle $[u, v]$. Considérons les réflexions apparaissant dans cet intervalle. Ce sont les éléments de $R_0 \cap [1, u^{-1}v]$.

Si $u^{-1}v$ est elliptique, alors $R_0 \cap [1, u^{-1}v]$ est fini, et a donc une unique réflexion minimale r pour $\prec$.

Si $u^{-1}v$ est hyperbolique, alors $R_0 \cap [1, u^{-1}v]$ contient au moins une réflexion verticale positive, et a donc une unique réflexion minimale r pour $\prec$.

Écrivons $u' = ur$, alors par hypothèse de récurrence sur l'intervalle $[u', v]$, il suffit de montrer que toutes les réflexions de $R_0 \cap [1, u'^{-1}v]$ sont supérieures à r. Si $r' \in R_0 \cap [1, u'^{-1}v]$, alors il existe une factorisation de $u^{-1}v$ débutant par rr', donc $r \prec r'$. □

Ainsi la preuve de la décortiquabilité se ramène à montrer qu'il y a au plus une chaîne maximale croissante dans un intervalle $[1, u]^W$. Nous allons distinguer les cas où u est elliptique ou hyperbolique. Les preuves de ces deux lemmes étant un peu techniques, nous en donnerons seulement les grandes lignes.

Lemme 7.13 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 4.17). *Considérons un ordre axial $\prec$ sur R_0, et soit $u \in [1, w]$ un élément elliptique. L'intervalle $[1, u]$ a au plus une chaîne maximale croissante.*

Démonstration. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, on peut trouver un élément maximal u_i de $[1, w] \cap W_i$ tel que $[1, u] \cap W_i \subset [1, u_i]$. Pour simplifier, on peut supposer que $u_i = h_i$.

Fixons un point $a \in C_0 \cap \ell$. Le lemme 7.8 donne une droite ℓ_i contenant a, dirigée par un vecteur μ_i dans la direction de Φ_i. Notons μ le vecteur orientant la droite de Coxeter ℓ. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, considérons la droite ℓ' passant par a, dirigée par le vecteur

$$\mu' = \mu + \varepsilon\mu_1 + \cdots + \varepsilon\mu_k.$$

Les droites ℓ' et ℓ'_i intersectent les hyperplans des réflexions de W_{h_i} dans le même ordre.

Perturbons légèrement la droite ℓ', de sorte qu'elle devienne générique par rapport aux hyperplans des réflexions de W_u. Alors les ordres $\prec_{\ell'}$ et $\prec$ ne diffèrent éventuellement que pour des paires de réflexions fixant le même point de ℓ. Pour simplifier, supposons que ces ordres sont les mêmes.

Comme ℓ' est générique, d'après la proposition 7.6, l'ordre $\prec_{\ell'}$ est un ordre de réflexion. Nous admettons que cet ordre est compatible avec l'élément de Coxeter u de W_u. Ainsi, d'après le théorème 7.5, l'étiquetage associé de $\mathscr{E}([1,u]^W)$ est un étiquetage lexicographique. □

Lemme 7.14 (PAOLINI et SALVETTI, 2021, Lemma 4.18). *Considérons un ordre axial $\prec$ sur R_0, et soit $u \in [1,w]$ un élément hyperbolique tel que le sous-groupe W_u soit irréductible. L'intervalle $[1,u]$ a au plus une chaîne maximale croissante.*

Démonstration. Supposons que nous ayons une chaîne maximale croissante de $[1,u]^W$, correspondant à une factorisation $u = r_1 r_2 \cdots r_m$. Comme u est une isométrie verticale, r_1 ou r_m est une réflexion verticale.

Si r_1 est une réflexion verticale qui n'est pas minimale parmi $R_0 \cap [1,u]$, alors il existe une factorisation $u = r_1 r_2' \cdots r_m'$ telle que $r_2' \prec r_1$. Notons $u = r_1 u'$: d'après le lemme 7.13 on déduit aussi que l'intervalle $[1,u']$ a au plus une chaîne maximale croissante. Ainsi $u' = r_2 \cdots r_m$ est l'unique factorisation lexicographiquement minimale, donc $r_2 \preceq r_2' \prec r_1$: ceci contredit $r_1 \prec r_2$.

Donc si r_1 est une réflexion verticale, elle est minimale parmi $R_0 \cap [1,u]$, et $u' = r_2 \cdots r_m$ est elliptique. Ainsi, d'après le premier cas, on déduit que $u' = r_2 \cdots r_m$ est l'unique factorisation lexicographiquement minimale de u'.

De même, si r_m est une réflexion verticale, alors elle est maximale parmi $R_0 \cap [1,u]$, et $r_1 \cdots r_{m-1}$ est l'unique factorisation lexicographiquement minimale.

Il y a donc au plus deux chaînes maximales croissantes. Nous admettons qu'il s'agit de la même chaîne. □

Nous avons présenté les ingrédients nécessaires à la preuve de la décortiquabilité de l'ensemble ordonné $[1,w]^W$.

Théorème 7.15 (PAOLINI et SALVETTI, 2021, Theorem 4.19). *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, w un élément de Coxeter, et R_0 l'ensemble des réflexions appartenant à $[1,w]^W$. Considérons un ordre axial sur R_0. Considérons l'étiquetage des arêtes $\lambda : \mathscr{E}([1,w]^W) \to R_0$ naturel. Alors tout intervalle $[u,v]^W$ de $[1,w]^W$ possède une unique chaîne maximale strictement croissante, et cette chaîne est à la fois lexicographiquement minimale et colexigraphiquement maximale. En particulier, λ est un étiquetage lexicographique.*

Une conséquence importante est que l'ensemble ordonné des partitions non croisées affines $[1,w]^W$ est lexicographiquement décortiquable.

Démonstration. Remarquons que la multiplication à gauche par u^{-1} est un isomorphisme de $[u,v]^W$ sur $[1,u^{-1}v]^W$: on peut donc se contenter d'étudier l'intervalle $[1,u]^W$. D'après le lemme 7.12, il suffit de montrer que $[1,u]^W$ a au plus une chaîne maximale croissante. Si u est elliptique, c'est l'objet du lemme 7.13. Si u est hyperbolique et que W_u est irréductible, c'est l'objet du lemme 7.14.

Supposons maintenant que u est hyperbolique quelconque. D'après le théorème 5.8, considérons la décomposition hyperbolique-horizontale $u = u'h$ de l'isométrie u. L'isométrie u' est hyperbolique et le groupe de Coxeter $W_{u'}$ est irréductible, donc λ est un étiquetage lexicographique de $[1,u']$. L'isométrie h est elliptique horizontale, donc λ est un étiquetage lexicographique de $[1,h]$. Comme on a la décomposition $[1,u] = [1,u'] \times [1,h]$, d'après le théorème 7.3, λ est un étiquetage lexicographique de $[1,u]$. En particulier, l'intervalle $[1,u]$ a une unique chaîne croissante maximale. □

8. Espaces classifiants finis pour les groupes d'Artin duaux

Nous avons maintenant les outils nécessaires à la description d'un sous-complexe fini K'_W de K_W sur lequel K_W se rétracte. Cette construction va ainsi fournir un espace classifiant fini pour le groupe d'Artin dual W_w.

L'ensemble des faces de K_W possède une structure très particulière provenant de l'action de l'élément de Coxeter w par conjugaison. Notons $\mathscr{F}(K_W)$ l'ensemble ordonné des faces de K_W.

Si $\sigma = [x_1|x_2|\dots|x_d] \in \mathscr{F}(K_W)$ est un d-simplexe de K_W, on notera $\pi(\sigma) = x_1x_2\cdots x_d \in [1,w]^W$. Partant de σ, il y a une manière naturelle de se déplacer « à droite » pour aller en $\rho(\sigma)$ (dans la direction de w) ou « à gauche » pour aller en $\lambda(\sigma)$ (dans la direction de w^{-1}) parmi les simplexes de K_W :

$$\rho(\sigma) = \begin{cases} [x_2|\dots|x_d] \text{ si } \pi(\sigma) = w \\ [x_1|\dots|x_d|y] \text{ sinon, où } x_1\cdots x_d y = w \end{cases}$$

$$\lambda(\sigma) = \begin{cases} [x_1|\dots|x_{d-1}] \text{ si } \pi(\sigma) = w \\ [y|x_1|\dots|x_d] \text{ sinon, où } yx_1\cdots x_d = w \end{cases}$$

Ceci est permis par le fait que le treillis $[1,w]^W$ est équilibré. Remarquons que ρ est bien l'inverse de λ.

Nous allons appeler *composantes fibrées* de $\mathscr{F}(K_W)$ les orbites sous l'action de λ et ρ. Plus formellement, on peut considérer l'application entre ensembles ordonnés

$$\begin{array}{rcl} \eta\colon \mathscr{F}(K_W) & \to & \mathbb{N} \\ [x_1|x_2|\dots|x_d] & \mapsto & \begin{cases} d \text{ si } \pi(\sigma) = x_1x_2\cdots x_d = w \\ d+1 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Les composantes fibrées de $\mathscr{F}(K_W)$ sont alors les composantes connexes des images réciproques $\eta^{-1}(d)$, pour $d \geqslant 1$, dans le diagramme de Hasse de $\mathscr{F}(K_W)$. Le cas du type $\widetilde{A}_2$ est présenté dans l'exemple 8.8.

Si $\pi(\sigma) = w$, nous dirons que σ est un simplexe *supérieur*, et *inférieur* sinon. Notons que chaque composante fibrée alterne entre simplexes supérieurs et inférieurs.

La proposition 5.6 permet de montrer la description simple suivante des simplexes de K_W :

Lemme 8.1. *Soit $\sigma = [x_1|x_2|\dots|x_d]$ un d-simplexe supérieur de K_W, avec $d \geqslant 1$. Alors σ est exactement de l'un de ces deux types :*

1. *soit chaque x_i est elliptique, et au moins l'un d'entre eux est vertical,*
2. *soit chaque x_i est elliptique horizontal ou hyperbolique.*

Nous allons étudier la topologie de K_W par l'étude des composantes fibrées.

Proposition 8.2. *L'ensemble $\mathscr{F}(K_W)$ possède un nombre fini de composantes fibrées, qui sont de deux types :*

— *Les composantes infinies, dont les simplexes sont du type 1. du lemme 8.1.*

— *Les composantes finies, dont les simplexes sont du type 2. du lemme 8.1.*

De plus, toute composante fibrée intersecte $\mathscr{F}(X'_W) \subset \mathscr{F}(K_W)$.

Nous allons donner une preuve de cette proposition en nous appuyant sur les deux lemmes suivants.

Lemme 8.3. *Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}(K_W)$ une composante fibrée finie. Alors il existe $\sigma \in \mathscr{C}$ tel que $\pi(\sigma)$ est une isométrie elliptique horizontale.*

Démonstration. Soit $\sigma = [x_1|x_2|\dots|x_d] \in \mathscr{C}$ tel que $\pi(\sigma) = w$. Si l'un des x_i est une isométrie elliptique verticale, la composante $\mathscr{C}$ est infinie. Ainsi σ est du type 2 du lemme 8.1 : on peut donc supposer que x_d est hyperbolique. Ainsi $\sigma' = [x_1|x_2|\dots|x_{d-1}] \in \mathscr{C}$, et $\pi(\sigma') = x_1x_2\cdots x_{d-1}$ est elliptique horizontale. □

Lemme 8.4. *Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}(K_W)$ une composante fibrée infinie. Alors il existe $\sigma \in \mathscr{C}$ tel que $\pi(\sigma)$ est une isométrie elliptique verticale.*

Démonstration. Soit $\sigma = [x_1|x_2|\dots|x_d] \in \mathscr{C}$ tel que $\pi(\sigma) = w$. Comme $[1, w]^W$ n'a qu'un nombre fini d'isométries elliptiques horizontales ou hyperboliques, on déduit que σ est du type 1 du lemme 8.1 : on peut donc supposer que x_d est elliptique verticale. Ainsi $\sigma' = [x_1|x_2|\dots|x_{d-1}] \in \mathscr{C}$, et $\pi(\sigma') = x_1x_2\cdots x_{d-1}$ est également elliptique verticale. □

Démonstration de la proposition 8.2. Soit $\mathscr{C}$ une composante fibrée de $\mathscr{F}(K_W)$. D'après les lemmes précédents, il existe $\sigma \in \mathscr{C}$ tel que $x = \pi(\sigma)$ soit elliptique : ainsi x fixe un sommet axial. Quitte à conjuguer par une puissance de w, on peut donc supposer que x fixe un sommet de C_0. En particulier, $\sigma \in \mathscr{F}(X'_W)$ donc $\mathscr{C}$ intersecte $\mathscr{F}(X'_W)$. De plus, comme X'_W est un complexe fini, il n'y a qu'un nombre fini de composantes fibrées. □

Ceci nous permet de définir un sous-complexe intéressant de K_W.

Définition 8.5. Le sous-complexe K'_W de K_W a pour simplexes la réunion des composantes fibrées finies de $\mathscr{F}(K_W)$, ainsi que les simplexes des composantes fibrées infinies de $\mathscr{F}(K_W)$ compris entre le premier et le dernier simplexe appartenant à $\mathscr{F}(X'_W)$. Le complexe K'_W est appelé *sous-complexe adapté* de K_W.

Théorème 8.6 (Paolini et Salvetti, 2021, Theorem 7.9)**.** *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, et soit w un élément de Coxeter. Le complexe d'intervalle K_W associé à $[1, w]^W$ possède un sous-complexe adapté fini K'_W contenant X'_W, tel que K_W se rétracte par déformation sur K'_W.*

Démonstration. Nous allons utiliser la théorie de Morse discrète, et renvoyons à la partie 10 pour plus de détails. Nous allons définir un couplage acyclique propre sur $\mathscr{F}(K_W)$ dont l'ensemble des simplexes critiques sera précisément $\mathscr{F}(K'_W)$.

Pour chaque composante fibrée infinie $\mathscr{C}$ de $\mathscr{F}(K_W)$, remarquons que $\mathscr{C}$ est une droite dont $\mathscr{C} \cap \mathscr{F}(K'_W)$ est un segment non vide. Considérons l'unique couplage acyclique propre $\mathscr{M}_{\mathscr{C}}$ dont les simplexes critiques sont $\mathscr{C} \cap \mathscr{F}(K'_W)$. D'après le théorème du patchwork (théorème 10.3), la réunion de ces couplages est un couplage $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{F}(K_W)$ dont les simplexes critiques sont $\mathscr{F}(K'_W)$. Il est clair que ce couplage est propre. D'après le théorème fondamental de la théorie de Morse discrète (théorème 10.2), le complexe K_W se rétracte par déformation sur son sous-complexe adapté K'_W. □

Ce résultat s'étend également aux groupes cristallographiques tressés, et a la conséquence immédiate suivante.

Théorème 8.7 (Paolini et Salvetti, 2021, Theorem 7.10)**.** *Les groupes d'Artin affines, ainsi que les groupes cristallographiques tressés, ont un espace classifiant fini.*

Exemple 8.8. Nous allons présenter les composantes fibrées de K_W dans le type $\widetilde{A}_2$, en suivant (Paolini et Salvetti, 2021, Example 7.12). Nous utilisons les notations de l'exemple 7.11, ainsi que la figure 17. Le complexe K_W possède 2 composantes finies, correspondant à la factorisation triviale de w, et aux factorisations

$$w = (b)(c_2c_0) = (c_2c_0)(b') = (b')(a_1a_{-1}) = (a_1a_{-1})(b).$$

Ces deux composantes fibrées finies apparaissent en haut de la figure 18, qui provient de l'article (Paolini et Salvetti, 2021, Figure 8). Les sept autres composantes sont infinies. Voici par exemple la suite infinie de factorisations de w correspondant à la troisième composante de la figure 18 :

$$w = \cdots = (c_2 b')(a_1) = (a_1)(bc_0) = (bc_0)(a_{-1}) = (a_{-1})(c_{-2}b') = (c_{-2}b')(a_{-3}) = \cdots .$$

Dans la figure 18, les sommets noirs correspondent aux simplexes du sous-complexe de Salvetti dual X'_W. Les sommets représentés correspondent à tous les simplexes du sous-complexe adapté fini K'_W.

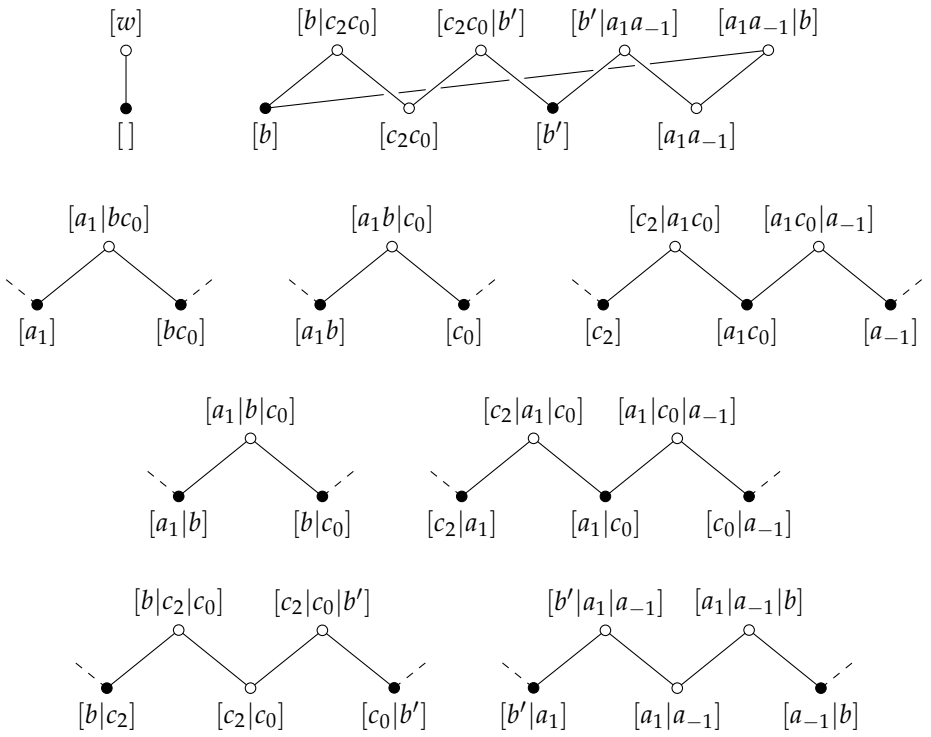


Figure 18 – Les composantes fibrées de K_W en type $\widetilde{A}_2$.

9. La conjecture du $K(\pi, 1)$

Nous avons montré que K_W est asphérique, que K_W se rétracte sur K'_W, que K'_W contient X'_W. Nous avons également montré que X'_W a le type d'homotopie du complexe de Salvetti X_W, et donc également de l'espace de configuration Y_W.

Afin de montrer que Y_W est asphérique, il suffit donc de montrer que K'_W se rétracte sur X'_W. Pour cela, nous allons nous servir de l'ordre lexicographique construit dans la partie 7 afin de construire un couplage sur les faces de K'_W dont les faces critiques seront celles de X'_W.

Fixons un ordre axial $\prec$ sur l'ensemble des réflexions $R_0 = R \cap [1,w]^W$, comme dans le théorème 7.15.

On peut aisément décrire les sous-complexes K'_W et X'_W de K_W à l'aide des composantes fibrées et des applications λ, ρ. Soit σ un simplexe de K_W.

— σ est un simplexe de X'_W si et seulement si $\pi(\sigma)$ fixe un sommet de C_0.

— σ est un simplexe de K'_W si et seulement s'il existe $k, k' \geqslant 0$ tels que $\lambda^k(\sigma) \in \mathscr{F}(X'_W)$ et $\rho^{k'}(\sigma) \in \mathscr{F}(X'_W)$.

En particulier, tous les simplexes σ de X'_W vérifient $\pi(\sigma) \neq w$, donc ils sont inférieurs.

Nous allons définir une notion supplémentaire, la profondeur d'un simplexe supérieur.

Définition 9.1. Soit $\sigma[x_1|\dots|x_d]$ un simplexe de K_W supérieur, i.e. tel que $\pi(\sigma) = w$. On appelle *profondeur* de σ le plus petit entier $\delta = \delta(\sigma) \in \{1,2,\dots,d\}$, tel que :

— soit $\ell(x_\delta) \geqslant 2$,

— soit $\ell(x_1) = \cdots = \ell(x_\delta) = 1$ et, pour toute réflexion $r \in [1,w]^W$ telle que $r \leqslant x_{\delta+1}$, on a $x_\delta \prec r$.

S'il n'existe aucun tel entier, on pose $\delta(\sigma) = \infty$.

Cette notion sera utile pour les simplexes supérieurs σ dont le voisin de droite $\rho(\sigma)$ appartient à X'_W.

Lemme 9.2. *Soit σ un simplexe de K'_W supérieur tel que $\rho(\sigma)$ appartient à X'_W. Alors $\delta(\sigma) \neq \infty$.*

Ceci va nous permettre de définir un couplage μ sur l'ensemble des faces de K'_W.

Définition 9.3 (Couplage)**.** Si σ est un simplexe de K'_W n'appartenant pas à X'_W, nous définissons un simplexe $\mu(\sigma)$ de K_W comme suit.

(1) Si σ est inférieur, on pose $\mu(\sigma) = \lambda(\sigma)$.

(2) Si σ est supérieur et $\rho(\sigma)$ n'appartient pas à X'_W, on pose $\mu(\sigma) = \rho(\sigma)$.

Supposons maintenant que $\sigma = [x_1|\dots|x_d]$ est supérieur et que $\rho(\sigma)$ appartient à X'_W.

(3) Si $\ell(x_\delta) \geqslant 2$, on pose $\mu(\sigma) = [x_1|\dots|x_{\delta-1}|y|z|x_{\delta+1}|\dots|x_d]$, où $x_\delta = yz$ et y est la plus petite réflexion de $R_0 \cap [1,x_\delta]^W$ pour $\prec$.

(4) Si $\ell(x_\delta) = 1$, on pose $\mu(\sigma) = [x_1|\dots|x_{\delta-1}|x_\delta x_{\delta+1}|x_{\delta+2}|\dots|x_d]$.

Remarquons que, dans les cas (1) et (3), σ est une facette de $\mu(\sigma)$, tandis que dans les cas (2) et (4), c'est $\mu(\sigma)$ qui est une facette de σ.

Exemple 9.4. Nous reprenons l'exemple 8.8 du type $\widetilde{A}_2$, accompagné de la figure 18. Dans ce cas, le couplage μ est un couplage entre les sommets blancs de la figure 18 correspondant aux simplexes de $K'_W \smallsetminus X'_W$. Le couplage μ est entièrement décrit comme suit (Paolini et Salvetti, 2021, Figure 9) :

$$\begin{array}{rcrrcr}
[c_2c_0] & \longleftrightarrow & [b|c_2c_0] & [c_2c_0|b'] & \longleftrightarrow & [c_2|c_0|b'] \\
[a_1a_{-1}] & \longleftrightarrow & [b'|a_1a_{-1}] & [a_1a_{-1}|b] & \longleftrightarrow & [a_1|a_{-1}|b] \\
[c_2|c_0] & \longleftrightarrow & [b|c_2|c_0] & [c_2|a_1c_0] & \longleftrightarrow & [c_2|a_1|c_0] \\
[a_1|a_{-1}] & \longleftrightarrow & [b'|a_1|a_{-1}] & [a_1c_0|a_{-1}] & \longleftrightarrow & [a_1|c_0|a_{-1}] \\
[w] & \longleftrightarrow & [a_1|bc_0] & [a_1b|c_0] & \longleftrightarrow & [a_1|b|c_0]
\end{array}$$

Par exemple, si l'on considère le simplexe $\sigma = [w]$, alors $\ell(\sigma) = 1$ et on est dans le cas (3) de la définition de $\mu(\sigma)$. Ainsi, comme on peut le voir dans l'exemple 7.11, la plus petite réflexion de R_0 pour $\prec$ est a_1, donc $\mu([w]) = [a_1|bc_0]$. Réciproquement, comme a_1 est inférieure pour $\prec$ à toutes les réflexions inférieures à bc_0, on a $\delta([a_1|bc_0]) = 1$ donc $\mu([a_1|bc_0]) = [w]$.

Cette application μ préserve les faces de K'_W :

Lemme 9.5 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 8.8). *Si $\sigma \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$, alors $\mu(\sigma) \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$.*

Démonstration. Nous allons simplement donner les idées de la preuve de ce lemme. Soit $\sigma \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$, distinguons selon les cas de la définition de $\mu(\sigma)$:

(1) Si σ est inférieur, alors $\mu(\sigma) = \lambda(\sigma) \in \mathscr{F}(K'_W)$. De plus, comme $\mu(\sigma)$ est supérieur et que X'_W est constitué de simplexes inférieurs, on déduit que $\mu(\sigma) \notin \mathscr{F}(X'_W)$.

(2) Si σ est supérieur et $\rho(\sigma)$ n'appartient pas à X'_W, alors $\mu(\sigma) = \rho(\sigma) \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$ par hypothèse.

Supposons maintenant que $\sigma = [x_1|\dots|x_d]$ est supérieur et que $\rho(\sigma)$ appartient à X'_W. On peut montrer que $\rho(\mu(\sigma)) \in \mathscr{F}(X'_W)$. Il suffit donc de montrer qu'il y a un simplexe de X'_W à gauche de $\mu(\sigma)$. Comme σ appartient à K'_W, il existe un simplexe $\tau \in \mathscr{F}(X'_W)$ à gauche de σ, de la forme

$$\tau = [\phi^h(x_{i+1})|\dots|\phi^h(x_d)|\phi^{h+1}(x_1)|\dots|\phi^{h+1}(x_{i-1})],$$

où $h < 0$ et $1 \leqslant i \leqslant d$, et où ϕ désigne la conjugaison par w.

(3) Si $\ell(x_\delta) \geqslant 2$, alors $\mu(\sigma) = [x_1|\dots|x_{\delta-1}|y|z|x_{\delta+1}|\dots|x_d]$. Si $i > \delta$, considérons le simplexe

$$\tau' = [\phi^h(x_{i+1})|\dots|\phi^h(x_d)|\phi^{h+1}(x_1)|\dots|\phi^{h+1}(y)|\phi^{h+1}(z)|\dots|\phi^{h+1}(x_{i-1})].$$

C'est un simplexe de X'_W qui est à gauche de $\mu(\sigma)$, ainsi $\mu(\sigma) \in \mathscr{F}(K'_W)$. Le cas $i < \delta$ est similaire. Le cas $i = \delta$ est nettement plus technique, et nous l'admettons.

(4) Si $\ell(x_\delta) = 1$, alors $\mu(\sigma) = [x_1|\dots|x_{\delta-1}|x_\delta x_{\delta+1}|x_{\delta+2}|\dots|x_d]$. Supposons par exemple que $i > \delta + 1$, considérons alors le simplexe

$$\tau' = [\phi^h(x_{i+1})|\dots|\phi^h(x_d)|\phi^{h+1}(x_1)|\dots|\phi^{h+1}(x_\delta x_{\delta+1})|\dots|\phi^{h+1}(x_{i-1})],$$

c'est un simplexe de X'_W qui est à gauche de $\mu(\sigma)$, ainsi $\mu(\sigma) \in \mathscr{F}(K'_W)$. Les autres valeurs de i se traitent de manière similaire. □

Ceci nous permet de montrer que μ est une involution :

Proposition 9.6. *L'application μ est une involution de $\mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$ sans point fixe.*

Démonstration. D'après le lemme 9.5, on a le droit de composer μ avec elle-même. Soit $\sigma \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$, distinguons selon les cas de la définition de $\mu(\sigma)$:

(1) Si σ est inférieur, alors $\mu(\sigma) = \lambda(\sigma)$ est supérieur et $\rho(\mu(\sigma)) = \sigma$ n'appartient pas à X'_W, donc $\mu(\mu(\sigma)) = \rho(\lambda(\sigma))$.

(2) Si σ est supérieur et $\rho(\sigma)$ n'appartient pas à X'_W, comme $\mu(\sigma) = \rho(\sigma)$ est inférieur, on a $\mu(\mu(\sigma)) = \lambda(\rho(\sigma)) = \sigma$.

Supposons maintenant que $\sigma = [x_1|\dots|x_d]$ est supérieur et que $\rho(\sigma)$ appartient à X'_W. Par définition de δ nous savons que $x_1 \succ x_2 \succ \dots \succ x_{\delta-1} \succ y$, où y désigne la réflexion minimale de $[1, x_\delta]$ pour l'ordre $\prec$.

(3) Si $\ell(x_\delta) \geqslant 2$, alors $x_\delta = yz$, et pour toute réflexion $r \leqslant z$ nous savons que $y \prec r$. Ainsi $\delta(\mu(\sigma)) = \delta$, et $\mu(\mu(\sigma)) = \sigma$.

(4) Si $\ell(x_\delta) = 1$, alors $x_{\delta-1} \succ x_\delta$, ainsi $\delta(\mu(\sigma)) = \delta$, et x_δ est la plus petite réflexion de $[1, x_\delta x_{\delta+1}]$ pour $\prec$, ainsi $\mu(\mu(\sigma)) = \sigma$. □

Nous allons utiliser la théorie de Morse discrète, et nous renvoyons à la partie 10 pour plus de détails. L'involution μ permet de définir un couplage $\mathscr{M}$ sur l'ensemble $\mathscr{F}(K'_W)$ des faces de K'_W :

$$\mathscr{M} = \{(\mu(\sigma), \sigma) \,|\, \sigma \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W) \text{ et } \mu(\sigma) \lessdot \sigma\},$$

où on rappelle que l'on note $\tau \lessdot \sigma$ si τ est une facette (face de codimension 1) de σ. Comme μ est sans point fixe, l'ensemble des faces critiques de $\mathscr{M}$ est $\mathscr{F}(X'_W)$.

Proposition 9.7 (Paolini et Salvetti, 2021, Lemma 8.13). *Le couplage $\mathscr{M}$ est acyclique et propre.*

Démonstration. Comme $\mathscr{F}(K'_W)$ est fini, le couplage $\mathscr{M}$ est propre. Nous allons donner les grandes lignes de la preuve de l'acyclicité de $\mathscr{M}$.

Pour cela, nous allons définir une application ξ de $\mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$ à valeurs dans un ensemble totalement ordonné $(P, \trianglelefteq)$, qui décroît le long de chemin orientés pour $\mathscr{M}$. Ceci permet de montrer qu'il n'y a pas de cycle orienté pour $\mathscr{M}$.

Considérons l'ensemble $P \subset {R_0}^{n+1}$ des factorisations minimales de w comme produit de $(n+1)$ réflexions. L'ordre total $\trianglelefteq$ sur P est défini de la manière suivante. Soient $\alpha, \alpha' \in P$, notons $r, r' \in R_0$ les réflexions maximales pour $\prec$ apparaissant dans α, α' respectivement, ainsi que $1 \leqslant k, k' \leqslant n+1$ leurs positions d'apparition.

— Si $r \neq r'$, alors $\alpha \triangleleft \alpha'$ si et seulement si $r \succ r'$.

— Si $r = r'$ et $k \neq k'$, alors $\alpha \triangleleft \alpha'$ si et seulement si $k > k'$.

— Si $r = r'$ et $k = k'$, alors $\alpha \triangleleft \alpha'$ si et seulement si α vient avant α' dans l'ordre lexicographique pour $\prec$.

Nous allons maintenant définir une application $\xi \colon \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W) \to P$ comme suit. Soit $\sigma \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$.

— Si $\sigma = [x_1|\dots|x_d]$ est supérieur, i.e. $\pi(\sigma) = w$, définissons $\xi(\sigma) \in P$ comme la concaténation des factorisations croissantes de $x_1, \dots, x_d$.

— Si σ est inférieur, considérons $\mu(\sigma) = \lambda(\sigma) = [x_1|\dots|x_d]$, et définissons $\xi(\sigma) \in P$ comme la concaténation des factorisations croissantes de $x_1, \dots, x_d$.

La preuve de l'acyclicité repose sur deux faits, précisant le comportement de l'application ξ lorsqu'on passe d'un simplexe à l'une de ses facettes.

Fait 1. Si $\sigma \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$, alors $\xi(\mu(\sigma)) = \xi(\sigma)$.

Quitte à échanger les rôles de σ et $\mu(\sigma)$, on peut supposer que $\mu(\sigma) \lessdot \sigma$. Distinguons selon que σ est dans le cas (2) ou (4) de la définition de $\mu(\sigma)$:

(2) Si σ est supérieur et $\rho(\sigma)$ n'appartient pas à X'_W, alors $\mu(\sigma)$ est inférieur et $\mu(\mu(\sigma)) = \sigma$, donc $\xi(\mu(\sigma)) = \xi(\sigma)$.

(4) Si $\sigma = [x_1|\dots|x_d]$ est supérieur, que $\rho(\sigma)$ appartient à X'_W et $\ell(x_\delta) = 1$, alors $\mu(\sigma) = [x_1|\dots|x_{\delta-1}|x_\delta x_{\delta+1}|x_{\delta+2}|\dots|x_d]$. Comme x_δ est la réflexion minimale de $[1, x_\delta x_{\delta+1}]$ pour $\prec$, on déduit que la factorisation croissante de $x_\delta x_{\delta+1}$ est la concaténation de x_δ avec la factorisation croissante de $x_{\delta+1}$. Ainsi $\xi(\mu(\sigma)) = \xi(\sigma)$.

Fait 2. Soient $\sigma, \tau \in \mathscr{F}(K'_W) \smallsetminus \mathscr{F}(X'_W)$ deux simplexes tels que σ est supérieur et τ est une facette de σ. Alors $\xi(\tau) \trianglelefteq \xi(\sigma)$. Si de plus $\tau = \lambda(\sigma)$, alors $\xi(\tau) \triangleleft \xi(\sigma)$.

Nous admettons ce deuxième fait, et nous allons montrer que ces deux faits impliquent l'acyclicité de $\mathscr{M}$. Supposons par l'absurde qu'il existe un cycle orienté de simplexes distincts

$$\sigma_1 \succcurlyeq \tau_1 \prec \sigma_2 \succcurlyeq \tau_2 \prec \cdots \succcurlyeq \tau_m \prec \sigma_{m+1} = \sigma_1$$

dans $\mathscr{F}(K'_W)$, où $\mu(\tau_j) = \sigma_{j+1}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$.

D'après les faits 1 et 2, on déduit que

$$\xi(\sigma_1) \trianglerighteq \xi(\tau_1) = \xi(\sigma_2) \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \xi(\tau_m) = \xi(\sigma_{m+1}) = \xi(\sigma_1),$$

ainsi toutes ces inégalités sont des égalités.

Pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, comme $\mu(\tau_i) \neq \sigma_i$, on déduit que $\tau_i \neq \rho(\sigma_i)$. D'après le fait 2, on sait que $\tau_i \neq \lambda(\sigma_i)$. Ainsi τ_i est une facette de σ_i différente de $\rho(\sigma_i)$ et de $\lambda(\sigma_i)$, ainsi tous les σ_i et les τ_i sont des simplexes supérieurs.

De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, comme $\xi(\sigma_i) = \xi(\tau_i)$, nous avons $\delta(\sigma_i) \geqslant \delta(\tau_i)$. D'autre part, d'après la preuve de la Proposition 9.6, nous savons que $\delta(\tau_i) = \delta(\mu(\tau_i)) = \delta(\sigma_{i+1})$. Ainsi $\delta(\sigma_1) = \delta(\tau_1) = \cdots = \delta(\sigma_m) = \delta(\tau_m)$.

Écrivons donc $\sigma_1 = [x_1|x_2|\dots|x_d]$ et $\tau_1 = [x_1|\dots|x_{i-1}|x_ix_{i+1}|x_{i+2}|\dots|x_d]$, où $1 \leqslant i \leqslant d-1$, et notons $\delta = \delta(\sigma_1) = \delta(\tau_1)$. De plus, σ_1 est dans le cas (4) de la définition de $\mu(\sigma_1)$, donc $\ell(x_\delta) = 1$. Comme $\ell(x_ix_{i+1}) \geqslant 2$, nous savons que $\delta \leqslant i$. Comme τ_1 est dans le cas (3) de la définition de $\mu(\tau_1)$, nous savons que $\delta \geqslant i$. Ainsi $\delta = i$, d'où $\sigma_1 = \mu(\tau_1) = \sigma_2$, ce qui est une contradiction. □

Ceci permet enfin de donner la preuve de la conjecture du $K(\pi, 1)$ pour tous les groupes d'Artin affines.

Théorème 9.8 (La conjecture du $K(\pi,1)$; Paolini et Salvetti, 2021, Theorem 8.15)**.** *Soit W un groupe de Coxeter affine. Alors la conjecture du $K(\pi,1)$ pour le groupe d'Artin G_W est vraie : l'espace de configuration Y_W est un espace classifiant pour G_W.*

Démonstration. Il suffit de consider le cas où W est irréductible. Fixons un ensemble simple de réflexions S, et un élément de Coxeter w. D'après le théorème 3.8, le complexe d'intervalle K_W est un espace classifiant (pour le groupe d'Artin dual W_w).

D'après le théorème 8.6, le complexe K_W se rétracte par déformation forte sur son sous-complexe adapté fini K'_W.

Comme le couplage $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{F}(K'_W)$ est acyclique et que son ensemble de faces critiques est $\mathscr{F}(X'_W)$, on déduit du théorème 10.2 que K'_W se rétracte par déformation forte sur X'_W.

D'après le théorème 4.6, le complexe X'_W a le même type d'homotopie que le complexe de Salvetti X_W et que l'espace de configuration Y_W. On conclut que Y_W est un espace classifiant pour son groupe fondamental G_W. □

De plus, ceci fournit une nouvelle preuve de l'isomorphisme entre le groupe d'Artin G_W et le groupe d'Artin dual W_w, dû à McCammond et Sulway :

Théorème 9.9 (McCammond et Sulway, 2017, Theorem C ; Paolini et Salvetti, 2021, Theorem 8.16). *Soit W un groupe de Coxeter affine irréductible, et soit w un élément de Coxeter. Le morphisme naturel du groupe d'Artin G_W vers le groupe d'Artin dual W_w est un isomorphisme.*

Démonstration. La preuve ci-dessus montre déjà que G_W et W_w sont isomorphes. Pour toute réflexion simple $s \in S$, remarquons que l'arête $[s]$ représentant $s \in \pi_1(K_W) = W_w$ appartient au sous-complexe X'_W. De plus, l'équivalence d'homotopie entre X_W et X'_W du théorème 4.6 identifie cette arête $[s]$ avec le sous-complexe $X_{\{s\}}$ du complexe de Salvetti X_W. Ainsi cette arête représente l'élément $s \in \pi_1(X_W) = G_W$. Ceci montre que l'isomorphisme entre G_W et W_w donné par l'équivalence d'homotopie entre X_W et K_W est bien le morphisme naturel. □

10. Théorie de Morse discrète

Nous présentons ici quelques éléments de théorie de Morse discrète, qui ont permis de montrer que le complexe K_W se rétracte sur le sous-complexe K'_W, puis sur le sous-complexe X'_W. Cette théorie est dûe à Forman (1998, 2002), et nous utilisons le point de vue de Chari (2000) présenté dans Paolini et Salvetti (2021).

Soit P un ensemble gradué. Si $p, q \in P$, rappelons que l'on note $p \lessdot q$ si $p < q$ et il n'y aucun élément $r \in P$ tel que $p < r < q$. Notons H le diagramme de Hasse de P : rappelons que c'est le graphe de sommets P, avec une arête entre p et q si $p \lessdot q$ ou $q \lessdot p$. Notons $\mathscr{E}(P)$ l'ensemble des arêtes de H.

Si $\mathscr{M}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{E}(P)$, on peut orienter les arêtes de H de la manière suivante : une arête entre p et q tels que $p \lessdot q$ est orientée de p vers q si elle appartient à $\mathscr{M}$, et de q vers p sinon. Notons $H_{\mathscr{M}}$ le graphe orienté ainsi obtenu.

Définition 10.1.
Un *couplage* sur P est un sous-ensemble $\mathscr{M} \subset \mathscr{E}(P)$ tel que tout élément de P appartient à au plus une arête de $\mathscr{M}$.

Le couplage est *acyclique* si le graphe $H_{\mathscr{M}}$ n'a pas de cycle orienté.

Le couplage est *propre* si, pour tout $p \in P$, l'ensemble des chemins orientés dans $H_{\mathscr{M}}$ issus de p est fini.

Un élément $p \in P$ est appelé *critique* s'il n'appartient à aucune arête de $\mathscr{M}$.

La notion de couplage est pertinente pour les ensembles ordonnés de faces d'un complexe. Soit X un CW-complexe. L'ensemble $\mathscr{F}(X)$ des faces (cellules ouvertes) de X est ordonné par la relation suivante : $\tau \leqslant \sigma$ si et seulement si $\overline{\tau} \subset \overline{\sigma}$.

Fixons une cellule σ de X de dimension $n \geqslant 1$, et considérons l'application $\phi\colon \mathbb{D}^n \to X$ définissant σ. Si τ est de codimension 1 dans σ, on dit que τ est une *facette régulière* de σ si :

— l'application ϕ se restreint en un homéomorphisme de $\phi^{-1}(\tau)$ sur τ, et

— l'adhérence $\overline{\phi^{-1}(\tau)} \subset \mathbb{D}^n$ est une boule fermée de dimension $n-1$.

Voici le théorème principal de la théorie de Morse discrète.

Théorème 10.2 (Batzies, 2002 ; Chari, 2000 ; Forman, 1998). *Soit X un CW-complexe, et $Y \subset X$ un sous-complexe. Supposons qu'il existe un couplage acyclique propre $\mathscr{M}$ sur l'ensemble ordonné $\mathscr{F}(X)$ des cellules de X tel que :*

— *l'ensemble des cellules critiques de $\mathscr{M}$ est $\mathscr{F}(Y)$ et*

— *pour toute paire $(\tau, \sigma) \in \mathscr{M}$, la cellule τ est une facette régulière de σ.*

Alors X se rétracte par déformation forte sur Y. En particulier, l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ est une équivalence d'homotopie.

Voici un outil classique pour construire des couplages acycliques, appelé théorème du patchwork :

Théorème 10.3 (Kozlov, 2008, Theorem 11.10). *Soit $\eta\colon P \to Q$ une application d'ensembles ordonnés. Supposons que, pour tout $q \in Q$, nous ayons un couplage acyclique $\mathscr{M}_q \subset \mathscr{E}(P)$ ne comportant que des éléments de la fibre $\eta^{-1}(q)$. Alors la réunion de ces couplages est un couplage acyclique sur P.*

Références

Armstrong, D. (2009). « Generalized noncrossing partitions and combinatorics of Coxeter groups », *Mem. Amer. Math. Soc.* **202** (949), p. x+159.

Artin, E. (1925). « Theorie der Zöpfe », *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **4** (1), p. 47-72.

Athanasiadis, C. A., Brady, T. et Watt, C. (2007). « Shellability of noncrossing partition lattices », *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (4), p. 939-949.

Batzies, E. (2002). « Discrete Morse theory for cellular resolutions ». Thèse de doct. https://archiv.ub.uni-marburg.de/diss/z2002/0115/pdf/deb.pdf.

Bessis, D. (2003). « The dual braid monoid », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **36** (5), p. 647-683.

——— (2015). « Finite complex reflection arrangements are $K(\pi, 1)$ », *Ann. of Math.* (2) **181** (3), p. 809-904.

Birman, J., Ko, K. H. et Lee, S. J. (1998). « A new approach to the word and conjugacy problems in the braid groups », *Adv. Math.* **139** (2), p. 322-353.

Björner, A. et Wachs, M. (1983). « On lexicographically shellable posets », *Trans. Amer. Math. Soc.* **277** (1), p. 323-341.

——— (1996). « Shellable nonpure complexes and posets. I », *Trans. Amer. Math. Soc.* **348** (4), p. 1299-1327.

——— (1997). « Shellable nonpure complexes and posets. II », *Trans. Amer. Math. Soc.* **349** (10), p. 3945-3975.

Bourbaki, N. (1968). *Éléments de mathématique. Fasc. XXXIV. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre IV : Groupes de Coxeter et systèmes de Tits. Chapitre V : Groupes engendrés par des réflexions. Chapitre VI : systèmes de racines*. Actualités Scientifiques et Industrielles [Current Scientific and Industrial Topics], No. 1337. Hermann, Paris, 288 pp. (loose errata).

Boyd, R., Charney, R. et Morris-Wright, R. (2020). « A Deligne complex for Artin Monoids ». `arXiv:2007.12156`.

Brady, N. et McCammond, J. (2015). « Factoring Euclidean isometries », *Internat. J. Algebra Comput.* **25** (1-2), p. 325-347.

Brady, T. (2001). « A partial order on the symmetric group and new $K(\pi,1)$'s for the braid groups », *Adv. Math.* **161** (1), p. 20-40.

Brady, T. et McCammond, J. (2010). « Braids, posets and orthoschemes », *Algebr. Geom. Topol.* **10** (4), p. 2277-2314.

Brady, T. et Watt, C. (2002). « $K(\pi,1)$'s for Artin groups of finite type ». In : *Proceedings of the Conference on Geometric and Combinatorial Group Theory, Part I (Haifa, 2000)*. T. 94, p. 225-250.

——— (2008). « Non-crossing partition lattices in finite real reflection groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (4), p. 1983-2005.

Brieskorn, E. (1973). « Sur les groupes de tresses [d'après V. I. Arnol'd] », in : *Séminaire Bourbaki, 24ème année (1971/1972), Exp. No. 401*, 21-44. Lecture Notes in Math., Vol. 317.

Brown, R. (2006). *Topology and groupoids*. English. 3rd revised, updated and extended ed. Bangor : Ronald Brown.

Callegaro, F., Moroni, D. et Salvetti, M. (2008). « Cohomology of affine Artin groups and applications », *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (8), p. 4169-4188.

——— (2010). « The $K(\pi,1)$ problem for the affine Artin group of type $\widetilde{B}_n$ and its cohomology », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **12** (1), p. 1-22.

Callegaro, F. et Salvetti, M. (2004). « Integral cohomology of the Milnor fibre of the discriminant bundle associated with a finite Coxeter group », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **339** (8), p. 573-578.

Chari, M. K. (2000). « On discrete Morse functions and combinatorial decompositions », in : t. 217. 1-3. Formal power series and algebraic combinatorics (Vienna, 1997), p. 101-113.

Charney, R. (2004). « The Deligne complex for the four-strand braid group », *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (10), p. 3881-3897.

——— (2016). « Problems related to Artin groups ». American Institute of Mathematics, `https://people.brandeis.edu/$\protect~$charney/papers/Artin$_$probs.pdf`.

Charney, R. et Davis, M. W. (1995a). « Finite $K(\pi, 1)$s for Artin groups », in : *Prospects in topology (Princeton, NJ, 1994)*. T. 138. Ann. of Math. Stud. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, p. 110-124.

——— (1995b). « The $K(\pi, 1)$-problem for hyperplane complements associated to infinite reflection groups », *J. Amer. Math. Soc.* **8** (3), p. 597-627.

Charney, R., Meier, J. et Whittlesey, K. (2004). « Bestvina's normal form complex and the homology of Garside groups », *Geom. Dedicata* **105**, p. 171-188.

Cohen, F. (1973). « Cohomology of braid spaces », *Bull. Amer. Math. Soc.* **79**, p. 763-766.

Davis, M. W. (2015). « The geometry and topology of Coxeter groups », in : *Introduction to modern mathematics*. T. 33. Adv. Lect. Math. (ALM). Int. Press, Somerville, MA, p. 129-142.

De Concini, C. et Salvetti, M. (2000). « Cohomology of Coxeter groups and Artin groups », *Math. Res. Lett.* **7** (2-3), p. 213-232.

Dehornoy, P. (2002). « Groupes de Garside », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2), p. 267-306.

Dehornoy, P., Digne, F. et al. (2015). *Foundations of Garside theory*. T. 22. EMS Tracts in Mathematics. Author name on title page : Daan Kramer. European Mathematical Society (EMS), Zürich, p. xviii+691.

Dehornoy, P. et Lafont, Y. (2003). « Homology of Gaussian groups », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2), p. 489-540.

Dehornoy, P. et Paris, L. (1999). « Gaussian groups and Garside groups, two generalisations of Artin groups », *Proc. London Math. Soc. (3)* **79** (3), p. 569-604.

Deligne, P. (1972). « Les immeubles des groupes de tresses généralisés », *Invent. Math.* **17**, p. 273-302.

Digne, F. (2006). « Présentations duales des groupes de tresses de type affine $\widetilde{A}$ », *Comment. Math. Helv.* **81** (1), p. 23-47.

——— (2012). « A Garside presentation for Artin-Tits groups of type $\widetilde{C}_n$ », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **62** (2), p. 641-666.

Falk, M. (1995). « $K(\pi, 1)$ arrangements », *Topology* **34** (1), p. 141-154.

Farb, B. et Margalit, D. (2012). *A primer on mapping class groups*. T. 49. Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, p. xiv+472.

Forman, R. (1998). « Morse theory for cell complexes », *Adv. Math.* **134** (1), p. 90-145.

——— (2002). « A user's guide to discrete Morse theory », *Sém. Lothar. Combin.* **48**, Art. B48c, 35.

Garside, F. A. (1969). « The braid group and other groups », *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)* **20**, p. 235-254.

Godelle, E. (2007). « Artin-Tits groups with CAT(0) Deligne complex », *J. Pure Appl. Algebra* **208** (1), p. 39-52.

Godelle, E. et Paris, L. (2012). « Basic questions on Artin-Tits groups », in : *Configuration spaces*. T. 14. CRM Series. Ed. Norm., Pisa, p. 299-311.

Goldman, A. (2021). « The $K(\pi,1)$ conjecture and acylindrical hyperbolicity for relatively extra-large Artin groups ». `https://www.asc.ohio-state.edu/goldman.224/papers/relativelyextralarge.pdf`.

Haettel, T. (2021). « Lattices, injective metrics and the $K(\pi,1)$ conjecture ». `arXiv:2109.07891`.

Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, p. xii+544.

Hendriks, H. (1985). « Hyperplane complements of large type », *Invent. Math.* **79** (2), p. 375-381.

Humphreys, J. E. (1990). *Reflection groups and Coxeter groups*. T. 29. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, p. xii+204.

Jankiewicz, K. et Schreve, K. (2021). « The K(π,1)-conjecture implies the center conjecture for Artin groups ». `arXiv:2201.06591`.

Juhász, A. (2018). « Relatively extra-large Artin groups », *Groups Geom. Dyn.* **12** (4), p. 1343-1370.

Kassel, C. et Turaev, V. (2008). *Braid groups*. T. 247. Graduate Texts in Mathematics. With the graphical assistance of Olivier Dodane. Springer, New York, p. xii+340.

Kozlov, D. (2008). *Combinatorial algebraic topology*. T. 21. Algorithms and Computation in Mathematics. Springer, Berlin, p. xx+389.

Lek, H. van der (1983). « The homotopy type of complex hyperplane complements. » Thèse de doct. Nijmegen.

McCammond, J. (2015). « Dual euclidean Artin groups and the failure of the lattice property », *J. Algebra* **437**, p. 308-343.

——— (2017). « The mysterious geometry of Artin groups », *Winter Braids Lect. Notes* **4** (Winter Braids VII (Caen, 2017)), Exp. No. 1, 30.

McCammond, J. et Sulway, R. (2017). « Artin groups of Euclidean type », *Invent. Math.* **210** (1), p. 231-282.

Morris-Wright, R. (2021). « Parabolic subgroups in FC-type Artin groups », *J. Pure Appl. Algebra* **225** (1), Paper No. 106468, 13.

Okonek, C. (1979). « Das $K(\pi, 1)$-Problem für die affinen Wurzelsysteme vom Typ A_n,C_n », *Math. Z.* **168** (2), p. 143-148.

Paolini, G. (2019a). « Hyperbolic elements in affine Coxeter groups »,

Paolini, G. (2019b). « On the local homology of Artin groups of finite and affine type », *Algebr. Geom. Topol.* **19** (7), p. 3615-3639.
——— (2021). « The dual approach to the $K(\pi, 1)$ conjecture ». arXiv:2112.05255.
Paolini, G. et Salvetti, M. (2018). « Weighted sheaves and homology of Artin groups », *Algebr. Geom. Topol.* **18** (7), p. 3943-4000.
——— (2021). « Proof of the $K(\pi, 1)$ conjecture for affine Artin groups », *Invent. Math.* **224** (2), p. 487-572.
Paris, L. (2014). « Lectures on Artin groups and the $K(\pi, 1)$ conjecture », in : *Groups of exceptional type, Coxeter groups and related geometries*. T. 82. Springer Proc. Math. Stat. Springer, New Delhi, p. 239-257.
Salvetti, M. (1987). « Topology of the complement of real hyperplanes in $\mathbf{C}^N$ », *Invent. Math.* **88** (3), p. 603-618.
——— (1994). « The homotopy type of Artin groups », *Math. Res. Lett.* **1** (5), p. 565-577.
Tits, J. (1966). « Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus », *J. Algebra* **4**, p. 96-116.
Wachs, M. (2007). « Poset topology : tools and applications », in : *Geometric combinatorics*. T. 13. IAS/Park City Math. Ser. Amer. Math. Soc., Providence, RI, p. 497-615.

Thomas Haettel

IMAG, Univ Montpellier, CNRS, France
Place Eugène Bataillon
34090 Montpellier, France

E-mail : thomas.haettel@umontpellier.fr

Séminaire BOURBAKI Juin 2022
73e année, 2021–2022, no 1196, p. 547 à 581
doi: 10.24033/ast.1197

RECENT PROGRESS ON BOUNDS FOR SETS WITH NO THREE TERMS IN ARITHMETIC PROGRESSION

[*after* Bloom and Sisask, Croot, Lev, and Pach, and Ellenberg and Gijswijt]

by **Sarah Peluse**

Introduction

Van der Waerden's theorem (van der Waerden, 1927), one of the foundational results of Ramsey theory, states that if the integers are partitioned into finitely many sets, then one of these sets must contain nontrivial arithmetic progressions,

$$x, x+y, \dots, x+(k-1)y, \tag{1}$$

of all lengths. Here *nontrivial* means that $y \neq 0$ in (1). Motivated by van der Waerden's result, Erdős and Turán (1936) conjectured that every subset of the integers with positive upper density must contain arithmetic progressions of all lengths, or, equivalently, that any subset A of the first N integers containing no k-term arithmetic progressions satisfies $|A| = o_k(N)$. Thus, van der Waerden's theorem should hold because, in any finite partition of the integers, some part must have positive density.

Since any two distinct integers form a two-term arithmetic progression, the first nontrivial case of Erdős and Turán's conjecture is when $k = 3$. Define $r_3(N)$ to be the size of the largest subset of the first N integers containing no nontrivial arithmetic progressions, so that the $k = 3$ case of the conjecture is equivalent to $r_3(N) = o(N)$. This was first proven by Roth (1953), who even produced an explicit bound for $r_3(N)$, using a variant of the circle method.

Theorem 0.1 (Roth, 1953). *We have*

$$r_3(N) = O\left(\frac{N}{\log\log N}\right).$$

©Astérisque 438, SMF 2022

Szemerédi (1975) proved Erdős and Turán's conjecture in full generality via a purely combinatorial argument in which he introduced his famous regularity lemma for graphs, now a fundamental tool in graph theory. There are now many proofs of Szemerédi's Theorem, most notably Furstenberg's proof using ergodic theory (Furstenberg, 1977), in which he introduced his famous correspondence principle and launched the field of ergodic Ramsey theory, and Gowers's proof of explicit quantitative bounds in Szemerédi's theorem (Gowers, 1998, 2001), which initiated the study of higher-order Fourier analysis.

We will, for the remainder of this exposition, mostly restrict our discussion to sets lacking three-term arithmetic progressions. It is now a central open problem in additive combinatorics to determine the best possible bounds in Roth's theorem, i.e., to determine the size of the largest subset of the first N integers containing no nontrivial three-term arithmetic progressions. This problem has catalyzed many important developments in additive and extremal combinatorics, spurring the invention of techniques that have had wide-ranging applications.

Beginning around the 1940's, Erdős repeatedly posed the conjecture that any subset S of the natural numbers satisfying

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n} = \infty$$

must contain arithmetic progressions of all lengths. It was also a very old, folklore conjecture that the primes contain arbitrarily long arithmetic progressions, and Erdős was interested in whether the primes (whose sum of reciprocals diverges) must contain arbitrarily long arithmetic progressions simply because they are sufficiently dense. This folklore conjecture is now known to be true thanks to celebrated work of Green and Tao (2008), who leveraged the pseudorandomness of the primes in their proof. Upper density and the divergence rate of $\sum_{n \in S} \frac{1}{n}$ are not quite equivalent notions of size, but, by partial summation, a bound of the quality $O_k\left(\frac{N}{(\log N)^{1+c}}\right)$, where $c > 0$, for the size of the largest subset of the first N integers containing no k-term arithmetic progressions would be sufficient to prove Erdős's conjecture. Over the past few decades, a sequence of works had improved Roth's bound right up to the $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$ barrier. The table below summarizes these developments, where the second column lists bounds for the order of magnitude of $r_3(N)$ obtained by the authors in the first column.

Roth (1953)	$\frac{N}{\log\log N}$
Heath-Brown (1987) and Szemerédi (1990)	$\frac{N}{(\log N)^c}$
Bourgain (1999)	$\frac{N}{(\log N)^{1/2-o(1)}}$
Bourgain (2008)	$\frac{N}{(\log N)^{2/3-o(1)}}$
Sanders (2012)	$\frac{N}{(\log N)^{3/4-o(1)}}$
Sanders (2011)	$\frac{N(\log\log N)^6}{\log N}$
Bloom (2016)	$\frac{N(\log\log N)^4}{\log N}$
Schoen (2021)	$\frac{N(\log\log N)^{3+o(1)}}{\log N}$

Here the c appearing in the second row is a small positive constant, the $-o(1)$ in the exponent of $\log N$ in the third, fourth, and fifth rows hides bounded powers of $\log\log N$ in the numerator, and the $o(1)$ in the exponent of $\log\log N$ in the last row hides a bounded power of $\log\log\log N$.

Schoen's record upper bound for $r_3(N)$ appeared on the arXiv in May of 2020. Two months later, Bloom and Sisask (2020) announced that they had finally broken through the $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$ barrier in Roth's theorem, thus proving the first nontrivial case of Erdős's conjecture.

Theorem 0.2 (Bloom and Sisask, 2020). *There exists an absolute constant $c > 0$ such that*

$$r_3(N) = O\left(\frac{N}{(\log N)^{1+c}}\right).$$

Therefore, any set S of natural numbers satisfying $\sum_{n\in S}\frac{1}{n} = \infty$ must contain a three-term arithmetic progression. Such sets include positive density subsets of the prime numbers, so that Theorem 0.2 also implies Green's Roth theorem in the primes (Green, 2005b).

We will now briefly discuss the known lower bounds for $r_3(N)$. By considering the integers whose ternary expansion contains no twos, it is easy to see that $r_3(N) = \Omega(N^{\log 2/\log 3})$. Salem and Spencer (1942) constructed subsets of the first N integers of density $\exp(-\log N/\log\log N)$ lacking three-term arithmetic progressions, showing that the true order of magnitude of $r_3(N)$ is larger than $N^{1-\varepsilon}$ for any fixed $\varepsilon > 0$. For this reason, sets free of three-term arithmetic progressions are sometimes called Salem–Spencer sets. A construction of Behrend (1946) shows that $r_3(N) = \Omega(N/\exp(C\sqrt{\log N}))$ for some absolute constant $C > 0$, which is still essentially the best known lower bound.

There is, then, the natural question of whether the true order of magnitude of $r_3(N)$ is closer to Behrend's lower bound or the upper bound of Bloom and Sisask. Schoen and Sisask (2016) have proven bounds of the form $O\left(N/\exp(C(\log N)^{1/7})\right)$

for subsets of the first N integers having no nontrivial solutions to the equation $x + y + z = 3w$. Since three-term arithmetic progressions are solutions to the equation $x + y = 2z$, it is reasonable to guess, by analogy, that $r_3(N)$ should also be on the order of $N/\exp(C(\log N)^c)$ for some absolute constants $C, c > 0$. Experts have, for a while, thought that a bound of this form is closer to the truth than, say, $\frac{N}{(\log N)^{100}}$, though it appears no one was brave enough to write down a conjecture. Bloom and Sisask have finally conjectured this in their paper, and they do not just reason by analogy–several of the steps of their proof are efficient enough to produce a bound of the form $O\left(N/\exp(C(\log N)^c)\right)$.

When G is a finite abelian group of odd order, it is also natural to define $r_3(G)$ to be the size of the largest subset of G containing no nontrivial three-term arithmetic progressions, and to ask for upper and lower bounds on $r_3(G)$. Obtaining bounds for $r_3(\mathbf{Z}/M\mathbf{Z})$ as M tends to infinity is essentially equivalent to obtaining bounds in Roth's theorem in the integer setting. Another family of groups of great interest are the finite dimensional $\mathbf{F}_3$-vector spaces. Subsets of $\mathbf{F}_3^n$ lacking three-term arithmetic progressions are called *cap-sets*, and the problem of bounding $r_3(\mathbf{F}_3^n)$, known as the *cap-set problem*, has an old history. Nontrivial three-term arithmetic progressions are exactly the lines in $\mathbf{F}_3^n$, and, more generally, sets (in finite, real, or complex affine or projective space) with no-three-on-a-line are popular objects of study in discrete and combinatorial geometry.

Brown and Buhler (1982) were the first to prove $r_3(\mathbf{F}_3^n) = o(3^n)$. This fact, like $r_3(N) = o(N)$, is also a straightforward consequence of the *triangle removal lemma*, which states that, for every $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that any graph on M vertices containing δM^3 triangles can be made triangle-free by removing at most εM^2 edges. This was observed by Frankl, Graham, and Rödl (1987), who then asked whether there exists a positive constant $c < 3$ such that $r_3(\mathbf{F}_3^n) = O(c^n)$. Alon and Dubiner (1993) also posed this question. By adapting Roth's argument to the setting of $\mathbf{F}_3$-vector spaces, Meshulam (1995) proved the first explicit bounds for the size of cap-sets.

Theorem 0.3 (Meshulam, 1995). *We have*

$$r_3(\mathbf{F}_3^n) = O\left(\frac{3^n}{n}\right).$$

The quantity 3^n, which is the size of $\mathbf{F}_3^n$, is analogous to the length N of the interval $\{1, \dots, N\}$ in Roth's theorem. Thus, Meshulam's result corresponds to a bound of the strength $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$ in Roth's theorem.

The family of vector spaces $(\mathbf{F}_3^n)_{n=1}^{\infty}$ can serve as a useful testing ground for ideas and techniques to improve Roth's theorem in the integer setting, since many technical aspects are greatly simplified when working in $\mathbf{F}_3^n$. The surveys by Green (2005a) and

Wolf (2015) give nice overviews of this philosophy. The setting of vector spaces over finite fields is often referred to in additive combinatorics as the "finite field model setting", and we will also use this terminology. In breakthrough work, Bateman and Katz (2012) proved that $r_3(\mathbf{F}_3^n) = O\left(\frac{3^n}{n^{1+c}}\right)$ for some absolute constant $c > 0$, and their insights obtained in the finite field model setting were crucial in the work of Bloom and Sisask (2020) in the integer setting.

Up until a few years ago, all quantitative improvements to the arguments of Roth and Meshulam were (increasingly more difficult and technical) refinements of Roth's original Fourier-analytic argument. In 2016, Croot, Lev, and Pach (2017) introduced a new version of the polynomial method, which they used to prove that any subset of $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z})^n$ lacking three-term arithmetic progressions has cardinality at most $O(3.61^n)$, greatly improving upon the previous best bound of $O\left(\frac{4^n}{n(\log n)^c}\right)$ due to Sanders (2009). Very shortly after, Ellenberg and Gijswijt (2017) adapted the method of Croot, Lev, and Pach to prove a power-saving bound for the size of cap-sets, thus answering the question of Frankl, Graham, and Rödl.

Theorem 0.4 (Ellenberg and Gijswijt, 2017). *We have*

$$r_3(\mathbf{F}_3^n) = O(2.756^n).$$

The arguments of Croot–Lev–Pach and Ellenberg–Gijswijt are completely disjoint from the prior Fourier-analytic arguments, and constitute yet another instance of the polynomial method producing an elegant solution to a famous problem, joining (among other works) Dvir's solution of the finite field Kakeya problem (Dvir, 2009) and the work of Guth and Katz on the joints problem (Guth and Katz, 2010) and the Erdős distinct distances problem (Guth and Katz, 2015). Edel (2004) has constructed cap-sets in $\mathbf{F}_3^n$ of size $\Omega(2.217^n)$, so there is still an exponential gap between the best known upper and lower bounds for $r_3(\mathbf{F}_3^n)$.

In this exposition, we will survey the methods going into the two breakthrough results stated in Theorems 0.2 and 0.4. We will begin by introducing Roth's basic method in the finite field model and integer settings in Section 1, and then give an overview of most of the ingredients in Bloom and Sisask's argument in Section 2 before discussing their proof, with a focus on spectral boosting, in Section 3. We will then present a full proof of Theorem 0.4 in Section 4.

Acknowledgement. — I would like to thank Thomas Bloom, Jordan Ellenberg, Ben Green, Olof Sisask, Kannan Soundararajan, Avi Wigderson, and Nicolas Bourbaki for helpful comments on earlier drafts.

1. The density-increment method and Roth's theorem

We begin by fixing notation and normalizations. Along with the standard asymptotic notation O, Ω, and o, we will frequently use Vinogradov's notation $\ll, \gg$, and $\asymp$. As a reminder, for any nonnegative real numbers A, B, A', and B', the relations $A = O(B)$, $B = \Omega(A)$, $A \ll B$, and $B \gg A$ all mean that $A \leqslant CB$ for some absolute constant $C > 0$, and $A' \asymp B'$ means that both $A' \ll B'$ and $B' \ll A'$. We will write $O(B)$ to denote a quantity that is $\ll B$ and $\Omega(A)$ to denote a quantity that is $\gg A$. For any $\alpha > 0$, we will write $A \lesssim_\alpha B$ to mean that $A = O\left(\log(1/\alpha)^C B\right)$ for some absolute constant C, and use $\tilde{O}_\alpha(B)$ to denote a quantity that is $\lesssim_\alpha B$. We will also use the standard notation $[N] := \{1, \dots, N\}$, $e(z) := e^{2\pi i z}$, and $e_p(z) := e(z/p)$.

Let X be a finite, nonempty set, and $f\colon X \to \mathbf{C}$. The average of f over X is denoted by

$$\mathbf{E}_{x\in X} f(x) := \frac{1}{|X|}\sum_{x\in X} f(x).$$

For any finite abelian group G, we define the L^p and ℓ^p norms by

$$\|g\|_{L^p}^p := \mathbf{E}_{x\in G}|g(x)|^p \qquad \text{and} \qquad \|g\|_{\ell^p}^p := \sum_{x\in G}|g(x)|^p,$$

respectively, whenever $g\colon G \to \mathbf{C}$. Let $\widehat{G}$ denote the set of characters of G. For any $h\colon G \to \mathbf{C}$ and $\xi \in \widehat{G}$, we define the Fourier coefficient of h at ξ by

$$\widehat{h}(\xi) := \mathbf{E}_{x\in G} h(x)\overline{\xi(x)}$$

and the inverse Fourier transform for $F\colon \widehat{G} \to \mathbf{C}$ by

$$\check{F}(x) := \sum_{\xi\in\widehat{G}} F(\xi)\xi(x).$$

With this choice of normalization, the Fourier inversion formula and Plancherel's theorem are

$$h(x) = \sum_{\xi\in\widehat{G}} \widehat{h}(\xi)\xi(x) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{E}_x g(x)\overline{h(x)} = \sum_{\xi\in\widehat{G}} \widehat{g}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)},$$

respectively. We normalize the inner product by $\langle g, h\rangle := \mathbf{E}_{x\in G} g(x)\overline{h(x)}$, convolution by $(g * h)(x) := \mathbf{E}_{y\in G} g(x-y)h(y)$, so that $\widehat{g * h} = \widehat{g}\cdot\widehat{h}$, and, following Bloom and Sisask (2020), also define $g \circ h := g * h_-$, where $h_-(x) := \overline{h(-x)}$.

For G a finite abelian group and $A \subset G$, we denote the density of A in G by $\mu_G(A) := |A|/|G|$, and sometimes drop the subscript when the ambient group is clear. When A is nonempty, we will also denote the normalized indicator function of A by $\mu_A := \frac{1}{\mu(A)} 1_A$.

1.1. The density-increment method for three-term arithmetic progressions

Every improvement over Roth's bound for $r_3(N)$ has been based on Roth's original argument. In this section, we will review his method (in a more modern formulation), giving full proofs of Theorems 0.1 and 0.3.

Roth's proof proceeds by a downward induction on density which, slightly rephrased, has become a standard technique in additive combinatorics known as the *density-increment method*. The basic idea of the argument is that a subset of $[N]$ or $\mathbf{F}_3^n$ either has many three-term arithmetic progressions, or else the set has particularly large density on some nice, "structured" subset of $[N]$ or $\mathbf{F}_3^n$. The structured subset resembles $[N]$ or $\mathbf{F}_3^n$ closely enough that one can repeat the argument, except now with a subset of greater density. Since density cannot go above one, such an iteration must terminate, at which point the set under consideration must contain many three-term arithmetic progressions. We can then retrace the steps of the iteration to derive an upper bound for the density of any set lacking three-term arithmetic progressions. When working in $\mathbf{F}_3^n$, the structured subsets are subspaces of bounded codimension, and when working in $[N]$ or $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, the structured subsets are either long arithmetic progressions or (regular) Bohr sets of bounded rank.

In both the proof of Roth's theorem and the proof of Meshulam's theorem, we will derive a density-increment when a set lacks three-term arithmetic progressions by using the following Fourier-analytic identity: If G is an abelian group and $f, g, h\colon G \to \mathbf{C}$, then

$$\mathbf{E}_{x,y\in G} f(x)g(x+y)h(x+2y) = \sum_{\xi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(-2\xi)\widehat{h}(\xi). \tag{2}$$

This can easily be shown by inserting the Fourier inversion formula for the functions f, g, and h on the left-hand side and using orthogonality of characters.

1.2. Meshulam's theorem

We will present the proof of Meshulam's theorem before that of Roth's theorem, since the technical details are simpler in the finite field model setting. The argument relies on the following density-increment lemma.

Theorem 1.1. *Set $N := 3^n$, and let $A \subset \mathbf{F}_3^n$ be a cap-set of density α. Then either*

$$N < \frac{2}{\alpha^2}, \tag{3}$$

or there exists an affine subspace H of $\mathbf{F}_3^n$ of codimension 1 on which A has density substantially larger than α:

$$\frac{|A\cap H|}{|H|} \geqslant \alpha + \frac{\alpha^2}{4}. \tag{4}$$

Proof. Suppose that (3) fails to hold, so that $N \geqslant \frac{2}{\alpha^2}$. By the identity (2),

$$\mathbf{E}_{x,y\in\mathbf{F}_3^n} 1_A(x)1_A(x+y)1_A(x+2y) = \alpha^3 + \sum_{0\neq\xi\in\mathbf{F}_3^n} \widehat{1_A}(\xi)^2\widehat{1_A}(-2\xi), \tag{5}$$

while, since A is a cap-set,

$$\mathbf{E}_{x,y\in\mathbf{F}_3^n} 1_A(x)1_A(x+y)1_A(x+2y) = \frac{1}{N}\mathbf{E}_{x\in\mathbf{F}_3^n} 1_A(x)^3 = \frac{\alpha}{N} \leqslant \frac{\alpha^3}{2},$$

which together imply that the sum over the nontrivial characters on the right-hand side of (5) must be large:

$$\left|\sum_{0\neq\xi\in\mathbf{F}_3^n} \widehat{1_A}(\xi)^2\widehat{1_A}(-2\xi)\right| \geqslant \frac{\alpha^3}{2}.$$

By the triangle inequality and Parseval's identity, there exists a nonzero $\xi \in \mathbf{F}_3^n$ for which $\left|\widehat{1_A}(\xi)\right| \geqslant \alpha^2/2$. Since the nontrivial Fourier coefficients of 1_A remain unchanged after adding a constant function to 1_A, we must have $\left|\widehat{(1_A-\alpha)}(\xi)\right| \geqslant \alpha^2/2$ as well. That is,

$$\left|\mathbf{E}_{x\in\mathbf{F}_3^n} (1_A-\alpha)(x)e_3(\xi\cdot x)\right| \geqslant \frac{\alpha^2}{2}.$$

Note that the function $e_3(\xi\cdot x)$ is constant on cosets of the codimension 1 subspace $V := \{y \in \mathbf{F}_3^n \mid \xi\cdot y = 0\}$ of $\mathbf{F}_3^n$. Splitting the average over $x \in \mathbf{F}_3^n$ up into an average of averages over the cosets of V and applying the triangle inequality then yields

$$\mathbf{E}_{H\in\mathbf{F}_3^n/V} \left|\mathbf{E}_{x\in H} (1_A-\alpha)(x)\right| \geqslant \frac{\alpha^2}{2}. \tag{6}$$

On the other hand, since A has density α, the absolute-value-free version of the sum in (6) equals zero:

$$\mathbf{E}_{H\in\mathbf{F}_3^n/V}\mathbf{E}_{x\in H} (1_A-\alpha)(x) = 0. \tag{7}$$

Adding together (6) and (7) and using the identity $|r| + r = 2\max(r,0)$ then gives

$$\mathbf{E}_{H\in\mathbf{F}_3^n/V} \max\left(\mathbf{E}_{x\in H} (1_A-\alpha)(x), 0\right) \geqslant \frac{\alpha^2}{4}.$$

By the pigeonhole principle, there must exist some coset H of V such that

$$\mathbf{E}_{x\in H} (1_A-\alpha)(x) \geqslant \frac{\alpha^2}{4}.$$

Since $\mathbf{E}_{x\in H} (1_A-\alpha)(x) = \mathbf{E}_{x\in H} 1_A(x) - \alpha$, adding α to both sides of the above yields (4). □

Observe that three-term arithmetic progressions are invariant under affine-linear transformations, in that if $S\colon V_1 \to V_2$ is an affine-linear transformation and $x, x+y, x+2y$ is a three-term arithmetic progression in V_1, then $S(x), S(x+y), S(x+2y)$ is a three-term arithmetic progression in V_2. Further, if $S = v_2 + T$ for some invertible linear transformation T and vector $v_2 \in V_2$, then S maps nontrivial three-term arithmetic progressions to non-trivial three-term arithmetic progressions. It therefore follows that if H is a coset of V in $\mathbf{F}_3$ of dimension m and $B \subset H$ is a subset of density β in H containing no nontrivial three-term arithmetic progressions, then there exists a cap-set B' in $\mathbf{F}_3^m$ of density β.

Now, suppose that $A \subset \mathbf{F}_3^n$ is a cap-set of density α, and set $A_0 := A$, $n_0 := n$, and $\alpha_0 := \alpha$. Repeatedly applying the density-increment lemma and utilizing the above observation produces a sequence of triples (A_i, n_i, α_i) satisfying

1. $A_i \subset \mathbf{F}_3^{n_i}$ is a cap-set of density α_i,
2. $n_{i+1} = n_i - 1$, and
3. $\alpha_{i+1} \geqslant \alpha_i + \frac{\alpha_i^2}{4}$,

provided that $N_i \geqslant \frac{2}{\alpha_i^2}$. Since the density cannot exceed 1, by the lower bound $\alpha_{i+1} \geqslant \alpha_i + \frac{\alpha_i^2}{4}$, this iteration must terminate for some $i = i_0 \leqslant \frac{16}{\alpha}$, say. At this point, the largeness assumption on N_i must fail, so that $N_{i_0} < \frac{2}{\alpha_i^2} \leqslant \frac{2}{\alpha^2}$. On the other hand, since $n_{i+1} = n_i - 1$ for all $i < i_0$, we have $N_{i_0} = 3^{n-i_0} \geqslant 3^{n-16/\alpha}$. Combining these upper and lower bounds, we obtain

$$3^n < \frac{3^{16/\alpha}}{\alpha^2/2}.$$

Taking $\log_3$ of both sides yields $n < 16/\alpha - \log_3(\alpha^2/2) < 32/\alpha$, say, so that $\alpha \ll 1/n$, thus proving Meshulam's theorem.

1.3. Roth's theorem

Analogously to the finite field model setting, our proof of Roth's theorem relies on the following density-increment lemma.

Theorem 1.2. *Let A be a subset of $[N]$ of density α containing no nontrivial three-term arithmetic progressions. Then either*

$$N < \frac{8}{\alpha^2}, \tag{8}$$

or there exists a long arithmetic progression $P = a + q[N']$, with $N' \geqslant \alpha^4\sqrt{N}/2^{21}$, on which A has density substantially larger than α:

$$\frac{|A \cap P|}{|P|} \geqslant \alpha + \frac{\alpha^2}{2^{11}}.$$

Before proving this result, we will recall Dirichlet's theorem on Diophantine approximation, which is a simple consequence of the pigeonhole principle.

Theorem 1.3. *Let $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ be real numbers. For any positive integer Q, there exist integers $p_1, \dots, p_k$ and $1 \leqslant q \leqslant Q$ such that*

$$\left| \gamma_i - \frac{p_i}{q} \right| < \frac{1}{qQ^{1/k}}$$

for all $1 \leqslant i \leqslant k$.

Now we can prove Theorem 1.2.

Proof. Suppose that (8) fails to hold, so that $N \geqslant \frac{8}{\alpha^2}$. We begin by letting p be any prime number between $2N$ and $4N$, which must exist by Bertrand's postulate, and noting that any three-term arithmetic progression in $[N]$ viewed as a subset of $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ corresponds to a genuine three-term arithmetic progression in $[N]$. Thus, the number of three-term arithmetic progressions in A equals

$$\sum_{x,y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} 1_A(x) 1_A(x+y) 1_A(x+2y). \tag{9}$$

Letting $f_A := 1_A - \alpha 1_{[N]}$ denote the balanced function of A, (9) can be written as the sum of the three terms,

$$\sum_{x,y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} 1_A(x) 1_A(x+y) f_A(x+2y), \tag{10}$$

$$\alpha \sum_{x,y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} 1_A(x) f_A(x+y) 1_{[N]}(x+2y), \tag{11}$$

and

$$\alpha^2 \sum_{x,y \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} 1_A(x) 1_{[N]}(x+2y). \tag{12}$$

The quantity (12) is at least $\alpha^3 N^2/4 \geqslant 2\alpha N$. On the other hand, by assumption, (9) equals $|A| = \alpha N$, so that at least one of the terms (10) or (11) must have magnitude at least $\alpha^3 N^2/8 \geqslant \alpha^3 p^2/128$. Arguing as in the finite field model setting, it follows that there exists a nonzero integer $1 \leqslant \xi \leqslant p-1$ such that

$$\left| \sum_{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} f_A(x) e\left(\frac{\xi x}{p}\right) \right| \geqslant \frac{\alpha^2}{2^7} p. \tag{13}$$

Now we apply Dirichlet's theorem with $Q = \lceil \sqrt{p} \rceil$ to get that there exist integers a and $1 \leqslant q \leqslant Q$ and a real number $0 \leqslant \theta < 1$ for which

$$\frac{\xi}{p} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\sqrt{p}}.$$

The group $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ can be partitioned into at least $2^{10}\lfloor\sqrt{p}\rfloor/\alpha^2$ arithmetic progressions $P_1,\dots,P_K$ modulo p of length $N' := \lceil\alpha^2\sqrt{p}/2^{10}\rceil$ and common difference q, along with q (possibly empty) arithmetic progressions $P_1',\dots,P_q'$ modulo p of length at most $N'-1$ and common difference q. It therefore follows from (13) that

$$\sum_{i=1}^{K}\left|\sum_{x\in P_i} f_A(x)e\left(\frac{\theta x}{q\sqrt{p}}\right)\right| + \sum_{j=1}^{q}\left|\sum_{x\in P_j'} f_A(x)e\left(\frac{\theta x}{q\sqrt{p}}\right)\right| \geqslant \frac{\alpha^2}{2^7}p.$$

Note that $e(\theta x/q\sqrt{p})$ and $e(\theta y/q\sqrt{p})$ differ by a quantity of magnitude at most $\alpha^2/2^8$ for all pairs $x,y\in P_i$ or $x,y\in P_j'$. Thus,

$$\sum_{i=1}^{K}\left|\sum_{x\in P_i} f_A(x)\right| + \sum_{j=1}^{q}\left|\sum_{x\in P_j'} f_A(x)\right| \geqslant \frac{\alpha^2}{2^8}p.$$

As in the finite field model setting, since $P_1,\dots,P_K,P_1',\dots,P_q'$ partition $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, combining the above with the fact that f_A has mean zero on $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ yields

$$\sum_{i=1}^{K}\max\left(\sum_{x\in P_i} f_A(x),0\right) + \sum_{j=1}^{q}\max\left(\sum_{x\in P_j'} f_A(x),0\right) \geqslant \frac{\alpha^2}{2^9}p.$$

The contribution of the second sum on the left-hand side of the above is at most $\alpha^2 q\sqrt{p}/2^{10} < \alpha^2 p/2^{10}$, so that

$$\sum_{i=1}^{K}\max\left(\sum_{x\in P_i} f_A(x),0\right) \geqslant \frac{\alpha^2}{2^{10}}p.$$

By the pigeonhole principle, there is an $1\leqslant i\leqslant K$ such that $\frac{|A\cap P_i|}{|P_i|}\geqslant \alpha+\frac{\alpha^2}{2^{10}}$. The progression P_i is an arithmetic progression in $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, not in the integers, so it remains to find a density-increment on an integer arithmetic progression. Note that $qN' < p$, so P_i is the union $P_i = R\cup S$ of two disjoint arithmetic progressions in $[p]$ with common difference q. We may, without loss of generality, assume that $|R|\geqslant|S|$. The set A must certainly have density at least $\alpha+\frac{\alpha^2}{2^{11}}$ on at least one of R or S. If $|S|\geqslant\frac{\alpha^2}{2^{11}}N'$, then both R and S are sufficiently large and we have the desired density-increment on at least one of them. If $|S|<\frac{\alpha^2}{2^{11}}N'$, then $|R|\geqslant N'/2$, say, and $|A\cap R|\geqslant\left(\alpha+\frac{\alpha^2}{2^{11}}\right)N'$, so that $\frac{|A\cap R|}{|R|}\geqslant\alpha+\frac{\alpha^2}{2^{11}}$ since $|R|\leqslant N'$ and we again have the desired density-increment. □

Analogously to the finite field model setting, observe that three-term arithmetic progressions are translation-dilation invariant, so that if B contains no nontrivial

three-term arithmetic progressions, then $B' := \{n \in [N'] \mid a + qn \in B \cap P\}$ has density $\frac{|B\cap P|}{|P|}$ in $[N']$ and also contains no nontrivial three-term arithmetic progressions.

Now, suppose that $A \subset [N]$ has density α and contains no nontrivial three-term arithmetic progressions, and set $A_0 := A$, $N_0 := N$, and $\alpha_0 := \alpha$. Repeated applications of the density-increment lemma produces a sequence of triples (A_i, N_i, α_i) satisfying

1. $A_i \subset [N_i]$ has density α_i and contains no nontrivial three-term arithmetic progressions,
2. $N_{i+1} \geqslant \alpha^4\sqrt{N_i}/2^{21}$, and
3. $\alpha_{i+1} \geqslant \alpha_i + \frac{\alpha_i^2}{2^{11}}$,

provided that $N_i \geqslant \frac{8}{\alpha_i^2}$. As in the density-increment for Meshulam's theorem, this iteration must terminate for some $i_0 \ll \frac{1}{\alpha}$, at which point the largeness assumption must fail, so that $N_{i_0} < \frac{8}{\alpha^2}$. On the other hand, we have $N_{i_0} \gg \alpha^8 N^{1/2^{i_0}} \gg \alpha^8 N^{1/2^{O(1/\alpha)}}$. Combining these upper and lower bounds yields

$$N^{1/2^{O(1/\alpha)}} \ll \frac{1}{\alpha^{10}},$$

from which Roth's theorem follows by taking the double logarithm of both sides when N is sufficiently large.

2. Key ingredients from prior quantitative improvements

Inspecting the proofs of Roth's theorem and Meshulam's theorem, we see that we obtained worse bounds in the former because the structured set on which we found a density-increment shrinks much more rapidly ($N_{i+1} \asymp \alpha^{O(1)}\sqrt{N_i}$) in the integer setting than in the finite field model setting ($N_{i+1} \asymp N_i$). Thus, Theorem 1.2 is much less efficient than Theorem 1.1 to iterate. Therefore, for a long time, the goal of much of the work on quantitative bounds in Roth's theorem had been to obtain density-increment results in the integer setting that are as efficient as that obtained in Theorem 1.1. This eventually led to four different proofs of the bound $r_3(N) \ll \frac{N}{(\log N)^{1-o(1)}}$. The argument of Bloom and Sisask relies on many insights made in these prior works, along with those that allowed Bateman and Katz to go beyond the $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$ bound in the cap-set problem. The goal of this section is to summarize these insights and introduce the related concepts needed to understand Bloom and Sisask's proof.

2.1. Obtaining a density-increment from large ℓ^2-energy

The key insight of Heath-Brown (1987) and Szemerédi (1990) was that if f_A has several large Fourier coefficients, then it is more efficient to do one large density-increment step using all of these coefficients than to do individual density-increment steps for each of them. To be more precise, the starting point of their argument is to show that if A contains no nontrivial three-term arithmetic progressions, then a large proportion of the ℓ^2-mass of $\widehat{f_A}$ can be captured in a relatively small number of nontrivial Fourier coefficients. Recall from the proof of Theorem 1.2 that either

$$\left|\sum_{0\neq\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}\widehat{1_{[N]}}(\xi)^2\widehat{f_A}(-2\xi)\right|>\frac{\alpha}{8}$$

or

$$\left|\sum_{0\neq\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}\widehat{1_{[N]}}(\xi)\widehat{f_A}(\xi)\widehat{1_{[N]}}(-2\xi)\right|>\frac{\alpha}{8},$$

provided that N is sufficiently large in terms of α. In either case, it follows from Hölder's inequality that $\|\widehat{1_{[N]}}\|_{\ell^3}^2\|\widehat{f_A}\|_{\ell^3}\gg\alpha$, so that $\|\widehat{f_A}\|_{\ell^3}^3\gg\alpha^3$ since $\|\widehat{1_{[N]}}\|_{\ell^3}\ll 1$. Thus, using the layercake representation and the fact that $|\widehat{f_A}(\xi)|\leqslant 2\alpha$ for all $\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$, we have

$$\int_0^{2\alpha}z^2\cdot|\{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\mid|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z\}|dz\gg\alpha^3.$$

On the other hand, if it were the case that

$$\sum_{\substack{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\\|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z}}|\widehat{f_A}(\xi)|^2\leqslant\frac{\alpha^2}{C}|\{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\mid|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z\}|^{1/9},$$

say, for all $0\leqslant z\leqslant 2\alpha$, then, by bounding the left-hand side below by $z^2\cdot|\{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\mid|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z\}|$, we obtain $|\{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\mid|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z\}|\leqslant\alpha^{9/4}z^{-9/4}/C^{9/8}$, which means that

$$\int_0^{2\alpha}z^2\cdot|\{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\mid|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z\}|dz\leqslant\frac{\alpha^{9/4}}{C^{9/8}}\int_0^{2\alpha}\frac{1}{z^{1/4}}dz\ll\frac{\alpha^3}{C^{9/8}}.$$

Thus, choosing C sufficiently large, we must have

$$\sum_{\substack{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\\|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z}}|\widehat{f_A}(\xi)|^2\gg\alpha^2|\{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\mid|\widehat{f_A}(\xi)|\geqslant z\}|^{1/9}$$

for some $0<z\leqslant 2\alpha$.

Now, we enumerate the frequencies $\{\xi_1, \dots, \xi_m\} := \{\xi \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \mid |\widehat{f_A}(\xi)| \geqslant z\}$ and apply Dirichlet's theorem with $Q = p^{m/(m+1)}$ to $\xi_1/p, \dots, \xi_m/p$ to produce integers $a_1, \dots, a_m$ and $1 \leqslant q \leqslant Q$ for which $|\xi_i/p - a_i/q| < 1/qQ^{1/m}$ for all $i = 1, \dots, m$. Analogously to the proof of Theorem 1.2, we will find a density-increment on an arithmetic progression of common difference q and length on the order of $\alpha p^{1/(m+1)}$ by an averaging argument. Let P be any arithmetic progression of common difference q and length $p^{1/(m+1)}/10$, say, and consider the second moment $\mathbf{E}_{x\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(1_A * 1_P)(x)^2$ of the density of $|A \cap (P - x)|$. We have

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{x\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(1_A * 1_P)(x)^2 &= \sum_{\xi\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} |\widehat{1_A}(\xi)|^2 |\widehat{1_P}(\xi)|^2 \\ &\geqslant \alpha^2 \left(\frac{|P|}{p}\right)^2 + \sum_{i=1}^{k} |\widehat{1_A}(\xi_i)|^2 |\widehat{1_P}(\xi_i)|^2 \\ &\geqslant \left(\frac{|P|}{p}\right)^2 \left(\alpha^2 + \Omega(\alpha^2 m^{1/9})\right),\end{aligned}$$

where the second inequality follows from the fact that $|\widehat{1_P}(\xi_i)| \gg |P|/p$ for all $1 \leqslant i \leqslant m$. On the other hand,

$$\mathbf{E}_{x\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}}(1_A * 1_P)(x)^2 \leqslant \|1_A * 1_P\|_{L^\infty} \cdot \mathbf{E}_{x\in\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}} 1_A * 1_P(x) = \alpha \left(\frac{|P|}{p}\right) \|1_A * 1_P\|_{L^\infty}.$$

We conclude that there exists an $x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ for which $\frac{p}{|P|} 1_A * 1_P(x) \geqslant \alpha(1 + \Omega(m^{1/9}))$, i.e., $|A \cap (P - x)|/|P| \geqslant \alpha(1 + \Omega(m^{1/9}))$. We are not quite done because $P - x$ is a progression modulo p, but since $q|P| < p$, the argument given at the end of the proof of Theorem 1.2 guarantees that we can find a density-increment of at least $\alpha(1 + \Omega(m^{1/9}))$ on an integer arithmetic progression of length $\gg \alpha p^{1/(m+1)}$ and common difference q.

The following density-increment theorem summarizes what we have shown.

Theorem 2.1. *Let A be a subset of $[N]$ of density α containing no nontrivial three-term arithmetic progressions. Then either*

$$N < \frac{8}{\alpha^2}, \tag{14}$$

or else there exists an integer $1 \leqslant m \ll \alpha^{-9}$ and a long arithmetic progression $P = a + q[N']$, with $N' \gg \alpha N^{1/(m+1)}$, on which A has density

$$\frac{|A \cap P|}{|P|} \geqslant \alpha(1 + \Omega(m^{1/9})).$$

A bound of the form $r_3(N) \ll \frac{N}{(\log N)^c}$ can now be obtained by a straightforward adaptation of the density-increment iteration used to prove Roth's theorem.

Theorem 2.1 is still not as efficient as Theorem 1.1. In fact, adapting the arguments of this section to the finite field model setting produces a worse bound for $r_3(\mathbf{F}_3^n)$ than in Meshulam's theorem. The key idea of using large ℓ^2-Fourier mass, instead of just one large Fourier coefficient, to obtain a density-increment will continue to be a useful insight, however.

2.2. Bohr sets

The proof of Theorem 1.1 produces an efficient density-increment because the level sets of characters are affine subspaces of $\mathbf{F}_3^n$, which allows one to pass immediately from a lower bound of the form $|\mathbf{E}_{x\in\mathbf{F}_3^n} f_A(x)e_3(\xi\cdot x)| \gg \alpha^2$ to a density-increment on a large structured set. In contrast, most characters of $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ fluctuate too much on arithmetic progressions of length $\asymp p$ for us to have any hope of finding a large density-increment on such a progression. Thus, to remove the phase in (13), we had to partition most of $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ into a many, much shorter, arithmetic progressions, so that $e(\xi x/p)$ was close to constant on each. The key insight of Bourgain (1999) was to simply partition $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ exactly into the sets $\{x \in \mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \mid \|\xi x/p\| \approx z\}$ on which the character is close to constant, and to run the density-increment argument relative to them instead of relative to long arithmetic progressions.

These approximate level sets of characters are known as *Bohr sets*. Bohr sets have positive density in the ambient group, but behave even less like subgroups than long arithmetic progressions. The first useful feature of intervals and subgroups that we used in our earlier arguments was the ease of counting the number of three-term arithmetic progressions they contain. We showed in both cases that the ambient interval or group contained many three-term arithmetic progressions, so that, if a subset A contained few progressions, some average involving $\widehat{f_A}$ had to be large. In contrast, it is very difficult to count three-term arithmetic progressions in general Bohr sets. Thus, while he was able to obtain a density-increment on a much larger structured set, Bourgain had to pay the price by dealing with the poor behavior of Bohr sets under addition.

We will now formally define Bohr sets and their related parameters, and then state some standard facts about them. Many of these can be found in Bourgain (1999) or Tao and Vu (2006, Chapter 4).

Definition 2.2. Let G be a finite abelian group, $\Gamma \subset \widehat{G}$ be nonempty, and $\nu\colon \Gamma \to [0,2]$. The *Bohr set of rank* $|\Gamma|$ *and width* ν *with frequency set* Γ is defined as the triple $(\Gamma, \nu, \mathrm{Bohr}(\Gamma,\nu))$, where

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma,\nu) := \{x \in G \mid |\gamma(x) - 1| \leqslant \nu(\gamma) \text{ for all } \gamma \in \Gamma\}.$$

We will just refer to the Bohr set $(\Gamma, \nu, \mathrm{Bohr}(\Gamma,\nu))$ by $\mathrm{Bohr}(\Gamma,\nu)$, even though one Bohr set can be generated by many pairs of widths and frequency sets. Note that

Bohr sets are symmetric, contain the identity, and, when $G = \mathbf{F}_3^n$, a Bohr set of rank r and constant width less than $\sqrt{3}$ is just a subspace of codimension at most r.

While Bohr sets are not nearly as additively structured as long arithmetic progressions, we still have some control over the size of their sumsets, as the following lemma shows.

Lemma 2.3. *We have*

$$\mathrm{Bohr}(\Gamma, \nu_1) + \mathrm{Bohr}(\Gamma, \nu_2) \subset \mathrm{Bohr}(\Gamma, \nu_1 + \nu_2)$$

and

$$|\mathrm{Bohr}(\Gamma, 2\nu)| \leqslant 4^{|\Gamma|} |\mathrm{Bohr}(\Gamma, \nu)|.$$

Sumsets of Bohr sets are more well-behaved when the width of one of the Bohr sets is very small. It will therefore be useful to define, when $B = \mathrm{Bohr}(\Gamma, \nu)$ is a Bohr set of width ν and $\rho > 0$, the *dilation* of B by ρ to be the Bohr set $B_\rho := \mathrm{Bohr}(\Gamma, \rho\nu)$.

Despite having some control on the size of sumsets of Bohr sets from Lemma 2.3, Bohr sets can have very large doubling constant $|B + B|/|B|$ when their rank is not extremely small. This presents a problem when attempting to run a density-increment argument relative to a Bohr set, since we must, first of all, show that there are many more than just the trivial three-term arithmetic progressions. If $B + B$ is much larger than $2 \cdot B$, it is not clear that we should expect there to be many representations of elements of $2 \cdot B$ as sums of two elements of B.

Bourgain gets around this issue by restricting the common difference of the arithmetic progressions to lie in B_ε for some small ε. If $B + B_\varepsilon \approx B$, then it is easy to show that B contains many three-term arithmetic progressions with common difference in B_ε. If A contains no nontrivial three-term arithmetic progressions, then it certainly has none with common difference in B_ε, and one can then deduce that some average involving f_A over these three-term arithmetic progressions with restricted difference is large. The Bohr sets for which we can reliably find such a dilation B_ε are called *regular Bohr sets*.

Definition 2.4. We say that a Bohr set B of rank r is *regular* if, for all real numbers δ satisfying $|\delta| \leqslant \frac{1}{100r}$, we have

$$(1 - 100r|\delta|)|B| \leqslant |B_{1+\delta}| \leqslant (1 + 100r|\delta|)|B|.$$

Not all Bohr sets are regular, but Bourgain showed that every Bohr set has many dilates that are regular.

Lemma 2.5. *Let B be a Bohr set. Then, for any $0 \leqslant t \leqslant 1$, the Bohr set B_ρ is regular for some $t/2 \leqslant \rho \leqslant t$.*

Finally, Bohr sets do indeed have constant density (depending on the width), both in the ambient group and in Bohr supersets.

Lemma 2.6. *If $\nu' \leqslant \nu$, we have*

$$|\operatorname{Bohr}(\Gamma, \nu')| \geqslant \left(\prod_{\gamma\in\Gamma} \frac{\nu'(\gamma)}{4\nu(\gamma)}\right) |\operatorname{Bohr}(\Gamma, \nu)|.$$

This implies, in particular, that $|B_\rho| \geqslant (\rho/4)^{\operatorname{rk} B}|B|$ for any Bohr set B and dilation factor $\rho < 1$.

With the introduction of Bohr sets, we have now reached the point in this exposition where the arguments discussed are far too technical for it to be appropriate to give anything close to full proofs. We will instead mostly highlight the key ideas, and include some representative arguments.

So, suppose that N is an odd positive integer, $B \subset \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ is a regular Bohr set, and $A \subset B$ contains no nontrivial three-term arithmetic progressions. Let $\rho > 0$ with

$$\frac{1}{800r} < \rho < \frac{1}{400r}$$

be such that B_ρ is regular, and set $f_A := 1_A - \alpha 1_B$. Then

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\\ y\in B_\rho}} 1_A(x)1_A(x+y)1_A(x+2y) = \alpha N,$$

while the left-hand side above can be written as

$$\alpha^3 \sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\\ y\in B_\rho}} 1_B(x)1_B(x+y)1_B(x+2y)$$

plus some sums involving f_A. To count the number of three-term arithmetic progressions in B with common difference in B_ρ, note that if $x \in B_{(1-2\rho)}$, then $x+y$ and $x+2y$ both lie in B whenever $y \in B_\rho$, so that

$$\sum_{\substack{x\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\\ y\in B_\rho}} 1_B(x)1_B(x+y)1_B(x+2y) \geqslant \sum_{z\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} 1_B(z)[1_{B_{(1-2\rho)}} * 1_{B_\rho}](z).$$

By the regularity of B, the convolution $1_{B_{(1-2\rho)}} * 1_{B_\rho}$ is very close to $|B_\rho|$ times the indicator function of B. Indeed, the regularity of B implies that

$$\sum_{y\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} |1_B(y) - 1_{B_{(1-2\rho)}}(y-w)| \leqslant 200r\rho|B|$$

for every $w \in B_\rho$, so that

$$\begin{aligned}\sum_{z\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \left|[1_{B_{(1-2\rho)}} * 1_{B_\rho}](z) - |B_\rho| 1_B(z)\right| &= \sum_{z\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \left| \sum_{x\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \left(1_{B_{(1-2\rho)}}(z-x) - 1_B(z)\right) 1_{B_\rho}(x)\right| \\ &\leqslant \sum_{x\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \sum_{z\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} \left|1_{B_{(1-2\rho)}}(z-x) - 1_B(z)\right| 1_{B_\rho}(x) \\ &\leqslant 200r\rho|B||B_\rho| \leqslant \frac{1}{2}N|B_\rho|.\end{aligned}$$

Thus,

$$\left| \sum_{z\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} 1_B(z)[1_{B_{(1-2\rho)}} * 1_{B_\rho}](z) - N|B_\rho| \right| \leqslant \frac{N}{2}|B_\rho|,$$

from which it follows that

$$\alpha^3 \sum_{\substack{x\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \\ y\in B_\rho}} 1_B(x)1_B(x+y)1_B(x+2y) \geqslant \frac{\alpha^3}{2}N|B_\rho|.$$

As a consequence, one of the sums involving f_A must have absolute value $\gg \alpha^3 N|B_\rho|$ when N is sufficiently large. The cost of being able to count the number of three-term arithmetic progressions in B is that now the range of y in these sums is restricted to B_ρ, so we do not have the Fourier representation (2) that was crucial in our previous arguments. To proceed, the idea is to insert extra averaging in the x variable with the goal of localizing x to a (translate of) an even smaller regular dilate of B, and approximate the sums using the regularity of the various Bohr sets floating around until the restriction that y lies in a Bohr set is transformed into the restriction that $x, x+y, x+2y$ all lie in a Bohr set, while y is allowed to freely range. Then the formula (2) can be applied, yielding the following density-increment result.

Theorem 2.7. *Let N be an odd positive integer, $B = \mathrm{Bohr}(\Gamma, \nu)$ be a regular Bohr set, and A be a subset of B of density α containing no three-term arithmetic progressions. Then either*

$$N \ll \left(\frac{\mathrm{rk}\, B}{\alpha}\right)^{O(\mathrm{rk}\, B)} \prod_{\gamma\in\Gamma} \nu(\gamma)^{-1}, \tag{15}$$

or else there exists a regular Bohr set $B' \subset B$ of width ν' satisfying

1. $\mathrm{rk}\, B' \leqslant \mathrm{rk}\, B + 1$ *and*
2. $\nu' \gg \left(\frac{\alpha}{\mathrm{rk}\, B}\right)^{O(1)} \nu$

on some translate of which A has density at least $\alpha + \Omega(\alpha^2)$.

Starting with a subset A of $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ of density α containing no nontrivial three-term arithmetic progressions and running a density-increment iteration then produces an inequality of the form

$$\alpha^{C/\alpha^2} N \leqslant C' \tag{16}$$

for some absolute constants $C, C' > 0$, from which the bound $r_3(N) \ll \frac{N}{(\log N)^{1/2-o(1)}}$ of Bourgain (1999) follows. The width of the Bohr set shrinking by a factor of $(\alpha/\operatorname{rk} B)^{O(1)}$ at each step of the iteration is responsible for the exponent of $1/2$ on $\log N$. If the width stayed constant, as is the case in the finite field model setting, we would have obtained a bound of the form $r_3(N) \ll \frac{N}{(\log N)^{1-o(1)}}$.

All quantitative improvements to Bourgain's bound have also been obtained by running a density-increment argument relative to Bohr sets, so we will introduce (a simplification, suitable for our expository purposes, of) a piece of notation, from Bloom and Sisask (2020), that succinctly summarizes the strength of a density-increment on a Bohr set. This notation will provide a useful way of comparing the efficiency of different density-increment results.

Definition 2.8. Let B be a regular Bohr set of rank r, and $A \subset B$ have density α in B. We say that A has a density-increment of strength $[\delta, r'; C]$ relative to B if there exists a regular Bohr set $B' \subset B$ of rank

$$\operatorname{rk}(B') \leqslant r + Cr'$$

and size

$$|B'| \geqslant (2r(r'+1))^{-C(r+r')}|B|$$

for which A has increased density at least

$$\left(1 + \frac{\delta}{C}\right)\alpha$$

on some translate of B'.

For example, Theorem 2.7 says that A has a density-increment of strength $[\alpha, 1; \tilde{O}_\alpha(1)]$ relative to B.

2.3. The dimension of the large spectrum

The sets of frequencies at which $\widehat{1_A}$ is large, which we considered in the proof of Theorem 2.1, are called the *large spectra* of A.

Definition 2.9. Let G be an abelian group, $A \subset G$ be a subset of density α, and $\delta > 0$. The δ-large spectrum of A is the set

$$\operatorname{Spec}_\delta(A) := \{\xi \in \widehat{G} \mid |\widehat{1_A}(\xi)| \geqslant \delta\alpha\}.$$

Note that $|\mathrm{Spec}_\delta(A)| \leqslant 1/(\alpha\delta^2)$ for all $\delta > 0$ by Parseval's identity.

Suppose that $A \subset \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ has density α and contains no nontrivial three-term arithmetic progressions, and set $f_A := 1_A - \alpha$, so that, as in the proof of Theorem 2.1, $\|\widehat{f_A}\|_{\ell^3}^3 \gg \alpha^3$. By dyadic pigeonholing, there exists some $1 \geqslant \delta \gg \alpha$ such that

$$\sum_{\xi \in \mathrm{Spec}_\delta(A) \setminus \mathrm{Spec}_{2\delta}(A)} |\widehat{f_A}(\xi)|^3 \gtrsim_\alpha \alpha^3. \tag{17}$$

For the benefit of the reader who has not seen dyadic pigeonholing, which is a common argument in additive combinatorics, this is obtained by noting that Fourier coefficients of size $\ll \alpha^2$ contribute $\ll \alpha^3$ to $\|\widehat{f_A}\|_{\ell^3}^3$ by Parseval's identity, and then decomposing the remaining frequencies into dyadic blocks $\{\xi \in G \mid 2^i\alpha < |\widehat{f_A}(\xi)| \leqslant 2^{i+1}\alpha\}$ (of which there are $\tilde{O}_\alpha(1)$) and applying the pigeonhole principle.

Note that if (17) holds, then we must have $|\mathrm{Spec}_\delta(A)| \gtrsim_\alpha \delta^{-3}$, as well as that

$$2\delta\alpha \sum_{\xi \in \mathrm{Spec}_\delta(A)} |\widehat{f_A}(\xi)|^2 \geqslant \sum_{\xi \in \mathrm{Spec}_\delta(A) \setminus \mathrm{Spec}_{2\delta}(A)} |\widehat{f_A}(\xi)|^3 \gtrsim_\alpha \alpha^3,$$

so

$$\sum_{\xi \in \mathrm{Spec}_\delta(A)} |\widehat{f_A}(\xi)|^2 \gtrsim_\alpha \frac{\alpha^2}{\delta}. \tag{18}$$

One can now adapt the ℓ^2-Fourier mass increment idea of Heath-Brown and Szemerédi to the setting of Bohr sets to deduce a large density-increment for A on a regular Bohr set. Most papers on quantitative bounds in Roth's theorem posterior to Bourgain (1999) contain a variant of the following standard lemma, which is essentially Sanders (2012, Lemma 7.2).

Lemma 2.10. *Let B be a regular Bohr set of rank r, $A \subset B$ have density α in B, $f_A := 1_A - \alpha 1_B$, $K > 0$ be a parameter, and $\Gamma \subset \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ be a set of frequencies for which*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{f_A}(\gamma)|^2 \geqslant K\alpha^2\mu(B).$$

Suppose that $B' \subset B_\rho$, where $\rho \ll \alpha K/r$, is a Bohr set of rank r' such that

$$\Gamma \subset \left\{\gamma \in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z} \mid |1 - \gamma(x)| \leqslant \frac{1}{2} \text{ for all } x \in B'\right\}. \tag{19}$$

Then there exists a regular Bohr set B'' satisfying

1. $\mathrm{rk}(B'') = r'$ *and*
2. $\mu(B'') \geqslant 2^{-O(r')}\mu(B)$

such that A has density at least $\alpha(1 + \Omega(K))$ on some translate of B''.

The efficiency of this density-increment result directly depends on how small we can take r' to be. So, given Γ, we want to find a Bohr set of rank as small as possible for which (19) holds. When Γ is an arbitrary set, the best we can do is $\operatorname{rk} B' = |\Gamma|$. But, in our situation, $\Gamma = \operatorname{Spec}_\delta(A)$. Another key insight of Bourgain (2008) was that, because large spectra are highly additively structured, one can do much better for them than the trivial bound $\operatorname{rk} B' \leqslant |\operatorname{Spec}_\delta(A)|$.

There are multiple senses in which the large spectrum possesses additive structure, but the relevant one for this section is that the large spectrum has small dimension, a result due to Chang (2002).

Definition 2.11. Let G be an abelian group. A subset $S \subset G$ is said to be *dissociated* if $\sum_{s\in S} \varepsilon_s s = 0$ for $\varepsilon_s \in \{-1, 0, 1\}$ only when $\varepsilon_s = 0$ for all $s \in S$. The *dimension* of a set in G is the size of its largest dissociated subset.

Lemma 2.12 (Chang, 2002). *Let $A \subset \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ be a subset of density α, and $\delta > 0$. Then* $\dim \operatorname{Spec}_\delta(A) \lesssim_\alpha 1/\delta^2$.

Lemma 2.12 was first used by Chang to improve the best known bounds in the Freiman–Ruzsa theorem, and has since found many applications in additive combinatorics and theoretical computer science. The bound $\dim \operatorname{Spec}_\delta(A) \lesssim_\alpha 1/\delta^2$ (which Green (2003) showed is sharp) should be compared with the bound $|\operatorname{Spec}_\delta(A)| \leqslant 1/(\alpha\delta^2)$ from above, so that, when α is small, the dimension of the large spectrum is much smaller than its cardinality.

One can find (at the cost of shrinking ρ by a factor of $(\alpha/r)^{O(1)}$, which is not an issue) B' as in Lemma 2.10 of rank $\ll \dim \operatorname{Spec}_\delta(A)$, illustrating a direct connection between the additive structure of large spectra and efficiency of density-increments. Combining this with Chang's lemma produces a density-increment of strength $[1, 1/\alpha^2; \tilde{O}_\alpha(1)]$ when $B = \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. To obtain such a density-increment when B is any regular Bohr set, one needs to work with notions of dissociativity and dimension defined relative to Bohr sets, as well as prove a relative version of Chang's theorem. See, for example, Sanders (2012) for more on this important technical detail. Running a density-increment iteration then recovers the bound for $r_3(N)$ from Bourgain (1999) up to an extra power of $\log\log N$.

Though the bound on dimension in Chang's lemma is sharp, Bloom (2016) proved that one can obtain a better bound by passing to a positive density subset of the large spectrum.

Lemma 2.13 (Bloom, 2016). *Let $A \subset \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ be a subset of density α, and let $\delta > 0$. Then there exists a subset $S \subset \operatorname{Spec}_\delta(A)$ satisfying $|S| \gg \delta|\operatorname{Spec}_\delta(A)|$ for which* $\dim S \lesssim_\alpha 1/\delta$.

Bloom actually proved a version of this lemma relativized to Bohr sets which, combined with Lemma 2.10, produces a density-increment of strength $[1, 1/\alpha; \tilde{O}_\alpha(1)]$ relative to Bohr sets. Running a density-increment iteration then yields $r_3(N) \ll \frac{N}{(\log N)^{1-o(1)}}$.

2.4. Almost-periodicity of convolutions

Sanders (2011) was the first to prove a bound of the form $r_3(N) \ll \frac{N}{(\log N)^{1-o(1)}}$, and he did this not by further analysis of the additive structure of large spectra, but by utilizing methods on the "physical side". Croot and Sisask (2010) proved a variety of theorems saying, roughly, that convolutions are approximately translation-invariant under a large set of shifts, and called this phenomenon *almost-periodicity*. It is possible to take the set of shifts to be a subspace, long arithmetic progression, or Bohr set, depending on the ambient group or the desired application. One of these almost-periodicity results was a key input into the work of Sanders (2011), and Bloom and Sisask (2019) later gave a proof of the bound $r_3(N) \ll \frac{N}{(\log N)^{1-o(1)}}$ almost completely relying on almost-periodicity.

The rough structure of the argument in Bloom and Sisask (2019) is to consider, for a subset A of $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ lacking nontrivial three-term arithmetic progressions, the L^p-norm of the convolution $1_A * 1_A$ for large p (on the order of $\log(1/\alpha)$), and then to deduce a density-increment in both the case when $\|1_A * 1_A\|_{L^p}$ is small and the case when $\|1_A * 1_A\|_{L^p}$ is large. Bloom and Sisask (2020) required a more flexible version of this second part of their earlier argument, which we record below. Recall that $g \circ h := g * h_-$, where $h_-(x) := \overline{h(-x)}$.

Lemma 2.14 (Bloom and Sisask, 2020, Lemma 5.10). *Let $K \geqslant 10$ be a parameter, $B \subset \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ be a regular Bohr set of rank r, $A \subset B$ have density $\alpha \leqslant 1/K$, $\rho \ll \alpha^2 r$, and $B' \subset B_\rho$ be another Bohr set of rank r. If*

$$\|\mu_A \circ 1_A\|_{L^{2m}(\mu_{B'} \circ \mu_{B'})} \geqslant \alpha K,$$

then A has a density-increment relative to B' of strength $[K, \frac{1}{\alpha K}; \tilde{O}_\alpha(m\alpha^{-O(1/m)})]$.

Note that this result does not require A to lack three-term arithmetic progressions– that hypothesis is only used in Bloom and Sisask (2019) when $\|1_A * 1_A\|_{L^{2m}}$ is small. The proof of Lemma 2.14 is short, and utilizes an L^p-almost-periodicity result relative to Bohr sets. But the proof is even shorter in the finite field model setting, and the relevant L^p-almost periodicity result quicker to state, so we will instead present the model proof, which also appears in Bloom and Sisask (2019, Section 3).

Theorem 2.15 (Bloom and Sisask, 2019, Theorem 3.2). *Let $p \geqslant 2$, $0 < \varepsilon < 1$, and $A \subset \mathbf{F}_3^n$ have density α. Then there exists a subspace $V \leqslant \mathbf{F}_3^n$ of codimension $\lesssim_{\varepsilon,\alpha} p/\varepsilon^2$ such that*

$$\|\mu_A * 1_A * \mu_V - \mu_A * 1_A\|_{L^p} \leqslant \varepsilon \|\mu_A * 1_A\|_{L^{p/2}}^{1/2} + \varepsilon^2.$$

The following lemma is a finite field model analogue of Lemma 2.14 for bounded K.

Lemma 2.16 (Bloom and Sisask, 2019, Lemma 3.4)**.** *Let $A \subset \mathbf{F}_3^n$ have density α and m be a natural number. If $\|\mu_A * 1_A\|_{L^{2m}} \geqslant 10\alpha$, then there exists a subspace of codimension $\lesssim_\alpha m/\alpha$ such that A has density at least 5α on some translate of V.*

Proof. Applying Theorem 2.15 with $p = 2m$ and $\varepsilon = \sqrt{\alpha}/100$, say, gives us a subspace V of codimension $\lesssim_\alpha m/\alpha$ for which

$$\|\mu_A * 1_A * \mu_V - \mu_A * 1_A\|_{L^{2m}} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha}}{100}\|\mu_A * 1_A\|_{L^m}^{1/2} + \frac{\alpha}{10000}.$$

Thus, by the reverse triangle inequality,

$$\|\mu_A * 1_A * \mu_V\|_{L^{2m}} \geqslant \|\mu_A * 1_A\|_{L^{2m}} - \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{100}\|\mu_A * 1_A\|_{L^m}^{1/2} + \frac{\alpha}{10000}\right).$$

By hypothesis, $\|\mu_A * 1_A\|_{L^{2m}} \geqslant 10\alpha$, and, since we are on a probability space, $\|\mu_A * 1_A\|_{L^m} \leqslant \|\mu_A * 1_A\|_{L^{2m}}$. Hence, $\|\mu_A * 1_A * \mu_V\|_{L^{2m}}$ is easily at least 5α. To finish, note that, again because we are on a probability space,

$$5\alpha \leqslant \|\mu_A * 1_A * \mu_V\|_{L^{2m}} \leqslant \|\mu_A * 1_A * \mu_V\|_{L^\infty} \leqslant \|1_A * \mu_V\|_{L^\infty},$$

since μ_A has mean 1. So $\|1_A * \mu_V\|_{L^\infty} \geqslant 5\alpha$, which precisely means that A has density at least 5α on a coset of V. □

We end this subsection by stating the finite field model version of an L^∞-almost-periodicity result used by Bloom and Sisask (2020) in the "spectral boosting" phase of their argument. This will be relevant to our discussion in Section 3.

Lemma 2.17 (Schoen and Sisask, 2016, Theorem 3.2)**.** *Let $0 < \varepsilon < 1/2$ and $S, M, L \subset \mathbf{F}_3^n$ where S has density σ and $|M|/|L| = \nu$. There exists a subspace $W \leqslant \mathbf{F}_3^n$ of codimension at most $\lesssim_{\nu\sigma\varepsilon} \varepsilon^{-2}$ such that*

$$\|\mu_S * \mu_M * 1_L * \mu_V - \mu_S * \mu_M * 1_L\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon.$$

2.5. Higher energies of the large spectrum and additive non-smoothing

In the course of their argument, Bateman and Katz (2012) undertook a close study of the additive and higher energies of large spectra of cap-sets. Let A be a subset of an abelian group G. The *additive energy* $E_4(A)$ of A, a central notion in additive combinatorics, is defined as the number of *additive quadruples* in A,

$$E_4(A) := \left|\{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in A^4 \mid a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}\right|.$$

Note the trivial upper and lower bounds $|A|^3 \geqslant E_4(A) \geqslant |A|^2$. If A is a subgroup of G, then $E_4(A) = |A|^3$ is maximal, and if, more generally, A is a coset progression of G of bounded rank, then $E_4(A) \asymp |A|^3$. At the opposite extreme, if A is a random subset of G, then $E_4(A)$ is close to the minimum $|A|^2$.

Additive energy is a convenient measure of the degree to which a set possesses additive structure, and can be translated into other notions of additive structure, often with only polynomial losses. For example, the Balog–Szemerédi–Gowers theorem says that sets with large additive energy must contain a large subset with small doubling. Additive energy is a particularly nice measure of additive structure to work with because it has a simple expression in terms of the inverse Fourier transform,

$$E_4(A) = \mathbf{E}_{x\in G}|\widetilde{1_A}(x)|^4,$$

so that it can be manipulated using analytic methods.

There are also higher energies whose study has been useful in additive combinatorics. For every natural number m, we define

$$E_{2m}(A) := \left|\left\{(a_1, a_1', \dots, a_m, a_m') \in A^{2m} \mid \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{i=1}^m a_i'\right\}\right| = \mathbf{E}_{x\in G}|\widetilde{1_A}(x)|^{2m}.$$

Note the trivial upper and lower bounds $|A|^{2m-1} \geqslant E_{2m}(A) \geqslant |A|^m$. By Hölder's inequality $E_4(A)^{m-1} \leqslant E_{2m}(A)|A|^{m-2}$ for all $m > 2$ and, similarly, $E_8(A)^{\frac{m-1}{3}} \leqslant E_{2m}(A)|A|^{\frac{m-4}{3}}$ for all $m > 4$. If we set τ to be the normalized additive energy $\tau := E_4(A)/|A|^3$, then $E_{2m}(A) \geqslant \tau^{m-1}|A|^{2m-1}$ for all $m > 2$, and if we set σ to be the normalized higher energy $\sigma := E_8(A)/|A|^7$, then $E_{2m}(A) \geqslant \sigma^{\frac{m-1}{3}}|A|^{2m-1}$ for all $m > 4$. Thus, if $E_4(A)$ or $E_8(A)$ is large, then so are the higher energies of A.

Chang's lemma says that large spectra have small dimension, which is one sense in which they are additively structured. Large spectra also have decently large additive energy. Indeed, writing $z(\xi) = \widehat{1_A}(\xi)/|\widehat{1_A}(\xi)|$ for each $\xi \in \mathrm{Spec}_\delta(A)$ with $\widehat{1_A}(\xi) \neq 0$ and inserting the Fourier inversion formula for 1_A, we have

$$\begin{aligned}\alpha\delta|\mathrm{Spec}_\delta(A)| &\leqslant \sum_\xi \widehat{1_A}(\xi)z(\xi)1_{\mathrm{Spec}_\delta(A)}(\xi)\\ &= \mathbf{E}_x 1_A(x)\left(\sum_\xi z(\xi)e_3(-\xi\cdot x)1_{\mathrm{Spec}_\delta(A)}(\xi)\right)\\ &\leqslant \alpha^{(2m-1)/2m}E_{2m}(\mathrm{Spec}_\delta(A))^{1/2m},\end{aligned}$$

by applying Hölder's inequality with exponents $2m$ and $\frac{2m}{2m-1}$, from which it follows that

$$E_{2m}(\mathrm{Spec}_\delta(A)) \geqslant \alpha\delta^{2m}|\mathrm{Spec}_\delta(A)|^{2m}.$$

The first key insight of Bateman and Katz is that sets with a large higher energy contain a positive density subset of small dimension. An instance of this relative to Bohr sets was proven by Bloom (2016), and combined with (a more technical version of) the observation that large spectra have large higher energies to prove his alternative to Chang's lemma. Bloom worked with relativized notions of additive and

higher energies, and obtained a conclusion involving relativized notions of dissociativity and dimension. Bloom and Sisask (2020) also required a variant of Bloom's result, and the following lemma is a special case of their Lemma 7.9.

Lemma 2.18. *There exists an absolute constant $C > 0$ such that the following holds. Let $\Delta \subset \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ and $\ell, m \geqslant 2$ be integers satisfying $\ell \geqslant 4m$. Then either*

1. *there exists a subset $\Delta' \subset \Delta$ such that*

$$|\Delta'| \geqslant \min\left(1, \frac{|\Delta|}{\ell}\right) \frac{m}{2\ell}|\Delta|$$

   and $\dim \Delta' \ll \ell$, *or*

2. $E_{2m}(\Delta) \leqslant (Cm/\ell)^{2m}|\Delta|^{2m}$.

When A is a cap-set, by dyadic pigeonholing we can find a $1 \geqslant \delta \gg \alpha$ for which $|\mathrm{Spec}_\delta(A)| \gtrsim_\alpha \delta^{-3}$ and (18) holds. If δ is substantially larger than α, say $\delta > K^2\alpha$ for K a very small power of α^{-1}, then the (finite field model version of) Lemma 2.10 combined with the lower bound $E_{2m}(\mathrm{Spec}_\delta(A)) \geqslant \alpha\delta^{2m}|\mathrm{Spec}_\delta(A)|^{2m}$ and repeated applications of (the finite field model version of) Lemma 2.18 produces a density-increment of strength $[K, 1/\alpha K; 1]$ or $[1/K, 1; 1]$, both of which would be good enough to obtain the bound $r_3(\mathbf{F}_3^n) \ll \frac{3^n}{n^{1+c}}$ for some small c. So, now suppose that $K^2\alpha \geqslant \delta \gg \alpha$. In this case we must also have $1/\delta^3 \lesssim_\alpha |\mathrm{Spec}_\delta(A)| \leqslant K^2/\delta^3$, and if one of $E_4(\mathrm{Spec}_\delta(A))$ or $E_8(\mathrm{Spec}_\delta(A))$ is substantially larger than their minimal values of δ^{-7} and δ^{-15}, respectively, say $E_4(\mathrm{Spec}_\delta(A)) \geqslant L\delta^{-7}$ or $E_8(\mathrm{Spec}_\delta(A)) \geqslant L\delta^{-15}$ for L equal to another small power of α^{-1}, then, by our earlier discussion, the higher energies of $\mathrm{Spec}_\delta(A)$ must be large, so that we can again obtain a good enough density-increment by again combining Lemma 2.10 with repeated applications of Lemma 2.18.

The only remaining case to handle in the proof of Bateman and Katz is when

$$\delta \approx \alpha,\ |\mathrm{Spec}_\delta(A)| \approx \delta^{-3},\ \frac{E_4(\mathrm{Spec}_\delta(A))}{|\mathrm{Spec}_\delta(A)|^3} \approx \delta^2, \text{ and } \frac{E_8(\mathrm{Spec}_\delta(A))}{|\mathrm{Spec}_\delta(A)|^7} \approx \delta^6, \qquad (20)$$

where we will temporarily use $\approx$ to hide small powers of α^{-1}. Recall that if τ is the normalized additive energy and σ is the normalized E_8-energy, then $\sigma \geqslant \tau^3$. Thus, $E_8(\mathrm{Spec}_\delta(A))$ is about as small as it can be given the size of $E_4(\mathrm{Spec}_\delta(A))$. Bateman and Katz (2012) call sets with this property *additively non-smoothing* and all other sets *additively smoothing*. Additive energy measures the additive structure of A, and the E_8-energy similarly measures the additive structure of $A + A$. Thus, a set is additively smoothing if its sumset is substantially more structured than itself, and additively non-smoothing if forming the sumset does not improve the additive structure. For example, a random subset of $\mathbf{F}_3^n$ is additively smoothing, while an affine subspace is

additively non-smoothing. Two slightly more elaborate examples of additively non-smoothing sets, highlighted in Bateman and Katz (2011), are, for parameters $M \geqslant 1$ and $1 > \gamma > 0$, sets of the form $H + R$ where H is a subgroup of order $M^{1-\gamma}$ and R is a random set of size M^{γ}, and unions of $M^{\gamma/2}$ random subspaces of order $M^{1-\gamma/2}$.

The second key insight of Bateman and Katz is that it is possible to classify additively non-smoothing sets, and that such a classification could be used to deduce a strong density-increment. They proved a structure theorem saying, roughly, that if $S \subset \mathbf{F}_3^n$ is additively non-smoothing, then a large portion of S can be decomposed into a union of sumsets of the form $X + H$, where H is very additively structured. By applying this result to $S = \mathrm{Spec}_{\delta}(A)$, they eventually managed to obtain a strong density-increment.

Bloom and Sisask (2020), too, needed a structure theorem for additively non-smoothing sets, now also relative to "additive frameworks" of large spectra of Bohr sets, and using relative notions of additive and higher energies. Proving such a result is the most difficult and complex part of their argument, and required them to come up with a more robust proof in the finite field model setting that could be relativized. We will not give the definition of an additive framework, nor the precise definition of an additively non-smoothing set (relative to an additive framework). The following is a simplified portrayal of the structure theorem of Bloom and Sisask (2020, Theorem 9.2).

Rough Theorem Statement. *Let $\tau \leqslant 1/2$ be a parameter, G be a finite abelian group, and $\tilde{\Gamma}$ be a suitable additive framework. If $E_4(\Delta)/|\Delta|^3 = \tau$ and Δ is non-smoothing relative to $\tilde{\Gamma}$, then there exist subsets $X, H \subset \Delta$ and $1 \geqslant \gamma \gg \tau$ such that*

$$|H| \asymp \gamma|\Delta| \qquad \text{and} \qquad |X| \asymp \frac{\tau}{\gamma}|\Delta|, \tag{21}$$

and

$$\langle 1_X \circ 1_X, 1_H \circ 1_H \circ 1_{\Gamma_{top}} \rangle \gg |H|^2|X|. \tag{22}$$

In the finite field model setting, $\tilde{\Gamma}$ can be taken to be trivial, so that the condition (22) becomes $\langle 1_X \circ 1_X, 1_H \circ 1_H \rangle \gg |H|^2|X|$. If desired, one can derive a structure theorem of the form of that of Bateman and Katz by iterating this lemma and applying the asymmetric Balog–Szemerédi–Gowers theorem.

3. The argument of Bloom and Sisask

The argument of Bloom and Sisask (2020) broadly follows the path of Bateman and Katz, but working relative to Bohr sets instead of subspaces. Bloom and Sisask had to overcome multiple significant obstacles in the integer setting that were not present in the finite field model setting, several of which we have already mentioned. One

obstacle not yet mentioned (because we did not give any details on the proof in the finite field model setting) is that one part of the argument that Bateman and Katz used to go from their structure theorem for additively non-smoothing sets to a strong density-increment does not have an efficient analogue in the integer setting.

Bloom and Sisask, like Bateman and Katz, can produce density-increments sufficiently large to prove Theorem 0.2 through the methods discussed in Section 2, unless (18) and (20) hold for some $\alpha K \gg \delta \gg \alpha$, where K is a small power of α^{-1}. This means that $\mathrm{Spec}_\delta(A)$ is additively non-smoothing, and Bloom and Sisask can then iteratively apply their structure theorem to decompose a significant portion of $\mathrm{Spec}_\delta(A)$ into a union of structured sets, from which they can deduce a density-increment provided that the structured pieces are all, individually, sufficiently large, say of size $\Omega(L/\alpha)$ for L some other small power of α^{-1}. The final remaining case is thus when (18) and (20) hold for some $\alpha K \gg \delta \gg \alpha$ and the structure theorem for additively non-smoothing sets produces an H of size at most L/α. Bloom and Sisask derive a strong density-increment in this situation via a new argument that they call "spectral boosting".

Bloom and Sisask call this last piece of their proof "spectral boosting" because they obtain a density-increment of the strength one would obtain if the structured set H were contained in the $\sqrt{\alpha}$-large spectrum, instead of the α-large spectrum. Thus, the elements H can be viewed as morally "boosted" to a larger spectrum. To finish off this section, we will give a sketch of the spectral boosting argument in the finite field model setting.

Suppose, for the sake of illustration, that $\delta = \alpha$, $|\mathrm{Spec}_\alpha(A)| \asymp 1/\alpha^3$, $H \subset \mathrm{Spec}_\alpha(A)$ satisfies $|H| \asymp 1/\alpha$ and $\dim H \lesssim_\alpha 1$, and $X \subset \mathrm{Spec}_\alpha(A)$ satisfies $|X| \asymp 1/\alpha^3$ and $E_4(X,H) \gg |X||H|^2$. We may remove 0 from X without affecting the lower bound on the relative energy by much, so set $X' := \mathrm{Spec}_\alpha(A) \setminus \{0\}$, so that

$$\sum_{\xi_1+\xi_2=\xi_3+\xi_4} 1_H(\xi_1)1_{X'}(\xi_2)1_H(\xi_3)1_{X'}(\xi_4) \gg |X'||H|^2.$$

Consider the function $f := 1_A * 1_A - \alpha^2$, which has Fourier transform $\widehat{f}$ equal to $|\widehat{1_A}|^2$ on X'. Since $|\widehat{1_A}| \geqslant \alpha^2$ on X' by definition, $\widehat{f} \geqslant \alpha^4 1_X$, so that we can replace the first instance of $1_{X'}$ with $\alpha^{-4}\widehat{f}$ to obtain

$$\sum_{\xi_1+\xi_2=\xi_3+\xi_4} 1_H(\xi_1)\widehat{f}(\xi_2)1_H(\xi_3)1_{X'}(\xi_4) \gg \alpha^4|X'||H|^2.$$

Taking inverse Fourier transforms then gives

$$\alpha^4|X'||H|^2 \ll \mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2 f(x)\widetilde{1_{X'}}(x).$$

One important thing to note here is that $|\widetilde{1_H}|$ is invariant under shifts by elements that annihilate H. These elements form a subspace $V \leqslant \mathbf{F}_3^n$ of codimension at most

the dimension of H. We would like to remove $\widetilde{1_{X'}}$ from the average on the right so that we can obtain a large correlation of $|f|$ with $|\widetilde{1_H}|^2$, which will allow us to freely convolve with 1_V later in the argument and eventually obtain a density-increment on a translate of a subspace of V of small codimension.

The easiest way to remove $\widetilde{1_{X'}}$ is to apply Hölder's inequality with $p = 1$ and $q = \infty$ to obtain $\|\widetilde{1_{X'}}\|_{L^\infty} \cdot \mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2|f(x)|$. If X' is not additively structured, then its inverse Fourier transform $\widetilde{1_{X'}}$ should, morally, behave like a random sum of characters, and thus be small, making this an efficient use of Hölder's inequality. On the other hand, if X' is additively structured, we can already obtain a strong density-increment since X' has positive density in $\mathrm{Spec}_\alpha(A)$.

To make the above intuition rigorous, we will apply Hölder's inequality with $q = m$ and $p = \frac{m}{m-1}$ with large m, and then use the Cauchy–Schwarz inequality, yielding

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2 f(x)\widetilde{1_X}(x) &= \mathbf{E}_x(|\widetilde{1_H}(x)|^2 f(x))^{1-1/m} \cdot (|\widetilde{1_H}(x)|^2 f(x))^{1/m}\widetilde{1_{X'}}(x)\\ &\leqslant \||\widetilde{1_H}|^2 f\|_{L^1}^{\frac{m-1}{m}} \left(\mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2|f(x)||\widetilde{1_{X'}}(x)|^m\right)^{1/m}\\ &\leqslant \||\widetilde{1_H}|^2 f\|_{L^1}^{\frac{m-1}{m}} \||\widetilde{1_H}|^2 f\|_{L^2}^{\frac{1}{m}} E_{2m}(X')^{1/2m}.\end{aligned}$$

Parseval's identity and Cauchy–Schwarz give us $\||\widetilde{1_H}|^2 f\|_{L^2}^2 \leqslant |H|^4/\alpha$, from which it follows that

$$\alpha^{8m+1}|X'|^{2m}|H|^{4m-4} \ll \||\widetilde{1_H}|^2 f\|_{L^1}^{2m-2} \cdot E_{2m}(X').$$

Now, we take $m \lesssim_\alpha 1$, so that if the higher energy $E_{2m}(X')$ is large, say $\gg (\alpha L|X'|)^{2m}$ for $L = \alpha^{-1/1000}$, then we can obtain a density-increment of strength $[\alpha^{-1/1000}, \alpha^{-999/1000}; O(1)]$ as previously discussed. We may therefore assume that $E_{2m}(X') \ll (\alpha L|X'|)^{2m}$, which yields

$$\frac{\alpha^2}{L}|H| \asymp \alpha^{O(1/m)}\alpha^3|H|^2 \ll \mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2|f(x)|. \tag{23}$$

Note that if (23) held with f in place of $|f|$, then

$$\frac{\alpha}{L}|H| \ll \sum_\xi 1_H \circ 1_H(\xi)|\widehat{f_A}(\xi)|^2$$

by Parseval's identity, so that, by the pigeonhole principle, there exists a translate $z + H$ of H for which

$$\frac{\alpha}{L} \ll \sum_{\xi \in z+H} |\widehat{f_A}(\xi)|^2,$$

thus producing a very large density-increment. We do indeed have to deal with $|f|$, however.

Observe that if $T := \{x \mid f(x) \geqslant c\alpha^2\}$ and $T' \subset T$, then

$$\mathbf{E}_x 1_A * 1_A(x) 1_{T'}(x) = \mathbf{E}_x f(x) 1_{T'}(x) + \mathbf{E}_x \alpha^2 1_{T'}(x) \geqslant (1+c)\alpha^2 \mu(T'),$$

which looks encouragingly similar to a strong density-increment. If we can show that T has density $\frac{1}{K} \asymp \alpha^{1/500}$ on a translate of $u+V$, then we can take $T' := T \cap (u+V)$, from which it follows that there exists a translate A' of A and a subset $S \subset V$ of density $\gg \frac{1}{K}$ in V for which

$$\mathbf{E}_x 1_S * 1_{A'}(x) 1_A(x) \geqslant (1+c)\alpha^2 \mu(S).$$

By splitting up 1_A into a sum of indicator functions of A intersected with cosets of V and applying the pigeonhole principle, we may replace A' and A with intersections A'' and A''' of A with cosets of V, yielding an inequality of the form

$$\mathbf{E}_x 1_S * 1_{A''}(x) 1_{A'''}(x) \geqslant (1+c)\alpha\mu(A'')\mu(S).$$

The expression on the left-hand side is a convolution $1_S * 1_{A''} \circ 1_{A'''}$, which can be approximated by applying Lemma 2.17 relative to V with $\varepsilon \asymp 1$ to find a subspace $W \leqslant V$ of codimension $\lesssim_\alpha 1$ in V for which

$$\mathbf{E}_x 1_S * 1_{A''}(x) 1_{A'''} * \mu_V(x) \geqslant (1+c)\alpha\mu(A'')\mu(S).$$

The existence of a density-increment of strength $[1, \tilde{O}_\alpha(1); O(1)]$ now follows by applying Hölder's inequality with $p = 1$ and $q = \infty$ and noting that $\|1_S * 1_{A''}\|_{L^1} = \mu(A'')\mu(S)$.

It thus remains to show that T has density $\asymp \alpha^{1/500}$ on a translate of $u+V$. The first step is to remove the absolute value bars around f in (23) by restricting to a subset on which f is large and positive. Using again the identity $r + |r| = 2\max(r, 0)$, we have

$$\frac{\alpha^2}{L}|H| \ll \mathbf{E}_x |\widetilde{1_H}(x)|^2 \max(f(x), 0).$$

Letting $T := \{x \mid f(x) \geqslant c\alpha^2\}$ for some suitably small absolute constant c, it follows that

$$\frac{\alpha^2}{L}|H| \ll \mathbf{E}_x |\widetilde{1_H}(x)|^2 1_T(x) f(x).$$

We will remove f from the average by applying Hölder's inequality with exponents $p = 2m$ and $q = \frac{2m}{2m-1}$ for $m \asymp \log(1/\alpha)$ and then the bound $|\widetilde{1_H}| \leqslant |H|$ to obtain

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x |\widetilde{1_H}(x)|^2 1_T(x) f(x) &\leqslant \|f\|_{L^{2m}} \left(\mathbf{E}_x |\widetilde{1_H}(x)|^{2+2/(2m-1)} 1_T(x)\right)^{1-1/2m} \\ &\leqslant \|f\|_{L^{2m}} \left(\frac{|H|}{\mathbf{E}_x |\widetilde{1_H}(x)|^2 1_T(x)}\right)^{1/m} \left(\mathbf{E}_x |\widetilde{1_H}(x)|^2 1_T(x)\right).\end{aligned}$$

Recalling the definition of f, by the triangle inequality, $\|f\|_{L^{2m}} \leqslant \alpha^2 + \|1_A * 1_A\|_{L^{2m}}$. If $\|1_A * 1_A\|_{L^{2m}}$ were $\gg \alpha^{2-1/1000}$, then we would be able to obtain a density-increment of strength $[\alpha^{-1/1000}, \alpha^{-999/1000}; O(1)]$ using (a finite field model version of) Lemma 2.14, which is certainly good enough. We may therefore proceed under the assumption that $\|f\|_{L^{2m}} \ll \alpha^{2-1/1000}$. Since $\mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2 1_T(x) \geqslant \alpha^2|H|$, the second term above is $\ll \alpha^{-2/m}$. It therefore follows that

$$\frac{1}{L^2}|H| \ll \mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2 1_T(x) = \mathbf{E}_x|\widetilde{1_H}(x)|^2 1_T * \mu_V(x).$$

Finally, by the pigeonhole principle, there must exist an x for which $1_T * \mu_V(x) \gg \frac{1}{L^2}$, i.e., T has density $\gg \alpha^{1/500}$ on $x + V$.

4. The Croot–Lev–Pach polynomial method and the work of Ellenberg–Gijswijt

Many proof techniques that fall under the umbrella of the polynomial method tend to follow the same rough structure:

- ▷ First, the key data of the object of study is encoded in one or several polynomials, typically of low "complexity".
- ▷ Then, the algebraic properties of low complexity polynomials are used to obtain the desired conclusion.

The Croot–Lev–Pach polynomial method also follows this outline. In this final section, we will present a full proof of power-saving bounds in the cap-set problem using the "slice rank" method of Tao (2016), which is a symmetric rephrasing of the argument of Ellenberg and Gijswijt (2017).

To define slice rank, we first specify the functions of slice rank one.

Definition 4.1. Let S be a finite set, k be a positive integer, and $\mathbf{F}$ be a field. We say that a function $f\colon S^k \to \mathbf{F}$ has *slice rank one* if there exists an index $1 \leqslant i \leqslant k$, a function $g\colon S \to \mathbf{F}$, and a function $h\colon S^{k-1} \to \mathbf{F}$ such that

$$f(x_1, \dots, x_k) = g(x_i)h(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k).$$

Thus, a function of k variables on S has slice rank one if it can be written as a product of a function of one variable and a function of the remaining $k-1$ variables. Having defined the functions of slice rank one, the slice rank can now be defined, analogously to other notions of rank such as tensor rank, as the minimum number of rank one functions needed to represent a given function.

Definition 4.2. Let S be a finite set, k be a positive integer, and $\mathbf{F}$ be a field. We say that a function $f\colon S^k \to \mathbf{F}$ has *slice rank* at most m if there exist m functions $g_1, \dots, g_m\colon S^k \to \mathbf{F}$ of slice rank one such that

$$f(x_1, \dots, x_k) = \sum_{j=1}^{m} g_j(x_1, \dots, x_k).$$

The *slice rank* of f is the smallest m_0 for which f has slice rank at most m_0.

Now suppose that $A \subset \mathbf{F}_3^n$ is a cap-set, and let $f\colon A \times A \times A \to \mathbf{F}_3$ denote the indicator function of the diagonal of $A \times A \times A$,

$$f(x, y, z) := \begin{cases} 1 & x = y = z \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{24}$$

The idea of the proof of Theorem 0.4 is to

- ▷ show that f has slice rank exactly $|A|$,
- ▷ express f as an nice, explicit polynomial,
- ▷ and then bound the slice rank of this polynomial,

thus producing a bound for the cardinality $|A|$. The assumption that A is a cap-set is only used in the second step of this outline, where it is, obviously, crucial.

We begin by proving that the slice rank of f is $|A|$.

Lemma 4.3. *Let S be a finite subset and $\mathbf{F}$ be a field, and define $f\colon S \times S \times S \to \mathbf{F}$ by* (24)*. Then the slice rank of f is $|S|$.*

Proof. Since

$$f(x, y, z) = \sum_{s \in S} 1_{\{s\}}(x) 1_{\{s\}}(y) 1_{\{s\}}(z),$$

the function f certainly has slice rank at most $|S|$. To show that the slice rank is at least $|S|$, suppose by way of contradiction that the slice rank equals some positive integer $t < |S|$. Then we may assume, without loss of generality, that there are functions $g_1, \dots, g_t\colon S \to \mathbf{F}$ and $h_1, \dots, h_t\colon S \times S \to \mathbf{F}$ such that

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{t_1} g_i(x) h_i(y, z) + \sum_{i=t_1+1}^{t_2} g_i(y) h_i(x, z) + \sum_{i=t_2+1}^{t} g_i(z) h_i(x, y)$$

for some nonnegative integers $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 < t$.

The idea is now to find a function $r\colon S \to \mathbf{F}$ whose support $\operatorname{supp} r := \{z \in S : r(z) \neq 0\}$ has size larger than t_2 for which $\sum_{z\in S} r(z)g_i(z) = 0$ for all $i = t_2+1, \dots, t$, so that multiplying both sides of the above by $r(z)$ and summing over z yields

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{t_1} g_i'(x)h_i'(y) + \sum_{i=t_1+1}^{t_2} g_i'(x)h_i'(y),$$

where

$$F(x,y) := \begin{cases} r(x) & x = y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

and $g_1', \dots, g_{t_2}', h_1', \dots, h_{t_2}'\colon S \to \mathbf{F}$. In other words, the $|S| \times |S|$ diagonal matrix D with entries $(r(s))_{s\in S}$ along the diagonal has rank at most t_2. But the rank of D equals the number of nonzero elements along its diagonal, $|\operatorname{supp} r|$, which is greater than t_2, giving us a contradiction.

To show that such a function r exists, set $t' := t - t_2$, and let V denote the vector space over $\mathbf{F}$ of functions $S \to \mathbf{F}$ orthogonal to $g_{t_2+1}, \dots, g_t$, so that $\dim V \geqslant |S| - t'$. Since $|S| - t' \geqslant |S| - t > 0$, certainly V contains some function that is not identically zero. Let $r \in V$ be a function with maximal support. If $|\operatorname{supp} r| < |S| - t'$, then the subspace of functions in V that vanish on $\operatorname{supp} r$ has dimension at least one, and so contains some nonzero function r'. But then $r + r'$ would have strictly larger support than r, which contradicts r having maximal support. So we must have $|\operatorname{supp} r| = |S| - t'$, i.e., $|\operatorname{supp} r| = t_2 + |S| - t > t_2$. □

Next, we will express f as a low-complexity polynomial, and derive an upper bound for its slice rank.

Lemma 4.4. *Let $A \subset \mathbf{F}_3^n$ be a cap-set and $f\colon A\times A\times A \to \mathbf{F}_3^n$ be defined as in* (24)*. Then the slice rank of f is at most*

$$M := 3 \cdot \left| \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \{0,1,2\}^n \mid \sum_{i=1}^n a_i < \frac{2n}{3} \right\} \right|. \tag{25}$$

Proof. Since A is a cap-set, the only solutions to the equation $x + y + z = 0$ with x, y, and z all in A are the trivial solutions $x = y = z$. This means that

$$f(x,y,z) = 1_{\{0\}}(x + y + z).$$

Note that for any element $w \in \mathbf{F}_3$, we have

$$1 - w^2 = \begin{cases} 1 & w = 0 \\ 0 & w \neq 0. \end{cases}$$

Thus,

$$1_{\{0\}}(x + y + z) = \prod_{i=1}^n (1 - (x_i + y_i + z_i)^2) =: P(x,y,z).$$

The polynomial P has degree $2n$, and every monomial appearing in P takes the form

$$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} y_1^{b_1} \ldots y_n^{b_n} z_1^{c_1} \cdots z_n^{c_n},$$

where $0 \leqslant a_i, b_j, c_k \leqslant 2$ for each $1 \leqslant i, j, k \leqslant n$ and $\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{j=1}^n b_j + \sum_{k=1}^n c_k \leqslant 2n$. For each such monomial, one of $\sum_{i=1}^n a_i$, $\sum_{j=1}^n b_j$, or $\sum_{k=1}^n c_k$ is less than $2n/3$. Thus, P can be written as

$$\begin{aligned} P(x,y,z) = &\sum_{\substack{0 \leqslant a_1,\ldots,a_n \leqslant 2 \\ a_1+\cdots+a_n < 2n/3}} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} g_{\mathbf{a}}(y,z) + \sum_{\substack{0 \leqslant b_1,\ldots,b_n \leqslant 2 \\ b_1+\cdots+b_n < 2n/3}} y_1^{b_1} \cdots y_n^{b_n} h_{\mathbf{b}}(x,z) \\ &+ \sum_{\substack{0 \leqslant c_1,\ldots,c_n \leqslant 2 \\ c_1+\cdots+c_n < 2n/3}} z_1^{c_1} \cdots z_n^{c_n} r_{\mathbf{c}}(x,y) \end{aligned}$$

for some functions $g_{\mathbf{a}}, h_{\mathbf{b}}, r_{\mathbf{c}} \colon S \times S \to \mathbf{F}$. It therefore follows that the slice rank of $1_{\{0\}}(x+y+z)$ is at most (25). □

Now consider a sequence of n random variables $X_1, \ldots, X_n$ taking values independently and uniformly in $\{0,1,2\}$. The probability that $X := X_1 + \cdots + X_n$ is smaller than $2n/3$ equals M times $1/3^{n+1}$, and this probability is at most $2e^{-n/18}$ by Hoeffding's inequality. Hence, the slice rank of f is $\ll (3/e^{1/18})^n$ by Lemma 4.4, and so $|A| \ll (3/e^{1/18})^n \approx 2.838^n$ by Lemma 4.3. Obtaining the bound of $\ll 2.756^n$ appearing in the theorem of Ellenberg and Gijswijt just requires a less crude estimation of M, and is straightforward, though a bit tedious.

References

Alon, N. and Dubiner, M. (1993). "Zero-sum sets of prescribed size", in: *Combinatorics, Paul Erdős is eighty, Vol. 1*. Bolyai Soc. Math. Stud. János Bolyai Math. Soc., Budapest, pp. 33–50.

Bateman, M. and Katz, N. H. (2011). "Structure in additively nonsmoothing sets", *preprint*. arXiv:1104.2862.

——— (2012). "New bounds on cap sets", *J. Amer. Math. Soc.* **25** (2), pp. 585–613.

Behrend, F. A. (1946). "On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression", *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **32**, pp. 331–332.

Bloom, T. F. (2016). "A quantitative improvement for Roth's theorem on arithmetic progressions", *J. Lond. Math. Soc.* (2) **93** (3), pp. 643–663.

Bloom, T. F. and Sisask, O. (2019). "Logarithmic bounds for Roth's theorem via almost-periodicity", *Discrete Anal.*, Paper No. 4, 20.

——— (2020). "Breaking the logarithmic barrier in Roth's theorem on arithmetic progressions", *preprint*. arXiv:2007.03528.

Bourgain, J. (1999). "On triples in arithmetic progression", *Geom. Funct. Anal.* **9** (5), pp. 968–984.

——— (2008). "Roth's theorem on progressions revisited", *J. Anal. Math.* **104**, pp. 155–192.

Brown, T. C. and Buhler, J. P. (1982). "A density version of a geometric Ramsey theorem", *J. Combin. Theory Ser. A* **32** (1), pp. 20–34.

Chang, M.-C. (2002). "A polynomial bound in Freiman's theorem", *Duke Math. J.* **113** (3), pp. 399–419.

Croot, E., Lev, V. F., and Pach, P. P. (2017). "Progression-free sets in $\mathbb{Z}_4^n$ are exponentially small", *Ann. of Math.* (2) **185** (1), pp. 331–337.

Croot, E. and Sisask, O. (2010). "A probabilistic technique for finding almost-periods of convolutions", *Geom. Funct. Anal.* **20** (6), pp. 1367–1396.

Dvir, Z. (2009). "On the size of Kakeya sets in finite fields", *J. Amer. Math. Soc.* **22** (4), pp. 1093–1097.

Edel, Y. (2004). "Extensions of generalized product caps", *Des. Codes Cryptogr.* **31** (1), pp. 5–14.

Ellenberg, J. S. and Gijswijt, D. (2017). "On large subsets of $\mathbb{F}_q^n$ with no three-term arithmetic progression", *Ann. of Math.* (2) **185** (1), pp. 339–343.

Erdős, P. and Turán, P. (1936). "On Some Sequences of Integers", *J. London Math. Soc.* **11** (4), pp. 261–264.

Frankl, P., Graham, R. L., and Rödl, V. (1987). "On subsets of abelian groups with no 3-term arithmetic progression", *J. Combin. Theory Ser. A* **45** (1), pp. 157–161.

Furstenberg, H. (1977). "Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions", *J. Analyse Math.* **31**, pp. 204–256.

Gowers, T. (1998). "A new proof of Szemerédi's theorem for arithmetic progressions of length four", *Geom. Funct. Anal.* **8** (3), pp. 529–551.

——— (2001). "A new proof of Szemerédi's theorem", *Geom. Funct. Anal.* **11** (3), pp. 465–588.

Green, B. (2003). "Some constructions in the inverse spectral theory of cyclic groups", *Combin. Probab. Comput.* **12** (2), pp. 127–138.

——— (2005a). "Finite field models in additive combinatorics", in: *Surveys in combinatorics 2005*. Vol. 327. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp. 1–27.

——— (2005b). "Roth's theorem in the primes", *Ann. of Math.* (2) **161** (3), pp. 1609–1636.

Green, B. and Tao, T. (2008). "The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions", *Ann. of Math.* (2) **167** (2), pp. 481–547.

Guth, L. and Katz, N. H. (2010). "Algebraic methods in discrete analogs of the Kakeya problem", *Adv. Math.* **225** (5), pp. 2828–2839.

——— (2015). "On the Erdős distinct distances problem in the plane", *Ann. of Math.* (2) **181** (1), pp. 155–190.

Heath-Brown, R. (1987). "Integer sets containing no arithmetic progressions", *J. London Math. Soc.* (2) **35** (3), pp. 385–394.

Meshulam, R. (1995). "On subsets of finite abelian groups with no 3-term arithmetic progressions", *J. Combin. Theory Ser. A* **71** (1), pp. 168–172.

Roth, K. F. (1953). "On certain sets of integers", *J. London Math. Soc.* **28**, pp. 104–109.

Salem, R. and Spencer, D. C. (1942). "On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression", *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **28**, pp. 561–563.

Sanders, T. (2009). "Roth's theorem in $\mathbb{Z}_4^n$", *Anal. PDE* **2** (2), pp. 211–234.

——— (2011). "On Roth's theorem on progressions", *Ann. of Math.* (2) **174** (1), pp. 619–636.

——— (2012). "On certain other sets of integers", *J. Anal. Math.* **116**, pp. 53–82.

Schoen, T. (2021). "Improved bound in Roth's theorem on arithmetic progressions", *Adv. Math.* **386**, Paper No. 107801, 20.

Schoen, T. and Sisask, O. (2016). "Roth's theorem for four variables and additive structures in sums of sparse sets", *Forum Math. Sigma* **4**, Paper No. e5, 28.

Szemerédi, E. (1975). "On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression", *Acta Arith.* **27**, pp. 199–245.

——— (1990). "Integer sets containing no arithmetic progressions", *Acta Math. Hungar.* **56** (1-2), pp. 155–158.

Tao, T. (2016). *A symmetric formulation of the Croot–Lev–Pach–Ellenberg–Gijswijt capset bound*. `https://terrytao.wordpress.com/2016/05/18/a-symmetric-formulation-of-the-croot-lev-pach-ellenberg-gijswijt-capset-bound/`. Accessed: 2021-05-17.

Tao, T. and Vu, V. (2006). *Additive combinatorics*. Vol. 105. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, pp. xviii+512.

van der Waerden, B. L. (1927). "Beweis einer Baudetschen Vermutung." *Nieuw Arch. Wiskd., II. Ser.* **15**, pp. 212–216.

Wolf, J. (2015). "Finite field models in arithmetic combinatorics—ten years on", *Finite Fields Appl.* **32**, pp. 233–274.

Sarah Peluse

School of Mathematics
Institute for Advanced Study
1 Einstein Drive
Princeton, NJ 08540
USA

E-mail: `speluse@princeton.edu`

Séminaire BOURBAKI, 1948/49 à 2021/2022

Exposés 1 à 1196

Les volumes 1948/49 à 1967/68, Exposés 1 à 346, initialement publiés par *W.A. Benjamin, Inc.* New York, ont été réimprimés en 1996 par la Société mathématique de France sous forme d'un ensemble de 10 volumes hors série de la collection *Astérisque* :

vol. 1 : 1948/49, 1949/50, 1950/51 ;
vol. 2 : 1951/52-1952/53, 1953/54 ;
vol. 3 : 1954/55, 1955/56 ;
vol. 4 : 1956/57, 1957/58 ;
vol. 5 : 1958/59, 1959/60 ;
vol. 6 : 1960/61 ;
vol. 7 : 1961/62 ;
vol. 8 : 1962/63, 1963/64 ;
vol. 9 : 1964/65, 1965/66 ;
vol. 10 : 1966/67, 1967/68.

Les volumes 1968/69 à 1980/81, Exposés 347 à 578, ont été publiés par *Springer–Verlag*, collection Lecture Notes in Mathematics :

vol. 1968/69, n° 179, 1971 ;
vol. 1969/70, n° 180, 1971 ;
vol. 1970/71, n° 244, 1971 ;
vol. 1971/72, n° 317, 1973 ;
vol. 1972/73, n° 383, 1974 ;
vol. 1973/74, n° 431, 1975 ;
vol. 1974/75, n° 514, 1976 ;
vol. 1975/76, n° 567, 1977 ;
vol. 1976/77, n° 677, 1978 ;
vol. 1977/78, n° 710, 1979 ;
vol. 1978/79, n° 770, 1980 ;
vol. 1979/80, n° 842, 1981 ;
vol. 1980/81, n° 901, 1981.

Les volumes 1981/82 à 2021/22, Exposés 579 à 1196, ont été publiés par la Société mathématique de France dans la collection *Astérisque* :

vol. 1981/82, n° 92-93, 1982 ;
vol. 1982/83, n° 105-106, 1983 ;
vol. 1983/84, n° 121-122, 1985 ;
vol. 1984/85, n° 133-134, 1986 ;
vol. 1985/86, n° 145-146, 1987 ;
vol. 1986/87, n° 152-153, 1987 ;
vol. 1987/88, n° 161-162, 1988 ;
vol. 1988/89, n° 177-178, 1989 ;
vol. 1989/90, n° 189-190, 1990 ;
vol. 1990/91, n° 201-202-203, 1991 ;
vol. 1991/92, n° 206, 1992 ;
vol. 1992/93, n° 216, 1993 ;
vol. 1993/94, n° 227, 1995 ;
vol. 1994/95, n° 237, 1996 ;
vol. 1995/96, n° 241, 1997 ;
vol. 1996/97, n° 245, 1997 ;
vol. 1997/98, n° 252, 1998 ;
vol. 1998/99, n° 266, 2000 ;
vol. 1999/2000, n° 276, 2002 ;
vol. 2000/01, n° 282, 2002 ;
vol. 2001/02, n° 290, 2003 ;
vol. 2002/03, n° 294, 2004 ;
vol. 2003/04, n° 299, 2005 ;
vol. 2004/05, n° 307, 2006 ;
vol. 2005/06, n° 311, 2007 ;
vol. 2006/07, n° 317, 2008 ;
vol. 2007/08, n° 326, 2009 ;
vol. 2008/09, n° 332, 2010 ;
vol. 2009/10, n° 339, 2011 ;
vol. 2010/11, n° 348, 2012 ;
vol. 2011/12, n° 352, 2013 ;
vol. 2012/13, n° 361, 2014 ;
vol. 2013/14, n° 367–368, 2015 ;
vol. 2014/15, n° 380, 2016 ;
vol. 2015/16, n° 390, 2017 ;
vol. 2016/17, n° 404, 2019 ;
vol. 2017/18, n° 414, 2019 ;
vol. 2018/19, n° 422, 2020 ;
vol. 2019/21, n° 430, 2022 ;
vol. 2021/22, n° 438, 2022 ;

Une table des exposés du Séminaire Bourbaki, classée par noms d'auteurs, est disponible à l'adresse `https://bourbaki.fr/table.pdf`

ASTÉRISQUE

2022

437. A. Borodin & M. Wheeler – *Coloured stochastic vertex models and their spectral theory*
436. S.-J. Oh & D. Tataru – *The Yang-Mills heat flow and the caloric gauge*
435. R. Donagi & T. Pantev – *Parabolic Hecke eigensheaves*
434. M. Bertolini, H. Darmon, V. Rotger, M. A. Seveso & R. Venerucci – *Heegner points, stark-Heegner points, and diagonal classes*
433. F. Binda, D. Park & P. A. Ostvaer – *Triangulated categories of logarithmic motives over a field*
432. Y. Wakabayashi – *A theory of dormant opers on pointed stable curves*
431. Q. Guignard – *Geometric local ε-factors*
430. Séminaire Bourbaki, *volume 2019/2021, Exposés 1166–1180*

2021

429. E. Gwynne & J. Miller – *Percolation on uniform quadrangulations and* SLE_6 *on* $\sqrt{8/3}$*-Liouville quantum gravity*
428. K. Prasanna & A. Venkatesh – *Automorphic cohomology, motivic cohomology, and the adjoint L-function*
427. B. Duplantier, J. Miller & S. Sheffield – *Liouville quantum gravity as a mating of trees*
426. P. Biran, O. Cornea & E. Shelukhin – *Lagrangian shadows and triangulated categories*
425. T. Bachmann & M. Hoyois – *Norms in motivic homotopy theory*
424. B. Bhatt, J. Lurie & A. Mathew – *Revisiting the de Rham-Witt complex*
423. K. Ardakov – *Equivariant $\mathscr{D}$-modules on rigid analytic spaces*

2020

422. Séminaire Bourbaki, *volume 2018/2019, Exposés 1151–1165*
421. J.H. Bruinier, B. Howard, S.S. Kudla, K. Madapusi Pera, M. Rapoport & T. Yang – *Arithmetic divisors on orthogonal and unitary Shimura varieties*
420. H. Ringström – *Linear systems of wave equations on cosmological backgrounds with convergent asymptotics*
419. V. Gorbounov, O. Gwilliam & B. Williams – *Chiral differential operators via quantization of the holomorphic σ-model*
418. R. Beuzart–Plessis – *A local trace formula for the Gan-Gross-Prasad conjecture for unitary groups : the Archimedean case*
417. J.D. Adams, M. Van Leeuwen, P.E. Trapa & D.A. Vogan, Jr. – *Unitary representations of real reductive groups*
416. S. Crovisier, R. Krikorian, C. Matheus & S. Senti (eds.) – *Some aspects of the theory of dynamical systems : A tribute to Jean-Christophe Yoccoz, II*
415. S. Crovisier, R. Krikorian, C. Matheus & S. Senti (eds.) – *Some aspects of the theory of dynamical systems : A tribute to Jean-Christophe Yoccoz, I*

2019

414. Séminaire Bourbaki, *Volume 2017/2018, Exposés 1136–1150*
413. M. Crainic, R. Loja Fernandes & D. Martínez Torres – *Regular Poisson manifolds of compact types*
412. E. Herscovich – *Renormalization in quantum field theory (after R. Borcherds)*
411. G. David – *Local regularity properties of almost- and quasiminimal sets with a sliding boundary condition*
410. P. Berger & J.-C. Yoccoz – *Strong regularity*
409. F. Calegari & A. Venkatesh – *A torsion Jacquet-Langlans correspondence*
408. D. Maulik & A. Okounkov – *Quantum groups and quantum cohomology*
407. Séminaire Bourbaki, *Volume 2016/2017, Exposés 1120–1135*

2018

406. L. Fargues & J.-M. Fontaine – *Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique (préface P. Colmez)*
405. J.-F. Bony, S. Fujié, T. Ramond & M. Zerzeri – *Resonances for homoclinic trapped sets*
404. O. Matte & J. S. Møller – *Feynman-Kac formulas for the ultra-violet renormalized Nelson model*
403. M. Berti, T. Kappeler & R. Montalto – *Large Kam tori for perturbations of the defocusing NLS equation*
402. H. Bao & W. Wang – *A new approach to Kazhdan-Lustig theory of type B via quantum symmetric pairs*
401. J. Szeftel – *Parametrix for wave equations on a rough background III : space-time regularity of the phase*
400. A. Ducros – *Families of Berkovich spaces*
399. T. Lidman & C. Manolescu – *The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homologies*
398. W. Teck Gan, F. Gao, W. H. Weissman – *L-groups and the Langlands program for covering groups*
397. S. Riche & G. Williamson – *Tilting modules and the p-canonical basis*

2017

396. Y. Sakellaridis & A. Venkatesh – *Periods and harmonic analysis on spherical varieties*
395. V. Guirardel & G. Levitt – *JSJ decompositions of groups*
394. J. Xie – *The dynamical Mordell-Lang conjecture for polynomial endomorphisms of the affine plane*
393. G. Biedermann, G. Raptis & M. Stelzer – *The realization space of an unstable coalgebra*
392. G. David, M. Filoche, D. Jerison & S. Mayboroda – *A free boundary problem for the localization of eigenfunctions*
391. S. Kelly – *Voevodsky motives and l dh-descent*
390. Séminaire Bourbaki, *Volume 2015/2016, Exposés 1104–1119*
389. S. Grellier & P. Gérard – *The cubic Szegő equation and Hankel operators*
388. T. Lévy – *The master field on the plane*
387. R.M. Kaufmann & B.C. Ward – *Feynman categories*
386. B. Lemaire & G. Henniart – *Représentations des espaces tordus sur un groupe réductif connexe p-adique*