

**NON-UNICITÉ DES SOLUTIONS DU SYSTÈME
DE NAVIER–STOKES AVEC TERME SOURCE**
[d’après Dallas Albritton, Elia Brué et Maria Colombo]

par Anne-Laure Dalibard

1. Introduction

Le système de Navier–Stokes décrit l’évolution des fluides visqueux incompressibles. Il traduit la conservation locale de la quantité de mouvement, et s’écrit, en dimension d et lorsque le fluide est soumis à une force extérieure,

$$\begin{aligned} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p - \nu \Delta u &= f & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ \operatorname{div} u &= 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(t = 0, x) &= u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (1)$$

où $u: [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ désigne le champ de vitesse du fluide, $p: [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ le champ de pression, et $f: [0, +\infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ la force appliquée au fluide. Les opérateurs différentiels ∇ , div et Δ agissent ici sur la variable spatiale $x \in \mathbb{R}^d$. La fonction $u_0: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est la donnée initiale du champ de vitesse, et le paramètre $\nu > 0$ est la viscosité du fluide. Lorsque $\nu = 0$, c’est-à-dire lorsque les forces de viscosité sont absentes du fluide, le système porte le nom d’équation d’Euler, et ses propriétés mathématiques sont différentes. En effet, le terme de dissipation $-\nu \Delta u$ a un effet régularisant qui joue un rôle fondamental dans les théories d’existence et d’unicité des solutions. La force extérieure f et la donnée initiale u_0 sont des données du problème, tandis que (u, p) est l’inconnue. Au moins formellement, si la solution u est régulière et suffisamment décroissante à l’infini, on peut déterminer p en prenant la divergence de la première équation, *i.e.*

$$-\Delta p = \operatorname{div}((u \cdot \nabla)u).$$

Ce texte est consacré à un problème difficile, resté longtemps ouvert, et résolu récemment par ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) en s’appuyant sur les travaux de VISHIK (2018a,b) (revisités par ALBRITTON, BRUÉ, COLOMBO et al., 2021) : *la non-unicité des solutions faibles (dites de Leray–Hopf) en dimension trois.*

Solutions de Leray : existence globale et non-unicité en dimension trois

Les solutions de Leray s'appuient sur l'observation suivante : si (u, p) est une solution régulière et décroissante à l'infini du système de Navier–Stokes (1), alors, en faisant le produit scalaire de (1) avec u et en intégrant par parties en espace, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \nabla) u(t, x) \cdot u(t, x) dx \\ - \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{div} u(t, x) p(t, x) dx + \nu \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx \\ = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \cdot u(t, x) dx. \end{aligned}$$

On peut réécrire le terme d'advection $(u \cdot \nabla) u \cdot u$ comme $u \cdot \nabla (|u|^2/2)$. Une intégration par parties et la condition de divergence nulle mènent à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx + \nu \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t, x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x) \cdot u(t, x) dx. \quad (2)$$

Soit $T > 0$ quelconque. Supposons que $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)$. L'intégration en temps de (2) et l'utilisation du lemme de Grönwall mènent à l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)} + \nu^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d, \mathcal{M}_d(\mathbb{R}))} \\ \leq C \left(\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)^d} + \|f\|_{L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

où C est une constante universelle, indépendante de T et de ν . Il apparaît que l'espace $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ est un espace fonctionnel naturel pour chercher des solutions; on l'appellera « espace d'énergie » dans la suite de ce texte. La notion de solution faible introduite par LERAY (1934) et généralisée ensuite par HOPF (1950) au cas de domaines bornés, s'appuie sur l'analyse précédente. On adopte les notations suivantes : si $a, b \in \mathbb{R}^d$, on note $a \otimes b$ la matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$ pour $1 \leq i, j \leq d$. Pour $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, $N = (n_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on note $M : N$ le produit scalaire canonique entre M et N , c'est-à-dire $M : N = \sum_{1 \leq i, j \leq d} m_{ij} n_{ij}$.

Définition 1.1 (Solutions de Leray de (1)). Soit $T > 0$ quelconque.

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ telle que $\operatorname{div} u_0 = 0$, et $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d)$. Soit $u \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^d)^d)$.

On dit que u est une solution de Leray de (1) sur l'intervalle $[0, T]$ si et seulement si, pour tout $\varphi \in C^1([0, T], H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ tel que $\operatorname{div} \varphi = 0$ et $\varphi(T, x) = 0$ pour tout

$x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(s, x) \cdot \partial_s \varphi(s, x) \, ds \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \cdot \varphi(0, x) \, dx \\ = & -\nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(s, x) : \nabla \varphi(s, x) \, ds \, dx \\ & + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u(s, x) \otimes u(s, x) : \nabla \varphi(s, x) \, ds \, dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(s, x) \cdot \varphi(s, x) \, ds \, dx. \end{aligned}$$

Remarque 1.2. Cette définition peut être étendue au cas où $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d) + L^2([0, T], H^{-1}(\mathbb{R}^d)^d)$, où $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$ est le dual de $H^1(\mathbb{R}^d)$. L'inégalité d'énergie (3) est alors légèrement modifiée, mais l'espace d'énergie reste le même.

Jean LERAY (1934) a démontré l'existence globale de solutions faibles du système de Navier–Stokes (1) en dimension trois; la preuve s'étend aisément au cas de la dimension deux :

Théorème 1.3. *On suppose que $d \in \{2, 3\}$. Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)^d$ telle que $\operatorname{div} u_0 = 0$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)^d)$. Alors pour tout $T > 0$, il existe une solution de Leray $u \in L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2([0, T], H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ du système de Navier–Stokes (1) sur l'intervalle $[0, T]$.*

LIONS et PRODI (1959) ont démontré en dimension deux l'unicité des solutions de Leray. Cette propriété est liée à une particularité d'invariance par changement d'échelle de l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)^d) \cap L^2(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^d)^d)$ lorsque $d = 2$, sur laquelle nous reviendrons dans la prochaine section (voir (8)). En dimension $d = 3$, la question de l'unicité des solutions faibles était restée ouverte depuis les travaux de Leray. Lorsque la donnée initiale est régulière — dans un sens que l'on précisera ultérieurement — on peut construire une unique solution locale en temps, par exemple par une méthode de point fixe. Une telle solution est appelée « solution forte ». De façon remarquable, on a alors un *principe d'unicité « fort-faible »* : si une solution forte existe, alors toutes les solutions de Leray issues de la même donnée initiale coïncident avec la solution forte. Dans ce cas, l'unicité des solutions de Leray est donc acquise sur le temps d'existence de la solution forte. Par conséquent, pour des données initiales et des termes sources réguliers, la question de l'unicité est reliée à celle de la formation de singularités en temps fini pour les solutions de (1), qui est un autre problème ouvert majeur de l'analyse mathématique des équations de la mécanique des fluides. Cependant, on considèrera dans ce texte des termes sources avec peu de régularité (typiquement, avec la régularité requise dans le théorème 1.3 ou dans la Remarque 1.2), pour lesquels il n'existe pas de solution forte⁽¹⁾. La question de l'unicité ne peut donc se réduire au principe d'unicité « fort-faible ». Les travaux

⁽¹⁾En effet, s'il en existait une, le terme source associé serait alors régulier...

de ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) que nous décrirons ici apportent précisément une réponse (négative) à la question de l'unicité en dimension trois :

Théorème 1.4 (Non-unicité des solutions de Leray avec terme source). *Il existe $T > 0$ et $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ tels que le système de Navier–Stokes (1) admette deux solutions de Leray distinctes sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ avec la donnée initiale $u_0 = 0$ et le terme source f .*

Remarque 1.5. L'unicité des solutions de Leray en dimension 3 en l'absence de terme source (*i.e.* pour $f = 0$) ou dans un domaine à bords demeurent des problèmes ouverts. La non-unicité des solutions de Navier–Stokes avec $f = 0$ dans l'espace $C([0, T], H^\beta(\mathbb{T}^3)^3)$ avec $\beta > 0$ a été obtenue par BUCKMASTER et VICOL (2019) par des méthodes d'intégration convexe, complètement différentes de celles présentées ici. Cependant les solutions ainsi construites sont loin d'avoir la régularité des solutions de Leray : BUCKMASTER et VICOL (2019) montrent que la vorticité $\omega = \nabla \wedge u$ des solutions obtenues par intégration convexe appartient à l'espace $C([0, T], L^1(\mathbb{T}^3)^3)$, mais elle n'est pas *a priori* de carré intégrable.

Schéma de la preuve

La méthode de preuve repose sur une stratégie voisine de celle de GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2014, 2015), qui sera décrite dans la prochaine partie. L'idée fondamentale est de tirer parti de l'invariance par changement d'échelle du système (1) (voir (8) ci-dessous), de façon à transformer la question de la non-unicité des solutions en un problème d'instabilité spectrale. En effet, soit u une solution de Leray de (1), associée à un terme source f . En s'appuyant sur l'invariance par changement d'échelle du système de Navier–Stokes (1) (voir (8) dans la section 2), on introduit les variables auto-similaires $\tau = \ln t$, $\xi = x/\sqrt{t}$, et les fonctions $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{P}$ définies par

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathcal{U}(\tau, \xi), \quad f(t, x) = \frac{1}{t^{3/2}} \mathcal{F}(\tau, \xi), \quad p = \frac{1}{t} \mathcal{P}(\tau, \xi). \quad (4)$$

Dans ces nouvelles variables, le système (1) devient

$$\begin{aligned} \partial_\tau \mathcal{U} - \frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} - \nu \Delta_\xi \mathcal{U} + (\mathcal{U} \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} + \nabla_\xi \mathcal{P} &= \mathcal{F}, \\ \operatorname{div} \mathcal{U} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

La donnée initiale en $t = 0$ devient une donnée en $\tau = -\infty$. Pour $\overline{\mathcal{U}} \in H^1(\mathbb{R}^3)^3$, on note $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$ l'opérateur linéarisé autour de $\overline{\mathcal{U}}$, *i.e.*

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}: \mathcal{U} \mapsto -\frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} - \nu \Delta_\xi \mathcal{U} + \nabla_\xi \mathcal{P} + (\overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla_\xi) \mathcal{U} + (\mathcal{U} \cdot \nabla_\xi) \overline{\mathcal{U}}, \quad (6)$$

où le gradient de pression $\nabla_\xi \mathcal{P}$ assure que $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}(\mathcal{U})$ est à divergence nulle. Le domaine de $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$ est $\mathcal{D}(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}) = \{\mathcal{U} \in H^2(\mathbb{R}^3)^3, \operatorname{div} \mathcal{U} = 0, \xi \cdot \nabla_\xi \mathcal{U} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3\}$.

Supposons qu'il existe un champ de vecteur $\overline{\mathcal{U}} \in H^2(\mathbb{R}^3)^3$ à divergence nulle possédant la propriété suivante :

(P) $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$ admet une valeur propre λ de partie réelle strictement négative, relative à une fonction propre $\mathcal{V}_\lambda \in \mathcal{D}(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}})$.

Considérons le terme source associé à $\overline{\mathcal{U}}$, c'est-à-dire

$$\overline{\mathcal{F}} := -\frac{1}{2} (1 + \zeta \cdot \nabla_\zeta) \overline{\mathcal{U}} - \nu \Delta_\zeta \overline{\mathcal{U}} + (\overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla_\zeta) \overline{\mathcal{U}}.$$

Alors par construction, $\overline{\mathcal{U}}$ est une solution stationnaire de (5) pour le terme source $\overline{\mathcal{F}}$ et avec une pression nulle, tandis que $\overline{\mathcal{U}} + \Re(e^{-\lambda\tau} \mathcal{V}_\lambda)$ est une solution de (5) avec un terme source $\overline{\mathcal{F}} + O(e^{-2\Re(\lambda)\tau})$. On remarque que le terme de reste $O(e^{-2\Re(\lambda)\tau})$ est négligeable quand $\tau \rightarrow -\infty$ (ce qui correspond à l'asymptotique $t \rightarrow 0$). On s'attend donc à pouvoir construire une solution \mathcal{U}_1 de (5) pour le terme source $\overline{\mathcal{F}}$ sur un intervalle $] -\infty, \tau_0[$ avec $\tau_0 \in \mathbb{R}$, avec \mathcal{U}_1 de la forme

$$\mathcal{U}_1 := \overline{\mathcal{U}} + \Re(e^{-\lambda\tau} \mathcal{V}_\lambda) + \mathcal{W},$$

où \mathcal{W} est un correcteur non linéaire, vérifiant $\mathcal{W} = O(e^{-2\Re(\lambda)\tau})$. En posant

$$u_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \mathcal{U}_1 \left(\ln t, \frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad u_2(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \overline{\mathcal{U}} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right), \quad (7)$$

on vérifie que u_1 et u_2 sont deux solutions distinctes de (1) sur l'intervalle $]0, e^{\tau_0}[$ avec la même donnée initiale $u_0 = 0$ et le même terme source

$$f(t, x) = \frac{1}{t^{3/2}} \overline{\mathcal{F}} \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right).$$

On remarque en particulier que

$$\begin{aligned} \|u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} &= t^{1/4} \|\overline{\mathcal{U}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0, \\ \|u_1(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} &\leq t^{1/4} \|\overline{\mathcal{U}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} + O(t^{1/4 - \Re(\lambda)}) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0, \\ \text{et } \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3} &= t^{-3/4} \|\overline{\mathcal{F}}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)^3}, \end{aligned}$$

de sorte que $f \in L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^3)^3)$. Le résultat de non-unicité du théorème 1.4 s'ensuit.

On constate que le point central de la preuve est l'identification d'un profil $\overline{\mathcal{U}}$ possédant la propriété d'instabilité spectrale (P) mentionnée plus haut. La majeure partie de ce manuscrit sera donc consacrée à cette question. Dans la seconde partie, on rappelle quelques généralités sur le système de Navier-Stokes (invariance d'échelle, solutions fortes, unicité fort-faible), et on esquisse les principaux points de la stratégie de GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2014, 2015), en la comparant à

celle exposée ici. La troisième partie est consacrée à la preuve d'un résultat de VISHIK (2018a,b), reprise dans ALBRITTON, BRUÉ, COLOMBO et al. (2021), portant sur l'instabilité spectrale de flots tourbillonnaires particuliers pour le système d'Euler 2d. La preuve du théorème 1.4 à proprement parler est donnée dans la quatrième et dernière section, et repose sur plusieurs arguments perturbatifs. Le tourbillon bidimensionnel de Vishik est d'abord relevé en un champ de vitesse tridimensionnel supporté dans un anneau. On montre que ce champ de vitesse est instable pour le système d'Euler 3d à condition que le rayon de l'anneau soit suffisamment grand, en s'appuyant sur la proximité entre le système d'Euler 2d et le système d'Euler 3d axisymétrique, lorsque la distance à l'axe de symétrie est grande. Enfin, on établit que ce champ de vitesse est instable pour le système de Navier–Stokes 3d lorsque que son amplitude est suffisamment grande, en traitant perturbativement le terme visqueux et le terme de transport $\mathcal{U} + \xi \cdot \nabla_{\xi} \mathcal{U}$. Ceci conclut la preuve de la propriété (P).

Remarque 1.6. Le terme de dissipation visqueuse $-\nu\Delta u$ joue un rôle stabilisant dans l'équation de Navier–Stokes (1), qui permet par exemple de montrer l'existence globale de solutions fortes à données petites. Pour en comprendre le mécanisme, on pourra s'inspirer de l'analogie avec l'équation différentielle

$$X'(t) + \alpha X(t) = X(t)^2, \quad X(0) = X_0,$$

avec $X: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ et $X_0 \in \mathbb{R}$. On constate que si $|X_0| < \alpha$, cette équation admet une solution globale, qui vérifie en outre $X(t) = O(e^{-\alpha t})$. En revanche, si $X_0 > \alpha$, le terme de dissipation αX n'est pas suffisant pour éviter l'explosion.

On comprend, sur ce modèle jouet, qu'il convient de bien analyser les tailles relatives du terme non linéaire $(\mathcal{U} \cdot \nabla)\mathcal{U}$ (ou de sa version linéarisée $(\overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla)\mathcal{U} + (\mathcal{U} \cdot \nabla)\overline{\mathcal{U}}$) et du terme de dissipation $-\nu\Delta\mathcal{U}$ au sein de l'opérateur $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$. Lorsque $\overline{\mathcal{U}}$ est petit (disons dans $W^{1,\infty}$), on s'attend à ce que le terme de dissipation visqueuse l'emporte. Cela correspond au régime $|X_0| < \alpha$ pour le modèle jouet ci-dessus. En revanche, lorsque $\overline{\mathcal{U}}$ devient grand, le terme de dissipation visqueuse devient négligeable et l'advection domine. On bascule dans l'analogie du régime $|X_0| > \alpha$ pour le modèle jouet. Le système est alors proche, dans un certain sens, du système d'Euler. Bien évidemment, la notion de petitesse doit être quantifiée convenablement et dépend de ν . Ces considérations sont centrales dans la notion de nombre de Reynolds critique, que nous introduirons dans la prochaine section.

On pourrait se demander s'il est possible de construire un mode instable pour le système de Navier–Stokes 2d, en partant du tourbillon instable de Vishik pour le système d'Euler 2d et en traitant le terme de viscosité perturbativement. Bien que ce résultat ne figure pas dans la littérature, il est probable que les arguments présentés ici pour la preuve de la propriété (P) se généralisent au cas bidimensionnel. Cependant, contrairement au cas tridimensionnel, cette instabilité spectrale dans les variables auto-similaires n'aboutit pas à un résultat de non-unicité des solutions de

Leray (ce qui est heureux, puisque l'unicité des solutions de Leray en deux dimensions est un résultat bien connu, voir LIONS et PRODI (1959)). En effet, les analogues des solutions u_1, u_2 pour $d = 2$ n'appartiennent pas à l'espace d'énergie, puisqu'on a dans ce cas $\|\nabla u_2(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = t^{-1/2} \|\nabla \bar{U}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \notin L^2([0, T])$.

Nous reviendrons sur ces questions dans la remarque 3.12.

Quelques éléments d'analyse spectrale : outils généraux et notations

La pierre angulaire du théorème 1.4 est le résultat d'instabilité spectrale (P). Par ailleurs, comme expliqué plus haut, l'existence d'une valeur propre de partie réelle strictement négative pour $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}$ est obtenue par des arguments perturbatifs. On rappelle donc dans ce paragraphe quelques définitions et résultats qui seront utiles dans le reste de la preuve.

Soit H un espace de Hilbert, et $\mathbf{L}: D(\mathbf{L}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire fermé, défini sur un domaine dense. On note $\rho(\mathbf{L})$ l'ensemble résolvant défini par

$$\rho(\mathbf{L}) := \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda - \mathbf{L} \text{ est une bijection}\},$$

et $\sigma(\mathbf{L}) := \mathbb{C} \setminus \rho(\mathbf{L})$ le spectre. On définit le spectre essentiel $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L})$ comme l'ensemble des $\lambda \in \sigma(\mathbf{L})$ tels que $\lambda - \mathbf{L}$ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice zéro. (On rappelle que d'autres conventions sont possibles pour définir le spectre essentiel.) Sur $\rho(\mathbf{L})$, on définit la résolvante par $R(\lambda, \mathbf{L}) := (\lambda - \mathbf{L})^{-1}$. On rappelle le résultat suivant, qui sera fréquemment utilisé dans ce texte : si $\mathbf{L}: D(\mathbf{L}) \subset H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire fermé, et $\mathbf{K}: D(\mathbf{L}) \rightarrow H$ un opérateur compact, alors $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L} + \mathbf{K}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L})$. En effet, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L})$, alors $\lambda - \mathbf{L}$ est un opérateur de Fredholm d'indice zéro. On en déduit (voir KATO, 2013, Chapitre IV, Théorème 5.26) que $\lambda - \mathbf{L} - \mathbf{K}$ est également un opérateur de Fredholm d'indice zéro, et par conséquent $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L} + \mathbf{K}) \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L})$. Par symétrie, on en déduit l'égalité des deux spectres essentiels.

On utilisera fréquemment les deux résultats suivants :

Lemme 1.7. Soit $\mathbf{L}: D(\mathbf{L}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire fermé, et soit $\mathbf{K}: D(\mathbf{L}) \rightarrow H$ un opérateur compact. On suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L}) \subset \{\Re(\lambda) \geq \mu\}$, et que $\mathbf{L} + \mathbf{K}$ admet une valeur propre $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ telle que $\Re(\lambda_0) < \mu$. On suppose enfin que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $|\Re(\lambda)| \gg 1$ et $\Re(\lambda) < 0$, alors $\lambda \in \rho(\mathbf{L} + \mathbf{K})$.

Alors λ_0 est un élément isolé de $\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{K})$.

Démonstration. Tout d'abord, puisque \mathbf{K} est compact, $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L} + \mathbf{K}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L}) \subset \{\Re(\lambda) \geq \mu\}$. De plus, dans chaque composante connexe U de $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L} + \mathbf{K})$, on a l'alternative suivante :

- ▷ soit $U \subset \sigma(\mathbf{L} + \mathbf{K})$;
- ▷ soit $U \cap \sigma(\mathbf{L} + \mathbf{K})$ ne comporte que des points isolés.

Soit U_0 la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L} + \mathbf{K})$ contenant λ_0 . Alors $\{\Re(\lambda) < \mu\} \subset U_0$, et donc par hypothèse $U_0 \cap \rho(\mathbf{L} + \mathbf{K}) \neq \emptyset$. Le résultat du lemme découle alors de l'alternative ci-dessus. \square

Lemme 1.8. Soit \mathbf{M}_∞ un opérateur linéaire fermé, $\mathbf{K}_\infty : D(\mathbf{M}_\infty) \rightarrow H$ un opérateur compact, et soit $(\mathbf{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (resp. $(\mathbf{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$) une suite d'opérateurs linéaires fermés (resp. compacts) définis sur $D(\mathbf{M}_\infty)$. On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

▷ Il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et une suite réelle $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \mu$, tels que

$$\sigma(\mathbf{M}_n) \subset \{\Re(\lambda) \geq \mu_n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sigma(\mathbf{M}_\infty) \subset \{\Re(\lambda) \geq \mu\};$$

▷ Pour tout $f \in H$, $R(\lambda, \mathbf{M}_n)f \rightarrow R(\lambda, \mathbf{M}_\infty)f$ uniformément sur tout compact de $\rho(\mathbf{M}_\infty) \cap \{\Re(\lambda) < \mu\}$;

▷ $\mathbf{K}_n \rightarrow \mathbf{K}_\infty$ pour la norme d'opérateur.

Soit λ_∞ une valeur propre isolée de $\mathbf{M}_\infty + \mathbf{K}_\infty$ telle que $\Re(\lambda_\infty) < \mu$, et soit $V \subset \{\Re(\lambda) < \mu\}$ un voisinage de λ_∞ tel que $V \cap \sigma(\mathbf{A}_\infty) = \{\lambda_\infty\}$.

Alors pour n suffisamment grand, $\mathbf{M}_n + \mathbf{K}_n$ admet une valeur propre dans V .

Démonstration. Dans toute la preuve, on pose $\mathbf{A}_n = \mathbf{M}_n + \mathbf{K}_n$, $\mathbf{A}_\infty = \mathbf{M}_\infty + \mathbf{K}_\infty$. On commence par observer que pour tout ensemble compact $C \subset \rho(\mathbf{A}_\infty) \cap \{\Re(\lambda) < \mu\}$, pour tout $f \in H$, $R(\lambda, \mathbf{A}_n)f \rightarrow R(\lambda, \mathbf{A}_\infty)f$ uniformément sur C . Pour cela on écrit tout d'abord, pour $\lambda \in C$, et pour n suffisamment grand (de sorte que $\Re(\lambda) < \mu_n$),

$$\lambda - \mathbf{M}_n - \mathbf{K}_\infty = (\lambda - \mathbf{M}_n)(I - R(\lambda, \mathbf{M}_n)\mathbf{K}_\infty).$$

Puisque \mathbf{K}_∞ est un opérateur compact, on peut approcher \mathbf{K}_∞ par une suite d'opérateurs de rang fini. On en déduit que $R(\lambda, \mathbf{M}_n)\mathbf{K}_\infty \rightarrow R(\lambda, \mathbf{M}_\infty)\mathbf{K}_\infty$, uniformément sur C et pour la norme d'opérateur. Par conséquent, $R(\lambda, \mathbf{M}_n + \mathbf{K}_\infty)f \rightarrow R(\lambda, \mathbf{A}_\infty)f$ pour tout $f \in H$, uniformément sur C . Enfin, en écrivant

$$\lambda - \mathbf{A}_n = (\lambda - \mathbf{M}_n - \mathbf{K}_\infty)(I - R(\lambda, \mathbf{M}_n + \mathbf{K}_\infty)(\mathbf{K}_\infty - \mathbf{K}_n)),$$

on obtient la convergence annoncée.

Soit Γ un contour fermé encerclant λ_∞ , tel que $\Gamma \subset V \cap \rho(\mathbf{A}_\infty)$, orienté dans le sens trigonométrique. On définit alors les projecteurs de Riesz

$$\begin{aligned} \text{Pr}_\Gamma(\mathbf{A}_\infty) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, \mathbf{A}_\infty) d\lambda, \\ \text{Pr}_\Gamma(\mathbf{A}_n) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, \mathbf{A}_n) d\lambda. \end{aligned}$$

L'opérateur $\text{Pr}_\Gamma(\mathbf{A}_\infty)$ est le projecteur spectral sur $\ker(\lambda_\infty - \mathbf{A}_\infty)$, et est donc non trivial par hypothèse. D'après ce qui précède, $\text{Pr}_\Gamma(\mathbf{A}_n)f \rightarrow \text{Pr}_\Gamma(\mathbf{A}_\infty)f$ pour tout f dans H . On en déduit que $\text{Pr}_\Gamma(\mathbf{A}_n)$ est non trivial pour n suffisamment grand. Comme $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{A}_n) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{M}_n) \subset \{\Re(\lambda) \geq \mu_n\}$, V contient une valeur propre de \mathbf{A}_n . \square

Notations générales

Les opérateurs seront notés en gras. Les lettres calligraphiques (\mathcal{U} , \mathcal{G} , etc.) désignent des objets tridimensionnels (champ de vitesse, opérateur d'Euler linéarisé, etc.), tandis que les lettres droites (\bar{U} , G) désignent des objets bidimensionnels (à l'exception du tourbillon Ω , qui sera noté de la même façon en deux et en trois dimensions). L'opérateur d'Euler 2d (resp. 3d) linéarisé autour d'un champ \bar{U} (resp. $\bar{\mathcal{U}}$) sera noté $G_{\bar{U}}$ (resp. $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}$). L'opérateur de Navier–Stokes tridimensionnel linéarisé autour d'un champ $\bar{\mathcal{U}}$ dans les variables autosimilaires sera noté $\mathcal{H}_{\bar{\mathcal{U}}}$. Il sera souvent utile de distinguer les opérateurs linéarisés en formulation vitesse et en formulation vorticités (voir la partie suivante), et on notera les opérateurs correspondants G^{vel} , G^{vor} , etc.

2. Généralités sur le système de Navier–Stokes

Invariance par changement d'échelle et solutions fortes

L'équation de Navier–Stokes possède une invariance par changement d'échelle, qui joue un rôle crucial pour la construction de solutions fortes et des solutions auto-similaires (4). Plus précisément, soit u une solution des équations de Navier–Stokes (1) pour le terme source f et la donnée initiale u_0 . On observe alors que pour tout $\lambda > 0$, la fonction u_λ définie par

$$u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x) \quad (8)$$

est également solution de (1) pour le terme source $\lambda^3 f(\lambda^2 t, \lambda x)$ et la donnée initiale $\lambda u_0(\lambda x)$. En particulier, une solution stationnaire et invariante par le changement d'échelle est nécessairement homogène de degré -1 . On remarque par ailleurs que cette invariance a guidé la recherche de solutions auto-similaires de la forme (4). Dès lors, il est intéressant d'analyser quelles sont les normes invariantes par ce changement d'échelle. En effet, la construction de solutions fortes repose souvent sur un argument de point fixe (de type Cauchy-Lipschitz). Par analogie avec les équations différentielles ordinaires (voir la remarque 1.6), on peut espérer démontrer des résultats de deux types : (i) existence locale et unicité de solutions fortes, pour des données initiales et des termes sources de tailles arbitraires ; (ii) existence globale et unicité de solutions fortes, pour des données initiales et des termes sources suffisamment petits. Si l'espace fonctionnel considéré n'est *pas* invariant par changement d'échelle, alors quitte à modifier artificiellement les données par un changement d'échelle, l'hypothèse de petitesse du (ii) est systématiquement vérifiée, ce qui semble peu raisonnable. Les espaces considérés pour les solutions fortes possèdent donc des normes invariantes par le changement d'échelle (8).

Il semble naturel de comparer la régularité des espaces dont les normes sont invariantes par changement d'échelle à celle de l'espace d'énergie de l'équation. Si la régularité de l'espace d'énergie est strictement supérieure à celle des espaces invariants par changement d'échelle, alors la situation est très favorable. En effet, la borne sur l'énergie fournit automatiquement un contrôle de la solution dans l'espace dans lequel on réalise le point fixe. La solution peut donc être définie pour tout temps. On parle en ce cas d'équation *sous-critique*. Au contraire, si la régularité de l'espace d'énergie est strictement inférieure à celle des espaces invariants par changement d'échelle, le contrôle de l'énergie ne donne aucune information sur une éventuelle explosion de la norme associée à l'argument de point fixe. On parle alors d'équation *sur-critique*. Lorsque la norme associée à l'espace d'énergie est invariante par le changement d'échelle, l'équation est dite *critique*.

Notons $\|\cdot\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$, pour $s \in \mathbb{R}$ la norme de Sobolev homogène

$$\|u\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

la fonction \hat{u} étant la transformée de Fourier de u dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On renvoie à BAHOURI, CHEMIN et DANCHIN (2011) pour une étude des espaces $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et de leurs propriétés. En dimension deux, on vérifie que l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^2)^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)^2)$ est invariant par (8). Dans ce cas, l'équation de Navier–Stokes est donc critique. Une conséquence fondamentale de cette invariance réside dans l'unicité des solutions de Leray en dimension deux. En revanche, en dimension trois, on vérifie que

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3)^3)} + \|u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)} = \lambda^{-1} \left(\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3)^3)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)^3)} \right),$$

tandis que

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3)} + \|u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)^3)} = \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)^3)}.$$

L'équation de Navier–Stokes en dimension trois est donc sur-critique. La situation est ainsi radicalement différente de la dimension deux, ce qui ouvre la porte à des résultats de non-unicité dans l'espace d'énergie comme le théorème 1.4.

Depuis les années 1960, différents auteurs ont montré les résultats (i) et/ou (ii) dans des espaces invariants d'échelle, dont nous donnons ici quelques exemples :

- ▷ FUJITA et KATO, 1964 : on considère une donnée initiale u_0 dans l'espace $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3$, à divergence nulle, et un terme source f dans l'espace $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)^3)$. L'espace des solutions est donné par l'image de $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3$ par le flot de la chaleur : autrement dit, on cherche des solutions dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)^3)$. FUJITA et KATO (1964) ont démontré les points (i) et (ii) dans cet espace, ainsi qu'une propriété d'unicité fort-faible : si une telle solution forte existe sur un intervalle $[0, T]$ pour la donnée initiale $u_0 \in \dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3$, alors toutes les solutions de Leray pour la même donnée initiale u_0 coïncident avec elle sur l'intervalle $[0, T]$.

- ▷ KATO, 1984 : on considère une donnée initiale $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)^3$, à divergence nulle, et un terme source $f = 0$ (pour simplifier). On remarquera que $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3)$. De nouveau, on cherche des solutions dans l'image de $L^3(\mathbb{R}^3)^3$ par le flot de la chaleur, c'est-à-dire telles que

$$u \in C(\mathbb{R}_+, L^3(\mathbb{R}^3)^3), \quad \sup_{t>0} t^{\alpha/2} \|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)^3} < +\infty,$$

$$u \in L^r_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^3)^3) \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} t^{1/2} \|\nabla u\|_{L^3(\mathbb{R}^3)^9} < +\infty,$$

où les exposants α, p, q et r sont tels que $\alpha = 1 - 3/p$ et $3 < p \leq 6$ d'une part, et $2/r = 1 - 3/q$ avec $3 < q < 9$ d'autre part. KATO (1984) a montré les propriétés (i) et (ii) dans cet espace ainsi qu'une propriété d'unicité fort-faible.

La propriété (ii) a ensuite été généralisée par CANNONE (1997) et PLANCHON (1996) à des données initiales de taille arbitraire dans $L^3(\mathbb{R}^3)^3$, mais petites dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$ avec $3 < p < \infty$. On renvoie à BAHOURI, CHEMIN et DANCHIN (2011) pour une définition des espaces de Besov en Fourier, utilisant la décomposition de Littlewood–Paley, mais pour les besoins de ce texte, on pourra utiliser la caractérisation suivante (voir CANNONE (1997, Lemme 1.1)) : pour $1 < p < \infty, \alpha > 0$,

$$\|u\|_{\dot{B}_{p,\infty}^{-\alpha}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{t \geq 0} t^{\alpha/2} \|e^{t\Delta} u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Mentionnons que $L^3(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$, mais cette inclusion est stricte : en particulier, l'espace $\dot{B}_{p,\infty}^{-1+\frac{3}{p}}$ contient des fonctions homogènes de degré -1 non identiquement nulles.

- ▷ KOCH et TATARU, 2001 : on considère une donnée initiale à divergence nulle, appartenant à l'espace BMO^{-1} , c'est-à-dire telle que

$$\|u_0\|_{BMO^{-1}} := \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^3, R > 0} |B(x, R)|^{-1} \int_0^{R^2} \int_{B(x, R)} |(e^{t\Delta} u_0)(y)|^2 dy dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

De nouveau, KOCH et TATARU (2001) ont démontré la propriété (ii) dans l'espace image de BMO^{-1} par le flot de la chaleur et pour un terme source $f = 0$; autrement dit, la solution appartient à l'espace X défini par

$$\|u\|_X = \sup_{t>0} t^{1/2} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} + \left(\sup_{x, R} |B(x, R)|^{-1} \int_{B(x, R)} |u(t, y)|^2 dy dt \right)^{1/2}. \quad (9)$$

On peut vérifier que BMO^{-1} contient des fonctions homogènes de degré -1 , et que par ailleurs la solution u_2 donnée par (7) appartient à l'espace X .

Une conséquence immédiate des résultats d'unicité fort-faible mentionnés ci-dessus est la suivante : s'il existe deux solutions de Leray distinctes issues de la même donnée initiale, alors ces deux solutions appartiennent nécessairement aux complémentaires des espaces dans lesquels on a un principe d'unicité fort-faible. Avec les notations (7), on observe par exemple que

$$\|u_2(t)\|_{\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)^3} = \frac{1}{\sqrt{t}} \|\overline{\mathcal{W}}\|_{\dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3)^3},$$

de sorte que $u_2 \notin L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))$. Notons que cette propriété est précisément liée au fait que l'espace $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{3/2}(\mathbb{R}^3))$ est invariant par changement d'échelle, tandis que la solution u_2 est définie à partir du changement d'échelle (8). En revanche, puisque la fonction u_2 donnée par (7) appartient à l'espace X de KOCH et TATARU (2001), défini par (9), le théorème 1.4 entraîne immédiatement qu'il n'y pas d'unicité fort-faible dans l'espace X , du moins en présence d'un terme source. Par ailleurs, la fonction u_1 donnée par (7) appartient également à une version localisée en temps de l'espace X , à savoir

$$\|u\|_{X_T} = \sup_{t \in]0, T[} t^{1/2} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)^3} + \left(\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^3, \\ R < \sqrt{T}}} |B(x, R)|^{-1} \int_0^{R^2} \int_{B(x, R)} |u(t, y)|^2 dy dt \right)^{1/2}. \quad (10)$$

D'après le théorème 1.4, il n'y a pas unicité dans X_T des solutions du système de Navier–Stokes avec terme source, de sorte que l'hypothèse de petitesse de KOCH et TATARU (2001, Théorème 3) semble nécessaire (on rappelle que les solutions u_1 et u_2 sont, par construction, grandes dans X_T). On reviendra sur ces questions dans le cas de la dimension deux dans la remarque 3.12.

Un enjeu crucial, tant du point de vue des mathématiques fondamentales que des applications physiques, est de comprendre si une donnée initiale régulière (disons, dans $\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3$) et un terme source régulier (dans $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)^3)$) peuvent donner naissance à une solution singulière en un temps fini T^* , *i.e.* vérifiant $\lim_{t \rightarrow T^*, t < T^*} \|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}(\mathbb{R}^3)^3} = +\infty$. Cette question est au cœur d'un des Millenium Problems de la fondation Clay, et des questions de développement de la turbulence en physique. Elle est néanmoins distincte du problème qui nous occupe ici, puisque le terme source considéré n'appartient pas à $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \dot{H}^{-1/2}(\mathbb{R}^3)^3)$. De surcroît, les solutions u_1 et u_2 sont régulières sur $[\delta, T] \times \mathbb{R}^3$ pour $\delta > 0$: la singularité (et donc la non-unicité) se produit quand $t \rightarrow 0^+$. Au moment de l'écriture de ce texte, les scénarios potentiels d'explosion demeurent très ouverts. Rappelons toutefois que des résultats d'explosion sont connus pour d'autres systèmes fluides, comme le système d'Euler 3d (voir ELGINDI, 2021) ou le système de Navier–Stokes compressible barotrope (voir MERLE et al., 2022a,b, ainsi que l'exposé Bourbaki de PERELMAN, 2022).

Vocabulaire et notations

Les fonctions axisymétriques (*i.e.* invariantes par rotation autour de l'axe z) jouent un rôle particulier dans la preuve, le flot $\overline{\mathcal{U}}$ étant lui-même axisymétrique. On introduit donc quelques éléments de vocabulaire spécifique à ces fonctions, ainsi que quelques éléments de notation. On note $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ les trois variables des coordonnées cylindriques, et e_r, e_θ, e_z les vecteurs associés. Si $\overline{\mathcal{U}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on écrit $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{U}}_r e_r + \overline{\mathcal{U}}_\theta e_\theta + \overline{\mathcal{U}}_z e_z$. Une fonction *axisymétrique* est une fonction indépendante de θ dans ce jeu de coordonnées. Une fonction *axisymétrique sans swirl* (*i.e.* sans composante suivant e_θ) est une fonction $\overline{\mathcal{U}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ indépendante de θ et telle que $\overline{\mathcal{U}}_\theta = 0$ pour tout $(r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Une fonction *axisymétrique pure swirl* est une fonction axisymétrique telle que $\overline{\mathcal{U}}_r = \overline{\mathcal{U}}_z = 0$ pour tout $(r, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Si $\mathcal{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une fonction C^1 axisymétrique sans swirl, alors son rotationnel $\Omega = \nabla \wedge \mathcal{U}$ est une fonction axisymétrique pure swirl, et on a $\Omega = (\partial_z \mathcal{U}_r - \partial_r \mathcal{U}_z) e_\theta$.

Soit $U \in W^{1,1} \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs à divergence nulle, et soit $\Omega = \text{curl } U = \partial_1 U_2 - \partial_2 U_1$. Alors $U = \text{BS}[\Omega] := K_{\text{BS}} * \Omega$, où K_{BS} est le noyau de Biot et Savart, défini par

$$K_{\text{BS}}(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{x^\perp}{|x|^2}, \quad \text{où } x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2. \quad (11)$$

Autrement dit, $\text{BS}[\Omega] = \nabla^\perp \psi$, où $\Delta \psi = \Omega$. La fonction $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée *fonction courant*. Ainsi, si $U : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une solution du système de Navier-Stokes (1) en dimension deux, sa vorticité Ω vérifie (au moins formellement) l'équation

$$\partial_t \Omega + U \cdot \nabla \Omega - \nu \Delta \Omega = 0, \quad U = \text{BS}[\Omega].$$

On effectue ici les calculs pour le système de Navier-Stokes, mais on remarquera aisément que ceux-ci sont identiques pour le système d'Euler en prenant $\nu = 0$. L'opérateur de Navier-Stokes 2d linéarisé autour d'un flot \overline{U} s'écrit donc, en formulation vorticité,

$$\Omega \mapsto \overline{U} \cdot \nabla \Omega + \text{BS}[\Omega] \cdot \nabla \overline{\Omega} - \nu \Delta \Omega, \quad (12)$$

où $\overline{\Omega} = \text{curl } \overline{U}$.

Considérons maintenant une solution \mathcal{U} du système de Navier-Stokes tridimensionnel (1), et supposons que \mathcal{U} est axisymétrique sans swirl. On pose $\Omega = \nabla \wedge \mathcal{U} = \Omega_\theta e_\theta$, où $\Omega_\theta = \partial_z \mathcal{U}_r - \partial_r \mathcal{U}_z$. On vérifie (formellement) que Ω_θ est solution de l'équation

$$\partial_t \Omega_\theta + \mathcal{U} \cdot \nabla \Omega_\theta - \frac{1}{r} \mathcal{U}_r \Omega_\theta - \nu \left(\partial_r^2 + \partial_z^2 \right) \Omega_\theta - \nu \partial_r \left(\frac{1}{r} \Omega_\theta \right) = 0.$$

De plus, $\mathcal{U} = \text{BS}_{\text{ass}}[\Omega_\theta]$, où l'opérateur BS_{ass} (opérateur de Biot et Savart axisymétrique sans swirl) est défini par

$$\begin{aligned} \text{BS}_{\text{ass}}[\Omega_\theta] &= -\partial_z \psi e_r + \left(\partial_r \psi + \frac{1}{r} \psi \right) e_z, \\ \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \frac{1}{r^2} + \partial_z^2 \right) \psi &= -\Omega_\theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Ainsi, l'opérateur de Navier–Stokes linéarisé autour d'un profil $\overline{\mathcal{U}}$ axisymétrique sans swirl s'écrit, en formulation vitesse,

$$\mathcal{U} \mapsto \overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla \mathcal{U} + \mathcal{U} \cdot \nabla \overline{\mathcal{U}} - \nu \Delta \mathcal{U} + \nabla \mathcal{P},$$

où le champ de pression \mathcal{P} assure que l'image de \mathcal{U} par l'opérateur précédent est à divergence nulle. En formulation vorticité, après restriction aux vitesses axisymétriques sans swirl, l'opérateur devient

$$\Omega \mapsto \overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla \Omega + \text{BS}_{\text{ass}}[\Omega] \cdot \nabla \overline{\Omega} - \frac{1}{r} \overline{\mathcal{U}}_r \Omega - \frac{1}{r} \text{BS}_{\text{ass}}[\Omega] \cdot e_r \overline{\Omega} - \nu \left(\partial_r^2 + \partial_z^2 \right) \Omega - \nu \partial_r \left(\frac{1}{r} \Omega \right). \quad (14)$$

On observe (toujours formellement) que pour r très grand, les opérateurs donnés par (12) et (14) sont proches. Ce fait remarquable sera justifié rigoureusement dans la quatrième partie, et permettra de transformer l'instabilité identifiée par Vishik pour le flot d'Euler 2d en une instabilité pour le flot d'Euler 3d.

Panorama des travaux de Jia, Guillod et Šverák

Revenons à présent sur les travaux de GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2014, 2015), qui ont initié partiellement la stratégie décrite dans ce texte. Dans ce paragraphe, on prend $\nu = 1$, ce qui est la convention choisie dans les articles sus-mentionnés. Comme expliqué dans l'introduction, l'invariance d'échelle (8) est au cœur de ces articles. Tout d'abord, JIA et ŠVERÁK (2014) ont démontré que si $u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ est une donnée initiale invariante par le changement d'échelle (et donc homogène de degré -1), alors le système de Navier–Stokes (1) avec $f = 0$ admet une solution globale, invariante par le changement d'échelle (8) (et donc auto-similaire), qui est régulière dans $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^3$. Pour cela, JIA et ŠVERÁK (2014) considèrent la donnée initiale ηu_0 , avec $\eta \in [0, 1]$. Pour η petit, le résultat de KOCH et TATARU (2001) assure qu'il existe une unique solution; celle-ci est nécessairement invariante par changement d'échelle, et il s'agit donc d'une solution auto-similaire. On écrit cette dernière sous la forme $u(t, x) = t^{-1/2} \overline{\mathcal{U}}_\eta(x/\sqrt{t})$, et on montre que $\overline{\mathcal{U}}_\eta(x) - u_0(x) = O(|x|^{-3})$ quand $|x| \rightarrow \infty$. L'existence de solutions pour $\eta \in [0, 1]$ est ensuite obtenue grâce à la théorie du degré de Leray–Schauder.

La méthodologie proposée ensuite dans JIA et ŠVERÁK (2015) est la suivante : on considère la donnée initiale ηu_0 , avec $\eta > 0$, ainsi qu'une solution auto-similaire associée, notée $\overline{\mathcal{U}}_\eta$, qui vérifie le système

$$\begin{aligned} -\Delta_\xi \overline{\mathcal{U}}_\eta - \frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \nabla_\xi) \overline{\mathcal{U}}_\eta + \overline{\mathcal{U}}_\eta \cdot \nabla_\xi \overline{\mathcal{U}}_\eta + \nabla_\xi P_\eta &= 0, \\ \operatorname{div}_\xi \overline{\mathcal{U}}_\eta &= 0, \\ \overline{\mathcal{U}}_\eta(x) - \eta u_0(x) &= O(|x|^{-3}) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

On cherche ensuite une solution de (1) avec $f = 0$ de la forme

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \overline{\mathcal{U}}_\eta \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) + \frac{1}{\sqrt{t}} \mathcal{V} \left(\ln t, \frac{x}{\sqrt{t}} \right),$$

où \mathcal{V} est une solution de

$$\partial_\tau \mathcal{V} + \mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_\eta} \mathcal{V} + \mathcal{V} \cdot \nabla \mathcal{V} = 0.$$

On rappelle que l'opérateur $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_\eta}$ est défini dans (6). Comme expliqué dans l'introduction, on étudie le spectre de l'opérateur $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_\eta}$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)^3$, en cherchant à identifier des champs de vitesse u_0 et des valeurs de η pour lesquels $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_\eta}$ possède une valeur propre de partie réelle strictement négative. Pour $\eta = 0$, le champ de vitesse $\overline{\mathcal{U}}_0$ est identiquement nul, et d'après GALLAY et WAYNE (2002a,b), lorsque $\nu = 1$ ⁽²⁾,

$$\sigma(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_0}) = \sigma(\mathcal{H}_0) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq \frac{1}{4} \right\} \cup \left\{ 1 + \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}^* \right\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq \frac{1}{4} \right\},$$

où le demi-plan $\{\Re(\lambda) \geq 1/4\}$ correspond au spectre continu, tandis que les nombres $1 + n/2$ sont des valeurs propres de \mathcal{H}_0 . Pour $\nu = 1$ et $\overline{\mathcal{U}} \in L^\infty \cap H^2(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle et suffisamment décroissant en $+\infty$, d'après JIA et ŠVERÁK (2015),

$$\sigma(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}}) \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq \frac{1}{4} \right\} \cup S,$$

où l'ensemble $S \cap \{\Re(\lambda) < 1/4\}$ ne comporte que des valeurs propres isolées. Pour $\eta \ll 1$, $\sigma(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_\eta}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) > 0\}$: le profil $\overline{\mathcal{U}}_\eta$ est stable et on a unicité de la solution auto-similaire, ce que l'on savait déjà grâce aux travaux de KOCH et TATARU (2001). JIA et ŠVERÁK (2015) proposent deux scénarios potentiels de croisement de $\sigma(\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_\eta})$ (et plus spécifiquement, du spectre discret de $\mathcal{H}_{\overline{\mathcal{U}}_\eta}$) avec l'axe $i\mathbb{R}$ pour $\eta = \eta_0 > 0$, et démontrent un résultat de non-unicité pour chacun de ces

⁽²⁾La formule donnée par GALLAY et WAYNE (2002a,b) est en fait plus générale, et donne le spectre de l'opérateur \mathcal{H}_0 dans l'espace $\{\mathcal{V} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3, |\cdot|^m \mathcal{V} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3, \operatorname{div} \mathcal{V} = 0\}$ avec $m \in \mathbb{N}$. La partie continue du spectre de \mathcal{H}_0 est alors $\{\lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \geq \frac{1}{4} + \frac{m}{2}\}$.

scénarios. Cependant les solutions ainsi obtenues sont faiblement décroissantes à l'infini, et n'appartiennent donc pas à l'espace d'énergie. Dans un second temps, il faut donc perturber et tronquer les solutions ainsi obtenues ; sous des hypothèses de non-dégénérescence supplémentaires, on obtient la non-unicité des solutions de Leray.

L'étape suivante est donc de déterminer si l'un des deux scénarios d'apparition d'une valeur propre instable pour $\mathcal{H}_{\overline{u}_\eta}$ se produit effectivement. GUILLOD et ŠVERÁK (2017) ont mis en évidence numériquement l'un des deux scénarios, pour un champ de vitesse u_0 explicite⁽³⁾. Les auteurs concluent à la non-unicité des solutions de Leray, sous réserve que les observations numériques puissent être justifiées rigoureusement.

Néanmoins, obtenir une preuve rigoureuse des observations numériques de GUILLOD et ŠVERÁK (2017) est un défi mathématique conséquent. L'une des difficultés réside dans le fait que le profil \overline{u}_η n'est pas explicite, ce qui complique l'analyse spectrale de l'opérateur $\mathcal{H}_{\overline{u}_\eta}$. La stratégie de VISHIK (2018a,b) pour montrer la non-unicité des équations d'Euler 2d, puis de ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) pour celle du système de Navier–Stokes 3d repose sur la même idée générale : identifier des profils de vitesse instables dans les variables auto-similaires. Cependant, le fait d'autoriser un terme source dans l'équation (1) permet une latitude beaucoup plus grande dans le choix du profil de vitesse, puisque ce dernier n'est plus contraint d'être une solution particulière des équations. De fait, le profil identifié par VISHIK (2018a,b) est quasiment explicite, et sa forme précise joue un rôle important dans le résultat d'instabilité (voir la preuve de la proposition 3.1 dans la prochaine partie). Le profil \overline{u} , qui est obtenu en perturbant le profil de Vishik (et en le plongeant dans un cadre axisymétrique), est donc lui aussi explicite à l'ordre principal. Dans une moindre mesure, la présence du terme source dans le résultat de ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) facilite les raisonnements perturbatifs successifs dans la preuve du théorème 1.4 : chaque modification du profil de vitesse engendre un nouveau terme d'erreur, qui s'ajoutera au terme source $\overline{\mathcal{F}}$. Enfin, le fait de travailler avec un profil de vitesse invariant par le changement d'échelle dans GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2015) nécessite de tronquer les solutions obtenues (qui ne décroissent que comme $|x|^{-1}$ en $+\infty$, et n'appartiennent donc pas à l'espace d'énergie), ce qui est une source de complications techniques substantielles.

Terminons cette partie par une comparaison entre les résultats de ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022), GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2015), et la notion de nombre de Reynolds critique en physique. Par définition, le nombre de Reynolds Re est un nombre sans dimension, évaluant dans un écoulement donné le rapport entre le terme d'advection $u \cdot \nabla u$ dans (1) et la dissipation visqueuse $\nu \Delta u$. Si L^* (resp. U^*) est une longueur typique (resp. une vitesse typique) de l'écoulement, le nombre de

⁽³⁾On prend $u_0(r, \theta, z) = \exp(-4(z/r)^2)(r^2 + z^2)^{-1/2} e_\theta$ en coordonnées cylindriques, de sorte que u_0 est axisymétrique pure swirl et symétrique par rapport au plan $z = 0$.

Reynolds est défini par

$$\text{Re} := \frac{L^* U^*}{\nu}.$$

Ainsi, après adimensionnement des équations, le système de Navier–Stokes (1) devient

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{u} + \tilde{\nabla} \tilde{p} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u} &= \tilde{f}, \\ \widetilde{\text{div}} \tilde{u} &= 0, \end{aligned}$$

où le $\tilde{\cdot}$ indique que l'on travaille avec des variables adimensionnées (*i.e.* $u(t, x) = U^* \tilde{u}(t/T^*, x/L^*)$, etc.). Soit \tilde{u}_I un profil stationnaire instable pour l'équation d'Euler (au sens où l'opérateur $\mathcal{G}_{\tilde{u}_I} : \tilde{u} \mapsto (\tilde{u}_I \cdot \nabla) \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u}_I + \nabla \tilde{p}$ admet une valeur propre de partie réelle négative). Pour $\text{Re} \ll 1$, le spectre de l'opérateur $\mathcal{G}_{\tilde{u}_I} - \text{Re}^{-1} \Delta$ est inclus dans $\{\lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) > 0\}$ (la diffusion l'emporte sur l'advection). En revanche, pour $\text{Re} \gg 1$, on s'attend à ce que la diffusion puisse être traitée perturbativement, et donc à ce que $\mathcal{G}_{\tilde{u}_I} - \text{Re}^{-1} \Delta$ ait une valeur propre de partie réelle strictement négative. Le nombre de Reynolds critique Re_c est précisément défini comme étant la première valeur de Re pour laquelle le spectre de $\mathcal{G}_{\tilde{u}_I} - \text{Re}^{-1} \Delta$ (ou autrement dit, de $\mathcal{G}_{\text{Re} \tilde{u}_I} - \Delta$) intersecte l'axe $i\mathbb{R}$:

$$\text{Re}_c := \inf\{\text{Re} > 0, \sigma(\mathcal{G}_{\text{Re} \tilde{u}_I} - \Delta) \cap \{\lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) \leq 0\} \neq \emptyset\}.$$

Évidemment, la valeur du nombre de Reynolds critique dépend du profil \tilde{u}_I . On voit ici immédiatement la similarité avec l'approche de GUILLOD et ŠVERÁK (2017) et JIA et ŠVERÁK (2015) : le nombre de Reynolds critique est précisément le nombre η_0 . La preuve de ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) utilise également ce concept, dans une certaine mesure. On considère l'opérateur $\mathcal{H}_{\beta \overline{\mathcal{U}}}$, où $\overline{\mathcal{U}}$ est un profil instable pour Euler 3d. On observe que

$$\mathcal{H}_{\beta \overline{\mathcal{U}}} = \mathcal{G}_{\beta \overline{\mathcal{U}}} - \frac{1}{2} (1 + \xi \cdot \nabla_{\xi}) - \Delta_{\xi}.$$

Pour β suffisamment grand, on montre que cet opérateur a une valeur propre de partie réelle strictement négative, ce qui signifie (si on oublie momentanément le terme de transport) que $\beta > \text{Re}_c$. Autrement dit, les travaux d'ALBRITTON, BRUÉ et COLOMBO (2022) se situent dans le régime $\text{Re} \gg 1$.

3. Instabilité spectrale pour Euler 2d (d'après les travaux de Vishik)

Cette partie reprend les travaux de VISHIK (2018a,b), en s'appuyant sur la présentation faite dans ALBRITTON, BRUÉ, COLOMBO et al. (2021). Comme expliqué dans la

partie précédente, le point de départ est de montrer qu'il existe un flot bidimensionnel \bar{U} à divergence nulle tel que l'opérateur

$$G_{\bar{U}}^{\text{vel}} : U \in H \mapsto \bar{U} \cdot \nabla U + U \cdot \nabla \bar{U} + \nabla P, \quad H := \{U \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^2)^2, \operatorname{div} U = 0\},$$

admette une valeur propre de partie réelle strictement négative. Le champ de pression P est choisi de sorte que le champ de vecteur $\bar{U} \cdot \nabla U + U \cdot \nabla \bar{U} + \nabla P$ soit à divergence nulle. Pour cela, on commence par écrire le problème aux valeurs propres en formulation vorticité : si $U \in H$, on peut écrire $U = \text{BS}[\Omega]$, où $\Omega = \operatorname{curl} U = -\partial_2 U_1 + \partial_1 U_2$ est le tourbillon, et BS est le noyau de Biot et Savart défini dans (11).

S'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et $U \in H$ tels que $G_{\bar{U}}^{\text{vel}} U = \lambda U$, alors, en posant $\Omega = \operatorname{curl} U$, $\bar{\Omega} = \operatorname{curl} \bar{U}$, on obtient

$$\bar{U} \cdot \nabla \Omega + U \cdot \nabla \bar{\Omega} = \bar{U} \cdot \nabla \Omega + \text{BS}[\Omega] \cdot \nabla \bar{\Omega} = \lambda \Omega. \quad (15)$$

Réciproquement, si Ω vérifie l'équation aux valeurs propres (15), alors en posant $U = \text{BS}[\Omega]$, on observe que

$$\operatorname{curl} (\bar{U} \cdot \nabla U + U \cdot \nabla \bar{U} - \lambda U) = 0.$$

Il existe donc formellement un champ de pression P tel que $\bar{U} \cdot \nabla U + U \cdot \nabla \bar{U} + \nabla P = \lambda U$, et les valeurs propres de $G_{\bar{U}}^{\text{vor}}$ et $G_{\bar{U}}^{\text{vel}}$ sont donc les mêmes.

Ainsi, on est amené à conduire une analyse spectrale de l'opérateur

$$G_{\bar{U}}^{\text{vor}} : \Omega \in H^1(\mathbb{R}^2) \mapsto \bar{U} \cdot \nabla \Omega + \text{BS}[\Omega] \cdot \nabla \bar{\Omega},$$

pour des flots \bar{U} bien choisis. En particulier, dans toute la suite, on prendra $\bar{\Omega}$ de la forme

$$\bar{\Omega}(x) = g(|x|) = g(r), \quad (16)$$

avec $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}_+)$ et $x = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, de sorte que $\bar{U} = \zeta(|x|)x^\perp = r\zeta(r)e_\theta$, où

$$\zeta(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho g(\rho) d\rho.$$

Notons que cette analyse est voisine de celle des instabilités des flots de cisaillement du type $(\bar{U}_1(y), 0)$ pour le système d'Euler 2d posé dans l'espace entier, ou dans une bande du type $\mathbb{R} \times (0, 1)$ (voir par exemple GRENIER, 2000 ou DRAZIN et REID, 2004). Comme les coefficients de l'opérateur $G_{\bar{U}}^{\text{vor}}$ ne dépendent pas de la variable angulaire θ , il est naturel d'analyser l'action de l'opérateur $G_{\bar{U}}^{\text{vor}}$ sur un mode de Fourier de fréquence k . Plus précisément, on peut décomposer $L^2(\mathbb{R}^2)$ comme

$$L^2(\mathbb{R}^2) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E_k, \quad E_k := \{f(r)e^{ik\theta}, f \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr)\},$$

et on remarque que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $G_{\bar{U}}^{\text{vor}}(E_k \cap H^1(\mathbb{R}^2)) \subset E_k$.

Une première idée de Vishik est donc de restreindre l'analyse spectrale de l'opérateur $G_{\bar{U}}^{\text{vor}}$ à l'ensemble E_k , i.e. à un ensemble de fonctions invariantes par des rotations d'angle $2\pi/k$, avec $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Le résultat fondamental de cette partie est le suivant :

Proposition 3.1. *Il existe $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}_+)$, décroissant comme $r^{-\alpha}$ en $+\infty$ avec $0 < \alpha < 1$, et $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, tels que l'opérateur $G_{\bar{U}}^{\text{vor}}|_{E_k}$ admet une valeur propre de partie réelle strictement négative. De plus, cette valeur propre est isolée dans $\sigma(G_{\bar{U}}^{\text{vor}}|_{E_k})$.*

Par conséquent, pour ce choix de g , l'opérateur $G_{\bar{U}}^{\text{vel}}$ admet une valeur propre de partie réelle strictement négative.

En tronquant la fonction ζ et en utilisant un argument de perturbation, on peut ensuite se ramener au cas où g est à support compact :

Corollaire 3.2. *Il existe $R > 0$ et une fonction $g_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que $\text{Supp } g_R \subset [0, R]$, $\text{Supp } \zeta_R \subset [0, R]$, et telle que l'énoncé de la proposition 3.1 reste vrai en remplaçant g par g_R .*

Le reste de cette partie est donc dédié à l'analyse spectrale de l'opérateur $G_{\bar{U}}^{\text{vor}}$, restreint à l'espace E_k . Pour alléger les notations, on omet dans la suite l'indice \bar{U} . La preuve est organisée comme suit :

- ▷ On commence par décomposer $G^{\text{vor}}|_{E_k}$ en une partie antisymétrique (égale au terme de transport $\bar{U} \cdot \nabla \Omega$) et une partie compacte (égale au terme $\text{BS}[\Omega] \cdot \nabla \bar{\Omega}$). Cette structure sera cruciale dans cette partie et la suivante pour analyser les propriétés spectrales de l'opérateur linéarisé.
- ▷ On montre ensuite l'existence de modes instables, que l'on construit par perturbations des modes neutres. Cette démarche est assez classique dans l'analyse spectrale des équations fluides. La subtilité réside ici dans le fait que les modes instables trouvés de cette façon ne correspondent pas nécessairement à des modes de Fourier k entiers, mais à des paramètres $k \in \mathbb{R}$, qui ne sont donc pas des modes de Fourier.
- ▷ Il faut donc ensuite montrer qu'il existe un mode instable correspondant à un entier $k \geq 2$. Cette construction repose sur un bel argument de connexité (du type théorème des valeurs intermédiaires), et sur un choix judicieux de la fonction g .

Décomposition de l'opérateur G^{vor}

On commence par étudier la restriction de l'opérateur G^{vor} à l'espace E_k pour $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme 3.3. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, et soit $\Omega \in E_k$. On écrit $\Omega(x) = f(r)e^{ik\theta}$ avec $f \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$. On suppose que $\bar{\Omega}$ est donné par (16) avec $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}_+)$ tel que $|g(r)| \leq Cr^{-\alpha}$, $|g'(r)| \leq Cr^{-\alpha-1}$ pour $r \geq 1$.

Alors

$$G^{\text{vor}}\Omega(r, \theta) = ike^{ik\theta} \left[\zeta(r)f(r) - \frac{1}{r}\psi(r)g'(r) \right],$$

où

$$\psi(r) = -\frac{1}{2k}r^k \int_r^\infty f(s)s^{1-k} ds - \frac{1}{2k}r^{-k} \int_0^r f(s)s^{1+k} ds \in L^2(\mathbb{R}_+, dr/r^3). \quad (17)$$

De plus, l'opérateur

$$\mathbf{S}: \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}_+, r dr) & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \\ f & \mapsto & \zeta f \end{array}$$

est auto-adjoint et borné, tandis que pour tout $k \in [1, +\infty[$ (pas nécessairement entier), l'opérateur

$$\mathbf{K}_k: \begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}_+, r dr) & \rightarrow & L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \\ f & \mapsto & \left(r \mapsto -\frac{1}{r}\psi(r)g'(r) \right) \end{array}$$

est compact.

Éléments de preuve. Pour $\Omega = f(r)e^{ik\theta} \in E_k$, on pose $U = \text{BS}[\Omega] = \nabla^\perp \Delta^{-1}\Omega$. On introduit donc la (partie radiale de la) fonction courant $\psi = \psi(r)$, telle que

$$\Delta(\psi(r)e^{ik\theta}) = f(r)e^{ik\theta}.$$

On obtient alors

$$\psi'' + \frac{1}{r}\psi' - \frac{k^2}{r^2}\psi = f,$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{d^2}{dr^2} \left(\frac{\psi(r)}{r} \right) + \frac{3}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{\psi(r)}{r} \right) - \frac{k^2 - 1}{r^2} \frac{\psi(r)}{r} = \frac{f(r)}{r}.$$

On montre aisément que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr)$, cette équation admet une unique solution ψ telle que $\psi/r \in L^2(dr/r)$ et $d(\psi(r)/r)/dr \in L^2(r dr)$, qui est donnée par (17). Le reste de la preuve est laissé au lecteur ou à la lectrice, et découle des bornes sur g et ζ , ainsi que de la compacité de l'opérateur $f \in L^2(\mathbb{R}_+, r dr) \mapsto \psi/r \in L^2(a, b)$ pour tout $0 < a < b < +\infty$. \square

Remarque 3.4.

- ▷ On déduit du Lemme précédent que $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{S} + \mathbf{K}_k) = \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{S}) \subset \mathbb{R}$. Le Lemme 1.7 assure que si $\lambda \in \sigma(\mathbf{S} + \mathbf{K}_k)$ est tel que $\Re(\lambda) < 0$, alors λ est une valeur propre isolée de $\mathbf{S} + \mathbf{K}_k$.
- ▷ Supposons qu'il existe une valeur propre $\lambda_k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ de $\mathbf{S} + \mathbf{K}_k$, et soit $f_k \in L^2(rdr)$ une fonction propre non triviale associée. Soit $\psi_k \in L^2(dr/r^3)$ la fonction courant donnée par (17). On a alors

$$(\zeta(r) - \lambda_k)f_k(r) = \frac{\psi_k(r)}{r}g'(r).$$

La définition de ζ assure que $\lim_{r \rightarrow \infty} \zeta(r) = 0$. Par ailleurs, $\psi_k(r)/r \in L^\infty(\mathbb{R})$. On en déduit qu'il existe une constante C_k telle que pour $r \geq 1$, $|f_k(r)| \leq C_k r^{-\alpha-1}$. En insérant cette estimation dans (17), on obtient, pour $r \geq 1$, $|\psi_k(r)| \lesssim r^{1-\alpha} + r^{-k}$. Par conséquent, $|f_k(r)| \lesssim r^{-2\alpha-1} + r^{-k-\alpha-2}$. En itérant ce raisonnement, on arrive finalement à $|\psi_k(r)| \lesssim r^{-k}$ pour $r \geq 1$, et donc $\psi_k \in L^2(dr/r)$.

Chercher une valeur propre λ_k de partie réelle strictement négative de \mathbf{G}^{vor} , relative à une fonction propre dans E_k avec $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, revient donc à chercher un couple $(z, \psi) \in \mathbb{C} \times L^2(\mathbb{R}_+, dr/r)$ avec $\Im(z) > 0$ ($z = \lambda_k/ik$) et $\psi \neq 0$ tels que

$$-\psi''(r) - \frac{1}{r}\psi'(r) + \frac{k^2}{r^2}\psi(r) + \frac{g'(r)}{r(\zeta(r) - z)}\psi(r) = 0. \quad (18)$$

En faisant le changement de variables $r = e^s$, $s \in \mathbb{R}$, et $\psi(r) = \varphi(s)$, on obtient l'équation de Rayleigh

$$(\Xi(s) - z) \left(-\varphi''(s) + k^2\varphi(s) \right) + A(s)\varphi(s) = 0, \quad (19)$$

où

$$\begin{aligned} \Xi(s) &= \zeta(r) = \int_{-\infty}^s e^{-2(s-\tau)} g(e^\tau) d\tau, \\ A(s) &= \frac{d}{ds}g(e^s) = \Xi''(s) + 2\Xi'(s). \end{aligned}$$

L'idée est à présent de choisir convenablement la fonction A (ou, de façon équivalente, en posant $\Xi(+\infty) = g(+\infty) = 0$, la fonction Ξ ou la fonction g) de sorte qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, tel que l'équation (19) admette une solution non triviale (z, φ) avec $z \in \mathbb{C}$, $\Im(z) > 0$ et $\varphi \in L^2 \cap H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Remarque 3.5. Une différence cruciale avec les travaux antérieurs sur la stabilité des flots de cisaillement pour Euler 2d (voir GRENIER, 2000 ou la section 22 de l'ouvrage de référence de DRAZIN et REID, 2004) réside dans le fait qu'on cherche ici des solutions de l'équation de Rayleigh avec $k \in \mathbb{Z}$ (et non $k \in \mathbb{R}$).

Construction de modes instables de l'équation de Rayleigh (19) pour $k \in \mathbb{R}$

On commence par analyser l'équation (19) lorsque $z \in \mathbb{R}$:

Lemme 3.6 (Modes neutres). *Soit $N \in \mathbb{N}$ quelconque. Il existe une fonction $A \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A(1/2) = 0$ et $k_0 \geq N$, $k_{1/2} > 0$, $k_0, k_{1/2} \in \mathbb{R}$ tels que l'équation (19) admette une solution $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ non triviale pour $(k, z) \in \{(k_0, \Xi(0)), (k_{1/2}, \Xi(1/2))\}$.*

Réciproquement, soit $A \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ telle que $A(0) = A(1/2) = 0$, et $A(s) \neq 0$ pour $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1/2\}$. Supposons qu'il existe (k, z, φ) vérifiant (19) avec $k > 1$, $z \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in L^2 \cap H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$. Alors $z \in \{\Xi(0), \Xi(1/2)\}$.

On cherchera la fonction A dans la classe suivante :

Définition 3.7. La classe \mathcal{C} est l'ensemble des fonctions $A \in C_b^\infty(\mathbb{R})$ telles que

1. Il existe $c_0, M_0 > 0$ tels que $A(s) = -8c_0e^{2s}$ pour tout $s \leq -M_0$; de façon équivalente, Ξ admet une limite finie en $-\infty$, et $\Xi(s) = \Xi(-\infty) - c_0e^{2s}$ si $s \leq -M_0$;
2. Il existe $\alpha > 0$ tel que $A(s) = -\alpha e^{-\alpha s}$ pour $s \geq \ln 2$; de façon équivalente, il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\Xi(s) = c_1e^{-2s} + \frac{1}{2-\alpha}e^{-\alpha s}$ si $s \geq \ln 2$;
3. $A(0) = A(1/2) = 0$ et $A < 0$ sur $] -\infty, 0[\cup]1/2, +\infty[$, $A > 0$ sur $]0, 1/2[$, avec $A'(1/2) < 0 < A'(0)$;
4. $\Xi'(s) < 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Remarque 3.8. Les modes neutres correspondent aux points d'annulation de A , et donc de g' . Pour cette raison, ils sont fréquemment appelés « points critiques » dans la littérature sur les instabilités hydrodynamiques. Par ailleurs, $g(r) = r\zeta'(r) + 2\zeta(r)$. Ainsi, un changement de signe de A correspond à un changement de signe de $r \mapsto r\zeta''(r) + 3\zeta'(r)$. La condition 3. de la définition 3.7 peut donc être interprétée comme une version du critère de Rayleigh (changement de signe de la dérivée de la vorticité, ou de la dérivée seconde de la vitesse de cisaillement) dans ce contexte axisymétrique sans swirl (voir DRAZIN et REID, 2004).

Remarque 3.9. Ces hypothèses impliquent les propriétés suivantes sur la fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$:

1. $g(r) = g(0) + \frac{g''(0)}{2}r^2$ dans un voisinage de $r = 0$, avec $g''(0) = -8c_0 < 0$;
2. $g(r) = r^{-\alpha}$ pour $r \geq 2$;
3. $g'(1) = g'(e^{1/2}) = 0$, et $g' < 0$ sur $]0, 1[\cup]e^{1/2}, +\infty[$;
4. $\zeta' < 0$ sur $]0, +\infty[$.

Ébauche de la preuve du lemme 3.6. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $A(a) = 0$. En posant $z_a = \Xi(a)$, et en considérant l'opérateur auto-adjoint

$$\mathbf{L}_{A,a} := -\frac{d^2}{ds^2} + \frac{A(s)}{\Xi(s) - \Xi(a)} \quad (20)$$

on observe que l'équation de Rayleigh (19) devient

$$\mathbf{L}_{A,a}\varphi = -k^2\varphi.$$

Autrement dit, avec le choix $z_a = \Xi(a)$, (19) devient un problème aux valeurs propres pour l'opérateur $\mathbf{L}_{A,a}$. Si on choisit $A \in \mathcal{C}$ (voir la définition 3.7), alors on observe que les fonctions $s \mapsto A(s)/(\Xi(s) - \Xi(a))$ sont bornées et changent de signe en un unique point : $s = 1/2$ lorsque $a = 0$, et $s = 0$ lorsque $a = 1/2$. De plus, d'après les propriétés 3. et 4. de la définition 3.7,

$$\frac{A(s)}{\Xi(s) - \Xi(0)} < \frac{A(s)}{\Xi(s) - \Xi(1/2)} \quad \forall s \in \mathbb{R}. \quad (21)$$

Notons $-\lambda_{A,a} = \inf \sigma(\mathbf{L}_{A,a})$. Puisque

$$-\lambda_{A,a} = \inf_{\substack{\varphi \in H^1(\mathbb{R}), \\ \|\varphi\|_{L^2} = 1}} \int_{\mathbb{R}} \left(|\varphi'(s)|^2 + \frac{A(s)}{\Xi(s) - \Xi(a)} \varphi(s)^2 \right) ds \quad (22)$$

on déduit de (21) que $-\lambda_{A,0} < -\lambda_{A,1/2} < 0$. De plus, l'opérateur $\mathbf{L}_{A,a}$ étant auto-adjoint, $-\lambda_{A,a}$ est une valeur propre de $\mathbf{L}_{A,a}$. D'après le théorème de Sturm–Liouville la fonction propre associée $\varphi_{A,a}$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} . On prend donc $k_a = \sqrt{\lambda_{A,a}}$, de sorte que $0 < k_{1/2} < k_0$.

Par ailleurs, en prenant $a = 0$ dans (22) et $\varphi(s) = \mathbf{1}_{|s| \leq 1/2} \sqrt{2} \cos(\pi s)$, on en déduit la majoration

$$-\lambda_{A,0} \leq \pi^2 + 2 \int_{-1/2}^{1/2} \frac{A(s)}{\Xi(s) - \Xi(0)} \cos^2(\pi s) ds.$$

On choisit alors la fonction A de sorte que $A(s) = Bs$ et $\Xi'(s) \in [-2, -1/4]$ sur l'intervalle $[-\sqrt{B^{-1}}, 0]$, avec B une grande constante à choisir ultérieurement. On vérifie par un calcul que dans ce cas

$$-\lambda_{A,0} \leq \pi^2 - \int_{-\sqrt{B^{-1}}}^0 B \cos^2(\pi s) ds \leq \pi^2 - \frac{\sqrt{B}}{2},$$

ce qui conclut la première partie du lemme pourvu que $\pi^2 - \sqrt{B}/2 \leq -N^2$. La seconde partie est laissée au lecteur ou à la lectrice : on commence par montrer que $z \in \Xi(\mathbb{R})$, puis que $z = \Xi(a)$ avec $a \in A^{-1}(\{0\})$. \square

On cherche ensuite des modes instables (*i.e.* tels que $\Im(z) > 0$) de l'équation de Rayleigh (19) au voisinage des modes neutres. Plus précisément, en prenant $a \in \{0, 1/2\}$ et avec les notations précédentes, on cherche (φ, k, z) sous la forme

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{A,a} + \varepsilon\varphi_1 + \varepsilon^2\varphi_2 + \dots, \\ k &= \sqrt{\lambda_{A,a}} + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots, \\ z &= \Xi(a) + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \dots,\end{aligned}$$

avec $\varepsilon \ll 1$. L'équation vérifiée par φ_1 est alors, à l'ordre principal en ε ,

$$-z_1(-\varphi_{A,a}'' + \lambda_{A,a}\varphi_{A,a}) + 2(\Xi - \Xi(a))\sqrt{\lambda_{A,a}}k_1\varphi_{A,a} + (\Xi - \Xi(a))(\mathbf{L}_{A,a}\varphi_1 + \lambda_{A,a}\varphi_1) = 0.$$

L'idée est alors de diviser par $\Xi - \Xi(a)$ et d'utiliser l'équation vérifiée par $\varphi_{A,a}$. Cependant, comme $\Xi - \Xi(a)$ s'annule, cette division n'est pas possible sans précaution préalable. On divise donc les deux membres de l'équation par $\Xi - \Xi(a) \pm i\delta$ avec $\delta > 0$ et on fait tendre δ vers zéro. On note $\Xi - \Xi(a) \pm i0$ la limite ainsi obtenue, et on obtient

$$(\mathbf{L}_{A,a} + \lambda_{A,a})\varphi_1 = -2\sqrt{\lambda_{A,a}}k_1\varphi_{A,a} - z_1(\Xi - \Xi(a) \pm i0)^{-1}\frac{A}{\Xi - \Xi(a)}\varphi_{A,a}.$$

D'après l'alternative de Fredholm, l'équation ci-dessus admet une solution si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}} \left(-2\sqrt{\lambda_{A,a}}k_1\varphi_{A,a} - z_1(\Xi - \Xi(a) \pm i0)^{-1}\frac{A}{\Xi - \Xi(a)}\varphi_{A,a} \right) \varphi_{A,a} = 0.$$

En utilisant des arguments d'analyse complexe (formule de Plemelj), on obtient alors une formule pour z_1 , et en particulier

$$\operatorname{sgn}\Im(z_1) = \mp \operatorname{sgn}\frac{k_1 A'(a)}{\Xi'(a)^2}.$$

On en déduit qu'un choix convenable du signe de la régularisation complexe conduit à un mode instable. Une version plus rigoureuse de l'heuristique ci-dessus mène au résultat suivant :

Lemme 3.10 (Modes instables au voisinage des modes neutres). *Soit $A \in \mathcal{C}$, et soit $a \in \{0, 1/2\}$. On pose $\eta_0 = -1$, $\eta_{1/2} = 1$, et on suppose que $\lambda_{A,a} > 1$. Il existe des constantes $h_0 > 0$ et $c_{A,a} \in \mathbb{C}$ avec $\Im(c_{A,a}) > 0$, telles que pour tout $h \in]0, h_0[$, l'équation de Rayleigh (19) a une solution non triviale $\varphi \in H_{\text{loc}}^2 \cap L^2(\mathbb{R})$ avec $k = \sqrt{\lambda_{A,a}} + \eta_{ah}$ et $z = \Xi(a) + c_{A,a}h + o(h)$.*

Modes instables avec $k \in \mathbb{Z}$

À ce stade, le lemme 3.10 assure de l'existence de modes instables de l'équation de Rayleigh. Cependant, ces modes ne correspondent pas nécessairement à des valeurs entières de k , puisqu'ils se situent au voisinage de $\sqrt{\lambda_{A,a}}$ (qui n'est pas entier *a priori*). Ils ne coïncident donc pas avec des modes propres de $\mathbf{G}^{\text{vor}}|_{E_k}$. La construction d'un mode instable avec $k \in \mathbb{Z}$ repose sur les deux arguments suivants :

- ▷ Tout d'abord, la courbe $z = Z(k)$ correspondant aux modes instables, dont les contours aux voisinages de $\sqrt{\lambda_{A,0}}$ et de $\sqrt{\lambda_{A,1/2}}$ sont esquissés au lemme 3.10, peut être prolongée à tout l'intervalle $] \max(\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, 1), \sqrt{\lambda_{A,0}}[$. Plus précisément, on a le résultat de connexité suivant :

Lemme 3.11. *Soit $A \in \mathcal{E}$. On suppose que $\lambda_{A,0} > 1$. Alors pour tout $k \in] \max(\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, 1), \sqrt{\lambda_{A,0}}[$, il existe $z \in \mathbb{C}$ avec $\Im(z) > 0$ tel que l'équation (19) admette une solution non triviale.*

Éléments de preuve. On commence par une observation préliminaire, qui découle de la seconde partie du Lemme 3.6 et des propriétés des solutions ⁽⁴⁾ de l'équation (19), et dont la preuve est laissée au lecteur ou à la lectrice. Pour tout compact C de $] \max(\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, 1), \sqrt{\lambda_{A,0}}[$, il existe $R_C, \delta_C > 0$ tel que pour tout triplet $(k, z_k, \varphi_k) \in C \times \mathbb{C} \times L^2 \cap H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R})$ solution de l'équation de Rayleigh (19) avec φ_k non identiquement nulle, on a $|z_k| \leq R_C$ et $|\Im(z_k)| > \delta_C$.

Soit G l'ensemble des $k \in] \max(\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, 1), \sqrt{\lambda_{A,0}}[$ tels qu'il existe une solution non triviale de (19) avec $\Im(z) > 0$. D'après le Lemme 3.10, G contient un voisinage à gauche de $\sqrt{\lambda_{A,0}}$. Montrons que G est un ouvert-fermé de $] \max(\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, 1), \sqrt{\lambda_{A,0}}[$. Pour montrer le caractère fermé de G , on prend une suite $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G , convergeant vers $k_\infty \in] \max(\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, 1), \sqrt{\lambda_{A,0}}[$. On pose $C = \{k_j, j \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}\}$. L'ensemble C est compact; en utilisant l'observation préliminaire et en passant à la limite dans l'équation de Rayleigh (19) écrite pour chaque k_j , on en déduit que $k_\infty \in G$.

On montre ensuite que G^c est fermé. Pour ce faire, on considère une suite $(m_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G^c qui converge vers $m_\infty \in] \max(\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, 1), \sqrt{\lambda_{A,0}}[$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, par définition de G , les valeurs propres de $\mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_j}$ sont réelles, et on a donc $\sigma(\mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_j}) \subset \mathbb{R} \cup \sigma_{\text{ess}}(\mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_j}) \subset \mathbb{R}$. On pose à présent $C = \{m_\infty\}$ (qui est évidemment compact), et on note R_C, δ_C les constantes associées par l'observation préliminaire. Il suffit donc de montrer que $\sigma(\mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_\infty}) \cap \{|z| \leq R_C, \Im(z) > \delta_C\} = \emptyset$. Pour cela, on note Γ le contour dans le plan complexe de la région $\{|z| \leq R_C, \Im(z) > \delta_C\}$, et on considère les

⁽⁴⁾En particulier, les solutions de (19) se comportent comme $C_\pm \exp(\mp |k|s)$ avec $C_\pm \in \mathbb{C}$ quand $s \rightarrow \pm\infty$.

projecteurs de Riesz

$$\mathbf{P}_m := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(z, \mathbf{S} + \mathbf{K}_m) dz.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}_{m_j} = 0$ par hypothèse. De plus,

$$\begin{aligned} R(z, \mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_j}) &= (I + R(z, \mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_\infty})(\mathbf{K}_{m_\infty} - \mathbf{K}_{m_j}))^{-1} R(z, \mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_\infty}) \\ &\rightarrow R(z, \mathbf{S} + \mathbf{K}_{m_\infty}), \end{aligned}$$

uniformément pour $z \in \Gamma$. On en déduit que $\mathbf{P}_{m_\infty} = 0$, et donc $m_\infty \notin G$. \square

▷ Il reste donc à construire une fonction particulière $A \in \mathcal{C}$ telle que l'intervalle $]\sqrt{\lambda_{A,1/2}}, \sqrt{\lambda_{A,0}}[$ contienne un entier supérieur ou égal à 2. Pour cela, on considère une première fonction $A_0 \in \mathcal{C}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k > \max(\sqrt{\lambda_{A_0,0}}, 1)$. D'après le lemme 3.6, il existe une seconde fonction $A_1 \in \mathcal{C}$ telle que $\inf(\sigma(\mathbf{L}_{A_1,0})) = -\lambda_{A_1,0} < -k^2$. On pose $A_\eta = (1 - \eta)A_0 + \eta A_1$ pour $\eta \in [0, 1]$. Il existe η_0 tel que $\lambda_{A_{\eta_0},0} = k^2$, et on peut choisir η_0 maximal parmi les η vérifiant cette propriété. Remarquons que pour cet η_0 , $\lambda_{A_{\eta_0},1/2} < k^2$. Alors pour h suffisamment petit, $\lambda_{A_{\eta_0+h},0} > k^2$ et $\lambda_{A_{\eta_0+h},1/2} < k^2$. La fonction $A = A_{\eta_0+h}$ convient donc.

Ceci conclut la preuve de la proposition 3.1. Pour la suite, il sera utile d'avoir un résultat d'instabilité spectrale pour des tourbillons à support compact. Nous concluons donc cette partie par quelques éléments de preuve pour le corollaire 3.2.

Troncature du tourbillon instable

Soit \bar{U} le champ de vecteurs bidimensionnel obtenu dans la proposition 3.1, et soit λ la valeur propre de partie réelle strictement négative associée. Soit $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi \equiv 1$ dans un voisinage de zéro. Pour tout $R > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$, on pose $\phi_R := \phi(\cdot/R)$, et

$$\bar{U}^R(x) = \zeta(|x|)\phi_R(|x|)x^\perp, \quad \bar{\Omega}^R := \text{curl } \bar{U}^R.$$

On note également $\mathbf{L}_R = \mathbf{G}_{\bar{U}^R}^{\text{vor}}$ l'opérateur linéarisé autour de \bar{U}^R .

On invoque alors le lemme 1.8 pour montrer que pour R suffisamment grand, en posant $r = -\Re(\lambda)/2$, on a $\sigma(\mathbf{L}_R) \cap B(\lambda, r) \neq \emptyset$. Par ailleurs, comme \bar{U}^R est à divergence nulle,

$$\sigma_{\text{ess}}(\bar{U}^R \cdot \nabla) \subset i\mathbb{R}.$$

Comme l'opérateur $U \mapsto U \cdot \nabla \bar{U}^R$ est une perturbation compacte de $\bar{U}^R \cdot \nabla$, on en déduit que $\sigma_{\text{ess}}(\mathbf{L}_R) \subset i\mathbb{R}$. Par conséquent, pour R suffisamment grand, $B(\lambda, r)$ contient

une valeur propre de L_R . Le lemme 1.7 entraîne de surcroît que cette valeur propre est isolée. On obtient alors le corollaire 3.2 en prenant $g_R : r \mapsto g(r)\phi_R(r) + r\zeta(r)\phi'_R(r)$.

Remarque 3.12. Dans les travaux de ALBRITTON, BRUÉ, COLOMBO et al. (2021) et VISHIK (2018a,b), cette instabilité linéaire est exploitée pour démontrer la non-unicité des solutions de l'équation d'Euler 2d avec un terme source $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^2))$ avec $p > 2$. La démarche est très similaire à celle qui a été présentée dans l'introduction : on effectue un changement de variables autosimilaire, de sorte que l'instant initial $t = 0$ est envoyé en $\tau = -\infty$. On construit ensuite deux branches de solutions en tirant parti du mode instable. Une différence (importante!) entre les preuves de non-unicité pour Navier–Stokes 3d ou pour Euler 2d réside dans le choix des variables auto-similaires. Dans le cas de l'équation d'Euler 2d, on prend

$$v(t, x) = \frac{1}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}} V \left(\ln t, \frac{x}{t^{\frac{1}{\alpha}}} \right),$$

avec $\alpha \in (0, 1)$. On peut légitimement s'interroger sur l'ajout d'un terme de viscosité dans cette stratégie. Comme rappelé ci-dessus, les solutions de Leray du système de Navier–Stokes 2d sont uniques, et on s'attend donc à ce que la méthode échoue. De fait, on peut vérifier qu'avec le choix de variables auto-similaires ci-dessus, le terme de diffusion est dominant quand $t \rightarrow 0^+$, et ne peut donc être traité perturbativement. Si on utilise le même choix de variables auto-similaires que (4) lorsque $d = 2$, le terme source n'est pas dans $L^2(H^{-1}) + L^1(L^2)$, et les solutions u_1 et u_2 ne sont pas dans l'espace d'énergie. ALBRITTON et COLOMBO (2023) ont établi que le théorème de non-unicité pour le système d'Euler 2d s'étend au système de Navier–Stokes avec laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\beta/2}$, pourvu que $\beta < 2$. Le cas $\beta = 2$ est donc critique.

Pour conclure, mentionnons une dernière piste dans cette direction. Bien que ce résultat ne figure pas dans la littérature, il semble raisonnable de penser que les arguments perturbatifs que l'on présentera dans la prochaine partie fonctionnent en dimension deux, et que par conséquent l'opérateur $G_{\beta U^R} - \Delta$ admet une valeur propre de partie réelle strictement négative pour β suffisamment grand. Si on utilise le choix de variables auto-similaires (4) pour $d = 2$, les solutions ainsi obtenues n'appartiennent pas à l'espace d'énergie, mais en revanche on peut vérifier que $u_i \in L^2([0, T], \dot{H}^s(\mathbb{R}^2)^2)$ pour tout $s < 1$, et que u_1, u_2 appartiennent également à l'espace X_T de Koch–Tataru défini par (10). Sous réserve que la preuve présentée ici s'exporte en deux dimensions, on en déduit donc que les solutions du système de Navier–Stokes avec terme source ne sont pas uniques dans $L^2([0, T], \dot{H}^s(\mathbb{R}^2)^2)$ ni dans X_T .

4. Instabilité linéaire et non linéaire pour Navier–Stokes 3d

Cette partie est dédiée à la preuve du théorème 1.4. Le principe est d’identifier un profil de vitesse $\widetilde{\mathcal{U}}$ vérifiant la propriété (P). Pour cela, on utilise plusieurs arguments perturbatifs, d’abord pour passer de deux à trois dimensions, puis pour passer d’Euler 3d à Navier–Stokes 3d.

4.1. D’Euler 2d à Euler 3d

La première idée est de transformer, à l’aide d’un relèvement ad hoc, l’instabilité obtenue pour le système d’Euler bidimensionnel en une instabilité pour le système d’Euler tridimensionnel. Pour cela, on crée un anneau instable tridimensionnel à partir du tourbillon instable 2d obtenu dans le corollaire 3.2. Plus précisément, si on note (r, θ, z) les coordonnées cylindriques en dimension trois, et \overline{U}^R le champ de vitesse donné par le corollaire 3.2, on pose, pour $\ell \gg 1$ à fixer ultérieurement,

$$\widetilde{\mathcal{U}}_\ell(r, \theta, z) := \overline{U}_1^R(r - \ell, z)e_r + \overline{U}_2^R(r - \ell, z)e_z.$$

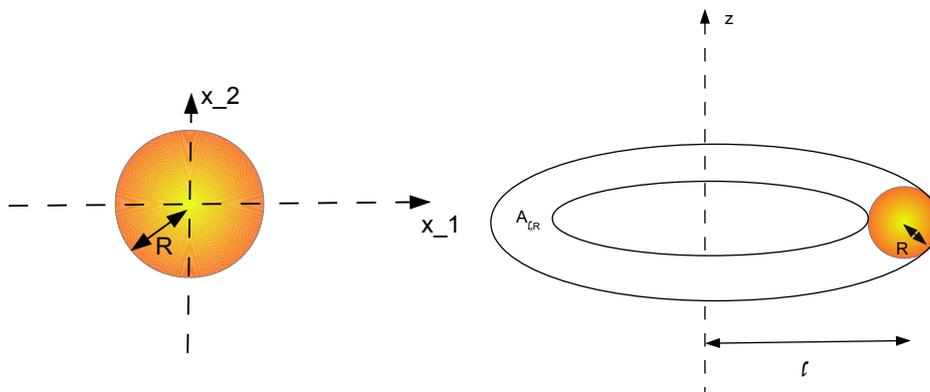


FIGURE 1 – À gauche, le tourbillon bidimensionnel de Vishik. À droite, son relèvement tridimensionnel et axisymétrique dans un anneau $A_{\ell,R}$.

Par construction, le champ $\widetilde{\mathcal{U}}_\ell$ est axisymétrique sans swirl et $\text{Supp } \widetilde{\mathcal{U}}_\ell \subset \{|r - \ell|^2 + z^2 \leq R^2\} =: A_{\ell,R}$. En particulier, si on choisit $\ell \geq 2R$, $\widetilde{\mathcal{U}}_\ell$ est supporté dans l’ensemble $r \in [\ell - R, \ell + R] \subset [\ell/2, 3\ell/2]$.

Notons qu’un tel $\widetilde{\mathcal{U}}_\ell$ n’est pas à divergence nulle : en effet,

$$\text{div } \widetilde{\mathcal{U}}_\ell = \frac{1}{r} \overline{U}_1^R(r - \ell, z),$$

et donc $|\operatorname{div} \widetilde{\mathcal{U}}_\ell| \lesssim \ell^{-1} \mathbf{1}_{A_{\ell,R}}$. On commence donc par relever la divergence et construire un correcteur $\mathcal{V}_\ell \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)^2$ tel que $\operatorname{Supp} \mathcal{V}_\ell \subset A_{\ell,R}$, $\|\mathcal{V}_\ell\|_{C^k} \lesssim \ell^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\operatorname{div}(\widetilde{\mathcal{U}}_\ell + \mathcal{V}_\ell) = 0$. On pose $\overline{\mathcal{U}}_\ell := \widetilde{\mathcal{U}}_\ell + \mathcal{V}_\ell$ et $\Omega_\ell := \partial_z \overline{\mathcal{U}}_{\ell,r} - \partial_r \overline{\mathcal{U}}_{\ell,z}$.

On considère ensuite l'opérateur d'Euler tridimensionnel linéarisé autour du profil $\overline{\mathcal{U}}_\ell$, et restreint aux fonctions axisymétriques sans swirl, c'est-à-dire de la forme $\mathcal{V} = \mathcal{V}_r(r,z)e_r + \mathcal{V}_z(r,z)e_z$. Pour de telles fonctions, le tourbillon $\Omega = \nabla \wedge \mathcal{V}$ est axisymétrique *pure swirl*, et s'écrit $\Omega = (\partial_z \mathcal{V}_r - \partial_r \mathcal{V}_z)e_\theta$. On peut donc écrire l'opérateur linéarisé autour de $\overline{\mathcal{U}}_\ell$ en formulation vorticité (voir (14)), que l'on note $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}_\ell}^{\operatorname{vor}}$. On rappelle que

$$\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}_\ell}^{\operatorname{vor}} : \Omega \mapsto \overline{\mathcal{U}}_\ell \cdot \nabla \Omega + \operatorname{BS}_{\operatorname{ass}}[\Omega] \cdot \nabla \Omega_\ell - \frac{1}{r} \overline{\mathcal{U}}_{\ell,r} \Omega - \frac{1}{r} \Omega_\ell \operatorname{BS}_{\operatorname{ass}}[\Omega] \cdot e_r,$$

où l'opérateur $\operatorname{BS}_{\operatorname{ass}}$ est défini dans (13). On observe immédiatement que si Ω est une fonction propre de $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}_\ell}^{\operatorname{vor}}$, alors $\operatorname{Supp} \Omega \subset A_{\ell,r}$. Heuristiquement, l'opérateur $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}_\ell}^{\operatorname{vor}}$ est proche de $\mathbf{G}_{\tau_\ell \overline{\mathbf{U}}^R}^{\operatorname{vor}}$ pour $\ell \gg 1$, où τ_ℓ est l'opérateur de translation $\tau_\ell f(r,z) = f(r-\ell, z)$. Ainsi, afin de se ramener à un opérateur proche de $\mathbf{G}_{\overline{\mathbf{U}}^R}^{\operatorname{vor}}$, on compose avec la translation $\tau_{-\ell}$. On définit donc l'opérateur \mathcal{L}_ℓ par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\ell \Omega &:= \tau_{-\ell} \overline{\mathcal{U}}_\ell \cdot \nabla \Omega + \operatorname{BS}_\ell[\Omega] \cdot \nabla \tau_{-\ell} \Omega_\ell \\ &\quad - \frac{1}{r+\ell} \tau_{-\ell} \overline{\mathcal{U}}_{\ell,r} \Omega - \frac{1}{r+\ell} \tau_{-\ell} \Omega_\ell \operatorname{BS}_\ell[\Omega] \cdot e_r, \end{aligned}$$

avec $\operatorname{BS}_\ell[\Omega] = \tau_{-\ell} \operatorname{BS}_{\operatorname{ass}}[\tau_\ell \Omega]$ et $D(\mathcal{L}_\ell) = \{\Omega \in L^2((r+\ell)_+ dr dz), \nabla \Omega \in L^2((r+\ell)_+ dr dz)\}$. Pour exploiter la ressemblance entre \mathcal{L}_ℓ et $\mathbf{G}_{\overline{\mathbf{U}}^R}^{\operatorname{vor}}$, on analyse le spectre de \mathcal{L}_ℓ non dans $L^2((r+\ell)_+ dr dz)$, mais dans $L^2(\gamma dr dz)$, où $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ est un poids régulier tel que $\gamma \equiv 1$ sur B_R , et $\gamma(r) = (1+r^2)^N$ pour $|r| \geq 2$, avec N assez grand.

L'opérateur \mathcal{L}_ℓ peut être décomposé en une somme de la forme

$$\mathcal{L}_\ell = \mathcal{M}_\ell + \mathcal{K}_\ell + \mathcal{S}_\ell,$$

où les opérateurs $\mathcal{M}_\ell, \mathcal{K}_\ell, \mathcal{S}_\ell$ vérifient les propriétés suivantes :

- ▷ \mathcal{M}_ℓ est antisymétrique pour le produit scalaire dans $L^2(\gamma)$;
- ▷ \mathcal{K}_ℓ est compact;
- ▷ $R(\lambda, \mathcal{M}_\ell + \mathcal{K}_\ell)\Omega \rightarrow R(\lambda, \mathbf{G}_{\overline{\mathbf{U}}^R}^{\operatorname{vor}})\Omega$ localement uniformément sur $\rho(\mathbf{G}_{\overline{\mathbf{U}}^R}^{\operatorname{vor}})$, pour tout $\Omega \in L^2(\gamma)$;
- ▷ $\mathcal{S}_\ell \rightarrow 0$ quand $\ell \rightarrow \infty$.

Plus précisément, on adopte les définitions suivantes :

▷ Terme principal (*main term*) \mathcal{M}_ℓ : on pose

$$\mathcal{M}_\ell \Omega = \bar{U}_1^R \partial_r \Omega + \bar{U}_2^R \partial_z \Omega + \tau_{-\ell} \mathcal{V}_\ell \cdot \nabla \Omega + \frac{1}{2} (\partial_r \tau_{-\ell} \mathcal{V}_{\ell,r} + \partial_z \tau_{-\ell} \mathcal{V}_{\ell,z}) \Omega$$

Le troisième terme assure l'antisymétrie de \mathcal{M}_ℓ sur $L^2(\gamma \mathbf{1}_{r+\ell>0})$, et est petit lorsque $\ell \gg 1$. On rappelle que $\text{Supp } \bar{U}^R \subset B_R$ et $\text{Supp } \tau_{-\ell} \mathcal{V}_\ell \subset B_R$. On peut montrer, avec des arguments similaires à ceux du lemme 4.2 plus bas, que pour tout $\Omega \in L^2(\gamma)$, pour tout compact C de $\{\Re(\lambda) < 0\}$, $R(\lambda, \mathcal{M}_\ell)(\mathbf{1}_{r+\ell>0} \Omega) \rightarrow R(\lambda, \bar{U}^R \cdot \nabla) \Omega$ uniformément pour $\lambda \in C$.

▷ Terme compact \mathcal{H}_ℓ : on pose

$$\mathcal{H}_\ell \Omega = \text{BS}_\ell[\Omega] \cdot \nabla \tau_{-\ell} \Omega_\ell - \frac{1}{r+\ell} \tau_{-\ell} \Omega_\ell \text{BS}_\ell[\Omega] \cdot e_r.$$

Comme $\text{Supp } \Omega_\ell \subset A_{\ell,R}$, $\text{Supp } \tau_{-\ell} \Omega_\ell \subset B_R$. La compacité de l'opérateur \mathcal{H}_ℓ découle de cette observation ainsi que de l'effet régularisant de l'opérateur de Biot et Savart. On montre de surcroît que $\mathcal{H}_\ell \mathbf{1}_{r+\ell>0} \rightarrow \text{BS}[\cdot] \cdot \nabla \bar{U}^R$ pour la norme d'opérateur dans $L^2(\gamma)$.

▷ Terme perturbatif (*small stretching term*) \mathcal{S}_ℓ : on pose

$$\mathcal{S}_\ell \Omega = -\frac{1}{r+\ell} \tau_{-\ell} \bar{\mathcal{W}}_{\ell,r} \Omega - \frac{1}{2} (\partial_r \tau_{-\ell} \mathcal{V}_{\ell,r} + \partial_z \tau_{-\ell} \mathcal{V}_{\ell,z}) \Omega.$$

Ici encore, $\text{Supp } \tau_{-\ell} \bar{\mathcal{W}}_{\ell,r} \subset B_R$, $\text{Supp } \tau_{-\ell} \mathcal{V}_\ell \subset B_R$. On en déduit que

$$\|\mathcal{S}_\ell\|_{L^2(\gamma \mathbf{1}_{r>-\ell}) \rightarrow L^2(\gamma)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \ell \rightarrow \infty.$$

Ces trois propriétés, combinées avec les lemmes 1.7 et 1.8, entraînent que \mathcal{L}_ℓ admet une valeur propre isolée de partie réelle strictement négative :

Proposition 4.1. *Soit $R > 0$ tel que l'opérateur $\mathbf{G}_{\bar{U}^R}^{\text{vor}}$ admette une valeur propre λ^R de partie réelle strictement négative.*

Pour tout $\varepsilon \in]0, -\Re(\lambda^R)[$, il existe $\ell_0 > 2R$ tel que pour tout $\ell > \ell_0$, l'opérateur \mathcal{L}_ℓ admette une valeur propre λ_ℓ telle que $|\lambda_\ell - \lambda^R| < \varepsilon$, de sorte que $\Re(\lambda_\ell) < 0$.

Par conséquent, λ_ℓ est également valeur propre de l'opérateur $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{W}}_\ell}^{\text{vor}}$, et la fonction propre associée est supportée dans $A_{\ell,R}$. De plus λ_ℓ est un élément isolé de $\sigma(\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{W}}_\ell}^{\text{vor}})$.

4.2. D'Euler 3d à Navier–Stokes 3d

Soient $R, \ell > 0$ tels que l'opérateur $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{W}}_\ell}^{\text{vor}}$ admette une valeur propre λ_ℓ de partie réelle strictement négative, donnée par la proposition 4.1. Bien évidemment, pour

tout $\beta > 0$, $\beta\lambda_\ell$ est valeur propre de l'opérateur $\mathcal{G}_{\beta\overline{\mathcal{U}}_\ell}^{\text{vor}}$. Dans la suite, on prend R et ℓ fixés, et on omet donc la dépendance en ℓ dans $\overline{\mathcal{U}}_\ell$.

On considère à présent l'opérateur de Navier–Stokes tridimensionnel dans les variables auto-similaires, linéarisé autour du profil $\beta\overline{\mathcal{U}}$ avec $\beta > 0$, restreint aux fonctions axisymétriques sans swirl, et écrit en formulation vorticité. Pour simplifier, on prend $\nu = 1$ dans toute cette partie. Cet opérateur s'écrit

$$\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}} : \Omega \mapsto - \left(1 + \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi \right) \Omega - \Delta \Omega + \beta \mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}} \Omega,$$

et son domaine est $D(\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}}) = \{\Omega \in H^2(\mathbb{R}^3), \Omega = \Omega(r, z), \xi \cdot \nabla_\xi \Omega \in L^2(\mathbb{R}^3)\}$.

On veut raisonner perturbativement. On écrit donc

$$\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}} = \beta \left(\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}} - \frac{1}{\beta} - \frac{\xi}{2\beta} \cdot \nabla_\xi - \frac{1}{\beta} \Delta \right).$$

L'idée est ensuite d'utiliser le lemme 1.8 et la proposition 4.1 pour montrer que $\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}}$ possède une valeur propre de partie réelle strictement négative pour β suffisamment grand. Pour cela, on utilise de nouveau une décomposition du type

$$\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}} = \mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{K},$$

où $\mathcal{M} = \overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla$ est antisymétrique, $\mathcal{K} : \Omega \mapsto \text{BS}_{\text{ass}}[\Omega] \cdot (\nabla \Omega_\ell - r^{-1} \Omega_\ell e_r)$ est compact et $\mathcal{S} : \Omega \mapsto -r^{-1} \overline{\mathcal{U}} \Omega$ est petit pour $\ell \gg 1$. Il convient de souligner que les opérateurs $\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{K}$ sont différents des opérateurs $\mathcal{M}_\ell, \mathcal{S}_\ell, \mathcal{K}_\ell$ du paragraphe précédent, en raison des compositions avec les translations $\tau_{\pm\ell}$ qui interviennent dans la définition de l'opérateur \mathcal{L}_ℓ . Posons

$$a := \inf_{\lambda \in \sigma(\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}})} \Re(\lambda) < 0.$$

On peut montrer que $\mu := \|\mathcal{S}\| \lesssim \ell^{-2/3}$, où $\|\mathcal{S}\|$ est la norme d'opérateur de \mathcal{S} , de sorte que l'on peut choisir ℓ tel que $\|\mathcal{S}\| \leq |a|/2$. On isole la partie antisymétrique du terme de transport en posant (rappelons que l'on travaille ici en dimension trois)

$$\mathcal{T} : \Omega \mapsto -\frac{3}{4} \Omega - \frac{\xi}{2} \cdot \nabla_\xi \Omega.$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme 4.2. *Pour tout $\beta > 0$, et pour tout λ tel que $\Re(\lambda) < -\mu$,*

$$\|R(\lambda, \beta^{-1} \mathcal{T} - \beta^{-1} \Delta + \mathcal{M} + \mathcal{S})\| \leq |\Re(\lambda) + \mu|^{-1}, \quad (23)$$

et pour tout $\Omega \in L^2(rdrdz)$, localement uniformément en λ ,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} R(\lambda, \beta^{-1} \mathcal{T} - \beta^{-1} \Delta + \mathcal{M} + \mathcal{S}) \Omega = R(\lambda, \mathcal{M} + \mathcal{S}) \Omega \quad \text{dans } L^2(\mathbb{R}^3).$$

Démonstration. Soit $\Omega_0 \in L^2(rdrdz)$. On considère l'équation d'advection-diffusion

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega^\beta + \left(\beta^{-1} \mathcal{T} - \beta^{-1} \Delta + \mathcal{M} + \mathcal{S} \right) \Omega^\beta &= 0, \\ \Omega^\beta|_{t=0} &= \Omega_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Comme les opérateurs \mathcal{T} et \mathcal{M} sont antisymétriques, on a l'estimation d'énergie

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Omega^\beta\|_{L^2}^2 + \beta^{-1} \|\nabla \Omega^\beta\|_{L^2}^2 \leq \|\mathcal{S}\| \|\Omega^\beta\|_{L^2} \leq \mu \|\Omega^\beta\|_{L^2},$$

et donc $\|\Omega^\beta(s)\|_{L^2} \leq e^{\mu t} \|\Omega_0\|_{L^2}$. En écrivant $R(\lambda, -\beta^{-1} \mathcal{T} + \beta^{-1} \Delta - \mathcal{M} - \mathcal{S})$ comme une transformée de Laplace, on a

$$R(\lambda, -\beta^{-1} \mathcal{T} + \beta^{-1} \Delta - \mathcal{M} - \mathcal{S}) \Omega_0 = \int_0^\infty \exp(-s\lambda) \Omega^\beta(s) ds \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) > \mu,$$

et l'inégalité (23) s'ensuit.

Par ailleurs, Ω^β est borné uniformément en β dans $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$. On peut donc en extraire une sous-suite qui converge faiblement lorsque $\beta \rightarrow 0$. La limite Ω vérifie l'équation de transport

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega + (\mathcal{M} + \mathcal{S}) \Omega &= 0, \\ \Omega|_{t=0} &= \Omega_0, \end{aligned} \quad (25)$$

et est donc unique. On montre aisément que si $\Omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \rho(\xi) d\xi)$, où ρ est un poids régulier à croissance algébrique, alors $\Omega \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\mathbb{R}^3, \rho(\xi) d\xi))$. On en déduit que Ω est une solution de (24) avec un reste d'ordre β^{-1} , puis que, pour tout $\tau > 0$,

$$\|\Omega^\beta - \Omega\|_{L^\infty([0, \tau], L^2(\mathbb{R}^3))} \leq C(\tau, \Omega_0) \beta^{-1} \quad \forall \Omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \rho(\xi) d\xi).$$

On écrit alors, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re(\lambda) > \mu$ et $\Omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \rho(\xi) d\xi)$,

$$\begin{aligned} &\left[R(\lambda, -\beta^{-1} \mathcal{T} + \beta^{-1} \Delta - \mathcal{M} - \mathcal{S}) - R(\lambda, -\mathcal{M} - \mathcal{S}) \right] \Omega_0 \\ &= \int_0^\infty \exp(-s\lambda) \left(\Omega^\beta(s) - \Omega(s) \right) ds. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $\tau > 0$, pour tout $\Omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \rho(\xi) d\xi)$, pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re(\lambda) > \mu$,

$$\begin{aligned} &\left\| \left[R(\lambda, -\beta^{-1} \mathcal{T} + \beta^{-1} \Delta - \mathcal{M} - \mathcal{S}) - R(\lambda, -\mathcal{M} - \mathcal{S}) \right] \Omega_0 \right\|_{L^2} \\ &\leq C(\tau, \Omega_0) \frac{1}{\beta\mu} + 2 \int_\tau^\infty \exp(s(\mu - \Re(\lambda))) \|\Omega_0\|_{L^2} ds \\ &\leq C(\tau, \Omega_0) \frac{1}{\beta\mu} + 2 \frac{\exp(\tau(\mu - \Re(\lambda)))}{\Re(\lambda) - \mu} \|\Omega_0\|_{L^2}. \end{aligned}$$

En choisissant d'abord τ grand pour que le second terme soit petit, puis β grand pour que le premier terme le soit également, on obtient la convergence annoncée pour $\Omega_0 \in H^1(\mathbb{R}^3, \rho(\xi)d\xi)$, puis pour $\Omega \in L^2(r dr dz)$ par densité. \square

On en déduit immédiatement que

$$\sigma(\beta^{-1}\mathcal{T} - \beta^{-1}\Delta + \mathcal{M} + \mathcal{S}) \subset \{\Re(\lambda) \geq -\mu\},$$

et donc $\sigma_{\text{ess}}(\beta^{-1}\mathcal{T} - \beta^{-1}\Delta + \mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{K}) \subset \{\Re(\lambda) \geq -\mu\}$. On rappelle que $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}} = \mathcal{M} + \mathcal{S} + \mathcal{K}$. Soit λ une valeur propre de partie réelle strictement négative de $\mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}}$. On peut montrer que l'on peut choisir λ tel que $\Re(\lambda) = a$. D'après le lemme 1.8, pour β suffisamment grand, l'opérateur $\beta^{-1}\mathcal{T} - \beta^{-1}\Delta + \mathcal{G}_{\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}}$ possède une valeur propre dans $B(\lambda, |a|/4)$. Par conséquent, si $\beta > |a|^{-1}$, l'opérateur $\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}}$ possède une valeur propre dans $B(\beta\lambda, \beta|a|/2)$. On obtient finalement le résultat suivant :

Proposition 4.3. *Soit $\overline{\mathcal{U}}$ le profil construit dans la proposition 4.1.*

Il existe $\beta_0 > 0$ tel que si $\beta \geq \beta_0$, l'opérateur $\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vor}}$ admet une valeur propre de partie réelle strictement négative.

Par conséquent, l'opérateur $\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vel}}$ admet également une valeur propre de partie réelle strictement négative.

4.3. Du linéaire au non linéaire

On considère dans cette dernière partie l'équation (5), avec le terme source

$$\overline{\mathcal{F}} = -\frac{\beta}{2}(1 + \xi \cdot \nabla_{\xi})\overline{\mathcal{U}} - \beta v \Delta_{\xi}\overline{\mathcal{U}} + \beta^2(\overline{\mathcal{U}} \cdot \nabla_{\xi})\overline{\mathcal{U}}, \quad \beta > 0.$$

Par définition de $\overline{\mathcal{F}}$, la fonction $\beta\overline{\mathcal{U}}$ est une solution de (5). Le but est de construire une autre solution de l'équation (5) de la forme

$$\mathcal{U} = \beta\overline{\mathcal{U}} + \mathcal{U}_{\text{lin}} + \mathcal{U}_{\text{per}},$$

où \mathcal{U}_{lin} est un mode propre instable de $\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vel}}$ (avec β suffisamment grand, voir la proposition 4.3), i.e. $\mathcal{U}_{\text{lin}} = \Re(\exp(-\lambda\tau)\mathcal{V}_{\lambda})$, où λ est une valeur propre de partie réelle strictement négative de $\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vel}}$, et \mathcal{V}_{λ} la fonction propre associée. On construit alors \mathcal{U}_{per} à l'aide d'un théorème de point fixe. Plus précisément, on pose $a = \inf\{\Re(\mu), \mu \in \sigma(\mathcal{H}_{\beta\overline{\mathcal{U}}}^{\text{vel}})\}$. On sait déjà que $a < 0$ d'après ce qui précède, et on peut montrer qu'il existe une valeur propre μ^* telle que $a = \Re(\mu^*)$. On prend donc $\mathcal{U}_{\text{lin}} = \Re(\exp(-\mu^*\tau)\mathcal{V}_{\mu^*})$. On introduit l'espace de Banach

$$X_T = \{\mathcal{U} \in C((-\infty, T), H^3(\mathbb{R}^3)), \sup_{\tau < T} e^{-3a\tau/2} \|\mathcal{U}(\tau)\|_{H^3} < +\infty\},$$

et on cherche \mathcal{U}_{per} comme un point fixe de la fonctionnelle

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathcal{U}) := & - \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-s)\mathcal{H}_{\beta\mathcal{U}}^{\text{vel}}} \mathbb{P} [(\mathcal{U} \cdot \nabla \mathcal{U}) + (\mathcal{U}_{\text{lin}} \cdot \nabla \mathcal{U}) + (\mathcal{U} \cdot \nabla \mathcal{U}_{\text{lin}})] ds \\ & - \int_{-\infty}^{\tau} e^{-(\tau-s)\mathcal{H}_{\beta\mathcal{U}}^{\text{vel}}} \mathbb{P}((\mathcal{U}_{\text{lin}} \cdot \nabla) \mathcal{U}_{\text{lin}}) ds, \end{aligned}$$

où \mathbb{P} est le projecteur de Leray sur les champs de vecteurs à divergence nulle. Le choix de l'espace fonctionnel $H^3(\mathbb{R}^3)$ dans la définition de X_T est guidé par l'injection de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^3) \subset W^{1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ pour $s > 5/2$ (et on choisit de surcroît ici s entier). On montre alors, en utilisant les propriétés de $\mathcal{H}_{\beta\mathcal{U}}^{\text{vel}}$, qu'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que la boule $B_{X_T} := \{\mathcal{U} \in X_T, \|\mathcal{U}\|_{X_T} < 1\}$ est stable par \mathcal{J} , et tel que $\mathcal{J}|_{B_{X_T}}$ est une contraction. L'existence et l'unicité de $\mathcal{U}_{\text{per}} \in X_T$ s'ensuivent. On définit ensuite deux solutions de Leray u_1 et u_2 de (1) par (7), et on vérifie que u_1 et u_2 sont deux solutions distinctes de (1) pour la même donnée initiale $u_0 = 0$, ce qui conclut la preuve du théorème 1.4.

Remerciements. — Je remercie vivement Nicolas Bourbaki, Isabelle Gallagher, Thierry Gallay et Charlotte Perrin pour leur relecture attentive, leurs conseils et leurs explications, qui auront permis d'améliorer la qualité de ce texte. Ce travail a bénéficié du soutien l'Institut Universitaire de France et de la bourse ANR-18-CE40-0027 de l'Agence Nationale de la Recherche (projet SingFlows).

Références

- ALBRITTON, D., BRUÉ, E. et COLOMBO, M. (2022). « Non-uniqueness of Leray solutions of the forced Navier–Stokes equations », *Annals of Mathematics* **196** (1), p. 415-455.
- ALBRITTON, D., BRUÉ, E., COLOMBO, M. et al. (2021). « Instability and nonuniqueness for the 2d Euler equations in vorticity form, after M. Vishik », arXiv : 2112.04943.
- ALBRITTON, D. et COLOMBO, M. (2023). « Non-uniqueness of Leray solutions to the hypodissipative Navier–Stokes equations in two dimensions », *Communications in Mathematical Physics*, p. 1-18.
- BAHOURI, H., CHEMIN, J.-Y. et DANCHIN, R. (2011). *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*. T. 343. Springer.
- BUCKMASTER, T. et VICOL, V. (2019). « Nonuniqueness of weak solutions to the Navier–Stokes equation », *Annals of Mathematics* **189** (1), p. 101-144.
- CANNONE, M. (1997). « A generalization of a theorem by Kato on Navier–Stokes equations », *Revista matemática iberoamericana* **13** (3), p. 515-541.

- DRAZIN, P. G. et REID, W. H. (2004). *Hydrodynamic stability*. Cambridge university press.
- ELGINDI, T. M. (2021). « Finite-time Singularity Formation for $C^{1,\alpha}$ Solutions to the Incompressible Euler Equations on \mathbb{R}^3 », *Annals of Mathematics* **194** (3), p. 647-727.
- FUJITA, H. et KATO, T. (1964). « On the Navier–Stokes initial value problem. I », *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **16** (4), p. 269-315.
- GALLAY, T. et WAYNE, E. (2002a). « Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier–Stokes and vorticity equations on \mathbb{R}^2 », *Archive for Rational Mechanics and Analysis* **163**, p. 209-258.
- (2002b). « Long-time asymptotics of the Navier–Stokes and vorticity equations on \mathbb{R}^3 », *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **360** (1799), p. 2155-2188.
- GRENIER, E. (2000). « On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations », *Communications on Pure and Applied Mathematics : A Journal Issued by the Courant Institute of Mathematical Sciences* **53** (9), p. 1067-1091.
- GUILLOD, J. et ŠVERÁK, V. (2017). « Numerical investigations of non-uniqueness for the Navier–Stokes initial value problem in borderline spaces », arXiv : 1704.00560.
- HOPF, E. (1950). « Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen. Erhard Schmidt zu seinem 75. Geburtstag gewidmet », *Mathematische Nachrichten* **4** (1-6), p. 213-231.
- JIA, H. et ŠVERÁK, V. (2014). « Local-in-space estimates near initial time for weak solutions of the Navier–Stokes equations and forward self-similar solutions », *Inventiones mathematicae* **196**, p. 233-265.
- (2015). « Are the incompressible 3d Navier–Stokes equations locally ill-posed in the natural energy space ? », *Journal of Functional Analysis* **268** (12), p. 3734-3766.
- KATO, T. (1984). « Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions », *Mathematische Zeitschrift* **187**, p. 471-480.
- (2013). *Perturbation theory for linear operators*. T. 132. Springer Science & Business Media.
- KOCH, H. et TATARU, D. (2001). « Well-posedness for the Navier–Stokes equations », *Advances in Mathematics* **157** (1), p. 22-35.
- LERAY, J. (1934). « Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace », *Acta Mathematica* **63**, p. 193-248.
- LIONS, J.-L. et PRODI, G. (1959). « Un théorème d’existence et unicité dans les équations de Navier- Stokes en dimension 2 », *C. R. Acad. Sci., Paris* **248**, p. 3519-3521.
- MERLE, F. et al. (2022a). « On the implosion of a compressible fluid I : Smooth self-similar inviscid profiles », *Annals of Mathematics* **196** (2), p. 567-778.
- (2022b). « On the implosion of a compressible fluid II : Singularity formation », *Annals of Mathematics* **196** (2), p. 779-889.

- PERELMAN, G. (2022). « Finite time blow-up for the compressible fluids and for the energy supercritical defocusing nonlinear Schrödinger equation (after Frank Merle, Pierre Raphaël, Igor Rodnianski and Jérémie Szeftel) », in : *Séminaire Bourbaki. Volume 2021/2022, Exposés 1181–1196*. Paris : Société Mathématique de France (SMF), p. 403-432.
- PLANCHON, F. (1996). « Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces to the incompressible Navier–Stokes equations in \mathbb{R}^3 », *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire* **13** (3), p. 319-336.
- VISHIK, M. (2018a). « Instability and non-uniqueness in the Cauchy problem for the Euler equations of an ideal incompressible fluid. Part I », arXiv : 1805.09426.
- (2018b). « Instability and non-uniqueness in the Cauchy problem for the Euler equations of an ideal incompressible fluid. Part II », arXiv : 1805.09440.

Anne-Laure Dalibard

Sorbonne Université

Laboratoire Jacques-Louis Lions

F-75005 Paris

&

École Normale Supérieure

DMA

F-75005 Paris

E-mail : anne-laure.dalibard@sorbonne-universite.fr