

LA THÉORIE DES COURBES ET SURFACES GÉOMÉTRIQUES CHEZ PONCELET

Jean-Daniel Voelke

Résumé. — Cet article étudie la manière dont Poncelet a utilisé la théorie des transversales de Carnot pour développer une théorie synthétique des courbes et surfaces géométriques. Un théorème établi par Carnot lui permet de redémontrer d'une nouvelle manière des théorèmes connus et de résoudre un grand nombre de problèmes de construction. Poncelet a donné un premier exposé de ses recherches dans un mémoire rédigé en 1816 mais publié seulement en 1864. Il les a reprises une décennie plus tard dans un mémoire présenté à l'Académie des Sciences en 1831 et publié dans le *Journal de Crelle* en 1832. Les recherches de Poncelet sur les courbes et surfaces géométriques constituent la suite de celles présentées dans le *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822. Elles se caractérisent par une utilisation constante du principe de continuité et la volonté d'aboutir à des méthodes et solutions générales. En considérant des éléments à l'infini, Poncelet parvient à établir un lien entre différents théorèmes dus notamment à Newton et MacLaurin.

Abstract (Poncelet's theory of curves and geometric surfaces)

This paper studies the way in which Poncelet used Carnot's theory of transversals to develop a synthetic theory of geometric curves and surfaces. Thanks to a theorem established by Carnot, he could prove already known theorems in a new manner and solve a lot of construction problems. Poncelet's first presentation of his research was in a paper written in 1816 but which was only published in 1864. He presented it again in a paper in 1831 which was

Texte reçu le 6 janvier 2022, accepté le 15 novembre 2022 et mis en forme le 30 mars 2023.

J.-D. Voelke, Chemin de Primerose 47, CH-1007 Lausanne.

Courrier électronique : jd.voelke@netplus.ch

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 51-03.

Mots clefs : Jean-Victor Poncelet, Lazare Carnot, Colin MacLaurin, géométrie projective, théorie des transversales, courbes géométriques.

Key words and phrases. — Jean-Victor Poncelet, Lazare Carnot, Colin MacLaurin, projective geometry, theory of transversals, geometric curves.

given to the Académie des Sciences and published in the Journal of Crelle in 1832. Poncelet's research on geometric curves and surfaces is the continuation of that contained in the *Traité des propriétés projectives des figures* from 1822. It is characterized by a constant use of the continuity principle and the goal of arriving at general methods and solutions. By considering elements at infinity, Poncelet succeeds in establishing a link between different theorems due in particular to Newton and MacLaurin.

1. INTRODUCTION

Le *Traité des propriétés projectives des figures*¹ constitue l'ouvrage majeur de Jean-Victor Poncelet. Comme on le sait, l'auteur entend présenter de nouvelles méthodes permettant de développer la géométrie « ordinaire »² de la manière la plus générale possible et de mettre celle-ci au même niveau que la géométrie analytique³. Il accorde un rôle fondamental aux notions de projection et d'éléments à l'infini ainsi qu'au principe dit « de continuité »⁴. Les propriétés des figures invariantes par projection sont mises au premier plan et l'étude des coniques prend place dans un nouveau cadre conceptuel.

Après la parution du *Traité*, Poncelet publiera encore trois longs mémoires. Le premier est intitulé *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* [Poncelet 1828] et fut écrit en 1823. Le deuxième est intitulé *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* [Poncelet 1829] et fut écrit durant l'hiver 1823-1824. Ces travaux furent présentés à l'Académie des Sciences le 8 mars et le 12 avril 1824. Poncelet affirmera plus tard qu'ils « étaient destinés à faire immédiatement suite au texte du *Traité*, dont ils offraient

¹ [Poncelet 1822]. Dans la suite de cet article je parlerai simplement du *Traité*.

² [Poncelet 1822, p. v et p. xx]. Ce qualificatif est fréquemment utilisé par Poncelet et désigne la géométrie synthétique par opposition à la géométrie analytique.

³ L'opposition entre la géométrie analytique et la géométrie ordinaire ainsi que la notion de généralité sont des thèmes fondamentaux chez Poncelet. Ils sont longuement développés dans l'introduction du *Traité* et résumés au début d'un mémoire ultérieur [Poncelet 1828, p. 213]. Ils apparaissent déjà dans un manuscrit écrit durant l'hiver 1818-1819 et consacré au principe de continuité [Poncelet 1864, 4^e cahier] (cf. ci-dessous § 2.4). On pourra consulter sur ce sujet [Nabonnand 2006], [Nabonnand 2011] et [Nabonnand 2015]. Ces thèmes sont aussi fondamentaux chez Carnot et Chasles (cf. [Chemla 1998], [Nabonnand 2011] et [Chemla 2016]). En ce qui concerne l'origine des idées de Poncelet, on pourra consulter [Belhoste 1998] et [Friedelmeyer 2010]. Ce dernier étudie des aspects variés du *Traité*.

⁴ Cf. § 2.4 ci-dessous.

l'application et le développement » [Poncelet 1866, p. V]. Le troisième mémoire est intitulé *Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques* [Poncelet 1832] et fut présenté à l'Académie des Sciences le 5 septembre 1831⁵. Les rapports concernant les deux premiers mémoires ne furent donnés que tardivement, en 1826 et 1828⁶. Ce retard semble être dû à l'hostilité de Cauchy et c'est grâce au soutien d'Alexander von Humboldt que les travaux de Poncelet purent être finalement publiés dans le tout nouveau *Journal de Crelle*⁷.

Soucieux d'établir sa priorité dans certains domaines [Poncelet 1862, p. xij] et [Poncelet 1866, p. VI, p. 235 et p. 311], Poncelet décidera à la fin de sa vie de publier un ouvrage en deux tomes intitulé *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*⁸. Cette publication sera suivie d'une réédition du *Traité* [Poncelet 1865] qui sera complété par un second tome [Poncelet 1866]. Celui-ci comprend en particulier les trois mémoires publiés dans le *Journal de Crelle* ainsi qu'un quatrième mémoire inédit intitulé *Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces géométriques d'ordre quelconque*⁹. Rédigé durant l'hiver 1830-31, il devait compléter le troisième. Ces deux derniers mémoires sont fondés sur des recherches effectuées par Poncelet pour l'essentiel avant 1825, date à laquelle il dut réduire considérablement son activité mathématique pour se consacrer à son enseignement de mécanique appliquée aux machines à l'Ecole d'application de l'artillerie et du génie à Metz [Poncelet 1832, p. 24] et [Poncelet 1866, p. 235]. Ajouté à des problèmes de santé, ce changement professionnel retarda Poncelet dans

⁵ Poncelet ne précise pas à quel moment ce mémoire fut rédigé.

⁶ Ils figurent dans [Poncelet 1866, pp. 351-357 et pp. 359-363]. Poncelet ne mentionne pas de rapport concernant le troisième mémoire.

⁷ Sur les rapports entre Cauchy et Poncelet, cf. [Poncelet 1864, pp. 553-554]. Sur les relations entre Humboldt et Poncelet, cf. [Poncelet 1866, pp. 406-407].

⁸ [Poncelet 1862] et [Poncelet 1864]. Le premier tome est constitué pour l'essentiel du *Manuscrit de Saratoff* rédigé entre avril 1813 et juin 1814 par Poncelet durant sa captivité en Russie. C'est une première ébauche des problèmes et méthodes qui seront présentés dans le *Traité* (cf. [Belhoste 1998]). Le second tome est divisé en sept cahiers. Les cinq premiers sont constitués de manuscrits inédits rédigés entre 1815 et 1820. Le sixième comprend des articles publiés dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne et repris ensuite partiellement dans le *Traité*. Le septième cahier contient de la correspondance.

⁹ Il constitue la section IV de cet ouvrage. Les trois mémoires du *Journal de Crelle* constituent pour leur part les sections I, II et III. Cette réédition ne présente pratiquement pas de changements par rapport au texte original. Seuls certains titres et sous-titres sont modifiés. La section III comporte de plus des figures. Une section supplémentaire de l'ouvrage contient encore divers articles, rapports et notes.

la publication de ses recherches. Certains des résultats qu'il avait déjà obtenus furent trouvés par des voies différentes et publiés avant lui par d'autres mathématiciens [Poncelet 1832, p. 24].

Comme rappelé en préambule, le *Traité* est consacré à la présentation générale de nouvelles méthodes et à leur application à la géométrie « de la règle »¹⁰ et à celle des coniques et surfaces du second ordre. Dès le début de ses recherches, Poncelet a cependant eu en tête de sortir de ce cadre restreint et d'exposer une théorie générale des courbes géométriques d'ordre quelconque. Il termine en effet l'introduction du *Traité* en écrivant :

Nous regrettons toutefois que le défaut d'espace ne nous permette pas d'y faire entrer nos recherches relatives aux propriétés projectives¹¹ des courbes géométriques des divers ordres, et nous oblige d'en renvoyer la publication à une époque plus reculée : cet ensemble, plus complet, aurait montré qu'il est peu de propriétés générales de l'étendue qu'on ne puisse ramener dans le domaine de la simple Géométrie, au moyen des ressources offertes, soit par la doctrine des projections, soit par la loi de continuité. [Poncelet 1822, p. xlvj]

Poncelet expose ici un programme ambitieux. Il s'agit de traiter pratiquement toutes les « propriétés de l'étendue » à l'aide des méthodes développées dans cet ouvrage et de rester ainsi dans le domaine de la « simple géométrie », c'est-à-dire d'éviter tout recours à l'algèbre. Dans l'introduction du mémoire *Analyse des transversales*, Poncelet affirme que selon le « plan » qu'il s'était fixé, la publication de ses recherches sur les courbes et surfaces d'ordre quelconque devait être précédée de celle du *Traité*. Il fallait d'abord exposer les « principes généraux de projection qui pouvaient m'être utiles pour établir ultérieurement la théorie géométrique des courbes et surfaces d'un ordre quelconque » [Poncelet 1832, p. 22]. Cette dernière tâche sera accomplie dans ce mémoire ainsi que dans le suivant *Propriétés communes aux systèmes de lignes et surfaces géométriques d'ordre quelconque*. Les deux premiers mémoires publiés dans le *Journal de Crelle*, sur les centres de moyennes harmoniques et la théorie des polaires réciproques, sont pour leur part destinés à présenter des principes nécessaires à l'étude des courbes et surfaces géométriques et

¹⁰ Ce terme est fréquemment utilisé par les géomètres de l'époque. Cette géométrie s'occupe « des propriétés descriptives ou de situation des systèmes de lignes droites indéfinies » [Poncelet 1822, p. 76].

¹¹ De manière générale, les propriétés projectives d'une figure sont celles qui sont conservées par projection. Cette notion est introduite au début du *Traité* [Poncelet 1822, p. 5]. Nous verrons au § 2.3 plus précisément ce que Poncelet entend par propriétés projectives d'une courbe.

qui n'ont pas été abordés dans le *Traité*¹². Dans l'introduction du premier, Poncelet écrit que « la théorie des courbes et des surfaces géométriques est étroitement liée à la doctrine du centre des moyennes harmoniques, qui est proprement une généralisation de celle du centre des moyennes distances » [Poncelet 1828, p. 218]. Comme cette « doctrine » n'est pas connue, il faut lui consacrer un premier mémoire. Il en va de même de la théorie des polaires réciproques, « indispensable pour établir certaines propositions qui doivent entrer dans la partie de ces recherches relatives aux courbes et aux surfaces géométriques en général » [Poncelet 1829, p. 1]. Ces différentes citations montrent que l'étude générale de ces courbes et surfaces devait constituer pour Poncelet l'aboutissement de toutes ses recherches. Comme nous le verrons, davantage que la « doctrine des projections », c'est un théorème établi par Carnot dans sa *Géométrie de position* [Carnot 1803] qui lui fournira l'outil essentiel pour achever son programme¹³. Conjointement avec le principe de continuité, il permettra à Poncelet d'étudier une courbe géométrique sans recourir à une équation algébrique. Contrairement à ce qu'il affirme, ses recherches dans ce domaine ne constituent donc pas directement la suite de celles développées dans le *Traité*. Si elles ont toutes deux comme objectif de fournir à la géométrie ordinaire des méthodes générales, les points de départ sont différents. Dans le cas des coniques, l'utilisation de projections permet de se ramener à un cercle. Cette méthode ne s'applique en revanche pas dans le cas d'une courbe géométrique d'ordre quelconque et il faut utiliser un autre principe. Relevons encore que si Poncelet parle, dans les extraits cités précédemment, de ses recherches sur les courbes et surfaces géométriques, l'essentiel est en fait consacré uniquement aux courbes. Seul le dernier mémoire *Propriétés communes aux systèmes de lignes et surfaces géométriques d'ordre quelconque* généralise à des surfaces certains résultats établis dans le plan.

À côté des deux mémoires de 1831 constituant les sections III et IV du second volume du *Traité*, Poncelet a laissé d'autres écrits consacrés aux courbes et surfaces géométriques. Le plus ancien témoigne des premières recherches effectuées dans ce domaine à partir de l'hiver 1815-1816, soit une année après son retour de Russie. Il s'agit d'un manuscrit intitulé *Méthode des transversales appliquée à la recherche et à la démonstration des propriétés*

¹² Le titre complet du premier de ces mémoires est *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques ; pour faire suite au traité des propriétés projectives des figures, et servir d'introduction à la Théorie générale des propriétés projectives des courbes et surfaces géométriques* [Poncelet 1828].

¹³ L'énoncé est donné au § 2.2. ci-dessous.

*des lignes et surfaces géométriques*¹⁴. Il présente de nombreux résultats qui seront en partie repris dans les mémoires de 1831. Il contient aussi les premiers éléments de ce qui deviendra la théorie des centres de moyennes harmoniques. Un texte rédigé durant l'hiver 1822-23 apporte pour sa part des renseignements sur la démarche de Poncelet et l'origine de certaines de ses idées¹⁵. Il est intitulé *Historique servant d'introduction à une théorie des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des courbes géométriques* et est extrait d'un manuscrit inédit de 108 pages constituant, selon Poncelet, une première rédaction des mémoires de 1831. L'historique des recherches de Poncelet est également détaillé dans la longue introduction au premier de ces textes.

À l'exception de celui consacré à la théorie des polaires réciproques¹⁶, les trois autres mémoires contenus dans le second tome du *Traité* n'ont jusqu'à maintenant guère retenu l'attention des historiens. Si le mémoire sur les centres de moyennes harmoniques traite d'un sujet bien délimité qui en rend la lecture aisée, ce n'est en revanche pas le cas de ceux consacrés aux courbes et surfaces géométriques. L'étendue de ces travaux (190 pages dans [Poncelet 1866]), le grand nombre et la variété des problèmes abordés ainsi que la complexité de certains raisonnements font qu'il est parfois difficile d'en percevoir la structure et de saisir toutes les intentions de l'auteur. Poncelet entend en premier lieu présenter des méthodes générales pour étudier ces courbes et ces surfaces. L'importance des principes et des méthodes par rapport aux résultats individuels est un point sur lequel il insiste à plusieurs reprises dans ses écrits [Poncelet 1828, p. 213] et [Poncelet 1866, pp. 235-236]. En accord avec le point de vue déjà exprimé au début du *Traité*, il veut montrer dans ces deux mémoires qu'une approche purement géométrique de la théorie des courbes et surfaces géométriques est possible. Comme il l'explique déjà dans l'introduction du *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques*, le but général de ses recherches est d'« agrandir le domaine, déjà si vaste, de la Géométrie rationnelle » et de « lui créer des ressources, des méthodes universelles qui paraissent encore lui manquer, et sembleraient plus particulièrement

¹⁴ Il constitue le deuxième cahier du second volume des *Applications de géométrie et d'analyse* [Poncelet 1864, pp. 67-166]. Pour des raisons de simplification, je parlerai dans la suite de cet article du *Deuxième cahier*. Si le début remonte sans doute à l'hiver 1815-1816, nous verrons qu'une partie importante a été rédigée après le printemps 1816, date à laquelle Poncelet pris connaissance des recherches de MacLaurin sur ce sujet (cf. § 2.1 et § 3 ci-dessous).

¹⁵ Il a été publié dans le second tome du *Traité* [Poncelet 1866, pp. 316-321].

¹⁶ Cf. [Nabonnand 2006, pp. 66-70] et [Voelke 2019a].

appartenir à la Géométrie analytique » [Poncelet 1828, p. 217]. On retrouve là un des thèmes favoris de Poncelet. Aux méthodes déjà utilisées dans le *Traité* (« doctrine des projections » et principe de continuité) vont s'ajouter la théorie des polaires réciproques et celle des transversales de Carnot, étendue aux lignes et surfaces courbes. Il écrit à propos de ces différentes méthodes :

[Elles] ne forment pas simplement des classes, plus ou moins étendues, de problèmes et de théorèmes, mais constituent proprement, pour la Géométrie pure, des principes, des méthodes d'investigation et d'invention, des moyens d'extension et d'exposition, dans le genre de ceux qu'on a nommés principes d'exhaustion, méthode des infiniment petits, etc. [Poncelet 1828, pp. 217-218]

En les comparant à des méthodes anciennes et reconnues, Poncelet en souligne l'importance et témoigne de sa volonté de fournir un nouveau fondement à l'édifice géométrique. On notera à nouveau l'opposition entre problèmes et théorèmes d'un côté et méthodes de l'autre.

Au terme de cette présentation générale des recherches de Poncelet sur les courbes géométriques et de leur place dans l'ensemble de son œuvre, il convient de préciser le but et le plan de cet article. Il s'agit de combler une lacune historiographique en analysant, au plan mathématique et méthodologique, les différents travaux de Poncelet sur ce sujet. J'examinerai tout d'abord l'origine et l'historique de ses recherches en rappelant les contributions de certains de ses prédécesseurs qui ont joué un rôle important dans le développement de ses idées. Je montrerai aussi comment le principe de continuité s'applique dans le cas des courbes. J'analyserai ensuite le *Deuxième cahier* de 1815-16. Ce texte a été rédigé à une époque où Poncelet était en pleine activité mathématique. Il établit quelques théorèmes fondamentaux et résout un grand nombre de problèmes de construction. Je poursuivrai par l'étude des deux mémoires de 1831. Comme indiqué précédemment, Poncelet n'avait à cette époque plus beaucoup de temps à consacrer aux mathématiques et ces travaux sont fondés sur des recherches antérieures à 1825. Ils reprennent en particulier certains éléments du *Deuxième cahier* mais en les intégrant dans un programme de recherche général. Ils sont plus difficiles d'accès que ce dernier texte et présentent parfois un caractère plus philosophique que mathématique. Je terminerai en examinant ce que Plücker, un des lecteurs les plus attentifs de Poncelet, a retenu des recherches de ce dernier.

Relevons encore que les différents travaux de Poncelet étudiés dans cet article contiennent un très grand nombre de résultats et qu'il serait vain de vouloir rendre compte de l'ensemble. J'ai donc effectué un choix

en essayant de mettre en évidence ceux qui me paraissaient les plus importants et les plus caractéristiques de ses méthodes. Je noterai enfin que la présence de deux exposés de la même théorie, rédigés à quinze ans d'écart, obligera parfois à certaines redites. Il m'a paru plus cohérent de suivre l'ordre chronologique et d'étudier d'abord la première version de 1815-1816 et d'examiner ensuite celle de 1831, rééditée encore avec des commentaires en 1866. On pourra objecter que cette première version n'a été publiée qu'en 1864. Poncelet relève cependant à propos du *Manuscrit de Saratoff*, publié en 1862 seulement dans le premier tome des *Applications d'analyse et de géométrie*, qu'il s'est fait un devoir scrupuleux de n'apporter aucun changement au texte original [Poncelet 1862, p. xij]. Cette remarque s'applique sans doute aussi en grande partie aux manuscrits publiés dans le second tome. Poncelet déclare en effet, à propos du troisième cahier, s'être borné, « comme pour les précédents Cahiers, à transcrire le texte manuscrit, sans rien changer d'essentiel dans l'ordre ni la nature des idées, en un mot sans en altérer la pensée fondamentale, mais en supprimant cependant de cet ancien texte, les exemples trop multipliés, les développements superflus » [Poncelet 1864, p. 168]¹⁷. Si l'on peut donc dans l'ensemble se fier à ces manuscrits, il convient cependant de bien les distinguer des notes les accompagnant. Rédigées presque un demi-siècle plus tard, Poncelet y présente ses travaux dans une perspective historique en cherchant à mettre en évidence le caractère précurseur de ses recherches.

2. ORIGINE ET HISTORIQUE DES RECHERCHES DE PONCELET

2.1. *Newton et MacLaurin*

Dans ses recherches sur les courbes géométriques, Poncelet se réfère principalement aux travaux de trois mathématiciens : Newton, MacLaurin et Carnot. Commençons avec le premier et son *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*¹⁸. Newton énonce au début de ce mémoire quatre théorèmes généralisant les propriétés fondamentales des coniques à des courbes du 3^e ordre. Ils sont donnés sans preuve et peuvent être généralisés à des courbes

¹⁷ Comme nous le verrons (cf. § 3), le texte de la dernière partie du *Deuxième cahier* a été retravaillé par Poncelet.

¹⁸ [Newton 1704]. Une présentation générale de ce mémoire est donnée dans [Guicciardini 2009, pp. 109-136].

d'ordre quelconque ¹⁹. Le premier théorème introduit la notion de diamètre d'une courbe et peut être formulé ainsi. Considérons deux droites parallèles d et d' coupant chacune une courbe du 3^e ordre en trois points. Soient P et P' les centres des moyennes distances²⁰ de chacun de ces deux groupes de points. Soit encore d'' une parallèle à d coupant la courbe en trois points. Le centre des moyennes distances P'' de ces points est sur la droite PP' . Celle-ci est un diamètre de la courbe. Considérons maintenant une droite d coupant la courbe en trois points ainsi que chacune des trois asymptotes en un point. Le deuxième théorème affirme que les centres des moyennes distances de ces deux groupes de points sont confondus. Le troisième théorème n'apparaît pas chez Poncelet et son énoncé peut être omis. Quant au quatrième, il peut être formulé ainsi. Considérons deux droites issues d'un point O et coupant une courbe du 3^e ordre en trois points R_1, R_2, R_3 , respectivement S_1, S_2, S_3 . Le rapport des produits $OR_1 \cdot OR_2 \cdot OR_3$ et $OS_1 \cdot OS_2 \cdot OS_3$ reste constant lorsque le point O se déplace et que les deux sécantes issues de O se déplacent parallèlement à elles-mêmes. Poncelet parle du théorème du « rapport constant entre les produits des abscisses et des appliquées parallèles » [Poncelet 1866, p. 317].

Passons au *De Linearum Geometricarum Proprietatibus generalibus Tractatus* de MacLaurin [MacLaurin 1748b]²¹. Ce mémoire comporte trois sections. La première est consacrée aux propriétés générales des courbes géométriques ainsi qu'à celles des divisions harmoniques. Les deux autres sections sont consacrées aux coniques et aux courbes du 3^e ordre. MacLaurin commence par démontrer le premier et le quatrième théorème de Newton. Il établit à partir de ce dernier résultat et en utilisant le calcul des fluxions le théorème suivant ²². Considérons une courbe géométrique et deux transversales issues d'un point P et coupant celle-ci aux points $A, B, C, \dots$, respectivement $a, b, c, \dots$ (fig. 1). Soit encore une transversale issue

¹⁹ Les preuves seront données par Stirling [Stirling 1717]. Comme Newton le précise au début de son mémoire, l'ordre d'une courbe géométrique est à la fois égal aux « dimensions » (degré) de l'équation de la courbe et au nombre de points d'intersection possibles d'une droite avec celle-ci [Newton 1704, p. 139].

²⁰ Considérons n points situés sur une droite. Le « centre des moyennes distances » de ces points est le point de la droite tel que la somme des distances algébriques de ce point aux autres points est nulle (cf. p. ex. [Salmon 1852, p. 47]). Nous verrons plus loin que cette notion joue un rôle important chez Poncelet.

²¹ Ce mémoire a été publié de manière posthume et figure comme appendice à son *Treatise of Algebra* [MacLaurin 1748a]. Pour plus de détails sur son contenu et son histoire, on pourra se reporter à [Bruneau 2011].

²² Je parlerai dans la suite de cet article du « théorème de MacLaurin ».

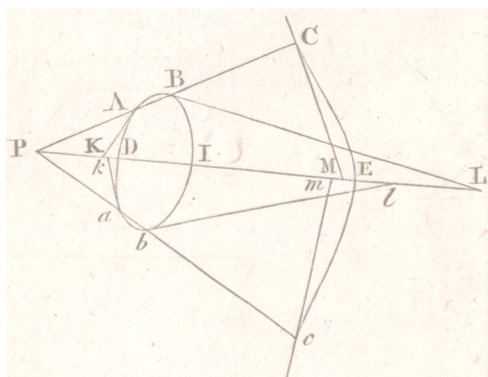


Figure 1. Le théorème de MacLaurin [MacLaurin 1748b, fig. 6, planche I]

de P et coupant la courbe aux points $D, I, E, \dots$ On suppose que les tangentes à la courbe issues des points $A, B, C, \dots, a, b, c, \dots$ coupent cette dernière transversale aux points $K, M, L, \dots, k, m, l, \dots$ On a alors

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \dots = \frac{1}{Pk} + \frac{1}{Pl} + \frac{1}{Pm} + \dots = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PI} + \dots$$

Ce résultat joue un rôle fondamental et permet à MacLaurin de justifier la plupart des résultats exposés dans la suite de son traité. Mentionnons en particulier la construction du cercle osculateur en un point d'une courbe géométrique et la démonstration du théorème suivant dû à Roger Cotes²³. Considérons une transversale variable issue d'un point P et coupant une courbe géométrique d'ordre n aux points $D, E, F, \dots$ Soit M le point de cette transversale tel que

$$\frac{n}{PM} = \frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PF} + \dots$$

Le théorème affirme que lorsque la transversale tourne autour du point P , le lieu du point M est une droite. MacLaurin appelle la longueur PM « moyenne harmonique » des longueurs $PD, PE, PF, \dots$ [MacLaurin 1748b, p. 25]. Le point M sera appelé pour sa part par Poncelet « centre des moyennes harmoniques »²⁴ des points $D, E, F, \dots$ par rapport à P .

²³ Les éditeurs du livre de MacLaurin affirment que ce théorème lui fut communiqué par R. Smith, cousin et successeur de Cotes [MacLaurin 1748a, p. xi]. MacLaurin donne aussi une démonstration algébrique de ce théorème indépendante de son théorème fondamental [MacLaurin 1748b, § 32].

²⁴ [Poncelet 1828, p. 232] et [Poncelet 1864, p. 145] ; cf. fin du § 3 de cet article.

2.2. La théorie des transversales de Carnot

Après Newton et MacLaurin, Carnot est le troisième mathématicien dont les travaux ont servi de point de départ aux recherches de Poncelet. Son ouvrage le plus important est la *Géométrie de position* [Carnot 1803]. On y trouve en particulier deux théorèmes qui seront au fondement de la méthode utilisée par Poncelet pour étudier les courbes géométriques. Le premier, dit « de Ménélaüs », remonte à l'Antiquité²⁵. Rappelons-en l'énoncé. Soit un triangle ABC et une transversale coupant la droite AB en D , la droite AC en E et la droite BC en F . On a l'égalité

$$AD \cdot BF \cdot CE = AE \cdot BD \cdot CF.$$

Le second théorème peut être considéré comme une généralisation et est propre à Carnot [Carnot 1803, pp. 435-436]. Je l'appellerai dans la suite de cet article « théorème de Carnot ». Considérons une courbe géométrique et un triangle ABC . Soit $(A'B')$ le produit des segments interceptés sur AB entre le point A et les différentes branches de la courbe, $(B'A')$ celui des segments interceptés sur cette même droite entre le point B et les différentes branches de la courbe. Carnot définit de même les produits $(A'C')$ et $(C'A')$, $(B'C')$ et $(C'B')$. En utilisant le théorème de Newton sur le rapport constant entre les produits des abscisses et des ordonnées parallèles, il démontre que

$$(A'B')(B'C')(C'A') = (B'A')(C'B')(A'C').$$

Carnot ne tire pas de conséquence particulière de ce résultat. C'est à Poncelet qu'il appartiendra de le faire.

Comme Chemla l'a montré, le livre de Carnot suscita un grand intérêt de la part de ses contemporains [Chemla 1990, pp. 526-527]. Un an après sa parution, François-Joseph Servois publie ainsi un mémoire intitulé *Solutions peu connues de différents problèmes de géométrie pratique* [Servois 1804] dans lequel il redémontre plusieurs des théorèmes exposés par Carnot et en donne des applications pratiques. En 1806, ce dernier publie un nouveau texte en deux parties intitulé *Mémoire sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un Essai*

²⁵ [Carnot 1803, pp. 275-276]. Ce théorème apparaît auparavant déjà deux fois dans des textes de Carnot [Bossut 1800, p. 404] et [Carnot 1801, p. 131]. Le rôle de ce théorème chez Carnot et la question de savoir s'il connaissait ce résultat ou s'il l'a retrouvé de manière indépendante sont discutés en détail dans [Chemla 1990] et [Chemla 1998]. Cette historienne a étudié de manière plus générale les travaux géométriques de Carnot et leur réception. Ces travaux sont aussi analysés dans [Nabonnand 2006] et [Nabonnand 2011]. La théorie des transversales de Carnot et les applications qui en ont été faites par Servois et Brianchon sont étudiées en détail dans [Centina 2022].

sur la théorie des transversales [Carnot 1806]. Dans la seconde partie, Carnot reprend certains théorèmes démontrés dans la *Géométrie de position* et en réorganise l'exposé de manière à obtenir un ensemble cohérent²⁶. Il commence en donnant la définition générale d'une transversale et en soulignant les possibilités offertes par sa théorie :

J'appelle *transversale* une ligne droite ou courbe qui traverse d'une manière quelconque un système d'autres lignes, soit droites, soit courbes ; ou même un système de plans ou de surfaces courbes. Mais je ne parlerai dans cet Essai que des transversales droites et circulaires.

La théorie des transversales est curieuse par elle-même, et fournit souvent des démonstrations et des solutions très-élégantes, dans des questions compliquées. La simplicité et la fécondité de ses principes semblerait lui donner le droit d'être admise dans les élémens ordinaires de Géométrie. [Carnot 1806, p. 65]

Le théorème de Ménélaüs est qualifié de « principe fondamental » de cette théorie [Carnot 1806, p. 67]. Il est généralisé à un polygone plan quelconque et à un polygone gauche. Parmi les autres résultats retenus par Carnot, citons le théorème dit « de Ceva », le théorème de Carnot²⁷, celui sur les diagonales d'un quadrilatère complet²⁸ ainsi que les théorèmes de Pascal et Brianchon pour un hexagone inscrit ou circonscrit à un cercle. Le mémoire de Carnot a contribué à installer l'appellation « théorie des transversales ». Après Servois, Poncelet et Brianchon seront des admirateurs de cette théorie. Ce dernier rédigera lui aussi un mémoire consacré à ses applications [Brianchon 1818]. Il s'agit selon lui « d'un des plus beaux perfectionnements de la géométrie moderne »²⁹. En Allemagne, la théorie des transversales fera l'objet d'un long article d'August Grunert dans le *Mathematisches Wörterbuch*³⁰. Le vœu exprimé par Carnot dans la dernière phrase du texte cité ci-dessus sera pour sa part réalisé puisque sa théorie sera intégrée aux éditions tardives des *Eléments de géométrie* de Legendre ainsi qu'à

²⁶ Carnot affirme avoir « profité des réflexions » ajoutées par plusieurs savants et en particulier par Servois [Carnot 1806, p. 3].

²⁷ Il est démontré pour un cercle et seulement énoncé dans le cas d'une courbe géométrique d'ordre quelconque [Carnot 1806, pp. 72-73].

²⁸ « Dans tout quadrilatère complet ayant ses trois diagonales, chacune d'elles est coupée par les deux autres en segments proportionnels. » [Carnot 1806, p. 74]

²⁹ Ce jugement est formulé dans un autre mémoire [Brianchon 1817, p. 13].

³⁰ [Grunert 1831, pp. 139-160]. Ce dictionnaire a été commencé en 1803 par Georg Klügel, poursuivi par Carl Mollweide et terminé par Grunert.

d'autres manuels³¹. Elle restera cependant confinée à un cadre scolaire. Seul Poncelet cherchera à développer les possibilités annoncées par Carnot à la fin de la citation précédente et l'appliquera à des courbes et surfaces géométriques d'ordre quelconque.

2.3. *Historique des recherches de Poncelet sur les courbes géométriques; le rôle de la théorie des transversales*

Les premiers renseignements donnés par Poncelet sur l'origine de ses recherches sur les courbes géométriques figurent dans une note ajoutée en 1864 au *Deuxième cahier* lors de sa publication :

Lorsque, dans l'hiver de 1815 à 1816, après la funeste catastrophe de Waterloo, profitant des tristes loisirs de la paix, j'essayai d'appliquer la théorie des transversales aux courbes géométriques décrites sur un plan, quelques savants bien connus avaient déjà mis en usage, mais transitoirement, les relations à deux termes de cette théorie pour démontrer diverses propositions isolées sur les lignes et surfaces du second degré. Je me proposais dès lors d'ouvrir une voie beaucoup plus large et toute nouvelle d'investigations relatives à des courbes géométriques d'ordre quelconque, voie dans laquelle personne n'est entré si je ne me trompe, même depuis la présentation à l'Institut de mon Mémoire de 1830, sur l'*Analyse des transversales*. [Poncelet 1864, p. 67]

C'est à ma connaissance la première apparition de la théorie des transversales dans l'œuvre de Poncelet. Il n'en est en effet pas question dans le *Manuscrit de Saratoff* [Poncelet 1862]. Poncelet semble cependant s'être familiarisé très tôt avec cette théorie. Dans l'introduction du *Traité*, il signale en effet que son professeur au lycée de Metz, M. Badelle³², « ne manquait jamais de donner une notion suffisamment approfondie des principes de cette Théorie » [Poncelet 1822, p. xxxv]. Poncelet fait allusion à des essais effectués par des mathématiciens « bien connus » mais sans mentionner de noms. C'est dommage car cela permettrait de mieux apprécier l'originalité de sa méthode. Dans son *Essai sur la théorie des transversales*, Carnot établit

³¹ Elle fait l'objet d'un appendice ajouté par Marie Alphonse Blanchet [Legendre 1862, pp. 252-260]. Jacques Hadamard lui consacre aussi quelques pages dans ses *Leçons de géométrie élémentaire* [Hadamard 1898], ouvrage réédité jusqu'au milieu du xx^e siècle. Dans le monde germanophone, cette théorie apparaît notamment dans un manuel d'August Crelle [Crelle 1826] ainsi que dans une monographie d'un enseignant suisse, Carl Adams, spécifiquement consacrée à ce sujet. L'auteur reprend à son compte le jugement de Brianchon cité ci-dessus [Adams 1843, p. III].

³² Il s'agit de Jean-Claude Badelle (1777-1848). Cf. [Bruneau 2017, pp. 39-40] et [Rollet 2017, pp. 244-245].

seulement quelques théorèmes de la géométrie du cercle à l'aide du théorème de Ménélaüs³³. Dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre* [Briançon 1817], Briançon utilise aussi ce résultat pour démontrer le théorème de Pascal pour un cercle. Ce texte est cependant postérieur à l'hiver 1815-16. Poncelet est probablement le premier à avoir eu l'idée d'élargir les applications du théorème de Carnot à des courbes et surfaces géométriques d'ordre quelconque. Cette idée semble s'être imposée à lui comme une sorte d'illumination. Dans une note ajoutée en 1864 lors de l'édition de son manuscrit, il déclare avoir embrassé en 1816 « avec une sorte d'enthousiasme et de prédilection exclusive, l'idée de la supériorité de l'analyse des transversales sur ces divers systèmes de représentation des lignes courbes par les équations ou relations métriques quelconques » [Poncelet 1864, p. 133]³⁴. Nous verrons dans l'*Historique* qui suit en quoi consiste cette supériorité. La dernière phrase de l'extrait cité ci-dessus met enfin en évidence un point important sur lequel je reviendrai à la fin de cet article : la méthode de Poncelet n'a pas été reprise par d'autres mathématiciens³⁵.

Si cette citation situe le contexte et témoigne de la volonté de Poncelet d'ouvrir une voie « large » et « nouvelle », elle n'entre pas dans le détail de ses motivations. Il faut pour ceci examiner l'*Historique servant d'introduction à une théorie des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des courbes géométriques* rédigé durant l'hiver 1822-1823³⁶, soit après la publication du *Traité*. Après quelques lignes sur les Anciens, Poncelet souligne le rôle déterminant joué par Descartes dans l'étude des courbes géométriques. Il poursuit en mettant au premier plan au XVIII^e siècle les travaux de Newton et MacLaurin. Le premier a donné dans son *Enumeratio* de « beaux résultats » [Poncelet 1866, p. 317] sur les courbes géométriques, résultats auxquels il faut ajouter le théorème de Cotes. Ces différents théorèmes ont ensuite été repris par MacLaurin. Poncelet relève que ce dernier a trouvé plusieurs autres théorèmes concernant en particulier les tangentes, cercles osculateurs et coniques osculatrices du second ordre en des points donnés d'une courbe géométrique. Nous verrons que le traité de MacLaurin constitue une référence importante pour Poncelet. Comme il l'explique dans deux notes ajoutées en 1864 au *Deuxième cahier* lors de sa publication [Poncelet 1864, p. 107 et p. 120], c'est après avoir soumis en

³³ L'un d'eux est le théorème de Pascal [Carnot 1806, p. 93].

³⁴ Quelques détails sur ces autres systèmes sont donnés par Poncelet dans l'*Historique* présenté ci-dessous.

³⁵ Poncelet signale seulement une preuve du théorème de Pascal à partir du théorème de Carnot due à Charles Sturm [Sturm 1826-27, p. 189].

³⁶ [Poncelet 1866, pp. 316-321]. Ce texte a été présenté ci-dessus.

1816 à Français³⁷ ses propres recherches, fondées sur le théorème de Carnot, qu'il prit connaissance de celles de MacLaurin et constata qu'il était arrivé en partie aux mêmes résultats, mais par une autre méthode. La lecture de ce texte suscita chez lui un vif intérêt et il en réalisa une traduction. Comme indiqué ci-dessus, le traité de MacLaurin expose une approche des courbes géométriques, et en particulier de celles du 3^e ordre, fondée essentiellement sur un seul théorème. Une fois celui-ci démontré, les propriétés de ces courbes sont établies de manière purement géométrique. Poncelet procédera de manière analogue en faisant appel à un unique principe : le théorème de Carnot. La proximité des intentions explique sans doute son intérêt pour MacLaurin.

Revenons à l'*Historique*. Parmi les autres mathématiciens du XVIII^e siècle Poncelet mentionne encore Gabriel Cramer et son *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* [Cramer 1750]. Il considère que cet ouvrage contient tout ce qui était connu en France au XVIII^e siècle sur ce sujet. Tout en reconnaissant son mérite, il lui fait le reproche suivant :

[...] mais ces recherches, ces solutions de problèmes infiniment utiles aux arts qui se fondent sur le dessin linéaire, ne sont là présentées ou résolues qu'à l'aide des équations des courbes et par le calcul des abscisses et ordonnées ; on n'opère presque jamais sur les lignes, sauf dans quelques cas très-simples ; en un mot, c'est de l'Analyse algébrique, admirable, il est vrai, par son universalité, mais non de la Géométrie telle que le réclament les divers besoins des arts. [Poncelet 1866, p. 318]

Il s'agit pour Poncelet de raisonner directement sur les figures sans recourir à une équation dans un système de coordonnées. On notera l'importance accordée aux applications pratiques et en particulier aux constructions linéaires³⁸. Nous verrons qu'il s'agit d'une préoccupation constante chez Poncelet. Il poursuit en rendant compte de différents essais de Lacroix, Ampère, Carnot et Frégier visant à choisir des systèmes de coordonnées plus pratiques que celui des coordonnées cartésiennes. Les résultats obtenus par ces mathématiciens ne sont cependant pas entièrement convaincants. Poncelet affirme qu'il s'agit de définir et de représenter les courbes « par une propriété tellement générale, qu'elle puisse appartenir à la fois à toutes les lignes et à toutes les combinaisons

³⁷ Jacques-Frédéric Français (1775-1833), professeur à l'Ecole d'application du génie et de l'artillerie de Metz. Français disposait d'une riche bibliothèque, héritée de Louis Arbogast (1759-1803), et prêta l'ouvrage de MacLaurin à Poncelet au printemps 1816 [Poncelet 1864, p. 120].

³⁸ Le sens de ce terme est discuté au § 3 ci-dessous.

de lignes, sans cesser pourtant de les caractériser d'une manière individuelle » [Poncelet 1866, p. 320]. Après avoir cité un passage du *Traité* [Poncelet 1822, p. xxxiv] soulignant l'importance de trouver toujours les propriétés les plus générales et les plus simples de l'étendue, Poncelet poursuit :

Or ces conditions ne peuvent être remplies que par un système de coordonnées qui offre lui-même la plus grande indépendance possible, soit quant à la situation des parties, soit quant à leur grandeur ; en sorte, par exemple, que le simple déplacement de ce système ne puisse aucunement modifier l'équation qui représente la courbe, non-seulement quant à la forme générale, mais aussi quant aux constantes ou coefficients qui y entrent : on peut même dire, en généralisant davantage encore, que la question est de trouver un système de coordonnées qui délivre l'équation de la courbe de toute espèce de constante explicite. En effet, cette équation fera découvrir les propriétés les plus universelles de toutes les courbes du même genre, sans égard à l'espèce particulière et à la grandeur des figures, c'est-à-dire ce que j'ai nommé ailleurs leurs *propriétés projectives*. [Poncelet 1866, p. 320]

Le sens donné à la notion de propriétés projectives d'une courbe est plus large et moins précis que celui donné au début du *Traité*. Ce n'est pas en premier lieu l'invariance par projection qui les caractérise mais l'absence de toute considération de grandeur et leur caractère universel. Ce dernier qualificatif est cependant vague. Comme Poncelet l'explique dans la fin de ce texte, c'est le théorème de Carnot qui permet de parvenir à cette universalité. Il suit de près ce dernier auquel il se réfère. L'auteur de la *Géométrie de position* écrit en effet :

Mieux on réussit à dégager l'équation d'une courbe des arbitraires, qu'y fait entrer sa position à l'égard des axes fixes dans l'espace ou inhérens à cette courbe, moins cette équation est restreinte dans sa forme. Par exemple, la propriété des cordes qui se coupent dans le cercle, présente la nature de cette courbe sous un point de vue plus général, que son équation à l'égard de deux axes fixes pris arbitrairement dans le même plan ; [...]

Par la même raison, les propriétés connues (376) des abscisses naturelles comparées aux appliquées correspondantes, sont plus générales que celles des abscisses prises dans le sens ordinaire ; c'est-à-dire, à partir d'un point fixe, comparées à leurs appliquées ; car les premières sont dégagées de la considération du point fixe, et par conséquent, des arbitraires que cette considération introduit dans l'équation, en prenant les abscisses dans le sens ordinaire.

Mais quoique la position de l'origine des coordonnées n'entre pour rien dans l'équation entre les abscisses naturelles et les appliquées correspondantes, la direction de ces axes reste toujours la même ; et par conséquent, il faut que l'équation renferme encore quelque chose d'arbitraire pour exprimer cette

direction ; la forme de ces équations n'est donc pas encore aussi indépendante qu'elle pourroit l'être.

C'est pour faire disparaître les arbitraires qu'entraîne cette direction ou ce parallélisme constant des coordonnées, que j'ai établi les théorèmes (377, 378). Ainsi ces propositions expriment les propriétés des courbes d'une manière encore plus générale. [Carnot 1803, pp. 474-475]

Dans le deuxième et le troisième paragraphe, Carnot fait allusion au théorème de Newton sur le rapport constant des produits des abscisses et des appliquées parallèles. Ce théorème ne nécessite pas de fixer une origine mais seulement deux directions. Le théorème du no 378 mentionné dans le dernier paragraphe est le théorème fondamental de Carnot. Poncelet cite presque intégralement ce texte et ajoute que les réflexions de Carnot se rapprochent beaucoup des siennes. Il s'étonne ensuite de voir ce dernier en abandonner les conséquences et chercher à proposer un autre système moins naturel. Il réaffirme encore une fois qu'il n'y a rien de plus général que la relation entre les segments déterminées par une courbe et des transversales. Elle appartient en effet à toutes les courbes et « ne dépend explicitement d'aucune grandeur absolue et particulière de ces courbes ou des objets auxquels on les rapporte » [Poncelet 1866, p. 321]. C'est donc une propriété projective au sens élargi donné précédemment³⁹. La méthode de Poncelet est cependant confrontée à un double problème : comment définir une courbe géométrique sans considérer son équation dans un système de coordonnées, et comment établir ensuite le théorème de Carnot⁴⁰ ? Comme nous allons le voir (§ 2.4 et § 4), Poncelet répond à la première question en supposant qu'une courbe géométrique est caractérisée par le fait que toute droite la coupe en un nombre fini et constant de points. Nous verrons ensuite (§ 4) comment il essaye de démontrer le théorème de Carnot à partir de cette définition.

2.4. *Le principe de continuité appliqué à la théorie des courbes géométriques*

À côté de la notion de propriété projective, le principe de continuité constitue un autre élément essentiel des méthodes de Poncelet. On le retrouve dans tous ses travaux. C'est grâce à lui que la géométrie ordinaire

³⁹ C'est naturellement aussi une propriété projective au sens plus restreint donné au début du *Traité* puisqu'elle est invariante par projection (cf. début du § 3 ci-dessous).

⁴⁰ Rappelons que ce dernier utilise dans sa preuve le théorème de Newton sur le rapport constant entre les produits des abscisses et des ordonnées parallèles.

peut atteindre à la même généralité que la géométrie analytique ⁴¹. Ce principe a fait l'objet d'un long mémoire rédigé durant l'hiver 1818-1819 et publié comme quatrième cahier dans le second tome des *Applications d'analyse et de géométrie* [Poncelet 1864, pp. 296-362]. Il est aussi présenté en détail dans l'introduction du *Traité* et dans une lettre de Poncelet à Olry Terquem du 23 novembre 1818 [Poncelet 1864, pp. 530-539]. Sa formulation est très générale et il a fait l'objet de critiques de Cauchy ⁴². Ce sont avant tout les exemples donnés par Poncelet qui permettent d'en comprendre le sens. Le principe de continuité revient à admettre une « permanence des relations » [Poncelet 1864, p. 338]. Lorsqu'une figure se transforme, certains de ses éléments peuvent perdre leur « existence géométrique » et certaines relations les concernant cessent alors d'exprimer « quelque chose de réel » [Poncelet 1864, p. 338]. Le principe de continuité permet cependant de dire que les « conceptions et les lois » appartenant à un état « primitif et réel » d'un système s'étendent à un état « purement idéal » de ce dernier [Poncelet 1864, pp. 345-346]. Poncelet donne l'exemple de deux droites sécantes qui se déplacent de manière à devenir parallèles. Le point d'intersection disparaît et on exprime cette « non-existence géométrique » en disant qu'il est « à l'infini » [Poncelet 1864, p. 346]. Poncelet écrit :

Ainsi, en vertu du principe de continuité, on applique ou l'on étend aux systèmes de droites parallèles, dont l'intersection n'est qu'idéale, les mêmes notions que celles qu'on a reconnues appartenir aux droites qui concourent en un point réel. [Poncelet 1864, p. 347]

Le principe de continuité joue un rôle important dans l'étude des courbes. Poncelet s'exprime de manière détaillée sur ce sujet :

[...] examinons, toujours sous le point de vue qui précède, le système d'une ligne droite et d'une courbe quelconque continue, situées l'une et l'autre sur un même plan ; supposons encore que, dans leur position actuelle, elles se coupent suivant le plus grand nombre possible de points tous réels et distincts : si l'on vient à écarter la ligne droite de sa position primitive par un mouvement progressif et continu, mais d'ailleurs quelconque, il pourra arriver que, si la courbe a des branches illimitées, un certain point d'intersection, après s'être écarté sans

⁴¹ On pourra consulter sur ce sujet [Belhoste 1998], [Nabonnand 2011] et [Nabonnand 2017, pp. 214-218].

⁴² Elles sont formulées dans un rapport de Cauchy concernant un mémoire de Poncelet sur les propriétés projectives des coniques soumis à l'Académie des Sciences en 1820. Ce mémoire a été publié comme cinquième cahier du second tome des *Applications d'analyse et de géométrie* [Poncelet 1864, pp. 365-454]. Le rapport de Cauchy figure dans le même ouvrage [Poncelet 1864, pp. 555-563].

cesse des autres, finisse par s'en trouver à une distance plus grande que toute distance donnée : alors ce point aura passé à l'infini et la droite sera devenue *parallèle* à la branche correspondante de la courbe. [Poncelet 1864, p. 349]

Une autre possibilité est que deux points d'intersection réels finissent par se confondre. Leur distance est alors nulle et a « perdu toute existence géométrique ». Pour conserver cependant à celle-ci « une existence au moins idéale » et considérer comme précédemment les deux points comme distincts, on dit qu'ils sont « à une *distance infiniment petite* » [Poncelet 1864, p. 349]. La droite passant par ces deux points est alors tangente à la courbe. Si elle continue à se déplacer, il peut arriver qu'elle cesse de couper la courbe et que les deux points deviennent « *imaginaires* » [Poncelet 1864, p. 350]. La droite peut ensuite redevenir tangente puis sécante. Elle peut également passer à l'infini. Dans ce cas elle peut aussi être tangente à la courbe ou avoir en commun avec elle des points imaginaires comme une sécante ordinaire. Poncelet affirme que « cela résulte immédiatement encore de l'admission de la continuité » [Poncelet 1864, p. 350]. Dans le cas où la droite n'est pas située tout entière à l'infini, il est possible que deux points d'intersection viennent à se confondre tout en passant à l'infini. La droite devient alors une asymptote de la courbe. Il conclut :

On voit par cette discussion, que, pour établir l'idée de la continuité dans la conjonction de la droite et de la courbe pendant toute la durée du mouvement de cette droite, on est obligé de conserver aux points de leur intersection commune une existence individuelle et purement hypothétique, toutes les fois qu'ils viennent à cesser d'être d'une manière absolue.

Il suit de là que le nombre de ces points d'intersection réels ou fictifs est toujours regardé comme le même dans quelque position qu'occupe la droite qui les porte, ce qui s'étend, comme nous l'avons vu, au cas même où la droite passe tout entière à l'infini. Ce nombre invariable, qui marque aussi le plus grand nombre possible de points d'intersection réels, est ce qu'on nomme le *degré* de la courbe. [Poncelet 1864, pp. 351-352]

Poncelet ajoute en note que si ce nombre est fini, la courbe est géométrique⁴³. Dans le cas contraire, elle est transcendante. On a donc là une définition synthétique d'une courbe géométrique. On notera dans toutes ces explications que les figures sont constamment considérées comme étant en mouvement, passant d'un état à un autre. Comme nous le verrons, Poncelet ne se préoccupe pas dans ses raisonnements de savoir si les n points

⁴³ Le terme « degré » est utilisé ici dans le sens d'ordre. Nous verrons plus loin que Poncelet ne distingue pas clairement les deux termes.

d'intersection d'une courbe d'ordre n avec une droite sont réels ou imaginaires, distincts ou confondus, à l'infini ou non. Des considérations semblables s'appliquent aussi aux points d'intersection de deux courbes. Si l'une d'elles se déplace, ces points peuvent passer à l'infini, se confondre ou devenir simultanément deux à deux imaginaires. Il se peut aussi que trois ou quatre points viennent à se confondre, auquel cas les deux courbes sont osculatrices du deuxième ou du troisième ordre en ces points.

3. ANALYSE DU DEUXIÈME CAHIER DU SECOND TOME DES APPLICATIONS D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

Après avoir décrit l'origine et l'enjeu des recherches de Poncelet, nous pouvons examiner plus en détail leur contenu mathématique en commençant par le *Deuxième cahier* de 1815-16 intitulé *Méthode des transversales appliquée à la recherche et à la démonstration des propriétés des lignes et surfaces géométriques*⁴⁴. Il présente l'avantage, par rapport au mémoire publié quinze ans plus tard dans le *Journal de Crelle* [Poncelet 1832], d'exposer en détail la méthode et de donner de nombreux d'exemples d'application. Il est divisé en quatre parties.

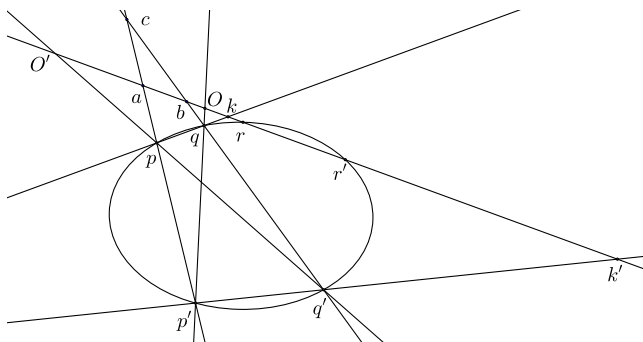


Figure 2. Le théorème de Carnot pour une conique

La première est consacrée au théorème de Carnot et présente un certain nombre d'applications. Poncelet énonce d'abord ce théorème dans le cas d'une conique (fig. 2) :

Théorème fondamental. – Si les côtés d'un triangle abc rencontrent une section conique quelconque en trois couples de points p et p' , q et q' , r et r' , on

⁴⁴ En dépit du titre, ce travail ne traite pratiquement pas des surfaces.

aura, entre les segments formés par la courbe, sur les côtés prolongés du triangle abc , la relation

$$ap \cdot ap' \cdot br \cdot br' \cdot cq \cdot cq' = ar \cdot ar' \cdot bq \cdot bq' \cdot cp \cdot cp'$$

que nous écrirons simplement ainsi

$$(a) \quad (ap)(br)(cq) = (ar)(bq)(cp).$$

[Poncelet 1864, p. 68]

Poncelet note que la relation (a) est projective et qu'il suffit de la démontrer pour un cercle⁴⁵. Or elle est immédiate dans ce cas⁴⁶.

Il déduit de ce théorème plusieurs résultats importants. Soit k et k' les points d'intersection des cordes pq et $p'q'$ avec le côté ab du triangle. Comme les droites pqk et $p'q'k'$ sont transversales du triangle abc , le théorème de Ménélaüs donne

$$cp \cdot bq \cdot ak = ap \cdot cq \cdot bk$$

$$cp' \cdot bq' \cdot ak' = ap' \cdot cq' \cdot bk'.$$

En multipliant ces deux égalités avec l'égalité (a) et en simplifiant, on obtient l'égalité

$$(br)(ak) = (ar)(bk).$$

Elle revient à dire que les trois couples de points $a, b; k, k'; r, r'$ sont en involution. Soit O et O' les points d'intersection des diagonales $p'q$ et pq' avec ab . Un calcul du même type permet d'établir l'égalité

$$(aO)(bk) = (bO)(ak).$$

Les trois couples de points $a, b; O, O'; k, k'$ sont donc aussi en involution. Comme on le sait, cette notion remonte à Desargues et c'est à lui que sont dus les deux théorèmes d'involution (pour un quadrilatère inscrit à une conique et pour un quadrilatère complet) établis par Poncelet⁴⁷. En

⁴⁵ Une propriété projective peut être « graphique » ou « métrique » [Poncelet 1822, p. 5]. La manière de déterminer si une relation métrique est conservée par projection est discutée au début du *Traité* [Poncelet 1822, section 1, chapitre 1].

⁴⁶ C'est une conséquence du théorème du produit constant. Dans son *Essai sur la théorie des transversales*, Carnot prouve déjà de cette manière le théorème pour un cercle [Carnot 1806, p. 72]. Il affirme ensuite qu'il se généralise à une ellipse et même à une conique quelconque. La notion de propriété projective n'est cependant chez lui pas aussi claire que chez Poncelet.

⁴⁷ [Desargues 1639, pp. 16-17] et [Taton 1981, p. 143]. Chez Desargues, les deux énoncés apparaissent dans l'ordre inverse. Desargues démontre le théorème d'involution d'abord pour un quadrilatère complet et ensuite pour un quadrilatère inscrit à une conique.

1816 le *Brouillon project* de Desargues est cependant depuis longtemps inaccessible et son existence n'est connue que par quelques mentions faites par ses contemporains⁴⁸. Si dans son *Traité* Poncelet fait référence à Desargues [Poncelet 1822, p. 95], ce n'est pas le cas dans le texte étudié dans ce paragraphe et le terme d'involution n'est pas utilisé. Une note ajoutée à la deuxième édition du *Traité* indique que c'est la publication d'un mémoire de Brianchon qui attira l'attention de Poncelet sur Desargues⁴⁹. En 1816 c'est sans doute grâce à Carnot qu'il connaît le théorème d'involution pour un quadrilatère complet. Ce résultat est en effet démontré dans la *Géométrie de position*⁵⁰ et Poncelet parle d'une « relation connue » [Poncelet 1864, p. 70]. Sa preuve est plus simple que celle de Carnot. Chez ce dernier, le résultat est obtenu comme corollaire d'un théorème sur les coniques particularisé au cas de deux droites. Carnot ne fait pas allusion à Desargues et à la notion d'involution.

Après avoir établi les théorèmes d'involution de Desargues, Poncelet démontre par des calculs du même type le théorème de Pascal pour un hexagone inscrit à une conique⁵¹. Relevons encore que peu de temps après, Brianchon commencera son *Mémoire sur les lignes du second ordre* en démontrant aussi les théorèmes d'involution de Desargues et le théorème de Pascal⁵².

⁴⁸ Une copie du mémoire de Desargues ne sera retrouvée et publiée qu'en 1864. L'énoncé du théorème d'involution pour un quadrilatère inscrit à une conique est cité par Pascal dans son *Essay pour les coniques* [Pascal 1640]. Les géomètres du début du XIX^e siècle ont eu accès à cette courte note grâce à l'édition donnée par Charles Bossut dans le tome IV des *Œuvres* de Pascal [Pascal 1779, pp. 1-7].

⁴⁹ [Poncelet 1865, p. 409]. Dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Brianchon cite en effet la référence au théorème d'involution de Desargues donnée par Pascal [Brianchon 1817, p. 15].

⁵⁰ [Carnot 1803, pp. 456-457]. Poncelet s'y réfère dans son *Traité* [Poncelet 1822, p. 92].

⁵¹ Ce théorème est énoncé sans démonstration par Pascal dans son *Essay pour les coniques* [Pascal 1640]. Carnot en donne une preuve dans sa *Géométrie de position* [Carnot 1803, p. 452]. Il ne fait cependant pas référence à Pascal et, à l'instar du théorème d'involution de Desargues pour le quadrilatère complet, ce résultat apparaît comme corollaire d'une suite d'autres théorèmes (cf. [Centina 2022]). Carnot redémontre le théorème de Pascal pour un cercle dans son *Essai sur la Théorie des transversales* [Carnot 1806, p. 93]. Sa preuve est différente et se rapproche de celle de Poncelet puisqu'elle fait appel au théorème de Ménélaüs. Relevons encore que dans son *Manuscrit de Saratoff*, Poncelet donne une preuve « projective » en projetant la figure dans une situation particulière où le théorème s'établit facilement [Poncelet 1862, pp. 135-136]. Cette méthode est utilisée à la même époque par Gergonne [Gergonne 1813-1814].

⁵² [Brianchon 1817]. Comme chez Poncelet, le terme d'involution n'est pas utilisé. Desargues et Pascal sont en revanche mentionnés. Les preuves de Brianchon sont étudiées dans [Centina 2022]. Elles sont différentes de celles de Poncelet. Ce dernier

Poncelet poursuit avec des problèmes de construction. Il montre d'abord que la relation (a) permet de « tracer par points » [Poncelet 1864, p. 72] une conique déterminée par cinq points p, p', r, r' et Q (cf. fig. 3). Comme $cq' = bq' - bc$, on voit que bq' est déterminé par une équation du 1^{er} degré. Le point d'intersection q' avec la conique de toute droite passant par Q est donc donné par une construction « linéaire ». Ce qualificatif a deux sens chez Poncelet et il convient d'apporter quelques précisions. Dans le cas présent, le point cherché q' peut être construit à partir du rapport cq'/bq' . Poncelet parle plus loin d'un tracé « par le calcul »⁵³. Mais comme nous le verrons, l'appellation « linéaire » peut aussi désigner une construction effectuée « avec la règle seule »⁵⁴. L'intérêt pour ce type de constructions apparaît déjà dans le mémoire de Servois mentionné au § 2.2 [Servois 1804]. Il est dicté par des considérations pratiques. Servois entend exposer des constructions réalisables avec le minimum d'outils lors de campagnes militaires. On retrouve cet intérêt chez Brianchon⁵⁵. Selon Belhoste, il est commun à tous les disciples de Monge⁵⁶.

Revenons à la relation (a). Elle peut être simplifiée en introduisant le point d'intersection k des droites pq' et rr' (fig. 3). En considérant la transversale $pq'k$ du triangle abc , le théorème de Ménélaüs donne l'égalité

$$cp \cdot bq' \cdot ak = ap \cdot cq' \cdot bk.$$

En multipliant cette égalité par (a), on obtient

$$ap' \cdot cQ \cdot (br) \cdot ak = (ar) \cdot cp' \cdot bQ \cdot bk.$$

ne manquera pas de mettre ultérieurement en évidence la priorité de ses recherches. Dans une note ajoutée en 1864 lors de la publication de son mémoire, il relève qu'en 1816, époque où le mémoire de Brianchon n'avait pas encore paru, il avait déjà généralisé le théorème d'involution à des courbes géométriques d'ordre quelconque [Poncelet 1864, p. 70]. Nous verrons plus loin (cf. note 81) en quoi consiste cette généralisation.

⁵³ [Poncelet 1864, p. 88]. L'exemple est cité ci-dessous.

⁵⁴ [Poncelet 1864, p. 82]; cf. également [Poncelet 1832, p. 221]. Relevons que dans le cas présent, le théorème de Pascal permet de construire à la règle seule le point q' à partir des cinq autres points de la courbe. La construction est donnée dans le *Manuscrit de Saratoff* [Poncelet 1862, p. 138].

⁵⁵ [Brianchon 1818]. Dans son *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Brianchon accorde une grande importance à ce type de constructions. Il écrit en particulier « qu'un problème linéaire, ou problème de la règle, est celui dont la résolution graphique s'effectue avec la ligne droite seule » [Brianchon 1817, p. 6].

⁵⁶ [Belhoste 1998, p. 4]. Chasles relève que cet intérêt apparaît déjà au xviii^e siècle dans le second livre des *Exercitationes Geometricae* de Frans van Schooten [Chasles 1837, p. 98].

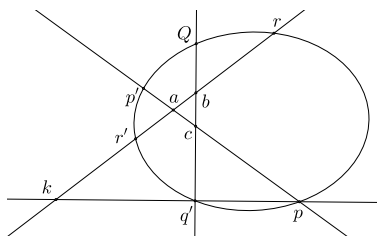


Figure 3. Simplification du théorème de Carnot pour une conique

Chacun des termes de cette dernière égalité ne contient plus qu'un produit de cinq facteurs et le point inconnu k peut être déterminé linéairement⁵⁷. L'introduction de la transversale $pq'k$ permet d'éliminer les points p et q' . Cette technique « d'élimination des segments »⁵⁸ sera régulièrement utilisée par Poncelet. Il obtient grâce à elle des relations encore valables lorsque certains points sont dans des positions particulières. En supposant ainsi que c est situé sur la courbe et donc confondu avec q' et p , la relation précédente permet de déterminer linéairement la tangente en ce point. Remarquons que la tangente en un point d'une conique dont on connaît encore quatre points peut être construite à la règle seulement en utilisant le théorème de Pascal⁵⁹.

Après avoir examiné des cas particuliers⁶⁰ et donné encore deux exemples d'application du théorème de Carnot à des systèmes de coniques, Poncelet passe aux courbes géométriques d'ordre quelconque. La relation (a) conserve la même forme⁶¹. Si une courbe d'ordre m coupe le triangle transversal en $3m$ points et que parmi ceux-ci $3m - 1$ sont donnés, le dernier est constructible linéairement. La technique d'élimination des segments présentée ci-dessus pour déterminer la tangente en un point d'une conique se généralise sans autre.

⁵⁷ Comme $bk = ak + ab$, le point k est déterminé par une équation du 1^{er} degré. Le terme « linéairement » est employé dans le même sens qu'avant.

⁵⁸ Ce terme est introduit plus loin par Poncelet dans le cas d'une courbe d'ordre quelconque [Poncelet 1864, p. 78].

⁵⁹ Cette construction est donnée par Poncelet dans son *Manuscrit de Saratoff* [Poncelet 1862, p. 139]. Il faut supposer que deux sommets de l'hexagone inscrit à la conique sont confondus.

⁶⁰ Un côté du triangle transversal est tangent à la conique ou un ou plusieurs de ses sommets sont situés sur celle-ci.

⁶¹ Poncelet tentera de donner une preuve non algébrique dans le cas général dans son mémoire *Analyse des transversales* (cf. § 4 ci-dessous).

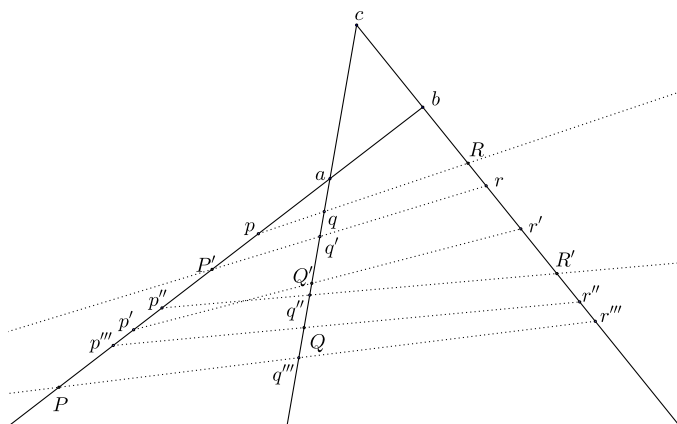


Figure 4. Construction d'un point d'intersection d'une courbe géométrique avec le triangle transversal à partir des autres points d'intersection

Poncelet expose ensuite une autre méthode pour construire la tangente en un point d'une courbe. Nous allons voir qu'il s'agit d'une construction linéaire dans le deuxième sens du terme. Il la donne d'abord pour une courbe du 4^e ordre (fig. 4)⁶². Supposons que cette courbe coupe chacun des côtés du triangle transversal abc en quatre points. Soit p, p', p'', p''' les points situés sur ab , q, q', q'', q''' les points situés sur ac , r, r', r'', r''' les points situés sur bc . Considérons ensuite les six points $R = pq \cap bc$, $R' = p''q'' \cap bc$, $P' = rq' \cap ab$, $P = r'''q''' \cap ab$, $Q' = p'r' \cap ac$ et $Q = p'''r''' \cap ac$. En combinant la relation (a) appliquée à la courbe et au triangle transversal abc ainsi que les relations obtenues en appliquant le théorème de Ménélaüs aux six transversales pqR , $p''q''R'$, $rq'P'$, $r'''q'''P$, $p'Q'r'$ et $p'''Q'r'''$ du triangle abc , Poncelet obtient l'égalité

$$cR \cdot cR' \cdot bP \cdot bP' \cdot aQ \cdot aQ' = bR \cdot bR' \cdot aP \cdot aP' \cdot cQ \cdot cQ'.$$

Elle montre que les six points P, P', Q, Q', R, R' , « obtenus par la règle seule » [Poncelet 1864, p. 81], sont situés sur une conique. En effectuant une opération semblable avec ces six points, on obtient trois points alignés⁶³. Si onze des douze points d'intersection du triangle transversal abc avec la courbe sont connus, le dernier peut alors être construit à la règle.

⁶² Poncelet n'est pas très précis et parle tantôt de l'ordre d'une courbe géométrique et tantôt de son degré. Il parle ici d'une courbe du 4^e degré. Par souci de cohérence, j'utiliserai toujours le terme « ordre ».

⁶³ C'est le théorème de Pascal.

Supposons encore que le sommet a du triangle abc est sur la courbe. Les points p et q sont confondus et la droite pR est tangente à la courbe en ce point. On a donc une construction à la règle de cette tangente⁶⁴. La méthode se généralise à une courbe dont l'ordre est une puissance de deux. Poncelet explique encore comment procéder quand l'ordre de la courbe est un nombre impair⁶⁵.

Poncelet passe ensuite à un autre type de problème : déterminer et tracer une conique osculatrice en un point donné d'une courbe géométrique. Il commence par chercher une conique osculatrice du 2^e ordre en un point de la courbe et passant par deux autres points arbitrairement choisis. Expliquons sa méthode. Pour plus de simplicité, il suppose que la courbe donnée est du 3^e ordre et coupe chacun des côtés du triangle transversal abc en trois points p, p' et p'' , q, q' et q'' , r, r' et r'' . Considérons une conique passant par les trois points p', p'' et q'' et rencontrant encore les côtés du triangle abc aux points R, R', Q (fig. 5 gauche). En multipliant terme à terme la relation (a) appliquée à la courbe et cette même relation appliquée à la conique, Poncelet obtient l'égalité

$$(1) \quad ap \cdot bq \cdot bq' \cdot (cr) \cdot aR \cdot aR' \cdot cQ = bp \cdot cq \cdot cq' \cdot (ar) \cdot cR \cdot cR' \cdot bQ^{66}.$$

Les points p', p'' et q'' n'apparaissent plus dans cette égalité. Supposons que la transversale ab devienne tangente à la courbe. Les points p' et p'' se réunissent en un seul mais l'égalité (1) reste vraie. Supposons encore que la transversale bc se déplace de manière à ce que q'' , et donc b , se confonde avec ces deux points. La conique a alors un contact triple avec la courbe en b (fig. 5 droite). Elle est osculatrice du 2^e ordre en ce point et passe par deux points R et R' arbitrairement choisis. Ce raisonnement donne un bon exemple d'application du principe de continuité aux courbes. Certains éléments de la figure se déplacent et viennent à se confondre mais l'égalité (1) subsiste. Poncelet conclut que le tracé de l'osculatrice peut être effectué « à l'aide du calcul »⁶⁷. En construisant en effet la tangente à

⁶⁴ Comme Poncelet le confirmera ultérieurement [Poncelet 1832, p. 224], c'est à cette construction qu'il fait allusion, mais sans l'expliquer, dans un article contemporain des *Annales de mathématiques pures et appliquées* [Poncelet 1817–1818, p. 154]. L'article est destiné à montrer que les méthodes de la géométrie « pure », « celle où l'on s'interdit simplement l'usage de la méthode des coordonnées » [Poncelet 1817–1818, p. 142], peuvent rivaliser avec celles de la géométrie analytique. Rappelons qu'il s'agit d'un thème fondamental chez Poncelet.

⁶⁵ La méthode est expliquée en détail seulement pour une courbe du 3^e ou du 7^e ordre.

⁶⁶ Comme précédemment, $(cr) = cr \cdot cr' \cdot cr''$ et $(ar) = ar \cdot ar' \cdot ar''$.

⁶⁷ [Poncelet 1864, p. 88]. Dans une note ajoutée en 1864, Poncelet relève que le tracé par le calcul s'adresse aux ingénieurs qui ont besoin de tracer des courbes et

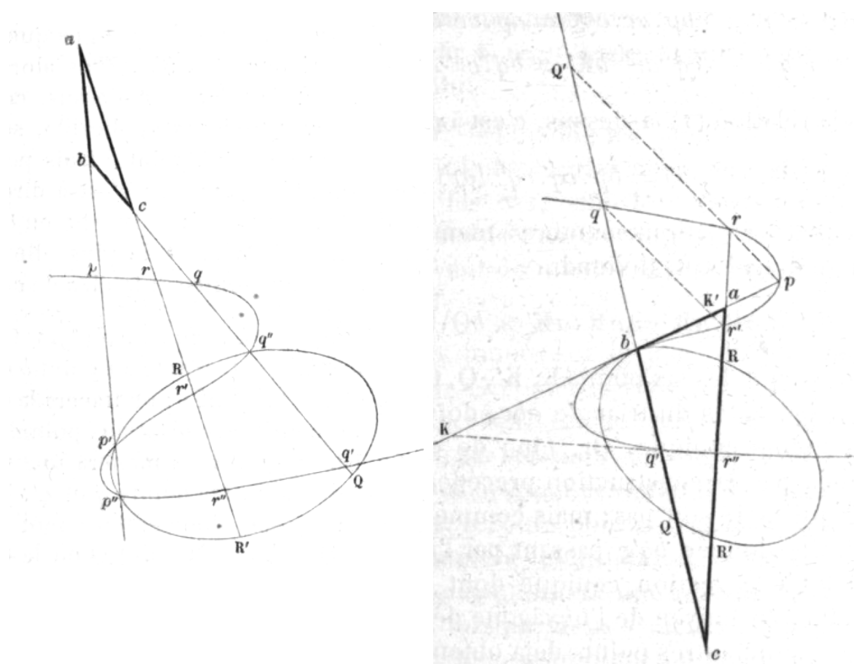


Figure 5. Conique et courbe du 3^e ordre ayant trois points d'intersection communs avec le triangle transversal [Poncelet 1864, fig. 54, p. 87] et conique osculatrice du 2^e ordre en un point d'une courbe du 3^e ordre [Poncelet 1864, fig. 55, p. 89]

la courbe en b , on trouve le point p . La droite RR' coupe cette tangente en a et la courbe en r , r' et r'' . Considérons encore une transversale arbitraire passant par b et coupant la courbe en q et q' et la droite RR' en c . Tous les points apparaissant dans l'égalité (1) sont connus à l'exception du point d'intersection Q de la transversale bc et de la conique. Ce point peut donc être déterminé par le calcul. Mais il est aussi possible de le déterminer par une « construction graphique qui n'exige que l'emploi de la règle ou d'alignements sur le terrain »⁶⁸. C'est une construction linéaire dans le second sens du terme. En appliquant le théorème de Ménélaüs aux transversales

figures de grande dimension soit sur le terrain, soit sur des épures. La question des osculatrices a donc un intérêt pratique.

⁶⁸ [Poncelet 1864, p. 89]. Poncelet parle aussi d'un « tracé purement linéaire ». On notera la référence à des alignements sur le terrain qui évoque les méthodes de Servois.

$r''q'K$, $r'K'q$, prQ' ⁶⁹ du triangle abc et en multipliant les égalités obtenues avec l'égalité (1), on obtient l'égalité

$$bK \cdot bK' \cdot cQ \cdot cQ' \cdot aR \cdot aR' = aK \cdot aK' \cdot bQ \cdot bQ' \cdot cR \cdot cR'.$$

Elle montre que les points K , K' , Q , Q' , R , R' sont situés sur une conique. Or cinq de ces points sont connus, ce qui permet de construire le point inconnu Q à la règle en utilisant le théorème de Pascal. La généralisation à une courbe d'ordre quelconque est seulement suggérée.

Poncelet montre ensuite comment construire par une méthode analogue une conique osculatrice du 3^e ordre en un point b d'une courbe et passant par un point R arbitrairement choisi. La méthode est expliquée pour des courbes du 3^e ordre et sa généralisation à une courbe d'ordre quelconque à nouveau seulement suggérée. Poncelet montre enfin comment construire la conique osculatrice du 4^e ordre en un point b d'une courbe du 3^e ordre. La généralisation à une courbe d'ordre quelconque est pratiquement irréalisable. Nous verrons plus loin de quelle manière Poncelet aborde à nouveau ce problème⁷⁰.

La deuxième partie du cahier est consacrée à une application particulière du théorème de Carnot aux courbes du 3^e ordre. Elle permet d'établir plusieurs propriétés remarquables de ces courbes. Poncelet retrouve à cette occasion des théorèmes déjà démontrés par MacLaurin⁷¹. Il commence en énonçant le théorème suivant (fig. 6) :

Théorème principal. – Soient p , p' , q , q' , r , r' six points situés à la fois sur une conique et une courbe du 3^e ordre; soient tracées les droites pp' , qq' , rr' , dont les rencontres mutuelles forment le triangle transversal abc , qui coupe la courbe aux nouveaux points P , Q , R ; je dis que ces trois points doivent appartenir à une ligne droite. [Poncelet 1864, p. 102]

⁶⁹ La figure 6 indique comment les points K , K' et Q' sont définis.

⁷⁰ Dans une note ajoutée en 1864, Poncelet écrit que ce sont ces difficultés qui l'ont incité à « changer de route » et à se rapprocher de la méthode de MacLaurin qu'il avait « ignorée jusque-là (1816) » [Poncelet 1864, p. 102]. La question du moment où cette méthode intervient dans les recherches de Poncelet sera discutée plus loin dans ce paragraphe.

⁷¹ Rappelons que Poncelet affirmera plus tard avoir effectué ses recherches sur les courbes du 3^e ordre avant de connaître l'ouvrage de MacLaurin [Poncelet 1864, p. 107]. La méthode suivie par Poncelet dans la deuxième partie de son cahier est en effet entièrement différente de celle de MacLaurin.

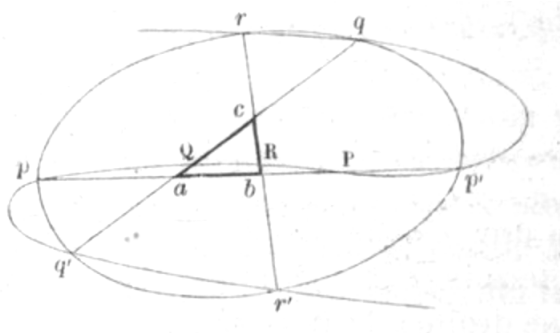


Figure 6. Le « théorème principal » [Poncelet 1864, fig. 63, p. 102]

Ce résultat est immédiat. En multipliant terme à terme la relation (a) appliquée à la courbe et la même relation appliquée à la conique, on obtient l'égalité

$$aP \cdot bR \cdot cQ = aQ \cdot bP \cdot cR.$$

Elle montre que les trois points P , Q et R sont alignés⁷².

On a le théorème réciproque :

Soit abc un triangle transversal d'une ligne du 3^e ordre; si trois quelconques des intersections p'' , q'' , r'' , appartenant à des côtés différents du triangle, sont sur une même droite, les six intersections restantes p , q , r , p' , q' , r' , sont sur une conique. [Poncelet 1864, p. 103]⁷³

Ce dernier résultat donne lieu à une « foule de conséquences curieuses et utiles » [Poncelet 1864, p. 104]. Poncelet donne plusieurs exemples. En voici un. Considérons la tangente en un point d'inflexion d'une courbe du 3^e ordre. Elle a un contact triple avec la courbe et on peut considérer que les points p'' , q'' , r'' sont alignés. Si d'un point d'inflexion s d'une courbe du 3^e ordre on mène trois sécantes arbitraires, elles couperont donc la courbe en six nouveaux points situés sur une conique. Poncelet en déduit les conséquences suivantes :

En particulier, du point d'inflexion s d'une courbe du 3^e degré, menez les sécantes arbitraires sp , sq , sr , les six autres intersections p , q et r , p' , q'

⁷² Poncelet suppose implicitement que parmi les trois points P , Q , R , seul un nombre pair (0 ou 2) d'entre eux sont situés sur les côtés intérieurs du triangle. Cette question est discutée en détail dans le mémoire *Analyse des transversales* [Poncelet 1832, pp. 123-124].

⁷³ Les points P , Q , R de la figure 6 correspondent aux points p'' , q'' , r'' de l'énoncé.

et r' étant à une simple conique, les droites opposées, qui, dans un ordre quelconque, joignent deux à deux ces six points, telles que, par exemple, qr et $q'r'$, qr' et $q'r$, etc., iront concourir sur une même ligne droite, et il en sera ainsi encore des couples de tangentes aux extrémités de chaque sécante : on peut appeler cette droite unique la *polaire* du point d'inflexion s ; or, cette polaire viendra couper la courbe aux trois points de contact des tangentes issues du pôle s . [Poncelet 1864, p. 105]

Poncelet ne justifie pas ces différentes propriétés. Donnons quelques explications. Remarquons tout d'abord que la « polaire » de s relativement à la courbe du 3^e ordre est la polaire de ce point relativement à n'importe quelle conique déterminée par les points d'intersection avec la courbe de trois sécantes pp' , qq' , rr' passant par s . Supposons que deux sécantes qq' et rr' sont confondues. Les droites qr et $q'r'$ sont alors tangentes à la courbe. Les tangentes à la courbe aux extrémités d'une sécante passant par s se coupent donc sur sa polaire. Supposons que la sécante $sp p'$ tourne autour de s en se rapprochant d'une des tangentes issues de s . Soit P le point de contact de cette tangente. Le point d'intersection des tangentes en p et p' tend alors vers P . Comme ce point d'intersection est situé sur la polaire de s , c'est aussi le cas de P . Ce résultat montre que les points de contact des tangentes issues de s sont alignés et que d'un point d'inflexion on ne peut mener que trois tangentes à la courbe, sans compter la tangente au point d'inflexion qui est comptée trois fois. Ces résultats figurent déjà chez MacLaurin⁷⁴.

Donnons encore un exemple d'application du « théorème principal ». Si les points d'intersection p' , q' , r' sont alignés de même que les points p'' , q'' , r'' , c'est aussi le cas des points p , q , r . Ce qui donne lieu au théorème suivant :

Si l'on inscrit à une ligne du 3^e ordre, un hexagone 1234561, dont deux systèmes de côtés respectivement opposés $q'r'$ et pp'' , qq' et $p''r''$, se rencontrent en des points p' et q'' situés sur la courbe, les deux derniers côtés $r'r''$, pq , ou 3.4 et 1.6, iront aussi concourir en un 3^e point de la courbe.⁷⁵ [Poncelet 1864, pp. 106-107]

⁷⁴ [MacLaurin 1748b, pp. 41-42]. Dans son mémoire *Analyse des transversales*, Poncelet déduit encore un autre corollaire de ce qui précède : une droite passant par deux points d'inflexion recoupe la courbe en un point d'inflexion. Une courbe du troisième ordre ne peut donc avoir plus de trois points d'inflexion et ceux-ci sont alignés [Poncelet 1832, p. 131]. Ce théorème se trouve aussi chez MacLaurin [MacLaurin 1748b, prop. X, p. 44].

⁷⁵ C'est le point r .

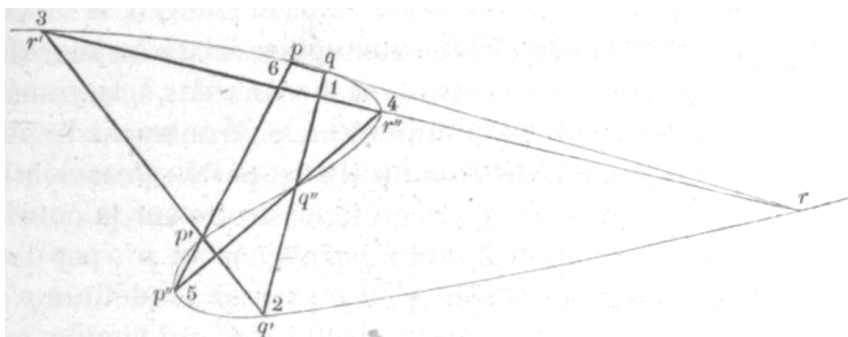


Figure 7. Hexagone inscrit à une courbe du 3^e ordre [Poncelet 1864, fig. 68, p. 107]

Si l'on suppose que p et q sont confondus, ce théorème livre une construction de la tangente en un point de la courbe. Elle est analogue à la construction de la tangente en un point d'une conique effectuée à partir du théorème de Pascal⁷⁶.

Poncelet poursuit en établissant directement à partir des théorèmes de Carnot et Ménélaüs le théorème suivant : les tangentes en trois points alignés d'une courbe du 3^e ordre recouperont celle-ci en trois points alignés⁷⁷. En particulier les trois asymptotes d'une courbe du 3^e ordre recouperont celle-ci en trois points alignés⁷⁸. La fin de la deuxième partie du mémoire est consacrée à la détermination du cercle osculateur à une courbe géométrique en un point donné⁷⁹. La relation obtenue ne permet cependant pas une construction à la règle seule.

La troisième partie du cahier présente une nouvelle méthode pour résoudre des problèmes de construction. Elle est fondée sur le théorème de MacLaurin (cf. § 2.1). Si les deux premières parties du cahier ont sans

⁷⁶ Dans une note ajoutée en 1864 lors de l'édition du manuscrit, Poncelet affirme que le théorème précédent constitue l'analogue pour les courbes du 3^e ordre du théorème de Pascal pour les coniques [Poncelet 1864, p. 107].

⁷⁷ Il s'agit à nouveau d'un théorème déjà établi par MacLaurin [MacLaurin 1748b, prop. VI, pp. 39-40]. Dans son mémoire *Analyse des transversales* Poncelet établira directement ce résultat à partir du « théorème principal » cité ci-dessus [Poncelet 1832, p. 130]. Il suffit en effet de supposer que la conique est constituée des deux droites confondues pqr et $p'q'r'$.

⁷⁸ Ce corollaire est donné dans le mémoire *Analyse des transversales* [Poncelet 1832, p. 130]. Il sera remarqué par Plücker [Plücker 1835, p. III] (cf. § 6 ci-dessous).

⁷⁹ Il s'agit aussi d'un problème traité par MacLaurin [MacLaurin 1748b, pp. 15-16].

doute été rédigées avant que Poncelet ne prenne connaissance du traité de son prédécesseur, ce n'est certainement pas le cas de cette troisième partie ni, comme nous le verrons, de la suivante. Poncelet se réfère en effet explicitement à MacLaurin et à la démonstration qu'il donne de son théorème⁸⁰. S'il reprend donc un résultat déjà établi, il en donne cependant une démonstration originale fondée sur la théorie des transversales. Voyons comment il procède. Supposons que la courbe (d'ordre m) soit coupée par un triangle transversal abc aux $3m$ points $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots, r, r', r'' \dots$ (fig. 8 gauche). Les transversales $rq, r'q', r''q'', \dots$ coupent la droite ab aux points $k, k', k'', \dots$. En appliquant le théorème de Ménélaüs à chacune de ces transversales, on obtient m égalités. En les combinant avec la relation (a) appliquée à la courbe, on obtient la relation

$$(bk)(ap) = (ak)(bp).$$

Cette égalité constitue une généralisation à une courbe d'ordre m du théorème d'involution de Desargues pour un quadrilatère inscrit à une conique⁸¹.

Poncelet suppose ensuite que ab devienne nul ou que la droite bcr' tourne autour du point c jusqu'à se confondre avec ac (fig. 8 droite). Les transversales $rq, r'q', \dots$ sont alors tangentes à la courbe. En effectuant quelques transformations à partir de l'égalité précédente et en tenant compte du fait que $ab = 0$, il démontre qu'on a la relation

$$\frac{1}{bk} + \frac{1}{bk'} + \frac{1}{bk''} + \dots = \frac{1}{bp} + \frac{1}{bp'} + \frac{1}{bp''} + \dots$$

C'est le théorème de MacLaurin⁸². Poncelet relève que la méthode des transversales a l'avantage d'éviter le recours au calcul différentiel⁸³. Ce résultat fournit une nouvelle méthode pour déterminer les différentes coniques osculatrices en un point d'une courbe géométrique. L'avantage de cette méthode, par rapport à celle exposée précédemment, est qu'elle s'applique quel que soit l'ordre de la courbe. Citons le début du raisonnement (fig. 9 gauche) :

⁸⁰ Si la rédaction du cahier a débuté durant l'hiver 1815-1816, elle s'est donc poursuivie au-delà du printemps 1816, époque à laquelle Poncelet prit connaissance de l'ouvrage de MacLaurin.

⁸¹ C'est la généralisation revendiquée par Poncelet et dont il a déjà été question précédemment (cf. note 52). Poncelet introduira ultérieurement une nouvelle terminologie et parlera de deux systèmes de points en « involution simple » par rapport à deux points donnés [Poncelet 1832, p. 228] (cf. § 4 ci-dessous).

⁸² [MacLaurin 1748b, th. 1, pp. 11-13]. Cf. § 2.1 ci-dessus.

⁸³ [Poncelet 1864, p. 120]. Il faut néanmoins avoir établi auparavant le théorème de Carnot.

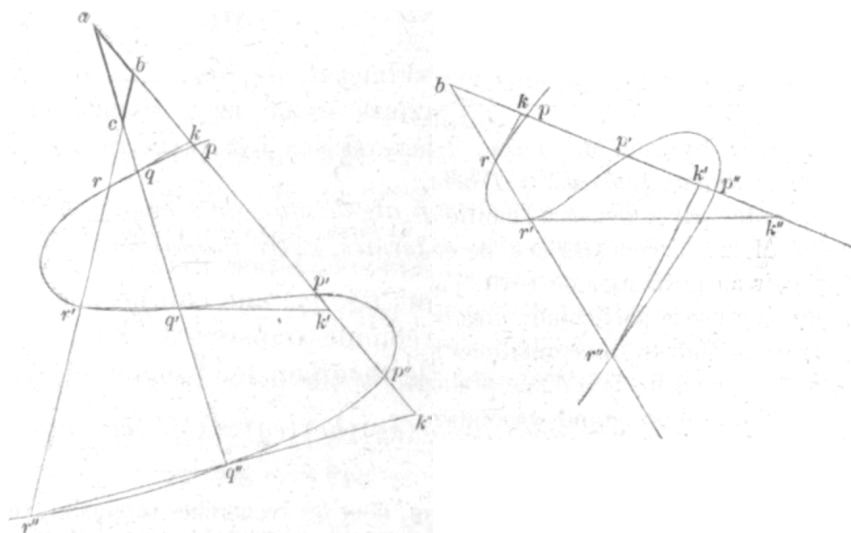


Figure 8. Généralisation à une courbe géométrique d'ordre m du théorème d'involution de Desargues [Poncelet 1864, fig. 77, p. 118] et le théorème de MacLaurin

Lemme général. Soit pp' une conique quelconque touchant la courbe donnée aux points p' et p'' ; traçons la corde de contact $p'p''$, elle coupera de nouveau la courbe aux points $p, \dots$. Soit cr une autre transversale quelconque, rencontrant la même courbe aux points r, r', r'' , et la conique en a et b ; qu'on trace de plus les tangentes aux points $p, p', \dots$, etc., elles viendront couper la transversale cr' aux points k, k', k'' , etc. Les tangentes $p'k'$ et $p''k''$ sont évidemment communes aux deux courbes; or, d'après le théorème ci-dessus de MacLaurin, on a à la fois

$$\frac{1}{cr} + \frac{1}{cr'} + \frac{1}{cr''} + \dots = \frac{1}{ck} + \frac{1}{ck'} + \frac{1}{ck''} + \dots$$

$$\frac{1}{ca} + \frac{1}{cb} = \frac{1}{ck'} + \frac{1}{ck''}$$

d'où l'on tire l'équation de condition suivante

$$\frac{1}{ca} + \frac{1}{cb} = \frac{1}{cr} + \frac{1}{cr'} + \frac{1}{cr''} + \dots - \frac{1}{ck} - \dots$$

pour exprimer que les deux courbes se touchent aux points p' et p'' à la fois. [Poncelet 1864, pp. 123-124]

Cette dernière égalité ne dépend pas de p' et p'' . Si de plus ces deux points sont confondus en un point P (fig. 9 droite), la conique est alors osculatrice du 3^e ordre à la courbe en ce point (les deux courbes ont quatre

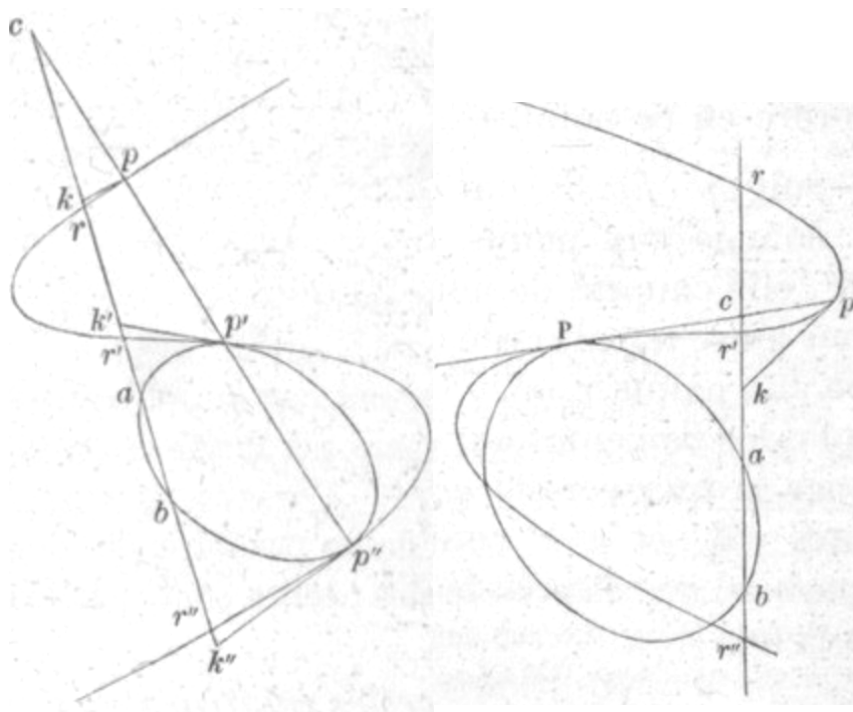


Figure 9. Conique doublement tangente à une courbe géométrique [Poncelet 1864, fig. 82, p. 124] et conique osculatrice du 3^e ordre en un point d'une courbe géométrique [Poncelet 1864, fig. 83, p. 124]

points communs en P). Si l'on fixe une transversale cr et un point a sur celle-ci, l'égalité ci-dessus permet de déterminer b . Poncelet montre comment déterminer alors par un calcul les intersections a' et b' avec la conique de n'importe quelle transversale. Il y a donc une infinité de coniques osculatrices du 3^e ordre à la courbe en P .

Poncelet expose encore une autre méthode consistant à déterminer d'abord le diamètre d'une conique osculatrice au point P . Comme précédemment, le choix d'un point arbitraire a détermine la conique osculatrice et l'on obtient facilement le diamètre conjugué au diamètre passant par P . Si l'on veut que la conique soit une parabole, il n'y a sur une sécante parallèle au diamètre qu'un choix possible pour a . Poncelet montre comment déterminer ce point. Il explique aussi comment effectuer la construction pour que la conique osculatrice soit une ellipse ou

une hyperbole. Il donne enfin des exemples d'application dans le cas où la courbe est une simple conique.

Poncelet termine la troisième partie du cahier en montrant comment la méthode utilisée pour déterminer une conique osculatrice du 3^e ordre en un point P d'une courbe géométrique permet aussi de déterminer la conique osculatrice du 4^e ordre en ce point. Comme précédemment, la méthode est la même quel que soit l'ordre de la courbe.

La quatrième et dernière partie du cahier est intitulée *Conséquences générales relatives aux systèmes de points, de droites, de plans, de lignes et de surfaces géométriques d'ordre quelconque*. Dans une note ajoutée en 1864, Poncelet relève que cette partie du manuscrit, écrite durant l'hiver 1816, se composait d'un « texte fort laconique, de notes éparses » et qu'il a dû en compléter la rédaction, en « s'astreignant, comme toujours, à n'en modifier, en aucune manière, ni le sens ni les intentions » [Poncelet 1864, p. 142]⁸⁴. Il s'agit d'une esquisse d'idées qui seront développées dans le *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* [Poncelet 1828] et le mémoire *Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces d'ordre quelconque*⁸⁵. Cette dernière partie se distingue du reste du cahier car elle ne fait pas directement appel au théorème de Carnot. On y retrouve des raisonnements caractéristiques du *Traité* : utilisation de points à l'infini et de projections. Ils permettent d'établir l'équivalence entre certains théorèmes rencontrés précédemment. Poncelet introduit aussi une nouvelle notion : la « polaire de contact ».

Poncelet rappelle tout d'abord la définition de la « moyenne harmonique » donnée par MacLaurin [MacLaurin 1748b, p. 25]. Considérons un ensemble de m points $a, b, c, \dots$ situés sur une droite OA . Soit k le point de cette droite tel que

$$\frac{m}{Ok} = \frac{1}{Oa} + \frac{1}{Ob} + \frac{1}{Oc} + \dots$$

Le segment Ok est la « moyenne harmonique » des segments $Oa, Ob, Oc, \dots$

⁸⁶. En transformant algébriquement la relation précédente, Poncelet démontre que si le point O passe à l'infini, on a pour tout point A de la droite

⁸⁴ Comme dans le cas de la partie précédente, certains passages font explicitement référence à MacLaurin et ont donc été rédigés après que Poncelet eut lu son ouvrage, donc au plus tôt au printemps 1816. L'intérêt pour la notion de moyenne harmonique provient sans doute de cette lecture.

⁸⁵ Rappelons qu'il s'agit de la section IV du second tome du *Traité* [Poncelet 1866].

⁸⁶ Les longueurs sont comptées positivement ou négativement suivant la position des points par rapport à l'origine O .

la relation

$$Ak = \frac{Aa + Ab + Ac + \dots}{m}.$$

Le point k est alors le « centre de moyenne distance » des points $a, b, c, \dots$, terminologie déjà utilisée par Carnot [Carnot 1803, p. 315] et reprise par L'Huilier [L'Huilier 1809, p. X]. Par analogie Poncelet appelle le point k « centre de moyenne harmonique des points $a, b, c, \dots$, relativement à l'origine particulière O des segments »⁸⁷. Il ajoute :

Mais il y a plus encore, les nombreuses propriétés du centre de moyenne distance, qui, au fond, sont les mêmes que celles du centre de gravité, conduisent pour le centre de moyenne harmonique à beaucoup d'autres intéressants théorèmes auxquels on n'avait pas songé jusqu'ici. [Poncelet 1864, p. 145]

C'est en faisant le lien entre les deux notions que Poncelet se distingue de ses prédécesseurs et ouvre de nouveaux horizons. Il note que si l'on place l'origine des abscisses au centre de moyenne distance, la somme des segments situés à droite de ce point est égale à celle des segments situés à gauche. Le théorème de Newton sur les diamètres revient donc à dire que le lieu des centres de moyenne distance des points d'intersection d'une courbe géométrique avec une droite se déplaçant parallèlement à une direction donnée est une droite appelée diamètre. Considérons maintenant une droite tournant autour d'un pôle O et coupant une courbe géométrique d'ordre m en m points $a, b, c, \dots$. Soit k le centre de moyenne harmonique de ces points par rapport à O . Le théorème de Cotes revient à dire que le lieu du point k est une droite appelée « axe » ou « polaire harmonique de la courbe par rapport à ce pôle »⁸⁸. Si le pôle passe à l'infini, les sécantes deviennent parallèles et l'axe de moyenne harmonique devient un diamètre de la courbe. Le théorème de Newton sur les diamètres et celui de Cotes sont donc équivalents. Dans une note ajoutée en 1864, Poncelet relève que les géomètres du XVIII^e siècle n'auraient pas pu remarquer la parenté entre les deux énoncés car ils ignoraient la « correspondance intime » existant entre le centre de moyenne harmonique et le centre de moyenne distance [Poncelet 1864, p. 146]. Il affirme de plus que jusqu'en 1824, date de la présentation de son *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* [Poncelet 1828] à l'Institut de France, personne n'a eu « la nette

⁸⁷ [Poncelet 1864, p. 145] ; Poncelet écrira ultérieurement « centre des moyennes harmoniques » [Poncelet 1828, p. 232].

⁸⁸ [Poncelet 1864, p. 147] ; Poncelet utilise aussi le terme « axe de moyenne harmonique » [Poncelet 1864, p. 155] ou « axe des moyennes harmoniques » [Poncelet 1866, p. 271].

intuition de cette remarquable correspondance »⁸⁹. Après avoir discuté les démonstrations du théorème de Cotes données par MacLaurin, Poncelet propose encore une preuve « selon ses principes » :

Quant à démontrer intuitivement et par le principe de continuité l'existence de l'axe conjugué ou harmonique d'un pôle fixe donné sur le plan d'une courbe géométrique, il suffit de considérer que le centre de moyenne harmonique est unique sur chaque transversale ou rayon vecteur ; que jamais le lieu de ces centres ne peut passer par le pôle fixe censé hors de la courbe, et qu'en conséquence ce lieu est une ligne droite, etc... [Poncelet 1864, p. 148]

Poncelet considère que les centres de moyenne harmonique décrivent une courbe qui n'est coupée qu'en un seul point par chaque transversale. Le principe de continuité lui permet de conclure qu'il s'agit d'une droite⁹⁰. Comme il le note lui-même, il s'agit d'une démonstration intuitive. Elle est dépourvue d'un fondement solide.

Poncelet introduit enfin une dernière notion. Considérons une courbe géométrique d'ordre m et un point p quelconque. Soit menée de ce point, considéré comme pôle, une sécante arbitraire coupant la courbe aux m points $a, a', a'', \dots$. Soit α un point de la sécante satisfaisant à la relation

$$\frac{1}{\alpha p} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{\alpha a'} + \frac{1}{\alpha a''} + \dots \right).$$

Le point p est donc le centre de moyenne harmonique de $a, a', a'', \dots$ par rapport à α . Poncelet démontre algébriquement que l'ensemble des points α , appelés « centres de réciproques » ou « contre-harmoniques » [Poncelet 1864, p. 150], constitue une courbe d'ordre $m - 1$. Il en donne l'équation cartésienne et montre qu'elle passe par les points de contact des tangentes à la courbe initiale issues de p ⁹¹. Cette courbe est appelée « polaire de contact »⁹². L'intersection d'une courbe et de la polaire de contact relativement à un point p permet donc d'obtenir les points de contact avec la courbe des tangentes issues de p . Poncelet établit plusieurs théorèmes concernant les rapports entre une courbe et ses polaires de

⁸⁹ [Poncelet 1864, p. 146]. Ce genre de remarques témoigne du souci constant de Poncelet de souligner, dans les ouvrages publiés entre 1862 et 1866, la priorité de ses recherches.

⁹⁰ Ce type d'argument sera explicité dans le *Traité* [Poncelet 1822, p. 332] et dans le mémoire *Analyse des transversales* [Poncelet 1832, pp. 28-29] (cf. § 4 ci-dessous).

⁹¹ Comme dans le *Manuscrit de Saratoff* [Poncelet 1862], Poncelet donne encore de longues démonstrations analytiques qui disparaîtront complètement de ses travaux ultérieurs.

⁹² [Poncelet 1864, p. 154]. La polaire de contact est définie relativement à un point p .

contact. Il démontre en particulier que, relativement à un point p , une courbe et sa polaire de contact ont le même axe de moyenne harmonique. Si l'on considère la polaire de contact de cette dernière courbe, on obtient une nouvelle courbe d'ordre $m - 2$. Le processus peut être itéré de manière à obtenir finalement une droite qui n'est autre que l'axe de moyenne harmonique du pôle p relativement aux $m - 1$ courbes. On voit apparaître ici la notion de « polaires successives » qui sera définie ultérieurement par Bobillier⁹³.

4. ANALYSE DES TRANSVERSALES APPLIQUÉE À LA RECHERCHE DES PROPRIÉTÉS PROJECTIVES DES COURBES ET SURFACES GÉOMÉTRIQUES

Comme indiqué dans l'introduction de cet article, ce mémoire a paru en 1832 dans le *Journal de Crelle* et a été réédité comme section III du second tome du *Traité*⁹⁴. Il débute par une longue introduction historique et méthodologique⁹⁵. Poncelet fait remonter ses recherches au début 1816 et affirme être parvenu dès cette époque à de nombreux résultats concernant la construction à la règle des tangentes aux courbes géométriques, le cercle osculateur et les sections coniques osculatrices des divers ordres en un point d'une telle courbe. C'est effectivement ce que nous avons observé au paragraphe précédent. Poncelet affirme avoir fait part de ces résultats en mai 1818 à Servois puis à d'autres géomètres. Il a finalement donné en décembre 1821 à la *Société académique de Metz* « communication de l'ensemble de ses recherches sur les propriétés projectives des lignes géométriques d'un ordre quelconque » [Poncelet 1832, p. 21]. Il signale qu'Arago assistait à cette séance et l'encouragea à publier promptement ces recherches. Mais,

⁹³ [Bobillier 1827–1828] ; cf. [Voelke 2019b, p. 184].

⁹⁴ Dans cet ouvrage, le titre du mémoire est *Analyse des transversales appliquée aux courbes et surfaces géométriques*. En dépit de ce titre, il ne contient que peu de chose sur les surfaces. On notera le changement d'appellation par rapport au *Deuxième cahier*. Poncelet ne parle plus de « théorie » des transversales mais d'« analyse », sans doute par analogie avec « l'analyse des coordonnées », terme qu'il utilise régulièrement pour désigner la géométrie analytique [Poncelet 1822, p. 1], [Poncelet 1828, p. 213], [Poncelet 1832, p. 24]. Il place d'ailleurs en exergue de son mémoire une citation extraite de l'*Essai sur la théorie des transversales* de Carnot : « La théorie des transversales n'est à proprement parler, que la théorie des coordonnées qui, au lieu de faire un angle, sont prises sur une même droite » [Carnot 1806, p. 66].

⁹⁵ Dans l'édition du *Traité* Poncelet rajoute le titre *Introduction historique commune aux Sections III et IV*. Plusieurs points concernent en effet cette dernière section constituée, rappelons-le, d'un mémoire inédit contemporain de celui sur l'analyse des transversales.

comme déjà mentionné dans l'introduction de cet article, le plan conçu par Poncelet prévoyait d'abord la publication du *Traité*.

Poncelet relève qu'il a déjà montré dans cet ouvrage que le théorème de Carnot se déduit par projection du « théorème de Newton relatif aux produits des abscisses et des appliquées parallèles des courbes géométriques »⁹⁶. Il a aussi remarqué à ce moment que, dans la mesure où le théorème de Carnot s'applique aussi bien à un système de m droites ou m plans qu'à une courbe ou une surface d'ordre m , les courbes et les surfaces géométriques ont des propriétés communes avec les systèmes de droites ou de plans⁹⁷. Il ajoute :

En affirmant qu'il était facile d'en déduire un grand nombre de conséquences particulières, mon intention était de faire pressentir la fécondité et l'extension que pouvait recevoir la doctrine des transversales, dont les admirables éléments sont un des principaux titres scientifiques de l'illustre et infortuné géomètre que je viens de citer; [...]. [Poncelet 1832, p. 22]

On notera encore une fois l'appréciation particulièrement élogieuse des travaux de Carnot. Poncelet relève qu'après la publication du *Traité* personne ne s'est cependant engagé dans cette voie, qu'il avait parcourue lui-même dès 1818. Après cette publication, il a rédigé en 1823 le *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* et le *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques*. Ils devaient « servir d'introduction ou de préliminaires à l'ouvrage étendu que je me proposais de faire paraître sur les propriétés projectives des courbes et des surfaces géométriques » [Poncelet 1832, p. 23]. Comme déjà mentionné au début de cet article, des raisons professionnelles et de santé contraignirent cependant Poncelet « d'ajourner toute rédaction définitive » [Poncelet 1832, p. 24].

Il poursuit en dressant l'état des connaissances en 1825, date à laquelle il affirme avoir terminé l'essentiel de ses recherches. On ne connaissait à ce moment sur ce sujet que les trois théorèmes de Newton sur « les appliquées parallèles des courbes, leurs diamètres conjugués à une direction donnée, et la coïncidence de ces diamètres avec ceux des asymptotes »⁹⁸ et les trois théorèmes qui s'en déduisent par projection, à savoir ceux de Carnot, Cotes et MacLaurin⁹⁹. Poncelet commente le théorème de MacLaurin

⁹⁶ [Poncelet 1832, p. 22]. La preuve est donnée dans [Poncelet 1822, p. 80].

⁹⁷ [Poncelet 1832, p. 22]. Je reviendrai sur ce point de vue (cf. début du § 5 ci-dessous).

⁹⁸ [Poncelet 1832, p. 24]. Ce sont les théorèmes cités au § 2.1 ci-dessus.

⁹⁹ Comme nous l'avons vu à la fin du § 3 ci-dessus, le passage par projection du théorème de Cotes à celui des diamètres de Newton est mentionné dans le *Deuxième cahier*. Le passage par projection du théorème de Carnot à celui des « appliquées parallèles »

et rappelle que ce dernier l'a établi à partir du calcul des fluxions. Il affirme qu'une démonstration algébrique est possible, analogue à celles données par MacLaurin pour les deux premiers théorèmes de Newton et pour le théorème de Cotes¹⁰⁰. Il y a donc une « corrélation »¹⁰¹ entre les théorèmes de Newton, Cotes, MacLaurin et Carnot. Ils « dérivent de la considération de termes distincts dans l'équation » de la courbe mais peuvent aussi être déduits les uns des autres d'une « manière purement géométrique »¹⁰². Poncelet affirme avoir reconnu cette dernière possibilité dès ses premières recherches¹⁰³. Il s'est aussi aperçu que « ces mêmes théorèmes, démontrés seulement pour les courbes planes, étaient susceptibles de s'étendre immédiatement aux lignes à double courbure et aux surfaces géométriques, à peu près de la même manière que les propriétés des sections coniques s'étendent aux surfaces du second degré, et celles des systèmes de droites comprises dans un plan unique, aux systèmes de droites ou de plans situés à volonté dans l'espace » [Poncelet 1832, p. 26]. Il a enfin reconnu que ces différents théorèmes admettaient chacun un énoncé « corrélatif » ou « réciproque »¹⁰⁴, d'où la nécessité de rédiger d'abord un mémoire sur la théorie des polaires réciproques.

Poncelet revient ensuite sur la démonstration du théorème de Carnot. Une preuve reste à donner si l'on ne veut pas « recourir aux principes de l'analyse des coordonnées » ou si l'on ne veut pas l'envisager a priori

comme une simple définition des lignes et surfaces géométriques, fondée sur ce que l'on connaît déjà des lignes et des surfaces des deux premiers degrés et des systèmes composés d'un certain nombre de ces lignes ou surfaces, auxquels

de Newton est mentionné pour sa part dans le *Traité* [Poncelet 1822, p. 80]. Le passage du théorème de Cotes à celui de MacLaurin et à celui de Newton sur les diamètres des asymptotes est expliqué dans le mémoire contemporain *Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces géométriques d'ordre quelconque* (cf. § 5 ci-dessous).

¹⁰⁰ Poncelet ne fait cependant que suggérer le principe d'une telle démonstration.

¹⁰¹ [Poncelet 1832, p. 26]. On notera l'utilisation d'un terme appartenant au vocabulaire de Carnot.

¹⁰² [Poncelet 1832, p. 26]. La première partie de la remarque ne s'applique pas au théorème de Carnot. Il n'est pas déduit de la considération des termes de l'équation mais est établi par ce dernier à partir du théorème de Newton sur les « appliquées parallèles des courbes ».

¹⁰³ Comme nous l'avons vu au § 3 ci-dessus, le *Deuxième cahier* contient une preuve algébrique du théorème de MacLaurin à partir de celui de Carnot et met en évidence le passage par projection du théorème de Cotes au théorème de Newton sur les diamètres.

¹⁰⁴ [Poncelet 1832, p. 26]. Il s'agit, en termes modernes, d'un énoncé dual.

les théorèmes de *Carnot* et *Newton* sont immédiatement applicables. [Poncelet 1832, p. 27]¹⁰⁵

Poncelet s'oppose cependant à un tel procédé :

Ce qui s'oppose d'ailleurs à ce qu'on admette, *à priori*, le théorème de *Carnot* ou celui de *Newton* comme définition des courbes géométriques, c'est que ces courbes possèdent, en elles-mêmes, un caractère qui les définit universellement et d'une manière purement intuitive : celui de ne pouvoir être coupées, au moyen d'une droite ou d'un plan arbitraires, qu'en un nombre de points limité et déterminé pour chacune d'elles ; [...] [Poncelet 1832, p. 28]

C'est la définition d'une courbe géométrique déjà rencontrée au § 2.4. Poncelet explique qu'il a depuis longtemps cherché une démonstration du théorème de *Newton* indépendante de la définition analytique d'une courbe et fondée uniquement sur cette propriété. Ce « genre de démonstration [...] repose sur le *principe de continuité* » [Poncelet 1832, p. 28]. J'ai montré au § 2.4 en quoi consiste ce principe fondamental et comment il s'applique aux courbes géométriques. Poncelet redonne et complète l'explication déjà donnée dans le mémoire de 1818-19¹⁰⁶ sur ce sujet :

Envisagé dans son application aux courbes planes continues, [...] ce principe consiste spécialement en ce que toute droite tracée arbitrairement au travers d'une telle courbe, doit toujours être censée la rencontrer en un nombre de points, invariable et égal à celui qui désigne son degré ; ce qui, d'après ce qu'on sait déjà des lignes du second ordre, oblige à admettre aussi bien les intersections imaginaires que les intersections réelles, les intersections situées à l'infini que celles qui se trouvent à distance donnée, et d'où il résulte généralement que toutes les fois qu'il sera possible de prouver, en toute rigueur et en ayant égard uniquement au mode de génération d'une ligne courbe située sur un plan, qu'une certaine droite, tracée dans ce plan, n'a en commun avec elle que m points, soit réels, soit imaginaires, situés ou non à l'infini, confondus en un seul ou réunis par groupes distincts de deux ou de plusieurs points, il sera par là même démontré que la courbe est effectivement et au plus du degré marqué par le nombre m . [Poncelet 1832, p. 28-29]¹⁰⁷

Comme nous l'avons vu, Poncelet a déjà utilisé cette méthode pour établir le théorème de *Cotes* dans le *Deuxième cahier*¹⁰⁸. Il procède de la même

¹⁰⁵ Dans le cas d'une ligne du 1^{er} ordre, le théorème de *Carnot* n'est autre que celui de *Ménélaüs* et dans le cas d'une ligne du 2^e ordre, il peut être établi géométriquement (cf. début du § 3 ci-dessus).

¹⁰⁶ Cf. § 2. 4.

¹⁰⁷ On trouve pratiquement le même texte dans le *Traité* [Poncelet 1822, p. 332].

¹⁰⁸ Cf. §. 3 ci-dessus. Il l'utilise aussi dans le *Traité* [Poncelet 1822, pp. 332-334].

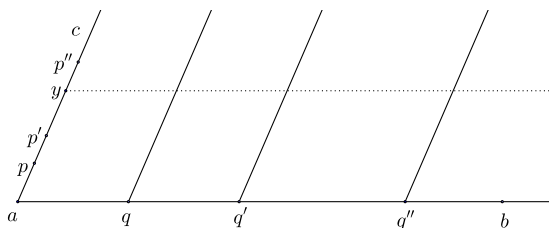


Figure 10. Preuve générale du théorème de Newton « sur les appliquées parallèles »

manière dans le cas du théorème de Newton. Considérons deux droites ab et ac coupant une courbe aux points $q, q', q'', \dots$ et $p, p', p'', \dots$ (fig. 10). Il faut montrer que

$$\frac{ap \cdot ap' \cdot ap'' \cdots}{aq \cdot aq' \cdot aq'' \cdots} = \text{const.} = k$$

lorsque la droite ac se déplace par translation. Soit y le point de ac tel que $ay = k$. Il s'agit de prouver que le lieu du point y est une parallèle à ab . Poncelet démontre d'abord que ay ne peut jamais être infini. Le point y étant unique sur chacune des appliquées ac , le principe de continuité permet d'affirmer que le lieu du point y est une droite. Poncelet démontre ensuite que la longueur ay ne peut jamais être nulle. Le lieu des points y est donc une parallèle à ab et la quantité k constante. Le théorème de Newton, sur lequel repose le théorème de Carnot, est donc en fin de compte établi sans recourir à une définition analytique d'une courbe géométrique. Une approche purement géométrique de la théorie des courbes et surfaces géométriques est possible. Fondée sur un principe général et imprécis, elle est cependant dépourvue d'une base solide.

Passons à l'étude du mémoire proprement dit. Il comprend quatre paragraphes¹⁰⁹. Le premier est intitulé *Préliminaires relatifs aux lignes des second et troisième ordres*. Poncelet entend donner une idée de ses méthodes et en rendre « l'exposition générale plus claire et plus facile » en les appliquant d'abord aux lignes du second ordre. Il s'agit de montrer au travers de quelques exemples « comment les principes de la théorie des transversales conduisent directement aux propriétés les plus universelles de ces

¹⁰⁹ Dans l'édition de 1866, le deuxième paragraphe est divisé en deux. Il y a donc au total cinq paragraphes. Le dernier est consacré à des compléments sur la théorie des polaires réciproques et à des applications de celle-ci. Il ne sera pas étudié ici car il reprend des idées et des méthodes déjà présentées par Poncelet dans son mémoire sur ce sujet [Poncelet 1829].

lignes » [Poncelet 1832, p. 117]. Il expose des résultats déjà donnés au début du *Deuxième cahier* : théorème d'involution de Desargues¹¹⁰ et théorème de Pascal. Il poursuit avec des exemples d'application de sa méthode aux courbes du 3^e ordre : propriétés des points d'inflexion et d'un hexagone inscrit à la courbe ; détermination des coniques osculatrices des divers ordres en un point donné de la courbe. Ils sont, pour la plupart, repris de la deuxième partie du *Deuxième cahier*.

Le deuxième paragraphe est intitulé *Des différens modes par lesquels on peut transformer, traduire et combiner entre elles les relations concernant les transversales des lignes géométriques*. Poncelet commence par rappeler l'énoncé de la relation fondamentale (théorème de Carnot) et explique pourquoi elle est encore vraie lorsque certaines intersections du triangle avec la courbe deviennent imaginaires, se réunissent en un couple ou passent à l'infini. Il fait quelques remarques générales sur cette relation. Celle-ci permet « de trouver l'une quelconque des intersections de la courbe avec les côtés du triangle, quand toutes les autres sont connues » [Poncelet 1832, p. 215]. Réciproquement,

[...] un système de points, choisis arbitrairement, mais en nombre égal, sur chacun des côtés d'un triangle quelconque, ne saurait, en aucune manière, appartenir à une ligne géométrique de l'ordre marqué par ce même nombre, s'il ne satisfait pas à la relation dont il s'agit ; ce qui revient à dire qu'il sera impossible de faire passer une telle ligne par l'ensemble de tous ces points. [Poncelet 1832, p. 216]

L'existence de la relation entre les points n'assure cependant pas celle d'une courbe passant par ces points. Elle en constitue seulement un « indice » [Poncelet 1832, p. 217]. Poncelet note que lorsqu'il écrit, dans le courant du paragraphe, qu'un certain groupe de $3m$ points vérifiant la relation fondamentale appartient à une courbe d'ordre m , il ne se prononce pas sur l'existence effective de cette courbe. Celle-ci sera établie au paragraphe suivant.

Il poursuit en rappelant que l'introduction de transversales auxiliaires permet de faire disparaître certains points de la relation fondamentale. On peut ainsi traiter le cas où l'un des sommets du triangle transversal est

¹¹⁰ Ce théorème est généralisé au cas de trois coniques : « Les intersections d'une droite ou transversale arbitraire avec trois lignes du second ordre quelconques, ayant les mêmes intersections ou les mêmes sécantes communes, forment entre elles une involution de six points. » [Poncelet 1832, p. 125] Ce théorème avait été établi auparavant de manière analytique par Charles Sturm [Sturm 1826–27, p. 180].

sur la courbe¹¹¹. Poncelet examine ensuite le cas où l'un des côtés du triangle passe à l'infini. La relation devient alors indéterminée¹¹². Le raisonnement qui suit montre comment traiter ce cas grâce à la méthode d'élimination. Il permet aussi d'établir un nouveau théorème :

Supposant, par exemple, que ce soit le côté bc du triangle abc ¹¹³, qui soit susceptible de passer à l'infini ; pour faire sortir, de l'égalité du No 165¹¹⁴ les segments qui appartiennent à ce côté, on mènera, par ses intersections $q, q', q'' \dots$ avec la courbe, des droites ou transversales arbitraires coupant respectivement en P et R, P' et R', P'' et R'' etc. les deux autres côtés ab et ac de ce triangle. Cela posé on aura évidemment, en considérant le système de ces transversales comme une ligne géométrique du même ordre que la proposée, et en conservant d'ailleurs les conventions jusqu'ici admises,

$$\frac{(aP)(bq)(cR)}{(bP)(cq)(aR)} = 1;$$

d'où l'on tire, en combinant avec la relation du No 165,

$$\frac{(ap)(cr)}{(bp)(ar)} = \frac{(aP)(cR)}{(bP)(aR)},$$

équation dont l'énoncé facile donnerait lieu à un nouveau théorème sur les courbes géométriques, et qui, dans la supposition où bc s'éloigne à l'infini et où les transversales auxiliaires $PqR, P'q'R' \dots$ se changent, comme nous l'avons dit, en un système de parallèles quelconques aux différentes branches infinies de la courbe, prend cette autre forme encore plus simple

$$\frac{(ap)}{(ar)} = \frac{(aP)}{(aR)},$$

attendu que les rapports de segments infinis se réduisent ici à l'unité, puisque ceux-ci ne diffèrent entre eux que d'une quantité donnée. [Poncelet 1832, pp. 225-226]

Si les points $q, q', \dots$ sont à l'infini, les transversales auxiliaires $PqR, P'q'R', \dots$ sont parallèles aux asymptotes. Dans le cas particulier où ces transversales se confondent avec les asymptotes, Poncelet relève qu'il retrouve un théorème déjà démontré par Edward Waring [Waring 1762, p. 85]. L'énoncé de Waring revient à dire que si la courbe coupe la droite ab aux points $p, p', \dots$ et la droite ac aux points $r, r', \dots$ et que les n

¹¹¹ Poncelet reprend un exemple déjà donné dans le *Deuxième cahier* (cf. §. 3 ci-dessus).

¹¹² En effet, si bc passe à l'infini, les points d'intersection $q, q', q'', \dots$ de la courbe avec cette transversale sont aussi à l'infini et le rapport $(bq)/(cq)$ est indéterminé.

¹¹³ Cf. fig. 11 gauche ci-dessous. Le mémoire original ne comprend pas de figures. Elles ont été rajoutées dans l'édition de 1866.

¹¹⁴ Il s'agit de l'égalité fondamentale (théorème de Carnot).

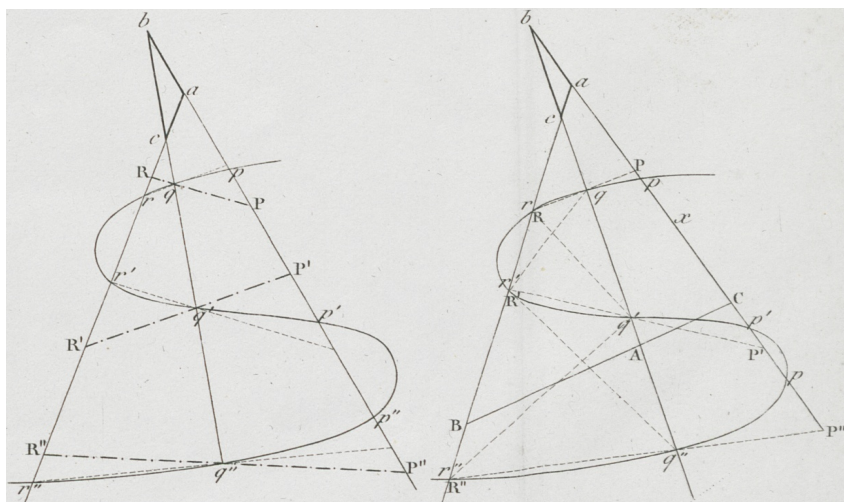


Figure 11. Élimination des segments situés sur un côté du triangle transversal [Poncelet 1866, fig. 37] et systèmes de points en involution simple par rapport à deux points [Poncelet 1866, fig. 38]

asymptotes de la courbe coupent ces droites aux points $P, P', \dots$ et $R, R', \dots$, le rapport entre les produits (ap) et (ar) est égal au rapport entre les produits (aP) et (aR) . La preuve de Waring est algébrique.

Supposons maintenant que la position de la transversale bc est quelconque mais que les points r et R, r' et R', r'' et $R'', \dots$ coïncident (fig. 11 droite). Les produits (cr) et (cR) sont égaux, de même que les produits (ar) et (aR) . En notant $P = rq \cap ab, P' = r'q' \cap ab, \dots$ on a donc l'égalité

$$\frac{(ap)}{(bp)} = \frac{(aP)}{(bP)}.$$

Nous avons déjà rencontré ce résultat dans le *Deuxième cahier*¹¹⁵. Poncelet introduit cette fois une nouvelle terminologie : les points a et b sont en « involution simple » par rapport aux deux systèmes de points $p, p', p'', \dots$ et $P, P', P'', \dots$ ¹¹⁶.

Poncelet montre comment construire linéairement (à la règle seule) n'importe quel point d'un des deux groupes de points en involution

¹¹⁵ Cf. § 3 ci-dessus. Rappelons qu'il s'agit d'une généralisation du théorème d'involution de Desargues pour un quadrilatère inscrit à une conique.

¹¹⁶ [Poncelet 1832, p. 227]. À la page suivante, Poncelet inverse le rôle des différents ensembles de points et écrit que $p, p', p'', \dots$ et $P, P', P'', \dots$ sont en « involution simple » par rapport à a et b .

simple par rapport à a et b lorsque les autres sont donnés. Cette construction repose sur le résultat suivant. Considérons des points $q, q', \dots$ situés sur une transversale ac et des points $r, r', \dots$ situés sur une transversale bc . Considérons ensuite le polygone $qrq'r' \dots q$ dont les côtés d'ordre impair coupent la transversale ab en $P, P', \dots$ et les côtés d'ordre pair en $P_1, P'_1, \dots$ (fig. 12). En appliquant le théorème de Carnot au triangle abc et aux deux systèmes de droites constitués des côtés d'ordre impair et des côtés d'ordre pair du polygone, on montre que les deux systèmes de points $P, P', \dots$ et $P_1, P'_1, \dots$ sont en involution simple par rapport à a et b ¹¹⁷. L'un quelconque des points d'un des deux systèmes peut donc être construit lorsque tous les autres sont donnés ainsi que a et b . Si l'on revient à la figure 11 droite, on voit que l'une quelconque des intersections d'une courbe géométrique avec trois droites ab, ac et bc peut être construite linéairement lorsque les autres sont connues¹¹⁸. Si l'on prend c sur la courbe, q et r sont confondus et on obtient une construction linéaire de la tangente en ce point. Poncelet considère que cette méthode est aussi « générale que symétrique est élégante » [Poncelet 1832, p. 229]. Elle est plus simple que celle donnée pour une courbe du 4^e ordre dans le *Deuxième cahier*¹¹⁹ et s'applique à une courbe d'ordre quelconque.

La fin du paragraphe porte comme sous-titre *Du changement complet de forme que subit, dans certains cas, la relation fondamentale. – Théorèmes qui en résultent*¹²⁰. Poncelet étudie le cas où les trois sommets du triangle transversal se confondent en un point a . Les droites ap, aq et ar restent cependant distinctes. Supposons que l'angle paq soit égal à la somme des angles par et raq . Poncelet démontre, en effectuant un passage à la limite, que la relation fondamentale prend la forme

$$\sin(paq) \sum \left(\frac{1}{ar} \right) = \sin(qar) \sum \left(\frac{1}{ap} \right) + \sin(par) \sum \left(\frac{1}{aq} \right)$$

Cette égalité revient à dire que les centres de moyennes harmoniques relativement à a des points $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots, r, r', r'', \dots$ sont alignés¹²¹. C'est le théorème de Cotes. Il n'est plus démontré de manière intuitive

¹¹⁷ Poncelet ne fait que suggérer la preuve.

¹¹⁸ Ce n'est donc plus une construction linéaire « par le calcul » comme dans le *Deuxième cahier* (cf. § 3 ci-dessus), mais à la règle seule.

¹¹⁹ Cf. § 3 ci-dessus. Cette construction nécessitait le passage par une conique intermédiaire.

¹²⁰ Elle correspond au troisième paragraphe dans l'édition de 1866.

¹²¹ C'est une conséquence d'un résultat établi dans [Poncelet 1828, p. 260].

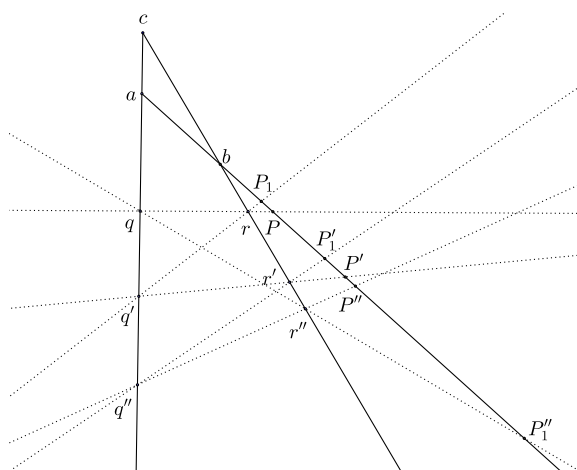


Figure 12. Construction d'un point appartenant à l'un des deux groupes de points en involution simple à partir des autres points des deux groupes

comme dans le *Deuxième cahier*¹²² mais à partir du théorème de Carnot. On en déduit facilement que la relation d'involution simple (cf. fig. 11 droite)

$$\frac{(ap)}{(bp)} = \frac{(aP)}{(bP)}$$

prend la forme

$$\sum \frac{1}{ap} = \sum \frac{1}{AP}$$

lorsque a et b sont confondus. Les deux systèmes de points $p, p', p'', \dots$ et $P, P', P'', \dots$ ont donc le même centre de moyennes harmoniques par rapport au point a . Poncelet examine encore le cas particulier où le point de concours a des trois transversales est situé sur la courbe.

Le troisième paragraphe est intitulé *Détermination et tracé des lignes géométriques par leurs systèmes d'intersections avec des transversales rectilignes données*. La matière étudiée n'apparaît pas dans le *Deuxième cahier* et est entièrement nouvelle. Dans une note ajoutée en 1866 lors de la réédition de son mémoire, Poncelet écrit :

¹²² Cf. § 3 ci-dessus. Curieusement Poncelet ne mentionne pas qu'il s'agit du théorème de Cotes.

Ce paragraphe ou Chapitre ayant bien plus pour objet la démonstration de certaines vérités et principes généraux que le tracé effectif, manuel des courbes géométriques ou l'exposé même de quelques théorèmes et problèmes particuliers, nous nous dispenserons [...] d'accompagner le texte d'aucunes figures, qui, ici, [...] seraient, à cause de leur complication, très-peu propres à faciliter la lecture de ce paragraphe et des suivants. [Poncelet 1866, p. 187]

Il s'agit effectivement de la partie la plus compliquée du mémoire. Il est difficile pour le lecteur moderne de comprendre pourquoi Poncelet consacre tant d'efforts à résoudre un problème assurément très général, mais dont l'intérêt théorique paraît de prime abord limité. Nous verrons au terme de cette analyse quels sont les arguments donnés par Poncelet. Il débute par une synthèse des résultats présentés dans les paragraphes précédents et explique le but poursuivi dans le nouveau paragraphe :

Jusqu'ici nous nous sommes principalement occupés à faire voir comment notre principe fondamental peut être étendu à des situations quelconques des transversales, et nous avons aussi donné un aperçu de son utilité pour la solution de différens problèmes concernant les lignes géométriques, notamment pour le tracé de leurs tangentes et asymptotes ; nous nous proposons, dans ce paragraphe, de montrer comment il peut servir à déterminer ou à construire ces lignes elles-mêmes tout entières, quand on les suppose définies par un nombre suffisant de conditions et spécialement par leurs systèmes d'intersections avec des droites données ; [...] [Poncelet 1832, p. 240]

Il ne s'agit plus de construire une tangente ou une osculatrice à une courbe, mais la courbe elle-même à partir d'un certain nombre de conditions. En d'autres termes il faut, comme nous allons le voir, déterminer ses points d'intersection avec une droite quelconque passant par un point donné¹²³. Si l'on se place au point de vue de la géométrie analytique, le problème consiste à calculer les coordonnées des points d'intersection d'une droite et d'une courbe donnée par son équation. Chez Poncelet une courbe n'est pas déterminée par son équation mais par ses points d'intersection avec un système de transversales. Les points d'intersection avec une droite doivent pour leur part être construits et non déterminés algébriquement.

Poncelet commence par répondre à une question posée précédemment¹²⁴. Soit abc un triangle sur les côtés duquel sont situés $3m$ points $p, p', \dots, q, q', \dots, r, r', \dots$ satisfaisant au théorème de Carnot. Existe-t-il

¹²³ Ce point est a priori arbitraire. Nous verrons cependant que dans les constructions qui suivent, il est situé sur la courbe.

¹²⁴ Le texte a été cité ci-dessus. Il figure au début du deuxième paragraphe du mémoire.

une courbe géométrique d'ordre m passant par ces points? La réponse est affirmative. Ce système de $3m$ points « appartient nécessairement à une certaine ligne géométrique du degré m , constructible dans toutes ses parties, ou même à une infinité de lignes pareilles, si m surpasse seulement deux unités » [Poncelet 1832, p. 240]. Considérons donc une droite arbitraire passant par un point donné s . Supposons qu'elle coupe les côtés du triangle abc aux points d, e, f et la courbe cherchée en m points $x, x', x'', \dots$ (fig. 13). En considérant cette courbe comme transversale des triangles daf, dbe et fce , on obtient les trois relations

$$\frac{(dx)}{(fx)} = \frac{(ar)(dp)}{(ap)(fr)} \quad \frac{(ex)}{(dx)} = \frac{(bp)(eq)}{(bq)(dp)} \quad \frac{(fx)}{(ex)} = \frac{(cq)(fr)}{(cr)(eq)}.$$

Si l'on tient compte de l'égalité fondamentale

$$\frac{(ap)(bq)(cr)}{(bp)(cq)(ar)} = 1$$

on voit que chacune de ces trois relations est conséquence des deux autres. Dans le cas où l'ordre de la courbe est supérieur à deux, le problème est donc indéterminé et il convient de rajouter des conditions. On peut par exemple supposer que s est un point multiple d'ordre $m-2$ de la courbe. Si l'on pose $(dx) = dx \cdot dx'$, $(ex) = ex \cdot ex'$ et $(fx) = fx \cdot fx'$, les relations précédentes deviennent

$$\frac{(dx)ds^{m-2}}{(fx)fs^{m-2}} = \frac{(ar)(dp)}{(ap)(fr)} \quad \frac{(ex)es^{m-2}}{(fx)fs^{m-2}} = \frac{(bp)(eq)}{(bq)(dp)} \quad \frac{(fx)fs^{m-2}}{(ex)es^{m-2}} = \frac{(cq)(fr)}{(cr)(eq)}.$$

Les deux derniers points d'intersection x et x' d'une transversale passant par s avec la courbe sont déterminés. Poncelet montre comment ces points peuvent être construits linéairement. Il considère à cet effet une conique auxiliaire passant par x, x', p, q, r (fig. 13). Elle recoupe les côtés du triangle abc aux points p_1, q_1, r_1 . Soit encore $P_1 = sd \cap r_1q_1$, $Q_1 = sd \cap p_1r_1$, $R_1 = sd \cap p_1q_1$. Soit également $Q', Q'', \dots$ les intersections des droites $p'r', p''r'', \dots$ avec la transversale sd . Poncelet démontre, en utilisant le théorème d'involution de Desargues pour un quadrilatère inscrit à une conique et la première de chacune des deux séries de trois égalités citées ci-dessus, que

$$\frac{dQ_1 \cdot ds^{m-2}}{fQ_1 \cdot fs^{m-2}} = \frac{(dQ')}{(fQ')}.$$

Le système des $m-1$ points $Q_1, s, s, \dots$ et celui des $m-1$ points $Q', Q'', \dots$ sont en involution avec d et f . Comme Poncelet l'a montré au paragraphe précédent, le point Q_1 peut donc être construit linéairement. On procède de même avec les points P_1 et R_1 . Le problème revient alors à construire

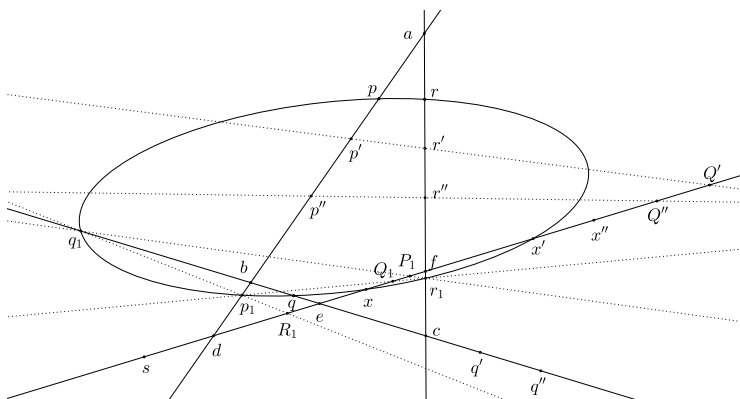


Figure 13. Intersection d'une droite avec une courbe géométrique d'ordre m : cas où la droite passe par un point multiple s de la courbe d'ordre $m - 2$

un triangle $p_1q_1r_1$ dont les sommets sont situés sur ab , bc et ac et dont les côtés passent par R_1 , Q_1 et P_1 . Cette construction peut être effectuée à la règle¹²⁵. La conique auxiliaire est ainsi déterminée. En construisant son intersection avec la transversale sd on obtient les points x et x' ¹²⁶. Poncelet démontre encore que l'ensemble des points x et x' ainsi construits constitue bien une courbe d'ordre m ¹²⁷. Il conclut que si m est supérieur à deux, il existe une infinité de courbes passant par les points donnés p , p' , ..., q , q' , ..., r , r' , ...

Poncelet traite ensuite le cas où s est un point multiple d'ordre $m - 1$. Il faut alors se donner seulement deux transversales ab et ac et m points de la courbe sur chacune de ces transversales. Le point d'intersection x peut être construit linéairement. La construction est plus simple que dans le cas précédent. Elle fait à nouveau appel à la notion d'involution.

Après avoir examiné ces deux cas particuliers, Poncelet explique que si l'ordre du point multiple est $m - n$, il faut se donner $n + 1$ systèmes de m points alignés. Le cas le plus général est celui où s est un point simple de la courbe. Il s'agit alors de résoudre le problème suivant :

¹²⁵ En effet, si l'on fait varier les sommets p_1 sur ab et q_1 sur bc , le sommet libre r_1 se déplace sur une droite passant par b . Il s'agit d'un résultat dû à MacLaurin (cf. [Poncelet 1822, no 205]). L'intersection de cette droite avec la droite ac détermine le sommet r_1 du triangle cherché.

¹²⁶ Poncelet se réfère à une construction donnée dans le *Traité* et utilisant une homologie [Poncelet 1822, no 344].

¹²⁷ Il s'agit d'une preuve intuitive fondée sur le principe de continuité.

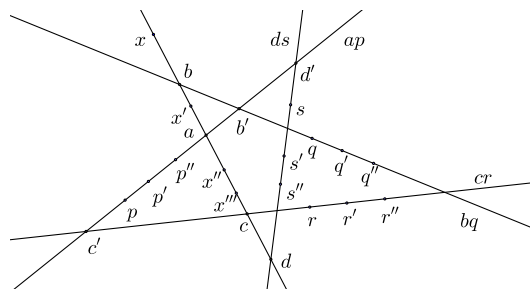


Figure 14. Intersection d'une droite avec une courbe géométrique : cas où la droite passe par un point simple x de la courbe

Les m^2 intersections d'une ligne plane, du degré m , avec m droites arbitraires étant données à priori, tracer cette ligne en l'assujettissant, de plus, à passer par un dernier point choisi à volonté sur son plan ; ou, ce qui revient au même, déterminer successivement ses $m - 1$ intersections nouvelles avec chacune des transversales arbitraires issues du point dont il s'agit ? [Poncelet 1832, p. 252]

Comme les points donnés doivent satisfaire au théorème de Carnot, il est possible de choisir arbitrairement m points sur les deux premières droites, puis $m - 1$, $m - 2$, ..., 2 sur les suivantes. Cela donne un total de $\frac{1}{2}(m^2 + 3m - 2)$ points. Les $\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$ points restants sont déterminés. Notons ap , bq , cr , ds , ... les m droites données arbitrairement (fig. 14). Les m points p , p' , ... sont situés sur ap , les m points q , q' , ... sur bq , etc. Soit x un point de la courbe extérieur à ces droites. Considérons une transversale issue de ce point et coupant ces droites en a , b , c , d , ... Soit encore b' , c' , d' , ... les intersections de ap avec bq , cr , ds , ... Le problème consiste à construire les intersections x' , x'' , x''' , ... de la transversale xa avec la courbe.

En considérant les triangles transversaux abb' , acc' , add' , ..., on obtient la suite d'équations

$$\begin{aligned} \frac{(bx')}{(ax')} &= \frac{(b'p)}{(b'q)} \frac{(bq)}{(ap)} \frac{ax}{bx} \\ \frac{(cx')}{(ax')} &= \frac{(c'p)}{(c'r)} \frac{(cr)}{(ap)} \frac{ax}{cx} \\ \frac{(dx')}{(ax')} &= \frac{(d'p)}{(d's)} \frac{(ds)}{(ap)} \frac{ax}{dx} \end{aligned}$$

dans laquelle (ax') désigne le produit des segments ax' , ax'' , ax''' , ..., (bx') le produit des segments bx' , bx'' , bx''' , ... On a $m - 1$ équations permettant

de déterminer les $m - 1$ points $x', x'', x''', \dots$. Le problème a donc une solution unique. Il s'agit maintenant de résoudre ce système ou, plus généralement, de résoudre le problème suivant : diviser « des lignes droites en parties dont les rapports composés sont donnés » [Poncelet 1832, p. 374]. Voici comment Poncelet formule ce problème :

216. Afin de donner à cette partie de nos recherches, toute l'extension dont elle est susceptible et que mérite son importance, nous nous proposons de montrer généralement comment $n + 1$ points $a, b, c, d, \dots, g, h$ étant donnés, à volonté, sur la direction d'une même droite, et n autres points $x, x', x'', \dots$ [de cette droite]¹²⁸, étant simplement définis par les n relations

$$\frac{(bx)}{(ax)} = K, \quad \frac{(cx)}{(ax)} = L, \quad \frac{(dx)}{(ax)} = M, \dots, \quad \frac{(gx)}{(ax)} = P, \quad \frac{(hx)}{(ax)} = Q$$

dans lesquelles $K, L, M, \dots, P, Q$ sont des nombres assignés *a priori* ou des rapports homogènes et quelconques de lignes, nous nous proposons, dis-je, de montrer comment, à l'aide de ces données, on peut, de différentes manières, ramener la construction des points $x, x', x'', \dots$ à celle d'une courbe, de degré n , contenant tous ces points, et dont le tracé effectif exige seulement qu'on sache déjà construire $n - 1$ ou $n - 2$ points en ligne droite assujettis à des conditions analogues. [Poncelet 1832, pp. 374-375]

Poncelet souligne à nouveau l'importance que revêt à ses yeux ce problème. Il en donne trois solutions. Je présenterai la deuxième car elle nécessite des constructions plus simples que la première et m'a paru aussi plus claire¹²⁹. Poncelet introduit d'abord un certain nombre de notations (fig. 15). La droite contenant les $n + 1$ points donnés $a, b, c, d, \dots, g, h$ et les n points inconnus $x, x', x'', \dots$ est notée (X) . (A) désigne une transversale passant par a , (B) une transversale passant par b , etc. (AB) désigne l'angle formé par les droites (A) et (B) . (ABC) désigne le triangle formé par les droites (A) , (B) , (C) ; ses sommets sont notés A, B, C en supposant que C est l'intersection de (A) et (B) , B celle de (A) et (C) et A celle de (B) et (C) . Soit n points $p, p', p'', \dots$ distincts pris sur une droite arbitraire (A) . Concevons une courbe (n) d'ordre n passant par ces points ainsi que par les points $x, x', x'', \dots$. Soit encore $q', q'', \dots, n - 1$ points distincts pris sur une droite arbitraire (B) et par lesquels doit passer cette courbe. En considérant le triangle (ABX) comme transversal et en tenant

¹²⁸ Cette précision est rajoutée dans l'édition de 1866. On prendra garde au fait que les n points inconnus $x, x', x'', \dots$ correspondent aux $m - 1$ points inconnus $x', x'', x''', \dots$ de la figure 14.

¹²⁹ Le début du raisonnement est commun aux deux premières solutions. La troisième solution est plus courte que la deuxième mais moins claire.

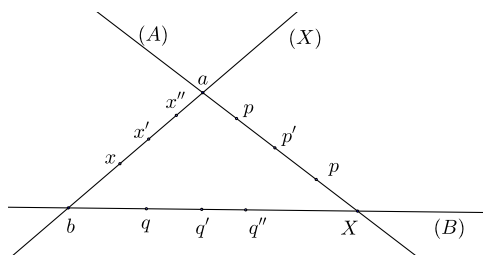


Figure 15. Définition des notations

compte de l'équation $\frac{(bx)}{(ax)} = K$, le dernier point d'intersection q de (B) avec la courbe est déterminé par l'équation

$$\frac{(ap)(Xq')}{(Xp)(bq')} \cdot K \frac{Xq}{bq} = 1.$$

Les seules inconnues sont Xq et bq .

Soit v un point non situé sur les droites (A) , (B) et (X) (fig. 16). Comme on l'a vu précédemment, il existe une unique courbe (n) d'ordre n passant par les points $p, p', \dots, q, q', \dots$ et $x, x', \dots$ et telle que v soit un point d'ordre $n - 2$. La droite vc ou (C) recoupe cette courbe en deux points y' et y'' . En considérant les triangles (CXA) et (CXB) comme transversaux de la courbe (n) et en utilisant les deux premières équations du no 216 cité ci-dessus, on obtient deux équations du même type permettant de construire y' et y'' en traçant, par des « opérations purement linéaires », une ligne du second ordre¹³⁰. On détermine de même les deux points d'intersection de la courbe (n) avec chacune des droites vd ou (D) , ve ou (E) , etc.

Les points p', p'', q', q'' ayant été choisis arbitrairement, on peut supposer que $c \in p'q'$ et $d \in p''q''$. On détermine alors les $n - 2$ autres intersections de la droite $(C_1) = p'q'$ avec la courbe (n) en considérant les $n - 2$ triangles transversaux (C_1XD) , (C_1XE) , ..., (C_1XH) ¹³¹. On détermine de même les $n - 2$ autres intersections de la droite $(D_1) = p''q''$ avec la courbe

¹³⁰ Poncelet se réfère à la première solution du problème général et ne détaille pas cette construction. Elle est fondée sur le théorème de Pascal. Dans la mesure où la conique est constructible point par point, il considère que l'on peut construire les points y et y' .

¹³¹ Les équations du no 216 permettent d'éliminer les points $x, x', x'', \dots$ et de ne garder que les $n - 2$ points inconnus situés sur (C_1) . On ne pourrait pas utiliser les triangles (C_1XA) ou (C_1XB) car p' est un sommet du premier et q' un sommet du second. On notera que cette étape suppose que l'on sait résoudre un système de $n - 2$ équations à $n - 2$ inconnues du type du no 216.

On se ramène ainsi à un problème de degré inférieur. Le problème initial pourra en fin de compte être résolu linéairement. Au terme de ces constructions purement théoriques et pratiquement inapplicables, Poncelet conclut en résumant les caractéristiques de sa méthode :

Ce qui précède suffit, je pense, pour convaincre nos lecteurs de la possibilité de résoudre, d'une manière purement géométrique, le problème général que nous nous sommes proposé dans le no 216¹³³, et pour montrer la variété des ressources qui sont offertes par l'analyse des transversales, dans toutes les questions où il s'agit de construire le système des intersections d'une ligne géométrique avec une transversale arbitraire de son plan, quand cette ligne est simplement définie par un nombre suffisant de semblables systèmes ou de systèmes équivalents (212 et 215) ; ce qui fournit aussi des moyens pour la décrire complètement par points sous ces mêmes données.

On voit qu'en définitive, ces constructions se réduisent à une suite d'opérations ou de calculs qui appartiennent uniquement au premier degré ou à la géométrie de la règle ; ce qui signifie seulement que les courbes auxiliaires qui, par leurs intersections avec des droites données, servent à déterminer les points qu'on cherche, se trouvent elles-mêmes construites à l'aide d'opérations purement linéaires. [Poncelet 1832, pp. 382-383]

Il y a deux éléments importants. Le premier est d'avoir pu traiter un problème algébrique de manière géométrique grâce à l'analyse des transversales et d'avoir ainsi montré la puissance de cette technique. Le second est d'avoir donné une solution linéaire. On retrouve deux thèmes centraux dans toutes les recherches de Poncelet.

5. PROPRIÉTÉS COMMUNES AUX SYSTÈMES DE LIGNES ET DE SURFACES GÉOMÉTRIQUES D'ORDRE QUELCONQUE

Comme indiqué dans l'introduction de cet article, ce mémoire est contemporain du précédent mais n'a été publié que dans le second volume du *Traité* dont il constitue la section IV¹³⁴. Il débute par une introduction dans laquelle Poncelet explique ses intentions. Il s'est préoccupé, dans les sections précédentes ainsi que dans le *Traité*, d'établir avant tout « des méthodes et des principes généraux » et non des « propriétés ou

¹³³ Il s'agit de la résolution du système de n équations à n inconnues cité ci-dessus.

¹³⁴ Poncelet déclare en note n'avoir apporté « aucune modification essentielle » au texte original [Poncelet 1866, p. 235]. À la différence du précédent, ce mémoire consacre plus de place à des généralisations aux surfaces géométriques. Comme nous le verrons, certains éléments figurent déjà dans le *Deuxième cahier*.

théorèmes individuels relatifs à certaines figures ». Les premiers constituent selon lui les « acquisitions les plus précieuses comme les plus rares en Mathématiques » [Poncelet 1866, p. 236]¹³⁵. Il annonce qu'il procèdera de même dans cette dernière partie de l'ouvrage. Comme le titre le montre, l'une des idées importantes développées dans celle-ci est que certains raisonnements et théorèmes valables pour une courbe d'ordre m le sont aussi pour un système de m droites. Poncelet mentionne déjà dans la préface du *Traité* ce point de vue qu'il fait remonter à Desargues¹³⁶.

Le premier paragraphe est intitulé *De l'involution dans les systèmes de points en ligne droite, de courbes ou de surfaces à intersections communes*. Poncelet généralise la notion d'involution en ne considérant plus, comme Desargues, trois couples de points alignés mais trois groupes de m points situés sur une droite. Considérons une courbe géométrique d'ordre m coupant un système de m droites en m^2 points. Soit encore r un point distinct. Comme Poncelet l'a montré dans le précédent mémoire, il passe par ces m^2 points et par r une unique courbe d'ordre m . Considérons encore une transversale passant par r . Elle coupe les m droites aux points $p, p', p'', \dots$, la première courbe aux points $q, q', q'', \dots$ et la seconde courbe aux points $r, r', r'', \dots$. On a entre ces trois groupes de points les égalités

$$\frac{(pq)}{(pr)} = \frac{(p'q)}{(p'r)} = \frac{(p''q)}{(p''r)} = \frac{(p'''q)}{(p'''r)} = \dots$$

dans lesquelles la première lettre de chacun des produits indiqués par les parenthèses conserve le même indice supérieur alors que la seconde varie¹³⁷. Poncelet ne justifie pas ce résultat mais on peut l'établir facilement à partir du théorème de Carnot. Les deux groupes de points $q, q', q'', \dots, r, r', r'', \dots$ sont en involution par rapport à chaque couple de points choisis parmi les points $p, p', p'', \dots$. Poncelet démontre que la propriété reste vraie si l'on permute les groupes de points. Ceux-ci sont dits « en involution complète et réciproque » [Poncelet 1866, p. 242].

Poncelet montre comment construire les points $r', r'', \dots$ lorsque le point r ainsi que les points $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots$ sont donnés. Menons par chacun des points $p, p', p'', \dots, q, q', q'', \dots$ une droite arbitraire. Ces droites se coupent deux à deux en m^2 points. Considérons ensuite la courbe d'ordre m passant par ces m^2 points et par r . L'intersection de la

¹³⁵ Comme indiqué dans l'introduction de cet article, cette idée apparaît aussi au début du *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* [Poncelet 1828, p. 213].

¹³⁶ [Poncelet 1822, pp. xxxviii-xxxix]. Poncelet se fonde sur une lettre de Descartes à Mersenne du 9 janvier 1639 [Descartes 1996, p. 490]. Ce point de vue apparaît aussi chez MacLaurin [MacLaurin 1748b, p. 5].

¹³⁷ (pq) désigne ainsi le produit $pq \cdot pq' \cdot pq'' \dots$.

droite pqr avec cette courbe détermine les points r' , r'' , ... cherchés¹³⁸. Ces points peuvent être construits grâce aux méthodes exposées dans le précédent mémoire¹³⁹. Parmi les résultats établis ensuite par Poncelet, citons le théorème suivant :

Si l'on coupe par une droite arbitraire le système de trois lignes géométriques quelconques du degré m , ayant les mêmes intersections communes sur un plan, les trois systèmes de m points qui en résultent sont en involution complète. [Poncelet 1866, p. 246]

C'est une généralisation du théorème établi pour trois coniques par Sturm puis Poncelet (cf. note 110) et une conséquence immédiate de la méthode choisie par ce dernier pour généraliser la notion d'involution.

Le deuxième paragraphe du mémoire est intitulé *Extension des théories précédentes*. Poncelet généralise la notion d'involution complète à un nombre quelconque de systèmes de m points alignés.

Le troisième paragraphe est intitulé *Des axes, des plans et des centres de moyennes harmoniques ou de moyennes distances des lignes ou surfaces géométriques*. Poncelet réexpose et développe des résultats déjà présentés dans la dernière partie du *Deuxième cahier*. Il commence par redonner l'énoncé du théorème de Cotes¹⁴⁰. Considérons trois droites issues d'un point a et coupant une courbe géométrique aux points p , p' , p'' , ..., q , q' , q'' , ..., r , r' , r'' , ... (fig. 17). Ce théorème affirme que les centres de moyennes harmoniques de ces trois ensembles de points relativement à a sont alignés et situés sur une droite appelée « axe des moyennes harmoniques » de cette courbe « conjugué » au pôle a [Poncelet 1866, p. 271]. Poncelet en déduit le corollaire suivant. Supposons que les intersections p et q , p' et q' , p'' et q'' , ... appartiennent chaque fois à une même branche de la courbe et notons R , R' , R'' , ... les intersections respectives des droites pq , $p'q'$, $p''q''$, ... avec la droite ar . Le corollaire affirme que ces droites ont relativement à a le même axe des moyennes harmoniques que la courbe¹⁴¹. En d'autres termes, les ensembles de points r , r' , r'' , ... et R , R' , R'' , ... ont le même centre de moyennes harmoniques relativement

¹³⁸ Le système des droites passant par p , p' , p'' , ... et celui des droites passant par q , q' , q'' , ... peuvent en effet être considérés chacun comme une courbe d'ordre m .

¹³⁹ Poncelet propose encore quelques simplifications.

¹⁴⁰ Poncelet se réfère à la preuve de ce théorème donnée dans le précédent mémoire (cf. § 4 ci-dessus).

¹⁴¹ La notion d'axe des moyennes harmoniques d'un système de droites dans le plan relativement à un pôle a déjà été définie par Poncelet dans le mémoire *Théorie générale des centres de moyennes harmoniques* [Poncelet 1828, pp. 254-255].

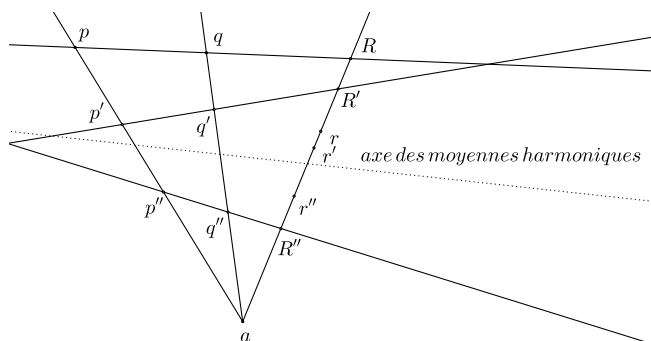


Figure 17. Le théorème de Cotes

à a . C'est une conséquence immédiate du théorème de Cotes. Il suffit de considérer ces droites comme constituant une courbe d'un ordre égal à celui de la courbe donnée.

Poncelet rappelle que si le point a est à l'infini, le théorème de Cotes redonne le théorème de Newton sur les diamètres des courbes planes.

Supposons que les droites pp' et qq' sont confondues. Les droites pqR , $p'q'R'$, $p''q''R''$, ... sont tangentes à la courbe et le corollaire donne le résultat suivant :

Si l'on coupe une ligne plane géométrique par une droite arbitraire, puis qu'on mène des tangentes aux diverses intersections correspondantes, le système de toutes ces tangentes aura même axe de moyennes harmoniques que la courbe par rapport à un point quelconque de cette droite pris pour origine des segments et pôle d'une suite de transversales. [Poncelet 1866, p. 272]

C'est le théorème de MacLaurin. Sa formulation est un peu différente de celle donnée dans le *Deuxième cahier* et il est établi ici à partir du théorème de Cotes¹⁴². Poncelet ajoute que si le pôle est à l'infini sur la droite arbitraire, les transversales issues de ce point sont parallèles à cette droite. L'axe des moyennes harmoniques devient alors un axe des moyennes distances ou diamètre de la courbe conjugué à la direction de cette droite. Si celle-ci « s'éloigne tout entière à l'infini », on retrouve le théorème de Newton sur les diamètres des courbes et des asymptotes¹⁴³ :

¹⁴² Dans le *Deuxième cahier* il était démontré directement à partir du théorème de Carnot (cf. § 3 ci-dessus).

¹⁴³ Cf § 2.1 ci-dessus.

Dans toute courbe plane géométrique, le système total des asymptotes a même diamètre que la courbe, conjugué à une direction donnée quelconque ; corollaire d'où l'on aurait pu inversement déduire, par nos principes, les théorèmes généraux ci-dessus ; mais il est évident que Newton, Mac-Laurin et Cotes n'ont point aperçu la liaison intime existant entre ces différents théorèmes, [...]. [Poncelet 1866, pp. 272-273]

En effet, si la droite est à l'infini, les tangentes en ses points de contact avec la courbe sont les asymptotes¹⁴⁴. Poncelet souligne à nouveau la force de ses « principes » qui permettent de faire apparaître un lien entre des théorèmes apparemment différents. Il poursuit en généralisant le théorème de Cotes à une surface géométrique :

Etant donnés, dans l'espace, une surface géométrique quelconque et un point fixe pris pour pôle commun d'une infinité de transversales rectilignes arbitraires, le système de tous les centres de moyennes harmoniques des intersections de ces transversales avec la surface, conjugués au pôle fixe, appartiendra à un plan unique qu'on peut appeler : plan des moyennes harmoniques relativement à ce même pôle. [Poncelet 1866, p. 273]

En considérant le cas où le pôle fixe passe à l'infini, Poncelet obtient, comme dans le cas du plan, de nouveaux théorèmes. Les courbes géométriques de l'espace donnent pour leur part lieu au théorème suivant :

Une ligne géométrique à double courbure et un axe fixe étant donnés dans l'espace, si, par cet axe, on conduit dans la courbe un faisceau ou infinité de plans transversaux, puis qu'on prenne pour chacun d'eux le centre des moyennes harmoniques des intersections correspondantes, la suite de tous ces centres appartiendra à une même droite qu'on peut appeler l'axe des moyennes harmoniques de la courbe, conjugué à l'axe fixe du faisceau¹⁴⁵. [Poncelet 1866, p. 275]

Ce théorème peut-être établi en projetant la figure sur un plan et en utilisant le théorème analogue pour une courbe plane. Différents théorèmes

¹⁴⁴ Dans un article sur le théorème de MacLaurin, Terquem note que la « méthode projective fournit une démonstration immédiate » de ce théorème à partir de celui de Newton sur les asymptotes [Terquem 1850, p. 441]. Cette remarque témoigne de l'influence du point de vue de Poncelet.

¹⁴⁵ La notion de centre des moyennes harmoniques d'un ensemble fini de points d'un plan relativement à une droite de ce plan est définie dans le *Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques* [Poncelet 1828, p. 244]. Pour plus de détails, on pourra se reporter à ce travail.

sont ensuite obtenus par polaires réciproques à partir des précédents. Poncelet relève que plusieurs d'entre eux figurent aussi dans un mémoire de Chasles publié peu de temps auparavant¹⁴⁶.

La fin du paragraphe est consacrée à la notion de polaire de contact d'un point relativement à une courbe, sujet déjà abordé dans le *Deuxième cahier*. Rappelons que cette courbe est apparue dans le cadre du problème suivant : étant donné une courbe plane d'ordre m et un point p , trouver les points α « contre-harmoniques » de p ¹⁴⁷. Le lieu des points α est une courbe d'ordre $m - 1$. Poncelet pose maintenant le problème suivant : étant donné dans un plan une courbe d'ordre m et une droite a , trouver les points dont l'axe des moyennes harmoniques relativement à cette courbe est la droite a . Soit x et x' deux points de a . Les polaires de contact de ces deux points se coupent en $(m - 1)^2$ points. Soit p un de ces points. Par définition, x est le centre des moyennes harmoniques relativement à p des points d'intersection avec la courbe de la droite px . L'axe des moyennes harmoniques de p passe par x . Pour les mêmes raisons, il passe par x' . C'est donc la droite a ¹⁴⁸. D'où les deux théorèmes suivants :

Une droite étant donnée à volonté sur le plan d'une ligne géométrique du degré m , les polaires de contact qui correspondent à ses différents points s'entre-croiseront aux mêmes $(m - 1)^2$ points fixes ou pôles, qui auront respectivement la droite donnée pour axe des moyennes harmoniques par rapport à la courbe que l'on considère. [...]

Si l'on fait mouvoir la droite donnée autour d'un point fixe quelconque du plan de la courbe proposée, les $(m - 1)^2$ pôles qui lui correspondent décriront la polaire de contact relative au point fixe. [Poncelet 1866, pp. 288-289]

Poncelet indique que ces différents théorèmes s'étendent à l'espace. Il mentionne aussi que ce sujet a été traité par Bobillier « par une voie analytique fort élégante » dans plusieurs « excellents mémoires » [Poncelet 1866, p. 290] publiés de 1827 à 1829 dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne¹⁴⁹.

¹⁴⁶ [Chasles 1830]. Chasles se distingue de Poncelet car il se limite au cas des centres de moyennes distances et n'envisage pas le cas général des centres de moyennes harmoniques. Il utilise aussi une transformation par polaires réciproques particulière, relativement à une parabole, qu'il nomme « transformation parabolique ».

¹⁴⁷ En d'autres termes, p est le centre des moyennes harmoniques relativement à α des points d'intersection de la droite px avec la courbe.

¹⁴⁸ J'ai détaillé une explication qui n'est que suggérée par Poncelet.

¹⁴⁹ Ces travaux sont étudiés dans [Voelke 2019b]. La polaire de contact est simplement appelée « courbe polaire » du point par Bobillier et les $(m - 1)^2$ points sont les « points polaires » de la droite [Bobillier 1827-1828, pp. 253-254].

Le quatrième et dernier paragraphe du mémoire est intitulé *Application de l'Analyse des transversales à l'osculution mutuelle des courbes et des surfaces géométriques*. Poncelet entend traiter de manière générale certains points abordés dans le précédent mémoire dans le cas des courbes du 3^e ordre. Des éléments déjà présentés dans le *Deuxième cahier* sont aussi repris.

Poncelet redonne d'abord la construction « par le calcul » d'une conique osculatrice du 2^e ordre en un point a d'une courbe géométrique¹⁵⁰. Il propose ensuite une nouvelle construction, « simple et élégante » [Poncelet 1866, p. 299]. Supposons que du point a l'on tire trois droites ap , aq , ar recoupant la courbe aux points p' , p'' , ..., q' , q'' , ..., r' , r'' , ... et la conique aux points p_1 , q_1 et r_1 . Les cordes q_1r_1 , $q'r'$, $q''r''$, ... coupent la transversale ap aux points P_1 , P' , P'' , ... On a l'égalité

$$\frac{1}{ap_1} + \frac{1}{aP'} + \frac{1}{aP''} + \dots = \frac{1}{ap_1} + \frac{1}{ap'} + \frac{1}{ap''} + \dots$$

Les deux systèmes de points p_1 , P' , P'' , ... et p_1 , p' , p'' , ... ont donc le même centre de moyennes harmoniques relativement à a ¹⁵¹. On obtient le point p_1 par une construction à la règle semblable à celle utilisée pour déterminer le dernier point de deux groupes de points en involution simple relativement à deux points distincts a et b ¹⁵².

Une méthode semblable permet de construire une osculatrice du 3^e ordre et l'osculatrice du 4^e ordre en un point de la courbe. Poncelet conclut que les différents théorèmes obtenus conduisent à un grand nombre de corollaires « curieux » [Poncelet 1866, p. 308] lorsque certains éléments (points ou droites) passent à l'infini. Il ajoute que l'utilisation de la théorie des polaires réciproques permet d'obtenir encore de nouveaux théorèmes. Les méthodes de Poncelet conduisent à nouveau à une multiplication des théorèmes.

6. LA RÉCEPTION DES TRAVAUX DE PONCELET PAR PLÜCKER

Plücker a sans doute été un des lecteurs les plus attentifs de Poncelet. Différents articles publiés par ce dernier dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* ainsi que le *Traité* sont cités à plusieurs reprises dans les *Analytisch-Geometrische Entwicklungen* [Plücker 1828] et [Plücker 1831]. Le

¹⁵⁰ Cf. § 3 ci-dessus.

¹⁵¹ Poncelet ne justifie pas cette égalité. On l'établit facilement à partir de résultats exposés dans le précédent mémoire dans le cas où les trois transversales sont concourantes en un point a de la courbe (cf. § 4 ci-dessus).

¹⁵² Cette construction a été donnée dans le mémoire précédent (cf. § 4 ci-dessus).

mémoire *Analyse des transversales* publié dans le *Journal de Crelle* a également retenu l'attention de Plücker. Il y fait allusion dans son *System der analytischen Geometrie* [Plücker 1835]. Il signale tout d'abord dans l'introduction de cet ouvrage que le théorème (énoncé par Poncelet) selon lequel les points d'intersection des asymptotes d'une courbe du 3^e ordre avec celle-ci sont alignés a constitué le point de départ d'une nouvelle méthode pour représenter par une équation une telle courbe [Plücker 1835, p. III]. Plücker montre en effet au § 3 de sa monographie que l'équation d'une courbe du 3^e ordre peut être mise sous la forme

$$pqr + \mu s = 0$$

où les facteurs p, q, r, s sont des expressions linéaires en x et y [Plücker 1835, chapitre 3, § 1]. Il en déduit que les trois droites $p = 0, q = 0, r = 0$ représentent les asymptotes de la courbe¹⁵³. Elles recoupent donc celle-ci en des points situés sur la droite $s = 0$.

L'ouvrage comporte trois parties. La deuxième et la troisième sont consacrées aux courbes du 2^e et du 3^e ordre. La première traite pour sa part de la détermination générale des coordonnées. C'est dans ce cadre que Plücker consacre quelques pages à la théorie des transversales. Il redémontre le théorème de Carnot et en donne quelques exemples d'application¹⁵⁴. Il démontre en particulier de manière très simple que les trois points d'inflexion d'une courbe du 3^e ordre sont alignés. Il traite aussi le cas où certains sommets du triangle transversal sont à l'infini et obtient à cette occasion une nouvelle preuve du théorème affirmant que les points d'intersection d'une courbe du 3^e ordre avec ses asymptotes sont alignés. Plücker se livre ensuite à un certain nombre de considérations générales. La théorie des transversales remonte à Carnot mais a reçu récemment, dans le domaine des applications et grâce à Poncelet, « des extensions que son fondateur ne semble pas avoir soupçonnées » [Plücker 1835, p. 47]¹⁵⁵. Il reconnaît donc l'importance des recherches de Poncelet. Plücker affirme que la manière dont il a lui-même présenté cette théorie ne semble plus rien laisser à désirer sous le rapport de la simplicité et de la clarté. Il ajoute :

¹⁵³ [Plücker 1835, p. 132]. Le raisonnement de Plücker est peu rigoureux.

¹⁵⁴ Certains seront repris par Salmon dans son *Treatise on the higher plane curves* [Salmon 1852, p. 46]. Plücker fait aussi appel dans ses raisonnements au théorème de Ceva.

¹⁵⁵ Salmon souligne lui aussi la « fertilité » du théorème de Carnot [Salmon 1852, p. 45].

Lors du premier contact avec le théorème qui contient cette théorie, chacun sera certainement surpris par sa généralité et son élégance, et ce d'autant plus que celui-ci subsiste encore, si à la place de la courbe on a une surface algébrique quelconque et si à la place du polygone plan on a un polygone fermé quelconque de l'espace. Ce même théorème livre aussi facilement et naturellement une grande quantité de résultats géométriques. [Plücker 1835, p. 48]¹⁵⁶

Ces lignes aident à mieux comprendre l'enthousiasme suscité chez plusieurs mathématiciens par la théorie de Carnot. Elle leur est apparue comme un puissant outil d'organisation et de démonstration. L'appréciation de Plücker est cependant plus mesurée. Il considère en effet que les résultats obtenus grâce à cette théorie sont les mêmes que ceux qui s'obtiennent facilement, si ce n'est plus, par d'autres méthodes. Il refuse donc de lui accorder le rôle de « fondement d'un système de la géométrie » [Plücker 1835, p. 48]. Ce jugement tranche avec le point de vue de Poncelet. Plücker ne reprend en fin de compte que quelques résultats exposés par ce dernier dans le premier paragraphe de son mémoire *Analyse des transversales*. Les problèmes de constructions (tangente en un point, intersection avec une droite, construction d'une courbe à partir de ses intersections avec un système de transversales) ainsi que la notion généralisée d'involution n'apparaissent pas. Après avoir consacré quelques pages à la théorie des transversales, Plücker passe à l'étude des « correspondances » (« Verwandtschaften ») dans le plan. Il reprend des concepts introduits par Möbius dans son livre *Der barycentrische Calcul* [Möbius 1827]. La place consacrée par Plücker à ce sujet est beaucoup plus importante que celle accordée à la théorie des transversales, ce qui montre que celle-ci constitue en fin de compte à cette époque un domaine plutôt marginal.

7. CONCLUSION

Les travaux de Poncelet sur les courbes et surfaces géométriques constituent une œuvre considérable, tant par leur variété que par le nombre de résultats obtenus. Destinés à achever le travail entrepris dans le *Traité*, ils ont cependant laissé beaucoup moins de traces que ce dernier dans

¹⁵⁶ « Gewiss wird jeder bei der ersten Bekanntschaft mit dem Satze, der diese Theorie enthält, von der Allgemeinheit und Eleganz desselben überrascht, und zwar in um so höherem Grade, als derselbe auch dann noch besteht, wenn an die Stelle der Curve irgend eine algebraische Oberfläche und an die Stelle des ebenen Polygons irgend ein in sich geschlossenes Polygon im Raume tritt. Auch liefert derselbe eine große Menge geometrischer Resultate leicht und natürlich. »

l'histoire des mathématiques et n'ont pas ouvert de nouvelles voies de recherche. Plücker, un des lecteurs sans doute les plus avisés de Poncelet, n'en retient que quelques éléments. Dans son *Aperçu historique* Chasles se contente pour sa part de signaler que Poncelet a donné une construction des tangentes aux courbes géométriques¹⁵⁷. La tentative de Poncelet d'étudier ces courbes de manière purement géométrique ne semble donc guère avoir retenu l'attention des mathématiciens et reste isolée. Une première raison est sans doute due au fait que les contemporains ont eu accès uniquement au mémoire *Analyse des transversales* publié dans le *Journal de Crelle*. Ce texte témoigne d'un foisonnement d'idées parfois peu structuré. Il a pour but principal de présenter des méthodes générales et les preuves des résultats particuliers sont parfois seulement esquissées. Or comme nous l'avons vu, de nombreux aspects des méthodes de Poncelet sont plus clairs si l'on commence par étudier le *Deuxième cahier*¹⁵⁸. Publié au moment de sa rédaction, ce manuscrit aurait certainement suscité plus d'intérêt par la nouveauté des méthodes et des résultats établis¹⁵⁹. Relevons aussi que les résultats présentés dans le mémoire *Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces géométriques d'ordre quelconque* constituant la section IV du second tome du *Traité* sont restés inconnus jusqu'en 1866 et n'ont pu inspirer d'autres mathématiciens. Un autre obstacle à la diffusion des idées de Poncelet en France est mentionné par Terquem. Dans un article sur le théorème de MacLaurin, il cite en note le mémoire *Analyse des transversales* et relève qu'il a paru à l'étranger et qu'il est « presque inconnu en France » [Terquem 1850, p. 449]. Une deuxième raison du peu de succès rencontré par les méthodes de Poncelet est sans doute à chercher dans un cadre conceptuel assez vague. Il définit une courbe géométrique et établit le théorème de Carnot de manière intuitive. De nombreux raisonnements sont effectués de manière « générale » en invoquant le principe de continuité. Le statut des éléments imaginaires n'est pas véritablement défini. Un analyste comme Plücker ne pouvait sans doute guère s'y retrouver. Le refus de Poncelet de recourir à des

¹⁵⁷ [Chasles 1837, p. 223]. Chasles propose lui-même une solution de ce problème, différente de celle de Poncelet.

¹⁵⁸ Dans une note ajoutée au début de la section III du second volume du *Traité*, Poncelet écrit que ce texte « pourra servir, au besoin, d'utile commentaire, d'exercices ou d'éclaircissement » [Poncelet 1866, p. 122].

¹⁵⁹ Rappelons que Poncelet eut l'occasion de présenter à plusieurs reprises ses recherches sur les courbes entre 1818 et 1821 à d'autres mathématiciens et notamment à Arago qui l'encouragea à « les mettre promptement au jour » [Poncelet 1866, p. 123]. Comme nous l'avons vu, les circonstances en décidèrent cependant autrement.

méthodes analytiques se heurte à des obstacles. Il est significatif qu'on ne trouve pratiquement rien sur son mémoire *Analyse des transversales* dans le *Treatise on the Higher Plane Curves* de Salmon [Salmon 1852], un ouvrage exposant une synthèse des recherches effectuées sur ce sujet jusqu'au milieu du XIX^e siècle.

L'étude des travaux de Poncelet sur les courbes et surfaces géométriques présente malgré tout un intérêt indéniable pour l'historien. C'est d'abord un témoignage de l'extraordinaire capacité d'imagination et d'invention de leur auteur. La combinaison de trois théories (centres de moyennes harmoniques, polaires réciproques et transversales) aboutit à la construction d'un édifice particulièrement vaste. La nouveauté du cadre projectif créé par Poncelet apparaît clairement lors de la discussion sur l'équivalence entre les théorèmes de Newton, Cotes, Carnot et MacLaurin. La généralisation de la notion d'involution remet Desargues à l'honneur. Les différentes constructions des tangentes et des coniques osculatrices méritent aussi d'être retenues. Elles répondent à un besoin pratique d'une grande importance pour Poncelet. Les constructions très compliquées et purement théoriques d'une courbe déterminée par ses points d'intersection avec un système de transversales offrent en revanche aujourd'hui un intérêt moindre. Elles témoignent de l'habileté de Poncelet dans l'utilisation du théorème de Carnot et de sa volonté d'établir une théorie purement synthétique des courbes géométriques. Elles montrent en même temps les limites de sa méthode. En cherchant à prouver que la géométrie synthétique peut rivaliser dans tous les domaines avec la géométrie analytique, Poncelet s'est parfois engagé dans une voie sans issue.

RÉFÉRENCES

ADAMS (Carl)

[1843] *Die Lehre von den Transversalen in ihrer Anwendung auf die Planimetrie*, Winterthur : Steiner, 1843.

BELHOSTE (Bruno)

[1998] De l'Ecole polytechnique à Saratoff, les premiers travaux géométriques de Poncelet, *Bulletin de la Sabix*, 19 (1998), p. 1–23.

BOBILLIER (Etienne)

[1827–1828] Géométrie de situation. Recherche sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827–1828), p. 253–269.

BOSSUT (Charles)

- [1800] *Cours de mathématiques, tome second, géométrie, et application de l'algèbre à la géométrie, avec une lettre du citoyen Carnot au citoyen Bossut*, Paris : Firmin Didot, 1800.

BRIANCHON (Charles Julien)

- [1817] *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Paris : Bachelier, 1817.
 [1818] *Application de la théorie des transversales*, Paris : Bachelier, 1818.

BRUNEAU (Olivier)

- [2011] Le De Linearum de MacLaurin : entre Newton et Poncelet, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17 (2011), p. 9–39.
 [2017] La circulation des enseignants de mathématiques à Metz autour de 1800, dans Olivier Bruneau et Laurent Rollet, éd., *Mathématiques et mathématiciens à Metz (1750–1850). Dynamiques de recherche et d'enseignement dans un espace local*, Nancy : Editions Universitaires de Lorraine, 2017, p. 27–44.

CARNOT (Lazare)

- [1801] *De la corrélation des figures de géométrie*, Paris : Duprat, 1801.
 [1803] *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.
 [1806] *Mémoire Sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un Essai sur la Théorie des Transversales*, Paris : Courcier, 1806.

CENTINA (Andrea Del)

- [2022] Carnot's theory of transversals and its applications by Servois and Brianchon : the awakening of synthetic geometry in France, *Archiv for History of Exact Sciences*, 76 (2022), p. 45–128.

CHASLES (Michel)

- [1830] Sur la transformation parabolique des relations métriques des figures, *Correspondance mathématique et physique, publiée par A. Quetelet*, VI (1830), p. 1–25.
 [1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, suivi d'un Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, Bruxelles : M. Hayez, 1837.

CHEMLA (Karine)

- [1990] Remarques sur les recherches géométriques de Lazare Carnot, dans Charnay (Jean-Paul), éd., *Lazare Carnot ou le savant-citoyen*, Paris : Presses de l'Université de Paris-Sorbonne, 1990, p. 525–541.
 [1998] Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Menelaus, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4 (1998), p. 163–190.
 [2016] The value of generality in Michel Chasles's historiography of geometry, dans Karine Chemla, Renaud Chorlay & David Rabouin, éd., *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford : Oxford Univ. Press, 2016, p. 47–89.

CRAMER (Gabriel)

- [1750] *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Genève : Frères Cramer et Cl. Philibert, 1750.

CRELLE (August Leopold)

- [1826] *Lehrbuch der Elemente der Geometrie und der ebenen und sphärischen Trigonometrie, erster Band*, Berlin : G. Reimer, 1826.

DESARGUES (Girard)

- [1639] *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*, Paris : Sans nom d'éditeur, 1639.

DESCARTES (René)

- [1996] *Oeuvres, volume II*, Paris : Vrin, 1996.

FRIEDELMEYER (Jean-Pierre)

- [2010] L'impulsion originelle de Poncelet dans l'invention de la géométrie projective, dans Bioesmat-Martagon (Lise), éd., *Eléments d'une biographie de l'espace projectif*, Nancy : Presses Universitaires de Nancy, 2010, p. 55–158.

GERGONNE (Joseph)

- [1813–1814] Géométrie de la règle. Application de la doctrine des projections à la démonstration des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 4 (1813–1814), p. 78–84.

GRUNERT (Johann August)

- [1831] *Mathematisches Wörterbuch, fünfter Theil, erster Band. T und U*, Leipzig : Schwickert, 1831.

GUICCIARDINI (Niccolò)

- [2009] *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*, Cambridge (Ms.) : MIT Press, 2009.

HADAMARD (Jacques)

- [1898] *Leçons de géométrie élémentaire (Géométrie plane)*, Paris : Armand Colin, 1898.

LEGENDRE (Adrien-Marie)

- [1862] *Eléments de géométrie, avec additions et modifications par M. A. Blanchet, 10^e édition*, Paris : Firmin-Didot, 1862.

L'HUILLIER (Simon)

- [1809] *Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique*, Paris, Genève : Paschoud, 1809.

MACLAURIN (Colin)

- [1748a] *A Treatise of Algebra, in three parts To which is added an Appendix, Concerning the general Properties of Geometrical Lines.*, London : A. Millar and J. Nourse, 1748.
 [1748b] *De Linearum Geometricarum Proprietatibus generalibus Tractatus*, London : A. Millar and J. Nourse, 1748.

MÖBIUS (August)

- [1827] *Der barycentrische Calcul*, Leipzig : J. A. Barth, 1827.

NABONNAND (Philippe)

- [2006] *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au XIX^e siècle. Document présenté pour l'HDR*, Archives ouvertes hal-010 82207, 2006.
- [2011] L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles, dans Dominique Flament et Philippe Nabonnand, éd., *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la maison des sciences de l'homme, 2011, p. 17–47.
- [2015] L'étude des propriétés projectives des figures par Poncelet : une modernité explicitement ancrée dans la tradition, dans Christian Gilain et Alexandre Guilbaud, éd., *Sciences mathématiques 1750–1850 – Continuités et ruptures*, Paris : CNRS Éditions, 2015, p. 381–402.
- [2017] L'activité et la sociabilité mathématiques à Metz entre 1821 et 1870 vues à partir des Mémoires de l'Académie de Metz, dans Olivier Bruneau et Laurent Rollet, éd., *Mathématiques et mathématiciens à Metz (1750–1850). Dynamiques de recherche et d'enseignement dans un espace local*, Nancy : Éditions Universitaires de Lorraine, 2017, p. 201–229.

NEWTON (Isaac)

- [1704] *Enumeratio linearum tertii ordinis*, dans *Opticks*, London : Smith and Walford, 1704, p. 138–162.

PASCAL (Blaise)

- [1640] *Essay pour les coniques*, Paris : Sans nom d'éditeur, 1640.
- [1779] *Oeuvres tome quatrième*, La Haye : Detune, 1779.

PLÜCKER (Julius)

- [1828] *Analytisch-Geometrische Entwicklungen, Band 1*, Essen : G. D. Baedeker, 1828.
- [1831] *Analytisch-Geometrische Entwicklungen, Band 2*, Essen : G. D. Baedeker, 1831.
- [1835] *System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend*, Berlin : Duncker und Humblot, 1835.

PONCELET (Jean-Victor)

- [1817–1818] Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique en géométrie et solutions de divers problèmes dépendant de la géométrie de la règle, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 8 (1817–1818), p. 141–155.
- [1822] *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.
- [1828] Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 3 (1828), p. 213–272.
- [1829] Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4 (1829), p. 1–71.
- [1832] Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 8 (1832), p. 21–41, 117–137, 213–252, 370–410.
- [1862] *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Mallet-Bachelier, 1862.

- [1864] *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, vol. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1864.
- [1865] *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Gauthier-Villars, deuxième édition, 1865.
- [1866] *Traité des propriétés projectives des figures*, vol. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1866.

- ROLLET (Laurent)
 - [2017] Les enseignants de mathématiques du lycée de Metz (1804–1870), dans Olivier Bruneau et Laurent Rollet, éd., *Mathématiques et mathématiciens à Metz (1750–1850). Dynamiques de recherche et d'enseignement dans un espace local*, Nancy : Editions Universitaires de Lorraine, 2017, p. 231–281.

- SALMON (Georg)
 - [1852] *A Treatise on the Higher Plane Curves*, Dublin : Hodges and Smith, 1852.

- SERVOIS (François-Joseph)
 - [1804] *Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique*, Metz : Devilly & Paris : Courcier, 1804.

- STIRLING (James)
 - [1717] *Lineae Tertii Ordinis Neutoniana*, Oxford : Whistler, 1717.

- STURM (Charles)
 - [1826–27] Mémoire sur les lignes du second ordre (deuxième partie), *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, 17 (1826–27), p. 173–198.

- TATON (René)
 - [1981] *L'oeuvre mathématique de G. Desargues*, Paris : Vrin, 1981.

- TERQUEM (Olry)
 - [1850] Théorème de Mac-Laurin sur les courbes algébriques planes; et conséquences géométriques du théorème analytique de M. Jacobi, *Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série*, 9 (1850), p. 440–451.

- VOELKE (Jean-Daniel)
 - [2019a] La théorie des polaires réciproques de Poncelet, dans Frank Etwein, Jean Daniel Voelke et Klaus Volkert, éd., *Dualität als Archetypus mathematischen Denkens*, Göttingen : Cuvillier Verlag, 2019, p. 147–170.
 - [2019b] La théorie des polaires réciproques chez Bobillier, dans Frank Etwein, Jean Daniel Voelke et Klaus Volkert, éd., *Dualität als Archetypus mathematischen Denkens*, Göttingen : Cuvillier Verlag, 2019, p. 171–187.

- WARING (Edward)
 - [1762] *Miscellanea analytica, de aequationibus algebraicis, et curvarum proprietatibus*, Cambridge : Bentham, 1762.

