

# la Gazette

de la Société Mathématique de France



- Mathématiques – Optimisation de formes
- Raconte-moi... un nœud légendrien
- Entretien – avec Alain Connes
- Information – CNU 25 et CNU 26

## Comité de rédaction

### Rédacteur en chef

**Pauline LAFITTE**

CentraleSupélec  
pauline.lafitte@centralesupelec.fr

### Rédacteurs

**Mickael DE LA SALLE**

Institut Camille Jordan, Lyon  
delasalle@math.univ-lyon1.fr

**Christophe ECKÈS**

Archives Henri Poincaré, Nancy  
eckes@math.univ-lyon1.fr

**Charlotte HARDOUIN**

Université de Toulouse  
charlotte.hardouin@math.univ-toulouse.fr

**Mylene MAÏDA**

Université de Lille  
mylene.maida@univ-lille.fr

**Magali RIBOT**

Université d'Orléans  
magali.ribot@univ-orleans.fr

**Gabriel RIVIÈRE**

Université de Nantes  
Gabriel.Riviere@univ-nantes.fr

**Susanna ZIMMERMANN**

Université Paris-Saclay  
susanna.zimmermann@universite-paris-saclay.fr

### Secrétariat de rédaction :

SMF – Claire ROPARTZ  
Institut Henri Poincaré  
11 rue Pierre et Marie Curie  
75231 Paris cedex 05  
Tél. : 01 44 27 67 96 – Fax : 01 40 46 90 96  
gazette@smf.emath.fr – <http://smf.emath.fr>

Directeur de la publication : Fabien DURAND

ISSN : 0224-8999



À propos de la couverture. À partir du maillage d'une statue d'Hébé, déesse grecque de la jeunesse, sculptée par Bertel Thorvaldsen (1770-1844), ces images représentent des surfaces de niveau de la fonction distance signée. De gauche à droite, l'image originale (distance 0), l'isosurface à distance -0.01, l'isosurface 0 à nouveau, l'isosurface 0.02 et l'isosurface 0.05. (crédit : Charles DAPOGNY).

N° 176

## Éditorial

À vous qui lisez la *Gazette*, physiquement ou numériquement,

nous sommes confrontés quotidiennement à nos ordinateurs, téléphones, etc. Nous leur donnons des instructions : je suis d'ailleurs en train de le faire en transcrivant le fil de ma pensée dans un fichier  $\text{\LaTeX}$ . Ou ne serais-je pas plutôt en train d'écrire un programme pour le compilateur  $\text{\LaTeX}$ ? Mais que sont en fait un fichier et un programme? Intuitivement, vous identifiez peut-être un programme à sa forme inscrite dans un fichier, ce qui vous amène à assimiler un programme à un fichier. Un fichier, souvent assimilé à un contenant, ne se pense pas en première approche comme un programme. Et pourtant... Baptiste Mèlès défend dans les pages de la *Gazette* la thèse que tout fichier est un programme. Sa démonstration est passionnante et nous fait réfléchir aux tours et détours de nos mots... ce qui conduit d'ailleurs logiquement à s'interroger sur la définition de « langage de programmation »!

Après le Raconte-moi... paru en janvier dernier, on reparle dans ce numéro de problèmes isopérimétriques sous l'angle plus appliqué de l'optimisation de forme. Charles Dapogny retrace l'histoire de la formalisation des problèmes d'optimisation de forme, de l'époque de Didon aux années soixante du siècle dernier, en faisant référence à Newton, Lagrange, Rayleigh, Hooke, Weierstrass, Maxwell et Hadamard entre autres. Il met ensuite en lumière leurs équations et les techniques de résolutions pratiques actuelles; en particulier celle des lignes de niveau, dont la sensibilité est très fine : en couverture, la distance entre Hébé, à gauche, et la forme s'apparentant à un ours polaire, à droite, est très faible!

Un autre problème d'optimisation est au cœur d'une conjecture de Littlewood formulée dans les années 1960 et démontrée très récemment par Balister, Bollobas, Morris, Sahasrabudhe et Tiba. Ils ont prouvé qu'il existe en effet des polynômes à coefficients  $\pm 1$  quasiment constants sur la sphère, dits « plats », permettant de resserrer une inégalité fonctionnelle classique. Hervé Queffélec nous prend par la main pour nous expliquer les étapes majeures de la formulation de la conjecture à sa démonstration, nous guidant entre des résultats très connus et des découvertes insoupçonnées, par exemple par coloriage.

Alain Connes, dans un entretien avec Claire Debord, retrace ses aventures en mathématiques et physique théorique, intimement liées dans son brillant parcours. Il fait une part très belle aux fruits de rencontres fortuites, qui sont si souvent à l'origine d'avancées majeures en science. Mais il met également l'accent sur la nécessité de prendre du recul par rapport à notre système qui freine le développement des mathématiques par la recherche de leur justification comme utiles. La discussion entre Jacobi et Legendre sur les propos de Fourier<sup>1</sup> n'est pas loin...

Toujours en parlant de Legendre et toujours en lien avec l'optimisation à travers sa transformée, voici un sujet moins controversé : aimez-vous le patin à glace ? Si oui, vous savez déjà ce qu'est un nœud legendrien. Si non, vous serez convaincu de l'aimer parce qu'il va vous faire comprendre ce qu'est un nœud legendrien ! Dans tous les cas, découvrez comment Baptiste Chantraine relève le défi du Raconte-moi... en faisant élégamment ressortir les figures de cette théorie.

L'année 2023 marque la fin de la mandature actuelle des sections CNU. En ce qui concerne les carrières des enseignants-chercheurs, le monde universitaire français a subi plusieurs secousses en 2022 avec l'apparition du repyramidage et du RIPEC ainsi que la menace sur les contingents nationaux de promotions. En plus des bilans des sections 25 et 26 par leurs président et présidente, ces derniers ont souhaité adresser dans nos pages un encouragement à la mobilisation électorale de toute la communauté des mathématiques françaises. La représentativité passe par les candidatures et par le vote !

Plus largement, deux sujets touchent à l'international : l'IHÉS nous communique la nouvelle de la création du « Centre International de Mathématiques en Ukraine », dans l'espoir que les sciences jouent un rôle majeur dans la reconstruction lorsque la guerre sera enfin terminée ; et nous publions un hommage appuyé rendu à Bas Edixhoven, professeur à Rennes puis à Leyde aux Pays-Bas, par Rutger Noot, Jean-Marc Couveignes, Chandrashekhar Khare, Ben Moonen et Pierre Parent.

Enfin, soyez aux aguets et à vos plumes : la SMF va bientôt lancer son concours de poésie mathématique...

Pauline LAFITTE

1. Carl Gustav Jacob Jacobi et Adrien-Marie Legendre. « Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. » Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal) 1875 : 205 - 279, [http://www.numdam.org/item/BSMA\\_1875\\_\\_9\\_\\_126\\_1.pdf](http://www.numdam.org/item/BSMA_1875__9__126_1.pdf), p.135



N° 176

## Sommaire

<b>SMF</b>	<b>5</b>
Mot du président	5
<b>PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE</b>	<b>8</b>
Tout fichier est un programme... et non l'inverse – <i>B. MÉLÈS</i>	8
<b>MATHÉMATIQUES</b>	<b>17</b>
Optimisation de formes – <i>C. DAPOGNY</i>	17
Polynômes plats selon Balister, Bollobas, Morris, Sahasrabudhe, Tiba – <i>H. QUEFFÉLEC</i>	34
<b>ENTRETIEN</b>	<b>44</b>
Un entretien avec Alain CONNES	44
<b>RACONTE-MOI</b>	<b>52</b>
... un nœud legendrien – <i>B. CHANTRAINE</i>	52
<b>TRIBUNE LIBRE</b>	<b>59</b>
Renouvellement du CNU – <i>F. COMTE et F. PLANCHON</i>	59
<b>INFORMATION</b>	<b>60</b>
Bilan des sessions 2022 du CNU section 25	60
Bilan des sessions 2022 du CNU section 26	65
Création du nouveau Centre International de Mathématiques en Ukraine	78
<b>CARNET</b>	<b>81</b>
Bas Edixhoven – <i>R. NOOT</i>	81
Serre's modularity conjecture – <i>C. KHARE</i>	83
The André-Oort conjecture – <i>B. MOONEN</i>	84
De l'énumération de vecteurs à la théorie d'Arakelov – <i>J.-M. COUVEIGNES et P. PARENT</i>	85
Make Chabauty geometric again! – <i>P. PARENT</i>	86





N° 176

## Mot du président

Chères lectrices et lecteurs de la *Gazette*,

Vous le savez, on observe aussi bien dans la recherche mathématique française que dans l'ingénierie mathématique un déficit considérable de mixité sociale et de genre. Est-il nécessaire de préciser que c'est en défaveur des populations non socialement et culturellement favorisées, et des femmes. La récente réforme du lycée n'apporte aucune solution à ce problème, bien au contraire elle l'aggrave. Si vous ne l'avez pas encore fait vous pouvez lire à ce sujet les différentes analyses parues sur notre site. Elles ont été très largement relayées dans les médias et par le secteur privé qui lui aussi s'inquiète de voir le vivier des futurs scientifiques et ingénieurs se tarir, accentuant d'autant plus ce problème de mixité.

Un récent rapport (février 2023), conduit par l'inspection générale du Ministère de l'Éducation nationale et de la jeunesse, intitulé « Égalité filles-garçons en mathématiques », propose des « pistes d'actions dans la classe afin d'aider les enseignants à œuvrer en faveur de la réussite en mathématiques de tous les élèves, dans une démarche d'égalité et d'inclusion ». Ce document très intéressant a été commenté par Magdalena Kobylanski. Vous pourrez lire son analyse sur notre site. Les actions à mener sont identifiées mais sont toutes à la charge des enseignants. Les structures dans lesquelles cela s'insère ne sont pas questionnées, analysées, critiquées. La formation continue qui permettrait d'aider à la mise en place de ces actions n'est pas discutée. Il s'agit donc d'un très bon document de travail mais il est fort vraisemblable qu'il reste sans suite comme de nombreux rapports ou analyses déjà produits par l'Inspection Académique et les associations, dont la SMF, qui ont à cœur de faire évoluer cette situation. Il est malheureux et dommageable pour la France que tous ces documents de qualité ne soient pas lus, pas considérés, méprisés, par les pouvoirs publics avant de prendre des décisions souvent trop rapides et sans dialogue avec les acteurs de terrain. Pourtant, spécialement en mathématiques, il existe un très grand nombre d'associations qui agissent pour plus d'égalité et d'inclusion mais qui sont relativement peu soutenues par les pouvoirs publics. Je pense, par exemple, à « MATHS-EN-JEANS » qui vient de faire son 34<sup>e</sup> congrès. Ce dispositif concerne plus de 3000 élèves chaque année en France, de tous niveaux,

de tous genres et de toutes origines sociales. Pour avoir fait ses preuves pendant d'aussi longues années, il est bien dommage que ce programme ne soit pas mieux soutenu, surtout lorsque l'on indique dans de très nombreux rapports (ce dernier rapport de l'Inspection générale ou le rapport Villani-Torossian, par exemple) que ce que MEJ organise depuis si longtemps fait partie des actions à mettre en place... Le dispositif MATHC2+, qui concerne environ 1500 élèves par an, participe également à cette démarche d'égalité et d'inclusion en exigeant la mixité de genre et en s'adressant prioritairement à des établissements de type REP ou REP+. Citons également l'Association « Animath », à l'origine de MATHC2+, qui est associée à l'Association Femmes & Mathématiques pour l'organisation des journées « Filles, Maths et Informatique ». De nombreuses autres actions sont en place sur notre territoire mais toutes souffrent d'un manque de financements alors qu'elles répondent à un besoin auquel il est urgent de répondre. Plus récemment le programme « Les Cigales » a été mis en place au CIRM au bénéfice de lycéennes qui viennent découvrir pendant une semaine des activités liées à la recherche en mathématiques. Ce stage a pour ambition de créer des vocations pour les sciences. Ce dispositif fait des émules, Les « Cigognes » (à Nancy et Strasbourg), les « Marmottes » (au SwissMap des Diablerets) ou encore les « Maths dans la forêt de Paimpont » (Paris et Rennes). Tout comme pour les autres initiatives, le principal frein au développement et à la pérennité d'un tel programme reste le financement. La recherche de budget est chronophage et de nature à briser l'enthousiasme des organisatrices. Pour plus d'informations sur « Les Cigales » je vous conseille de lire l'excellent article de Olga Paris-Romaskevich paru dans la Gazette en octobre 2022.

Encore plus récemment, inspiré par « Les Cigales » et MATHC2+, la SMAI, la SFDs et la SMF ont créé un stage non mixte, cette fois-ci à destination de nos étudiantes de Licence. Il est intitulé « Maths C pour L ». Le format est le même ainsi que le financement des stagiaires : elles sont totalement prises en charge. Il ambitionne de mettre en valeur les carrières en mathématiques auprès des étudiantes avec, de plus, le choix affirmé de privilégier les étudiantes dont le profil ne prédestine pas, statistiquement, à cela.

Le premier stage a eu lieu au CIRM du 20 au 24 février 2023 et le prochain aura lieu à Amiens du 5 au 9 juin 2023. Ce sont 27 étudiantes provenant de 20 universités différentes qui ont pu participer au premier stage alors que nous avons reçu 110 candidatures. Afin de mieux répondre à la demande, nous espérons pouvoir organiser 4 stages dès l'an prochain et les maintenir dans les années à venir. Pour cela nous aurons besoin de collègues prêts à les organiser et de financements. Nous espérons ainsi pouvoir en faire bénéficier une centaine d'étudiantes de façon à promouvoir auprès d'elles le potentiel et la variété des carrières liées aux mathématiques. Je tiens à

saluer la diligence des collègues qui ont diffusé l'information auprès de leurs étudiantes et nous ont proposé des candidatures. Ils ont fait également en sorte que le transport des étudiantes soit financé par leurs départements. Je remercie les nombreux collègues qui ont subventionné ce stage sur des projets qu'ils gèrent. Dans la prochaine Gazette nous donnerons plus de détails.

Outre les aspects financiers, les collègues organisatrices et organisateurs ont besoin d'aide pour bâtir ces stages. Si l'on s'accorde avec le constat du déficit de mixité sociale et de genre dans les carrières mathématiques alors une façon d'agir est de les accompagner, les soutenir.

Bientôt, comme chaque année à la même époque, un appel à candidatures pour le renouvellement du tiers du conseil d'administration de la SMF sera lancé. Si vous souhaitez participer au dynamisme de la SMF, l'entretenir, alors n'hésitez pas à vous engager. Beaucoup d'autres projets sont à mener et à imaginer.

Je vous souhaite un agréable printemps.

Le 2 avril 2023

Fabien DURAND, président de la SMF



## Tout fichier est un programme... et non l'inverse

• B. MÉLÈS

La notion de programme étant, contrairement à celle de fichier, informelle, des croyances imprécises ou fausses peuvent circuler à son égard. Nous en contestons deux ici. Nous montrons d'abord, à partir d'exemples historiques, qu'il existe des programmes qui ne sont pas des fichiers. Nous soutenons ensuite, plus étonnamment, que n'importe quel fichier peut être vu comme un programme, puisque tous les critères qui caractérisent les programmes en tant que tels s'appliquent aussi bien aux fichiers. Nous en concluons plus particulièrement qu'il n'y a pas de raison technique de distinguer les couples fichier/programme et programme/interprète.

### 1. Introduction : concepts techniques et concepts informels

Le discours scientifique ne s'appuyant pas exclusivement sur des concepts techniques, il laisse certaines questions à la philosophie<sup>1</sup>.

Par concepts techniques, nous entendons ceux qui possèdent une définition précise permettant leur mobilisation exacte dans le cadre interne de la science, c'est-à-dire une attribution certaine à certains objets puis un usage dans des procédures de justification – démonstration, observation, expérimentation – et enfin dans des énoncés scientifiques ; telles sont les notions de nombre entier, de dérivée, d'électron, de mammifère, de jeu à somme nulle, etc. La définition des concepts techniques est toujours précise en ce qu'elle s'accompagne de méthodes permettant de vérifier leur application ou non à des objets.

Il en va tout autrement de certains autres concepts, plus informels, qui, à la frontière de

la science et de l'expérience commune, s'accrochent parfaitement d'usages approximatifs ; telles sont les notions de nombre, de calcul, de vivant, etc. Faute de définition exacte, ceux-ci sont généralement trop approximatifs ou trop glissants pour un usage scientifique précis. Quand l'on prétend munir ces concepts informels d'une définition rigoureuse, celle-ci reste ouverte à la discussion.

Il arrive certes que des scientifiques proposent une définition rigoureuse d'un concept jusqu'ici informel ; mais savoir si la définition proposée traduit correctement et complètement l'intuition commune reste une question ouverte, qui ne relève pas de la science mais de la philosophie. Ainsi, lorsque Gentzen appelle « déduction naturelle » son système formel de déduction logique, lorsque Turing prétend que ses machines permettent de calculer tout et seulement ce que l'on appelle ordinairement « calculable », tous deux élaborent des concepts techniques en s'appuyant sur l'analyse préalable de concepts informels<sup>2</sup> : une analyse non scientifique,

1. Ceci n'exclut naturellement pas que la philosophie ait aussi son mot à dire sur les concepts techniques.

2. Gerhard Gentzen, « Untersuchungen über das logische Schließen. I », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, n° 2, 1935, p. 176-210 ; Gerhard Gentzen, « Untersuchungen über das logische Schließen. II », *Mathematische Zeitschrift*, vol. 39, n° 3, 1935, p. 405-431. Alan Mathison Turing, « On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem », *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 42, n° 2, 1936, p. 230-265.

mais philosophique. Sur cette base peuvent ensuite se développer des théories scientifiques de la démonstration et de la calculabilité; on n'en pourra pas moins continuer à débattre philosophiquement sur le point de départ, à savoir la définition de ce que c'est que déduire naturellement et de ce que c'est que calculer.

L'étude des concepts scientifiques informels dans leur lien avec les concepts techniques appelle ainsi des méthodes proprement philosophiques telles que l'analyse conceptuelle et la discussion dialectique, si l'on entend par ce dernier terme l'examen contradictoire visant à connaître des choses par-delà leur première apparence. C'est ainsi, par exemple, que, dans un article célèbre, James H. Moor avait montré que trois oppositions conceptuelles courantes dans le discours informatique – logiciel et matériel, numérique et analogique, modèle et théorie – ne correspondaient en réalité pas tant à des entités distinctes qu'à des façons différentes de considérer les mêmes choses<sup>3</sup>. Les concepts informels du discours scientifique appellent des méthodes philosophiques.

C'est à cette frontière de la science et de la philosophie que nous étudierons la relation entre deux notions informatiques : celles de fichier et de programme.

## 2. Ce que l'on croit savoir sur les programmes et les fichiers

Définissons d'abord les notions de fichier et de programme avant de résumer ce que l'on croit ordinairement savoir à leur sujet.

La notion de fichier informatique est une notion technique, susceptible d'une définition précise. Un fichier est une suite de chiffres binaires (bits)

dénotée dans un système informatique par un identifiant – typiquement un nom ou un numéro<sup>4</sup>. On parlera ainsi de fichiers en texte brut (portant souvent par convention l'extension .txt...), de documents de traitement de texte (.odt, .doc...), de document tableur (.odc, .xls...), de fichiers audio (.ogg, .mp3...) et vidéo (.mpg...), mais aussi de répertoires et même de « fichiers spéciaux » qui sous les systèmes de la famille Unix dénotent l'imprimante, l'écran, le scanner, la température du processeur, etc.<sup>5</sup> Cette définition précise rend techniquement facile de déterminer si un objet donné est un fichier ou non.

Le concept de programme, quelque fondamental qu'il puisse paraître en informatique, est quant à lui une notion informelle. On pourra évidemment en proposer des interprétations formelles, typiquement dépendantes d'un modèle de calcul arbitrairement choisi : un programme sera tantôt défini comme un terme du  $\lambda$ -calcul, tantôt comme l'ensemble des transitions d'une machine de Turing à partir d'un état initial, etc. Mais ces notions ne caractérisent pas la notion de programme : elles attestent simplement que l'on peut voir les  $\lambda$ -termes ou les machines de Turing comme des programmes, et que tout programme pourrait dans l'absolu être vu comme l'analogue d'un  $\lambda$ -terme ou d'une machine de Turing... à *traduction près*. Mais lorsque l'on appelle « programme » un code source en langage C, on ne pense pas aux  $\lambda$ -termes et l'on est convaincu d'être en présence immédiate d'un programme.

Qu'entend-on alors ordinairement par programme? Nous pensons nous tenir relativement près du sens commun en définissant le programme comme *disposition de signes supposée déterminer le comportement d'une machine*<sup>6</sup>.

3. James H. Moor, « Three Myths of Computer Science », *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 29, n° 3 (Sep., 1978), p. 213-222.

4. Les concepteurs de Multics définissent le fichier de la façon suivante : « A file is simply an ordered sequence of elements, where an element could be a machine word, a character, or a bit, depending upon the implementation » (Daley R. C. et P. G. Neumann, « A General-purpose File System for Secondary Storage », in *Proceedings of the November 30-December 1, 1965, Fall Joint Computer Conference, Part I*, New York, New York, USA, ACM, 1965, p. 213-229, en ligne : <http://doi.acm.org/10.1145/1463891.1463915>; consulté le 19 mai 2018). Andrew Tanenbaum propose la définition suivante : « Un fichier Unix est une suite éventuellement vide d'octets contenant une information quelconque » (Tanenbaum Andrew, *Systèmes d'exploitation*, Paris, France, Pearson Education, 2003, p. 773). Mais la définition on ne peut plus technique de la notion de fichier est tout simplement celle que contient le code source, dans la définition de la structure `inode` du code source d'Unix (Lions John, *Lion's commentary on Unix 6th edition with source code : Unix operating system source code level six and commentary on the Unix operating system*, Poway (Californie), Annabook, 1996, lignes 5659-5675).

5. Dennis M. Ritchie et Ken Thompson, « The UNIX time-sharing system », *Communications of the ACM*, vol. 17, n° 7, 1<sup>er</sup> juillet 1974, p. 365-375, *ici p. 367*. Voir également Daudel Olivier, */proc et /sys*, Paris, France, O'Reilly, 2006. Pour une analyse philosophique de la notion de fichier dans UNIX, cf. Baptiste Mèlès, « Unix selon l'ordre des raisons : la philosophie de la pratique informatique », *Philosophia Scientiae*, n°17-3, octobre 2013, p. 181-198.

6. Une intuition similaire est par exemple exprimée dans Clarisse Herrenschildt, *Les Trois écritures : langue, nombre, code*, Paris, France Gallimard, 2007, p. 404 : « Qu'est-ce qu'un programme? Un programme est un texte où sont consignées les instructions données à un ordinateur, un texte écrit dans un langage. »

Comme toute définition réelle, la définition mérite quelques explications. Nous disons d'abord que le programme est une « disposition de signes » en général, car il peut s'agir d'un schéma, d'un diagramme ou d'une carte perforée aussi bien que d'un texte composé de lettres et d'autres signes typographiques. La « machine » peut ensuite elle-même être située dans un environnement particulier constitué d'acteurs humains ainsi que d'objets physiques et d'autres machines. Le programme n'est enfin que « supposé » déterminer le comportement attendu car, comme l'indique l'étymologie, le programme est *écrit avant* son exécution et il peut également être bogué sans pour autant cesser d'être un programme. Nous n'utilisons pas la notion de langage de programmation car il serait parfaitement tautologique de définir le programme comme ce qui est écrit dans un langage d'écriture de programmes<sup>7</sup>. Notre objectif présent serait atteint si la définition n'était pas jugée trop contraire au sens commun.

Voici maintenant ce que l'on croit aller de soi sur les programmes. Ils seraient des textes écrits dans un langage « de programmation » ; ils consisteraient de façon intrinsèque en une suite d'instructions, ce qui permet leur exécution ; en tant que composés d'« instructions », ils seraient des objets intrinsèquement actifs. En tout ceci, ils s'opposeraient aux *données*, qui sont des objets inertes, qui ne contiennent pas d'instructions et qui ne jouent de rôle dans un processus actif qu'une fois passés en argument à un programme ; elles seraient donc intrinsèquement passives. Un cas particulier de données est celui des *fichiers*, qui peuvent être passés comme entrée à un programme, mais qui dans la plupart des cas, ne sont pas des programmes, s'ils ne contiennent pas des instructions permettant leur exécution par un système. Deux thèses seront donc assez largement partagées :

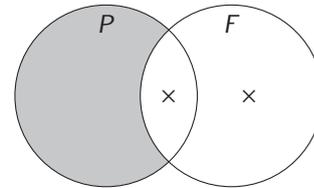
1. si l'on en juge par les programmes qui peuplent nos disques durs, *tous les programmes sont des fichiers* ;

7. C'est ce que fait l'ISO, qui définit le programme comme une « syntactic unit that conforms to the rules of a particular programming language and that is composed of declarations and statements or instructions needed to solve a certain function, task, or problem »... avant de définir le « langage de programmation » comme un « artificial language for expressing programs » (nous soulignons). Ajoutons que cette définition omet la notion de machine, qui nous semble essentielle (International Organization for Standardization, 2015 : Information technology - Vocabulary. (ISO/IEC Standard 2382 : 2015 (en)), <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso-iec:2382:ed-1:v1:en>, consulté le 15 juin 2022).

8. Il est, de manière générale, difficile d'attester par une référence des thèses de sens commun : les thèses réputées aller de soi n'ont pour ainsi dire pas d'auteur. Un exemple entre mille, nullement plus représentatif qu'un autre, est, dans un texte signé sous le pseudonyme StackLima, intitulé « Différence entre programme et fichier » et daté du 5 juillet 2022 (en ligne : <https://stacklima.com/difference-entre-programme-et-fichier/>; consulté le 28 octobre 2022), la définition suivante du programme : « Les programmes, comme leur nom l'indique, sont de simples *fichiers* exécutables contenant un ensemble ou une collection d'instructions utilisées par l'ordinateur pour exécuter ou effectuer des tâches particulières ainsi que pour produire les résultats souhaités » (nous soulignons). Précisons bien qu'il ne s'agit pas d'un texte de recherche, ce qui explique et même pardonne ses nombreuses imprécisions.

2. quelques exemples aussi triviaux que les fichiers en texte brut ou les fichiers audio attestent que la réciproque est fautive ; en d'autres termes, *tous les fichiers ne sont pas des programmes*.

FIGURE 1 – La relation entre fichier et programme selon le sens commun



Nous montrerons que ces deux thèses de sens commun ne résistent pas à l'examen technique, ce qui nous mènera aux deux thèses suivantes :

1. tous les programmes ne sont pas des fichiers ;
2. tous les fichiers sont des programmes.

### 3. Tous les programmes ne sont pas des fichiers

Dans notre culture et notre pratique informatiques actuelles, l'on pourrait être tenté de soutenir la première thèse du sens commun, selon laquelle *tout programme est un fichier*. À l'appui de cette thèse, on peut invoquer l'*argument intuitif* suivant : il suffit de regarder dans nos disques durs et nous verrons que tous les programmes que nous pourrions y trouver sont des fichiers, qu'il s'agisse de fichiers binaires ou de scripts, c'est-à-dire de fichiers de programme en mode texte destinés à une interprétation mécanique<sup>8</sup>.

Cet argument ne suffit pourtant pas à démontrer cette thèse, et ce pour deux raisons.

1. L'argument repose sur une généralisation abusive. Il s'appuie en effet sur l'expérience, qui permet toujours de forger des thèses existentielles mais jamais – sauf dans le cas fini – des thèses universelles. Comme on ne peut conclure de l'existential affirmatif à l'universel affirmatif, nous pouvons tirer de l'expérience l'énoncé « certains programmes sont des fichiers », mais non « tous les programmes sont des fichiers ».
2. L'argument est circulaire. L'expérience en question suppose implicitement le contexte des programmes que l'on trouve dans nos ordinateurs modernes, où les programmes se trouvent être enregistrés dans une mémoire structurée par un système... de fichiers<sup>9</sup>. Rendons explicite ce contexte dans notre formule et l'on obtiendra la tautologie suivante : « Tout fichier de programme est un fichier ».

Allons plus loin en réfutant non seulement l'argument intuitif, mais la première thèse du sens commun elle-même : l'histoire atteste l'existence de programmes qui n'ont pas été des fichiers. Les systèmes de fichiers ne sont en effet apparus que dans les années 1960 avec les systèmes d'exploitation CTSS et Multics<sup>10</sup>, alors qu'il existait déjà des programmes : une carte perforée de métier Jacquard, d'orgue de Barbarie ou plus récemment de machine à traitement par lots est un programme mais n'est pas un fichier – pas même rétrospectivement, puisqu'elle ne s'inscrit pas dans un système de fichiers. Les programmes que Turing fournit à sa machine universelle sous forme de « description standard » – par exemple le programme

;DADDCRDAA;DAADDRDAAA;DAAADDCRDAAAA;DAAAADDRDA;  
qui affiche une alternance de 0 et de 1 – ne sont pas des fichiers non plus. Nous pouvons donc, contre la première thèse du sens commun, affirmer que *tous les programmes ne sont pas des fichiers*.

9. Un système de fichiers (par exemple FAT32, NTFS, ext4, etc.) est un dispositif de structuration d'une mémoire informatique en fichiers, c'est-à-dire en séquences de signes. Ce dispositif spécifie le mode de segmentation de la mémoire, les structures de données permettant le référencement des fichiers, une topologie d'ensemble (typiquement une arborescence), des fonctions de manipulation de fichiers (création, suppression, modification, datation...) ainsi que diverses autres fonctionnalités (journalisation, gestion des droits, chiffrement, adaptation aux réseaux, etc.).

10. Daley R. C. et P. G. Neumann, « A General-purpose File System for Secondary Storage », in *Proceedings of the November 30-December 1, 1965, Fall Joint Computer Conference, Part I*, New York, New York, USA, ACM, 1965, p. 213-229, en ligne : <http://doi.acm.org/10.1145/1463891.1463915>; consulté le 19 mai 2018.

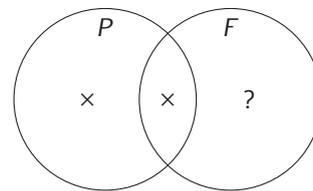
11. Le texte cité plus haut, « Différence entre programme et fichier », distingue sur deux colonnes les caractéristiques supposées distinctes des programmes et des fichiers. Sur l'une des lignes, on lit les deux phrases suivantes, implicitement présentées comme une opposition : « Les types de programmes comprennent le programme d'application, le programme système tel que les traitements de texte, le système d'exploitation, le système de base de données, etc. / Les types de fichiers informatiques peuvent être JPEG, PNG, GIF, PDF, MP4, etc. ». Par cette référence, nous entendons simplement illustrer une opposition informelle entre programmes et fichiers qui nous semble être assez répandue.

12. Il ne s'agit donc pas de nier une différence de nature en arguant d'une différence de degré : nous aurions tout aussi bien pu passer directement au dernier cas, qui est le plus général, mais nous avons choisi à titre pédagogique une démarche plus progressive.

## 4. Tous les fichiers sont des programmes

Venons-en maintenant à la seconde thèse du sens commun, selon laquelle *tous les fichiers ne sont pas des programmes*, autrement dit *certaines fichiers ne sont pas des programmes*. Comme la précédente, cette thèse peut s'appuyer sur un argument intuitif : les vidéos, fichiers texte, etc. sont indiscutablement des fichiers mais ne sont pas des programmes<sup>11</sup>. Cette fois, l'argument empirique est à l'abri de toute généralisation abusive, puisqu'il suffit d'un seul exemple pour démontrer une thèse existentielle.

FIGURE 2 – Tous les programmes ne sont pas des fichiers



Nous allons pourtant montrer, contre cet argument intuitif, que tout fichier est un programme. Nous procéderons à cette fin par analyse de types de fichiers successifs, du cas le plus évident au plus général : nous étudierons d'abord le cas trivial des *fichiers de programme* afin de mettre au jour selon quels critères nous jugeons qu'un fichier est un programme ; puis nous étudierons les *fichiers de données* pour montrer que ces critères s'appliquent tout aussi bien à eux. Autrement dit, si les premiers sont des programmes, les seconds devraient l'être aussi<sup>12</sup>.

## 4.1 – Pourquoi les fichiers de programme sont-ils des programmes ?

Pourquoi perdre son temps à démontrer une thèse aussi triviale que *les fichiers de programme sont des programmes* ? Parce que ce qui nous intéressera ici ne sera pas simplement de mettre au jour *que* cette thèse est vraie, mais bien plutôt *ce qui fait que* cette thèse est vraie : nous verrons plus loin que ces critères, une fois admis, s'appliquent en réalité bien au-delà de ces cas évidents.

Nous examinerons successivement trois types de fichiers de programme, du plus simple au moins évident : a) binaires, b) à compiler, c) à interpréter.

### Parce qu'ils sont exécutables par la machine

Le cas le plus évident de programme est le fichier de programme binaire.

Un fichier de programme binaire est une suite d'instructions en langage machine, c'est-à-dire directement interprétable et exécutable par la machine sans intermédiaire d'aucune sorte. Il est composé de suites de 0 et de 1 et n'est généralement pas affichable sous forme de texte : si l'on essaie de l'afficher, on obtiendra généralement une succession sans queue ni tête de symboles étranges – symboles graphiques, émoticônes, signes de ponctuation, caractères de tous alphabets et même signes non visualisables puisque sans équivalent dans les codages ASCII ou Unicode.

De toute évidence, tout fichier de programme binaire satisfait trivialement à ce qui nous semble être la définition du sens commun : « disposition de signes supposée déterminer le comportement d'une machine ». La machine exécute en effet directement ce programme, qui est écrit dans le langage même de son processeur.

On en tire une première conclusion : tout ce qui est exécutable directement par la machine est un programme.

### Parce qu'ils sont traductibles en exécutables

Tout programme n'est pourtant pas exécutable directement par la machine. En quoi s'agit-il néanmoins de programmes ?

Analysons le cas des fichiers de programme à compiler. Un fichier de programme binaire est souvent produit à partir d'un fichier texte écrit

dans un langage dit « langage de programmation » tel que C ou Java. Pour reprendre un exemple classique, voici un court exemple classique de fichier de programme à compiler écrit en C :

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    printf("Hello world.\n");
    return 0;
}
```

Les fichiers de programme à compiler sont-ils des programmes au même titre que les fichiers de programme binaires ? L'intuition commune ne le met pas en doute : il n'est pas rare que l'on dise « mon programme » en désignant ce qui n'est en réalité que le *code source* d'un programme binaire. Le code source satisfait en effet à la définition du sens commun : il s'agit bien d'une « disposition de signes supposée déterminer le comportement d'une machine », la seule différence avec les fichiers de programmes binaires étant que les fichiers de programme à compiler ne modifient pas directement le comportement de la machine, mais seulement après une étape de traduction, appelée compilation.

On en retient la thèse suivante : un fichier peut être un programme *même s'il n'est pas directement exécutable et que son exécution suppose une étape extrinsèque préalable*.

Cette concession est d'importance, car elle montre qu'un programme n'est pas toujours un objet *intrinsèquement* actif. Un programme compilable n'est qu'un fichier de texte qui pour devenir actif doit être fourni à un autre programme. La conception commune exposée plus haut a donc tort d'opposer de façon intrinsèque programmes et données : certaines données ne s'avèrent des programmes que pourvu qu'il existe un traducteur idoine. Au moins dans certains cas, c'est ainsi un fait extrinsèque au fichier de programme lui-même – l'existence du compilateur – qui fait de lui un programme. *L'opposition entre programmes et données n'est donc pas intrinsèque*.

On objectera peut-être qu'*après compilation*, le fichier est transformé en un programme binaire et qu'il devient alors *directement* exécutable par la machine. Le fichier compilable est donc « indirectement directement exécutable ».

## Parce qu'ils sont interprétables comme des exécutoires

Les fichiers de programmes ne se résument pourtant pas aux binaires et aux compilables : on y range tout aussi communément les fichiers interprétables.

Un fichier de programme interprétable est un programme destiné à être exécuté au fur et à mesure de sa lecture par un programme spécifique. Les scripts shell sont interprétés par un shell, les fichiers batch par le MS-DOS, les scripts Perl, Python etc. par les interprètes respectifs de ces langages, etc. Voici un exemple élémentaire de programme shell :

```
#!/bin/zsh

for neveu in Riri Fifi Loulou
do
    echo "Bonjour $neveu !"
done
```

Les fichiers de programme à interpréter sont-ils des programmes au même titre que les fichiers de programme binaires ou à compiler ? Contrairement aux précédents, ils ne modifient pas directement le comportement de la machine, fût-ce après une étape intermédiaire : ils modifient le comportement d'un programme intermédiaire en cours d'exécution, à savoir l'interprète. Mais celui-ci étant lui-même en cours d'exécution, toute modification de son comportement modifie le comportement de la machine. Les fichiers de programme à interpréter, que l'intuition commune appelle programmes, respectent donc toujours notre définition du programme comme « disposition de signes supposée déterminer le comportement d'une machine ».

On en retient la thèse suivante : un fichier peut être un programme *même si pour modifier le comportement de la machine il nécessite l'exécution en cours d'un programme intermédiaire*.

Les fichiers de cette classe ne sont des programmes que de façon totalement indirecte, puisqu'à aucun moment ils ne sont transformés en fichiers directement exécutoires. Leur statut de programme leur est – et reste – purement extrinsèque, puisqu'il dépend de l'existence et de l'exécution du programme spécifique qu'est l'interprète.

## Conclusion : le coût élevé d'une thèse triviale

L'analyse de ces trois cas triviaux – programmes binaires, compilables et interprétables – nous mène à la conclusion sans surprise selon laquelle *les fichiers de programme sont des programmes*. Mais cette affirmation ne va pas sans concession, puisque l'on doit admettre qu'un programme peut ne pas être directement exécutoire par la machine – comme l'attestent les compilables – et qu'il peut même ne jamais être transformé en un fichier exécutoire par la machine – comme l'attestent les interprétables. Admettre cette thèse apparemment triviale ne va donc pas sans un certain coût.

Nous allons montrer par la suite que cette thèse d'une apparente banalité confondante ouvre la boîte de Pandore : tout fichier peut être vu comme un programme.

### 4.2 – Pourquoi les fichiers de données ne seraient-ils pas des programmes ?

S'il est aisé d'admettre que les fichiers de programmes sont des programmes, cette thèse semble dans le cas des fichiers de données non seulement moins évidente, mais tout simplement fautive. Nous allons pourtant montrer que tout ce qui fait que les fichiers de programme sont des programmes s'applique aussi bien aux fichiers de données.

Nous procéderons encore en trois temps, du plus simple au moins évident, en examinant successivement a) les fichiers de document à compiler, b) les fichiers de données structurées et c) les fichiers quelconques.

Nous montrerons d'abord que toute compilation ne produit pas un exécutoire ; puis que toute donnée structurée peut aussi être vue comme une instruction ; enfin, que toute donnée peut être vue comme structurée, autrement dit comme une instruction.

### Toute compilation ne produit pas un exécutoire

Un fichier de document à compiler est un fichier écrit dans un langage permettant sa traduction automatique en un fichier d'un format donné, qui n'est généralement pas reconnu intuitivement comme un programme. Tel est le cas, par exemple, d'un fichier  $\text{\TeX}$  – non  $\text{\LaTeX}$  – comme celui-ci, à partir duquel on

pourra obtenir un fichier visualisable ou imprimable aux formats DVI, PS ou PDF :

```
Hello, {\it world}!
\bye
```

Le fichier PDF qui en résulte ne sera généralement pas considéré comme un programme. Qu'en est-il du fichier T<sub>E</sub>X dont il provient ?

Un document à compiler comme celui-ci contient essentiellement du texte, ici « Hello » et « world », mais également des instructions, comme la commande d'italiques `\it`, qui se traduira graphiquement par des italiques dans le document compilé, ou la commande `\bye`, qui indique de finaliser le document. On voit donc immédiatement que les documents à compiler contiennent au moins en partie des instructions – au même titre que les fichiers de programmes.

Peut-être alors dira-t-on que ces fichiers « mélangent » des instructions et de simples données ? Ce sera se méprendre. Les instructions signalées en T<sub>E</sub>X par une barre inversée ne sont que la partie émergée de l'iceberg : les documents à compiler ne contiennent *que* des instructions. Comme le soulignait Donald Knuth dans le manuel du langage T<sub>E</sub>X, la moindre lettre est déjà une commande<sup>13</sup>. Ayant en effet expliqué que l'on peut remplacer dans un document T<sub>E</sub>X toute occurrence de la lettre *b* par la commande `\char98`, Knuth dévoile qu'il s'agit là en réalité du mécanisme interne de T<sub>E</sub>X : il interprète la lettre *b* comme un alias de cette commande. T<sub>E</sub>X ne lit donc un document que comme une suite d'instructions. Les mots « Hello » et « world » sont donc eux aussi des suites d'instructions. T<sub>E</sub>X est d'ailleurs un langage particulièrement puissant puisqu'il est complet au sens de Turing : tout ce qui peut être écrit dans un langage de programmation quelconque peut être écrit en T<sub>E</sub>X – ce qui ne veut pas dire que ce serait une bonne idée.

Les documents à compiler sont-ils donc des programmes ? En tant que suite d'instructions, ils déterminent la machine, via la compilation, à produire un certain fichier. Ce qui nous conduit à admettre qu'un document à compiler est un programme *même s'il n'est pas écrit dans un langage réputé « de programmation » et que son résultat n'est généralement pas considéré comme un programme.*

13. Donald Knuth, *The TeXbook*, Addison-Wesley, 1984, 1996, p. 43.

## Toute donnée structurée est une instruction

Venons-en au cas des fichiers de document à interpréter. Nous entendons par là les documents structurés, c'est-à-dire les fichiers écrits dans un langage de présentation de documents tel que HTML, roff, Markdown ou S<sub>PI</sub>P. Voici un exemple minimal de fichier HTML :

```
<html>
  <head>
    <title>Page HTML</title>
  </head>

  <body>
    <p>Ceci est une page HTML.</p>
  </body>
</html>
```

Un document structuré contient non seulement du texte, mais également des instructions telles que `<body>` et `<strong>`. Ces commandes sont interprétées par le navigateur, de la même façon que  $\LaTeX$  compile les instructions `\it` et que le shell interprète la commande `echo`. Même les parties « purement textuelles » comme les mots `Ceci est une page HTML` sont des instructions pour le programme chargé de l'affichage. De ce fait, si les *programmes interprétés* (par exemple les scripts shell) et les *documents compilés* (par exemple les fichiers T<sub>E</sub>X) sont des programmes, alors les *documents interprétés* sont des programmes à double titre. Un fichier HTML est un programme pour navigateurs, un fichier PS est un programme pour imprimantes, et même des fichiers PDF, vidéo etc. sont des programmes pour visionneuses de diverses sortes.

Cette thèse mérite d'être soulignée, car c'est probablement ici que le sens commun opposera le plus de résistance. Selon l'intuition ordinaire, il existe des données, des programmes et des interprètes, les premières ne sont généralement pas les deuxièmes et les deuxièmes ne sont généralement pas les troisièmes. Ce que nous montre au contraire le cas des fichiers structurés – qui par définition obéissent toujours à une syntaxe nullement moins rigoureuse que celle des fichiers de programmes – est qu'un *fichier structuré fourni à un programme ne se distingue pas techniquement d'un programme fourni à un interprète.*

Nous pouvons donc conclure que non seulement les textes écrits dans un langage dit de programmation sont des programmes, mais que cela est vrai de tout texte écrit dans une syntaxe donnée,

fût-elle celle d'un langage « de structuration de documents » plutôt que « de programmation ».

### Toute donnée est une instruction

Abordons maintenant le cas des documents en texte brut, c'est-à-dire des fichiers codant une simple suite de caractères, comme le ferait par exemple un fichier `aeneides.txt` :

```
Arma virumque canō, Trōiae quī prīmus
  ab ōrīs
Ītaliā, fātō profugus, Lāvīniaque vēnit
lītora, multum ille et terrīs iactātus et
  altō
vī superum saevae memorem lūnōnis ob
  īram;
multa quoque et bellō passus, dum
  conderet urbem,
inferretque deōs Latiō, genus unde
  Latīnum,
Albānīque patrēs, atque altae moenia
  Rōmae.
```

Tout document en texte brut, aussitôt ouvert dans un programme quelconque, fût-ce un simple éditeur de texte, est un programme pour cet interprète. Ce sont des données structurées – même s'il s'agit du degré zéro de la structure, réduit par exemple à son encodage – et à ce titre des instructions à part entière. Par exemple, le fichier `aeneides.txt` est pour un éditeur de texte, ou pour tout autre programme supposé le manipuler (affichage avec la commande `cat`, recherche avec `grep`, etc.), la suite d'instructions suivante : affiche « A », affiche « r », affiche « m »... exactement comme un fichier HTML sans italiques est un programme interprété par le navigateur. Tout fichier en texte brut, pour peu qu'il soit ouvrable par un programme quelconque, est donc un programme interprété, donc un programme à part entière.

Il est maintenant facile de passer au cas général des fichiers quelconques : n'importe quelle suite de bits, qu'elle soit lisible en mode texte ou non, se comporte comme un programme pour peu qu'elle soit fournie comme entrée à un programme donné, qui pour elle se comportera comme un interprète. Tout fichier respecte donc la définition intuitive du programme comme « disposition de signes supposée déterminer le comportement d'une machine ». Il suf-

fit qu'il existe au moins un mécanisme d'utilisation – qu'il s'agisse d'une machine ou d'un programme en cours d'exécution adaptant son comportement au contenu de ce fichier. Avant ouverture, un fichier n'est certes un programme qu'en puissance ; mais c'est aussi le cas des interprétables. Pour raisonner à la limite, seul un fichier qui ne serait destiné à être ouvert d'aucune façon pourrait ne pas être un programme. Nous oserons poser – toutefois sans démonstration – qu'il n'en existe pas.

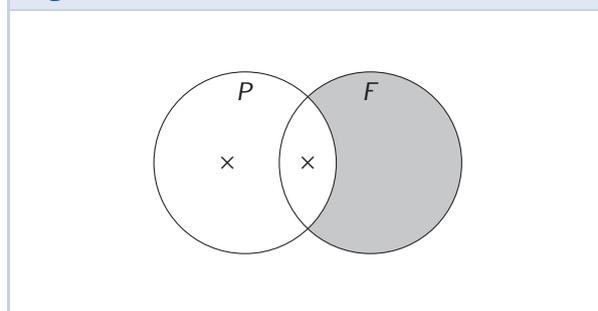
## 5. Conclusion : caractérisation intrinsèque des programmes

Contrairement à l'intuition commune, selon laquelle tous les programmes sont des fichiers mais certains fichiers ne sont pas des programmes, nous avons soutenu que certains programmes ne sont pas des fichiers mais que tous les fichiers peuvent indifféremment être vus comme des programmes.

Nous avons en effet montré qu'un programme n'était pas nécessairement exécutable directement par la machine, qu'il ne permettait même pas toujours de produire un fichier exécutable directement par la machine et qu'il dépendait parfois de l'exécution sous-jacente d'un autre programme. Il en résulte que tout fichier de données fourni en entrée à un programme peut être vu comme un programme fourni à un interprète, sans qu'il existe de moyen technique de distinguer les deux situations.

Le programme ne se définit donc pas de façon intrinsèque : ce qui le caractérise comme tel est un contexte d'exécution et d'utilisation, qui lui est extrinsèque<sup>14</sup>.

FIGURE 3 – La relation entre fichier et programme défendue ici



14. Cette conclusion a pour corollaire qu'un même fichier peut être plusieurs programmes à la fois. Un fichier vide, c'est-à-dire de longueur 0, est par exemple à la fois un programme pour éditeur de texte et pour des interprètes shell, Perl, Python etc. Un code source en C provoque de son côté des comportements différents de la machine selon qu'il est soumis à un compilateur – qui produira un fichier de programme binaire – ou à un éditeur de texte – qui produira un affichage de texte.

## 6. Discussion

Peut-être ces conclusions paraîtront-elles contre-intuitives. Il faudra alors probablement élaborer une définition de la notion de programme plus restrictive que la nôtre.

Une option pourrait être d'exiger qu'un programme soit écrit dans un « langage de programmation », notion qui devra être définie à son tour – évidemment sans en appeler de façon circulaire à la notion de programme – pour ne pas rouvrir la boîte de Pandore.

a) Définira-t-on un langage de programmation comme un langage complet au sens de Turing, c'est-à-dire capable d'exprimer tout algorithme calculable dans une machine de Turing? Il faudra justifier l'exclusion hétérodoxe de Coq, langage délibérément incomplet puisqu'il n'admet que le sous-

ensemble strict de la classe des fonctions qui terminent.

b) Appellera-t-on plutôt langage de programmation tout langage tolérant la récursivité? Il faudra alors assumer l'inclusion de tous les fichiers  $\text{T}\text{E}\text{X}$ , le langage  $\text{T}\text{E}\text{X}$  offrant toutes les structures de contrôle usuelles des langages de programmation. Inversement, il faudra exclure le langage Catala, élaboré par Denis Merigoux pour formaliser le Code des impôts français, qui ne possède pas de structure de récursion générale<sup>15</sup>.

Dans l'attente d'une meilleure définition, il faudra se résoudre à admettre qu'il n'existe pas de critère technique pour distinguer le couple fichier-programme du couple programme-interprète et que leur distinction dépend uniquement du contexte d'utilisation et des finalités de l'agent qui les manipule<sup>16</sup>.



**Baptiste MÈLÈS**

CNRS, université de Lorraine, archives Henri-Poincaré  
 baptiste.meles@normalesup.org  
<http://baptiste.meles.free.fr/>

Baptiste Mèlès est chargé de recherche. Son travail porte entre autres sur la philosophie mathématique et sur l'étude linguistique des codes sources.

15. Denis Merigoux, Nicolas Chataing et Jonathan Protzenko. « Catala : a programming language for the law ». *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, vol. 5 (18 août 2021), article 77, p. 1-29, ici p. 11. Que le code juridique français n'ait pas besoin de récursion infinie est indéniablement une bonne nouvelle.

16. Ce texte a été rédigé dans le contexte du programme ANR « Qu'est-ce qu'un programme? Perspectives historiques et philosophiques » (PROGRAMME, ANR JCJC, ANR-17-CE38-0003-01, 2018-2022). Il doit beaucoup aux discussions avec la porteuse du projet, Liesbeth De Mol, et Henri Stéphanou, ainsi qu'aux remarques des rapportrices ou rapporteurs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*.



# Optimisation de formes

Optimiser la forme d'un objet est une ambition universelle qui fascine depuis toujours les scientifiques, mais aussi les artistes... Cette pratique est aujourd'hui au cœur des enjeux de la recherche scientifique et industrielle. Dans cet article, on introduit quelques idées générales autour de l'optimisation de formes et on présente certains de ses développements et applications récentes.

• C. DAPOGNY

## 1. Introduction

L'optimisation de formes est une discipline multicéphale qui gravite autour de la recherche et la caractérisation des formes optimales au regard de critères géométriques ou physiques. Ses aspects théoriques empruntent des concepts et des outils au calcul des variations et au contrôle optimal, domaines qu'elle enrichit en retour de questions nouvelles. Du point de vue des applications, l'optimisation de formes est aujourd'hui une composante incontournable de la conception industrielle; elle intervient également dans la modélisation de certains phénomènes, par exemple en sciences du vivant ou en chimie, qui s'expliquent par le caractère optimal des structures en jeu.

Cet article est essentiellement consacré aux développements numériques de l'optimisation de formes. La Partie 2 esquisse quelques-unes de ses incursions historiques. On débat ensuite dans la Partie 3 de la manière de poser un problème d'optimisation de formes, qui conditionne l'existence de formes optimales, et guide en pratique le choix de la représentation de la forme optimisée. Dans la Partie 4, on présente l'une des notions les plus fréquemment utilisées de dérivée par rapport au domaine, et on donne le cadre général des algo-

rithmes s'appuyant sur celle-ci. La Partie 5 examine plus précisément deux telles stratégies numériques. On aborde enfin quelques perspectives récentes de l'optimisation de formes dans la Partie 6.

## 2. Quelques jalons historiques

L'histoire de l'optimisation de formes est indissociable de celles du calcul des variations, du contrôle optimal, et de l'optimisation en général. On se contente dans cette partie de survoler quelques apparitions historiques qui ont contribué à façonner la discipline d'aujourd'hui.

### 2.1 – Le problème de la reine Dido et l'inégalité isopérimétrique

Le mythe de la fondation de Carthage rapporte qu'à son installation sur la côte tunisienne, en 814 av. J.-C., la reine Dido vint solliciter une terre auprès du souverain Iarbas. Sarcastique, ce dernier lui accorda autant de terrain que pourrait en comprendre la peau d'un bœuf. Découpant la peau en fines lanières, l'astucieuse reine encercla une région d'aire maximale, en forme de demi-disque s'appuyant sur le bord de mer, où s'implanterait Carthage.

FIGURE 1 – Vue de Carthage en forme de demi-disque contre la côte



© image : J.-C. Golvin

En termes modernes, Dido pressentait que le disque est solution du problème isopérimétrique :

$$\max_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} \text{Vol}(\Omega) \text{ avec } \text{Per}(\Omega) \text{ donné,}$$

où le volume et le périmètre d'un domaine plan  $\Omega$  sont définis par

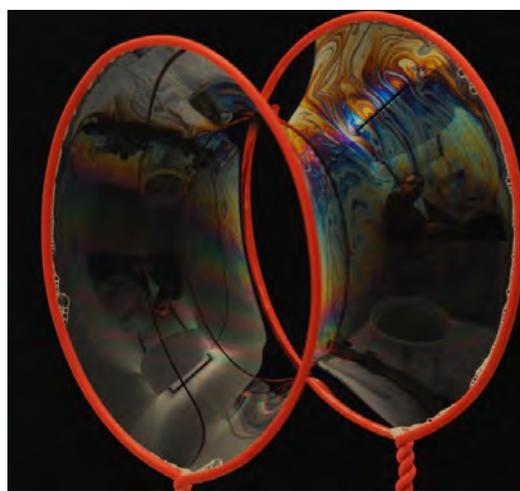
$$\text{Vol}(\Omega) := \int_{\Omega} dx \text{ et } \text{Per}(\Omega) := \int_{\partial\Omega} dl.$$

La même intuition sous-tend l'organisation circulaire des villes médiévales, dont on souhaitait minimiser le contour fortifié pour une aire urbaine donnée.

Le problème isopérimétrique et ses variantes ont inspiré de nombreux scientifiques et philosophes de l'Antiquité, parmi lesquels Euclide, Archimède, Zénonore, Pappus, ... La propriété d'optimalité du disque a fait l'objet d'élégantes tentatives de démonstration ; toutes étaient malheureusement incomplètes, car tenant pour acquise l'existence d'une forme optimale – un aspect bien souvent épineux en optimisation de formes, comme nous le verrons. Il fallut attendre le milieu du  $xix^e$  siècle pour que Karl Weierstrass donne une démonstration rigoureuse de ce résultat intuitif, nécessitant la mise au point de nouveaux concepts en lien avec le calcul des variations.

**Remarque 1.** L'étude de ces questions d'isopérimétrie présente des points communs avec celle des surfaces minimales. Ces objets mathématiques, qui s'incarnent entre autres dans les bulles de savon, sont définis comme les surfaces d'aire minimale parmi celles qui s'appuient sur un ensemble de contraintes (des régions fixées de l'espace).

FIGURE 2 – La caténoïde est une surface minimale s'appuyant sur deux cercles parallèles



© image de [15]

## 2.2 – Conception optimale en architecture

Bien que l'on bâtit des ouvrages depuis l'Antiquité, les premiers écrits témoignant d'un souci d'optimiser une construction au regard de considérations physiques sont dus au scientifique an-

glais Robert Hooke. En 1675, alors qu'il cherchait la forme d'une arche répondant aux efforts internes de compression avec un fléchissement minimal, celui-ci postula le principe

« *As hangs the flexible line, so but inverted will stand the rigid arch.* »

FIGURE 3 – (a) Robert Hooke et la chaînette; (b) l'arche de St Louis (Missouri) décrit une « chaînette à poids »; (c) maquette d'un modèle funiculaire (assemblage de chaînettes) présidant à la construction de la Sagrada Familia par Gaudi; (d) optimisation de la toiture du centre olympique de Munich.



Optimisation de formes en architecture

© Image : H. Berberich

Concrètement, en retournant la forme d'une chaîne en équilibre lorsqu'elle est suspendue à ses deux extrémités et soumise à son poids et aux forces de traction – appelée « chaînette » –, on obtient une arche en équilibre sous les effets de son poids et des efforts de compression, voir la figure 3 (a) et (b).

Les architectes s'inspirent de tels principes pour guider la silhouette générale de leurs constructions (la courbure d'un toit, l'orientation des piliers, ...); ils en déduisent également des motifs élémentaires pour optimiser leur structure fine (par exemple la forme des ouvertures dans les façades). Les techniques modernes d'optimisation de formes aident à rendre ces études plus systématiques et réalistes. En particulier, elles permettent de prendre en compte des contraintes sur la géométrie de la construction (par exemple, sur l'épaisseur de ses colonnes) ou bien sur sa performance physique (vibration, usure...).

### 2.3 – La conjecture de Rayleigh et l'optimisation spectrale

À partir du XVII<sup>e</sup> siècle, le développement du calcul différentiel et du calcul des variations a ouvert la voie à la formalisation mathématique de phénomènes physiques tels que l'électrostatique, l'acoustique, la mécanique des fluides, notamment par le biais d'équations aux Dérivées Partielles (EDP) tout d'abord très simplifiées (reposant souvent sur l'opérateur Laplacien), puis de plus en plus complexes. De concert avec ces progrès, les premiers problèmes d'optimisation d'une forme au regard de son comportement dans un tel contexte physique virent le jour. Ainsi, Newton étudia la forme d'un projectile présentant la plus faible résistance possible aux frottements de l'air. Lagrange a considéré la forme de la colonne la plus robuste. Le président des États-Unis Thomas Jefferson lui-même a étudié la forme optimale d'un soc de charrue.

Parmi ces questions, en 1894, Lord Rayleigh conjectura dans l'ouvrage [14] que parmi toutes les membranes homogènes fixées sur leur frontière, celle qui a la plus petite fréquence fondamentale de vibration (i.e. celle qui émet le son le plus grave) est le disque; en d'autres termes, le disque est l'unique solution du problème

$$\min_{\Omega} \lambda_{\Omega} \text{ avec } \text{Vol}(\Omega) \text{ donné,}$$

où  $\lambda_{\Omega}$  désigne la première valeur propre du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet, i.e. la

plus petite valeur (positive) telle que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega} = \lambda_{\Omega} u_{\Omega} & \text{dans } \Omega, \\ u_{\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

a une solution  $u_{\Omega}$  distincte de la solution triviale 0.

Cette conjecture ne fut démontrée que 30 ans plus tard, par Faber et Krahn, président au développement de l'optimisation spectrale.

Notons que les outils mis au point pour traiter ces considérations sont rassemblés dans l'ouvrage de référence [13] de Pólya et Szegő.

### 2.4 – L'optimisation de formes en ingénierie : mécanique des structures et aérodynamique externe

Les premiers développements de l'optimisation de formes en ingénierie mécanique remontent à Maxwell en 1869, dont les travaux furent repris par Mitchell en 1904. Tous deux s'intéressaient à l'optimisation de treillis, i.e. de réseaux de barres. Ils cherchaient notamment à identifier des conditions suffisantes pour que ces structures soient de masse minimale pour une amplitude de contrainte donnée dans chaque barre.

FIGURE 4 – Une structure en treillis : le pylône électrique



© Image tirée de [7]

Les études menées sur ces sujets sont restées essentiellement théoriques jusqu'au début des années 1960. L'essor conjoint des algorithmes d'optimisation, de simulation des équations de la physique et de la mécanique (tels que la méthode des éléments finis), et des moyens de calcul nécessaires à leur mise en œuvre ont alors marqué un tournant dans la conception de méthodes automatiques pour l'optimisation de structures. Ces progrès ont aussi

profité à d'autres domaines, tels que celui de l'aéronautique externe. Ils ont en particulier permis de traiter efficacement la question de l'optimisation du profil des ailes d'avion, maximisant la portance de l'appareil (la force qui le maintient en l'air) tout en diminuant sa traînée (la résistance de l'air).

De nos jours, la hausse perpétuelle du coût des matières premières incite les ingénieurs à optimiser la forme des pièces mécaniques dès les premières étapes de leur conception ; plusieurs logiciels industriels dédiés à cet objectif ont vu le jour. La suite de cet article survole quelques considérations théoriques et pratiques présidant à ces développements modernes.

### 3. Formulation des problèmes d'optimisation de formes

Un problème d'optimisation de formes consiste à minimiser (sans contrainte, pour simplifier) une fonction objectif  $J(\Omega)$  par rapport à la forme  $\Omega$  :

$$\min_{\Omega} J(\Omega). \quad (\mathcal{P})$$

Dans cette présentation, la forme  $\Omega$  est comprise comme un domaine de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$  ou  $3$  en pratique) ; nous verrons dans cette section que ce choix de modélisation intuitif n'est pas sans inconvénient.

Dans les applications,  $J(\Omega)$  dépend souvent de  $\Omega$  via un « état »  $u_{\Omega}$ . Comme dans l'exemple de la Section 2.3, celui-ci est solution d'une EDP posée sur  $\Omega$  qui modélise la physique de la situation considérée.

Par exemple, dans le contexte de l'optimisation structurale,  $\Omega$  représente une pièce mécanique, attachée sur une partie  $\Gamma_D$  de sa frontière  $\partial\Omega$ , et soumise à des efforts  $g : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  appliqués sur une autre région  $\Gamma_N \subset \partial\Omega$ . Le comportement de  $\Omega$  dans cette situation est caractérisé par son déplacement  $u_{\Omega} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  : chaque point  $x \in \Omega$  bouge vers la position  $x + u_{\Omega}(x)$ . Ce dernier est la solution des équations de l'élasticité linéaire :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u_{\Omega})) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_{\Omega} = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ Ae(u_{\Omega})n = g & \text{sur } \Gamma_N, \\ Ae(u_{\Omega})n = 0 & \text{sur } \Gamma := \partial\Omega \setminus (\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}). \end{cases} \quad (\text{ELAS})$$

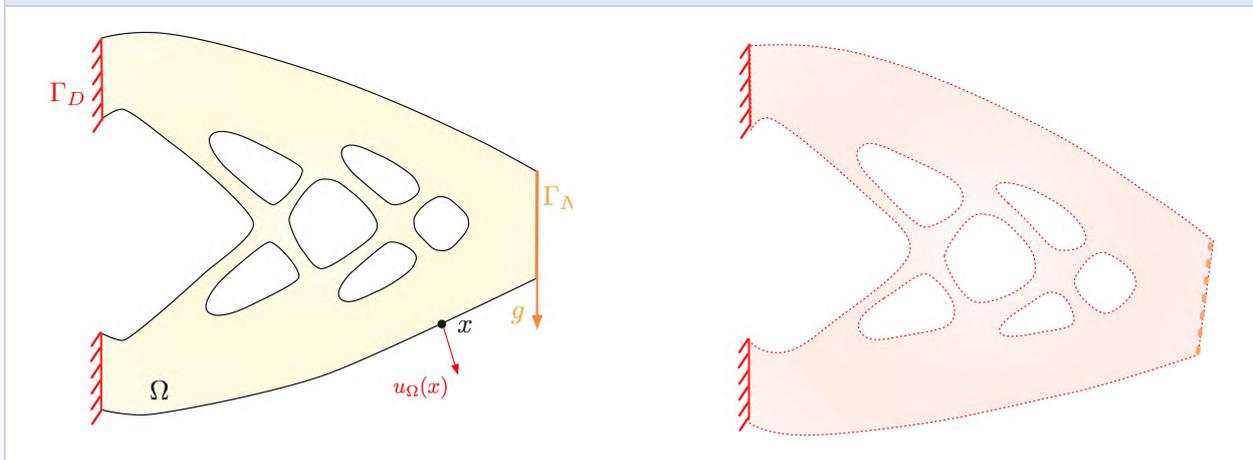
Ici,  $e(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  est le tenseur des déformations, relié au tenseur des contraintes  $\sigma(u) = Ae(u)$  par la loi de Hooke  $A$ , qui encode les propriétés mécaniques du matériau. Mathématiquement,  $e(u)$  et  $\sigma(u)$  sont des applications sur  $\Omega$  à valeurs dans l'espace des matrices symétriques de taille  $d$ . Le champ de vecteurs  $n$  désigne la normale unitaire à  $\partial\Omega$ , pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ .

On peut alors souhaiter minimiser la compliance (ou souplesse) de  $\Omega$  :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} Ae(u_{\Omega}) : e(u_{\Omega}) \, dx,$$

où la notation  $M : N = \sum_{i,j=1,\dots,d} M_{ij}N_{ij}$  désigne le produit scalaire de Frobenius de deux matrices carrées  $M$  et  $N$  de taille  $d$ .

FIGURE 5 – Une structure élastique  $\Omega$  (à gauche) et sa configuration déformée sous l'effet du déplacement  $u_{\Omega}$  (à droite)



On peut également s'intéresser à l'écart entre  $u_\Omega$  et un déplacement cible  $u_T$ , c'est-à-dire :

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_\Omega - u_T|^2 dx.$$

Un autre contexte physique d'intérêt est celui de la mécanique des fluides : si  $\Omega$  représente maintenant une conduite traversée par un fluide, la vitesse  $u_\Omega$  de celui-ci est solution des équations de Stokes ou de Navier-Stokes dans  $\Omega$ . Le critère à optimiser  $J(\Omega)$  peut alors porter sur la perte d'énergie dans  $\Omega$  par le travail des efforts de viscosité.

### 3.1 – (Non) Existence de formes optimales

Avant de s'intéresser au calcul des formes optimales pour un problème tel que  $(\mathcal{P})$ , il convient de se demander s'il en existe.

Malheureusement, la plupart des problèmes d'optimisation de formes n'admettent pas de forme optimale – du moins tant que par « forme » on entend un domaine de  $\mathbb{R}^d$ . Le responsable principal de ce défaut d'existence est le phénomène d'*homogénéisation*, illustré sur la figure 6 : les suites minimisantes de formes  $\Omega^n$  pour le critère  $J(\Omega)$ , c'est-à-dire les suites telles que

$$J(\Omega^n) \rightarrow \inf_{\Omega} J(\Omega) \text{ lorsque } n \rightarrow \infty$$

développent des motifs de plus en plus fins, au point de « tendre » vers un design homogénéisé défini par les deux objets suivants :

- une fonction de densité  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ , dont les valeurs « noir et blanc »  $h(x) = 1$  ou  $0$  caractérisent les points  $x$  autour desquels il n'y a que du matériau ou du vide, respectivement, et les « zones de gris »  $h(x) \in (0, 1)$  sont constituées d'un mélange de matériau et de vide;
- un tenseur de microstructure  $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ , qui encode l'agencement microscopique de matière et de vide autour de chaque point  $x$ .

Deux voies contraires sont possibles pour pallier ce problème de non-existence de forme optimale.

- *Restriction*. On ajoute des contraintes sur la forme optimisée  $\Omega$  (par exemple en imposant une régularité uniforme de sa frontière, un nombre maximum de trous, etc.) pour lui interdire de développer des structures arbitrairement fines.

- *Relaxation*. On enrichit l'ensemble des designs possibles en donnant un sens à  $(\mathcal{P})$  lorsque la forme  $\Omega$  est non plus seulement un domaine, mais plus généralement un design homogénéisé, donné par une fonction de densité et un tenseur de microstructure.

### 3.2 – Représentation des formes

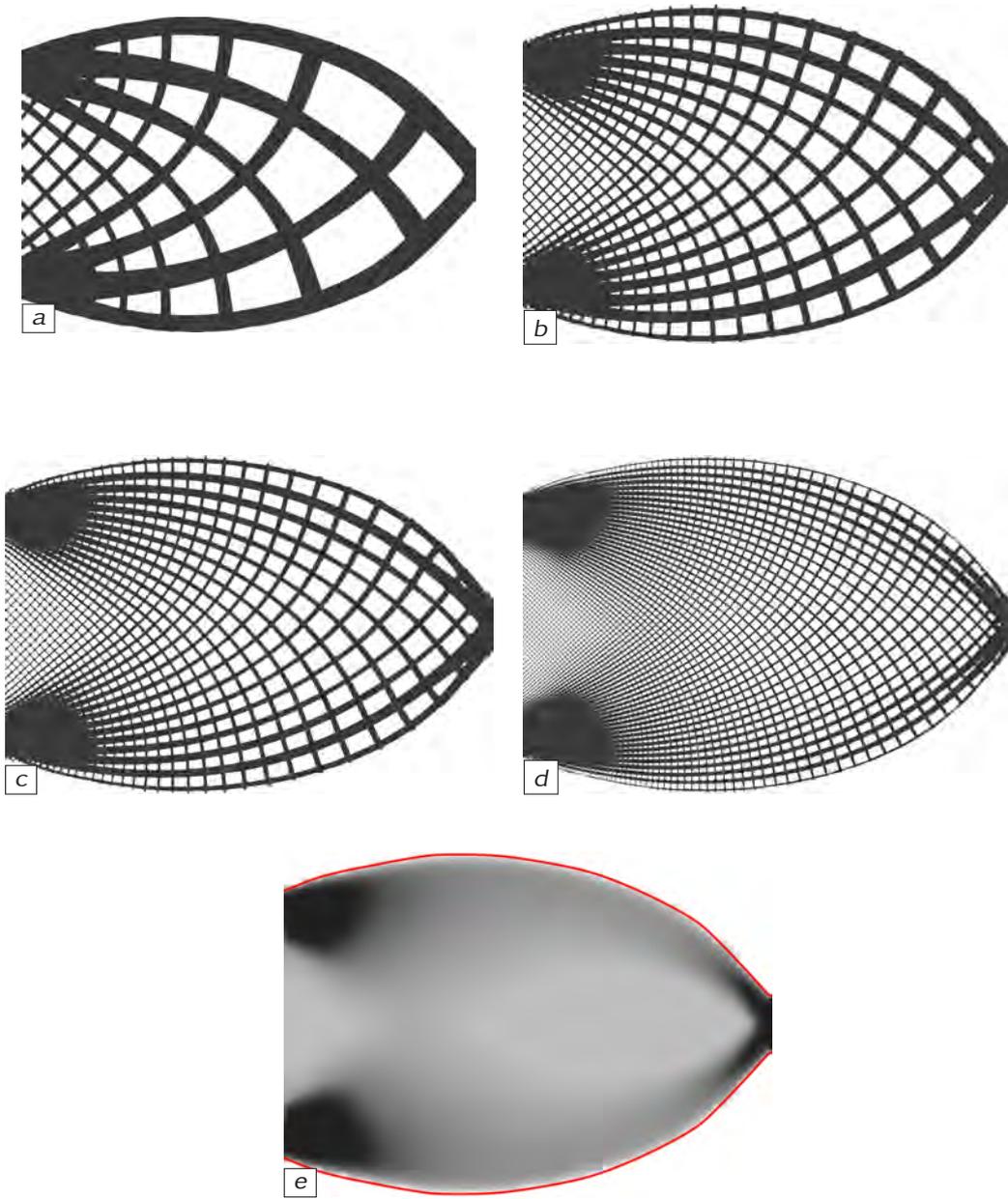
Jusqu'à présent, nous avons spontanément considéré que la forme  $\Omega$  devait être un domaine de  $\mathbb{R}^d$  dans la formulation du problème  $(\mathcal{P})$ . En réalité, ce choix n'a rien d'une évidence : la discussion précédente laisse entrevoir son impact sur les propriétés mathématiques du problème (existence, dérivabilité de l'objectif), et nous verrons aussi qu'il conditionne son traitement numérique.

Suivant le contexte, on trouvera avantageux de décrire une forme par :

- un jeu de paramètres  $\{p_1, \dots, p_N\}$  dans un espace de dimension finie. Ces paramètres peuvent être les points de contrôle d'une représentation de la forme par des courbes ou des surfaces polynomiales de Bézier (ou bien des versions plus complexes de celles-ci, telles que des B-splines ou des NURBS), comme cela est d'usage en Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Ils peuvent aussi renvoyer aux sommets d'un maillage de la forme. Si cette pratique a l'avantage de placer le problème  $(\mathcal{P})$  dans le contexte de l'optimisation en dimension finie, il peut être difficile (et réducteur) d'identifier les paramètres judicieux;
- un domaine de  $\mathbb{R}^d$  : s'il s'agit de la définition d'une forme la plus intuitive, elle n'est pas sans poser des difficultés, théoriques (au niveau de l'existence de forme optimale, comme nous l'avons vu), comme numériques;
- une fonction de densité  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ , éventuellement accompagnée d'un tenseur de microstructure  $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ . Les méthodes « d'optimisation topologique » reposant sur ce choix de modélisation sont très performantes et populaires en ingénierie; nous renvoyons par exemple à l'ouvrage [3] sur ce sujet.

**Remarque 2.** Même lorsqu'il n'existe pas de forme optimale pour un problème tel que  $(\mathcal{P})$ , le fait de diminuer la valeur du critère  $J(\Omega)$  à partir d'un design existant est en soi intéressant d'un point de vue applicatif.

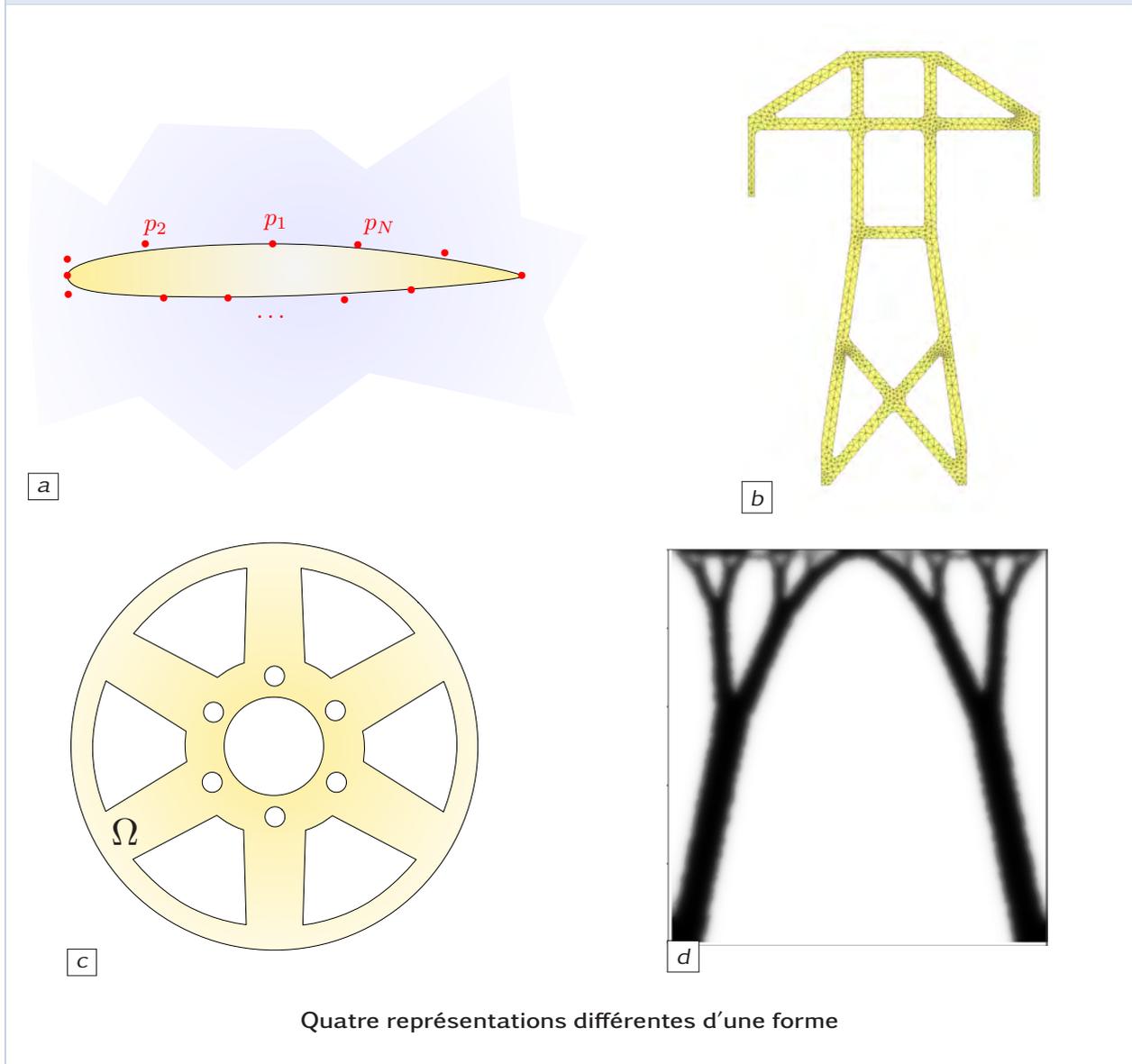
FIGURE 6 – (a-d) Éléments d'une suite minimisante de formes, tendant à minimiser la compliance pour un volume donné; (e) densité de la forme optimale limite



Le phénomène d'homogénéisation

© Images tirées de [5]

FIGURE 7 – Paramétrage d’une forme (a) par les points de contrôle  $p_1, \dots, p_N$  de courbes splines définissant sa frontière, (b) par les sommets d’un maillage, (c) par un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , (d) par une fonction de densité  $h$  telle que  $h(x)$  vaut 1 en présence de matériau (couleur noire), 0 en présence de vide (couleur blanche) et  $0 < h(x) < 1$  décrit un mélange de matériau et de vide.



## 4. Dériver par rapport au domaine

Revenons à notre problème modèle ( $\mathcal{P}$ )

$$\min_{\Omega} J(\Omega),$$

où  $\Omega$  est un domaine de  $\mathbb{R}^d$ .

Comme dans le cadre plus familier de l’optimisation sur un espace de dimension finie, l’analyse, théorique comme numérique, de ce problème s’ap-

puie sur la dérivée de la fonction objectif  $J$ . Il s’agit ainsi de se donner une notion de dérivation par rapport au domaine, ce qui peut se faire de plusieurs manières.

### 4.1 – La méthode de variation de frontières de Hadamard

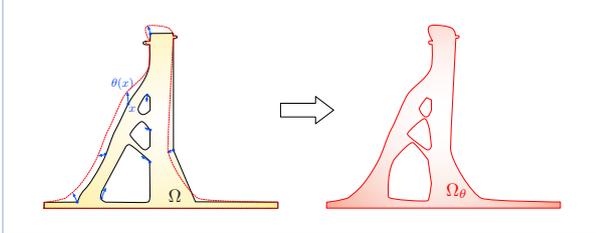
La méthode de Hadamard, introduite dans le mémoire [6] et analysée méticuleusement dans l’ar-

ticle [10], repose sur des variations d'un domaine donné  $\Omega$  du type :

$$\Omega_\theta := (\text{Id} + \theta)(\Omega),$$

où  $\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un « petit » champ de vecteurs.

FIGURE 8 – La variation  $\Omega_\theta$  de  $\Omega$  est obtenue en déplaçant chaque point  $x$  de  $\Omega$  par le vecteur  $\theta(x)$



La dérivée de forme  $\theta \mapsto J'(\Omega)(\theta)$  d'une fonction du domaine  $J$  en  $\Omega$  est définie comme la différentielle (lorsqu'elle existe) en  $\theta = 0$  de l'application  $\theta \mapsto J(\Omega_\theta)$ , ce qui donne lieu au développement limité suivant :

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\|\theta\|), \text{ où } \frac{o(\|\theta\|)}{\|\theta\|} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0.$$

La connaissance de la dérivée de forme de l'objectif  $J$  est précieuse pour l'étude du problème ( $\mathcal{P}$ ). Elle sert d'une part à écrire ses conditions d'optimalité; elle permet d'autre part de calculer une direction de descente, i.e. un champ de vecteurs  $\theta$  tel que  $J'(\Omega)(\theta) < 0$ . Ceci garantit que pour  $t > 0$  assez petit, on a :

$$J(\Omega_{t\theta}) \approx J(\Omega) + tJ'(\Omega)(\theta) < J(\Omega),$$

i.e.  $\theta$  indique comment il faut déplacer chaque point de  $\Omega$  pour diminuer la valeur de  $J$ .

**Remarque 3.** Une notion alternative de dérivée par rapport au domaine s'appuie sur de petites variations  $\Omega_{x,r}$  d'une forme  $\Omega$  obtenues en forant un trou  $B(x,r)$  centré en  $x \in \Omega$  et de petit diamètre  $r$  :

$$\Omega_{x,r} := \Omega \setminus \overline{B(x,r)}.$$

La dérivée de la fonction  $r \mapsto J(\Omega_{x,r})$  est appelée dérivée topologique, et mesure la sensibilité de  $J(\Omega)$  à la création d'un petit trou autour de  $x$  dans  $\Omega$ .

## 4.2 – Calcul d'une dérivée de forme : la méthode de l'état adjoint

Beaucoup de fonctions du domaine  $\Omega$  dépendent de celui-ci de manière complexe, à travers

la solution d'une EDP posée sur lui. Il est néanmoins possible de calculer leur dérivée de forme de manière propice au traitement numérique grâce à la méthode de l'état adjoint. Celle-ci a été introduite dans [9], dans le cadre général du contrôle optimal. Nous la décrivons schématiquement dans ce paragraphe, renvoyant à [12] pour une introduction didactique.

### Présentation formelle de la méthode

Afin de mieux rendre compte du caractère systématique de cette méthode, on se place dans le cadre abstrait et formel suivant. La variable de design (qui sera la forme  $\Omega$  dans nos applications) est notée  $h$ ; elle appartient à un espace  $H$ , que l'on suppose être un espace de Hilbert pour simplifier, et dont on note le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ . On considère une fonction objectif

$$J(h) = j(u(h)),$$

dépendant de  $h$  via un état  $u(h)$  appartenant à un autre espace de Hilbert  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ . Celui-ci est caractérisé comme la solution d'une équation, que l'on écrit à l'aide d'une fonction  $\mathcal{F} : H \times V \rightarrow V$  :

$$\mathcal{F}(h, u(h)) = 0. \quad (\text{E})$$

Dans le contexte de l'optimisation structurale évoqué en Section 3,  $u(h)$  est le déplacement élastique associé au design  $h$ , et (E) est le système de l'élasticité (ELAS).

Pour commencer, on montre en appliquant le théorème des fonctions implicites à (E) que l'application  $H \ni h \mapsto u(h) \in V$  est différentiable. En dérivant alors (E) par rapport à  $h$ , on obtient la relation

$$\forall k \in H, \quad \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right] k + \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right] u'(h)(k) = 0, \quad (\text{D})$$

qui caractérise la dérivée  $u'(h)(k) \in V$  de  $h \mapsto u(h)$  dans une direction arbitraire  $k \in H$ .

On peut d'autre part différentier l'expression de  $J(h)$ , ce qui donne :

$$\forall k \in H, \quad J'(h)(k) = \left\langle j'(u(h)), u'(h)(k) \right\rangle_V.$$

Ici, on a introduit le gradient  $j'(u) \in V$  de la fonction  $u \mapsto j(u)$ .

À ce stade, on a obtenu l'expression de la dérivée de  $J(h)$ , sous une forme qui est toutefois malcommode pour notre propos. Rappelons en effet que l'on souhaite extraire de la connaissance de  $J'(h)(k)$  une direction de descente pour  $J$ , i.e. un élément  $k \in H$  tel que  $J'(h)(k) < 0$ . Or, la dérivée  $u'(h)(k)$  n'a pas d'expression simple par rapport à  $k$  – elle est seulement connue implicitement, comme solution de (D).

Pour remédier à cet écueil, il s'agit de transformer l'expression ci-dessus; la clé de voûte de cette opération est l'introduction d'un état adjoint  $p(h) \in V$ , défini comme la solution de l'équation suivante :

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right]^T p(h) = -j'(u(h)), \quad (\text{ADJ})$$

où la notation  $^T$  désigne l'adjoint d'un opérateur défini entre deux espaces de Hilbert.

Cette définition, mystérieuse de prime abord, est exactement ce dont nous avons besoin pour rendre explicite la dépendance de  $J'(h)(k)$  en  $k$  :

$$\begin{aligned} J'(h)(k) &= \left\langle j'(u(h)), u'(h)(k) \right\rangle_V \\ &= - \left\langle \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right]^T p(h), u'(h)(k) \right\rangle_V \\ &= - \left\langle \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right] u'(h)(k), p(h) \right\rangle_V \\ &= \left\langle \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right] k, p(h) \right\rangle_V \\ &= \left\langle \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right]^T p(h), k \right\rangle_H. \end{aligned}$$

Cette suite d'égalités, d'apparence anodine, est fondamentale. On a utilisé :

- la définition (ADJ) de  $p(h)$  pour passer de la première ligne à la seconde;
- la définition de l'adjoint de l'opérateur

$$V \ni w \mapsto \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right] w \in V$$

- pour passer de la seconde ligne à la troisième;
- l'équation (D) satisfaite par la dérivée  $u'(h)(k)$  pour passer de la troisième ligne à la quatrième;
- la définition de l'adjoint de l'application

$$H \ni k \mapsto \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right] k \in V$$

pour passer de la quatrième ligne à la dernière.

À la lueur de ce calcul, il est plus facile d'apprécier comment l'équation adjointe (ADJ) a été construite : son second membre est exactement ce qu'il faut pour passer de la première ligne à la seconde, tandis que l'opérateur au membre de gauche permet d'éliminer la dérivée  $u'(h)(k)$  dans la troisième ligne en utilisant la relation (D) qui la caractérise.

L'expression de  $J'(h)(k)$  résultant de ce calcul suggère une direction de descente naturelle pour la fonctionnelle  $J$  :

$$k = - \left[ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right]^T p(h).$$

### Application de la méthode de l'état adjoint dans le contexte de l'optimisation de formes

L'application de cette méthodologie au contexte de l'optimisation de formes révèle que la « plupart » des fonctions  $J(\Omega)$  du domaine ont une dérivée de forme jouissant de la structure

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v_\Omega \theta \cdot n \, ds, \quad (\text{S})$$

où la fonction  $v_\Omega : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  dépend de la fonction optimisée  $J(\Omega)$ , de l'état  $u_\Omega$ , et de l'état adjoint  $p_\Omega$ , solution d'une EDP proche de celle caractérisant  $u_\Omega$ , mais avec un second membre différent.

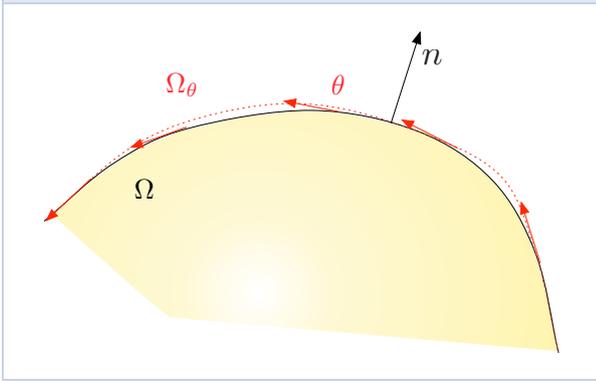
L'expression (S) se prête à l'identification d'une direction de descente pour  $J(\Omega)$ ; en effet, en choisissant un champ de vecteurs  $\theta$  tel que

$$\theta = -v_\Omega n \text{ sur } \partial\Omega,$$

on voit immédiatement que  $J'(\Omega)(\theta) < 0$ .

**Remarque 4.** La structure (S) révèle que la dérivée de forme  $J'(\Omega)(\theta)$  ne dépend que des valeurs de la composante normale  $\theta \cdot n$  de la déformation  $\theta$  sur le bord  $\partial\Omega$ . Ceci exprime le fait naturel qu'un champ de vecteurs  $\theta$  qui est purement tangentiel sur  $\partial\Omega$  (a fortiori, un champ  $\theta$  qui s'annule sur  $\partial\Omega$ ) produit une variation  $\Omega_\theta$  qui est une reparamétrisation de  $\Omega$  au premier ordre : la valeur de  $J(\Omega_\theta)$  coïncide avec  $J(\Omega)$  (au premier ordre) et  $J'(\Omega)(\theta) = 0$ , voir la figure 9.

FIGURE 9 – Convection d’un domaine  $\Omega$  par déformation suivant un champ de vecteurs tangentiel  $\theta$



### 4.3 – Vers un algorithme numérique

Tous les ingrédients sont désormais réunis pour esquisser un algorithme de gradient de forme dédié à la résolution du problème  $(\mathcal{P})$ .

#### Un algorithme de gradient de forme

- Initialisation : forme initiale  $\Omega^0$ .
- Pour  $n = 0, \dots$  :
  1. résoudre l’EDP pour  $u_{\Omega^n}$  (resp. l’équation adjointe pour  $p_{\Omega^n}$ ) sur  $\Omega^n$  ;
  2. en déduire une direction de descente  $\theta^n$  pour  $J(\Omega)$ , par exemple en s’appuyant sur la structure  $(S)$  de la dérivée de forme  $J'(\Omega)$  ;
  3. déformer  $\Omega^n$  par le champ  $\theta^n$  pour un pas de temps  $\tau^n > 0$ , de sorte que

$$\Omega^{n+1} := (\text{Id} + \tau^n \theta^n)(\Omega^n)$$

améliore  $\Omega^n$ , i.e.  $J(\Omega^{n+1}) < J(\Omega^n)$ .

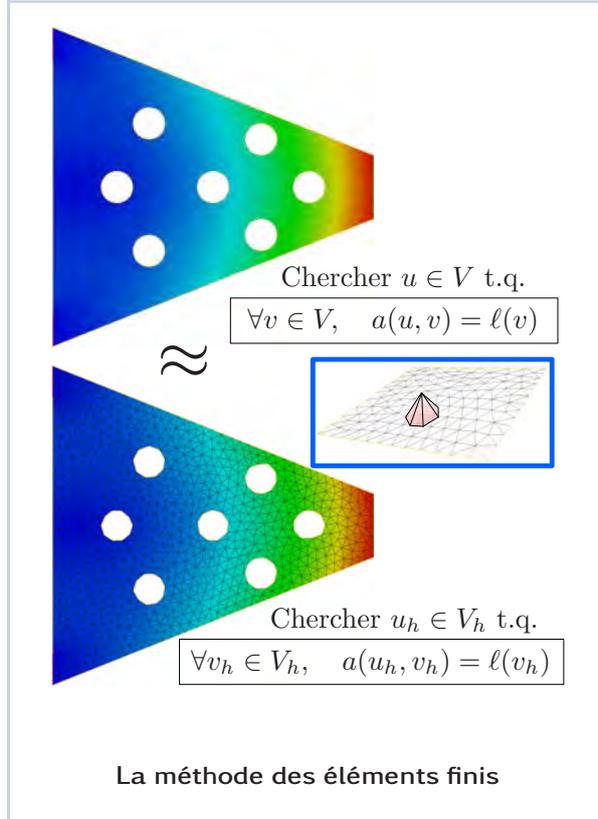
Les deux points saillants de ce programme sont, à chaque itération  $n = 0, \dots$

- La résolution des EDP pour  $u_{\Omega^n}$  et  $p_{\Omega^n}$ , qui sont posées sur la forme  $\Omega^n$ .
- La mise à jour de  $\Omega^n$  vers la nouvelle forme  $\Omega^{n+1}$  obtenue par déformation suivant le champ de vecteurs  $\theta^n$ .

Une mise en œuvre classique de ce programme utilise une représentation numérique de chaque forme  $\Omega^n$  par un *maillage*  $\mathcal{T}^n$ , i.e. un recouvrement de  $\Omega^n$  par des triangles en dimension 2, ou des tétraèdres en dimension 3.

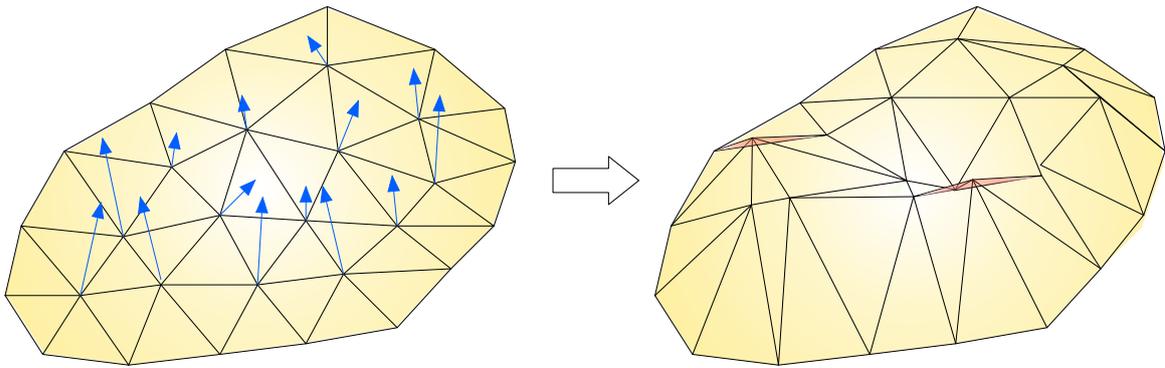
Alors, les EDP caractérisant  $u_{\Omega^n}$  et  $p_{\Omega^n}$  peuvent être résolues par la méthode des éléments finis et le calcul numérique d’une direction de descente  $\theta^n$  s’en déduit.

FIGURE 10 – La méthode des éléments finis discrétise une EDP en restreignant sa formulation variationnelle à un espace de dimension finie  $V_h$  dont les fonctions de base sont définies grâce à un maillage de la forme. La précision du résultat dépend fortement de la qualité des éléments du maillage.



Malheureusement, ce choix de représentation rend la mise à jour de la forme  $\Omega^n$  vers  $\Omega^{n+1}$  très difficile à réaliser. En effet, les techniques de déformation d’un maillage suivant un champ de vecteurs échouent notoirement à produire un maillage de bonne qualité (i.e. dont les éléments sont proches d’être équilatéraux), à commencer par la plus naïve d’entre elles, qui consiste à déplacer chaque sommet tout en maintenant les connectivités du maillage, voir la figure 11. Cette limitation est particulièrement flagrante dans le cas où le mouvement de la forme implique un changement de sa topologie, par exemple une fusion de deux trous.

FIGURE 11 – Déplacer les sommets d'un maillage par un champ de vecteurs conduit souvent à un maillage de très mauvaise qualité, voire invalide (éléments qui s'intersectent, en rouge).



Mise à jour d'une forme par déplacement des sommets de son maillage

Ainsi, le choix d'une représentation maillée de la forme pour réaliser l'algorithme de gradient ci-dessus est à réserver lorsque de petites variations de la forme sont attendues.

En général, la résolution numérique des problèmes d'optimisation de formes est minée par la nécessité de représenter la forme optimisée  $\Omega$  d'une manière qui se prête à la fois au calcul par éléments finis et au suivi robuste de ses déformations. Cette difficulté a conduit les numériciens à se tourner vers d'autres manières de décrire la forme.

**Remarque 5.** Tous les algorithmes reposant sur le canevas ci-dessus sont intrinsèquement destinés à converger vers l'un des nombreux minima locaux de  $J(\Omega)$ .

## 5. Deux idées récentes

Nous présentons maintenant la méthode des *lignes de niveaux* (ou méthode « level set » dans la littérature anglo-saxonne) pour l'optimisation de formes ainsi que l'une de ses variantes, comme deux moyens plus robustes de décrire la forme et son évolution au cours de l'optimisation.

### 5.1 – Digression autour de la méthode des lignes de niveaux

La méthode des lignes de niveaux, introduite dans l'article [11], est un paradigme très général

pour décrire l'évolution d'une forme, aussi bien d'un point de vue théorique que pratique. Elle repose sur une description implicite d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , comme le sous-ensemble négatif d'une fonction « level set »  $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \\ \phi(x) > 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{LS})$$

voir la figure 14 (b) pour une illustration.

Cette représentation est idéale lorsqu'il s'agit de suivre l'évolution d'un domaine  $\Omega(t)$ , évoluant sur un intervalle de temps  $(0, T)$  sous l'effet d'un champ de vitesse  $V(t, x)$ . Soit en effet  $\phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction level set associée à  $\Omega(t)$ , i.e. (LS) a lieu à chaque instant  $t$ ; on montre que  $\phi$  satisfait à l'équation d'advection suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) = 0, & t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^d \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (\text{ADV})$$

où  $\phi_0$  est une fonction level set pour  $\Omega(0)$ .

L'utilisation pratique de cette idée fait intervenir un « grand » domaine de calcul  $D$  qui joue le rôle de l'espace infini  $\mathbb{R}^d$ ; celui-ci est muni d'un maillage  $\mathcal{T}$  fixé une fois pour toutes. Chaque forme  $\Omega(t)$  est

représentée par une fonction level set  $\phi(t, \cdot)$ , discrétisée par la donnée de ses valeurs aux sommets de  $\mathcal{T}$ , et l'équation (ADV) régissant l'évolution de  $\phi$  est résolue par un schéma numérique adapté.

Ainsi, la méthode des lignes de niveaux convertit le suivi de l'évolution d'une forme  $\Omega(t)$ , qui peut être très complexe (et même présenter des changements de topologie), en la résolution d'une EDP – une tâche plus familière, qui peut être réalisée de manière robuste.

## 5.2 – Application de la méthode des lignes de niveaux en optimisation de formes

La méthode des lignes de niveaux a été introduite dans le contexte de l'optimisation de formes dans l'article [2].

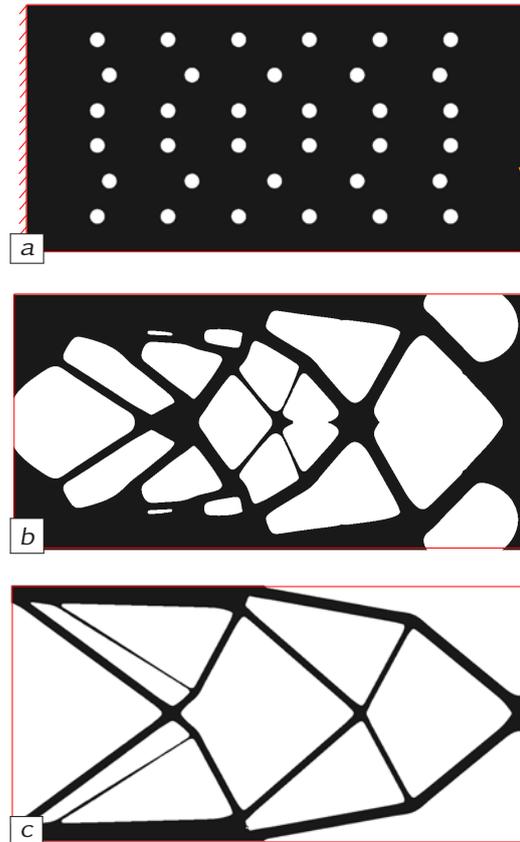
Le processus d'optimisation emprunte les grandes lignes de la stratégie décrite dans la Section 4.3 pour résoudre le problème ( $\mathcal{P}$ ). À chaque itération  $n = 0, \dots$ , la forme  $\Omega^n$  est représentée par la donnée d'une fonction  $\phi^n : D \rightarrow \mathbb{R}$ , définie aux sommets d'un maillage fixe  $\mathcal{T}$  du domaine de calcul  $D$ . Ainsi, comme nous l'avons vu, dès qu'une direction de descente  $\theta^n$  pour le problème d'optimisation ( $\mathcal{P}$ ) est connue, il est possible de rendre compte du mouvement de la forme  $\Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1} = (\text{Id} + \tau^n \theta^n)(\Omega^n)$ , en résolvant l'équation d'advection (ADV) sur le maillage  $\mathcal{T}$ , avec le champ de vitesse  $V(t, x) = \theta^n(x)$ , l'état initial  $\phi_0 = \phi^n$  et le temps final  $T = \tau^n$ .

La difficulté posée par ce cadre de travail est que l'on ne dispose à aucun moment d'un maillage de  $\Omega^n$ , de sorte que l'on ne peut pas immédiatement utiliser la méthode des éléments finis pour calculer les quantités  $u_{\Omega^n}$ ,  $p_{\Omega^n}$ , et donc  $\theta^n$ .

Heureusement, plusieurs alternatives existent. On peut en particulier utiliser une méthode de « domaine fictif », et approcher les EDP pour  $u_{\Omega^n}$  et  $p_{\Omega^n}$  par des équations posées sur le domaine de calcul  $D$  entier. Par exemple, dans le contexte de l'optimisation structurale, le système de l'élasticité linéaire (ELAS), posé sur la forme  $\Omega \subset D$ , peut être remplacé par une version de (ELAS) posée sur  $D$  entier, où le vide  $D \setminus \overline{\Omega}$  est rempli par un matériau « ersatz » très mou, de loi de Hooke  $\varepsilon A$ ,  $\varepsilon \ll 1$ .

La méthode des lignes de niveaux est une méthode robuste pour décrire des variations arbitraires de la forme au cours de son optimisation. Elle a été appliquée avec succès dans les contextes de la mécanique des structures et des fluides, de la nanophotonique, etc., voir les figures 12 et 13.

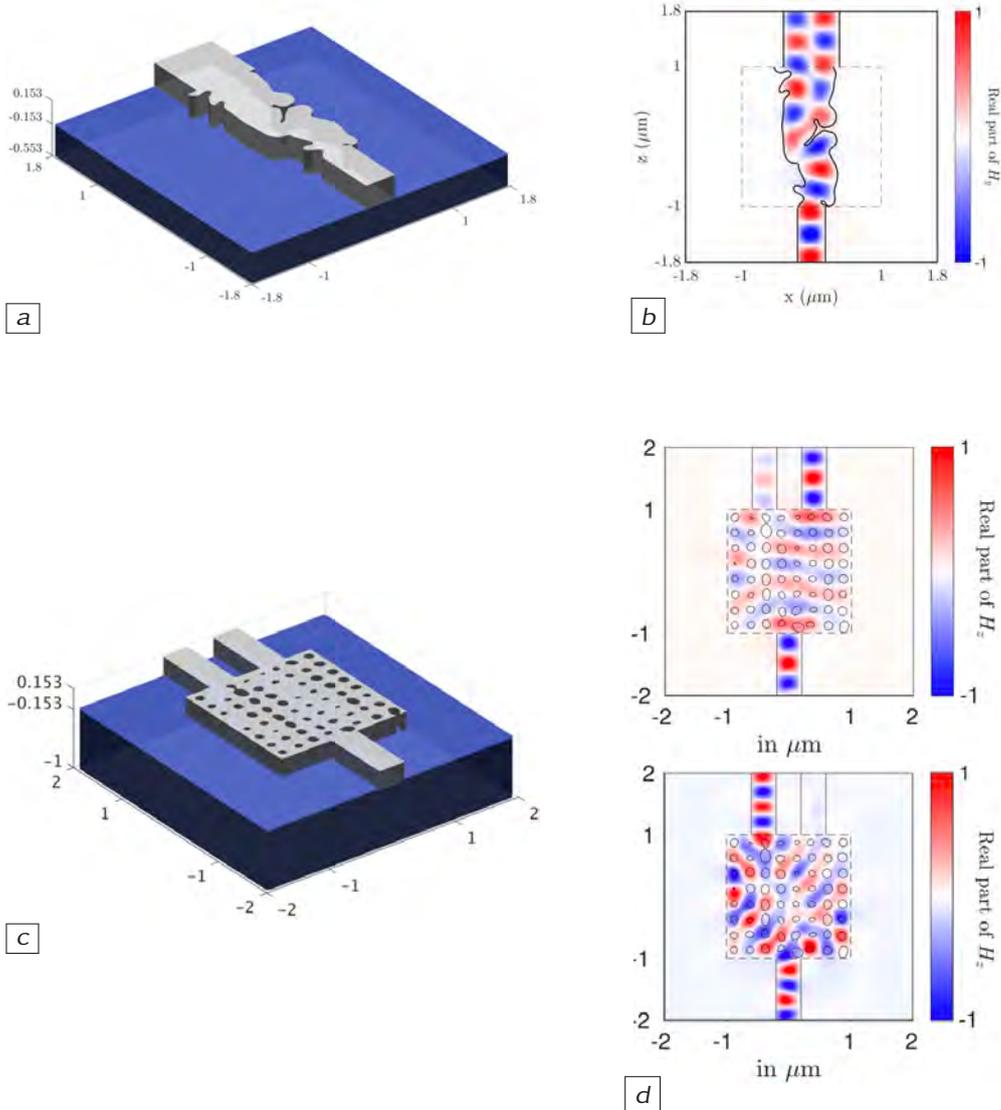
FIGURE 12 – Optimisation de la forme d'une poutre cantilever au regard de sa compliance. La forme est attachée sur sa gauche, soumise à une force verticale sur une partie de son bord droit, et on impose une contrainte de volume; (a) forme initiale; (b) une forme intermédiaire; (c) forme optimisée. Seul le sous-domaine négatif de la fonction level set associée à la forme (définie sur le maillage de calcul de  $D$  qui n'est pas représentée) est affiché, en noir.



Optimisation d'une console élastique par la méthode des lignes de niveaux

L'inconvénient principal de cette méthode est la nécessité d'approcher les EDP pour  $u_{\Omega}$  et  $p_{\Omega}$ . Si cette tâche peut être menée avec une précision acceptable dans certains contextes physiques tels que celui de l'élasticité, elle s'avère par exemple nettement plus ardue dans le cas de systèmes figurant une interaction fluide-structure.

FIGURE 13 – (a) Forme optimisée d'un convertisseur de modes électromagnétiques; (b) intensité du champ magnétique associé; (c) forme optimisée d'un diplexeur, distribuant l'énergie d'ondes de fréquences différentes dans des canaux de sortie distincts.



Optimisation de dispositifs nanophotoniques (d'après [8])

### 5.3 – Combiner la méthode des lignes de niveaux avec des algorithmes de remaillage

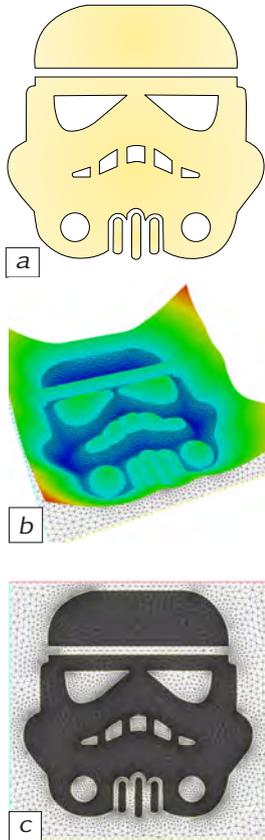
Dans cette partie, nous décrivons brièvement une variante récente de la méthode des lignes de niveaux pour l'optimisation de formes, introduite dans l'article [1] afin de pallier le besoin d'approcher les EDP associées aux quantités physiques  $u_\Omega$  et  $p_\Omega$ .

Comme dans la section précédente, on introduit un domaine de calcul  $D$  fixé qui contient toutes les formes  $\Omega^n$  produites au cours de l'optimisation. Cette fois-ci cependant, le maillage  $\mathcal{T}^n$  de  $D$  change à chaque itération, de telle sorte que la forme  $\Omega^n$  est explicitement discrétisée, comme un sous-maillage  $\mathcal{T}_{\text{int}}^n$  de  $\mathcal{T}^n$ . Ainsi, à chaque itération  $n = 0, \dots$ , deux représentations complémentaires de  $\Omega^n$  sont disponibles :

- une représentation par une fonction level set  $\phi^n : D \rightarrow \mathbb{R}$ , discrétisée aux sommets du maillage total  $\mathcal{T}^n$  du domaine de calcul  $D$  ;
- une représentation par le sous-maillage  $\mathcal{T}_{\text{int}}^n$  de  $\mathcal{T}$ .

Celles-ci sont illustrées sur la figure 14.

FIGURE 14 – La forme  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  en (a) peut être décrite comme le sous-ensemble négatif d'une fonction  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  (b) ou bien comme un sous-maillage  $\mathcal{T}_{\text{int}}$  (composé des triangles en noir) du maillage  $\mathcal{T}$  du domaine de calcul  $D$  (c).



Les méthodes des lignes de niveaux pour l'optimisation de formes

On utilise alors l'une ou l'autre de ces représentations selon son adéquation avec chaque étape de l'algorithme de gradient de forme de la Section 4.3. Les EDP pour  $u_{\Omega^n}$  et  $p_{\Omega^n}$  sont résolues par la méthode des éléments finis sur le maillage exact  $\mathcal{T}_{\text{int}}^n$  de  $\Omega^n$ , tandis que la mise à jour de  $\Omega^n$  vers  $\Omega^{n+1} = (\text{Id} + \tau^n \theta^n)(\Omega^n)$  repose sur la méthode des lignes de niveaux, pratiquée sur le maillage  $\mathcal{T}^n$  du domaine de calcul  $D$ .

Cette stratégie repose de manière cruciale sur des algorithmes efficaces permettant de passer d'une représentation à l'autre. Plus précisément, elle utilise

- un algorithme de calcul d'une fonction level set  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  associée à un domaine  $\Omega$  aux sommets d'un maillage  $\mathcal{T}$  du domaine  $D$  ;
- un algorithme qui, à partir d'un maillage  $\mathcal{T}$  de  $D$  et d'une fonction level set  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  pour une forme  $\Omega \subset D$ , donnée aux sommets de  $\mathcal{T}$ , crée un nouveau maillage  $\tilde{\mathcal{T}}$  de  $D$  dans lequel  $\Omega$  est explicitement discrétisée, par un sous-maillage  $\tilde{\mathcal{T}}_{\text{int}}$ .

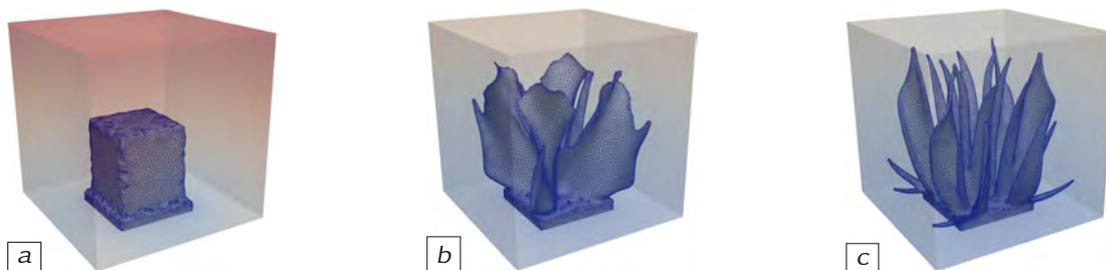
Au prix d'un surcroît de technicité dans la mise en œuvre numérique, elle permet de rendre compte de variations très importantes de la forme (y compris des changements de sa topologie), tout en jouissant de la précision numérique garantie par des calculs mécaniques menés sur des maillages exacts des formes en jeu.

Deux exemples d'application de cette stratégie sont présentés sur les figures 15 et 16, dans les contextes physiques de la conduction thermique et de l'interaction fluide-structure.

## 6. Perspectives

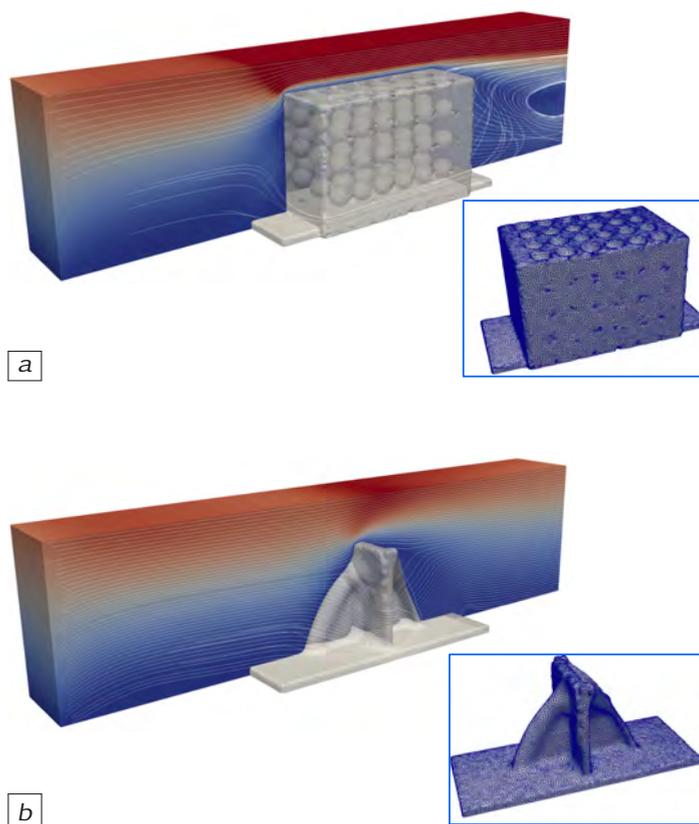
Les techniques numériques d'optimisation de formes, dont nous avons seulement évoqué une petite partie, sont aujourd'hui relativement matures. La diversification et l'intensification de leur utilisation, dans les contextes académique comme industriel, s'accompagnent de nombreux défis. Notamment, des efforts substantiels sont consentis en vue d'utiliser ces méthodes dans des contextes physiques toujours plus réalistes et complexes (tels que ceux de l'interaction fluide-structure, de la mécanique de la rupture, etc.). D'autre part, la sensibilité du caractère optimal d'une forme aux données physiques de la situation en jeu (dans le cas de la mécanique des structures, les efforts appliqués ou les propriétés des matériaux) soulève le besoin d'optimiser les formes de manière robuste par rapport aux incertitudes qui pèsent sur celles-ci. Enfin, on a longtemps reproché à l'optimisation de formes de prédire des designs à la géométrie trop complexe pour les procédés d'assemblage traditionnels (fonderie, fraisage, ...). L'avènement des techniques de fabrication additive (ou impression 3d), qui s'accommodent de géométries à la complexité inédite, promet de lever ce verrou ; néanmoins, ces techniques de construction imposent en retour de nouvelles contraintes sur les structures assemblées, qu'il est essentiel de comprendre et de modéliser.

FIGURE 15 – Une enceinte cubique  $D$  est chauffée uniformément, et reliée sur la face inférieure à un puits de chaleur. On optimise la répartition d'un bon (coûteux) et d'un mauvais (peu coûteux) matériaux conducteurs thermiques pour minimiser la température moyenne au sein de  $D$ , avec une contrainte sur le volume de bon conducteur ; (a) forme initiale, (b) forme intermédiaire, et (c) forme optimisée.



Optimisation de formes en conduction thermique par la variante de la méthode des lignes de niveaux utilisant du remaillage (d'après [4])

FIGURE 16 – (a) Forme initiale, (b) forme optimisée.



Optimisation de la compliance d'un obstacle s'opposant à l'écoulement d'un fluide sous une contrainte de volume (d'après [4])

## Références

- [1] G. ALLAIRE, C. DAPOGNY et P. FREY. « Shape optimization with a level set based mesh evolution method ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **282** (2014), p. 22-53.
- [2] G. ALLAIRE, F. JOUVE et A.-M. TOADER. « Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method ». *Journal of computational physics* **194**, n° 1 (2004), p. 363-393.
- [3] M. P. BENDSOE et O. SIGMUND. *Topology optimization: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] F. FEPPON et al. « Topology optimization of thermal fluid–structure systems using body-fitted meshes and parallel computing ». *Journal of Computational Physics* (2020), p. 109574.
- [5] P. GEOFFROY-DONDERS et al. « Coupled optimization of macroscopic structures and lattice infill ». *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **123**, n° 13 (2022), p. 2963-2985.
- [6] J. HADAMARD. *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*. 33. Imprimerie nationale, 1908.
- [7] « Kreuzschnabel ». <https://commons.wikimedia.org/wiki/> ().
- [8] N. LEBBE et al. « Robust shape and topology optimization of nanophotonic devices using the level set method ». *Journal of Computational Physics* **395** (2019), p. 710-746.
- [9] J.-L. LIONS. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1971.
- [10] F. MURAT et J. SIMON. « Sur le contrôle par un domaine géométrique ». *Pré-publication du Laboratoire d'Analyse Numérique, (76015)* (1976).
- [11] S. OSHER et J. A. SETHIAN. « Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations ». *Journal of computational physics* **79**, n° 1 (1988), p. 12-49.
- [12] R.-E. PLESSIX. « A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications ». *Geophysical Journal International* **167**, n° 2 (2006), p. 495-503.
- [13] G. PÓLYA et G. SZEGÖ. « Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.(AM-27), Volume 27 ». In : *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.(AM-27), Volume 27*. Princeton University Press, 2016.
- [14] J. W. S. B. RAYLEIGH. *The theory of sound*. 2. Macmillan, 1896.
- [15] « Soapbubledk ». <https://www.soapbubble.dk/en/articles/former> ().



### Charles DAPOGNY

cnrs et laboratoire Jean Kuntzmann (Université Grenoble-Alpes)  
[charles.dapogny@univ-grenoble-alpes.fr](mailto:charles.dapogny@univ-grenoble-alpes.fr)

Charles Dapogny est chargé de recherche au CNRS, affilié au laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble. Sa recherche s'articule autour de l'optimisation de formes, notamment sous ses aspects numériques, et de l'analyse asymptotique des équations aux dérivées partielles.

L'auteur remercie chaleureusement Blanche Buet, Dorian le Peutrec et Magali Ribot pour leur relecture attentive et leurs conseils avisés.

# Polynômes plats selon Balister, Bollobas, Morris, Sahasrabudhe, Tiba

• H. QUEFFÉLEC

Nous présentons les idées de la preuve de l'existence de polynômes plats par les auteurs ci-dessus. Cela répond par l'affirmative à une conjecture de Littlewood.

## Avertissement

L'auteur souffre souvent de ne rien comprendre, ou presque, aux articles de la *Gazette* présentant un résultat important. Et il mettrait plutôt un point d'honneur à être ici compréhensible au lieu d'incompréhensible, malgré la technicité du sujet abordé, qui résout une conjecture ancienne de Littlewood, conjecture qui a beaucoup résisté. Le but de cet article est donc, après avoir mis le problème en perspective, de présenter les deux outils principaux de la solution, la *suite de Rudin-Shapiro* et la *dis-crépance*. On souhaite aussi s'adresser à la communauté, pas seulement aux experts pointus du domaine, qui pourront considérer comme inutiles certains préliminaires.

L'enfer est pavé de bonnes intentions... et la haute technicité de l'article discuté ici (dont les auteurs seront désignés en abrégé par **BBMST**) ne se prête pas idéalement à un développement simple et lumineux. Il s'agit plutôt d'un tour de force; et on ne pourra pas complètement éviter d'être à la fois un peu vague et trop spécifique. Le lecteur jugera par lui-même si le but recherché a plus ou moins été atteint.

## 1. Notations

Voici quelques notations indispensables pour la suite.

1. Pour  $m$  entier  $\geq 1$ , on pose  $[m] = \{1, \dots, m\}$ .
2.  $\mathcal{C}$  désigne l'espace des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques. Les coefficients de Fourier de  $f \in \mathcal{C}$  sont définis par

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La série de Fourier d'une fonction  $f$  est la série formelle  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikt}$ . L'ensemble  $\mathcal{C}$  est une

algèbre de Banach pour la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

3. Nous poserons aussi, pour  $f \in \mathcal{C}$  :

$$\|f\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2}$$

(relation de Parseval).

4.  $W$  désigne la sous-algèbre de  $\mathcal{C}$  constituée des fonctions  $f$  à série de Fourier absolument convergente. C'est une algèbre de Banach (l'algèbre de Wiener) pour la norme

$$\|f\|_W = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|.$$

5. On note  $\mathcal{T}_n$ ,  $n \geq 1$ , l'espace des polynômes trigonométriques de degré  $\leq n$ ,

$$f(t) = \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{ikt}$$

et  $\mathcal{T}_n^+$  le sous-espace des éléments  $f(t) = \sum_{0 \leq k \leq n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \in \mathcal{T}_n$  à spectre de Fourier positif ( $\widehat{f}(k) = 0$  si  $k < 0$ ).

6.  $\mathcal{G}_n$  désigne la classe des

$$f(t) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k e^{ikt} \in \mathcal{T}_n^+$$

tels que  $|a_k| \equiv 1$  (signes complexes). Et  $\mathcal{F}_n$  désigne la classe des  $f(t) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k e^{ikt} \in \mathcal{T}_n^+$  tels que  $a_k \equiv \pm 1$  (signes réels). Ces deux classes jouent un rôle essentiel dans ce qui suit.

7.  $\mathbb{T}$  désignera indifféremment le cercle unité ou les réels modulo  $2\pi$ .

## 2. Une conjecture de Littlewood sur les polynômes

Dans les années 50, l'étude fine du comportement des polynômes trigonométriques est florissante. Partons d'un fait simple :

si  $f(t) = \sum_{0 \leq k \leq n} \widehat{f}(k)e^{ikt} \in \mathcal{T}_n^+$ , on a l'inégalité

$$\|f\|_W := \sum_{0 \leq k \leq n} |\widehat{f}(k)| \leq \sqrt{n+1} \|f\|_\infty. \quad (1)$$

En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation de Parseval,

$$\|f\|_W = \sum_{k=0}^n |\widehat{f}(k)| \leq \sqrt{n+1} \|f\|_2 \leq \sqrt{n+1} \|f\|_\infty.$$

Pour serrer (si c'est possible) ces inégalités, il faudrait que  $|\widehat{f}|$  soit presque constante (disons  $|\widehat{f}(k)| = 1$  pour  $0 \leq k \leq n$  et  $f \in \mathcal{G}_n$ ) et que  $|f|$  ait une valeur presque constante  $K$ . (Alors, « l'égalité » dans (1) se lit  $n+1 = \sqrt{n+1}K$  et  $K = \sqrt{n+1}$ ). La classe  $\mathcal{G}_n$  apparaît donc naturellement, et deux questions se posent. Les constantes  $\delta, c, \Delta$  ci-dessous doivent être comprises comme des constantes numériques, indépendantes de  $n$ .

**Question 1.** Peut-on vraiment avoir des  $f \in \mathcal{G}_n$  avec  $\|f\|_W \geq \delta\sqrt{n+1}\|f\|_\infty$ , c'est-à-dire (prenant  $\Delta = \delta^{-1}$ ) des  $f \in \mathcal{G}_n$  telles que  $\|f\|_\infty \leq \Delta\sqrt{n+1}$ ? Et quid des valeurs précises de  $\Delta$ ? En 1957, Paul Erdős [8] conjecture justement qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|f\|_\infty \geq (1+c)\sqrt{n+1}$  pour tout  $n \geq 3$  et pour tout  $f \in \mathcal{G}_n$ .

**Question 2.** Dans quelle mesure peut-on avoir  $f \in \mathcal{G}_n$  telle que  $|f(t)|$  vaille presque constamment  $\sqrt{n+1}$ ? Une erreur est inévitable comme le montre l'inégalité qui suit.

$$f \in \mathcal{G}_n \implies \| |f|^2 - (n+1) \|_2 \geq \sqrt{2}. \quad (2)$$

En effet, si  $f(t) = \sum_{k=0}^n c_k e^{ikt}$ , on calcule

$$|f|^2 = n+1 + c_0 \overline{c_n} e^{-int} + \overline{c_0} c_n e^{int} + \dots$$

D'où, via la relation de Parseval,

$$\| |f|^2 - (n+1) \|_2^2 \geq 2|c_0|^2 |c_n|^2 = 2.$$

Tout ceci montre qu'il est essentiel pour notre propos de comparer finement les normes  $\|\cdot\|_\infty$  et  $\|\cdot\|_W$  sur le sous-espace de dimension finie  $\mathcal{T}_n^+$  de  $\mathcal{C}$ . Gardant (1) en mémoire, voici un premier résultat qui va dans le sens de la question 1 (pour le moment avec des polynômes  $f \in \mathcal{T}_n^+$  quelconques).

**Proposition 1.** Il existe  $f(t) = \sum_{0 \leq k \leq n} \widehat{f}(k)e^{ikt} \in \mathcal{T}_n^+$ ,  $f \neq 0$  et  $\delta > 0$  tels que

$$\|f\|_W \geq \delta\sqrt{n+1} \|f\|_\infty. \quad (3)$$

On peut même avoir, avec  $f = f_n \in \mathcal{T}_n^+$ ,  $f_n \neq 0$ , et  $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$  :

$$\|f_n\|_W \geq (1 - \varepsilon_n)\sqrt{n+1} \|f_n\|_\infty. \quad (4)$$

La précision (4) est due à Elyahu Beller et Donald Newman [3], avec un  $f \notin \mathcal{G}_n$ . Elle implique bien sûr (3). Mais ajoutons dès maintenant que les polynômes de Hardy, Littlewood, Rudin-Shapiro, etc. à suivre vont nous fournir des exemples de  $f \in \mathcal{G}_n$  vérifiant (3).

Revenons à nos questions 1 et 2. De 1962 à 1966, John Edensor Littlewood [16] s'y est attaqué, et a cherché à nier la conjecture d'Erdős. Ce qui l'a conduit aux définitions suivantes, dans lesquelles le polynôme  $f$  dépend bien sûr de  $n$ ! Nous devrions plutôt écrire  $f_n$  et parler de suite  $(f_n)$  plate ou ultraplate. Mais nous resterons un peu informels sur ce point, comme chez БВМСТ. Rappelons que les constantes  $\delta, \Delta$  sont, elles, indépendantes de  $n$ .

**Définition 1.**

1. Un polynôme  $f \in \mathcal{G}_n$  est dit *plat* s'il existe deux constantes numériques  $\delta, \Delta > 0$  telles que

$$\delta\sqrt{n+1} \leq |f(t)| \leq \Delta\sqrt{n+1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Géométriquement, les valeurs de  $f$  restent éternellement dans une étroite couronne autour du cercle  $|z| = \sqrt{n+1}$ . Littlewood a échoué de peu à montrer pour tout  $n$  l'existence de polynômes plats dans  $\mathcal{G}_n$ .

2.  $f \in \mathcal{G}_n$  est dit *ultraplat* si (avec  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ )

$$(1 - \varepsilon_n)\sqrt{n+1} \leq |f(t)| \leq (1 + \varepsilon_n)\sqrt{n+1} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

L'inégalité (2) montre qu'on peut espérer au mieux  $\varepsilon_n = O(n^{-1})$ .

L'existence pour tout entier  $n$  de  $f \in \mathcal{G}_n$  ou  $f \in \mathcal{F}_n$  plats constitue ce qu'on appelle la *conjecture de Littlewood*. Le cas de  $\mathcal{G}_n$  a été résolu par l'affirmative en 1980, nous y reviendrons. Le cas de  $\mathcal{F}_n$  est resté ouvert jusqu'en 2020, année où БВМСТ ont montré l'existence de polynômes plats dans  $\mathcal{F}_n$ , résolvant ainsi cette conjecture.

### 3. Polynômes et algèbre de Wiener

Dans les années 1950 et même un peu avant, une préoccupation majeure des analystes harmoniciens (Wiener avec son fameux lemme, Zygmund et autres) était de trouver des critères garantissant qu'une fonction  $f \in \mathcal{C}$ ,

$$f(t) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{ikt}$$

ait une série de Fourier absolument convergente :  $f \in W$ .

Pour situer le grand écart entre une fonction générique de  $\mathcal{C}$  et l'algèbre de Wiener, citons un résultat de Jean-Pierre Kahane, Yitzhak Katznelson et Karel de Leeuw [15] : pour  $f \in \mathcal{C}$ , on peut à peine faire mieux que l'évident  $\sum |\widehat{f}(n)|^2 < \infty$ , à savoir, si  $\sum_n |c_n|^2 < \infty$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}$  telle que  $|\widehat{f}(n)| \geq |c_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , avec de plus

$$\|f\|_\infty \leq \Delta \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \right)^{1/2}.$$

Voici un premier résultat fondateur de Serge Bernstein.

**Théorème 1 (Inégalité de Bernstein).** *Si  $f \in \mathcal{T}_n$ , alors  $\|f'\|_\infty \leq n\|f\|_\infty$ .*

Cette inégalité est un incontournable de l'analyse de Fourier. D'ailleurs, BBMST l'utilisent dans leur construction. Voici maintenant un autre résultat de S. Bernstein sur la question qui préoccupait les harmoniciens.

**Théorème 2 (Bernstein).** *Si  $f$  est höldérienne d'ordre  $\alpha > 1/2$ , alors  $f \in W$ . De plus, il existe  $f$  höldérienne d'ordre  $1/2$  telle que  $f \notin W$ .*

Le cas  $\alpha > 1/2$  est intéressant, mais la preuve n'est pas difficile. Le cas limite  $\alpha = 1/2$  est plus délicat, et c'est là que les résultats cités sur les polynômes de  $\mathcal{G}_n$  (et prouvés plus loin) vont aider. Ils impliquent en effet clairement le fait suivant : on peut trouver une suite  $T_n$  de la forme  $T_n = \sum_{2^n \leq k < 2^{n+1}} z_k e^{ikt}$ , telle que  $\|T_n\|_\infty \leq \Delta 2^{n/2}$  et  $|z_k| \equiv 1$ . Mais alors la fonction

$$f = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} T_n$$

fournit l'optimalité de l'exposant  $1/2$ . En effet,  $f \in \mathcal{C}$  car elle est définie par une série normalement convergente;  $f \notin W$  car

$$\|f\|_W = \sum_{n \geq 1} 2^{-n} \times 2^n = \infty.$$

Et l'on étudie la différence

$$f(t+h) - f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (T_n(t+h) - T_n(t))$$

à la Weierstrass; on tronque la somme, on utilise l'inégalité de la moyenne et celle de Bernstein (théorème 2) sur la première moitié, une majoration brutale sur la seconde, et on optimise le rang de la troncature par rapport à  $h$  pour obtenir

$$|f(t+h) - f(t)| \lesssim h^{1/2}.$$

## 4. Résultats anciens

### 4.1 – Signes complexes

Comment obtenir (3), ou mieux  $f \in \mathcal{G}_n$  telle que  $\|f\|_\infty \leq \Delta \sqrt{n+1}$ ? Les analystes de la première moitié du vingtième siècle ont cherché des choix de signes « rusés »  $\zeta_k$ ,  $|\zeta_k| = 1$ , donnant de bons  $f(t) = \sum_{k=0}^n \zeta_k e^{ikt} \in \mathcal{G}_n$ . Hardy et Littlewood ont ainsi montré que  $\zeta_k = e^{ik \ln k}$  convient :

$$\left\| \sum_{k=1}^n e^{ik \ln k} e^{ikt} \right\|_\infty \leq \Delta \sqrt{n+1}. \quad (7)$$

On a également l'exemple gaussien de Littlewood

$$\left\| \sum_{k=1}^n e^{ik^2/n} e^{ikt} \right\|_\infty \leq \Delta \sqrt{n+1}. \quad (8)$$

La même preuve vaut pour (7) et (8) en utilisant les inégalités de van der Corput [26, p. 198, tome I] ou [21, theorem 1, p. 563] qui disent entre autres : si  $f$  est réelle de classe  $C^2$  sur  $[a, b]$  avec  $a, b$  entiers et  $0 < \rho \leq |f''(x)| \leq \alpha \rho$  pour  $x \in [a, b]$ , on a

$$\left| \sum_{a \leq k \leq b} e^{if(k)} \right| \leq \Delta_\alpha / \sqrt{\rho},$$

où  $\Delta_\alpha$  ne dépend que de  $\alpha$ . Ici,  $f(x) = x^2/n + tx$  ou  $f(x) = x \ln x + tx$ , la dérivée seconde efface la variable  $t$ , et l'on a  $|f''(x)| = 2/n$  dans le cas gaussien, et  $1/n \leq |f''(x)| \leq 2/n$  dans le second, si on considère d'abord  $\sum_{k=n/2}^n e^{ik \ln k} e^{ikt}$ . Un argument évident de blocs dyadiques ( $\rho = 1/n$ ,  $\alpha = 2$ ) donne alors (8).

### 4.2 – Signes réels

La situation est plus délicate car on a beaucoup moins le choix. Rappelons que  $\mathcal{F}_n$  est l'ensemble des  $f(t) = \sum_{k=0}^n \varepsilon_k e^{ikt}$  tels que  $\varepsilon_k = \pm 1$ . Voici un premier résultat dû à Raphaël Salem et Antony Zygmund [23].

**Théorème 3 (Salem-Zygmund).** *Soit  $(\varepsilon_k)$  une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs  $\pm 1$  avec probabilité  $1/2$ . Alors pour  $n \geq 1$  :*

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k e^{ikt} \right\|_\infty \leq \Delta \sqrt{n+1} \sqrt{\ln(n+1)}.$$

Plus généralement, si les  $Z_k$  sont des variables aléatoires indépendantes centrées de module  $\leq 1$ , on a pour  $n \geq 1$  :

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{k=0}^n Z_k e^{ikt} \right\|_{\infty} \leq \Delta \sqrt{n+1} \sqrt{\ln(n+1)}.$$

Autrement dit, quand on prend les  $\varepsilon_k$  au hasard, on a presque le résultat souhaité avec un  $f \in \mathcal{F}_n$ . Soit maintenant  $(t_n)$  la suite (automatique) de Thue-Morse, définie par

$$t_0 = 1, t_{2k} = t_k, t_{2k+1} = -t_k.$$

Et soit  $f(t) = \sum_{k=0}^n t_k e^{ikt} \in \mathcal{F}_n$ . Alors, selon Alexandre Ossipovitch Gelfond [9] :

**Théorème 4 (Gelfond).**

$$\left\| \sum_{k=0}^n t_k e^{ikt} \right\|_{\infty} \leq \Delta (n+1)^{\ln 3 / \ln 4}.$$

et l'exposant  $\ln 3 / \ln 4 = 0.79248$ , est optimal.

Nous sommes ici loin de l'exposant  $1/2$ . On peut faire un peu mieux avec les caractères de Legendre  $(\frac{k}{p})$  lorsque  $n = p - 1$  avec  $p$  premier [19].

**Théorème 5 (Hugh Montgomery).**

Soit  $f(t) = \sum_{k=1}^{p-1} (\frac{k}{p}) e^{ikt}$ . Alors  $\|f\|_{\infty} \leq \Delta p^{1/2} \ln p$  et c'est optimal.

Il reste le facteur logarithmique en trop, et c'est inévitable [19]. La suite de Rudin-Shapiro va combler cette lacune.

### 4.3 – Suite de Rudin-Shapiro

Soit maintenant  $(w_n)$  la suite de Rudin-Shapiro, définie par

$$w_0 = 1, w_{2k} = w_k, w_{2k+1} = (-1)^k w_k.$$

Les seize premiers termes de la suite sont

$$1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 \ 1 \ -1 \dots$$

et de façon générale  $w_n$  est donnée par la formule  $w_n = (-1)^{a_n}$  où  $a_n$  est le nombre de 11 dans la décomposition en base 2 de  $n$ . Par exemple, dans cette base,

$$127 = 1111111$$

donc  $w_{127} = (-1)^6 = 1$ . Asymptotiquement, comme pour une suite aléatoire, il y a autant de signes plus que de signes moins dans la suite de Rudin-Shapiro.

Cette suite correspond a posteriori à la relation de récurrence trouvée d'abord par Harold Shapiro [24], puis plus tard indépendamment par Walter Rudin [22] :  $P_0 = Q_0 = 1$  et

$$P_{r+1}(t) = P_r(t) + e^{i2^r t} Q_r(t) \tag{9}$$

$$Q_{r+1}(t) = P_r(t) - e^{i2^r t} Q_r(t). \tag{10}$$

Cette relation de récurrence exploite délicieusement l'identité du parallélogramme, ou encore l'orthogonalité de la matrice de Hadamard

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^* A = 2I \tag{11}$$

et donne des polynômes  $P_r, Q_r \in \mathcal{F}_n, n = 2^r - 1$ , vérifiant identiquement

$$|P_r(t)|^2 + |Q_r(t)|^2 = 2^{r+1} \tag{12}$$

ainsi que

$$P_r(t) = \sum_{k=0}^{2^r-1} w_k e^{ikt}, \quad Q_r(t) = \sum_{k=0}^{2^r-1} (-1)^{r+k-1} w_{2^r-k} e^{ikt}. \tag{13}$$

La suite de Rudin-Shapiro ne fournit pas la réponse à la conjecture de Littlewood (on a par exemple  $P_{2^{r+1}}(-1) = 0$ ). Mais la relation (12) indique malgré tout une certaine régularité dans le comportement du module : quand  $P_r$  faiblit, c'est  $Q_r$  qui prend le relais, et réciproquement. Les auteurs de l'article discuté vont exploiter à fond cette propriété. Les sommes partielles de ces polynômes ont aussi un bon comportement, rappelé dans [1], et cette propriété jouera également un rôle important :

$$\|P_{<n}\|_{\infty} := \left\| \sum_{k=0}^{n-1} w_k e^{ikt} \right\|_{\infty} \leq 5\sqrt{n}. \tag{14}$$

Une généralisation à plusieurs variables de la construction de Rudin-Shapiro donne des résultats intéressants en théorie des séries de Dirichlet [18].

## 5. Résultats relativement plus récents

Littlewood [16] s'est beaucoup investi sur (une variante de) l'exemple (8). Si  $P_n \in \mathcal{G}_n$  est le polynôme correspondant, il obtenait la minoration

$$|P_n(t)| \geq \delta \sqrt{n}$$

pour tous les  $t$  en dehors d'un petit intervalle  $I$  autour de l'origine (modulo  $2\pi$ ) et n'arrivait pas à effacer cette exception. D'où sa conjecture sur l'existence de polynômes plats (au sens de (5)) dans  $\mathcal{G}_n$  ou  $\mathcal{F}_n$ , soit comme on l'a déjà dit :

$$\exists f^* \in \mathcal{F}_n \text{ telle que } \delta\sqrt{n} \leq |f^*(t)| \leq \Delta\sqrt{n} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (15)$$

où  $\delta, \Delta$  sont deux constantes numériques positives. Plusieurs tentatives infructueuses ont été effectuées ; citons d'abord celle de Beller et Newman [4], qui construisent pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\delta > 0$  un polynôme  $P(t) = P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_{k,n} e^{ikt}$  vérifiant :

$$\|P\|_\infty \leq 1, |a_{k,n}| \leq 1, |P(t)| \geq (1 - 40\delta \ln 1/\delta)\sqrt{n}\delta \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Leur preuve est très simple : on part d'une gaussienne imaginaire

$$f(t) = e^{in\delta t^2}, |t| \leq \pi, \text{ avec } \delta > 0 \text{ petit,}$$

qu'on périodise et dont on prend une somme de Fejér shiftée pour obtenir  $P_n$ . La propriété  $|a_{k,n}| \leq 1$  se prouve à l'aide des inégalités de van der Corput [21] et tout est dit. Mais les coefficients ne sont pas de module 1, donc  $P \notin \mathcal{G}_n$ .

Citons ensuite celle de Tom Körner [14]. Sa construction d'un bon  $f^*$  repose sur une jolie idée de correction aléatoire (aussi utilisée dans un autre contexte par Boris Kashin [13]) que nous décrivons maintenant. Soit  $a \in \mathbb{D}$ , le disque unité. On cherche à remplacer au hasard  $a$  par  $a^* \in \mathbb{T}$ , le cercle unité, la variable aléatoire  $a^*$  ayant une loi de probabilité  $\mu_a$  sur  $\mathbb{T}$ , de façon que  $a$  soit le barycentre des valeurs prises par  $a^*$  :

$$\mathbb{E}(a^*) := \int_{\mathbb{T}} z d\mu_a(z) = a. \quad (16)$$

Si  $|a| = 1$ , on ne corrige rien :  $a^* = a$ . Si maintenant l'on dispose d'un polynôme  $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k e^{ikt}$  avec de *bonnes propriétés*, où  $|a_k| \leq 1$ , mais où  $|a_k| = 1$  « pendant longtemps » ( $k \leq (1 - \varepsilon)n$  avec  $0 < \varepsilon < 1$  petit et qui a le droit de dépendre de  $n$ ), si on remplace indépendamment chaque  $a_k$  par un  $a_k^*$  et qu'on forme  $f^*(t) = \sum_{k=0}^n a_k^* e^{ikt} \in \mathcal{G}_n$ , on commet une erreur

$$E(t) = \sum_{(1-\varepsilon)n < k \leq n} (a_k^* - a_k) e^{ikt}.$$

Les variables  $a_k^* - a_k$  sont centrées, cette erreur est donc contrôlée par une estimation probabiliste à la Salem-Zygmund comme dans le théorème 3, et en un sens vague les bonnes propriétés de  $f$  sont conservées quand on passe de  $f$  à  $f^*$ .

Le choix de Körner est le suivant ; on trace la perpendiculaire en  $a$  au rayon  $0a$ , qui coupe  $\mathbb{T}$  en des points  $u, v$  dont  $a$  est le milieu : on prend  $\mu_a = \frac{\delta_u + \delta_v}{2}$ , et (16) a lieu. Mais Körner se base, avant correction, sur un résultat malheureusement faux d'une manière qui n'a pas été réparée ; une certaine fonction périodique est bien contrôlée sur l'intervalle  $[-1/4, 1/4]$  de longueur  $1/2$ , mais sa période est 1 et non pas  $1/2$ , ce contrôle est donc insuffisant (l'erreur a été détectée par John Benedetto [5]). Le travail de Körner [14] ne résout donc pas la conjecture de Littlewood.

Décrivons maintenant le travail de Kahane [11, p. 76], [12] ; la fonction  $f$  de départ, cette fois de période 1, se présente sous la forme

$$f(t) = \sum_{|k| \leq n/2} \varphi(k/n) e^{-i\pi k^2/n} e^{2i\pi kt} \\ =: \sum_{|k| \leq n/2} a_{k,n} e^{2i\pi kt}, |a_{k,n}| \leq 1$$

où  $\varphi$  est une fonction plateau à support dans  $[-1/2, 1/2]$ , soit pour  $\varepsilon > 0$  petit :

$$0 \leq \varphi \leq 1, \varphi(t) = 1 \text{ si } |t| \leq 1/2 - \varepsilon, \varphi(\pm 1/2) = 0.$$

Utilisant élégamment la formule sommatoire de Poisson et des gaussiennes imaginaires (déjà présentes comme on l'a vu chez Beller et Newman), Kahane montre que

$$f(t) \approx \sqrt{n} e^{i\pi n t^2} \varphi(t).$$

On y voit bien le module de  $f$  plonger sur un petit arc autour de  $e^{i\pi} = -1$  (comme chez Littlewood), et c'est là qu'il faut corriger ! (notons au passage que  $|a_k| = 1$  pour beaucoup de valeurs de  $k$ , à savoir  $|k| \leq (1 - \varepsilon)n/2$ ). Kahane reprend l'idée de Körner, mais son choix pour la correction est plus sophistiqué ; on prend pour  $\mu_a$  la mesure harmonique au point  $a$ , soit encore la mesure

$$\mu_a = \frac{1 - |a|^2}{|a - e^{it}|^2} m$$

où  $m$  est la mesure uniforme (ou mesure de Haar) du cercle  $\mathbb{T}$ . Et (16) a lieu car la mesure harmonique  $\mu_a$  reproduit les fonctions harmoniques au point  $a$ . Kahane obtient alors de façon non triviale le résultat suivant, qui réfute au passage la conjecture d'Erdős.

**Théorème 6 (Kahane).** *Il existe pour tout  $n$  un polynôme  $f^* = f_n^* \in \mathcal{G}_n$  tel que*

$$(1 - \varepsilon_n)\sqrt{n} \leq |f^*(t)| \leq (1 + \varepsilon_n)\sqrt{n} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (17)$$

avec  $\varepsilon_n = O(n^{-1/17})$ .

La construction de Kahane est complètement auto-contenue, correcte et répond à la conjecture de Littlewood pour  $\mathcal{G}_n$  (il faudra attendre BBMST 2020 pour le cas  $\mathcal{F}_n$ ). Et l'on peut presque prendre  $\delta = \Delta = 1$  dans (15). Les polynômes de Kahane sont donc *ultraplats*. Ces polynômes ont de plus une phase « gaussienne » [20] et ceci est un phénomène général [8]. József Beck [2] a ensuite montré l'existence de polynômes ultraplats  $f_n^*(t) = \sum_{k=0}^n a_{k,n} e^{ikt} \in \mathcal{G}_n$  avec  $a_{k,n}^{400} \equiv 1$ . On pourrait dire que ces polynômes sont presque dans  $\mathcal{F}_n$ ...

## 6. La solution de BBMST

### 6.1 – Le principe général

L'existence de polynômes plats  $P \in \mathcal{F}_n$  a été prouvée récemment dans [1]. Nous commençons par donner une idée schématique de la preuve.

1. On peut supposer  $n$  grand.
2. On cherche un polynôme trigonométrique  $P(t) = \sum_{k=-2n}^{2n} \varepsilon_k e^{ikt}$ ,  $\varepsilon_k = \pm 1$  tel que

$$\delta\sqrt{n} \leq |P(t)| \leq \Delta\sqrt{n} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Par shift, cela nous donnera (15) pour  $n \equiv 0 \pmod 4$ , ce qui suffit.

3.  $P$  va se présenter sous la forme

$$P = C + iS$$

où  $C$  est un polynôme trigonométrique réel en cosinus et où  $S$  est un polynôme trigonométrique réel en sinus. De façon plus précise, on prendra pour une partie convenable  $A \subset [2n]$ ,  $B = [2n] \setminus A$  et des signes  $\varepsilon_k$ ,  $k \in [2n]$ , bien choisis (posant par exemple  $\varepsilon_0 = 1$ )

$$C(t) = \varepsilon_0 + 2 \sum_{k \in A} \varepsilon_k \cos kt, \quad S(t) = 2 \sum_{k \in B} \varepsilon_k \sin kt$$

et l'on complètera la définition des  $\varepsilon_k$  en posant

$$\varepsilon_{-k} = \varepsilon_k \text{ pour } k \in A, \quad \varepsilon_{-k} = -\varepsilon_k \text{ pour } k \in B.$$

Nous emploierons la notation  $A \lesssim B$  pour indiquer que  $a \leq \Delta B$  où  $\Delta$  est une constante numérique positive. Avec une convention analogue pour  $A \gtrsim B$ . La majoration  $|P(t)| \leq \Delta\sqrt{n}$  ne posera (presque) aucun problème. Ensuite, on montrera en deux étapes que l'on peut choisir nos  $\varepsilon_k = \pm 1$  tels que  $|C(t)| \gtrsim \sqrt{n}$  la moitié du temps et  $|S(t)| \gtrsim \sqrt{n}$  l'autre moitié. L'inégalité évidente

$$|P(t)| \geq \max(|C(t)|, |S(t)|) \quad (19)$$

nous donnera alors l'inégalité de gauche dans (18), et ainsi la conjecture de Littlewood. La moitié du temps voudra dire : on construit en même temps que  $C$ , modulo  $2\pi$ , une famille  $\mathcal{F}$  d'intervalles (ou arcs de cercle) disjoints, de taille environ  $1/n$ , séparés d'au moins environ  $1/n$ , en nombre  $N = \gamma n$ , une petite fraction de  $n$  ( $2^{-43} \leq \gamma < 2^{-40}$ ); et ce de façon à obtenir  $|C(t)| \lesssim \sqrt{n}$  et

$$|C(t)| \geq \delta\sqrt{n} \text{ pour tout } t \in \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I. \quad (20)$$

L'autre moitié du temps consistera à construire ensuite  $S$  tel que

$$|S(t)| \geq \delta\sqrt{n} \text{ pour tout } t \in \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I. \quad (21)$$

### 6.2 – La construction de $C$

Pour la compréhension de cette sous-section, quelques nouvelles notations sont indispensables.

**Notations.** À l'entier donné  $n \geq 2$ , on associe un entier *impair*  $r$  tel que

$$N := 2^{r+11} + 2^r - 1 = \gamma n$$

où  $2^{-43} < \gamma \leq 2^{-40}$ . On pose aussi  $T = 2^{r+10}$ .

$$A' = \{2^{r+10}, \dots, 2^{r+10} + 2^r - 1\}$$

$$\cup \{2^{r+11}, \dots, 2^{r+11} + 2^r - 1\}, \quad A = 2A'$$

L'ensemble  $A$  est ainsi constitué de  $2^{r+1}$  entiers pairs, et contenu dans  $[2n]$ . L'on va d'abord construire

$$c(t) = \sum_{k \in A} \varepsilon_k \cos kt, \quad \varepsilon_k = \pm 1 \quad (22)$$

de sorte que  $c(t)$  soit  $O(\sqrt{n})$  tout le temps et  $\geq \delta\sqrt{n}$  en module la moitié du temps. C'est le théorème 2.3 de [1]. Les auteurs prennent (à la Rudin-Shapiro)

$$c(t) = \Re \left( e^{2itT} P_r(2t) + e^{4itT} Q_r(2t) \right).$$

Pour la preuve, on effectue une renormalisation et un grossissement de l'identité (12) en posant

$$\alpha(x) = 2^{-(r+1)/2} P_r(x/T), \quad \beta(x) = 2^{-(r+1)/2} Q_r(x/T),$$

ainsi que

$$H(x) = e^{ix} \alpha(x) + e^{2ix} \beta(x),$$

où la multiplication par  $e^{ix}$  et  $e^{2ix}$  est destinée à séparer les rôles de  $\alpha$  et  $\beta$ .

L'identité (12) devient

$$|\alpha(x)|^2 + |\beta(x)|^2 = 1 \quad (23)$$

et le résultat essentiel est :

**Théorème 7.** Soit  $I$  un intervalle de longueur  $7\eta > 0$ , subdivisé en 7 intervalles consécutifs  $I_j$ ,  $0 \leq j \leq 6$ , de longueur  $\eta$ . Il existe un indice  $j$  tel que

$$|\Re(H(x))| \geq \frac{\eta^3}{27} \text{ pour tout } x \in I_j.$$

Un tel  $I_j$  est appelé un bon intervalle (un mauvais dans le cas contraire).

Ce résultat implique le contrôle de  $c(t)$  et le théorème 2.3 via l'identité

$$c(t) = 2^{(r+1)/2} H(2tT). \quad (24)$$

Nous ne disons rien sur les détails de la preuve, technique mais élémentaire. Partant de (23), les outils d'analyse réelle sont l'inégalité de Bernstein, un petit peu de combinatoire, et l'estimation de l'erreur pour les dérivées dans la formule d'interpolation de Lagrange. On voit alors bien comment choisir les intervalles de la famille  $\mathcal{F}$  ; on coupe les réels modulo  $4\pi T$  en  $2n$  intervalles  $K_1, \dots, K_{2n}$  de longueur  $7\eta$  avec  $7\eta = 2T\pi/n$ . Chaque intervalle  $K_j$  est redécoupé à la manière du théorème 7, et on obtient une famille  $\mathcal{F}_{\mathcal{J}}$  d'intervalles, constituée des réunions maximales de « mauvais » intervalles dans chaque  $K_j$ , telle que  $|\Re(H(x))| \geq \delta' > 0$  en dehors de  $\bigcup_{I \in \mathcal{F}_T} I$ . Puis après dégrossissement (penser  $t = x/(2T)$ ) on obtient une famille  $\mathcal{F} = \frac{1}{2T} \mathcal{F}_T$  d'intervalles de longueur environ  $1/n$ , pour laquelle (grâce à (24) et au fait que  $2^r \approx n$ ) :

**Théorème 8.** Soit  $\mathcal{F}$  la famille d'intervalles précédente. Si  $c$  est comme dans (22), on a

$$|c(t)| \geq \delta\sqrt{n} \text{ pour tout } t \notin \bigcup_{I \in \mathcal{F}} I.$$

On prendra finalement

$$C = 1 + 2c = 1 + 2 \sum_{k \in A} \varepsilon_k \cos kt. \quad (25)$$

### 6.3 – La construction de $S$

Encore des notations... la partie  $A = 2A'$  est comme dans la sous-section précédente. On note ensuite  $A_e$  l'ensemble des entiers pairs de  $[2n]$  qui ne sont pas dans  $A$ , et

$$A_o = \{1, 3, \dots, 2n-1\}$$

l'ensemble des entiers impairs dans  $[2n]$ . Notons que  $B := A_e \cup A_o = [2n] \setminus A$ .

Cette partie est nettement plus délicate, et il y a en fait deux sommes  $S_o, S_e$  en sinus. De façon plus précise, on prend

$$S = 2(S_e + S_o)$$

où, avec des  $\varepsilon_k = \pm 1$  à bien choisir,

$$S_e(t) = \sum_{k \in A_e} \varepsilon_k \sin kt$$

$$S_o(t) = \sum_{k \in A_o} \varepsilon_k \sin kt$$

et où les parties  $A_e, A_o$  sont comme ci-dessus.

La partie « paire »  $S_e$  sera encore choisie à la Rudin-Shapiro et la partie « impaire »  $S_o$  demandera un ingrédient nouveau.

**1. Choix de  $S_e$ .** Avec les notations de Rudin-Shapiro, on prend

$$S_e(t) = \Im(P_{<n+1}(2t) - e^{i2Tt} P_r(2t) - e^{i4Tt} P_r(2t)).$$

On a clairement

$$|S_e(t)| \lesssim \sqrt{n} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad (26)$$

d'après (14). L'utilité de  $S_e$  sera essentiellement de compléter  $S_o$  sans grande perturbation, de façon que  $S$  ait la forme et les propriétés souhaitées.

**2. Choix de  $S_o$ .** Combinatoire et déterminisme, ou probabilité? Là est la question! La construction de Kahane est éminemment probabiliste avec l'argument de correction aléatoire. Encore que la partie déterministe avec la formule sommatoire de Poisson joue un rôle préliminaire important. Jean Bourgain et Enrico Bombieri [6, sections 13-24] proposent une construction purement déterministe de polynômes ultraplats, avec un terme d'erreur plus précis que Kahane ( $\varepsilon_n = O(n^{-1/9})$ ) au lieu de

$\varepsilon_n = O(n^{-1/17})$ ). Mais cette construction paraît encore bien plus compliquée... et nous ne sommes pas sûrs qu'elle soit sans probabilités à cent pour cent. Il nous semble que la collaboration entre les deux méthodes est la solution la meilleure et la plus accessible; ce qui va se passer ici, dans le langage des coloriage. Colorions en Rouge et Bleu les points de l'ensemble  $[n]$ . Si  $A$  est une partie de  $[n]$ , formons la valeur absolue de la différence entre le nombre de points bleus et celui des points rouges dans  $A$ , appelée la *discrédance* de  $A$  et notée  $\text{disc}(A)$ . En termes plus froids, on se donne une suite  $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq n}$  de signes  $\pm 1$ , et

$$\text{disc}(A) = \left| \sum_{k \in A} \varepsilon_k \right|.$$

Ou encore, notant  $v_A$  et  $\varepsilon$  les vecteurs  $1_A$  et  $(\varepsilon_k)$  dans  $\mathbb{R}^n$  euclidien,

$$\text{disc}(A) = |\langle v_A, \varepsilon \rangle|. \tag{27}$$

Un très joli résultat de Joël Spencer [25] dit que

**Théorème 9 (Spencer).** *Soient  $A_1, \dots, A_m$  des parties de  $[n]$ , avec  $m \geq n$ . Il existe un coloriage de  $[n]$  tel que, pour tout  $i$  :*

$$\text{disc}(A_i) \leq C\sqrt{n}\sqrt{\ln 2m/n}.$$

Le corollaire suivant fait le lien avec l'analyse harmonique, et généralise le résultat de Rudin et Shapiro.

**Corollaire 1 (Spencer).** *Soient  $a_0, \dots, a_n$  des complexes de module  $\leq 1$ . Il existe des signes  $\varepsilon_k = \pm 1$  tels que :*

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k \varepsilon_k e^{ikt} \right\|_{\infty} \leq \Delta \sqrt{n+1}.$$

La formulation « coloriage » suggère une approche purement combinatoire et déterministe, mais ce n'est pas le cas; Spencer utilise de la combinatoire (lemme de Shelah-Sauer-Kleitman) mais aussi des probabilités (théorème de la limite centrale, variables aléatoires sous-gaussiennes, etc.). Idem pour ce qui suit.

En termes du produit scalaire (27), le résultat de Spencer a été généralisé par Shachar Lovett et Raghu Meka [17]; nous donnons la reformulation par BBMST. Cette reformulation est la clé pour la construction de la partie sinusoidale impaire  $S_o$ .

**Proposition 2.** *Soient  $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in [-1, 1]^n$ . Si  $c_1, \dots, c_m \geq 0$ , et satisfont à*

$$\sum_{j=1}^m \exp(-c_j^2/14^2) \leq n/16, \tag{28}$$

alors il existe un  $x \in \{-1, 1\}^n$  tel que

$$|\langle x - x_0, v_j \rangle| \leq (c_j + 30)\sqrt{n} \|v_j\|_{\infty}. \tag{29}$$

pour tout  $j \in [m]$ .

Il faut voir les  $c_j$  comme des seuils, et penser d'abord  $x_0 = 0$ . Si ces seuils sont suffisamment grands pour qu'on ait (28), alors un choix de signes  $x \in \{-1, 1\}^n$  réalise (29) (avec  $m$  grand devant  $n$  dans l'utilisation qui suivra). Rappelons que si  $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$\|u\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq n} |u_k|.$$

Voici comment on va exploiter la Proposition 2 à un coloriage  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \{-1, 1\}$  on associe la fonction en escalier

$$g_{\alpha} = \sum_{l \in \mathcal{F}} \alpha(l) 1_l$$

et sa transformée de Fourier en sinus

$$\widehat{\varepsilon}_j = K\sqrt{n} \int_{-\pi}^{\pi} g_{\alpha}(t) \sin jt \, dt, \quad j \in A_0,$$

où  $K > 0$  est ici une constante numérique adéquate. On pose

$$\widehat{S}_{\alpha}(t) = \sum_{j \in A_0} \widehat{\varepsilon}_j \sin jt.$$

Par inversion de Fourier,  $\widehat{S}_{\alpha}(t)$  devrait approcher  $\pi K \sqrt{n} g_{\alpha}(t)$ , et en particulier être grande sur les intervalles  $l \in \mathcal{F}$ . Pour cela, en prenant pour  $c_j$  un grand multiple de  $\sqrt{\ln n/N}$  (ici les notations des auteurs ne sont pas très cohérentes, le rôle de  $m$  est joué par  $n$  et celui de  $n$  par  $N = \gamma n$ , petit devant  $n$ ), on obtient grâce à la Proposition 2 un coloriage  $\alpha$  tel que les  $\widehat{\varepsilon}_j$ ,  $j \in A_0$ , soient de module  $\leq 1$ , et qu'on ait

**Lemme 1.**

$$|\widehat{S}_{\alpha}(t)| \geq \delta \sqrt{n}$$

pour tout  $t \in \bigcup_{l \in \mathcal{F}} l$ . De plus, avec  $\Delta > 0$  numérique,

$$|\widehat{S}_{\alpha}(t)| \leq \Delta \sqrt{n}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Puis on applique une seconde fois cette proposition pour obtenir un coloriage  $\varepsilon : A_o \rightarrow \{-1, 1\}$  tel que, posant

$$S_o(t) = \sum_{j \in A_o} \varepsilon_j \sin jt,$$

on ait

**Lemme 2.**

$$|\widehat{S}_\alpha(t) - S_o(t)| \leq 72\sqrt{n}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

On conclut ainsi, avec une constante numérique  $\delta > 0$  fantaisiste, mais l'idée est là; la somme  $S(t) = 2(S_e(t) + S_o(t))$  est contrôlée supérieurement partout (en  $O(\sqrt{n})$ ) grâce à (26) et aux Lemmes 1 et 2. Ensuite, si  $t \in \bigcup_{l \in \mathcal{F}} I$ , ces mêmes lemmes montrent que la partie impaire l'emporte sur la partie paire :

$$|S_e(t) + S_o(t)| \geq |S_o(t)| - |S_e(t)| \geq 2\delta\sqrt{n} - \delta\sqrt{n} = \delta\sqrt{n}.$$

Enfin, si  $t \notin \bigcup_{l \in \mathcal{F}} I$ , c'est comme on l'a vu la partie cosinus qui prend le relais :

$$|C(t)| \geq \delta\sqrt{n}.$$

Ceci achève la preuve de la conjecture de Littlewood.

## 7. Conclusion

Voici quelques questions naturelles à la suite du travail BBMST.

1. Nous avons vu que, pour chaque  $n$ , il existe un polynôme

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^n u_{k,n} e^{ikt}$$

avec  $f_n \in \mathcal{G}_n$  et  $f_n$  ultraplats. Peut-on trouver une série de Taylor fixe  $\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$ , avec  $|u_k| = 1$  et  $z = e^{it}$ , dont toutes les sommes partielles d'indice  $n$  assez grand sont (ultra)plates?

2. Peut-on obtenir l'ultraplatitude avec  $u_{k,n} = \pm 1$ ? (Connexions intéressantes avec la conjecture de Banach en théorie ergodique, cf. [10]).
3. Peut-on donner une construction purement déterministe mais accessible de polynômes plats ou ultraplats? Nous ne pensons pas que l'article [6, Sections 13 -27] le fasse vraiment. Ou alors à quel prix!! Le terme « derandomizing » utilisé à répétition par les auteurs dit bien qu'il reste des choses à faire...

## Références

- [1] P. BALISTER et al. « Flat Littlewood polynomials exist ». *Ann. of Math. (2)* **192**, n° 3 (2020), p. 977-1004.
- [2] J. BECK. « Flat polynomials on the unit circle—note on a problem of Littlewood ». *Bull. London Math. Soc.* **23**, n° 3 (1991), p. 269-277.
- [3] E. BELLER et D. J. NEWMAN. « An  $l_1$  extremal problem for polynomials ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **29** (1971), p. 474-481.
- [4] E. BELLER et D. J. NEWMAN. « The minimum modulus of polynomials ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **45** (1974), p. 463-465.
- [5] J. BENEDETTO. « Communication personnelle » (1995).
- [6] E. BOMBIERI et J. BOURGAIN. « On Kahane's ultraflat polynomials ». *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **11**, n° 3 (2009), p. 627-703.
- [7] T. ERDÉLYI. « The phase problem of ultraflat unimodular polynomials: the resolution of the conjecture of Saffari ». *Math. Ann.* **321**, n° 4 (2001), p. 905-924.
- [8] P. ERDŐS. « Some unsolved problems ». *Michigan Math. J.* **4** (1957), p. 291-300.
- [9] A. GELFOND. « Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données ». *Acta Arithmetica* **13**, n° 3 (1968), p. 259-265.
- [10] M. GUENAI. « Morse cocycles and simple Lebesgue spectrum ». *Ergodic Theory Dynam. Systems* **19**, n° 2 (1999), p. 437-446.
- [11] J.-P. KAHANE. *Some random series of functions*. Second. **5**. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1985, p. xiv+305.
- [12] J.-P. KAHANE. « Sur les polynômes à coefficients unimodulaires ». *Bull. London Math. Soc.* **12**, n° 5 (1980), p. 321-342.
- [13] B. KASHIN. « Communication personnelle » (1995).
- [14] T. W. KÖRNER. « On a polynomial of Byrnes ». *Bull. London Math. Soc.* **12**, n° 3 (1980), p. 219-224.
- [15] K. de LEEUW, Y. KATZNELSON et J.-P. KAHANE. « Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues ». *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **285**, n° 16 (1977), A1001-A1003.

- [16] J. E. LITTLEWOOD. « On polynomials  $\sum^n \pm z^m, \sum^n e^{\alpha m^i} z^m, z = e^{\theta i}$  ». *J. London Math. Soc.* **41** (1966), p. 367-376.
- [17] S. LOVETT et R. MEKA. « Constructive discrepancy minimization by walking on the edges ». *SIAM J. Comput.* **44**, n° 5 (2015), p. 1573-1582.
- [18] B. MAURIZI et H. QUEFFÉLEC. « Some remarks on the algebra of bounded Dirichlet series ». *J. Fourier Anal. Appl.* **16**, n° 5 (2010), p. 676-692.
- [19] H. L. MONTGOMERY. « An exponential polynomial formed with the Legendre symbol ». *Acta Arith.* **37** (1980), p. 375-380.
- [20] H. QUEFFÉLEC et B. SAFFARI. « On Bernstein's inequality and Kahane's ultraflat polynomials ». *Journal of Fourier Analysis and Applications* **2**, n° 6 (1995), p. 519-582.
- [21] O. ROBERT. « On van der Corput's  $k$ -th derivative test for exponential sums ». *Indag. Math. (N.S.)* **27**, n° 2 (2016), p. 559-589.
- [22] W. RUDIN. « Some theorems on Fourier coefficients ». *Proc. Amer. Math. Soc.* **10** (1959), p. 855-859.
- [23] R. SALEM et A. ZYGMUND. « Some properties of trigonometric series whose terms have random signs ». *Acta Math.* **91** (1954), p. 245-301.
- [24] H. S. SHAPIRO. « Extremal problems for polynomials and power series ». Thèse de doct. Massachusetts Institute of Technology, 1952.
- [25] J. SPENCER. « Six standard deviations suffice ». *Transactions of the American mathematical society* **289**, n° 2 (1985), p. 679-706.
- [26] A. ZYGMUND. *Trigonometric series. 2nd ed. Vols. I, II.* Cambridge University Press, New York, 1959, Vol. I. xii+383 pp., Vol. II. vii+354.



### Hervé QUEFFÉLEC

Université Lille Nord de France, USTL, laboratoire Paul Painlevé UMR CNRS 8524 & Fédération Mathématique des Hauts-de-France FR 2037 CNRS  
 Herve.Queffelec@univ-lille.fr

Après avoir été Maître de Conférences à l'université d'Orsay, puis Professeur à l'université de Lille, Hervé Queffélec est actuellement Professeur émérite dans cette université, et membre de l'UMR 8524 au CNRS. Ses travaux actuels portent principalement sur la théorie analytique des séries de Dirichlet et les opérateurs de composition sur les espaces de Banach de fonctions holomorphes. Il s'intéresse également à l'analyse harmonique commutative, aux propriétés fines des polynômes trigonométriques, et aux méthodes probabilistes en Analyse, domaines dans lesquels il a publié une quarantaine d'articles ces dix dernières années. L'auteur a également écrit plusieurs livres de recherche (l'un, en collaboration, est en préparation), et d'enseignement au niveau Maîtrise ou Agrégation.



# Un entretien avec Alain CONNES

Propos recueillis par Claire Debord

### As-tu eu une enfance qui te prédestinait à devenir un grand scientifique ?

Je dirais « pas du tout ». Par contre, j'ai eu une enfance qui a été très heureuse jusqu'à l'âge de huit ans. Je suis né à Draguignan dans la propriété de mes grands-parents, qui était un endroit merveilleux. Puis à l'âge de huit ans, mon père a accepté un poste de chef de brigade à Marseille. On a donc quitté Draguignan pour un quartier déplaisant de Marseille où il y avait des bandes de blousons noirs. Cela a été un changement radical de mon environnement. Le travail de mon père jusqu'en 66 consistait à poursuivre des gangsters pour démanteler les trafics de contrebande, ce qui était très dangereux. Ma mère était médecin pédiatre, elle exerçait dans les écoles. C'est mon frère aîné, Bernard, qui, en intégrant deux ans avant moi l'École normale de la rue d'Ulm, a fait la percée. Il a eu du mal à convaincre ma mère qu'il valait mieux entrer à l'École normale plutôt que d'aller à l'École polytechnique. Mes parents ne connaissaient pas l'École normale, ils n'étaient pas du tout de ce milieu-là, ce n'était pas de « grands intellectuels ».

### Comment et quand as-tu commencé à t'intéresser aux mathématiques ?

Il y a une photo assez parlante : j'avais cinq ans, on est assis à une table avec mon père et mon plus jeune frère dans ce qu'on appelait le bosquet, c'est-à-dire un petit bois qui était dans la propriété. Mon père me faisait faire les quatre opérations et j'éprouvais un plaisir immense à faire ça. Il était avec nous, très calme, très sérieux... On a compris, au bout d'un moment, qu'il utilisait ce qu'on appelle la règle de trois pour vérifier nos calculs et on pouvait alors en faire autant. C'était un vrai plaisir et un premier contact.

J'ai toujours eu plaisir à faire des maths, mais en Sixième s'est produit un peu par accident, un épisode intrigant. Notre professeur, M. Emdon, qui était

habituellement enseignant en Sup et Spé, n'avait pas du tout réalisé à quel niveau il devait faire ses cours. Un jour, il posa un problème de géométrie au tableau. Il me regarda longuement sans rien dire, puis me demanda « Alors Monsieur Connes, comment fait-on ? ». Ce qui est absolument extraordinaire, c'est que je lui ai donné la solution. Mais après lui avoir donné la solution, il m'a fallu plus d'une demi-heure pour comprendre pourquoi ma réponse n'était pas complètement idiote. J'ai alors perçu que nous possédons sans doute des savoirs dont nous n'avons pas conscience et qui peuvent s'exprimer, surgir, dans des conditions favorables. Cela a été un tournant.

Il y a eu un autre épisode en classe de Seconde. Mon professeur de mathématiques nous avait dit « Il n'existe pas de formule qui donne le nombre  $\Pi(n)$  de nombres premiers plus petit que  $n$ . » Je suis rentré chez moi et le lendemain, je lui ai donné une formule ! Bien sûr, elle était trop compliquée pour être utile – mais évidemment, il y a une formule... Il y a deux ou trois ans, j'ai enfin trouvé une formule que l'on peut écrire sur une demi-ligne<sup>1</sup>. Elle n'est pas utile non plus, mais elle n'est pas très difficile à concevoir.

Quand j'étais en Math Sup et Math Spé, c'était beaucoup plus net. J'avais conçu de mon côté ma propre théorie qui consistait à remplacer partout les dérivées par des différences finies. Travailler avec des suites au lieu de travailler avec des fonctions. Je ne savais pas du tout, bien sûr, que ça avait déjà été fait par Newton. Il arrivait, de temps en temps dans le cours, que ça tombe pile dans le cadre de la théorie que j'avais développée, ce qui était un vrai plaisir pour moi ! Je rentrais souvent du Lycée Thiers avec un professeur de Math Sup, assez particulier, qui s'appelait Victor Charlier de Chily, on marchait ensemble, je lui racontais ma théorie et il me répondait. Par contre, le reste ne m'intéressait pas beaucoup.

1.  $\Pi(n)$  est la partie entière de  $\sum_1^n \sin^2(\frac{\pi\Gamma(k)}{2k})$ .

### Saurais-tu dire vers quel âge et dans quelle circonstance tu as décidé d'être mathématicien, d'en faire un métier ?

La direction des mathématiques était assez naturelle. D'autant plus que mon frère Bernard avait intégré l'École normale deux ans avant moi. J'ai donc quitté Marseille, pour entrer à l'École normale à Paris en 66 et je dois avouer que je n'avais alors qu'une idée, c'était de ne rien faire... Or, on se posait tout le temps des problèmes de maths avec les autres élèves de l'école. Ainsi, la première année, je jouais au foot avec mon équipe ou je passais mon temps dans mon bistrot préféré et je réfléchissais aux problèmes posés par les copains. C'était formateur parce que l'on réfléchissait vraiment à ces problèmes avec une liberté totale. Mais je n'allais pas suivre les cours à la fac. J'ai refusé de passer l'agrégation ensuite, car je voulais continuer à réfléchir à mes idées et je ne voulais pas recommencer le calvaire des classes préparatoires, je ne voulais absolument pas retourner dans ce système-là.

Ensuite, des concours de circonstances incroyables se sont produits et m'ont amené à trouver la voie qui m'intéressait. Quand j'étais à l'École normale, j'ai travaillé sur la localisation des zéros de polynômes et j'avais inventé une manière d'ordonner les nombres complexes, que j'appelais ordre faible. Alors bien entendu, ce n'est pas vrai que le produit de deux positifs est positif ; par contre, j'avais observé que la moyenne harmonique de deux positifs est positive et j'en avais déduit des théorèmes connus sur la localisation des zéros de polynômes simplement à partir de là. J'avais présenté mon travail au séminaire Pisot. Mais j'étais sur cette voie assez bizarre de localisation de zéros de polynômes. Durant l'année 69/70, qui correspond à la fin de mes années d'école et à mes débuts de stagiaire au CNRS, j'ai fréquenté le séminaire Choquet qui était très stimulant intellectuellement et je me suis laissé séduire par l'analyse non-standard. À l'issue de cette première année, Gustave Choquet, qui pensait qu'il fallait que j'apprenne de la physique, m'a envoyé à l'école d'été des Houches où j'ai fait la première rencontre signifiante de mon existence. Le physicien-mathématicien Oscar Lanford faisait un cours sur les algèbres de Von Neumann. Durant cette école, j'ai aussi été repéré par un physicien américain, Andrew Lenard, qui m'a offert une bourse

pour participer à une école d'été, à Seattle l'année suivante. En juillet 1971, je venais de me marier, et nous avons commencé ce voyage aux États-Unis avec ma femme par une visite chez mon frère à Princeton. En prévision du long voyage en train qui devait me permettre de me rendre à Seattle, j'ai acheté un peu au hasard au BookStore un livre écrit par un japonais. À ma grande surprise, j'ai découvert une fois à Seattle, que le japonais était là et qu'il donnait un cours sur son livre – c'était Takesaki. Cela m'évoque cette phrase de Shakespeare « There is a tide in the affairs of men. Which, taken at the flood, leads on to fortune. »<sup>2</sup> Je n'ai suivi que ce cours-là et de retour en France, j'ai cherché les mathématiciens qui faisaient des algèbres d'opérateurs. C'est comme cela que j'ai intégré le séminaire de Jacques Dixmier en septembre 1971. Lors de la distribution des articles à étudier, j'ai reçu celui d'Araki et Woods sur la classification des produits tensoriels infinis. En regardant cet article dans le train qui me ramenait chez moi, j'ai réalisé que la théorie de Tomita et Takesaki permet de réécrire les invariants d'Araki-Woods. J'ai écrit une première lettre d'une page à Dixmier, qu'il jugea trop courte, puis une seconde dans laquelle je donnais tous les détails de la trouvaille. Quand je suis allé le voir, je m'en souviens comme si c'était hier, tout ce qu'il m'a dit, c'est « Foncez ! ». La thèse a démarré et puis tout le reste a suivi. Ce qui était rupinant, ça a été l'enchaînement. Ce n'est pas vraiment de la chance parce qu'il faut saisir l'opportunité et il me semble important de dire que cela ne se fait pas tout seul. Le fait que Araki-Woods soit relié à la théorie de Tomita-Takesaki m'a paru être une évidence parce que j'avais les connaissances qu'il fallait. Mais j'ai aussi trouvé quelque chose de très simple, de très important et qui m'a permis d'avancer beaucoup – la technique des matrices  $2 \times 2$ .<sup>3</sup> Bien que ce soit très simple, c'est arrivé au bout de calculs extrêmement compliqués... Après avoir fait tous ces calculs, à un moment donné, effectivement, l'idée est arrivée d'un coup, mais c'était après un très très long travail de préparation. Et puis après tout s'est enchaîné.

### Voudrais-tu nous parler de ton lien avec ton directeur de thèse Jacques Dixmier, comment se passait le travail avec lui ?

2. « Il y a une marée dans les affaires des hommes, prise dans son flux, elle porte au succès. »

3. Tomita associe à tout poids normal, semifini et fidèle sur une algèbre de Von Neumann  $A$ , un groupe d'évolution ou groupe modulaire qui est un groupe d'automorphisme de  $A$  à un paramètre mesurant le défaut pour le poids d'être une trace. Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux poids, le poids  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \varphi(a) + \psi(b)$  sur  $M_2(A)$  et l'égalité  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , permettent de montrer que le groupe d'évolution ne dépend pas du poids à automorphismes intérieurs près.

Travailler avec Jacques Dixmier a joué un rôle crucial, en particulier parce qu'il lisait vraiment les articles qu'on lui donnait. Chaque semaine, je lui envoyais une lettre de trois ou quatre pages, il la lisait et il faisait des commentaires... J'avais donc une routine, je savais que chaque semaine, il fallait que je lui donne trois ou quatre pages les plus nouvelles possible. Ce n'était pas un échange verbal au tableau, c'était un échange par lettre, mais qui fonctionnait incroyablement bien parce qu'il avait cette attention qui est si rare. Je me sentais parfaitement écouté et ça, c'est merveilleux. De même pour la thèse, il a fait un grand nombre de corrections.

Il faut que je raconte l'histoire incroyable de ma soutenance. C'était en avril ou mai 73, je devais passer ma thèse et j'avais tout préparé. À l'époque, il y avait aussi une deuxième thèse que je faisais avec Marie-Paule Malliavin sur l'algèbre. Un des résultats importants de mon travail, l'existence des facteurs hyperfinis qui ne sont pas des produits tensoriels infinis, utilisait un résultat de théorie de la mesure de Wolfgang Krieger. La veille de la soutenance, le soir, je reçois un télégramme de Krieger qui dit « Mon article est faux. ». Catastrophé, j'appelle Dixmier au téléphone, il me dit « Écoutez, vous rigolez, vous avez 36 autres résultats, ce n'est pas un problème. »... Mais moi, j'étais complètement démoralisé. Le lendemain, je soutiens ma thèse et puis le soir, je reçois un deuxième télégramme de Krieger « L'erreur est réparée ». C'était une sacrée bonne nouvelle! Mais j'ai quand même passé ma thèse en sous-marin à cause de ça.

### Quelles ont été les autres rencontres déterminantes dans ton parcours ?

Lorsque je suis rentré de Kingston après avoir beaucoup travaillé sur les algèbres d'opérateurs, j'ai été invité à l'IHÉS à Bures où j'ai fait la rencontre de Dennis Sullivan. Il posait des questions à toutes les nouvelles têtes qu'il voyait. Il a un pouvoir socratique qui le conduit à te pousser dans tes retranchements et à t'apercevoir que ce que tu prends pour argent comptant n'est pas si évident que ça et demande à être approfondi. À Bures, je voyais défiler un tas de notions dont je ne connaissais rien et j'ai pu comprendre la plupart d'entre elles en un rien de temps grâce aux explications de Dennis. Par exemple, c'est lui qui m'a expliqué ce que c'est qu'un feuilletage. Quand j'ai compris qu'on pouvait associer une algèbre de Von Neumann à un feuilletage et que la plupart des facteurs les plus exotiques venaient de feuilletages, j'ai été enthousiasmé parce que je pouvais enfin expliquer

mon travail à des gens dotés d'un vocabulaire et d'un cercle d'idées complètement différents. Tout ça, c'était à partir de l'année 76. Et la géométrie non commutative a vraiment commencé à cette époque. Les feuilletages ont joué un rôle fondamental et je ne les aurais jamais utilisés si j'avais essayé de les comprendre dans les livres. Ainsi, la rencontre avec Dennis Sullivan est ce qui m'a fait passer des algèbres d'opérateurs à la géométrie des espaces non commutatifs. Le lien avec la physique a également été essentiel. J'ai, depuis toujours, pas loin de moi, un petit livre constitué d'articles de physique de théorie des champs sur l'électrodynamique, intitulé *Collected Papers In Quantum Electrodynamics*. J'avais en ligne de mire de comprendre la renormalisation. Ce que j'ai fait avec Dirk Kreimer dans les années 2000. C'est un autre pan important qui trouve sa source dans le fait que dans les années 70, il y avait en France un autre endroit où les algèbres d'opérateurs jouaient un rôle essentiel et en particulier en physique. C'était à Bandol avec Daniel Kastler qui avait réuni autour de lui de nombreux chercheurs physiciens théoriciens et mathématiciens qui pratiquaient une recherche à la frontière entre les algèbres d'opérateurs et la physique quantique. Cela a aussi joué un rôle très important.

### Tu as reçu la médaille Fields en 1982, qu'est-ce que cela a changé pour toi ?

Pour moi, cela n'a rien changé, ça a dû changer le regard des gens sur moi, mais pour moi rien du tout. La réalité sur laquelle on travaille est tellement résistante que cela ne change rien.

### On peut parfois douter.

Mais je doute tout le temps et cela n'a absolument pas changé! Le doute a toujours été présent, il l'est encore parfois, il faut bien vivre avec... Je n'ai jamais eu une impression de facilité. Je pense que le doute est une composante absolument essentielle de l'être humain. Il y a, bien entendu, des moments où l'on est très content que quelque chose fonctionne, mais cela n'enlève pas le doute et la médaille Fields n'a rien changé du tout dans ce domaine-là. La médaille Fields révèle quel était le regard des gens, comment ils ont changé. Mais ce n'est que sociologique, ce n'est pas du tout une consécration, c'est un encouragement à continuer. Cela, d'autant plus, lorsqu'il s'agit d'un sujet mal reconnu comme les algèbres d'opérateurs et même ensuite, la géométrie non commutative.

Parlons un peu de mathématiques. Tu as débuté en révolutionnant les algèbres de von Neumann. Tu as donné naissance et développé ensuite la géométrie non commutative. Tu as travaillé et travaillé encore sur la conjecture de Riemann et sur des questions de théorie des nombres. Tu t'intéresses à la physique théorique et plus particulièrement à produire un modèle de l'espace-temps. Enfin, tu revisites la géométrie algébrique de Grothendieck. Quel est le lien? Est-ce un fil continu qui t'a mené de l'un à l'autre de ces thèmes ou est-ce plutôt un vaste et immense tableau qui se forme à la façon des impressionnistes?

Il y a bien un fil entre les algèbres d'opérateurs et la géométrie non commutative, et cela, grâce aux feuilletages. Les algèbres d'opérateurs n'étaient plus un objet complètement abstrait, algébrique; elles devenaient visibles. Et étant visibles, cela suggérait que notre notion d'espace est beaucoup trop restrictive et qu'il faut la généraliser en remplaçant un espace par un groupoïde, de la manière la plus simple possible, et de permettre ainsi aux points de parler entre eux. On s'aperçoit alors que dans le leitmotiv de la géométrie algébrique, qui est de coder un espace par une algèbre commutative, la commutativité est trop restrictive, car dès que l'on prend un groupoïde, même le plus simple, avec deux points qui se parlent entre eux, on obtient comme algèbre associée celle des matrices  $2 \times 2$ . On est donc attiré vers le développement de la géométrie non commutative. Mais la raison profonde pour laquelle la géométrie non commutative m'a paru extraordinaire, ce n'est pas en tant que généralisation. Grâce à l'astuce des matrices  $2 \times 2$ , je me suis aperçu qu'un espace non commutatif génère son propre temps. Il a une évolution dans le temps qui est complètement canonique, modulo les automorphismes intérieurs. Et cela signifie, qu'un espace non commutatif est en fait « vivant », on peut le refroidir, on peut le chauffer, on peut chercher les états d'équilibre à différentes températures. On peut faire des choses qui sont complètement inédites pour un espace commutatif. Ensuite, le fait que des théories aussi fondamentales que la  $K$ -théorie se prolongent aux espaces non commutatifs rend les choses extrêmement efficaces, avec par exemple l'utilisation du groupoïde tangent... Cela m'a conduit, en 81, à la découverte de la cohomologie cyclique qui fournit un analogue de la théorie de De Rham dans le cas non commutatif. Donc, là il y avait un fil qui s'est poursuivi dans le sens géométrique. Mais je n'avais pas trouvé d'incarnation en physique de cette évolution temporelle canonique des espaces non commutatifs. J'avais

essayé un peu en théorie des champs, mais sans succès. Jusqu'au jour où j'ai rencontré Carlo Rovelli qui est quelqu'un qui a une véritable compréhension philosophique de la physique. On a écrit un article dans lequel on a compris que cette évolution temporelle pouvait être la véritable origine du temps tel qu'on le connaît, le temps qui passe, et que c'était une origine thermodynamique. On a donc fait une hypothèse physique qui est l'hypothèse du temps thermodynamique.

La rencontre avec la théorie des nombres est elle aussi singulière. J'avais écrit un article avec Jean-Benoît Bost dans les années 90 dans lequel on avait rencontré, un peu par hasard, un espace non commutatif. Nous avons construit des algèbres de Hecke, à partir d'un groupe discret et un sous-groupe presque normal, qui nous permettaient d'obtenir des facteurs de type III alors que les constructions traditionnelles donnaient des facteurs de type II dont l'évolution temporelle est statique. Nous avons considéré l'exemple, le plus simple possible, du groupe affine sur les rationnels avec le sous-groupe correspondant aux entiers et nous avons obtenu le facteur de type III<sub>1</sub> hyperfini. On avait observé, en refroidissant l'espace et en le réchauffant, que dès qu'on le refroidissait un peu, il y avait une transition de phase avec une brisure spontanée de symétrie, et que le groupe de Galois de l'extension cyclotomique de  $\mathbb{Q}$  apparaissait. De plus, on obtenait le corps cyclotomique en évaluant les états sur une sous-algèbre. On avait trouvé, que la fonction Zêta de Riemann apparaissait comme fonction de partition du système thermodynamique. De retour d'un exposé donné sur le sujet en 96 à Seattle pour l'anniversaire des 70 ans d'Atle Selberg, après une semaine de réflexions nocturnes, j'ai compris qu'en prenant le dual du système obtenu avec Jean Benoît, et en regardant ce que l'on appelle l'action duale, les zéros de la fonction Zêta apparaissaient naturellement sous la forme de ce que l'on appelle un spectre d'absorption. Ce qui était vraiment intéressant, ce n'était pas la réalisation spectrale, c'était le fait qu'on comprenait immédiatement les formules explicites de Riemann-Weil. J'avais écrit une note aux comptes-rendus, dans laquelle je proposais une stratégie qui consistait à forcer un peu les zéros à être sur la droite critique. Après, il s'en est suivi toute une saga, et je continue à travailler sur ces questions avec la même stratégie. Mais ça a considérablement évolué depuis. En particulier dans un travail récent avec Katia Consani et avec Henri Moscovici, on a transformé le spectre d'absorption, qui est très difficile parce qu'il ne se voit

pas, en un spectre d'émission. Et là, les chances sont bien plus grandes d'arriver à quelque chose. Mais c'est un parcours très très long, dans lequel néanmoins, on a rencontré toutes sortes de notions incroyables auxquelles on n'aurait jamais pensé autrement. L'une d'entre elles, qui est sans doute la plus exotique, est ce qu'on appelle la caractéristique 1. C'est un formalisme algébrique, parfaitement analogue à la caractéristique  $p$ , dans lequel l'application  $x \mapsto x^n$  est un endomorphisme pour tout  $n$ , pas seulement pour la puissance  $p$ . Et donc il y a un Frobenius pour tout  $n$ , il y a un tas de propriétés étonnantes qui se produisent.

Il y a un autre volet qui est apparu très brutalement par une autre rencontre. J'avais toujours été hanté par la renormalisation qui me paraissait extrêmement bizarre comme recette de cuisine utilisée par les physiciens. En 98 j'ai rencontré Dirk Kreimer à l'INÉS, qui est un vrai physicien pur et dur, doté d'une intuition incroyable et qui avait imaginé quelque chose qui ressemblait à une algèbre de Hopf, à partir des diagrammes de Feynman. En parlant avec Dirk, j'ai vu qu'il y avait une vraie algèbre de Hopf, que l'on a mise au point. On a commencé à travailler ensemble, on a eu des heures de discussions pendant deux années. Et puis un samedi de septembre 2000, j'ai compris que la renormalisation n'était rien d'autre que la décomposition de Birkhoff pour les fibrés en groupe unipotent sur la sphère. Quand j'ai compris ça, il faut être honnête, là, j'ai vraiment été au plafond. Pas pendant une heure, pas pendant une journée... pendant sept jours! Parce qu'enfin, ce galimatias de recettes de calcul, prenait un sens mathématique parfait. Tel que si on me demandait, à l'improviste, qu'est-ce que la renormalisation? Je pouvais répondre! Cela a été une profonde révélation et après, j'ai continué avec Matilde Marcolli. On a été beaucoup plus loin, on a compris le lien avec ce qu'on appelle le problème de Riemann-Hilbert. Mais la percée, ça a été à un moment extrêmement précis, où j'ai enfin compris que ce que faisait Dirk était précisément ce qui permettait de faire la décomposition de Birkhoff quand on a un groupe qui n'est pas un groupe semi-simple, mais un groupe unipotent.

L'autre épisode important en lien avec la physique, c'est celui du modèle standard. Cette histoire a commencé en 86 par un calcul tout bête. On ajoute souvent une unité à une  $C^*$ -algèbre qui n'en a pas. J'avais une formule de géométrie non commutative qui donnait l'action de Yang Mills et j'ai voulu regarder ce que donne cette action si on ajoute une unité à l'algèbre associée à l'espace-temps... Le calcul

a produit un terme bizarre. Et puis je me suis dit, pourquoi est-ce que je ne rajoute qu'un point? Je vais rajouter toute une couche, je vais penser que l'espace-temps a deux côtés, comme une feuille de papier. Il y a le dessus, il y a le dessous... J'ai recommencé le calcul, et j'ai trouvé un champ scalaire avec un potentiel en  $\phi^4$  qui interagissait avec les autres forces... J'ai reconnu, après quelques péripéties, le champ de Higgs. Donc, là, j'ai compris que la géométrie non commutative pouvait aider à déchiffrer la signification géométrique du modèle standard de la physique des particules. La vraie collaboration s'est produite en 96, quand j'ai rencontré Ali Chamseddine, qui est un être singulier, à la fois très paresseux et génial. On a compris qu'il y avait un moyen de retrouver le modèle standard couplé à la gravitation en prenant une action qui est purement gravitationnelle, parce qu'elle ne dépend que de l'opérateur de Dirac. La géométrie est décrite par l'opérateur de Dirac, et puis l'action spectrale de l'opérateur de Dirac redonne non seulement la gravitation, mais aussi le modèle standard. C'est une histoire où on avance, et puis on a toujours des pépins. Le premier pépin qu'on a eu, c'était en 98. À Kamiokande, au Japon, ils ont trouvé qu'il y avait des oscillations entre les neutrinos. Or, le modèle standard ne permet pas les oscillations entre neutrinos. Donc on s'est dit, « C'est foutu, on n'a pas le bon truc ». J'ai rencontré Dixmier à l'époque, et Dixmier m'a dit, « Non, ce n'est pas foutu. Vous ne persévérez pas assez. ». À l'époque, j'ai abandonné et j'ai été obligé de reprendre en 2004, lorsque l'on a écrit notre livre avec Matilde Marcolli. Elle m'avait demandé d'écrire tous les détails de la formule que nous avons obtenue avec Ali Chamseddine, pour montrer comment retrouver le modèle standard à partir de l'action spectrale : c'est une formule qui prend plusieurs pages, qui est très compliquée. J'ai alors réalisé, en reprenant ces calculs, qu'en modifiant une de nos hypothèses, on obtenait non seulement l'oscillation des neutrinos, mais on obtenait en plus le mécanisme qui donne aux neutrinos une toute petite masse qui est connue en physique comme étant le mécanisme « see-saw », qui avait été « mis à la main » par les physiciens. On était ravi! J'ai écrit un tout petit article seul, puis un article avec Chamseddine et Marcolli. On a eu à nouveau un coup dur en 2008, parce qu'on avait exagérément pensé que notre modèle pouvait être valable jusqu'à unification. Et du coup, on avait une prédiction pour la masse du Higgs qui était de l'ordre de 170 GeV. Or, en 2008, cette masse a été exclue. Une fois encore, je me suis dit « C'est foutu ». En 2012, Ali m'apprend que trois groupes de physiciens ont

montré comment corriger le modèle standard de telle sorte que la masse du Higgs soit la bonne et que ça soit valable à unification. Il suffit de rajouter un champ scalaire avec des couplages particuliers avec le Higgs. Et il ajoute que ce champ scalaire était présent dans notre théorie, publiée deux ans avant, avec les bons couplages mais que l'on avait ignoré. Au lieu de le prendre en compte dans la renormalisation on l'avait fixé à sa valeur du vide. On a donc repris espoir. Depuis, on a collaboré avec Walter van Suijlekom et on a obtenu un modèle qui est un peu plus subtil que le modèle standard, que l'on appelle le modèle de Pati-Salam, qui n'est pas du tout exclu expérimentalement. Du moins, pas encore...

À la même époque j'ai travaillé avec Ali Chamseddine et Slava Mukhanov, un physicien qui fait de la cosmologie, pour cette fois, non pas partir de la physique pour trouver l'espace non commutatif, mais pour justifier l'espace non commutatif à partir de rien... Quand on regarde un espace, même commutatif comme la sphère, il est en fait beaucoup plus facile de définir l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  des fonctions sur la sphère que de définir l'algèbre des fonctions sur la sphère. La raison à cela, c'est que l'algèbre des matrices  $2 \times 2$  des fonctions sur la sphère, est, à une petite condition près, le produit libre de l'algèbre  $M_2(\mathbb{C})$  des matrices  $2 \times 2$  par l'algèbre commutative  $\mathbb{C}^2$ . Donc on prend ces deux algèbres de dimension finie, et on écrit des mots, ou alternativement, on prend un élément de  $M_2(\mathbb{C})$  et puis un élément de  $\mathbb{C}^2$ . On démontre que l'on obtient comme cela exactement<sup>4</sup> les matrices  $2 \times 2$  des fonctions sur la sphère. Autrement dit, si on écrit des mots sans permuter des lettres, comme dans le langage courant, on a un contenu d'information qui est infiniment plus grand, plus efficace qu'avec l'algèbre commutative qui, elle, ne distingue pas une phrase comme « L'horloge des anges ici-bas. » de « Le boson scalaire de Higgs. ». Dans le non commutatif, et on y est parfaitement habitué à cause du langage, le contenu en quantité d'information est bien plus grand. Ce qu'on démontre avec Mukhanov et Chamseddine c'est que pour toutes les variétés spinorielles de dimension 4, il y a exactement ce même phénomène d'écriture de l'algèbre des fonctions à condition de prendre un petit peu de non-commutativité qui vient des algèbres de Clifford, et cette non-commutativité est exactement celle du modèle plus subtil que l'on avait trouvé avec Ali et Walter!

Tes cours au Collège de France ont occupé une place importante, il me semble. Veux-tu nous en parler ?

J'ai donné ma leçon inaugurale en janvier 1985, je suis entré au Collège et j'ai continué de faire des cours pendant 32 ans... ce qui est très long. Il faut arriver à se renouveler et pour cela, il ne faut absolument pas tomber dans l'ornière qui consiste à répéter toujours la même chose, à faire des variantes. Il faut avoir les yeux ouverts, changer de sujet, être prêt à aborder des questions qui ne sont a priori pas reliées à ce que l'on faisait avant... Les meilleurs cours que j'ai donnés étaient les cours dont la préparation n'était pas finie avant que je ne commence les exposés. C'était alors vraiment la recherche en train de se faire : on tente un truc et puis on voit bien. Je pense que c'est terriblement important et que c'est le rôle du Collège de permettre de prendre des risques, de s'attaquer à un sujet devant tout le monde... pour l'auditoire, c'est idéal. Je me souviens très bien des périodes de tension des cours. Ma routine était la suivante. Je ne travaillais pas le vendredi parce qu'après le cours du jeudi, j'étais trop fatigué. Donc je travaillais chaque jour du samedi jusqu'au mercredi. Le jeudi matin, je ne regardais absolument pas mes notes. Je ne voulais surtout pas faire marcher ma mémoire, car ce n'est pas la bonne stratégie. Il faut se remettre les idées en place et avoir tout en tête sous forme condensée. Je prenais des dos de grandes enveloppes. En général, j'en avais deux, et j'écrivais les points principaux dont j'allais parler - après avoir fait ça dans la matinée, j'étais prêt et je n'avais besoin de rien, à la rigueur, j'avais ces deux enveloppes, mais je ne m'en servais jamais. Donc j'étais prêt en ayant ce protocole qui était d'avoir vraiment réfléchi pendant la semaine. Parfois, je ne dormais pas beaucoup... J'ai encore des piles de grandes enveloppes que j'avais faites. C'est un moment très spécial pendant l'année, très tendu, mais en même temps, c'est un dosage qui est à peu près parfait. Il y a un petit nombre d'heures, dix-huit, mais c'est un petit nombre d'heures qui est sous-tendu par le travail du reste de l'année. Ce sont dix-huit heures de trucs nouveaux, il faut vraiment aller au bout des démonstrations, aller au bout des idées et ne pas aller vite. Le public du Collège a été extrêmement varié, il y avait bien sûr des gens très forts, qui suivaient parfaitement, mais aussi des curieux et des personnages hauts en couleur. Cela m'a aidé sacrément d'avoir ce public.

4. Moyennant une condition de trace nulle sur le générateur  $Y$  de  $\mathbb{C}^2$ .

### Comment vois-tu l'avenir des mathématiques ?

Je crois qu'il y a un véritable problème qui vient en partie d'une contamination du système français par celui qui sévit aux États-Unis. En observant ce que subissent les jeunes talents, je n'ai pas l'impression que les conditions soient optimales. Il faut d'abord noter que lorsque l'on développe un sujet qui est hors des sentiers battus, on est condamné à souffrir d'un certain mépris. Personne n'en a mieux parlé que Grothendieck. Il écrit explicitement que parmi tout ce qu'il a découvert, pour lui la merveille des merveilles, c'est la notion de topos (avec celle de motif)... et pourtant, c'est une notion qui est souvent méprisée, et cela, simplement par ignorance et c'est pareil pour la géométrie non commutative, c'est pareil pour tous les autres sujets un peu nouveaux. Souvent, les gens ne veulent pas faire l'effort de comprendre, ou ne peuvent pas, parce qu'ils ne sont pas au contact des bonnes personnes. Du fait qu'ils ne comprennent pas, ils décrètent que ce n'est pas intéressant et trouvent toujours une raison pour dénigrer la théorie. Or, maintenant, on est tombé dans le travers des Américains. On doit remplir des formulaires de caractère administratif en prédisant ce que l'on va trouver, et en combien de temps, bien que ce soit d'un ridicule absolu. Parce que si l'on ne trouve que ce que l'on a prévu de trouver, c'est strictement sans intérêt ! Ainsi, on arrive à un système qui induit un certain nombre de féodalités, d'entre soi, qui sont gérées par un petit groupe, ce qui fait que seuls les gens qui veulent bien rentrer sous le joug de telle ou telle féodalité pourront avoir des postes, des crédits... et ça ralentit le développement des mathématiques. Il y a des gens qui reçoivent des fortunes, or un mathématicien n'a pas besoin d'avoir un demi-million d'euros pour travailler sauf à le transformer en administrateur, ce qui compte c'est d'offrir un salaire décent aux débutants talentueux. Il y a ainsi la calamité de l'encombrement au CNRS, qui dans le temps était surtout un moyen de permettre aux débutants de faire leur preuves avant de devenir profs. On voit des situations absurdes : demander pour entrer au CNRS d'avoir déjà 10 ou 15 articles publiés, c'est ridicule. Il me semble qu'il faudrait plus de porosité entre le CNRS et l'université. Je n'ai pas la solution, mais il y a un vrai problème : combien de jeunes extrêmement talentueux sont confrontés au problème de passer leur thèse, puis d'enchaîner des post-docs... Ils perdent ainsi beaucoup de temps, ne serait-ce qu'en faisant des dossiers, en demandant des lettres de recommandation... Or, tous ces obstacles sont là quand même pendant leur meilleure période de créativité potentielle ! Donc, ce problème est crucial, à mon

avis. Enfin, je ne trouve vraiment pas rassurant tout ce que j'entends dire sur l'utilité des maths. On n'a pas à prouver l'utilité des mathématiques. La recherche fondamentale, se situe sur le long terme, son but n'est pas d'être utile, mais de comprendre.

### Tu as aussi travaillé avec un neurobiologiste, un psychanalyste, tu écris des romans, tu fais aussi du piano – Est-ce que ces activités interagissent avec ton travail de mathématicien ? Et comment ?

Cela agit principalement vis-à-vis du doute. Je ne peux pas vivre le doute de manière permanente. Donc je suis obligé de faire des choses qui sont, je ne dirai pas faciles, mais qui sont autres que la tension mathématique. Cette tension qui existe dans tout acte de recherche, c'est un peu ce dont parle Grothendieck quand il dit que la peur de se tromper, c'est la même chose que la peur de la vérité. Il faut arriver à la maîtriser, mais c'est très difficile. Il faut trouver des moyens de respiration, des moyens de s'apaiser. Le piano, j'aurais adoré en faire beaucoup plus, mais je ne peux pas, je sais très bien que pour faire du piano, il faudrait travailler au moins deux heures par jour. Par contre, j'adore improviser. J'improvise et j'enregistre. C'est surtout une manière de décompresser. Écrire des romans, comme on a écrit avec Dixmier et Danye, c'est très différent. À cette occasion, j'ai pu communiquer avec ma femme comme jamais. Elle n'est pas du tout mathématicienne, elle était professeur de lettres et le fait d'écrire, ça nous a permis vraiment d'atteindre une communication qu'on ne connaissait absolument pas et de découvrir une composante inédite chez l'autre. Quant à Dixmier, ce que j'ai découvert en écrivant des romans avec lui, c'est que, autant, il était un peu effrayant au début quand il était mon professeur... autant, il n'y avait pas plus gamin et plus espiègle que lui dans l'écriture des romans. C'était un véritable régal. La dernière rencontre, c'est effectivement le livre que j'ai écrit tout à fait récemment, qui vient de sortir avec le psychanalyste Patrick Gauthier-Lafaye. Je me suis rendu à un séminaire sur Le Temps à Cerisy, suite à mes idées sur le temps et la thermodynamique, et j'ai rencontré ce psychanalyste qui est aussi psychiatre. On a commencé à discuter, parce qu'il y avait des questions sur les maths qui l'intéressaient. Un jour, il m'a demandé mon avis sur un diagramme de Lacan, que je ne comprenais pas, jusqu'à ce que je réalise qu'il suffisait d'utiliser la logique intuitionniste – la logique où la double négation n'équivaut pas à l'affirmation – pour qu'il prenne du sens. Cela m'a amené à lui expliquer des exemples de logique intuitionniste et je me suis engagé à lui expliquer

les topos. Je lui ai expliqué qu'il y avait quelque chose de merveilleux dans l'idée de Grothendieck des topos, qui était au niveau philosophique. C'est rare que les concepts mathématiques atteignent le niveau philosophique. L'idée des topos, c'est qu'il ne faut pas regarder l'espace qu'on veut étudier. Il faut le mettre dans les coulisses, et il faut faire la théorie des ensembles à paramètres dans cet espace. En faisant cela, on comprend l'espace beaucoup mieux que si on le regarde. Au cours d'une discussion, on a réalisé que c'est exactement ce qui se produit dans la psychanalyse. C'est comme cela que se structure l'inconscient. On a réalisé qu'en remplaçant dans la phrase de Lacan, « l'inconscient est structuré comme un langage », le mot « langage » par « topos », on avait tout un domaine d'exploration qui s'ouvrait devant nous. Et c'est ça qui a occasionné le livre.

**Avant de conclure, y a-t-il un autre sujet que tu souhaites aborder ?**

Ce qui me semble absolument fondamental, c'est qu'il faut croire dans ses idées, il ne faut pas se laisser décourager par ce qu'en disent les gens et vraiment, il faut persévérer quoi qu'il arrive. Il y aura des spécialistes qui diront « Non, c'est pas possible... », il ne faut pas les écouter. Il faut écouter ce qu'on a en soi et surtout, il faut se souvenir que le seul juge, c'est soi-même et personne d'autre. C'est d'ailleurs souvent le juge le plus sévère. Il ne

faut pas que notre trajectoire soit dépendante de la sociologie du milieu.

Il y a un message important sur lequel je voudrais terminer. On va sans doute écrire un article ensemble avec Dixmier. Il s'agit d'un problème qu'il m'a posé lorsque je suis allé le voir pour son anniversaire des 98 ans. C'est un problème qui le taquine depuis 60 ans ! J'ai trouvé le démarrage dans le cas le plus simple et après avoir envoyé à Dixmier une lettre lui expliquant comment j'arrivais à commencer, il s'est mis à travailler 8 heures par jour, à 98 ans... Il m'a dit, « J'ai eu du mal à me remettre au boulot parce que ça faisait 20 ans que je n'avais pas fait de maths ». Sa santé l'a obligé à s'arrêter au bout d'un moment, mais je trouve ça fabuleux... Il a exactement l'esprit qu'il avait quand je l'ai connu, la même rigueur. Il a trouvé une idée importante après que j'ai commencé, une idée que je n'aurais jamais trouvée moi-même. J'ai pu ensuite aller plus loin avec l'aide d'un ordinateur, et je ne sais pas si j'arriverai à terminer, il faudrait discuter avec des géomètres algébristes et ça prendra un certain temps... Mais je veux absolument en parler parce que je trouve ce courage de Jacques absolument merveilleux. Ce n'est pas seulement qu'il a l'esprit alerte, non, il a retravaillé en trouvant des idées. Et son esprit est inchangé. Je ne vois aucune ride dans sa manière de faire... on a échangé des lettres comme on le faisait dans le temps.



Photo : Jean-François Dars

**Alain CONNES** est né à Draguignan le 1<sup>er</sup> avril 1947. Après des classes préparatoires au Lycée Thiers de Marseille, il intègre l'École normale en 1966 et soutient sa thèse en 1973 sous la direction de Jacques Dixmier. Il a été stagiaire au CNRS (1970-1974), puis chercheur associé durant un an à Kingston (Canada), maître de conférences puis professeur à l'université Paris VI (1976-1980) et directeur de recherche au CNRS (1981-1984).

Il a été invité à l'IHÉS à partir de 1979 et professeur titulaire de la chaire « Analyse et Géométrie » au Collège de France à partir de 1984.

Animé d'une curiosité, d'un enthousiasme et d'une persévérance exceptionnels, il explore de nombreux aspects des mathématiques et de la physique théorique. Il a révolutionné les algèbres de von Neumann et a reçu la médaille Fields en 1982 pour ses travaux sur les algèbres d'opérateurs. Il est le père de la géométrie non commutative. Il a également offert des contributions significatives en physique théorique avec notamment ses travaux sur la renormalisation ou sur le modèle standard. Son attention s'est aussi portée sur la conjecture de Riemann en théorie des nombres ou la théorie des topos de Grothendieck en géométrie algébrique.

Alain Connes a reçu le prix Aimé Berthé (1975), le prix Peccot (1976), la médaille d'argent du CNRS (1977), le prix Ampère (1980), la Médaille Fields (1982), le prix Clay (2000), les prix Crafoord et Peano (2001), et la médaille d'or du CNRS (2004).



## ... un nœud legendrien

• B. CHANTRAINE

### 1. Introduction

L'objectif de ce texte est de parler de *nœuds legendriens*. Un nœud est une courbe injective fermée tracée dans un espace. On utilise les nœuds, entre autres, pour décrire les espaces de dimensions 3 et 4. Cela représente une économie de dimension car on dessine souvent un nœud au moyen de ses projections sur une feuille ou un tableau. Un nœud legendrien est un nœud qui satisfait à une contrainte géométrique supplémentaire : il est tangent à ce qui s'appelle une distribution de contact. Le but de ce texte est de tout d'abord décrire comment cette structure supplémentaire arrive naturellement lorsqu'on considère le déplacement de certains objets avec une « direction ». Ainsi, dans la section 2, nous verrons la définition de nœuds legendriens dans l'espace des éléments de contact. Pour parler de nœuds legendriens en toute généralité, nous verrons dans la section 3 la définition de structures de contact sur les espaces de dimension 3. Plusieurs exemples de telles structures seront discutés dans la section 4 et nous les comparerons entre elles dans la section 5. Cette gymnastique nous permettra de regarder un nœud legendrien de différents points de vue ce qui nous permettra de le dessiner au moyen de différentes projections, que nous qualifierons de *frontales*, qui seront discutées dans la section 6. Ce texte n'est pas une introduction à la théorie des nœuds legendriens, il est bien trop court pour ça, et nous ne verrons aucun aspect moderne de ce sujet actif. Il existe par ailleurs de nombreux textes faisant cet office (un lecteur voulant aller plus loin pourra par exemple lire [5]).

### 2. Espace des éléments de contact

Soit  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe lisse. En imaginant que  $\gamma$  trace la trajectoire d'un patin sur de la glace,

on positionne immédiatement dans notre tête le patin de sorte que sa lame soit tangente à la courbe. En notant  $\theta(t) - \frac{\pi}{2}$  l'angle que fait cette lame à l'instant  $t$ , on trouve que le vecteur  $(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t)))$  est orthogonal au vecteur  $(\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))$ . On obtient donc l'équation :

$$\cos(\theta(t))\gamma'_1(t) + \sin(\theta(t))\gamma'_2(t) = 0. \quad (1)$$

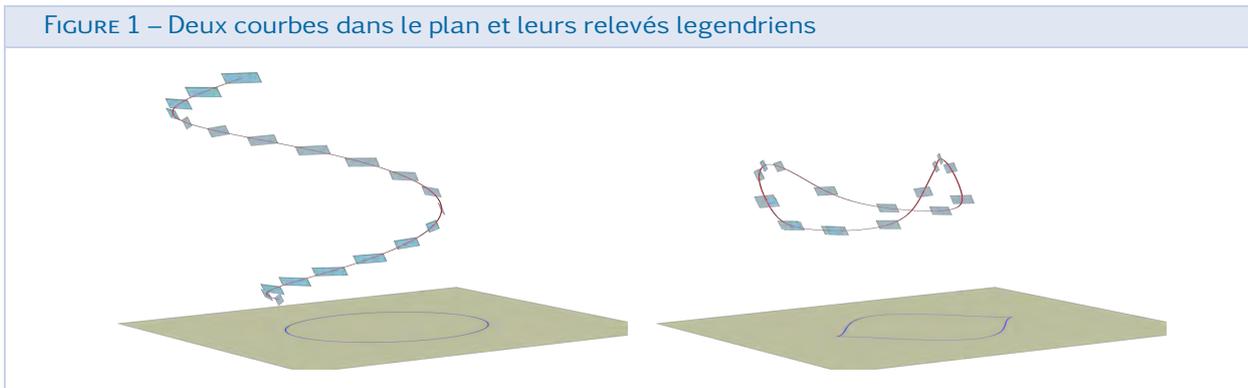
En considérant l'angle  $\theta(t)$  comme une troisième coordonnée, on obtient une courbe  $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \theta(t))$  vivant dans l'espace tridimensionnel  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  que nous appellerons le *relevé* de la courbe. En chaque point  $(x, y, \theta)$  de l'espace  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ , le noyau de l'application linéaire

$$\alpha_{(x,y,\theta)} : (u, v, w) \mapsto (\cos(\theta)u + \sin(\theta)v)$$

joue donc un rôle particulier : c'est le lieu où peuvent vivre les vecteurs tangents à un tel relevé. La dépendance en  $(x, y, \theta)$  de l'application linéaire est lisse, et on l'encode globalement en notant  $\alpha = \cos(\theta)dx + \sin(\theta)dy$  qui est une 1-forme différentielle sur  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . En chaque point son noyau détermine un plan qui forme globalement ce qu'on appelle une distribution d'hyperplans et que nous noterons  $\xi$ . Cette distribution est ce qu'on appelle la structure de contact canonique sur  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . Cet espace est ce qu'on appelle l'espace des *éléments de contact* de  $\mathbb{R}^2$  : un élément de contact étant la donnée d'un point et d'un hyperplan (donc une droite dans la dimension qui nous occupe) tangent à ce point. La droite associée à  $(x, y, \theta)$  est donc celle orthogonale à  $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ .

Les trajectoires tangentes à la structure de contact sont appelées *courbes legendriennes*. On peut se demander d'où vient le mot *legendrienne*. Dans la section K de l'appendice 4 de [1] Arnold nous éclaire en précisant qu'il s'agit d'« [...] une classe intéressante de variétés que nous pouvons appeler legendriennes puisqu'elles sont intimement liées à la transformation de Legendre. » Rappelons

FIGURE 1 – Deux courbes dans le plan et leurs relevés legendriens



que, entre autres, la transformée de Legendre permet en mécanique de passer des équations d'Euler-Lagrange à celles d'Hamilton. Le lien intime entre la notion de courbes legendriennes et ce processus qui à une fonction convexe  $f$  associe la fonction  $f^*$  définie par  $f^*(p) = \sup(xp - f(x))$  est pour l'instant obscur. Cette phrase est donc une invitation à la méditation et nous verrons dans la section 6 le fruit de la mienne à ce sujet.

En gardant l'image du patin sur la glace, nous pouvons facilement imaginer quelques-unes de ces trajectoires :

1. lorsqu'il se déplace sur une ligne droite portée par un vecteur unitaire  $(v_0, w_0) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ , la courbe legendrienne est donnée par  $t \mapsto (tv_0 + x_0, tw_0 + y_0, \theta)$ ;
2. lorsque qu'il fait un tour sur la glace, la courbe legendrienne est donnée par  $t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ ;
3. lorsqu'il tourne sur lui-même, la courbe legendrienne correspondante est donnée par  $t \mapsto (x_0, y_0, t)$ ;
4. et lorsqu'il effectue un rebroussement, la courbe legendrienne est donnée par  $t \mapsto (\frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{3}, -\text{Arctan}(t))$ ;
5. une variation fermée de la courbe précédente est donnée par  $t \mapsto (\cos(t), \sin^3(t), -\text{Arctan}(3 \sin(t) \cdot \cos(t)))$ .

Les deuxième et cinquième trajectoires sont dessinées dans la figure 1. Quelques explications sont nécessaires pour la lire : la courbe dans le plan est la trajectoire de départ. Son relevé est dessiné en rouge dans  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  où le cercle est identifié à  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Les rectangles bleus représentent la structure  $\xi$  (la courbe rouge étant donc tangente à ceux-ci).

Nous avons vu le mot legendrien mais il nous manque le mot *nœud* promis en titre. Un nœud est

une courbe injective qui se referme. On étudie ces objets à déformations (lisses ou continues) près en gardant cette condition d'injectivité. Le caractère noué vient donc du fait qu'il n'y a pas d'auto-croisements lors de ces déformations. Ceci nous amène aux définitions suivantes.

**Définition 1.**

- Un *nœud legendrien* dans  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  est un plongement lisse

$$\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$$

tel que, pour tout  $t$ ,  $\dot{\gamma}(t) \in \xi_{\gamma(t)}$ .

- Une *isotopie legendrienne* est une application lisse  $H : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times S^1$  telle que, pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $H(\cdot, s)$  est un nœud legendrien.
- Deux nœuds legendriens  $\gamma_0$  et  $\gamma_1$  sont *legendriennement isotopes* s'il existe une isotopie legendrienne  $H$  telle que  $\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $H(t, 0) = \gamma_0(t)$  et  $H(t, 1) = \gamma_1(t)$ .

Les exemples 2, 3 et 5 précédents décrivent tous les trois des nœuds legendriens. En fait il est facile d'en dessiner : comme nous l'avons vu avec l'exemple du patineur toute trajectoire fermée lisse  $\gamma$  que nous dessinons sur le plan se relève en un nœud legendrien tant que  $\dot{\gamma} \neq 0$  et que ses auto-intersections sont transverses. L'exemple 5 montre que la condition  $\dot{\gamma} \neq 0$  n'est pas essentielle. De plus la plupart des nœuds legendriens sont uniquement caractérisés par leur projection sur  $\mathbb{R}^2$  appelée la *projection frontale* (que nous étudierons à la section 6). Le sens donné à « la plupart » dans la phrase précédente restera obscur dans ce court texte.

La relation d'isotopie legendrienne est une relation d'équivalence. Elle raffine la relation d'isotopie lisse. On pourrait résumer grossièrement la théorie des nœuds legendriens à l'étude de l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation et des invariants permettant de distinguer ces classes.

### 3. Équation de contact

Passons à un niveau supérieur en introduisant le cadre plus général dans lequel les nœuds legendriens sont étudiés. Pour ce faire nous devons parler de structures de contact et donc de distributions de plans.

**Formes différentielles.** Il est difficile de parler de structures de contact et de nœuds legendriens sans faire un peu de calcul avec des formes différentielles. Bien que nous essayerons d'en faire une utilisation minimale, nous allons en rappeler quelques éléments. Une variété lisse de dimension 3 est un espace décrit localement par des coordonnées  $(x, y, z)$  de sorte que les changements de coordonnées soient lisses. Une distribution de plans sur une telle variété  $Y$  est la donnée d'un sous-espace de dimension 2 de  $T_q Y$  en chaque point  $q$  de  $Y$ . En chaque point, un tel plan est donné par le noyau d'une forme linéaire que nous encodons localement sous la forme  $\alpha = f dx + g dy + h dz$  où  $f, g$  et  $h$  sont des fonctions  $C^\infty$  en  $(x, y, z)$  qui ne s'annulent pas simultanément. La donnée en chaque point d'une forme linéaire sur l'espace tangent est ce qu'on appelle une 1-forme différentielle.

De la même manière, une 2-forme différentielle est la donnée en chaque point de l'espace d'une forme bilinéaire alternée sur l'espace tangent. La dérivée extérieure d'une 1-forme  $\alpha = f dx + g dy + h dz$  est la 2-forme  $d\alpha = df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$  où  $df$  est la 1-forme  $\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ .

Finalement, une 3-forme différentielle est la donnée en chaque point d'une forme trilinéaire alternée sur l'espace tangent. Nous utiliserons le fait suivant : si  $\psi$  est une application d'un ouvert de  $\mathbb{R}^3$  vers  $\mathbb{R}^3$  telle que

$$\psi(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

alors  $df \wedge dg \wedge dh = \text{jac}(\psi) dx \wedge dy \wedge dz$ .

**Structure de contact.** L'équation  $\alpha$  de la distribution  $\xi$  vue dans la section 2 a la propriété suivante : sa dérivée extérieure est

$$d\alpha = -\sin(\theta) d\theta \wedge dx + \cos(\theta) d\theta \wedge dy.$$

On trouve donc

$$\alpha \wedge d\alpha = -dx \wedge dy \wedge d\theta$$

qui ne s'annule jamais.

Une distribution de plans satisfaisant à cette propriété est appelée de contact :

**Définition 2.** Soit  $Y$  une variété lisse de dimension 3. Une structure de contact  $\xi$  est une distribution lisse de plans sur  $Y$  telle que, pour toute équation locale de  $\xi$  donnée par une 1-forme  $\alpha$ , nous avons  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ .

Cette condition implique qu'il n'y a pas de surface tangente à une telle structure. En effet soit  $P : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow Y$  une paramétrisation. Supposons que l'image de  $P$  soit tangente à  $\xi$  en chaque point. Alors nous obtenons  $P^* \alpha = 0$  et donc  $P^* d\alpha = 0$ . Or, en chaque point  $q$  de l'image de  $P$ , il existe une base  $U, V, W$  de  $T_q Y$  telle que  $U, V$  soit tangent à l'image de  $P$  et donc  $\alpha \wedge d\alpha(U, V, W) = 0$ . Ceci contredit le fait que  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$  car  $(U, V, W)$  est une base.

La définition 1 se généralise alors pour introduire la notion de nœuds legendriens et d'isotopies legendriennes dans une variété de contact  $(Y, \xi)$  : ce sont les nœuds tangents à  $\xi$  et leurs déformations.

### 4. D'autres exemples

#### 4.1 – Espace de jets

L'un des exemples les plus connus de structure de contact est  $\mathbb{R}^3$  muni du noyau de  $dz - y dx$ .

Nous l'avons en fait déjà rencontré. En effet, considérons un élément de contact  $(q, \theta)$  dans  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  tel que  $\sin(\theta) > 0$  c'est-à-dire un élément de contact non vertical « co-orienté vers le haut » (on rappelle que  $\theta$  est l'angle *orthogonal* à l'élément de contact). La structure de contact en ce point a pour équation  $\cos(\theta) dx + \sin(\theta) dy = 0$  qui est équivalente à  $dy + \cotan(\theta) dx = 0$ . Ainsi l'application donnée par  $(x, y, z) \mapsto (x, z, \text{Arctan}(y) + \frac{\pi}{2})$  identifie  $\mathbb{R}^3$  avec l'espace des éléments de contact de  $\mathbb{R}^2$  non verticaux co-orientés vers le haut. Les structures de contact s'envoient l'une sur l'autre par cette identification. Tout nœud legendrien dans  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  dont la projection sur  $\mathbb{R}^2$  n'a pas de tangente verticale (par exemple l'exemple 5 de la section 2) est ainsi un nœud legendrien dans  $\mathbb{R}^3$  (à un changement de co-orientation près).

L'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de la structure de contact  $\ker(dz - y dx)$  est appelé l'espace de jets (de  $\mathbb{R}$ ) : les courbes legendriennes de la forme  $(t, y(t), z(t))$  sont telles que  $y(t) = z'(t)$ . Dit autrement, ce sont les 1-jets des fonctions  $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

De la même manière, la forme  $dz - yd\theta$  définit une structure de contact sur  $S^1 \times \mathbb{R}^2$ . Dans ce cas les courbes legendriennes de la forme  $(\theta, y(\theta), z(\theta))$  sont les graphes de 1-jets de fonctions  $z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .

## 4.2 – Espace des éléments de contact d’une surface

La construction de  $\mathbb{R}^2 \times S^1$  avec la distribution  $\xi$  est tellement naturelle qu’elle ne dépend pas de la paramétrisation de  $\mathbb{R}^2$ . En prenant d’autres coordonnées  $(u, v) = f(x, y)$  on définirait la même structure de contact en écrivant  $\ker(\cos(\phi)du + \sin(\phi)dv)$  où  $\phi(x, y, \theta) - \frac{\pi}{2}$  est l’angle donné par la droite orientée  $df_{(x,y)}(\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2}))$ .

Ainsi nous pouvons recoller des ouverts entre eux pour obtenir une structure de contact (appelée canonique) sur le fibré cotangent sphérique d’une surface quelconque

$$S(T^*\Sigma) := \{(q, [p]) \mid q \in \Sigma, p \in (T_q\Sigma)^*, p \neq 0\}$$

où  $(T_q\Sigma)^*$  est l’espace dual de  $T_q\Sigma$  et  $p \sim p'$  quand  $p = \lambda p'$  avec  $\lambda > 0$ . Notons que, lorsque  $\Sigma$  est un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^2$ , on retrouve bien  $S(T^*\Sigma) \simeq \mathcal{U} \times S^1$ . Un vecteur tangent  $V$  à  $S(T^*\Sigma)$  en  $(q, [p])$  est dans la structure de contact si  $p(d\pi(V)) = 0$  où  $\pi(q, [p]) = q$ . Dans le reste de ce texte, nous ne discuterons que le cas  $\Sigma \simeq S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

Dans ce cas la structure euclidienne nous permet d’écrire  $S(T^*S^2) = \{(q, v) \in S^2 \times S^2 \mid \langle q, v \rangle = 0\}$ . Son espace tangent en  $(q, v)$  est donc donné par les paires de vecteurs  $(H_1, H_2) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  telles que

$$\langle H_1, q \rangle = \langle H_2, v \rangle = 0 \text{ et } \langle H_1, v \rangle = -\langle H_2, q \rangle.$$

Une telle paire est alors dans la structure de contact canonique si  $\langle H_1, v \rangle = 0$ .

L’espace  $S(T^*\Sigma)$  muni de la structure de contact  $\xi$  est appelé l’espace des éléments de contact (co-orientés) de  $\Sigma$ . On pense à un point de cet espace comme étant la donnée d’un point  $q$  de  $\Sigma$  et d’une direction tangente (co-orientée) en  $q$  (qui en  $(q, [p])$  est donnée par le noyau de  $p$ ). Ceci étant dit, un élément de contact sur la sphère basé en un point  $q$  est donné par un plan  $P$  coorienté contenant la droite passant par  $q$ . Un tel plan intersecte la sphère en un grand cercle (orienté!) dont la tangente à  $q$  est l’élément de contact désiré.

## 5. Quelques identifications

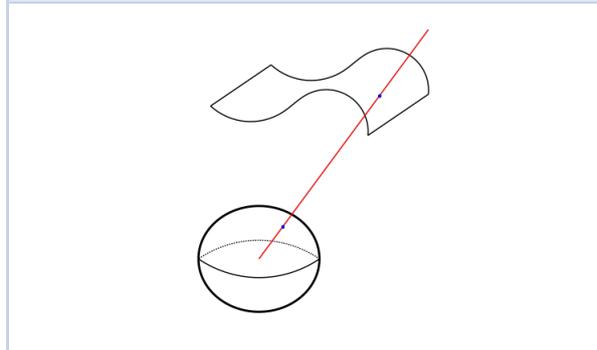
Toutes les structures de contact que nous venons de voir ont des liens qu’il est utile ici de décrire. En effet, comme chacune de ces structures a une description naturelle, elles permettent de regarder certains nœuds legendriens sous différents points de vue.

Dans la section 4.1, on a déjà vu que l’espace des éléments de contact non verticaux du plan était identifié avec  $\mathbb{R}^3$  et que la structure de contact canonique devenait le noyau de  $dz - ydx$ .

Pour trouver d’autres identifications, rappelons qu’un difféomorphisme  $(x, y) \mapsto (u, v)$  se relève en un difféomorphisme  $(x, y, \theta) \mapsto (u, v, \phi)$  envoyant la structure de contact donnée par le noyau de  $\cos(\theta)dx + \sin(\theta)dy$  sur celle donnée par le noyau de  $\cos(\phi)du + \sin(\phi)dv$ . Cela implique que tout difféomorphisme d’une surface  $\Sigma$  vers une surface  $\Sigma'$  se relève en un difféomorphisme de  $S(T^*\Sigma)$  vers  $S(T^*\Sigma')$  faisant se correspondre les structures de contact canoniques.

Pour fabriquer de tels difféomorphismes, considérons une surface dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  telle que, pour chaque point de la surface, la demi-droite reliant ce point à  $(0, 0, 0)$  n’est pas tangente à la surface (voir par exemple la figure 2).

FIGURE 2 – Un difféomorphisme local de la sphère vers une surface



L’application qui va de la surface à la sphère en prenant le point d’intersection de cette demi-droite avec  $S^2$  a alors une différentielle inversible et c’est donc localement un difféomorphisme. Elle induit donc (au moins localement) une identification entre les espaces des éléments de contact correspondant. Par exemple, pour le plan  $H_z = \{z = 1\}$ , identifié à  $\mathbb{R}^2$  via l’application  $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$ , nous obtenons des identifications entre l’espace des éléments de contact du plan et l’espace des éléments de contact de l’hémisphère Nord de la sphère.

Pour visualiser ces identifications il est pratique de penser à un élément de contact de  $S^2(q, v)$  comme une paire de demi-droites  $(l_1, l_2)$  telles que  $l_1 \perp l_2$  (ce sont les demi-droites portées respectivement par  $q$  et  $v$ ). Le plan  $P$  déterminant l'élément de contact, comme discuté dans section 4.2, devient celui orthogonal à  $v$ . La procédure qui fait correspondre à un élément de contact de la sphère un élément de contact d'une surface décrite précédemment revient juste à intersecter ce plan  $P$  avec la surface et à prendre la tangente à la courbe obtenue. C'est bien une courbe autour du point d'intersection avec la demi-droite  $l_1$  car celle-ci est supposée ne pas être tangente à la surface.

Pour jouer un peu avec toutes ces identifications, partons d'un élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$ . Il correspond à un élément de contact  $(x, z, \theta)$  de  $\mathbb{R}^2$  où  $\cos(\theta) + y \sin(\theta) = 0$ . En d'autres termes, l'élément de contact est la droite portée par  $(1, y)$ . En identifiant  $\mathbb{R}^2$  avec  $H_z$  cet élément de contact correspond à un élément de contact  $(q, v)$  de la sphère par la procédure décrite dans la figure 2 page précédente. De ce qui précède, on trouve que le plan  $P$  déterminant cette élément de contact est engendré par  $(x, z, 1)$  et  $(x, z, 1) + (1, y, 1)$ . De ce fait, le vecteur unitaire  $v$  est à la fois orthogonal à  $(x, z, 1)$  et à  $(x + 1, z + y, 1)$ . C'est donc le vecteur unitaire sur la demi-droite portée par  $(-y, 1, yx - z)$ .

En somme, la variété de contact qui semble contenir toutes les autres est l'espace des éléments de contact de la sphère. En regardant l'hémisphère Nord, on retrouve les éléments de contact de  $\mathbb{R}^2$  dont les éléments non verticaux forment  $\mathbb{R}^3$ .

## 6. Projection frontale et transformée de Legendre

Chacun des espaces que nous avons décrit vient avec une projection naturelle appelée projection frontale qui va nous permettre de représenter un nœud legendrien en le dessinant dans un espace de dimension 2. Dans le cas de  $\mathbb{R}^3$ , c'est la projection qui à  $(x, y, z)$  associe  $(x, z)$  alors que, pour l'espace des éléments de contact  $S(T^*\Sigma)$ , c'est la projection qui envoie  $(q, [p])$  sur  $q \in \Sigma$ . L'image d'un nœud legendrien sous ces projections détermine, dans les cas génériques, le nœud lui-même : il suffit de regarder la tangente (ou la normale) à la courbe obtenue. Cette tangente (ou normale) reste définie même quand la projection a des singularités (si celle-ci provient d'une courbe legendrienne).

Ces projections ont en commun que la préimage d'un point est une courbe legendrienne, nous appellerons une telle projection une *projection frontale*. Cette propriété détermine la structure de contact localement, de manière plus précise :

**Théorème 1.** Soit  $\pi : (Y, \xi) \rightarrow \Sigma$  une projection frontale sur une surface  $\Sigma$  alors, pour tout  $q \in Y$ , il existe un système de coordonnées  $(x, y, z)$  autour de  $q$  tel que

- localement  $\xi = \ker(dz - ydx)$ .
- $\pi(x, y, z) = (x, z)$  où  $(x, z)$  est un système de coordonnées sur  $\Sigma$  autour de  $\pi(q)$ .

*Preuve.* Soit  $D$  un disque plongé dans  $Y$ , centré en  $q$  et transverse aux préimages de  $\pi$ . Soit  $(x, z)$  des coordonnées sur  $D$  tel que  $\frac{\partial}{\partial x}$  soit dans  $\xi$ . En particulier, comme les préimages de  $\pi$  sont legendriennes,  $\frac{\partial}{\partial z}$  est transverse à  $\xi$ . En transportant localement ce disque le long des préimages de  $\pi$ , on obtient des coordonnées  $(x, y, z)$  sur  $Y$  et  $(x, z)$  sur  $\Sigma$  telles que :

- $\pi(x, y, z) = (x, z)$ ,
- $\frac{\partial}{\partial x}(x, 0, z)$  soit dans la structure de contact et
- $\frac{\partial}{\partial z}(x, y, z)$  soit transverse à  $\xi$

Les trajectoires  $(x_0, y, z_0)$ , pour  $(x_0, z_0)$  fixés, sont legendriennes (elles paramétrisent les préimages de  $\pi$ ) donc  $\frac{\partial}{\partial y}$  est dans  $\xi$ . De ce fait, la structure  $\xi$  a pour équation  $f dz + g dx$ . Comme  $\frac{\partial}{\partial z}$  n'est jamais dans  $\xi$ ,  $f \neq 0$ . Ainsi la structure de contact a pour équation  $dz + p dx$  avec  $p = \frac{g}{f}$ . Comme  $\frac{\partial}{\partial x}(x, 0, z)$  est dans  $\xi$  on trouve  $p(x, 0, z) = 0$ . Finalement, comme  $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ , on trouve  $\text{jac}(\psi) dz \wedge dy \wedge dx \neq 0$  où  $\psi(x, y, z) = (x, p(x, y, z), z)$ . Donc  $(x, p, z)$  est un nouveau système de coordonnées dans lequel la structure de contact s'écrit  $dz - p dx$ .  $\square$

Les projections frontales existent toujours localement : il suffit de choisir un champ de vecteurs non nul dans la structure de contact puis de fixer un petit disque transverse à celui-ci pour en obtenir une. En corollaire du raisonnement précédent, nous trouvons donc le fameux théorème de Darboux [3] :

**Théorème 2.** Soit  $(Y, \xi)$  une structure de contact alors, pour tout  $q \in Y$ , il existe des coordonnées  $(x, y, z)$  autour de  $q$  telles que  $\xi = \ker(dz - y dx)$ .

On peut donc penser à une variété de contact comme étant un espace obtenu en recollant entre elles des boules de  $\mathbb{R}^3$  munies de la structure de contact de la section 4.1 de sorte que les plans de contact coïncident lors de ce recollement. De plus, les sous-variétés legendriennes peuvent être pensées comme étant localement des relevés de

projections frontales qui, nous venons de le voir, se ressemblent toutes. En particulier elles ressemblent à celle de l'espace des éléments de contact du plan introduite dans la section 2 (que nous comprenons intuitivement très bien).

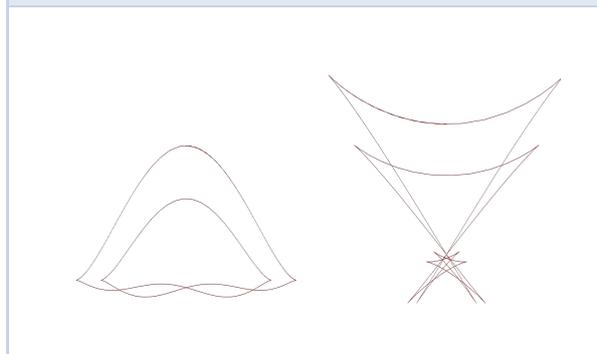
Comme on le voit dans l'exemple 4 de la section 2, il est possible que la projection frontale d'un nœud legendrien soit singulière. Bien que cela ne pose pas forcément de problème, il peut être intéressant de regarder notre nœud legendrien au moyen d'une autre projection frontale (si elle existe) : une telle projection peut permettre d'enlever certaines singularités, de les modifier, ou de les déplacer. Par exemple, la description que nous avons faite de  $S(T^*S^2)$  en tant que paires de demi-droites orthogonales l'une à l'autre est très symétrique : si  $(l_1, l_2)$  appartient à  $S(T^*S^2)$  alors  $(l_2, l_1)$  aussi. Cette permutation préserve la structure de contact. En effet, si  $(q(t), v(t))$  est une courbe dans  $S(T^*S^2)$  dont la tangente en 0 est dans  $\xi$  alors  $\dot{q}(0)$  est orthogonale à  $l_2$  (et donc à  $v$ ). Comme  $\langle q(t), v(t) \rangle = 0$ , on trouve  $\langle \dot{q}(0), v(0) \rangle = -\langle q(0), \dot{v}(0) \rangle = 0$ . Donc  $\dot{v}(0)$  est orthogonale à  $q$  ce qui donne que la tangente en 0 à la courbe  $(v(t), q(t))$  est dans  $\xi$ . La structure de contact étant préservée, cette permutation envoie une courbe legendrienne sur une courbe legendrienne et donc l'application  $(l_1, l_2) \mapsto l_2$  est une autre projection frontale.

Cette simple permutation combinée aux identifications vues dans la section 5 nous donne plusieurs *contactomorphismes* (c'est-à-dire des transformations préservant la structure de contact) qui composés avec les projections frontales naturelles induisent de nouvelles projections. Par exemple, nous avons identifié les éléments de contact non-verticaux de  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{R}^3$  (tout en préservant les structures de contact). Les calculs de la section 5 montrent que l'élément  $(q, v)$  associé à l'élément  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifie que  $v$  est colinéaire à  $(-y, 1, yx - z)$ . Le plan  $\{(x, 1, z)\}$ , que nous identifions avec  $\mathbb{R}^2$  par l'application  $(x, y) \mapsto (x, 1, -y)$ , joue le même rôle que  $H_z$  dans la section 5, ainsi la demi-droite portée par le vecteur  $(-y, 1, yx - z)$  détermine le point  $(-y, z - yx)$  du plan. De ce fait la permutation  $(l_1, l_2) \mapsto (l_2, l_1)$  permet de définir une nouvelle projection frontale depuis  $\mathbb{R}^3$  qui à  $(x, y, z)$  associe  $(-y, z - yx)$ . C'est en fait la projection  $(x, y, z) \mapsto (x, z)$  qu'on a précomposée avec le contactomorphisme donné par la formule  $(x, y, z) \mapsto (-y, x, z - yx)$ . Une gymnastique similaire entre  $H_z$  et  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  permet d'identifier l'espace des éléments de contact de  $\mathbb{R}^2$  avec l'espace  $S^1 \times \mathbb{R}^2$

muni du noyau de  $dz - yd\theta$ . Cette identification est connue sous le nom d'*hodographe*.

Revenons aux deux projections frontales de  $\mathbb{R}^3$ . Si une courbe legendrienne dans  $\mathbb{R}^3$  est donnée par  $x \mapsto (x, f'(x), f(x))$ , alors sa première projection frontale est donnée par le graphe de  $f$  et la seconde par  $x \mapsto (f'(x), xf'(x) - f(x))$ . En supposant que  $f'' > 0$  (et donc que  $f'$  est une coordonnée), cette projection est aussi le graphe d'une fonction  $F$ . Les accroissements finis impliquent que  $F$  satisfait à  $px \leq f(x) + F(p)$  avec égalité si  $p = f'(x)$ . La fonction  $F$  est donc la transformée de Legendre de  $f$  qui a été mentionnée à la section 2. En gardant en tête les objets legendriens plus que les graphes, on voit donc que la notion de transformée de Legendre s'applique à une classe d'objets plus grande que celle des fonctions convexes. Ainsi, pour un nœud legendrien  $K$  dans  $\mathbb{R}^3$  on appelle son image par le contactomorphisme  $(x, p, z) \mapsto (p, -x, z - px)$  la transformée de Legendre de  $K$ . La figure 3 montre deux projections frontales de nœuds qui sont transformés de Legendre l'un de l'autre.

FIGURE 3 – Projection frontale d'un nœud legendrien et de sa transformée de Legendre



Terminons cette section en remarquant qu'un nœud legendrien et sa transformée de Legendre sont isotopes. En effet  $\psi_t : (x, y, z) \mapsto (\cos(t)x - \sin(t)y, \sin(t)x + \cos(t)y, z - \sin^2(t)xy + \sin(t)\cos(t)(x^2 - y^2))$  est une famille de contactomorphismes ambiants réalisant cette isotopie. Entre autres, toute propriété de fonctions qui a une interprétation en terme de géométrie de contact se retrouvera sur sa transformée de Legendre (les tangences entre courbes, la notion de point d'inflexion, de point de rebroussement ou de point critique en sont des exemples). Sans savoir quel sens précis Arnold voulait donner à la phrase citée dans la section 2, je pense que cette discussion en est une approximation. Utiliser la transformée de Legendre pour étudier les objets obtenus par élément de contact remonte à bien avant les années 70. Par

exemple, dans [8], Lie introduit la notion de transformation de contact et on trouve dans les formules 15 et 16 du chapitre 14 celle donnant la transformation de Legendre.

## 7. Et après ?

Ce raconte-moi touche à sa fin. J'ai voulu présenter quelques notions de base nous permettant de « dessiner » des nœuds legendriens et de les regarder de différentes manières. Pour un lecteur voulant sortir du monde des nœuds et aller vers celui des sous-variétés legendriennes je souligne que la plupart des calculs faits dans ce texte ont été posés pour qu'ils s'adaptent facilement à toutes les dimensions, et au cas non orientable (en remplaçant la sphère par l'espace projectif et les éléments de contact co-orientés par les éléments de contact). Par exemple, la transformée de Legendre se généralise au cas de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  : elle découle encore de la permutation d'une paire de demi-droites orthogonales.

Je n'ai pas présenté les invariants de base des nœuds legendriens (comme le nombre de rotation

et l'invariant de Thurston-Bennequin) mais comme dit en préambule, de nombreux textes les introduisent rapidement tout en parlant du lien entre ceux-ci et la topologie de basse dimension (par exemple [5]). Pour avoir une perspective historique sur le sujet, on pourra consulter [7]. L'étude des nœuds legendriens est un sujet très actif et de nombreux outils sont utilisés pour les manipuler. On peut mentionner par exemple l'algèbre d'homologie de contact introduite dans [2] et [4] qui a fait l'objet d'un récent survol dans [6]. D'excitants liens entre cet invariant et ceux provenant de la théorie de Morse (familles génératrices) et de l'étude micro-locale des faisceaux continuent d'apparaître. Beaucoup de choses restent à explorer (même dans la petite dimension discutée dans ce texte). De la même manière que la chirurgie sur les nœuds permet d'utiliser la théorie des nœuds pour l'étude des 3 et 4 variétés, la chirurgie legendrienne permet de lier l'étude des nœuds legendriens (et donc leurs invariants) aux 3-variétés de contact et aux 4-variétés symplectiques. Mais tout ceci sort du cadre d'un raconte-moi et ne peut pas être discuté raisonnablement en sept pages.

## Références

- [1] V. ARNOLD. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Traduit du russe par Djilali Embarek. Éditions Mir, Moscow, 1976, p. 470.
- [2] Y. CHEKANOV. « Differential algebra of Legendrian links ». *Invent. Math.* **150**, n° 3 (2002), p. 441-483. ISSN : 0020-9910. DOI : 10.1007/s002220200212. URL : <https://doi.org/10.1007/s002220200212>.
- [3] G. DARBOUX. « Sur le problème de Pfaff. » *French. C. R. Acad. Sci., Paris* **94** (1882), p. 835-837. ISSN : 0001-4036.
- [4] Y. ELIASHBERG. « Invariants in contact topology ». In : *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*. Extra Vol. II. 1998, p. 327-338.
- [5] J. B. ETNYRE. « Legendrian and transversal knots ». In : *Handbook of knot theory*. Elsevier B. V., Amsterdam, 2005, p. 105-185. DOI : 10.1016/B978-044451452-3/50004-6. URL : <https://doi.org/10.1016/B978-044451452-3/50004-6>.
- [6] J. B. ETNYRE et L. L. NG. « Legendrian contact homology in  $\mathbb{R}^3$  ». English. In : *Surveys in 3-Manifold Topology and Geometry. Surveys in differential geometry. Vol. XXV*. Somerville, MA: International Press, 2020, p. 103-162. ISBN : 9781571464194.
- [7] H. GEIGES. « A brief history of contact geometry and topology ». *Expo. Math.* **19**, n° 1 (2001), p. 25-53. ISSN : 0723-0869. DOI : 10.1016/S0723-0869(01)80014-1. URL : [https://doi.org/10.1016/S0723-0869\(01\)80014-1](https://doi.org/10.1016/S0723-0869(01)80014-1).
- [8] S. LIE. *Geometrie der Berührungs transformationen*. corrected. With editorial assistance by Georg Scheffers. Chelsea Publishing Co., New York, 1977, p. xi+694. ISBN : 0-8284-0291-4.



**Baptiste CHANTRAINE**

Nantes université.

[baptiste.chantraine@univ-nantes.fr](mailto:baptiste.chantraine@univ-nantes.fr)

Baptiste Chantraine est maître de conférences à Nantes Université. Il s'intéresse à la géométrie symplectique et de contact et plus particulièrement aux invariants algébriques des sous-variétés legendriennes dans ces dernières.

Je remercie Marco Golla, Gabriel Rivière et Julien Sabin pour leurs relectures attentives, leurs commentaires ont grandement amélioré ce texte.



## Renouvellement du CNU

- F. COMTE
- F. PLANCHON

Les mandats des CNU s'achèvent fin octobre 2023. Des élections auront lieu cet automne pour les renouveler et le calendrier vient juste d'être publié<sup>1</sup>.

D'après l'arrêté relatif à l'élection<sup>2</sup>, les chercheurs qui voudraient être inscrits sur les listes électorales n'ont que jusqu'au 7 avril minuit pour le demander auprès de la présidence d'un établissement universitaire tutelle de leur UMR.

Les sections CNU 25 et 26 ont des missions importantes pour notre communauté, et ils sont le dernier élément qui nous relie nationalement, quand les modes de fonctionnement des universités et établissements d'enseignement supérieur ne cessent d'accroître leur hétérogénéité.

Chaque section CNU est collégiale, et rend compte de ses activités grâce aux bilans annuels publiés dans la *Gazette*, *Matapli*, et sur les sites [cnu25.emath.fr](http://cnu25.emath.fr) et [cnu26.emath.fr](http://cnu26.emath.fr). Il est important que chaque section CNU soit un juste reflet des communautés qu'elle représente pour l'équité de ses travaux, et que des profils variés viennent l'animer.

L'avancement de grade (passage à la hors classe et à la classe exceptionnelle pour le corps des maîtres de conférences, à la première classe et à la classe exceptionnelle pour le corps des professeurs) est octroyé pour l'ensemble des enseignants-chercheurs pour moitié par les établissements et pour moitié au niveau national, sur proposition de chaque section CNU pour le contingent qui lui est alloué. Cependant, des menaces sur le contingent d'avancement de grade national ont été déjouées lors de cette mandature, grâce à une mobilisation active de l'ensemble des sections CNU, mais ces menaces n'ont pas disparu, l'autonomie (réelle ou supposée...) des établissements justifiant, dans cette logique, un transfert intégral des prérogatives de gestion de carrière. Sur les 8 dernières années

(2015-2022), il y a eu 1767 promotions en 25 et 26, dont 1011 sur proposition des sections CNU. Le déséquilibre est encore plus fort sur l'ensemble des promotions CNU25 et des grades MCF26 (60% au titre du contingent national, alors que les quotas de promotions sont distribués à part égale entre CNU et établissements). On ne peut donc que légitimement s'inquiéter d'une future situation où les seuls établissements décideraient des promotions, qui pourrait conduire à perdre encore 15 à 20% supplémentaires des promotions possibles.

Les mises en place erratiques du RIPEC et du re-pyramidage conduisent à épuiser les évaluateurs (locaux comme nationaux!) dont les avis sont seulement consultatifs, les décisions étant prises par des chefs d'établissement souverains : l'évolution de ces procédures doit susciter la vigilance de tous.

Ainsi, que vous soyez directement concernés ou non par les évaluations du CNU, il importe de défendre l'existence d'instances collégiales disciplinaires, et c'est une excellente raison de vérifier son inscription sur les listes électorales, de s'intéresser au renouvellement de nos deux sections à travers de potentielles candidatures, et surtout de voter à l'automne!

### Dates clés.

- Demande d'inscription sur les listes électorales pour les chercheurs avant le 7 avril (en spécifiant la section CNU de rattachement dans sa demande).
- 12 mai, date limite des demandes de rectification des listes électorales (toute catégorie d'électorat).
- Dépôt des listes avant le 13 juillet 2023.
- Votes par courrier postal (matériel envoyé aux établissements) à partir du 4 septembre et au plus tard le 13 octobre minuit, le cachet de la poste faisant foi (on ne pensait plus avoir à utiliser cette formule!).
- Dépouillement des votes les 6 et 7 novembre et publication des résultats le 13 novembre (il manquera encore les membres nommés pour la première session de qualification!).

1. [https://www.galaxie.enseignementsup-recherche.gouv.fr/ensup/Cand\\_elections\\_cnu2023.htm](https://www.galaxie.enseignementsup-recherche.gouv.fr/ensup/Cand_elections_cnu2023.htm)

2. <https://www.legifrance.gouv.fr/jorf/id/JORFTEXT000047324823> (calendrier en annexe 1)



## Bilan des sessions 2022 du CNU section 25

### 1. Qualifications et CRCT

#### 1.1 – Qualifications

Rappelons que, suite à la LPR, les maîtres de conférences et assimilés sont considérés comme dispensés de qualification au titre de l'article L. 952-6 du code de l'éducation. Il convient de souligner que le terme « assimilés », employé par le MESRI, fait référence aux corps assimilés au corps des MCF (personnels EPHE/ENC/EFEO, EHESS, Collège de France, CNAP, CNAM, MNHN, ENSAM), mais pas aux chercheurs des EPSTs. Le CNU a donc examiné, et continuera à examiner, des demandes de qualification Professeur émanant de candidats chercheurs d'EPSTs ainsi que des candidats en poste à l'étranger.

Le tableau suivant récapitule les données des trois dernières années. Rappelons que la section a pour pratique de qualifier les dossiers qui présentent des éléments tangibles d'activité de recherche et d'enseignement relevant du CNU25 : les dossiers non qualifiés sont majoritairement des dossiers qui ont été considérés comme ne relevant pas des champs disciplinaires couverts par la 25, à l'exception d'une poignée de dossiers insuffisants ou

insuffisamment renseignés (sur le volet recherche notamment). Pour les renouvellements de qualification, la section considère indispensable la présence d'éléments tangibles d'activité sur la période couverte par la qualification précédente. Par ailleurs, la section accepte, pour des dossiers venant de soutenir, la présence de prépublications comme attestant d'une activité de recherche avérée, au-delà de la simple soutenance de la thèse.

Enfin, des dossiers apparaissent naturellement comme relevant de plusieurs sections : le cas le plus fréquent est celui de 25 et 26, mais l'on rencontre également 25 et 27, ainsi que 25 et 72. Dans tous ces cas, les dossiers peuvent tout à fait être qualifiés en 25 et dans l'autre section, en fonction des éléments présentés au regard des critères de la section concernée. Il est utile de rappeler que la présence dans le dossier d'éléments permettant l'appréciation de la capacité à enseigner dans les filières de mathématiques peut s'avérer importante.

Le nombre global de candidats est en augmentation, après une baisse en 2021. Les sections CNU avaient obtenu du MESRI un allongement des délais de dépôt de pièces en 2021, pour permettre des soutenances plus tardives, dispositif qui a été reconduit pour la campagne de qualification 2022.

Maître de conférences							
	Qualifiés	Hors section	Non qualifiés	Non transmis	Autres cas non étudiés	Total	re-qualif.
2020	229	25	4	26	7	291	19 (6,5%)
2021	175	42	9	24		250	11 (4,4%)
2022	202	32	9	23	1	267	28 (10,4%)

Professeur des universités							
	Qualifiés	Hors section	Non qualifiés	Non transmis	Autres cas non étudiés	Total	re-qualif.
2020	229	25	4	26	7	291	19 (6,5%)
2021	20	3	1	1	1	26	3 (11%)
2022	22	1	1		1	25	7 (28%)

## 1.2 – Congés pour recherche et conversion thématique

Rappelons que les CRCT sont attribués de deux façons différentes : par les sections CNU sur un contingent national, et par les établissements (dans un second temps) sur un quota qui leur est propre. Le CNU25 disposait en 2022 de 7 semestres de CRCT à distribuer, un chiffre qui est stable depuis le début du mandat, les demandes étant neuf fois plus nombreuses. Les demandes au titre des retours de congé maternité ont été traitées, cette année encore, dans le contingent national. Elles seront, par contre, intégralement traitées (sans passage au CNU) par les établissements en 2023, le ministère ayant clarifié ses instructions à l'intention des établissements. Les collègues sont invité(e)s à faire remonter au bureau de section toute difficulté concernant ce quota particulier, la mise en place de ce dispositif ayant été particulièrement défailante depuis son annonce début 2020.

Comme les années précédentes, la section a privilégié dans son examen des dossiers les demandes s'appuyant sur un véritable projet, que ce soit un déplacement de longue durée, la préparation de l'HDR, ou un virage scientifique.

**Bénéficiaires :** Samuele Anni, Claire Chavaudrey, François Dahmani, Charles De Clercq, Antoine Ducros, Pavao Mardesic, Marusia Rebolledo.

## 2. Avancement de grade

La session « Avancement de grade » s'est tenue à nouveau suivant le calendrier habituel, en mai à l'IHP ; la section remercie l'IHP pour son accueil et son assistance matérielle.

Chaque dossier est étudié par deux rapporteurs désignés au préalable par le bureau, et l'évaluation tient principalement compte des activités réalisées depuis la dernière promotion obtenue. La sec-

tion est attentive à l'équilibre des dossiers entre recherche, enseignement, responsabilités administratives, encadrements, diffusion, etc. Elle apprécie les informations sur le devenir et les publications des doctorants, la liste des interventions dans les conférences, ou encore le détail des responsabilités administratives pour pouvoir en apprécier l'importance. Elle favorise également la qualité des publications sur leur quantité. Il est important que les congés maternité ou maladie longue durée, plus généralement les événements pouvant impliquer un retard de carrière, soient indiqués pour qu'il en soit tenu compte de façon appropriée.

Contrairement à la pratique établie de ne pas transmettre un avis détaillé aux établissements pour les dossiers non promus, la section a, pour la première fois, transmis des avis, rédigés sur la base des discussions en session. Dans un contexte où le quota national des promotions de grade reste menacé, ces informations doivent permettre aux établissements de mieux prendre en compte l'activité des collègues mathématiciens, alors même que, depuis des années, le nombre de promotions locales en section CNU25 est (nettement) inférieur au nombre de promotions nationales. Il est important de noter que cet avis s'adresse avant tout aux membres du CAC de l'établissement et non pas au candidat, même si cet avis est porté à sa connaissance.

Le cabinet du MESRI précédent avait, au début de l'année 2022 et après une consultation interministérielle, confirmé qu'il n'y avait aucune nécessité juridique à modifier le système actuel, mixte, des promotions de grade pour les enseignants-chercheurs. Si cette communication, verbale à l'attention du bureau de la CPCNU, a été bienvenue et qu'elle a été renouvelée par le cabinet de l'actuel MESRI, aucun engagement n'a été pris de préserver le quota national à l'avenir, le ministère renvoyant les discussions sur ce point à une date ultérieure. Il est donc probable que le prochain CNU ait, à nouveau, à affronter le sujet dès le début du prochain mandat.

### Panorama

	MCHC	MCE	PR1	PRCE1	PRCE2
Candidats	67	44	50	54	28
dont candidates	11 (16%)	5 (11%)	3 (6%)	6 (11%)	2 (7%)
Promus	20	9	8	9	7
dont promues	4 (20%)	2 (22%)	0 (0%)	1 (11%)	0 (0%)

Conformément à l'engagement pris à l'unanimité en début de mandat, aucun membre du CNU n'a été proposé par la section à la promotion.

### 2.1 – Promotion à la hors classe des maîtres de conférences

Les promotions à la hors classe présentent un éventail large de candidats aux profils variés. L'ensemble des activités est pris en compte et un investissement continu au cours de la carrière, dans des directions pouvant évoluer, est prépondérant. Le CNU est attentif à une répartition harmonieuse dans les différentes catégories d'âges et d'avancement de carrière des candidats retenus. L'obtention de l'HDR est un réel atout, sans être un pré-requis.

**Liste des promus :** Cafasso Mattia, Cahen Benjamin, Chantraine Baptiste, Demarche Cyril, Frégier Yaël, Fresse Lucas, Guillot Pierre, Herbaut Fabien, Heu Viktoria, Hoffbeck Eric, Kriegler Christoph, Lemahieu Ann, Lenzen Anna, Marmora Adriano, Mesnager Sihem, Ould Houcine Abderezak, Palu Yann, Panati Annalisa, Pazuki Mehdi, Pichereau Anne, Raibaut Michel, Vaux Auclair Lionel, Viola Joseph, Zavidovique Maxime.

### 2.2 – Promotion à l'échelon 7 dit « exceptionnel » des maîtres de conférences

La promotion à l'échelon 7 dit « exceptionnel » est en place depuis 6 ans et atteint progressivement sa vitesse de croisière. Cet échelon doit représenter dans 2 ans 10% de l'effectif du corps des Maîtres de conférences (classe normale et hors classe). Les promotions proposées résulteront alors uniquement du flux sortant, principalement composé des départs à la retraite.

Si l'âge a été déterminant pour les premières promotions à l'échelon exceptionnel afin d'assurer un renouvellement régulier, le rajeunissement du vivier des candidats conduit à des profils de premier plan en recherche, en partie provoqué par la pénurie de postes de professeur. Face à cette pression forte, la section reste attentive à promouvoir également des profils plus âgés, notamment pour continuer à assurer un roulement dans les années qui viennent. Le critère d'âge a, certes, une importance mais elle va diminuant. De nouveaux dossiers d'excellente qualité, qui n'étaient pas précédemment candidats, ont été présentés, toutes les candidatures sont bienvenues et seront examinées comme il se doit.

**Liste des promus :** Abakoumov Evgueni, Barré Sylvain, Faivre Christian, Han Frederic, Jehanne Arnaud, Lecomte Dominique, Maheux Patrick, Montgard Pierre-Louis, Naie Daniel, Oukhaba Hassan, Rumin Michel, Vallès Jean, Vinatier Stéphane.

### 2.3 – Promotion à la première classe des professeurs

La promotion à la première classe des professeurs reste soumise à une pression extrêmement forte, année après année. La qualité scientifique, attestée par les publications, le rayonnement et l'animation scientifique, l'encadrement doctoral, les responsabilités administratives et pédagogiques importantes sont des éléments clés. Les candidats sont appelés à rédiger leur dossier de façon à mettre en avant de façon claire toutes leurs activités marquantes. Les dossiers avec au moins trois ans d'ancienneté de professeur sont privilégiés.

**Liste des promus :** Castravet Ana-Maria, Chen Huayi, Dupont Christophe, Fradelizi Matthieu, Nivoche Stéphanie, Oyono-Oyono Hervé, Rivière Gabriel, Touzé Antoine.

### 2.4 – Promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des professeurs

La promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle des professeurs récompense les collègues qui se sont distingués dans leurs activités tout au long de leur carrière. On y évalue l'importance des contributions scientifiques, des services rendus à la communauté, l'influence de l'activité de formation doctorale. Les dossiers avec au moins trois ans d'ancienneté de professeur première classe sont privilégiés.

**Liste des promus :** Cordero-Erausquin Dario, Dimassi Mouez, Dujardin Romain, Essouabri Driss, Graczyk Piotr, Guirardel Vincent, Koziarz Vincent, Lecouvey Cédric, Livernet Muriel, Merker Joël.

### 2.5 – Promotion au second échelon de la classe exceptionnelle des professeurs

Le principal critère pour cette promotion, lorsque l'activité scientifique est incontestable, est l'ancienneté dans le grade; en 2022, la barre se situait à la sixième année.

Liste des promus : Badea Catalin, Buff Xavier, David Sinnou, Ducros Antoine, Fan Ai Hua, Krikorian Raphaël, Rémy Bertrand, Rivat Joël, Zamboni Luca.

### 3. Primes : le nouveau régime dit RIPEC

La session d'examen des demandes de primes au titre du RIPEC s'est tenue en septembre à Jussieu ; la section remercie l'UFR de mathématiques pour son accueil.

Le nouveau régime de primes a engendré de nombreuses interrogations, chez les collègues susceptibles de déposer des dossiers mais également au sein des sections CNU confrontées à un processus complexe où l'on peut, légitimement, s'interroger sur la bonne prise en compte des avis rendus. Rappelons que, dans l'ancien système des PEDRS, le régime des quotas assurait que les avis des sections CNU étaient, très majoritairement, pris en compte (la totalité des avis A recevant la prime, sauf cas exceptionnel, et environ 2/3 des avis B la recevant, en retrait de la moyenne toutes sections confondues, plus proche de 5/6).

Dans le nouveau système, les sections CNU et les CACS établissement rendaient une série de trois avis, portant respectivement sur l'activité scientifique, l'enseignement et les tâches d'intérêt général : ces avis pouvaient être « très favorable », « favorable » ou « réservé » (le ministère codant les avis avec les lettres A, B et C). C'est le chef d'établissement qui, seul, au vu des avis rendus par les instances, décide de l'attribution de la prime et à quel titre. À l'heure où ce compte-rendu est écrit, la section ne dispose toujours pas des résultats de ce processus d'attri-

bution, il est donc impossible de savoir si les avis rendus ont été suivis et dans quelle proportion.

La section a suivi les recommandations du bureau de la CPCNU d'examiner chacun des trois volets de façon distincte ; cette recommandation a été faite après des discussions avec l'association des VP RH d'établissement, qui ont explicitement demandé ce mode de fonctionnement. Il est à craindre que toutes les sections n'aient pas suivi ce modus operandi, et que la réalité dans certains établissements soit bien différente, au détriment des candidatures et de leur évaluation par la section.

Le volume des candidatures examinées a augmenté, de plus de 30%, pour les MCFs, et il est resté stable (et peu élevé en nombre) chez les PRs. La section considère que la quasi-totalité des dossiers examinés ont une activité scientifique avérée, de bonne voire très bonne qualité. La très grande majorité des dossiers présente également un profil émergeant aux trois volets.

Le tableau ci-dessous indique le nombre d'avis rendus par type sur chacun des volets, pour les dossiers relevant du CNU25, par les établissements et par la section. Remarquons qu'en volume ces avis sont cohérents, ce qui n'exclut pas des disparités individuelles. La cotation des avis était sur trois niveaux : très favorable (TF), favorable (F) et réservé (R).

La procédure sera différente en 2023, avec un circuit d'examen qui verra les sections CNU examiner les dossiers en premier, sans disposer préalablement des avis du CAC. Il est à craindre que cette simplification ne fasse qu'ajouter à l'illisibilité d'un système où le sentiment de loterie, quand ça n'est pas d'arbitraire, prédomine...

#### Notes RIPEC établissements et CNU25

	MCF	PR
Candidats	143	69
Enseignement (local)	71 TF 49 F et 23 R	26 TF 30 F et 13 C
Recherche (local)	58 TF 47 F et 38 R	49 TF 17 F et 3 R
Tâches d'intérêt général (local)	39 TF 44 F et 60 R	27 TF 28 F et 14 R
Enseignement (CNU25)	89 TF 48 F et 5 R	33 TF 33 F et 3 R
Recherche (CNU25)	73 TF 33 F et 36 R	51 TF 14 F et 4 R
Tâches d'intérêt général (CNU25)	47 TF 51 F et 44 R	33 TF 25 F et 11 R

Par ailleurs, la publication du présent bilan a été différée dans l'attente de la communication des résultats par la DGRH aux sections CNU, initialement prévue « début 2023 ». À ce jour (mars 2023) non seulement nous n'avons pas ces résultats mais il est à craindre que seules des statistiques nous soient communiquées (dont la primeur est réservée au comité de suivi du protocole carrière et rémunérations associé à la LPR, qui doit se réunir prochainement). Rappelons que, si les sections CNU n'étaient pas, non plus, décisionnaires dans l'ancien système PEDR, les résultats nominatifs leur étaient communiqués chaque année.

## 4. Repyramidage

L'année 2022 a vu la mise en place d'un nouveau dispositif, temporaire, de promotions « internes » (au sens des établissements) du corps des MCFs vers le corps des PRS. L'objectif affiché étant un ré-équilibre des proportions respectives des corps dans chaque section CNU, le ministère a communiqué à chaque établissement la liste des sections jugées déficitaires en son sein ; à charge pour lui d'ouvrir les supports au vu de sa politique interne. Il y a donc eu régulièrement des ouvertures de supports dans des sections non identifiées comme déficitaires par le ministère, ce qui a bénéficié à la section 25 qui est plutôt dans le groupe de sections CNU les plus proches de l'équilibre à atteindre (60/40). Huit établissements ont ainsi ouvert un support de repyramidage en section 25, ce qui a conduit

à l'examen par la section de 26 dossiers. Conformément aux préconisations du bureau de la CPCNU, ces dossiers ont été examinés établissement par établissement. Trois établissements sur huit ont accompagné leur notation d'avis circonstanciés ; en retour, la section a systématiquement accompagné sa notation d'avis circonstanciés. Comme dans le cas des promotions, ces avis détaillés s'adressaient avant tout à l'établissement pour la suite de son processus de sélection (audition d'un sous-ensemble de candidats par un comité ad hoc, puis décision du chef d'établissement). La section fait le constat d'une certaine cohérence entre les avis établissements et ceux qu'elle a rendus. Il est clair que, dans l'ancien régime de la qualification, l'ensemble des dossiers qu'elle a examinés auraient été (re)qualifiés aux fonctions de professeur.

Le processus du repyramidage étant appelé à évoluer pour 2023 mais les modifications n'étant pas connues à ce jour, il est difficile de faire des recommandations. Il convient de rappeler que l'auto-censure n'est jamais une bonne stratégie et qu'il convient donc de postuler lorsqu'un support est ouvert.

**Liste des candidats promus par les établissements :** Berger Clemens, Coulangeon Renaud, Frécon Olivier, Hulin Dominique, Malbos Philippe, Mesnager Sihem, Petite Samuel, Vinatier Stéphane.

Le bureau de la section

# Bilan des sessions 2022 du CNU section 26

## Troisième année du mandat 2019-2023

Le Conseil National des Universités (CNU) a poursuivi ses travaux pour sa troisième année (mandat de quatre ans).

La section 26 est composée de 48 membres titulaires (dont 16 nommés) et de 48 membres suppléants (dont 16 nommés); elle compte une moitié de rangs A et une moitié de rangs B; elle est chargée du domaine « Mathématiques Appliquées et Applications des Mathématiques » et représente environ les trois cinquièmes des enseignants-chercheurs en mathématiques en France. Une présentation générale du CNU se trouve sur le site de la CP-CNU<sup>1</sup>. La section dispose également d'un site propre<sup>2</sup>.

### 1. Motions concernant les évolutions du métier et des missions du CNU

**Motion « Suivi de carrière » (reconduite le 01/02/2022).** Les sections 25 et 26 ont décidé de reconduire la décision prise depuis 2017, de ne pas mettre en place le suivi de carrière en 2022.

« Les sections 25 et 26 décident de ne pas mettre en place le suivi de carrière : faute d'une définition précise des objectifs, des modalités et de l'allocation de moyens dévolus à cette nouvelle mission, celle-ci ne peut être mise en œuvre jusqu'à nouvel ordre. »

**Motion « Avancement de grade », votée par le CNU26 le 01/02/2022.** Lors de l'assemblée générale de la CP-CNU du 10 décembre 2021, nous avons été informés d'un projet de décret (dont le texte préliminaire était déjà disponible, un projet très concret et à objectif imminent, donc) visant à supprimer le contingent national des avancements de grade.

Précisons que les propositions d'avancements de grade des enseignants-chercheurs sont effectuées pour moitié par les CNU disciplinaires, et pour moitié par les établissements. Ce mode de promotion est équilibré et permet de porter deux regards différents sur les dossiers des demandeurs. Le pro-

jet de décret visait à rendre les universités décisionnaires à 100%, le CNU n'étant, là encore, que consultatif, sous la mention « Si l'avis du CNU n'est pas rendu dans les délais, il est réputé rendu », comme pour la prime individuelle (RIPEC 3) et le repyramidage!

Pour cette raison, une discussion a eu lieu, lors de cette AG du 10 décembre, et a abouti au vote de la motion suivante :

« *Suppression de l'avancement de grade des enseignant.e.s-chercheur.e.s au niveau national. Le Bureau de la CP-CNU vient d'apprendre de la DGRH<sup>3</sup> du MESRI<sup>4</sup> que l'avancement de grade au niveau national, opéré par les sections du CNU, serait supprimé dès 2023. S'inscrivant dans un processus continu de restriction des missions de l'instance nationale, cette mesure aura alors pour conséquence directe une attribution exclusivement locale des promotions des enseignant.e.s-chercheur.e.s. En supprimant le contingent national par section, elle remet en question la capacité de garantir les équilibres disciplinaires et l'expertise scientifique pour l'appréciation des différents aspects de la carrière. Aussi, la CP-CNU, réunie en Assemblée Générale le 10 décembre 2021, a décidé d'appeler à la démission des membres des sections CNU en l'absence de garantie apportée par la ministre sur le maintien des contingents nationaux avant le 10 mars 2022. Elle demande à toutes et tous les enseignants-chercheurs de manifester dès maintenant leur opposition à la disparition du contingent national, au sein de leurs établissements, dans les structures scientifiques et culturelles qu'ils et elles animent, ainsi que dans les instances auxquelles ils et elles participent et en soutenant la lettre ouverte adressée ce jour à la ministre de l'Enseignement supérieur, de la recherche et de l'innovation. »*

La présidente du CNU26 a informé peu après l'ensemble de la section de ce vote de démission potentielle et annoncé une discussion et un vote de la section sur ce point lors des journées de qualification. La section 26 a ainsi voté, le 01/02/2022, la motion unanime suivante.

1. <https://www.conseil-national-des-universites.fr>

2. <http://cnu26.emath.fr>

3. Direction Générale des Ressources Humaines

4. Ministère de l'Enseignement Supérieur et de l'Innovation

« Les membres de la section 26 sont très attachés à la liberté académique qui est garantie par le statut national des enseignants-chercheurs. La double possibilité d'avancement, équilibrée, au niveau national et au niveau local, est un gage d'indépendance et d'intégrité scientifiques des enseignants-chercheurs. La supprimer serait un point de non-retour. En conséquence, si le ministère ne maintient pas ces deux voies complémentaires de promotion, nous démissionnerons le 11 mars 2022. »

Des engagements ont été pris fin février 2022 par le cabinet de la ministre auprès du bureau de la CP-CNU, allant dans le sens du renoncement à la suppression annoncée du contingent d'avancement par voie nationale, et la menace de démission n'a pas été mise à exécution. Mais la vigilance s'impose pour l'avenir.

**Motion « Repyramidage », votée par le CNU26 le 01/02/2022.** Lors des discussions de la section 26 concernant le repyramidage, beaucoup de collègues se sont inquiétés des modalités de fonctionnement de cette procédure, à la fois complexe dans ses modalités, et délicate à mener pour les équipes de recherche ou les UFR concernées. Une motion a donc également été votée.

« Le CNU26 s'interroge sur les modalités opérationnelles de la procédure de repyramidage : la prise de décision dans le processus tel qu'il est décrit est essentiellement administrative et fait courir un risque de conflit d'intérêt ou de clientélisme local, aux dépens de la qualité scientifique et du rayonnement national et international. Le CNU26 adhère aux positions de l'Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions du CNRS et souhaite notamment : que cette promotion ne se substitue pas à un recrutement de professeure ou de professeur des universités au titre de l'article 46-1 du décret n° 84-431 du 6 juin 1984 ; que la qualité scientifique soit le critère principal retenu pour opérer la sélection du candidat ; que l'université mette en place un comité de sélection spécifique, constitué pour majorité de mathématiciennes et mathématiciens extérieurs. »

**Motion « Prime Individuelle », votée par le CNU26 le 01/02/2022.** Enfin, la PEDR a été supprimée et remplacée par la prime Individuelle dans le cadre du nouveau « RIPEC » (d'où son nom de « RIPEC 3 »

comme troisième item dudit RIPEC), « Régime Indemnitaire des Personnels Enseignants et Chercheurs ».

Les modalités d'attribution de cette prime individuelle étaient floues au moment où nous nous sommes réunis, et les projets de décrets, là encore non finalisés, laissaient craindre un système bien complexe. Nous savons aujourd'hui que les établissements ont effectivement dû procéder à une évaluation générale de l'ensemble des dossiers déposés par leurs EC, et que cet effort a épuisé tous les collègues membres des conseils qui ont participé à cette procédure, sans compter tous ceux qui ont été sollicités pour rédiger des rapports sur ces dossiers ; le CNU s'est également prononcé, dans un second temps, avec les mêmes dépenses d'énergie, et de façon purement consultative. Nous avons voté, le 01/02/2022, la motion d'alerte suivante.

« Concernant la prime individuelle, le CNU26, en l'absence d'informations précises, émet des réserves et ne peut qu'exprimer des inquiétudes. Quelle sera la prise en compte des avis éventuellement émis par le CNU ? Des quotas prédéterminés seront-ils imposés ? La prise de décision dans le processus tel qu'il est décrit est très administrative et fait courir un risque de conflit d'intérêt ou de clientélisme local, aux dépens de la qualité scientifique et du rayonnement national et international. »

## 2. Bilan de la session qualifications

Même si les candidats ont connaissance des deux rapporteurs désignés par le bureau de la section, il est important de préciser que la décision de qualification, ou de refus de qualification, est le fait de la section dans son ensemble, le rôle des rapporteurs étant avant tout de présenter à celle-ci les éléments factuels du dossier, en particulier en liaison avec nos critères de qualification. Les membres du CNU présents ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient proches.

Les critères de qualification ne sont pas toujours bien connus des candidats, ceux-ci sont invités à les consulter sur les pages du CNU<sup>5</sup>.

Attention, les dossiers sont déposés en ligne, la recevabilité des dossiers est étudiée par le ministère, et la section n'a pas de prise sur les décisions d'irrecevabilité que celui-ci prend.

5. <https://www.conseil-national-des-universites.fr>, ou <http://cnu26.emath.fr>.

## 2.1 – Qualification aux fonctions de Maître de Conférences

La session de qualification s'est tenue les 1, 2 et 3 février 2022, en hybride à Jussieu grâce à Laurent Boudin qui a entraîné dans son sillage Fanny Villers et Camille Tardif, et au directeur de l'UFR de Mathématiques de Sorbonne Université, Sami Mustapha, qui ont trouvé, pour nos réunions, une salle avec toute la logistique associée (logistique sanitaire pour les présents, logistique informatique pour les distants) : nous les en remercions chaleureusement ! Beaucoup de collègues étaient présents, malgré l'alerte sanitaire encore en cours, ce qui a facilité grandement les discussions et les échanges.

**Résultats de la session 2021-22.** Nombre de dossiers : 405 (contre 425 en 2021, 450 en 2020). Parmi ceux-ci, irrecevables ou non transmis : 45.

Le nombre de dossiers MCF effectivement examinés par la section a donc été de 360, en baisse par rapport à 2021 (377 en 2021).

Hors-section : 66. Non qualifiés : 28. Qualifiés : 250 (244 en 2021).

Le pourcentage de dossiers qualifiés parmi les dossiers examinés est de 71,4% (contre 65% en 2021).

**Critères de qualification.** Deux repères importants sont utilisés dans l'évaluation des dossiers, en particulier pour les candidats dont le parcours ne s'inscrit pas de façon canonique dans les thématiques de la section.

- D'une part l'aptitude à enseigner toutes les mathématiques de Licence. Attention, certains candidats omettent complètement la rubrique « enseignement » et son absence totale peut entraîner un refus de qualification. L'enseignement est une partie importante de notre métier, le point doit être mentionné, que ce soit pour faire part d'une expérience, ou pour expliquer pourquoi celle-ci n'a pas pu avoir lieu.

- D'autre part l'activité scientifique, qui dans les domaines d'application des mathématiques ne doit pas se limiter à une description de modèles classiques et une utilisation de méthodes et algorithmes éprouvés.

L'activité de recherche est évaluée à partir : 1) Des travaux de la thèse en particulier à travers les rapports de thèses (ou s'ils n'existent pas tout autre document équivalent attestant de la qualité de la thèse). Pour les candidats titulaires d'un doctorat français récent, il est naturel d'attendre qu'un ou

plusieurs membres du jury de thèse, et si possible un des rapporteurs, relèvent de la section du CNU dans laquelle le candidat demande la qualification. 2) Des publications. Si la présence d'une publication dans une revue à comité de lecture n'est pas exigée pour les thèses de l'année, elle représente un élément d'appréciation décisif pour les thèses plus anciennes. 3) L'évaluation prend aussi en compte l'apport méthodologique en mathématiques, la mise en place de modèles originaux, le développement de nouveaux algorithmes, la validation des modèles théoriques dans le cadre d'applications réalistes.

L'utilisation d'un outil mathématique standard dans un travail de recherche relevant d'une autre discipline n'est pas considéré comme suffisant à lui seul pour la qualification en Section 26 (c'est en général ce critère qui entraîne le plus de refus de qualification). Les candidats qui s'estiment dans le champ « applications des mathématiques » sont encouragés à ne pas restreindre leurs candidatures de qualification à la 26<sup>e</sup> section.

Par ailleurs le CNU s'attend à ce que les exigences précédentes sur l'activité de recherche soient aussi vérifiées sur les deux dernières années en cas de thèses datant de plus de deux ans (ceci est particulièrement examiné en cas de requalification).

Enfin, il est recommandé de rédiger le dossier de candidature en français.

Rappelons qu'une seule qualification suffit pour postuler sur tous les postes, quelle que soit la section dans laquelle elle a été obtenue.

## 2.2 – Qualification aux fonctions de Professeur

**Résultats de la session 2021-22.** Désormais, les collègues MCF titulaires n'ont plus à demander la qualification PR, le nombre de dossiers a donc chuté et le temps imparti à cette réunion a été considérablement diminué (1/2 journée, ce qui est plus que suffisant et permet de prendre le temps de mener quelques discussions d'ordre général).

Le nombre de dossiers était de 37 lors de la désignation des rapporteurs, et il était de 18 au moment de la session de qualification PR (suppression progressive par le ministère des dossiers des candidats automatiquement qualifiés compte-tenu de leur statut), parmi lesquels 3 demandes de dispense, accordées. Parmi les 18 dossiers examinés, 14 ont été qualifiés ; il y a eu 2 non qualifiés, et 2 ont été classés hors section.

Le bureau renvoie au site <http://cnu26.emath.fr> ou à celui des CNU (groupe 5) pour les critères de qualification aux fonctions de professeur.

### 3. Attribution de semestres de congés pour recherche ou conversion thématique (CRCT)

Les semestres de CRCT ont été attribués en février, lors de la session qualifications. Il y a eu 22 candidats PR et 42 candidats MCF, pour un contingent de 10 semestres à attribuer.

Liste principale (3 PR et 7 MCF). Ayi Nathalie, Bruneau Vincent, De Coster Colette, Dupaigne Louis, Lagnoux Agnès, Mallein Bastien, Mazet Olivier, Sabot Christophe, Seppecher Laurent, Soury Lavergne Sophie.

Liste complémentaire. 11 : Bouclet Jean-Marc, 12 : Ciotir Iona, 13 : Lequeurre Julien, 14 : Liu Quansheng, 15 : Amaziane Brahim, 16 : Costa Manon, 17 : Oudet Édouard, 18 : Grapin Nadine, 19 : Viossat Yannick, 20 : Aubin Jean-Baptiste, 21 : Dedecker Jérôme.

Il y a eu un désistement dans la liste principale (Christophe Sabot, nommé à l'IUUF).

L'attribution d'un CRCT nécessite un projet scientifique de qualité, précis et clairement défini. Le CNU privilégie particulièrement les dossiers comportant des séjours scientifiques à l'étranger, des participations à des trimestres thématiques... Le conseil favorise également les candidats qui n'ont pas ou ont peu bénéficié de CRCT ou de délégations dans le passé.

Il est indispensable que les CRCT et délégations passés des candidats soient clairement mentionnés. Dans la constitution des dossiers, il est vivement recommandé d'inclure des copies de pièces à l'appui des projets : lettres d'invitation, programme des semestres...

Notons que cette année encore, la rubrique spéciale apparue il y a deux ans pour les demandes, visant à octroyer un CRCT suite à un congé de maternité/paternité, a été maintenue. Cependant les dossiers ont été transmis aux CNU sans information sur un budget spécifique. Vu le faible nombre de semestres à attribuer, le CNU26 les a traités de la même façon que les autres, en comptant que les universités recevraient ensuite un financement spécifique, dont elles sauraient faire bon usage. Mais il est notoirement difficile d'obtenir des informations de la part du ministère à ce propos : il semblerait que la rubrique a été créée puis oubliée.

### 4. Promotions

La session « Avancement de grade » s'est tenue en présentiel les 16, 17 et 18 mai 2022 à l'université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Prés.

Les candidatures se font par voie électronique. Avant l'examen par le CNU, les dossiers sont préalablement examinés par les conseils académiques des établissements qui émettent un avis sur les tâches administratives et l'activité d'enseignement des candidats. La section 26 du CNU a maintenu son choix de ne pas mettre d'évaluation sur les dossiers des candidats qu'elle ne propose pas à la promotion. Elle a donc transmis aux établissements l'avis suivant pour les candidats non promus « La section 26 du CNU ne souhaite pas émettre d'avis sur les candidats qu'elle ne propose pas à la promotion sur le contingent qui lui est attribué ». Pour les membres du CNU, la section indique à l'établissement qu'elle n'examine pas les dossiers de candidature à une promotion émanant de ses membres. Les membres du CNU participant à la session ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient (trop) proches.

TABLEAU 1 – Nombre de candidat.e.s aux différentes promotions et contingents attribués par le ministère

	MCF HC	MCF EX	PR 1C	PR EX1	PR EX2
Candidats	103	38	72	70	45
dont Candidates	35	17	11	8	7
Promus	33	16	11	14	10
dont Promues	14	7	2	1	0
Agés min et max des promus	37-51	53-64	40-53	42-62	49-62

Chaque dossier est examiné par deux rapporteurs du CNU, désignés par le bureau, après consultation du bureau élargi. Les réunions du bureau se sont tenues à distance. Les rapporteurs ne sont pas les mêmes d'une année sur l'autre (sauf parfois pour nos collègues en didactique, à cause du faible nombre d'experts au sein du CNU26).

Nous attirons l'attention sur les points importants suivants. 1) Le dossier de candidature à une promotion doit contenir un descriptif de l'ensemble de la carrière et faire apparaître clairement les éléments nouveaux par rapport à la dernière promotion. 2) En ce qui concerne l'encadrement doctoral, le dossier doit préciser pour chaque encadrement le taux d'encadrement de la thèse, son financement, le devenir du docteur, ses publications. 3) En ce qui concerne les conférences, il doit distinguer les simples participations, posters, conférences invitées, invitations comme conférencier plénier. Clairement, cette rubrique a subi des évolutions depuis deux ans.

De façon générale, chaque élément du dossier doit être décrit de façon suffisamment claire et précise, et lorsque cela est pertinent, par des éléments chiffrés, pour permettre sa juste prise en compte par la section.

Le bilan chiffré de la session promotions est résumé dans le tableau ci-dessus.

Rappelons que le nombre de promotions dans chaque catégorie est décidé par le ministère.

#### 4.1 – Promotions à la hors-classe des MCF

Liste des promus (33) : Alarcon Flora, Angst Jurgen, Badra Mehdi, Barbot Nelly, Boutillier Cédric, Brull Stéphane, Charles Frédérique, Chesneau Christophe, Chorlay Renaud, Croce Gisella, Donadello Carlotta, Durand Jean-Baptiste, Ersoy Mehmet, Faccanoni Gloria, Lehec Joseph, Marot Briend Guillemette, Martinez Marcou Marie-José, Maugis Rabusseau Cathy, Ménard Laurent, Mercadier Cécile, Millon Faure Karine, Munnier Alexandre, Perasso Antoine, Phung Kim Dang, Pierfelice Vittoria, Quinton Jean-Charles, Ribereau Pierre, Rolland Antoine, Scheid Claire, Tugaut Julian, Valein Julie, Vandewalle Vincent, Varron Davit.

Pour les promotions à la hors-classe, le CNU examine l'ensemble de la carrière des candidats. Outre le travail de recherche et l'activité d'enseignement, un investissement particulier dans le domaine pédagogique ou au service de la communauté scientifique est apprécié. Un objectif de ces promotions

étant d'offrir une fin de carrière valorisée à des collègues méritants, le CNU est vigilant à une juste répartition des âges des collègues promus.

#### 4.2 – Promotions à l'échelon MCF EX

Liste des promus (16) : Blouza Adel, Ciuperca Ionel Sorinel, Corrias Lucilla, Delattre Sylvain, Gisclon Marguerite, Grammont Laurence, Grillot Philippe, Guillet Christophe, Jadda Zoubida, Larramendy Valverde Irène, Lavaud Leconte Evelyne, Lioukanov Galtchouk Daria, Mailfert Jean, Mainge Paul Émile, Plantec Jean-Yves, Sandri Dominique.

L'effectif du nouvel échelon doit à terme représenter 10% de l'effectif du corps des MCF; cet effectif doit être atteint au bout de 7 ans, cette année étant la sixième. Au terme des 7 années, les promotions proposées résulteront uniquement du flux sortant des promus du corps des MCF, essentiellement par départs en retraites. C'est pourquoi la section a décidé, cette année encore, d'utiliser de façon importante, mais non exclusive, le critère de l'âge pour cette promotion. Ce critère tend à devenir de moins en moins important. Le critère de l'âge a été choisi plutôt que l'ancienneté dans le grade MCF-HC, et a été modulé au vu de l'investissement des candidats dans tous les aspects du métier d'enseignant-chercheur.

#### 4.3 – Promotions à la première classe des PR

Liste des promus (11) : Carassus Laurence, Chrétien Stéphane, Côte Raphaël, Cresson Jacky, Goga Camelia, Marteau Clément, Menozzi Stéphane, Réveillac Anthony, Rodrigues Luis Miguel, Vandebrouck Fabrice, Vauchelet Nicolas.

Pour l'examen des promotions à la première classe des professeurs, le CNU dégage de chaque dossier de candidature les éléments suivants : domaine scientifique, âge et ancienneté comme professeur, faits marquants de la carrière, distinctions scientifiques, activité scientifique (nombre et qualité des publications, communications), encadrement doctoral (thèses encadrées et devenir des docteurs), activités éditoriales, direction de projets (type ANR, réseaux européens, GDR...), rapports de thèses ou d'HDR, invitations à l'étranger et dans des conférences internationales, activités et responsabilités pédagogiques, responsabilités diverses (direction d'équipe ou d'établissement, appartenance à différentes commissions...).

Les candidats sont invités à mettre clairement ces éléments en avant dans leur dossier. Le CNU veille à une répartition équilibrée entre les sous-disciplines (analyse des EDP et analyse numérique, calcul scientifique, didactique, optimisation, probabilités, statistique), ce qui n'exclut pas les dossiers transversaux ou atypiques. Le CNU est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus. Étant donnée la pression très forte sur ce type de promotion, les candidats qui étaient professeurs depuis au moins trois ans ont été privilégiés. Cette promotion est clairement celle où l'embouteillage est chroniquement le plus critique.

#### 4.4 – Promotions au premier échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus (14) : Auroux Didier, Blanke Delphine, Calka Pierre, Chambaz Antoine, Chupin Laurent, Garivier Aurélien, Gloria Antoine, Grama Ion, Igbida Noureddine, Maitre Emmanuel, Robert Christian, Seuret Stéphane, Smets Didier, Tudor Ciprian.

Le CNU attend des candidats à une promotion au premier échelon de la classe exceptionnelle qu'ils se soient particulièrement distingués dans les différentes missions d'un Professeur des universités, que ce soit par l'excellence de leurs travaux de recherche, ou en jouant un rôle majeur dans la communauté scientifique en termes d'encadrement, de diffusion, et de structuration de la recherche. Le conseil est attentif à une juste répartition des âges des collègues promus et a privilégié les candidats qui étaient professeurs de 1<sup>re</sup> classe depuis au moins trois ans.

#### 4.5 – Promotions au second échelon de la classe exceptionnelle des PR

Liste des promus (10) : Abraham Romain, Bernard Patrick, Besse Christophe, Chaumont Loïc, Jeanjean Louis, Lafitte Olivier, Martel Yvan, Miranville Alain, Rosier Lionel, Russo Francesco.

Parmi les candidats dont le dossier démontre une activité soutenue dans les différentes missions des Professeurs d'université, le critère essentiel pour le changement d'échelon est l'ancienneté dans la classe exceptionnelle. Les candidats à cet échelon sont invités à accorder à leur dossier le

soin requis pour permettre aux rapporteurs d'en faire une lecture autonome.

#### 4.6 – Promotions hors CNU

Le bilan des promotions locales pour l'année 2022 n'est pas encore disponible. En 2021, il y a eu en promotions locales :

Promotions mcf Hors classe (12) : Atlagh Mohamed, Camar-Eddine Mohamed, Chatelon François, Corset Franck, Demichel Yann, El Machkouri Mohamed, Jégou Nicolas, Legendre Guillaume, Pellegrini Clément, Pesneau Pierre, Vergne Nicolas, Villers Fanny.

Promotions mcf échelon exceptionnel (7) : Casanova Sandrine, Foucher Françoise, Hache Christophe, Kermorvant Patrice, Pamphile Patrick, Sesboué André, Vermet Franck.

Promotions PR 1<sup>re</sup> classe (13) : Andreianov Boris, Babadjian Jean-François, Barre Julien, Bouzedba Salim, Chaachoua Abdelhamid, Chassagneux Jean-François, Gradinaru Mihai, Joly Pierre, Michel Bertrand, Ould Said Elias, Ribot-Barre Magali, Rozenholc Yves, Salort Delphine.

Promotions PR classe exceptionnelle, 1<sup>er</sup> échelon (8) : Alziary de Roquefort Bénédicte, Dumas Laurent, Durrieu Gilles, Ferraty Frédéric, Horsin Thierry, Niang-Dabo Sophie, Saad Mazen, Sadkane Miloud.

Promotions PR classe exceptionnelle, 2<sup>e</sup> échelon (14) : Antoine Xavier, Barkatou Moulay, Biau Gérard, Bucur Dorin, Canalis Durand Mireille, Chafai Djalil, Danchin Raphaël, Desbat Laurent, Gaitan Patricia, Lombardi Eric, Mieussens Luc, Paoli Laetitia, Saracco Jérôme, Sepecher Pierre.

## 5. Bilan de la session Prime Individuelle

La Prime Individuelle aussi appelée RIPEC3 ou Prime C3 fait partie de la LPPR<sup>6</sup> qui comporte un volet « Régime Indemnitaire des Personnels Enseignants et Chercheurs » (RIPEC) à trois composantes.

1. La prime C1 ou RIPEC1, est l'ancienne prime d'enseignement supérieur attribuée à tous les EC. Elle est revalorisée à 2800 euros annuels pour tous les EC en 2022 (elle était de 1200 euros annuels en 2020). L'objectif affiché est d'atteindre 6400 euros/an en 2027.

6. Loi de Programmation Pluriannuelle de la Recherche

Cette prime est versée de façon automatique et devrait être mensualisée.

2. La prime C2 ou RIPEC2, est une prime de fonction, attribuée par les établissements pour des fonctions ou des responsabilités spécifiques. Il y a trois groupes de responsabilités, avec des montants plafonds différents mais pas de plancher.
3. La prime Individuelle ou prime C3 ou RIPEC3 : c'est celle qui nous intéresse ici. Elle est attribuée sur demande de l'EC, par le chef d'établissement, après un avis d'une commission de l'établissement, et un avis (facultatif) du CNU et pour une durée de trois ans. Elle peut être attribuée au titre de l'Investissement Pédagogique, ou bien de l'Activité Scientifique, ou bien des Responsabilités collectives et d'intérêt général, ou enfin pour les trois motifs précédents simultanément. Le dossier des candidats doit rendre compte des activités des quatre années précédentes. Cette prime remplace la PEDR, mais il ne s'agit plus d'une prime de recherche, plutôt d'une prime d'activité. En 2022, la prime, dont la décision finale ne sera validée qu'en décembre 2022, est attribuée rétroactivement au 1<sup>er</sup> janvier 2022. Une année de carence est prévue, elle devrait concerner pour commencer les titulaires de l'actuelle PEDR. Les modalités finales de décision et les montants (le plancher est de 3500 euros/an) sont inconnus pour le moment. Ils différeront certainement selon les établissements.

La session Prime Individuelle du CNU26 s'est tenue en présentiel les 5 et 6 septembre 2022, à l'université Paris Cité, Campus Saint-Germain-des-Prés.

Chaque section du CNU doit attribuer à chaque candidat une mention « Très favorable = A », « Favorable = B » ou « Réserve = C » dans les trois catégories : Investissement pédagogique, Activité scientifique, et Responsabilités administratives et d'intérêt général. L'évaluation est faite sur la période des quatre dernières années. En cas de congé maternité ou de maladie pendant cette période, l'appréciation porte sur les cinq années précédentes (plus s'il y a plusieurs congés dans la période). Il n'y a aucun quota contraignant sur les lettres attribuées.

Au moment où nous avons traité les dossiers, les établissements avaient déjà effectué cette (même) évaluation. Cependant, même si leurs avis sont accessibles au rapporteur, ils ne figurent pas dans les dossiers téléchargeables et nécessitent une action spécifique dans Galaxie pour être consultés.

Ainsi, il a été convenu, début juin, lors d'une réunion à distance du bureau (très) élargi que le CNU26 fournirait une évaluation indépendante de celle des établissements et que les rapporteurs n'étaient pas tenus de consulter cette évaluation *a priori*. Il est arrivé qu'elle soit consultée *a posteriori*. Des éléments de barème ont été discutés et notamment la différenciation des évaluations pour tenir compte de l'ancienneté dans la carrière (moins d'attendus pour les jeunes maîtres/maîtresses de conférences que pour les collègues plus expérimentés, par exemple). Ils sont détaillés ci-après.

## 5.1 – Critères et barème indicatif

### Investissement Pédagogique.

A. Responsabilités de filières ou d'enseignements à (très) gros effectifs, conception de maquettes, évaluation de filières, organisation de forums, activité de vulgarisation, projets pédagogique... en fonction des détails donnés dans les dossiers.

Pour les jeunes mcf (jeune = recruté dans la période) et dans une certaine mesure les nouveaux PR, nous avons convenu d'évaluer A cette rubrique pour tenir compte de l'investissement pédagogique évidemment liée à la mise en place d'un service d'enseignement nouveau.

B. Activité d'enseignement normale, même en cas de décharge modérée.

C. Pas de service sur la période.

### Activité scientifique.

Précision préliminaire : Publication = production scientifique de type articles, actes de conférences, codes... selon les spécialités. On ne compte pas les articles soumis ni les prépublications.

A . Activité régulière de publication et présence de publications dans des revues de premier plan, de la spécialité ou généralistes. Pour les mcf recrutés dans la période, la prise d'indépendance doit apparaître clairement.

+ Encadrement ou co-encadrement de thèses, de mémoires de M2, de post-docs (modulé en fonction de l'ancienneté et du grade) et/ou fort rayonnement (*editorial boards*, expertises, séjours scientifiques, évaluations scientifiques...)

B. Activité de publication (au moins une publication sur la période). À moduler selon les publications elles-mêmes et les activités d'encadrement ou de recherche autres.

C. Absence (ou faible nombre) de publications sur la période, ou publication dans des revues « prédatrices ».

### Responsabilités collectives et d'intérêt général.

A. Responsabilité significative (direction de labo, d'UFR, participation aux conseils centraux, participation aux instances nationales, responsabilités dans les sociétés savantes...). Pour les MCF récemment nommés, tout investissement collectif.

B. Implication dans les tâches collectives ou responsabilités (sauf pour MCF récents) d'ampleur modérée.

C. Absence ou presque de responsabilité.

Les jurys de concours rémunérés ne sont pas pris en compte ni dans un sens ni dans l'autre.

Soyons clairs, la frontière entre A et B est souvent difficile, et beaucoup de rapporteurs ont fait usage du A- et du B+, voire du A-B. Mais il a fallu trancher, après discussions et comparaisons, et chacun a été encouragé à la bienveillance.

## 5.2 – Fonctionnement de la section

Les dossiers ont été disponibles le 14 juin, ce qui rendait compliquée une réunion en juillet, compte tenu des délais d'attribution, de départ et de lecture des dossiers. L'examen des dossiers de demande de prime a donc eu lieu sur deux jours les 5 et 6 septembre.

Les membres du CNU présents ne s'expriment pas sur les dossiers de candidats de leur établissement ni sur les candidats dont ils seraient (trop) proches. Le bureau de la section a nommé deux rapporteurs par dossier dans la spécialité du candidat. Les membres du CNU candidats ne siègent pas.

Chaque dossier a été attribué à deux rapporteurs, qui ont renvoyé leurs évaluations indépendamment pour les trois rubriques. Un tableau récapitulatif en a résulté. Sur cette base, la section pour chaque session (PR le 05/09 et MCF le 06/09) a procédé en trois temps.

1. Une douzaine de dossiers ont été étudiés en détail par la section. Les dossiers avaient été choisis avec des évaluations présentant des discordances entre les rapporteurs, et les présentations ont permis à tous de discuter et de calibrer les évaluations. En particulier les première et troisième rubriques ont lieu de prêter à ambiguïté.

2. Un temps de discussion a ensuite été laissé pour que, sur chaque dossier, les rapporteurs échangent leurs avis deux par deux, discutent du dossier, se mettent d'accord sur les notes puis les communiquent au bureau.

3. L'après-midi a été consacré à un ré-examen de l'ensemble des dossiers regroupés par établissements, pour vérifier la cohérence des retours pour ces groupes.

La comparaison des dossiers par groupe géographique s'est révélée très utile et efficace lorsque les groupes étaient à effectif modéré (de 2 à 5 dossiers), mais beaucoup plus complexe lorsqu'on approchait de la dizaine de dossiers ou davantage. Des réflexions sont lancées pour améliorer la procédure sur ce point et notamment pour ré-introduire, de façon au moins partielle, des rapporteurs géographiques comme cela se faisait lors du mandat précédent pour la PEDR. Avec cette méthode, une partie non négligeable des dossiers se retrouve en effet avec un seul rapporteur du domaine, ce qui peut remplacer une difficulté par une injustice.

La section 26 n'a mis que très peu d'observations dans la rubrique « éléments d'appréciation » ; notons que beaucoup d'établissements n'ont rien écrit non plus. Deux difficultés sont apparues pour le faire en séance : la première est de ne pas savoir à qui ces remarques seraient destinées, entre l'établissement et le collègue ; la seconde est que, lorsque des discussions se sont engagées pour en rédiger, chaque mot a suscité des objections et corrections qui ont amené à renoncer à la remarque. La section 25 semble avoir pris le parti de demander à chaque rapporteur des observations à ajouter, à charge au président de la section de passer quelques jours à faire des copier-coller dans Gaxaxie, et d'harmoniser. La section 27 a constitué une liste fermée (à choix multiples) de phrases à inclure, parmi lesquelles les rapporteurs sélectionneront leurs propositions. Nous attendons leur retour d'expérience pour réfléchir à un procédé similaire pour l'an prochain. Les discussions organisées lors des qualifications permettront de faire des choix pour la session 2023.

## 5.3 – Résultats de la session

Il y a eu cette année 251 candidats MCF (163 hommes et 88 femmes) et 133 candidats PR (104 hommes et 29 femmes) ; pour comparaison 177 MCF et 140 PR demandaient la PEDR en 2021. Les résultats globaux sont donnés dans les tableaux 2 et 3. Globalement, 362 dossiers sur 386 ont obtenu

au moins un A dans une des trois rubriques (soit 93,8%), et sont donc susceptibles d'obtenir la prime individuelle.

La question de la parité pouvait être regardée avec attention dans le cadre de la PEDR, car un seul chiffre (20%, 30%, 50%) faisait le cœur de la réponse (et l'essentiel de la décision des établissements, au moins pour les 20 et 50%), et il était possible de veiller au pourcentage de chaque sexe par catégorie, et de les comparer aux proportions de candidates. Cette veille a été impossible à avoir en tête dans le cadre d'une évaluation à trois lettres. Les chiffres a posteriori sont reportés dans les tableaux 4 et 5. Les résultats obtenus concer-

nant la proportion de A dans chaque catégorie sont conformes aux attendus.

#### 5.4 – Recommandations aux candidats

Le CNU26 conseille aux candidats d'être attentifs à la période d'évaluation. Chaque rapporteur a beaucoup de dossiers, et le travail devient difficile quand l'information doit être triée avec soin parce qu'elle concerne l'ensemble de la carrière. Plusieurs fois, cela a bien failli nuire considérablement aux dossiers concernés : la section s'est refusée à prendre des sanctions mais a demandé au bureau de signaler dans ce compte-rendu qu'une menace planait pour le traitement de ce type de dossier à l'avenir.

TABLEAU 2 – Résultats d'ensemble de la session prime MCF

MCF	Investissement pédagogique	Activité scientifique	Responsabilités
A	76%	60%	39%
B	23%	26%	43%
C	0%	14%	18%

TABLEAU 3 – Résultats d'ensemble de la session prime PR

PR	Investissement pédagogique	Activité scientifique	Responsabilités
A	62%	80%	59%
B	34%	17%	32%
C	3%	2%	9%

TABLEAU 4 – Pourcentage de femmes MCF dans chaque catégorie. Le pourcentage de femmes candidates est de 35%. La case (\*) serait un pourcentage sur un effectif de 1.

MCF	Investissement pédagogique	Activité scientifique	Responsabilités
A	38%	35%	33%
B	24%	32%	33%
C	(*)	41%	43%

TABLEAU 5 – Pourcentage de femme PR dans chaque catégorie. Le pourcentage de femmes candidates est de 21,8%. La case (\*) serait un pourcentage sur un effectif de 3.

PR	Investissement pédagogique	Activité scientifique	Responsabilités
A	23%	21%	28%
B	20%	23%	17%
C	25%	(*)	0%

A contrario, il est important de noter qu'un congé de maternité pendant les 4 années précédant la candidature conduit à prendre en compte l'activité sur une période de 5 ans au lieu de 4. Les candidates doivent en tenir compte dans la constitution de leur dossier, et notamment donner des informations sur l'année supplémentaire.

La rédaction des dossiers doit être soignée et raisonnablement précise, les responsabilités doivent être expliquées afin que le rapporteur soit bien informé; certaines responsabilités très importantes présentées en une ligne, et relevant d'une terminologie spécifique à l'établissement d'exercice, peuvent être mal évaluées par le rapporteur. Des chiffres (effectifs de cours, d'équipe, budgets) sont souvent utiles. Des dates sont indispensables.

La prise en compte des conférences doit être discutée à la prochaine session de qualification : entre la période Covid et les impératifs des bilans carbone à alléger, nous devons éviter les aller-retours lointains et très brefs.

## 6. Bilan de la session de Repyramidage

**Rappel de la motion votée en février 2022.** Nous rappelons ci-dessous la motion qui avait été votée en février 2022, lors de la demi-journée de discussion consacrée aux sujets d'actualité pendant la session de qualifications.

Motion « Repyramidage », votée par le cnu26 le 01/02/2022.

Lors des discussions de la section 26 concernant le repyramidage, beaucoup de collègues se sont inquiétés des modalités de fonctionnement de cette procédure, à la fois complexe dans ses modalités, et délicate à mener pour les équipes de recherche ou les UFR concernées. Une motion a donc également été votée.

*« Le cnu26 s'interroge sur les modalités opérationnelles de la procédure de repyramidage : la prise de décision dans le processus tel qu'il est décrit est essentiellement administrative et fait courir un risque de conflit d'intérêt ou de clientélisme local, aux dépens de la qualité scientifique et du rayonnement national et international. Le cnu26 adhère aux positions de l'Institut National des Sciences Mathématiques et de leurs Interactions du CNRS et souhaite notamment : que cette promotion ne se substitue pas à un recrutement de professeure ou de professeur des universités*

*au titre de l'article 46-1 du décret n° 84-431 du 6 juin 1984; que la qualité scientifique soit le critère principal retenu pour opérer la sélection du candidat; que l'université mette en place un comité de sélection spécifique, constitué pour majorité de mathématiciennes et mathématiciens extérieurs. »*

À la réflexion, l'ancienneté des collègues dans la procédure n'est nulle part un paramètre. Pourtant, il n'est pas équivalent d'avoir travaillé 25 ans dans un établissement en assumant des responsabilités pédagogiques ou administratives importantes tout en continuant à avoir une activité de recherche, ou d'être un jeune chercheur brillant, en poste depuis moins de 10 ans, sans forcément beaucoup d'investissement autre que l'activité de recherche. Les établissements ont modulé ces paramètres à leur guise lors des arbitrages, et l'examen des dossiers a créé un certain malaise puisque cette question n'était pas posée. Le découragement et la démotivation concernera pourtant plus de déçus qu'il n'y a eu d'élus.

### 6.1 – Données générales

Les 10 établissements concernés par ces postes en promotion interne sont :

- le CNAM (Paris) - 2 candidats ;
- l'université Claude Bernard Lyon 1 - 7 candidats ;
- l'université de Nantes - 5 candidats ;
- l'université Paris Nanterre - 3 candidats ;
- l'université Paris 12 Créteil (**2 postes**) - 5 candidats ;
- l'université de Saint-Étienne - 3 candidats ;
- l'INSA de Toulouse - 3 candidats ;
- Aix-Marseille Université (**2 postes**) - 9 candidats ;
- l'université Grenoble-Alpes - 7 candidats ;
- l'université de Lille - 4 candidats.

Il y a eu pour l'ensemble de ces postes 47 candidats, dont 18 femmes. Deux dossiers figurant dans la liste n'ont pas été évalués car les collègues concernées avaient obtenu un poste de Professeur au 1<sup>er</sup> septembre 2022. Nous avons donc étudié 45 dossiers de candidats, dont 16 femmes (un prorata donne 4,3 postes pour des femmes).

Une sous-commission spéciale de 18 membres rang A du cnu26 a été constituée pour participer à cette session : nous avons pris garde à ce qu'aucun de ses membres ne fasse partie d'établissements ni de laboratoires concernés par la procédure.

Les avis à rendre sont : A = Très favorable ou B = Favorable ou C = Réserve, sur chacune des trois rubriques :

- investissement pédagogique ;
- activité scientifique ;
- responsabilités collectives et d'intérêt général.

La particularité ici est que deux triplets de notes doivent être saisis dans Galaxie, un triplet dans une rubrique appelée : « Aptitude professionnelle » et un triplet pour une rubrique appelée « Acquis de l'expérience professionnelle ». Les deux triplets sont très souvent identiques, car la différence entre les deux rubriques est ténue : nous avons considéré que la rubrique « Aptitude professionnelle » concernait plutôt le futur et le potentiel, tandis que la rubrique « Acquis de l'expérience professionnelle » se référerait plutôt aux activités développées jusqu'à ce jour.

On le voit, l'âge et l'ancienneté des candidats ne jouent pas de rôle dans cette procédure, alors que ce pourrait être un paramètre d'intérêt. De plus, les évaluations demandées seront difficiles à exploiter pour parvenir au but recherché, consistant à déterminer lequel des candidats sera l'heureux élu, tous ayant en général de grandes qualités.

## 6.2 – Fonctionnement de la section

Le bureau de la section a nommé deux rapporteurs par dossier : le premier rapporteur est dans la spécialité du candidat, le second rapporteur « géographique », deux lots géographiques ont été faits pour les établissements dont le nombre de candidats étaient plus importants (Marseille, Grenoble).

Chaque rapporteur a renvoyé ses évaluations indépendamment pour les six rubriques. Un tableau récapitulatif en a résulté, comme base de travail et de discussion en session.

Au moment où nous avons traité les dossiers, les établissements avaient déjà effectué cette (même) évaluation. Cependant, même si leurs avis sont accessibles au rapporteur, ils ne figurent pas dans les dossiers téléchargeables et nécessitent une action spécifique dans Galaxie pour être consultés.

Ainsi, il a été convenu, début juin, lors d'une réunion à distance du bureau (très) élargi que le CNU26 fournirait une évaluation indépendante de celle des établissements et que les rapporteurs n'étaient pas tenus de consulter cette évaluation *a priori*. Nous l'avons souvent consultée *a posteriori*, en séance, et constaté quelques divergences.

Les dossiers ont été étudiés par établissement, et le débat a permis de confronter les évaluations disciplinaires dossier par dossier, et l'évaluation plus globale du groupe géographique en valeurs relatives. Ce mode d'étude s'est révélé intéressant et efficace.

La section 26 n'a pas mis d'observations dans la rubrique « éléments d'appréciation » ; notons que beaucoup d'établissements n'ont rien écrit non plus. Comme pour la Prime Individuelle, deux difficultés sont apparues pour le faire en séance : la première est de ne pas savoir à qui ces remarques seraient destinées, entre l'établissement et le candidat ; la seconde est que, lorsque des discussions s'engagent pour en rédiger, chaque mot peut susciter des débats qui amènent à renoncer à la remarque.

Des discussions organisées lors des qualifications 2023 permettront de décider si nous souhaitons alimenter cette rubrique d'un certain nombre d'observations éventuellement choisies dans une liste fermée, pour la session 2023.

## 6.3 – Critères indicatifs et résultats

Les évaluations ont relevé de critères proches de ceux mis en œuvre pour la Prime individuelle.

### Investissement Pédagogique.

**A** : Responsabilités de filières ou d'enseignements à (très) gros effectifs, conception de maquettes, évaluation de filières, organisation de forums, activité de vulgarisation, projets pédagogique... en fonction des détails donnés dans les dossiers.

**B** : Activité d'enseignement normale, même en cas de décharge modérée.

**C** : Pas de service sur la période.

### Activité scientifique.

Précision préliminaire : Publication = production scientifique de type articles, actes de conférences, codes... selon les spécialités. On ne compte pas les articles soumis ni les prépublications.

**A** : Activité régulière de publication et présence de publications dans des revues de premier plan, de la spécialité ou généralistes.

+ Encadrement ou co-encadrement de thèses, de mémoires de M2, de post-docs (modulé en fonction de l'ancienneté et du grade) et/ou fort rayon-

nement (*editorial boards*, expertises, séjours scientifiques, évaluations scientifiques...)

**B** : Activité de publication maintenue, même si de façon plus épisodique, depuis le début de la carrière. À moduler selon les publications elle-mêmes et les activités d'encadrement ou de recherche autres.

**C** : Très faible activité de publications (ou absence).

#### Responsabilités collectives et d'intérêt général.

**A** : Responsabilité significative (direction de labo, d'UFR, participation aux conseils centraux, participation aux instances nationales, responsabilités dans les sociétés savantes...).

**B** : Implication dans les tâches collectives ou responsabilités d'ampleur modérée.

**C** : Absence ou presque de responsabilité.

Les jurys de concours rémunérés ne sont pas pris en compte ni dans un sens ni dans l'autre.

La frontière entre **A** et **B** est souvent difficile, et beaucoup de rapporteurs ont fait usage du **A-** et du **B+**, voire du **A-B**. Mais il a fallu trancher, après discussions et comparaisons, et chacun a été encouragé à la bienveillance. Les résultats sont donnés dans le tableau 6.

#### 6.4 – Fin de la procédure

Pour ce qui est de la suite de la procédure, les textes comportaient encore des étapes après celle du CNU. En effet, les établissements, une fois en possession de cette évaluation, ont constitué un comité d'audition : 4 professeurs ou assimilés, dont deux de la discipline. Au plus quatre des candidats pouvaient être invités à cette dernière étape ; s'il y en avait davantage, ils ont été éliminés. Nous n'avons eu aucun retour pour savoir comment les choses s'étaient passées, la seule certitude : une grande hétérogénéité selon les établissements.

Notre conclusion est que nous avons produit un travail et une évaluation sur des rubriques mal définies, aboutissant à des listes de lettres peu adaptées au processus d'aide à la décision. Il est vraisemblable qu'un comité de sélection convenablement constitué (mais le point délicat serait là) et semblable à ce qui se fait pour les postes standard, aurait occasionné un travail moindre, mieux ciblé, plus efficace et beaucoup plus rapide.

Néanmoins, dans le cadre de la procédure actuelle, nous pensons qu'il est de l'intérêt de tous

que le CNU soit consulté lors de ces opérations sensibles de promotion interne : l'expertise externe qu'il fournit dans un cadre global gagne en objectivité, et permet une évaluation par les pairs, et des discussions sérieuses et sereines sur les dossiers.

#### 6.5 – Résultats

La liste des collègues promus n'a pas encore été officiellement donnée, mais on peut la déduire des documents disponibles dans Galaxie, avec l'année de reclassement (certains avancements étaient donnés au titre de l'année 2021, et d'autres au titre de l'année 2022) : CNAM : Niang Ndeye (2021); Université Lyon 1 : Dupaigne Louis (2021); Université de Nantes : Lavancier Frédéric (2022); Université Paris Nanterre : Ménard Laurent (2021); Université Paris 12-Créteil : Charve Frédéric (2022) et Hadiji Rejeb (2021); Université de Saint-Étienne : Bodart Olivier (2022); INSA de Toulouse : Rondepierre Aude (2021); Université de Marseille : Chapuisat Guillemette (2022) et Cristofol Michel (2022); Université Grenoble Alpes : Thibert Boris (2022); Université de Lille : Marot Briend Guillemette (2022).

#### Conclusion

Pour conclure nous pouvons rappeler aux candidats qu'il est toujours utile de prêter attention à la rédaction des dossiers qu'ils déposent, quelle que soit la nature de la demande. Deux rapporteurs les liront avec attention et en rendront compte à l'ensemble de la section. Ces dossiers doivent être auto-suffisants car les règles de déontologie stipulent que les rapporteurs ne doivent pas aller chercher des informations extérieures. Les informations qui y figurent doivent être précises, chiffrées, expliquées (détail des missions, explication des acronymes...) et toujours datées.

Le CNU n'aura décidément eu, pour ce mandat, aucune année standard. Après une installation très retardée fin 2019 en partie à cause des grèves (qui a rendu bien acrobatique la désignation des rapporteurs de la qualification cette année-là), les conditions sanitaires ont compliqué et modifié, en 2020 et dans une certaine mesure 2021, l'exercice de notre mandat. Et voilà que s'y ajoutent des changements de lois très improvisés, difficiles à décrypter et complexes à mettre en œuvre. Sans parler des menaces sur le contingent d'avancement de grade au national et de l'ébullition qu'elles ont créées.

TABLEAU 6 – Résultats des évaluations de la session Repyramidage

	Aptitude Pro.			Acquis Exp.		
	Inv. Pédago.	Rech	Adm	Inv. Pédago.	Rech	Adm
A	69%	58%	47%	58%	64.5%	38%
B	29%	31%	31%	42%	31%	40%
C	2%	11%	22%	0%	4.5%	22%

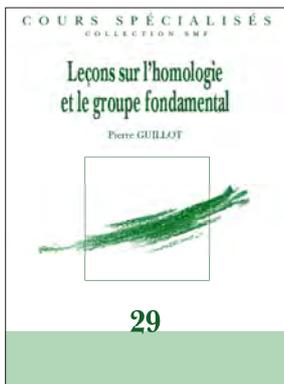
Ainsi, les missions du CNU évoluent, et la vigilance est de mise, à l'approche de l'année de son renouvellement. Le CNU est en passe de se transformer en outil pour la gestion des ressources humaines des établissements, ce qui n'était pas sa vocation de départ. La nouvelle prime individuelle notamment, fait (quasiment) entrer par une porte dérobée le suivi de carrière auquel la section 26 a jusqu'à présent refusé de se livrer. Le contingent des avancements de grade au niveau national décidé par le CNU a été sauvé l'hiver dernier, nous nous en réjouissons... mais la menace n'est peut-être qu'endormie. Globalement enfin, les nouvelles procédures de Prime Individuelle et de Repyramidage, qui consistent à faire deux fois le même travail, de façon obligatoire pour l'établissement et facultative pour le CNU engendrent un surcroît de travail administratif et d'évaluation véritablement important et certainement peu rentable, rapporté à la valeur de notre temps. Il paraît inévitable que de

nouvelles modifications nous attendent!

Et puisque nous parlons de fin de mandat et de renouvellement, il faut que chacun réfléchisse à se proposer pour la relève! Le CNU26 a des missions importantes pour notre communauté, et il est le dernier élément qui nous relie nationalement. Il est collégial et transparent, le présent compte-rendu en est la preuve. Il doit être représentatif de notre communauté pour mener des évaluations ou des travaux justes. Que vous soyez contents ou mécontents des décisions prises lors de ce mandat, cela vous fait dans les deux cas une bonne raison pour être candidat pour participer au prochain. Et en attendant, vérifiez votre existence sur les listes électorales de vos établissements, et pensez à voter, ce sera sûrement en septembre 2023!

Le bureau de la section

## Cours spécialisés - nouveauté



Vol. 29

### Leçons sur l'homologie et le groupe fondamental

P. GUILLOT

ISBN 978-2-85629-965-4

2022 - 334 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 60 € - Members: 42 €

Cet ouvrage reproduit, en les complétant, des notes de cours donnés par l'auteur en M1 et en M2 à l'université de Strasbourg en topologie algébrique. Après des préliminaires concernant l'homotopie, le groupe fondamental, les catégories et les foncteurs, on y aborde l'homologie des complexes simpliciaux puis des espaces topologiques généraux. Les applications classiques sont traitées (théorème de Brouwer, théorème de la boule chevelue, caractéristique d'Euler des solides platoniciens...) et on donne une introduction à la dualité de Poincaré. Dans une troisième partie plus avancée, l'algèbre homologique est étudiée plus en profondeur, avant que la théorie des faisceaux ne soit développée. Le cours se conclut sur la démonstration du difficile théorème dû à Georges de Rham qui fait le lien entre homologie et formes différentielles. Le cours s'adresse aux élèves de M1, et suppose simplement une connaissance des espaces métriques, ainsi que le bagage algébrique usuel vu en licence.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris



# Les mathématiques, un élément moteur de la reconstruction après la guerre : création du nouveau Centre International de Mathématiques en Ukraine, avec le soutien de l'IHÉS

Communiqué de presse du 13 janvier 2023

Le 12 janvier 2023, l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS) a accueilli la première réunion de soutien à la création du nouveau Centre International de Mathématiques en Ukraine (ICMU)<sup>1</sup>, en présence de mathématiciennes et mathématiciens porteurs du projet, de représentants d'instituts mathématiques européens et de quelques personnalités de la philanthropie soutenant les mathématiques. À cette occasion, les autorités ukrainiennes étaient représentées par Mykhailo Podolyak, conseiller du chef du cabinet du président de l'Ukraine Volodymyr Zelensky, et le gouvernement français par Claire Giry, directrice générale de la recherche et de l'innovation au Ministère français de l'Enseignement supérieur et de la Recherche. Six lauréats de la médaille Fields<sup>2</sup> ont également participé à cette réunion, montrant ainsi leur soutien et leur solidarité avec la communauté mathématique ukrainienne. Dans un discours de lancement du projet, le conseiller Mykhailo Podolyak a déclaré : « Il s'agit d'une initiative opportune et passionnante. Je suis ravi de voir une excellente équipe de nos scientifiques prêts à mettre leur expérience internationale au service de l'avenir de l'Ukraine. Bien qu'à l'heure actuelle, les autorités ukrainiennes concentrent leurs efforts sur la résolution des problèmes humanitaires et militaires, nous reconnaissons l'importance de la science dans la relance de notre économie après la guerre. Il est d'une importance vitale pour l'Ukraine de faire partie du processus scientifique mondial. Je ferai tout ce qui est en mon pouvoir pour aider au développement du nouveau centre mathématique. » Au nom du ministère français de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, Claire Giry a déclaré : « Nous sommes

très fiers que les mathématiques françaises soutiennent la création du nouveau Centre International de Mathématiques en Ukraine. Je rappelle notre volonté collective de construire un partenariat durable entre nos deux communautés de recherche. » Emmanuel Ullmo, directeur de l'IHÉS, a commenté : « L'IHÉS est convaincu que les mathématiques et les sciences seront d'une importance capitale pour préparer et construire l'avenir de l'Ukraine. Nous sommes fiers de soutenir ce nouveau Centre international de mathématiques. »

## Mission du Centre International de Mathématiques en Ukraine

Convaincus que la science et la recherche auront un rôle clé à jouer dans la reconstruction de l'Ukraine après la guerre, un groupe de mathématiciennes et mathématiciens d'origine ukrainienne s'est réuni pour créer un nouveau centre de recherche mathématique, formant son premier comité de coordination<sup>3</sup>. S'appuyant sur une forte tradition mathématique en Ukraine, la mission de ce centre est de soutenir la recherche de haut niveau en mathématiques, en mettant l'accent sur la formation des jeunes générations de scientifiques et le développement des mathématiques en Ukraine. Visant à repousser les frontières mondiales de la connaissance, le centre accorde une grande importance à sa nature internationale, à la diversité et à l'inclusion. L'ICMU est soutenu par la Fondation nationale de la recherche d'Ukraine (NRFU), membre de Science Europe.

1. <https://mathcentre.in.ua/>

2. Il s'agit de : Vladimir Drinfeld, Hugo Duminil-Copin, Peter Scholze, Maryna Viazovska, Cédric Villani, Efim Zelmanov.

3. Le comité de coordination est composé par : Oleksandra Antoniuk, Dmitri Finkelshtein, Andrey Gogolev, Kostiantyn Iusenko, Andrii Khrabustovskyi, Okleksiy Klurman, Volodymyr Nekrashevych, Pavlo Pylyavskyy, Dmytro Savchuk, Lyudmyla Turowska, Maryna Viazovska, Masha Vlasenko, Iryna Yehorchenko.

Maryna Viazovska de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, lauréate de la médaille Fields en juillet 2022 et membre du comité de coordination, a déclaré : « Nous suivrons les modèles d'autres institutions établies pour la recherche fondamentale en choisissant les voies qui auront un impact maximal dans la communauté scientifique à ce moment particulier de notre histoire. »

## Organisation du nouveau centre

Alors que le lieu d'implantation de l'icmu sera déterminé en consultation avec la communauté mathématique, les organismes publics ukrainiens et les organisations partenaires, et que les scientifiques ne seront accueillis physiquement dans ce centre qu'une fois qu'ils pourront le faire en toute sécurité, l'institution a déjà une existence officielle et juridique, et commencera à organiser des événements scientifiques dans des institutions partenaires du monde entier. La phase de fondation du nouveau centre est actuellement dirigée par le comité de coordination du centre et un comité consultatif<sup>4</sup> international composé de mathématiciennes et mathématiciens exceptionnels, dont trois lauréats de la médaille Fields. Peter Scholze de l'université de Bonn, directeur de l'Institut Max Planck de Bonn et lauréat de la médaille Fields, membre de ce comité, a déclaré : « L'Institut Max Planck de mathématiques a accueilli et accueille encore de nombreux mathématiciens et mathématiciennes ukrainiens, dont Maryna Viazovska en tant que doctorante, et il est fortement solidaire. Je salue et soutiens pleinement la fondation de ce nouveau centre en Ukraine, qui va considérablement améliorer et revitaliser la communauté mathématique. » En tant que fondation indépendante, le Centre sera dirigé par un conseil d'administration composé des personnalités qui représentent ses organisations partenaires et de ses donateurs, ainsi que par un conseil scientifique qui aura la prérogative de planifier ses activités scientifiques.

Au cours de la réunion, le comité de coordination du Centre a annoncé que le mathématicien français Jean-Pierre Bourguignon, ancien directeur de l'IHÉS et ancien président du Conseil européen de la recherche, avait été élu premier membre du conseil d'administration. À ce titre, il contribuera à la formation de ce conseil. Jean-Pierre Bourguignon a commenté : « Je suis très honoré de l'invitation qui

m'a été faite par mes collègues ukrainiens d'essayer de contribuer à la mise en place d'un outil flexible visant à aider la communauté mathématique ukrainienne à s'engager activement dans la recherche de pointe en partenariat étroit avec d'autres institutions dans le monde ayant des objectifs similaires. »

Lors de la réunion il a également été annoncé que la société de trading automatique XTX Markets est le fondateur et le principal donateur du Centre international de mathématiques en Ukraine. XTX Markets s'est engagée à verser jusqu'à 1 million d'euros de fonds complémentaires pour la création du centre, ce qui permettra de « matcher » à 100% les dons ou les promesses de dons en 2023. Alex Gerko, fondateur et co-CEO de XTX Markets, a commenté : « Le Centre international de mathématiques aidera les scientifiques ukrainiens à collaborer avec le reste du monde et à partager la tradition exceptionnelle de leur pays en matière de mathématiques. Nous attendons avec impatience que le centre ouvre bientôt ses portes, dans une Ukraine libre et pacifique. »

## Centre International de Mathématiques

Le Centre international de mathématiques est légalement représenté par une organisation non gouvernementale enregistrée en Ukraine. Selon ses statuts, « l'objectif principal de l'organisation est de soutenir la recherche de pointe dans le domaine des sciences mathématiques en Ukraine et dans le monde, de promouvoir la coopération des scientifiques ukrainiens avec la communauté scientifique mondiale, ainsi que les activités éducatives et de vulgarisation ». Au début, la principale activité régulière du centre consistera à organiser des programmes thématiques d'une durée allant d'un mois à un semestre complet. Les propositions de programmes dans tous les domaines des mathématiques seront les bienvenues, avec une certaine priorité accordée aux sujets représentés en Ukraine. Le conseil scientifique international sera chargé de sélectionner les meilleures propositions. Les programmes comprendront un éventail d'activités telles que des séries de conférences données par d'éminents visiteurs, des séminaires hebdomadaires, des conférences, des ateliers et des écoles d'été/d'hiver pour les étudiants. À l'avenir, le Centre développera une base pour des bourses de visite à long terme et des chaires permanentes.

4. Le comité consultatif est composé par : Jean-Pierre Bourguignon, Vladimir Drinfeld, Pavel Etingof, Pavel Exner, Rostislav Grigorchuk, Volodymyr Mazorchuk, Adam Skalski, Peter Scholze, Marcelo Viana, Efim Zelmanov.

### Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS)

Membre fondateur de l'université Paris-Saclay, et fondation reconnue d'utilité publique, l'IHÉS est un centre de recherche privé consacré aux mathématiques, à la physique théorique et à toutes les disciplines qui s'y rattachent. L'Institut a un nombre restreint de professeurs permanents, mathématiciens et physiciens théoriciens, et accueille environ 200 visiteurs par an venus du monde entier pour des séjours de recherche. Liberté de recherche, indépendance et interdisciplinarité sont les valeurs fondamentales de l'IHÉS, qui est aussi engagé à promouvoir la diversité des talents dans la recherche fondamentale.

### Université Paris-Saclay

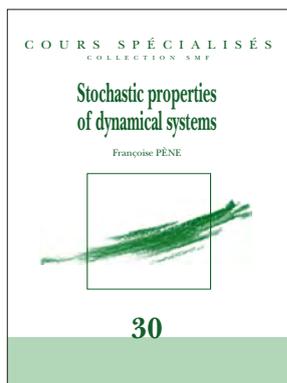
L'université Paris-Saclay regroupe dix composantes universitaires, quatre grandes écoles, l'Institut des Hautes Études Scientifiques, deux universités membres-associées et des laboratoires partagés avec de grands organismes de recherche. Composée de 48 000 étudiants, 8 100 enseignants-chercheurs et 8 500 personnels techniques et administratifs, elle propose une offre de formations complète et variée de la Licence au Doctorat, ainsi

que des diplômes d'ingénieurs, reconnus de qualité grâce à la réputation et à l'engagement de son corps enseignant. Située au sud de Paris, sur un vaste territoire (de Paris à Orsay, en passant par Évry et Versailles), l'université Paris-Saclay bénéficie d'une position géographique et socio-économique stratégique que sa visibilité internationale contribue à renforcer. Université de pointe, à dominante scientifique et fortement reconnue en mathématiques et en physique et également dans les domaines des sciences biologiques et médicales, de l'agriculture, de l'ingénierie, en lien avec des sciences humaines et sociales fortement soutenues, l'université Paris-Saclay opère dans un environnement naturel classé, proche de Paris, et au cœur d'un tissu économique dynamique.

Press contact for the International Centre for Mathematics in Ukraine : Masha Vlasenko - info@mathcentre.in.ua - +48 784 26 77 59 - <https://mathcentre.in.ua/>.

Press contact for IHÉS : Claire Lenz - claire.lenz@ihes.fr - +33 1 60 92 66 67 • +33 6 07 42 53 73.

## Cours spécialisés - nouveauté



Vol. 30

### Stochastic properties of dynamical systems

F. PÈNE

ISBN 978-2-85629-967-8

2022 - 276 pages - Hardcover. 17 x 24

Public: 54 € - Members: 38 €

This book provides an introduction to the study of the stochastic properties of probability preserving dynamical systems. Only the usual knowledge of the first year of a Master's degree is required. Many reminders are given. The definitions and results are illustrated by examples and corrected exercises. The book presents the notions of Poincaré's recurrence, of ergodicity, of mixing. It enlightens also existing links between dynamical systems and Markov chains. The final objective of this book is to present three methods

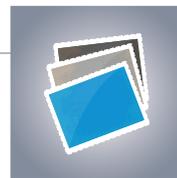
for establishing central limit theorems in the context of chaotic dynamical systems: a first method based on martingale approximations, a second method based on perturbation of quasi-compact linear operators and a third method based on decorrelation estimates.

Disponible sur le site de la SMF (boutique en ligne) : <https://smf.emath.fr>

\*frais de port non compris



Bas Edixhoven est décédé le 16 janvier 2022. Évoquant quelques aspects de sa carrière, de son œuvre et de sa personnalité, les textes qui suivent rendent hommage à notre collègue et ami disparu.



## Bas Edixhoven

• R. NOOT



Bas Edixhoven, qui fut pendant dix ans professeur à Rennes, nous a quittés le 16 janvier 2022. Nous consacrons cette série d'articles à sa mémoire.

Né en 1962, Bas fait ses études de mathématiques à l'université d'Utrecht. Sa thèse, dirigée par Frans Oort, est dédiée à une étude de la réduction en caractéristique positive des courbes modulaires. Après sa soutenance en 1989 il passe deux

années à l'université de Berkeley sur le poste de « Morrey Assistant Professor ». Il apporte notamment une contribution importante à l'étude de la conjecture de modularité de Serre. Ce domaine est déjà en plein essor à l'époque et connaîtra encore des avancées spectaculaires par la suite avec, par exemple, les démonstrations du théorème de Fermat par Wiles en 1995 et de la conjecture de modularité de Serre par Khare et Wintenberger qui a abouti en 2009. Son travail pendant cette période est décrit dans l'article *Serre's modularity conjecture*.

De retour de Berkeley, Bas s'installe à l'université d'Utrecht grâce à un « Huyghens fellowship » qui lui avait été attribué avant son départ. Il quitte ce poste quand il est nommé professeur à l'université de Rennes en 1992. Il devient membre de l'Institut Universitaire de France en 1995. Il poursuit alors son travail sur les formes modulaires et les représentations galoisiennes associées et il est parmi les organisateurs d'une des premières conférences, à Lunteren aux Pays-Bas, consacrée aux travaux de Wiles sur la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil. Pendant sa période rennaise, il intervient deux fois dans le séminaire Bourbaki. Le second de ces exposés porte sur la démonstration complète de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil par Breuil, Conrad, Diamond et Taylor.

Grand expert de la géométrie algébrique et des travaux de Grothendieck, il prend l'initiative d'une réédition du célèbre « Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA) » en lançant un projet pour faire saisir les textes dactylographiés originaux en latex par une armée de volontaires. Ce projet a été repris par la Société Mathématique de France qui a, à ce jour, publié trois tomes de la série. En 2011, à l'occasion de l'édition du volume de SGA consacré aux schémas

en groupes (SGA 3), Bas participera à l'organisation d'une école d'été au CIRM sur ce sujet.

Vers le milieu des années 1990 Bas commence à travailler sur la conjecture d'André-Oort sur les sous-variétés de l'espace de modules des variétés abéliennes contenant un sous-ensemble dense de points correspondant à des variétés à multiplication complexe. Ce problème est traité dans l'encart *The André-Oort conjecture*. La stratégie développée par Bas permettra, après de multiples améliorations, à Klingler, Ullmo et Yafaev de traiter la conjecture en grande généralité, en admettant l'hypothèse de Riemann généralisée.

En 2002, Bas quitte Rennes pour l'université de Leyde. Son influence sur les mathématiques françaises reste néanmoins importante. Il est notamment impliqué dans le montage du Master international ALGANT (Algebra, Geometry and Number Theory) porté par un consortium d'universités dont celles de Bordeaux et Paris-Saclay.

Il travaille sur une grande variété de sujets en arithmétique et en géométrie algébrique. Le texte *De l'énumération de vecteurs à la théorie d'Arakelov* met en lumière le développement de méthodes effectives pour déterminer les coefficients de formes modulaires. Ce travail fait appel à des notions profondes en géométrie arithmétique, allant de la géométrie des courbes modulaires et de leurs jacobiniennes à la théorie d'Arakelov et montre que des invariants cohomologiques définis de manière abstraite sont calculables explicitement.

Dans une collaboration récente avec son étudiant Lido, Bas donne une interprétation géométrique d'une méthode introduite par Chabauty, et raffinée par la suite par différents auteurs, pour déterminer les points rationnels d'une courbe algébrique sur  $\mathbb{Q}$  de genre au moins 2. Ces résultats sont exposés dans l'article « *Make Chabauty geometric again!* ».

Au long de sa carrière, Bas (co)encadre plus d'une vingtaine de thèses et de nombreux étudiants poursuivent actuellement des carrières aca-

démiques à travers l'Europe. Il est très accessible aux mathématiciens de tous les niveaux et tous les âges et partage toujours généreusement sa vision avec ses étudiants et ses collègues. Il s'engage également pour l'avancement des mathématiques dans les pays en cours de développement. Par conséquent, son influence mathématique va bien au-delà de ses propres publications.

Bas s'implique aussi fortement dans l'administration et l'animation des mathématiques en intervenant dans l'organisation et la promotion de l'enseignement des mathématiques à tous les niveaux. Il participe aux comités de rédaction du *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, d'*Expositiones mathematicæ* et du *Journal of Number Theory*. Il est, pendant neuf ans, rédacteur en chef de la revue *Compositio Mathematica*.

Les mathématiques sont pour lui une expérience de vie, et il aime les repérer en dehors du cadre académique. C'est ainsi qu'il entretient une correspondance avec le sculpteur Richard Serra sur les courbes elliptiques sous-jacentes à certains œuvres de ce dernier, exposés au musée Guggenheim de Bilbao. Il consacre parfois des exposés à de tels sujets.

Les mathématiques ne sont d'ailleurs pas seules à le préoccuper. Sensible depuis longtemps aux problématiques environnementales, son engagement dans ce domaine s'accroît ces dernières années. Il est ainsi un précurseur avec l'installation de panneaux solaires et, plus tard, le remplacement de son chauffage au gaz par un système de géothermie. Il soutient vivement les initiatives écologiques locales, comme le jardin communautaire de son quartier. Ses amis et ses collègues de Leyde se souviennent d'une discussion animée jusqu'à la conciergerie d'une résidence royale, après une manifestation qu'il avait jugée trop ignorée par les pouvoirs publics!

Les quatre articles suivants sont dédiés à quelques-uns des sujets qui ont passionné Bas au long de sa carrière.

# Serre's modularity conjecture

• C. Khare

Bas proved the weight part of Serre's conjecture in his article "The weight in Serre's conjecture on modular forms" published in *Inventiones Mathematicae* in 1992. Serre had published his influential conjecture about mod  $p$  modular forms and mod  $p$  Galois representations in *Duke Math. J.* in 1987. The conjecture in a rough form was made in 1973. Serre made the refined conjecture partly to make precise Frey's observation that the modularity conjecture for elliptic curves over  $\mathbb{Q}$  (the Shimura-Taniyama-Weil conjecture) implies Fermat's Last Theorem. Serre's refined conjecture sparked off intense work to prove that its original rough, *qualitative* version which says that irreducible, odd, 2-dimensional mod  $p$  representations of the absolute Galois group  $G_{\mathbb{Q}}$  of  $\mathbb{Q}$  arise from mod  $p$  modular forms implies its later more refined, *quantitative* form. The latter says that such a representation in fact arises from a mod  $p$  modular form of an optimal weight and level. The definition of the optimal weight is one of the subtlest aspects of the conjecture.

The work of Ribet on level lowering resulted in a proof of the level aspect of this implication. Bas's work settled the weight aspect. When I was a beginning graduate student at Caltech, I attended the annual AMS meeting that took place in San Francisco in January of 1991. There was a special session around the arithmetic of modular forms, and Bas gave a talk presenting his recent proof of the weight part of Serre's conjecture. Bas was assistant professor at Berkeley then. The session was attended by many of the leading experts who worked on congruences between modular forms, and Bas's lecture

aroused a lot of interest. Since then I had the good fortune to attend several of Bas's lectures which I always found stimulating and instructive.

Bas's proof of the weight aspect of Serre's conjecture used recent results about companion forms proved by Gross and Coleman-Voloch and Tate's older analysis of theta cycles. His paper on it has become an important reference, not only for its main result, but also because it presents clearly written proofs of several important results that were either folklore or never published. For instance Bas's article gives the first published proof of an important result of Fontaine on the nature of the local representation at  $p$  of the mod  $p$  Galois representation arising from a mod  $p$  modular form of small weight that is supersingular at  $p$ . This result of Fontaine guided Serre in his definition of weights of mod  $p$  Galois representations.

Bas worked on other aspects of the arithmetic theory of modular forms. A joint paper with Coleman proves the striking result that for a newform  $f = \sum_n a_n q^n$  of weight  $k \geq 2$ , level  $N$  and nebentypus  $\varepsilon$ , the Hecke polynomial  $X^2 - a_p X + \varepsilon(p)p^{k-1}$  of  $f$  at a prime  $p$  not dividing  $N$  has distinct roots assuming a conjecture of Tate (which is known for  $k = 2$ ). This implies that under the same assumption one never has equality in the Ramanujan bound  $|a_p| \leq 2p^{(k-1)/2}$ .

Bas's work on the Galois representations attached to modular forms, and his earlier work on stable models for modular curves which gives strong results about the Manin constant, is an important and lasting contribution to the arithmetic of modular curves and modular forms.

# The André-Oort conjecture

• B. Moonen

Around 1995, Bas Edixhoven became very interested in a conjecture that was formulated by Oort, which in its simplest form deals with subvarieties of the moduli space  $\mathcal{A}_g$  of complex  $g$ -dimensional abelian varieties. An abelian variety is a projective algebraic variety that at the same time has a group structure; 1-dimensional abelian varieties are called elliptic curves. If we fix a natural number  $g$ , there exists a moduli space (i.e., a kind of “universal parameter variety”)  $\mathcal{A}_g$ ; this is an algebraic variety whose points correspond bijectively to the isomorphism classes of  $g$ -dimensional abelian varieties. (We omit some technical details here.)

There is an important class of algebraic subvarieties  $S \subset \mathcal{A}_g$ , the so-called *special subvarieties*, that can be described in various equivalent ways, bringing together techniques from different parts of mathematics. These special subvarieties parametrize abelian varieties that, in a suitable sense, have extra symmetries. For instance, an abelian variety has an endomorphism algebra, and the special points in  $\mathcal{A}_g$  (i.e., the 0-dimensional special subvarieties) are precisely the points for which the endomorphism algebra of the corresponding abelian variety is “maximal”. In general, special subvarieties are totally geodesic algebraic subvarieties of  $\mathcal{A}_g$ ; they admit a description as locally symmetric varieties that are controlled by a reductive algebraic group over  $\mathbb{Q}$ .

The special points in the moduli space are isolated points; but the collection of such points is everywhere dense in  $\mathcal{A}_g$ . An irreducible algebraic subvariety  $Z \subset \mathcal{A}_g$  will “usually” pass through only finitely many special points but if  $Z$  is a special subvariety then the set of special points is Zariski-dense. Oort’s conjecture was that the converse is also true i.e. the special points lie dense in  $Z$  if and only if  $Z$  itself is a special subvariety. For 1-

dimensional subvarieties  $Z$  this same conjecture had been formulated earlier by André, and the conjecture later went under the name André-Oort.

In 1995, Bas was member of the thesis committee for my PhD thesis, which explored the (then still completely new) André-Oort conjecture and contained several initial results. Bas was quick to recognise the limitations in the approach that I had tried, and he came up with a different strategy to study the problem, combining geometric and number-theoretic ideas. It was very inspiring to see how, over the course of several years, this grew from a rough idea into a refined argument. In a series of papers Bas was able to handle increasingly difficult cases, such as products of modular curves, and Hilbert modular surfaces; this culminated in a beautiful Annals paper jointly with Yafaev that has paved the way for many later developments. While most of these results were conditional on the generalised Riemann hypothesis (GRH), Bas was very pleased that they also had (unconditional) applications in transcendence theory. In particular, he and Yafaev were able to complete the proof of a result on algebraicity of values of hypergeometric functions that had been claimed by Wolfart, whose proof unfortunately contained a gap.

Work on the André-Oort conjecture, which had meanwhile been formulated for arbitrary Shimura varieties, continued. A proof conditional on GRH was obtained by Klingler and Yafaev, using work of Ullmo and Yafaev. Later a somewhat different strategy emerged, leading to an unconditional proof for  $\mathcal{A}_g$  by Tsimerman, using results obtained jointly with Pila. In the autumn of 2021, an unconditional proof of the full conjecture was announced by Pila, Shankar and Tsimerman, with the help of Esnault and Groechenig. Bas passed away shortly after this paper appeared on the arXiv. He is deeply missed.

# De l'énumération de vecteurs à la théorie d'Arakelov

• J.-M. COUVEIGNES  
• P. PARENT

Soit  $d \geq 1$  un entier. Une question combinatoire élémentaire, aux applications nombreuses, est d'estimer le nombre de vecteurs à coordonnées entières de norme  $\sqrt{n}$  pour  $n \geq 0$  entier, c'est-à-dire le nombre  $r_d(n)$  de façons d'écrire  $n$  comme somme de  $d$  carrés :

$$r_d(n) = \#\{x \in \mathbb{Z}^d : x_1^2 + \dots + x_d^2 = n\}.$$

Si l'on associe à ces nombres la série génératrice :

$$\theta_d = \sum_{n \geq 0} r_d(n) q^n = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} q^{x_1^2 + \dots + x_d^2} \in \mathbb{Z}[[q]]$$

on vérifie que  $\theta_d = \theta_1^d$ . Pour tout complexe  $z$  de partie imaginaire strictement positive, posons  $q = e^{2\pi iz}$  et  $\theta(z) := \theta_1(q)$ . On a ainsi construit une fonction holomorphe sur le « demi-plan de Poincaré »  $\mathbb{H} = \{a + ib : b > 0\}$ , premier exemple des classiques « fonctions thêta » dont l'étude remonte à Jacobi (1804-1851). Il est clair que  $\theta(z+1) = \theta(z)$ , et on peut déduire de la formule de Poisson que  $\theta(-1/(4z)) = (-2iz)^{1/2} \theta(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{H}$  (et une détermination naturelle de la racine carrée). Les deux équations précédentes montrent que  $\theta$  est une *forme modulaire* de poids  $1/2$  (et  $\theta^d$  une forme modulaire de poids  $d/2$ ). Montant d'un degré encore sur l'échelle conceptuelle, on remarque que, lorsque  $d$  est un multiple de 4, la forme  $\theta^d$  s'interprète comme une forme différentielle sur une courbe modulaire. Pour quelques petites valeurs de  $d$ , ces formes sont familières. Si  $d = 4$  par exemple on en déduit :

$$r_4(n) = 8 \sum_{2 \mid d \mid n} d + 16 \sum_{2 \mid d \mid (n/2)} d.$$

À partir de  $d = 12$ , cependant, les coefficients  $r_d(n)$  ne sont pas donnés par des formules aussi simples. On peut pourtant les calculer, sans limitation théorique sur la taille de  $d$ , en étudiant les représentations galoisiennes associées aux formes  $\theta^d(z)$ ! Mais cela exige de développer de nombreux outils de géométrie diophantienne et d'Arakelov sur les courbes modulaires et leurs jacobiniennes, tant du point de vue théorique qu'algorithmique.

Il s'agit donc de faire un gigantesque bond conceptuel, qui peut sembler très coûteux pour une question qu'il est après tout possible d'attaquer par force brute (développement de la série  $\theta_1(q)^d$  à l'ordre  $n$ ). Mais l'algorithme décrit dans les 425 pages (!) du livre *Computational aspects of modular forms and Galois representations*<sup>1</sup>, dirigé par Bas Edixhoven et J.-M. Couveignes, manipule ces représentations galoisiennes assez efficacement pour permettre de calculer  $r_d(n)$  en temps polynomial en  $\ln(n)$  : c'est asymptotiquement beaucoup, beaucoup plus rapide que l'approche naïve, qui demande un temps polynomial en  $n$ ! Les méthodes développées ici (et généralisées depuis) s'appliquent d'ailleurs à bien d'autres formes modulaires que nos fonctions thêta – donc à bien d'autres problèmes que le comptage de vecteurs de norme donnée...

Ces travaux illustrent et s'inscrivent en fait dans un courant mathématique très large : au tournant du XXI<sup>e</sup> siècle, de puissantes et abstraites théories cohomologiques en topologie, géométrie et arithmétique, devenues effectives, se sont révélées d'une efficacité redoutable dans l'attaque de problèmes concrets – une efficacité insoupçonnable seulement quelques décennies auparavant.

1. B. Edixhoven and J.-M. Couveignes editors, with contributions by J. Bosman, J.-M. Couveignes, B. Edixhoven, R. de Jong and F. Merkl. *Computational Aspects of Modular Forms and Galois Representations*. Annals of Mathematics Studies 176, Princeton University Press, 2011.

## « Make Chabauty geometric again! »

• P. PARENT

Une courbe algébrique  $C$  peut être définie comme le lieu des solutions dans le plan d'une équation  $P(x, y) = 0$  où  $P$  est un polynôme en deux variables, disons à coefficients dans le corps  $\mathbb{Q}$  des rationnels<sup>1</sup>. Par exemple :  $x^n + y^n - 1 = 0$  ( $C_1$ ) ( $n \in \mathbb{N}$ ), ou (pourquoi pas) :

$$y^4 + 5x^4 - 6x^2y^2 + 6x^3 + 26x^2y + 10xy^2 - 10y^3 - 32x^2 - 40xy + 24y^2 + 32x - 16y = 0. \quad (C_2)$$

Ces équations représentent des problèmes parfois vénérables, et souvent redoutables. Ainsi, résoudre ( $C_1$ ) pour tout  $n \geq 3$ , c'est démontrer le « dernier théorème de Fermat »...

Une approche classique utilise le fait que  $C$  est naturellement tracée sur une autre « variété algébrique » (lieu d'annulation de polynômes, de dimension  $g > 1$  en général) : la jacobienne  $J$  de cette courbe. Or  $J$  est munie d'une structure de groupe commutatif, dont l'ensemble des points rationnels, noté  $J(\mathbb{Q})$ , est même (à une partie finie près) de forme  $\mathbb{Z}^r$ , pour un  $r \geq 0$  appelé *rang* de la jacobienne.

En 1941, Chabauty (motivé, semble-t-il, par l'équation de Fermat!) a proposé la stratégie suivante. Dans la grande variété  $J$  (de dimension  $g$ ),  $J(\mathbb{Q})$  (ou plutôt une complétion judicieuse) définit un sous-espace (de dimension  $\leq r$ ), dont l'intersection avec la courbe (de dimension 1) contient les

solutions rationnelles  $C(\mathbb{Q})$ . Supposons  $r < g$ ; comment cette intersection ne serait-elle pas *finie*? On peut montrer qu'on a même mieux : elle est *explicitement calculable*.

Mais que faire si  $r \geq g$ ? En s'inspirant d'idées de Minhyong Kim, J. Balakrishnan et ses coauteurs ont montré qu'on pouvait raffiner la méthode, au prix d'un lourd équipement arithmétique (hauteurs  $p$ -adiques, théorie de Fontaine...). Avec son étudiant G. Lido, Edixhoven a profondément réinterprété ce travail, et montré comment remplacer, dans les cas  $r = g$ , la jacobienne  $J$  par un objet *géométrique* plus gros, qui permet de reprendre une démarche très proche de la version originale de Chabauty<sup>2</sup>. Et de résoudre par exemple l'équation ( $C_2$ ), connue sous le nom de  $X_{ns}^+(13)$ , ou encore « courbe maudite »<sup>3</sup> – faisant ainsi substantiellement progresser une question de Serre sur l'arithmétique des courbes elliptiques, mais c'est une autre histoire.

« *Make Chabauty geometric and simple again!* » était le slogan d'Edixhoven pour défendre sa méthode – qui nécessite tout de même de solides outils de géométrie algébrique, issus de l'œuvre de Grothendieck qu'il pratiquait couramment<sup>4</sup>. Cette ultime grande contribution exprime donc à la fois profondeur théorique, élégance géométrique, et un joyeux appétit pour les problèmes concrets : en cela, elle reflète magnifiquement la personnalité mathématique de Bas.

1. On complète utilement par des points à l'infini, et ce modèle peut avoir l'inconvénient d'être singulier, mais c'est un peu secondaire du point de vue qui nous intéresse ici.

2. B. Edixhoven, G. Lido, *Geometric quadratic Chabauty*, J. Inst. Math. Jussieu, à paraître.

3. Balakrishnan et ses coauteurs ont néanmoins été les premiers à obtenir ces solutions, cf. J. Balakrishnan, N. Dogra, J. Müller, J. Tuitman, J. Vonk, *Explicit Chabauty-Kim for the split Cartan modular curve of level 13*, Ann. of Math. **189**, no. 3, 885-944 (2019).

4. Notamment la théorie des biextensions (SGA 7).

# Call for proposals 2025

## SwissMAP Research Station (SRS)

International topical conferences and targeted workshops in the fields of mathematics and theoretical physics.



Around 14 events throughout the year



Fully equipped conference & meeting rooms



Full board accommodation



Based in Les Diablerets, Switzerland

**Interested in organizing a conference in 2025 at the SRS?**

Application template available online: [swissmaprs.ch](https://swissmaprs.ch)

**Deadline: September 30, 2023**

[contact@swissmaprs.ch](mailto:contact@swissmaprs.ch)



## Instructions aux autrices et auteurs

**Objectifs de la *Gazette de la Société Mathématique de France*.** Bulletin interne de la SMF, la *Gazette* constitue un support privilégié d'expression au sein de la communauté mathématique. Elle s'adresse aux adhérents, mais aussi, plus généralement, à tous ceux qui sont intéressés par la recherche et l'enseignement des mathématiques. Elle informe de l'actualité des mathématiques, de leur enseignement et de leur diffusion auprès du grand public, de leur histoire, de leur relation avec d'autres sciences (physique, informatique, biologie, etc.), avec pour objectif de rester accessible au plus grand nombre.

On y trouve donc des articles scientifiques de présentation de résultats ou de notions importants, ainsi que des recensions de parutions mathématiques récentes. Elle contient aussi des informations sur tout ce qui concerne la vie professionnelle d'un mathématicien (recrutements, conditions de travail, publications scientifiques, etc.) ainsi que des témoignages ou des tribunes libres.

La *Gazette* paraît à raison de quatre numéros par an avec, de temps en temps, un numéro spécial consacré à un sujet particulier de mathématiques ou bien à un grand mathématicien.

Elle est envoyée gratuitement à chaque adhérent. Les numéros actuel et anciens sont disponibles en ligne (<http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/>).

**Articles scientifiques.** Les articles scientifiques de la *Gazette* sont destinés à un large public intéressé par les mathématiques. Ils doivent donc être écrits avec un souci constant de pédagogie et de vulgarisation. Les auteurs sont en particulier invités à définir les objets qu'ils utilisent s'ils ne sont pas bien connus de tous, et à éviter toute démonstration trop technique. Ceci vaut pour tous les textes de la *Gazette*, mais en particulier pour ceux de la rubrique « Raconte-moi », destinés à présenter de manière accessible une notion ou un théorème mathématique important.

En règle générale, les articles doivent être assez courts et ne pas viser à l'exhaustivité (en particulier dans la bibliographie). Sont encouragés tous les artifices facilitant la compréhension, comme l'utilisation d'exemples significatifs à la place de la théorie la plus générale, la comparaison des notions introduites avec d'autres notions plus classiques, les intuitions non rigoureuses mais éclairantes, les anecdotes historiques.

Les articles d'histoire des mathématiques ou contenant des vues historiques ou épistémologiques sont également bienvenus et doivent être conçus dans le même esprit.

**Soumission d'article.** Les articles doivent être envoyés au secrétariat, de préférence par courrier électronique ([gazette@smf.emath.fr](mailto:gazette@smf.emath.fr)), pour être examinés par le comité de rédaction. S'ils sont acceptés, il faut alors en fournir le fichier source, de préférence sous forme d'un fichier  $\text{\TeX}$  le plus simple possible, accompagné d'un fichier .bib pour les références bibliographiques et d'un pdf de référence.

Pour faciliter la composition de textes destinés à la *Gazette*, la SMF propose la classe  $\text{\LaTeX}$  *gztarticle* fournie par les distributions  $\text{\TeX}$  courantes ( $\text{\TeX}$  Live et Mac $\text{\TeX}$  – à partir de leur version 2015 – ainsi que MiK $\text{\TeX}$ ), et sinon téléchargeable depuis la page <http://ctan.org/pkg/gzt>. Sa documentation détaillée se trouve à la page <http://mirrors.ctan.org/macros/latex/contrib/gzt/doc/gzt.pdf>. On prendra garde au fait que l'usage de cette classe nécessite une distribution  $\text{\TeX}$  à jour.

---

**Classe  $\text{\LaTeX}$  :** Denis BITOUZÉ ([denis.bitouze@univ-littoral.fr](mailto:denis.bitouze@univ-littoral.fr))

**Conception graphique :** Nathalie LOZANNE ([n.lozanne@free.fr](mailto:n.lozanne@free.fr))

**Impression :** Duplirprint – 733 rue Saint Léonard – 53100 Mayenne

Nous utilisons la police Kp-Fonts créée par Christophe CAIGNAERT.

