Revue d'histoire des mathématiques
29 (2023), p. 109–143
doi:10.24033/rhm.330

L'ÉTOILE DE MITTAG-LEFFLER AUTOUR D'UNE COLLECTION DE TEXTES ÉCRITS DE 1898 À 1920

Frédéric Jaëck

Résumé. — Cet article étudie une collection de publications de Mittag-Leffler dans lesquelles il développe une nouvelle façon de représenter les fonctions analytiques sur un domaine étoilé maximal. En utilisant le concept de prolongement emprunté à Weierstraß, et en s'appuyant sur une conception géométrique de domaines emboîtés, Mittag-Leffler obtient une représentation des fonctions analytiques en séries qui étend la notion de série de Taylor tout en conservant ses propriétés les plus importantes.

Abstract (Mittag-Leffler's star. About a collection of texts written between 1898 and 1920)

This paper studies a collection of publications by Mittag-Leffler in which he develops a new way of representing analytic functions on a maximal star domain. Using the concept of extension borrowed from Weierstraß, and relying on a geometric conception of nested domains, Mittag-Leffler obtains a representation of analytic functions in series that extends the notion of Taylor series while retaining its most important properties.

Texte reçu le 10 novembre 2021, revisé le 16 janvier 2024, accepté pour publication le 23 janvier 2024.

Frédéric Jaëck, Aix-Marseille Université, 52 Avenue Escadrille Normandie-Niemen, 13 013 Marseille, France. ADEF UR 4671 et SPHERE UMR 7219.

Courrier électronique : `frederic.jaeck@math.cnrs.fr`

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55; 01A60.

Mots clefs : Étoile de Mittag-Leffler, analyse, fonctions analytiques.

Key words and phrases. — Mittag-Leffler's star, analysis, analytical functions.

Cet article a été élaboré à la suite de plusieurs séjours à l'Institut Mittag-Leffler (Djurs-holm, Suède) et a bénéficié de nombreuses discussions avec Laurent Mazliak, Emma Sallent Del Colombo et Rossana Tazzioli alors que nous travaillions sur l'édition de la correspondance entre Mittag-Leffler et Volterra, [Jaëck et al. 2019].

1. INTRODUCTION

Entre 1898 et 1920 Mittag-Leffler a publié six textes sous le titre « Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène », en français et dans la revue qu'il a fondée, *Acta Mathematica*[1].

En fait, ces articles de Mittag-Leffler sont précédés de deux séries de notes (quatre notes en tout) publiées aux comptes rendus de l'académie des sciences de Stockholm qui sont écrites en suédois.

La première de ces notes est intitulée «Om en generalisering af potensserier» [Mittag-Leffler 1898a, 9 mars 1898], puis trois autres notes publiées sous le titre «Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion» [Mittag-Leffler 1898b], présentées respectivement le 11 mai (deux communications) et le 14 septembre 1898 devant l'académie. Ces textes introduisent les idées essentielles et le concept d'*étoile* qui vont permettre à Mittag-Leffler de faire un pas décisif dans le domaine de la représentation des fonctions analytiques de la variable complexe.

Ce n'est probablement qu'après en avoir parlé avec des collègues, comme le montre désormais la publication de plusieurs correspondances[2], que Mittag-Leffler va prendre conscience de l'importance des idées qu'il a développées pour la première fois dans les notes en suédois. Ceci l'amènera rapidement à republier ces idées initiales en langue française, en commençant par une note aux Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris [Mittag-Leffler 1899b], puis dans Acta Mathematica[3].

Les travaux de Mittag-Leffler sur ce sujet susciteront des réactions mathématiques nombreuses qu'il consignera rapidement dans ses propres articles. Il est donc possible de construire, à partir de la série de textes que nous étudions ici, une bibliographie extrêmement riche qui permet d'explorer les diverses facettes de l'étude fine des fonctions analytiques et de leurs représentations au début du XXᵉ siècle. De plus, cette bibliographie secondaire[4] permet de comprendre comment une communauté de mathématiciens désormais bien identifiée par les historiens a cherché à franchir un nouveau pas et à forger petit-à-petit une notion moderne

---

1 Voir à ce sujet [Barrow-Green 2002 ; Domar 1982 ; Duda 1996] et l'introduction de [Jaëck et al. 2019].

2 Voir en particulier la correspondance avec Henri Poincaré éditée par Nabonnand [Nabonnand 1999], et la correspondance avec Volterra éditée par Jaëck, Mazliak, Sallent Del Colombo et Tazzioli [Jaëck et al. 2019], par exemple.

3 Les résultats des notes en suédois sont repris *in extenso* dans le premier des six articles publiés à Acta Mathematica, avec des ajustements mineurs.

4 Nous donnons la liste des travaux cités par Mittag-Leffler dans une bibliographie séparée à la fin de notre article.

de fonction analytique à partir des conceptions classiques établies par Weierstraß.[5]

Au tournant du XIXᵉ–XXᵉ siècle, Mittag-Leffler apparaît comme un acteur qui joue un rôle important dans la circulation des mathématiques de son époque, et il est au centre d'un réseau qui se concrétise petit-à-petit autour de plusieurs activités. Les invitations de personnalités à faire cours dans plusieurs universités et la création de revues internationales de mathématiques sont deux éléments tangibles de cette nouvelle organisation.

Mittag-Leffler devient docteur en 1872, et après l'obtention d'une bourse, il passe les trois années suivantes à l'étranger. Il fréquente d'abord l'université de Paris où il fait la connaissance de Darboux, Liouville, Briot, Bouquet et plusieurs autres mathématiciens éminents de l'époque. À Paris, Mittag-Leffler assiste aux cours de Charles Hermite sur les fonctions elliptiques. Au printemps 1874, il s'installe à Berlin et commence à assister aux cours de Weierstrass qui propose lui aussi une approche des fonctions elliptiques qui séduit davantage le jeune docteur. La façon de penser les fonctions analytiques que nous retrouverons tout au long des textes que nous présentons est grandement influencée par la pensée weierstrassienne dont Mittag-Leffler s'imprègne à Berlin.[6]

En 1877, Mittag-Leffler devient professeur à Helsingfors (Finlande), succédant à Lorenz Lindelöf, puis en 1881, il prend le premier poste de professeur de mathématiques du tout nouveau Collège universitaire de Stockholm (la future université de Stockholm). En 1882, il fonde le journal *Acta Mathematica*[7] avec l'ambition qu'il soit rapidement un lieu de convergence des mathématiques les plus en pointe à son époque. Grâce aux contacts nombreux qu'il a su établir, il publie dès les premiers

---

5 Pour saisir l'évolution de la notion de fonction analytique, et plus largement de fonction de la variable complexe, le lecteur pourra consulter le livre *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass* de Bottazzini [Bottazzini 1986], mais aussi le livre *Очерки по истории теории аналитических функций* (Essai sur l'histoire de la théorie des fonctions analytiques) de Markuševič [Markuševič 1951] ou encore son article «Some questions concerning the history of the theory of analytic functions in the nineteenth century» [Markuševič] qui donnent une vision intégrant les travaux des mathématiciens russes.

6 Le lecteur intéressé par cette filiation mathématique Weierstraß – Mittag-Leffler peut se référer à l'ouvrage *Hidden harmony – geometric fantasies. The rise of complex function theory* de Gray et Bottazzini, et en particulier le chapitre 6, intitulé «Weierstrasss Analytic Function Theory», [Bottazzini & Gray 2013]. Mentionnons aussi le livre *Karl Weierstraß (1815–1897). Aspekte seines Lebens und Werkes – aspects of his life and work* [König & Sprekels 2016] qui s'ouvre sur un chapitre de Rågstedt intitulé «Prelude: Gösta Mittag-Leffler and his quest for the Weierstraß legacy» [Rågstedt 2016].

7 Voir l'article «Gösta Mittag-Leffler and the foundation and administration of Acta Mathematica» [Barrow-Green 2002].

numéros des articles importants de mathématiciens allemands, finlandais, français, italiens, suédois, etc.

À Stockholm, Mittag-Leffler aura, pour le seconder dans le travail de relecture des articles soumis à la nouvelle revue, mais aussi comme collègue avec qui discuter des questions mathématiques importantes, Lars Edvard Phragmén. Les travaux de ce dernier ont porté sur les fonctions elliptiques et l'analyse complexe. Son résultat le plus célèbre est l'extension du théorème de Liouville aux fonctions analytiques sur un secteur angulaire. Une première version a été proposée par Phragmén, puis améliorée par le mathématicien finlandais Ernst Lindelöf. Ils ont publié conjointement cette dernière version, connue sous le nom de principe de Phragmén-Lindelöf dans le numéro 31 de la revue de Mittag-Leffler, daté de 1908, [Phragmén & Lindelöf 1908]. On retrouvera dans ce qui suit de nombreuses références aux travaux de Phragmén qui s'intéresse de près aux propriétés des fonctions de la variable complexe, essentiellement jusqu'en 1908.[8]

Les résultats que Mittag-Leffler expose sont donc, comme nous l'avons rappelé, dans la lignée des conceptions de Weierstraß qui ont fortement influencé ses propres recherches. Mittag-Leffler revient en détail, dans les articles que nous étudions ici, sur la notion de prolongement qui est au cœur de la définition weierstrassienne de fonction analytique et dont il va mener une critique fine. Son but initial est d'établir une représentation unique d'une fonction, sous forme de série (double), qui reste valide sur un domaine aussi vaste que possible. Afin de répondre à cette contrainte, il développe le concept d'*étoile* dont nous redonnerons la construction dessous et dont nous analyserons comment elle a permis au mathématicien suédois de progresser.

D'un point de vue historique les textes de Mittag-Leffler que nous présentons ici sont importants pour comprendre l'évolution des idées non seulement en analyse des fonctions de la variable complexe, mais aussi en ce qui concerne le rôle de ces idées dans diverses branches des mathématiques, comme dans l'analyse fonctionnelle qui se développe à grands pas à la charnière entre les XIX^e^ et XX^e^ siècles.[9]

---

8 En plus de l'analyse, Phragmén s'intéresse dès les années 1890 au problème du vote démocratique, aux mathématiques de l'assurance et il intégrera un comité de réflexion sur une nouvelle législation des élections. En 1903 il quitte l'université pour intégrer l'Inspection royale des compagnies d'assurance dont il devint le directeur l'année suivante. En 1908, il est nommé directeur de la compagnie d'assurance Allmänna Lifförsakringsbolaget. On peut consulter la biographie établie par Cramér [Cramér 1958].

9 Nous ne donnons ici que quelques pistes dans ce registre des interactions entre analyse classique et analyse fonctionnelle, ou encore avec d'autres champs des mathématiques fondamentales ou appliquées, car il dépasse de loin le cadre de notre étude.

Au-delà d'une sorte d'achèvement du programme weierstrassien dans la compréhension de la notion de fonction analytique, des travaux récents en histoire, et en particulier l'étude de la correspondance entre Mittag-Leffler et Volterra, montrent l'écho de cette conception nouvelle dans des domaines qui utilisent des fonctions de la variable complexe. En particulier Volterra, qui développe à la fin du XIXe siècle un calcul différentiel et intégral pour des fonctions de lignes (que l'on nomme désormais dans un contexte moderne des 'fonctionnelles'), saisit l'intérêt de concevoir un domaine maximal étoilé où une fonction peut être représentée par une série qui étend la notion de série de Taylor.

Plus largement, il faut garder en tête que la notion de représentation d'une fonction en série restera un outil de prédilection des mathématiciens dans de nombreux problèmes qui préfigurent la naissance de l'analyse fonctionnelle moderne au début du XXe siècle[10].

On peut, à la lumière de nos connaissances actuelles, mettre en perspective les *éléments de fonction* que Mittag-Leffler reprend chez Weierstraß avec la notion de germe de fonctions analytiques puis de faisceaux, et tisser un lien avec les notions que les mathématiciens seront amenés à élaborer ensuite. L'idée de considérer des classes d'équivalence d'*éléments de fonction* plutôt que les *éléments de fonction* eux-mêmes, les réponses géométriques et topologiques pour traiter des branches multiformes et les prolongements selon des chemins distincts, la notion de monodromie etc., sont autant de développements qui prennent tout leur sens quand on les conçoit à la lumière des réflexions de Mittag-Leffler.

Par ailleurs, les six textes que nous présentons permettent de mieux comprendre la trajectoire intellectuelle du mathématicien Mittag-Leffler. Ils témoignent en effet d'une période particulière de son activité et de ses intérêts mathématiques.

Ils permettent de distinguer deux périodes dans le travail de recherche de Mittag-Leffler.

Il y a d'abord un premier type de travaux qui le mèneront à établir ce que l'on nomme désormais le *théorème de Mittag-Leffler*.

En 2013 Laura E. Turner publiait «The Mittag-Leffler Theorem: The origin, evolution, and reception of a mathematical result, 1876–1884» qui montre précisément comment Mittag-Leffler a réussi à prolonger et dépasser des conceptions de Weierstraß sur les fonctions méromorphes. Elle y

---

10 On peut à ce sujet lire l'article [Jaëck 2010] qui montre, grâce à une analyse des travaux de Fréchet, comment la notion de fonction représentable en série a joué un rôle majeur dans une progression vers une vision générale pour les problèmes d'équations intégrales.

explore le cheminement des idées qui a permis à Mittag-Leffler de développer le célèbre théorème qui porte désormais son nom, et qui dans sa version finale exposée en 1884 est présentée sous la forme suivante :

> Soit Q un ensemble isolé appartenant an domaine d'une variable x à variabilité illimitée, et dont les points particuliers seront désignés par $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ Soit ensuite
> $$G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad G_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots, G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right), \ldots$$
> une série de fonctions monogènes uniformes, où $G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right)$ désigne une fonction entière rationnelle ou transcendante de $\frac{1}{x-a_\nu}$, s'évanouissant lorsque $\frac{1}{x-a_\nu} = 0$. Il est alors toujours possible de former une expression analytique qui se comporte partout d'une manière régulière, sauf au voisinage de chacun des points appartenant a $Q + Q'$, et qui, pour chaque valeur déterminée de ν, au voisinage de $(x = a_\nu)$, peut être mise sous la forme
> $$G_\nu\left(\frac{1}{x-a_\nu}\right) + \mathfrak{P}\,(x - a_\nu)\,.$$
> [Mittag-Leffler 1884, p.8]

Turner décrit ce résultat comme une « une extension naturelle du célèbre théorème de factorisation de Weierstraß » et montre sa longue maturation sur une période qui court de 1876 à 1884. Dans son article, Turner montre comment « Mittag-Leffler a embrassé non seulement les idées de Weierstraß sur l'analyse, mais aussi l'objectif de Weierstraß de trouver le plus haut niveau de généralité disponible dans son cadre. » [Turner 2013, p.38] Un chapitre intitulé « L'influence de Weierstraß » montre le type de mathématiques que développait le mathématicien allemand et l'influence que ses idées eurent sur Mittag-Leffler au début de sa carrière.

Notre article complète donc cette étude de Turner en se concentrant sur des travaux qui occupèrent Mittag-Leffler après avoir établi son théorème sur les fonctions méromorphes, quasiment jusqu'à la fin de sa carrière mathématique.

Le thème de l'*étoile* sur lequel porte notre étude montre un changement de point de vue et il constituera l'outil essentiel de la seconde période que nous définissons, liée à l'idée de prolongement analytique et de représentation par série. Bien sûr, ces deux thèmes et cette périodisation ne forment pas une rupture étanche, et ils permettent seulement de mieux comprendre une évolution dans le travail de Mittag-Leffler.

Les six textes qui explorent le potentiel de l'*étoile* permettent entre autres d'étudier et d'illustrer le rôle de plusieurs éléments sur lesquels s'appuie le mathématicien suédois pour progresser. Ils permettent de mettre en évidence plusieurs aspects qui, combinés, donnent la possibilité de faire émerger un concept nouveau qui va immédiatement s'organiser et prendre sa place dans un cadre plus vaste et préexistant, celui de fonction analytique lié à la série de Taylor.

Il y a plusieurs aspects et plusieurs temps à analyser dans la progression que nous pouvons lire dans les textes de Mittag-Leffler :

– Le recours à un procédé de construction géométrique menant à diverses formes dont l'*étoile* est l'élément le plus emblématique.

– L'utilisation des sommes algébriques pour représenter les fonctions.

– Le passage de la somme finie à la somme infinie via la notion de limite qui permet de dépasser l'univers polynomial. Ce passage du fini à l'infini se retrouve en parallèle au niveau de la construction géométrique : Mittag-Leffler construit des collections d'étoiles imbriquées les unes dans les autres qui tendent vers une étoile limite, ce qui lui permet d'obtenir une représentation de la fonction valable sur une étoile la plus étendue possible. Nous verrons dans ce qui suit comment Mittag-Leffler convoque une notion de limite particulière afin d'obtenir un résultat le plus général possible.

Mittag-Leffler utilise ces divers éléments pour penser une nouvelle forme de série qui a des similitudes avec la série de Taylor, plus générale que celle qui permet de représenter une fonction analytique dans un voisinage circulaire d'un point. La nouvelle série double qui représente la fonction sur son *étoile* possède plusieurs propriétés importantes de la série de Taylor. Ainsi, et ceci illustre un aspect important de la progression que l'on peut lire dans les textes de Mittag-Leffler, la nouvelle idée étend une conception antérieure, mais elle possède aussi la qualité de se mouler parfaitement dans le domaine préexistant de la théorie des fonctions analytiques.

Une grande partie du travail de Mittag-Leffler que nous allons présenter consiste en effet à donner une représentation d'une fonction qui est non seulement la plus étendue possible mais qui possède en outre diverses propriétés de la série de Taylor que l'on obtient dans le cas du disque – le disque est vu comme une forme particulière d'étoile la moins étendue. De nombreuses questions de convergence au bord de l'étoile ou à l'extérieur seront donc considérées. Retrouver dans le cas général les propriétés de la série de Taylor est donc nécessaire pour valider une généralisation et la rendre compatible avec un mode de pensée préexistant.

2. « CONTINUATION » ET « REPRÉSENTATION » ANALYTIQUE

Dans ce qui suit, conformément aux notations de Mittag-Leffler :

> K est un continuum formé d'une seule pièce qui ne se recouvre nulle part elle-même, renfermant le point a, et tel que la branche de la fonction $F(x)$, formée par $\mathfrak{P}(x|a)$ et sa continuation analytique à l'intérieur de K, reste uniforme et régulière, nous désignerons cette branche par $FK(x)$.
>
> [Mittag-Leffler 1899a, p.44-45]

Comme le rappelle Mittag-Leffler dès ses premières publications, la façon de voir de Weierstraß s'appuie sur une suite de quantités notées $F^{(n)}(a)$ où $a \in \mathbb{C}$ est un point donné, vérifiant le critère d'Abel : $|\sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu}F^{(\mu)}(a)}| < \infty$. On associe alors à ces éléments la série

$$\mathfrak{P}(x|a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)\dot{(}x-a)^{\mu}.$$

Mittag-Leffler résume :

> Dans la théorie des fonctions analytiques, édifiée par Weierstraß, la fonction est définie par la série $\mathfrak{P}(x|a)$ et par la continuation analytique de cette série. [...] Il semble d'ailleurs que Weierstraß n'ait guère regardé la continuation analytique autrement que comme un mode de définition de la fonction analytique.
>
> [Mittag-Leffler 1899a, p.44 et 46]

Or, la formule donnée par le développement de Weierstraß ne donne une représentation explicite de la fonction que dans le disque de convergence de la série, qui sera notée par Mittag-Leffler FC (C pour cercle).

La première approche rappelée par Mittag-Leffler, part d'un *élément de fonction* (*Funktionselement*), qui est la donnée (D_0, f_0) d'un disque D_0 et d'une série entière f_0 dont D_0 est le disque de convergence. La série f_0 définit ainsi une fonction analytique sur D_0. Le prolongement consiste à concevoir un nouvel *élément de fonction* (D_1, f_1) où le disque D_1 recouvre partiellement D_0 et tel que les deux fonctions coïncident sur $D_0 \cap D_1$. Dans ce cas, Mittag-Leffler parlera de « continuation » (*Fortsetzung*, dans le vocabulaire de Weierstraß), et le nouvel *élément de fonction* (D_1, f_1) entretient un rapport étroit avec le précédent.

Bien sûr, il y a une fonction analytique définie par morceaux qui émane de cette procédure, et le nouvel être mathématique ainsi créé peut désormais être considéré indépendamment des *éléments de fonction* qui ont permis de le concevoir. La notion de *restriction* (qui n'est pas évoquée par Mittag-Leffler) permet de retrouver d'une nouvelle façon le lien avec les *éléments de fonction* qui localement définissent l'analycité de la fonction obtenue.

Mittag-Leffler commence par reconnaître que le procédé de Weierstraß permet de proche en proche d'établir une formule qui définit le prolongement grâce aux seules données initiales, c'est-à-dire grâce à l'« élément de fonction » et donc aux dérivées successives au point a. La difficulté, notée par Mittag-Leffler, vient du fait que l'on ne connaît pas *a priori* le rayon de convergence de la série qui permet d'étendre la représentation d'une part, et qu'il faut répéter l'opération pour obtenir un prolongement de proche en proche. Il dira que « cette manière de représenter [la fonction analytique] est d'une complication extrême et d'une transcendance très élevée » [Mittag-Leffler 1899a, p.45-46].

La seconde approche que mentionne Mittag-Leffler consiste à utiliser une représentation intégrale de Cauchy :

> Au premier abord, il semble que la théorie de Cauchy, qui est édifiée sur des principes tout autres que celle de Weierstrass, possède un grand avantage sur celle-ci, lorsqu'il s'agit de la représentation analytique de $FK(x)$. En effet, une telle représentation est donnée par la formule
>
> $$FK(x) = \int_S \frac{FK(z)}{z-x} dz, \tag{3}$$
>
> où l'intégrale est prise le long d'un contour fermé S situé à l'intérieur de K et aussi rapproché de la frontière de K que l'on voudra. D'après la définition même d'une intégrale, il est évident que l'intégrale (3) peut être remplacée par une somme infinie de fonctions rationnelles de x dont les coefficients sont exprimés par des valeurs spéciales de x en nombre dénombrable et par les valeurs correspondantes de $FK(x)$. Cette observation a été le point de départ d'un travail magistral de M. Runge, que j'ai publié dans le tome 6 de ce journal. La représentation analytique que l'on obtient ainsi exige donc que l'on connaisse la valeur de $FK(x)$ en un nombre infini et dénombrable de points qui doivent se rapprocher indéfiniment de la frontière de K. Or, dans les problèmes habituels de l'analyse, ces valeurs ne sont nullement connues. En général, c'est au contraire la série des valeurs
>
> $$F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots$$
>
> qui est donnée.
>
> [Mittag-Leffler 1899a, p.46]

C'est donc une façon de contourner ces deux limitations liées à la représentation des fonctions analytiques que va proposer Mittag-Leffler. Sa stratégie consiste à mettre en place d'un prolongement (une *continuation*) le long d'un chemin issu d'un point origine où l'on a un *élément de fonction* initial donné pour obtenir une formule générale, une *représentation* qui reste valable dans un domaine étoilé.

3. PRÉSENTATION SYNTHÉTIQUE DES 6 ARTICLES LIÉS À L'« ÉTOILE »

3.1. *Étoile 1 [Acta Math 23, 1900]*

Ce premier texte [Mittag-Leffler 1899a, Acta Math 23, 1900] reprend les idées essentielles déjà publiées en suédois. Il est intéressant de noter que le texte en suédois paraît un an après l'hommage de H. Poincaré à Weierstraß – aussi publié dans le journal de Mittag-Leffler *Acta Mathematica*, intitulé « L'œuvre mathématique de Weierstraß » [Poincaré 1898], comme s'il était temps désormais de passer à une nouvelle ère de la compréhension des fonctions analytiques et tirer profit des conceptions mises en place par le mathématicien allemand.

Comme nous l'avons déjà évoqué, Mittag-Leffler cherche à définir un domaine maximal K où une formule, ne faisant intervenir que les valeurs d'une fonction au point a ainsi que ses dérivées successives en ce même point, ferait sens et permettrait d'avoir une écriture unique de la branche qu'il note alors FK.

En termes géométriques, l'*étoile* A – pour *Aster* – va répondre à ce problème : c'est le domaine sur lequel Mittag-Leffler va pouvoir donner une formule définissant la fonction analytique en utilisant seulement les valeurs au point a et des coefficients identiques pour toutes les fonctions. La branche ainsi obtenue sera notée FA.[11]

Techniquement, l'étoile est obtenue en prenant chaque demi-droite issue du point a et en conservant le segment le plus long tel qu'en chaque point la fonction – initialement définie sur son disque autour de a – reste analytique. L'idée est donc bien fondée sur la notion de prolongement analytique de Weierstraß, mais le processus mis en place par Mittag-Leffler

11 À propos des diverses notations de Mittag-Leffler, on trouve des interprétations variables dans la littérature récente. La lettre qui suit le symbole F (pour Fonction) désigne chez le mathématicien suédois le domaine sur lequel la représentation est valide : K pour le « Continuum », A pour l'« étoile » (Aster) et C pour *Cercle* de convergence. Mittag-Leffler précise ces notations dans le premier article publié en suédois : « Dans la partie du plan qui reste, et que pour des raisons de simplicité nous appelons X, la partie de la fonction $F(x)$ générée à partir de l'élément original par continuation analytique constitue une fonction analytique unique partout régulière de x. Nous désignons cette partie de la fonction $F(x)$ par $FX(x)$. » [Mittag-Leffler 1898a, p.136], notre traduction.

permet un saut entre le constructif géométrique initial et l'émergence d'une figure – l'étoile – qui va permettre de dépasser le cadre initial. La figure de l'étoile va ainsi parfaitement se marier avec un certain nombre de conceptions et de stratégies classiques qui vont permettre à Mittag-Leffler de progresser.

L'étoile est aussi un concept qui va permettre à Mittag-Leffler de penser en termes topologiques[12] en concevant des suites d'étoiles imbriquées les unes dans les autres, approchant le disque ou une étoile donnée selon les valeurs du paramètre. Mittag-Leffler va se servir de cette idée pour construire sa formule de proche en proche sur des étoiles annexes, puis définir la fonction comme limite de série sur l'étoile la plus étendue.

Cette approche par série puis passage à la limite montre déjà un horizon qui s'avérera infranchissable : la représentation cherchée par Mittag-Leffler nécessitera toujours, dans sa généralité, une limite double – sous la forme d'une série double, d'une limite de série ou de double limite selon les cas.

Le premier résultat obtenu par Mittag-Leffler est le suivant :

Th. 1. — *Désignons par A l'étoile appartenant aux éléments*

$$F(a), F'(a), F^{(2)}(a), \ldots$$

et par $FA(x)$ la branche fonctionnelle correspondante qui appartient à ces mêmes éléments, et soir X un domaine fini quelconque à l'intérieur de A et σ une quantité positive aussi petite que l'on voudra.

Il est toujours possible de trouver un nombre entier $\overline{n}$ tel que la différence entre $FA(x)$ et le polynôme

$$g_n(x) = \sum_{\nu} c_{\nu}^{(n)} F^{(\nu)}(a)\,(x-a)^{\nu}$$

soit, dès que n surpasse $\overline{n}$, inférieure à σ en valeur absolue pour toutes les valeurs de x appartenant au domaine X.

Les coefficients $c_{\nu}^{(n)}$ peuvent être choisis à priori et sont absolument indépendants de a, de $F(a), F^{(1)}(a), \ldots$ et de x.

[Mittag-Leffler 1899a, p.59]

Mittag-Leffler prolongera son étude en précisant le sens de l'approximation via une limite et une série comme au-dessus ou une double série comme dans le théorème suivant :

12 C'est un terme que Mittag-Leffler n'emploie pas et nous l'utilisons ici pour désigner une façon de procéder qui associe une approche géométrique descriptive et constructive avec une notion de limite qui sera interprétée elle aussi géométriquement.

Th. 2. — [...] *la branche $FA(x)$ pourra toujours être représentée par une série*

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$$

où les $G_\mu(x)$ sont des polynômes de la forme

$$G_\mu(x) = \sum_\nu c_\nu^{(n)} F^{(\nu)}(a)(x-a)^\nu,$$

chaque coefficient $c_\nu^{(n)}$ étant un nombre rationnel déterminé qui ne dépend que de ν et de μ.

La série $\sum_{\mu=0}^{\infty} G_\mu(x)$ est convergente pour chaque valeur de x à l'intérieur de A et elle est uniformément convergente pour chaque domaine à l'intérieur de A.

On aura partout à l'intérieur de A, $\sum_{\nu=0}^{\infty} G_\mu(x) = \lim_{n=\infty} g_n(x)$ où $g_n(x)$ désigne le même polynôme que dans le théorème 1.

[Mittag-Leffler 1899a, p.62]

On voit apparaître ici une ressemblance avec la série de Taylor dont Mittag-Leffler essaie de retrouver le maximum de caractéristiques lorsque l'on passe du disque de convergence à une étoile. La suite montrera les limites de cette première représentation comme extension de la formule de Taylor et poussera Mittag-Leffler à faire de nouvelles propositions en adaptant sa méthode.

Par la suite les idées seront similaires avec des adaptations dont nous ne mentionnerons que les caractéristiques les plus importantes.

Dès Mars 1899, Mittag-Leffler avait évoqué avec Volterra sa découverte et l'idée de l'étoile. Comme le montre une lettre du 12 mars de cette même année, Volterra avait immédiatement saisi les possibilités de cette nouvelle représentation dans des problèmes de mécanique qui s'interprètent en termes d'équations différentielles. Volterra pense alors que les intégrales de ces équations pourront être représentées sur leur étoile par la formule de Mittag-Leffler. Le principe lui paraît général :

> Il me semble qu'il y a là une classe très grande de questions naturelles (hydrodynamique, etc.) dont vos méthodes donnent la solution.
>
> [Jaëck et al. 2019, Voir la lettre 81]

3.2. *Étoile2 [Acta Math 24, 1901]*

Dans cette seconde note [Mittag-Leffler 1900a, Acta Math 24, 1901], c'est le rapport à la série de Taylor et à ses propriétés qui va être central. La série de Taylor entretient avec son cercle de convergence un rapport étroit.

La note 2 commence avec une expression explicite particulière qu'il reprend du travail exposé dans la première note. Cette expression porte en elle la stratégie de Mittag-Leffler et les étapes successives de la construction qui se retrouvent dans les sommes finies définissant la fonction G_n[13] :

$$G_n(x) = \sum_{n_1=0}^{n^2} \sum_{n_1=0}^{n^4} \cdots \sum_{n_1=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lfloor\!\underline{\,\lambda_1\,}\ \lfloor\!\underline{\,\lambda_2\,} \cdots \lfloor\!\underline{\,\lambda_n\,}} \cdot F^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}.$$

La série de Taylor se retrouve dans cette expression si l'on n'a besoin que d'une étoile, le cercle, et donc une seule somme.

Mittag-Leffler précise les points de ressemblance et de différence entre la nouvelle façon de représenter la fonction et la série de Taylor :

> La série de TAYLOR possède par rapport au cercle les mêmes propriétés que nous venons d'énoncer pour
>
> $$\lim_{n=\infty} \sum_{n_1=0}^{n^2} \sum_{n_1=0}^{n^4} \cdots \sum_{n_1=0}^{n^{2n}} \frac{1}{\lfloor\!\underline{\,\lambda_1\,}\ \lfloor\!\underline{\,\lambda_2\,} \cdots \lfloor\!\underline{\,\lambda_n\,}} \cdot F^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}(a) \left(\frac{x-a}{n}\right)^{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}.$$
>
> par rapport à A, avec une seule exception très importante. Chaque sommet de A était un point singulier de la branche fonctionnelle $FA(x)$. Ce n'est pas le cas pour C par rapport à $FC(x)$.
>
> [Mittag-Leffler 1900a, p.187]

Par ailleurs Mittag-Leffler note que la série de Taylor ne converge jamais en dehors du disque alors que sa série pourrait converger en dehors de l'étoile A.

Pour tenter de retrouver les différentes propriétés de la série de Taylor, Mittag-Leffler va introduire des étoiles intermédiaires qui vont à la fois embrasser le cercle comme cas particulier et pouvoir être prises aussi proches que l'on souhaite de l'étoile A. Dans le même temps, il va aussi modifier le mode de convergence des séries qui permettent de représenter la fonction.

Il introduit à cette fin la notion de « série n fois infinie convergente » de la façon suivante. On considère d'abord ce que Mittag-Leffler nomme une « suite n fois multiple de fonctions » notée $(f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n})$, où les indices λ_i varient chacun de 1 à l'infini.

Mittag-Leffler définit alors la série n fois infinie par l'expression

$$f = \sum_{\lambda_1}^{\infty} \sum_{\lambda_2}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n}^{\infty} f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}.$$

Cette série est appelée série n fois infinie convergente en un point a lorsque les séries suivantes sont toutes convergentes (au sens classique)

---

13 Nous rappelons que la notation $\lfloor\!\underline{\,\lambda\,}$ est celle employée à l'époque pour désigner la factorielle actuellement plutôt notée $\lambda!$.

en a :

$$f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}} = \sum_{\lambda_n=0}^{\infty} f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$$

$$f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-2}} = \sum_{\lambda_{n-1}=0}^{\infty} f_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$f_{\lambda_1} = \sum_{\lambda_2=0}^{\infty} f_{\lambda_1,\lambda_2}$$

$$f = \sum_{\lambda_1=0}^{\infty} f_{\lambda_1}.$$

De même la notion de série n fois infinie uniformément convergente est définie lorsque chacune des séries au-dessus converge uniformément sur un domaine K.

C'est ce mode de convergence qui va permettre à Mittag-Leffler de donner une représentation en termes de séries qui conserve certaines propriétés de la série de Taylor.

Pour saisir la différence des modes de convergence, entre série multiple et série n fois infinie, Mittag-Leffler explore un exemple frappant. Si $f(x) = \frac{1}{1-x}$ et si ζ est un réel entre 0 et -1 alors :

$$f(\zeta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\underline{\nu}\, \lfloor\underline{\mu}} f^{(\nu+\mu)}(0)\zeta^{(\nu+\mu)} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor\underline{\lambda}} f^{(\lambda)}(0)(2\zeta)^{\lambda},$$

série qui converge pour $0 \geq \zeta > -\frac{1}{2}$, [Mittag-Leffler 1900a, p190-191].

Si l'on regarde la même série comme *2 fois infinie,* la convergence est beaucoup plus large, car elle a lieu pour $0 \geq \zeta > -1$.

Mittag-Leffler peut alors définir une nouvelle collection d'étoiles $A^{(\frac{1}{n})}$ qui vont décrire les cas intermédiaires entre le disque de convergence et l'étoile maximale. La série n fois infinie quant à elle est adaptée à chaque étoile, et devient la série de Taylor lorsque $n = 1$, c'est-à-dire quand le disque est considéré comme une première étoile particulière :

Th. 3. — *Soient $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots,$ des constantes assujetties à la condition de Cauchy, et soit*

$$\sum_{\lambda_1}^{\infty} \sum_{\lambda_2}^{\infty} \cdots \sum_{\lambda_n}^{\infty} c_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a) \cdot (x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

une série n fois infinie où $c_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ désigne certains coefficients numériques indépendants des constantes $F(a), F^{(1)}(a), F^{(2)}(a), \ldots,$ ainsi que de a et de x.

On pourra toujours fixer ces coefficients en sorte que la série possède les propriétés suivantes :

Elle aura pour étoile de convergence $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ *telle que la série converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de* $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ *mais ne converge jamais en dehors de* $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. *Cette étoile* $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ *est inscrite dans l'étoile principale des constantes* $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, $F^{(2)}(a), \ldots$, *et, pour* $n \geq \overline{n}$, *le nombre entier positif* $\overline{n}$ *étant pris suffisamment grand, elle renferme elle-même à son intérieur un domaine quelconque fini appartenant à l'intérieur de* A.

L'étoile $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ *est encore inscrite dans l'étoile* $A^{\left(\frac{1}{n'}\right)}$ *tant que* $n < n'$.

L'égalité

$$FA^{\left(\frac{1}{n}\right)}(x) = \sum_{\lambda_1}^{\infty}\sum_{\lambda_2}^{\infty}\cdots\sum_{\lambda_n}^{\infty} c_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} F^{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)}(a)\cdot(x-a)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

a lieu partout à l'intérieur de $A^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. *Pour* $n = 1$ *la série devient la série de Taylor.*

[Mittag-Leffler 1900a, p.200]

Ce théorème sera l'occasion pour Mittag-Leffler de définir de façon plus précise la notion d'*étoile de convergence* :

> C'est lorsqu'entre une expression limite et une étoile K il y a un rapport tel que l'expression limite converge uniformément pour chaque domaine à l'intérieur de K, mais ne converge jamais pour un point en de hors de K, que nous avons désigné l'étoile K comme l'étoile de convergence de l'expression limite.
>
> [Mittag-Leffler 1900a, p.203]

C'est donc selon cette définition qu'il faudra comprendre les mots « étoile de convergence d'une expression » dans la suite.

La fin de l'article dévoile une phase décisive qui s'appuie sur une conception de limite d'une famille de fonctions, qu'il adapte d'une définition donnée par Phragmén dans un cours donné à Stockholm en 1890, qui lui permet de passer du constructif – étoiles intermédiaires et représentation analytique – à l'existence d'une représentation valable sur un domaine maximal. En d'autres termes, c'est cette notion de limite qui permet 1) de passer d'une stratégie constructive au niveau des fonctions à l'existence d'une représentation générale sous forme de série et 2) de passer d'une suite de domaines étoilés imbriqués à un domaine maximal où la fonction est représentable par une même série.

Mittag-Leffler définit la convergence d'une famille de fonctions ainsi :

> Pour un nombre infini de valeurs de α soit $f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ une fonction des variables $x, y, z, \ldots$, définie d'une manière univoque à l'intérieur d'un domaine K_α faisant lui-même partie d'un domaine K dont il se rapproche indéfiniment quand α se rapproche d'un point limite α_0.

> Supposons, $x, y, z, \ldots$, étant un point donné à l'intérieur de K, qu'à chaque nombre positif σ correspond un autre nombre positif δ tel que les fonctions $f_{\alpha'}(x, y, z, \ldots), f_{\alpha''}(x, y, z, \ldots)$ aient un sens et qu'on ait $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ tant que $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$. Le symbole
>
> $$\operatorname*{Lim}_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \ldots)$$
>
> possède alors pour chaque point à l'intérieur de K un sens parfaitement déterminé.
>
> On dit que $\mathrm{Lim}_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ converge au point $x, y, z, \ldots$
>
> Quand on a $\alpha_0 = \infty$ on remplacera $|\alpha' - \alpha_0| < \delta$, $|\alpha'' - \alpha_0| < \delta$ par les inégalités $|\frac{1}{\alpha'}| < \delta$, $|\frac{1}{\alpha''}| < \delta$.
>
> Quand on a l'inégalité $|f_{\alpha'} - f_{\alpha''}| < \sigma$ pour un domaine X à l'intérieur de K, on dit que l'expression limite $\mathrm{Lim}_{\alpha=\alpha_0} f_\alpha(x, y, z, \ldots)$ converge uniformément pour ce domaine.
>
> [Mittag-Leffler 1900a, p.203-204]

Cette notion de convergence de familles de fonctions permet à Mittag-Leffler d'obtenir l'expression cherchée pour l'étoile limite A et de donner une expression qu'il met en parallèle avec celle obtenue dans sa première note au théorème 1. Ici A sera « l'étoile principale des constantes » et l'expression qui représente la branche FA est obtenue comme limite des séries multiples que nous avons rappelées plus haut.

3.3. *Étoile 3 [Acta Math 24, 1901]*

Cette troisième note [Mittag-Leffler 1900b, Acta Math 24, 1901] est publiée la même année et dans le même numéro des *Acta Mathematica* que la précédente. Pour la première fois Mittag-Leffler introduit une longue liste de références de textes qui sont rattachés à sa propre étude. Cette bibliographie établie par le mathématicien suédois permet de reconstituer un vaste champ extrêmement riche du point de vue des mathématiques et des résultats connexes à ceux qu'il démontre lui-même. De plus cette bibliographie[14] permet de comprendre les connexions internationales qui sont établies au tout début du XX^{e} siècle, et de mieux comprendre le travail important de mise en réseau et de diffusion des savoirs auxquels Mittag-Leffler participe ardemment depuis la création de son journal en 1882.

La troisième note introduit une nouvelle façon de former une étoile dont les caractéristiques géométriques vont être définies par la donnée d'une fonction dite *génératrice*. Un choix convenable de la fonction génératrice permet de penser l'expression de la branche $FA(x)$ comme limite d'une suite de séries dont le premier terme n'est autre que la série de Taylor.

---

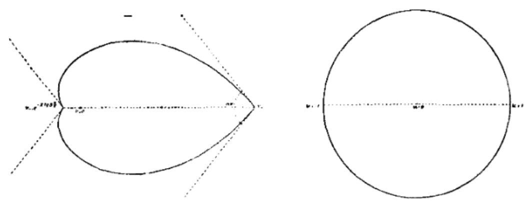
14 Voir la fin de notre article pour une bibliographie des ouvrages référencés par Mittag-Leffler.

L'analyse menée par Mittag-Leffler se base sur une représentation conforme donnée par

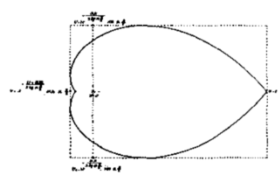
$$v = e^{\int_1^u \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^\beta \frac{du}{u}}, \quad \beta \in [01].$$

L'image du demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon 1 est une spirale logarithmique que l'on peut paramétrer par $v = Re^{i\phi}$, $R = e^{-\tan\beta\frac{\pi}{2}\varphi}$ avec $\varphi \in [0\pi]$.

Le disque correspond alors à l'intérieur de ce que Mittag-Leffler nomme « figure cordiforme » limitée par deux arcs de spirale logarithmique :



Pour estimer la taille de la figure, elle est inscrite dans un rectangle qui servira à ajuster ses paramètres :



En écrivant

$$v = u\,\underbrace{e^{-\int_0^1\left(\left(\frac{1+u}{1-u}\right)-1\right)^\beta \frac{du}{u}}}_{\Theta}\, e^{\int_0^u\left(\left(\frac{1+u}{1-u}\right)-1\right)^\beta \frac{du}{u}},$$

Mittag-Leffler met en évidence le rôle de la constante Θ dans la définition de la représentation conforme. On peut alors développer v^m selon les puissances de u^k en utilisant la nouvelle expression.

Pour construire sa nouvelle étoile, Mittag-Leffler considère à nouveau un rayon entre un point a fixé et un point x dans le plan complexe, et il peut écrire finalement :

$$f(u|\alpha) = \frac{z-a}{x-a} = Kue^{\int_0^u\left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)-1\right]^\beta \frac{du}{u}}, \quad 0 < 1-\beta \leq 1,$$

où K sera un paramètre à adapter et $\alpha = 1-\beta$.

Lorsque u décrit des cercles concentriques de centre 0, z décrit des figures cordiformes dont on maîtrise ainsi la taille. Là encore les figures cordiformes, notées Z, paramétrées par le rayon du cercle initial, pourront venir s'ajuster à l'intérieur d'une étoile donnée. Finalement, on obtient la nouvelle étoile en ne gardant le long de chaque axe que les points x tels que la figure correspondante Z reste à l'intérieur de l'étoile initiale A.

Toute la construction repose sur la donnée de la fonction $f(u|\alpha)$ que Mittag-Leffler nommera « fonction génératrice » de l'étoile.

Le but est alors de former une nouvelle expression analytique valable pour toute étoile $A^{(\alpha)}$ définie par une fonction génératrice $f(x|\alpha)$ donnée. Mittag-Leffler se base à nouveau sur des étoiles intermédiaires imbriquées, dans une démarche adaptée des cas précédents.

Il obtient alors le théorème suivant :

Th. 4. — *Désignons par A une étoile de centre a, par α une quantité positive qui ne sera pas plus grande que l'unité et par $A^{(\alpha)}$ une étoile concentrique à A et inscrite dans A qui sera engendrée par la fonction génératrice $f(u|\alpha)$. On pourra toujours choisir cette fonction telle que α étant suffisamment petit l'étoile $A^{(\alpha)}$ renferme en son intérieur un domaine donné quelconque situé à l'intérieur de A et telle que pour $\alpha = 1$ l'étoile $A^{(1)}$ devienne le cercle concentrique à A et inscrit dans A. On pourra encore choisir $f(u|\alpha)$ telle que, A étant l'étoile principale d'une suite de constantes $F(a)$, $F^{(1)}(a)$, ..., assujetties à la condition de Cauchy, la série*

$$S_\alpha(x,a) = F(a) + \sum_{\nu=1}^{\infty} G_\nu(x-a)$$

où

$$G_\nu(x-a) = \frac{h^{(1)}_{\nu-1}}{\lfloor\!\underline{1}\;\lfloor\!\underline{(\nu-1)}} F^{(1)}(a)\cdot(x-a) + \frac{h^{(2)}_{\nu-2}}{\lfloor\!\underline{2}\;\lfloor\!\underline{(\nu-2)}} F^{(2)}(a)\cdot(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{h^{(\nu-1)}_{1}}{\lfloor\!\underline{(\nu-1)}\;\lfloor\!\underline{1}} F^{(\nu-1)}(a)\cdot(x-a)^{(\nu-1)} + \frac{h^{(\nu)}_{0}}{\lfloor\!\underline{\nu}} F^{(^n u)}(a)\cdot(x-a)^{\nu}$$

et où $h^{(\nu)}_{\nu-\mu}$, $\nu, \mu = 1, \ldots, \infty$ sont des constantes positives déterminées qui ne dépendent que de la fonction génératrice, possède une étoile de convergence qui soit identique à $A^{(\alpha)}$, que l'égalité $FA(x) = S_\alpha(x|a)$ ait lieu partout à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$, et que la série $S_\alpha(x|a)$ pour $\alpha = 1$ devienne la série de Taylor.

L'expression limite $\lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$ a une étoile de convergence qui est identique à l'étoile A, et l'égalité

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0} S_\alpha(x|a)$$

a lieu partout à l'intérieur de A.

[Mittag-Leffler 1900b, p.224]

Mittag-Leffler obtient donc une représentation de $FA^{(\alpha)}$ dans $A^{(\alpha)}$ qui a la propriété que son étoile de convergence est aussi $A^{(\alpha)}$. Lorsque l'on veut étendre ce résultat à l'étoile A tout entière, une double limite reste nécessaire.

Cette troisième note sera aussi l'occasion de préciser le comportement de ces séries en distinguant ce qui se passe à l'intérieur de l'étoile, à l'extérieur ou au bord. La différence de comportement de la série de Taylor dans le disque ou à l'extérieur est un élément clé qui la distingue des séries proposées par Mittag-Leffler.

Le texte de cette troisième note reprend sous forme de longue citation un travail de Phragmén qui utilise les mêmes outils – fonction génératrice, étoile $A^{(\alpha)}$, etc. – que Mittag-Leffler.

Phragmén montre que si l'on substitue dans $FA(z)$ à la variable z la fonction de u définie par $\frac{z-a}{x-\alpha} = ue^{\int_0^u \left[\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^{1-\alpha} - 1\right]\frac{du}{u}}$ on obtient une fonction régulière à l'intérieur du cercle unité centré en 0. Si $\alpha < 1$ les points $u = -1$ et $u = 1$ sont des singularités et la série qui permet de représenter la fonction, $\sum_{\nu=0}^{\infty} G_n u(x-a)u^{\nu}$, a pour cercle de convergence le cercle unité.

En utilisant un résultat de Lipschitz sur les séries de Fourier cette fois-ci, Phragmén démontre que la série au-dessus converge encore sur la circonférence et même uniformément sur toute la circonférence. On peut donc prendre $u = 1$ et écrire :

$$FA(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} G_n u(x-a),$$

formule qui converge aussi uniformément sur tout domaine intérieur à l'étoile $A^{(\alpha)}$.

Mittag-Leffler rajoutera ensuite deux théorèmes qui permettent de distinguer en quelque sorte le bord de l'étoile et de préciser le comportement des G_ν.

Le théorème 5 montre en effet que l'on peut choisir la fonction génératrice de façon à ce que pour α fixé $\limsup |\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}| = 1$ pour x à l'intérieur de $A^{(\alpha)}$ et $\limsup |\sqrt[\nu]{G_\nu(x-a)}| > 1$ pour x à l'extérieur.

Il en découle un critère pour déterminer les sommets de l'étoile A : « Pour être sûr que le point x ne peut être situé en dedans de A, il suffit en réalité de faire voir que, la quantité α étant choisie aussi petite et une quantité M aussi grande que l'on veut, il y a toujours des indices ν tels que $|G_\nu(x-a)| > M$. D'un autre côté, tant que x est situé à l'extérieur de $A^{(\alpha)}$ on est sûr qu'il existe de tels indices. »

Enfin, le théorème 6 précise le comportement au bord d'une étoile E homothétique et concentrique à $A^{(\alpha)}$. On a alors, pour tout ν,

$$|G_\nu(x-a)| < \limsup_{x\in\partial E} |FA^{(\alpha)}(x)|.$$

La fin de la note fait état d'un théorème récent de Borel qui montre que l'on ne peut pas trouver en général d'expression comme limite unique d'une suite de polynôme qui représenterait FA sur son étoile et dont l'étoile de convergence serait aussi FA. La représentation de Mittag-Leffler est donc en ce sens optimale.

3.4. *Étoile 4 [Acta Math 26, 1902]*

Cette note [Mittag-Leffler 1902, Acta Math 26, 1902] met en place un développement avec reste intégral qui étend le résultat bien connu pour la formule de Taylor.

En partant d'une fonction génératrice $f(y|\alpha)$ on considère un contour S d'une surface simplement connexe finie sur laquelle $f(y|\alpha)$ ainsi que $F(a+(x-a)f(y|\alpha))$ sont des fonctions monogènes régulières, et telle que les deux points $y=0$ et $y=u$ soient à l'intérieur du contour.

La première partie de la note 4 part de l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{(n+1)} dy \\ = F(a+(x-a)f(y|\alpha)) + \frac{1}{2\pi i}\int_O \frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{(n+1)} dy,\end{aligned}$$

où O indique que la nouvelle intégrale est prise autour du point $y=0$ [Mittag-Leffler 1902, p.357]. La stratégie revient alors à obtenir un développement de la seconde intégrale, en s'appuyant sur un développement de $F(a+(x-a)f(y|\alpha))$.

Mittag-Leffler résume sa progression dans un long théorème 4.a qu'il rattache au théorème 4 que nous avons rappelé au-dessus. La version intégrale s'écrit ainsi :

Th. (Théorème 4.a). — [...] *L'expression limite double :*

$$\lim_{\alpha=0}\lim_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{2!}F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n!}F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

a une étoile de convergence identique à l'étoile A et l'égalité

$$FA(x) = F(a) + \lim_{\alpha=0}\lim_{n=\infty}\left[\frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!}F^{(1)}(a)(x-a)+\frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{2!}F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots + \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n!}F^{(n)}(a)(x-a)^n\right]$$

a lieu partout à l'intérieur de A.

Si l'on s'arrête dans le passage à la limite à un nombre déterminé n on aura l'égalité :

$$FA^{(\alpha)}(x) = F(a) + \frac{\alpha_{1n}(\alpha)}{1!}F^{(1)}(a)(x-a) + \frac{\alpha_{2n}(\alpha)}{2!}F^{(2)}(a)(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha_{nn}(\alpha)}{n!}F^{(n)}(a)(x-a)^n + \int_C \frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-u}\left(\frac{u}{y}\right)^{(n+1)} dy,$$

l'intégrale étant prise dans le sens positif et C désignant une circonférence de centre zéro et de rayon r $(1 < r < R)$ en sorte que $a + (x-a)f(y|\alpha)$ appartient à l'intérieur de l'étoile $A^{(\alpha)}$.

[Mittag-Leffler 1902, p.363]

Les coefficients $\alpha_{\mu n}$ dépendent de la fonction génératrice. Ici, ils sont déterminés par la procédure que nous avons indiquée :

$$\alpha_{\mu n}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(f(y|\alpha))^n}{y-1}\left(\frac{u}{y}\right)^{n+1} dy.$$

Mittag-Leffler souligne en outre que l'on peut choisir la fonction génératrice afin d'obtenir des expressions les plus simples possibles des coefficients $\alpha_{\mu n}$, par exemple sous la forme d'un développement selon une suite de puissances de la variable.

D'autre part, on peut reprendre le problème en changeant cette fois-ci l'intégrale de départ. C'est ce que propose Mittag-Leffler dans une seconde partie du même article. L'intégrale de départ qu'il choisit est alors :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{F(a+(x-a)f(y|\alpha))}{y-u} e^{w\left(\frac{u}{u}y-1\right)} dy.$$

En suivant une démarche similaire à celle qu'il a mise en œuvre dans la première partie de cette quatrième note, Mittag-Leffler retrouve des travaux de Borel sur l'intégrale de Laplace-Abel $\int_0^\infty e^{-\omega}F(\omega x)d\omega$. Borel avait en effet montré que cette intégrale était convergente à l'intérieur d'une étoile notée $A^{(1)}$ formée avec des disques de taille aussi petite qu'on le désire sur chaque rayon.[15]

Dès la fin de cette quatrième note, Mittag-Leffler étend ce résultat en montrant que plusieurs formes, dont celle de l'intégrale de Laplace-Abel, permettent de définir $FA(x)$ et d'assurer que les convergences de la série ou de l'intégrale ont lieu partout à l'intérieur d'une collection d'étoiles $\mathbb{A}^{(\alpha)}$ concentriques circonscrites aux étoiles $A^{(\alpha)}$. Ces théorèmes

15 Mittag-Leffler renvoie ici au *Leçons sur séries divergentes* de Borel, publiées en 1901 [Borel 1901c]. La dernière partie du chapitre sur « Les développements en séries de polynôme » se termine par une section dédiée aux « développements de M. Mittag-Leffler et la théorie générale des séries divergentes ». Borel avait publié aux *Annales de l'École normale* un « Mémoire sur les séries divergentes » en 1899, [Borel 1899a].

numérotés 7a et 7b explicitent encore le lien avec l'étoile A en introduisant à nouveau une nouvelle expression limite lorsque le paramètre α tend vers 0.

3.5. *Étoile 5 [Acta Math 29, 1905]*

L'objectif de cette cinquième note [Mittag-Leffler 1905, Acta Math 29, 1905] est de généraliser les résultats précédents obtenus grâce à l'intégrale de Laplace-Abel. Une des contraintes a été fixée par le résultat de Borel, redémontré par Mittag-Leffler. En effet, sur l'étoile obtenue à partir de cercles construits sur les rayons, notée $A^{(1)}$ précédemment et rebaptisée en l'honneur de Borel étoile $B^{(1)}$ ici[16], la fonction possède les mêmes propriétés que la série de Taylor : il y a convergence dans l'étoile, mais pas à l'extérieur, ce qui, dans les termes de Mittag-Leffler, signifie que l'étoile trouvée par Borel est bien l'« étoile de convergence » de l'intégrale de Laplace-Abel.

Pour généraliser cette situation, Mittag-Leffler va modifier l'intégrale initiale en introduisant une nouvelle famille de fonctions génératrices $F_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{K_\lambda}{(a\nu)!} x^\nu$, où k_λ sont des constantes vérifiant $\overline{\lim}_{\nu=\infty} |\sqrt[\nu]{k_\nu}| < \infty$ et où on a posé $(\alpha\nu)! = \Gamma(\alpha\nu + 1)$.

L'intégrale obtenue sera

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}} F_\alpha(\omega x) dw^{\frac{1}{\alpha}} = \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x) dw,$$

et c'est bien une généralisation dans le sens où l'on retrouve l'intégrale de Laplace-Abel en prenant $\alpha = 1$.

Il s'ensuit un long travail d'un peu plus de 70 pages[17] dans lequel Mittag-Leffler examine le problème de l'existence d'une étoile de convergence (au sens rappelé plus haut) pour la fonction $f(x)$. La famille d'étoiles $B^{(\alpha)}$ est construite à partir de figures que Mittag-Leffler définit de la façon suivante. Une étoile principale A étant donnée, on considère les points x_0 à l'intérieur de l'étoile A tel que le domaine $\Re\left[\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right] > 1$,

16 Dans le livre de Borel sur les séries divergente, celui-ci avait baptisé M le type de développement dans une étoile A tel que Mittag-Leffler l'avait introduit.

17 Il est surprenant à première vue de voir que Mittag-Leffler nomme « note » des articles de plusieurs dizaines de pages. La longue succession des travaux sur l'étoile montre que ces publications se sont faites au fil des réflexions de Mittag-Leffler sur le sujet et qu'il y voyait probablement davantage un outil utile à la conception fine de la notion de fonction de la variable complexe plus qu'une collection de résultats répondant à des conjectures importantes.

$-\alpha\frac{\pi}{2} < \arg\frac{x_0}{x} < \alpha\frac{\pi}{2}$ si $0 < \alpha < 2$, et $-\pi < \arg\frac{x_0}{x} < \pi$ si $\alpha \geq 2$ reste à l'intérieur de A.

Mittag-Leffler donne une étude géométrique des divers contours qui permettent de construire l'étoile en fonction de α au cours de son étude. L'étoile $B^{(1)}$ est encore celle qu'avait construite Borel.

Il démontre que l'intégrale $f(x)$ possède une étoile de convergence $B^{(\alpha)}$ qui est inscrite dans l'étoile A (étoile principale associée aux coefficients k_i), et qui tend indéfiniment vers cette étoile lorsque α tend vers 0. De plus l'égalité $FB^{(\alpha)}(x) = f(x)$ a lieu partout à l'intérieur de $B^{(\alpha)}$.

La démonstration se décompose en trois temps :

(1) Si l'intégrale $f(x_0)$ converge, alors $f(x)$ est uniformément convergente dans le domaine décrit par θx_0, où $\theta_0 \leq \theta \leq 1$.
(2) Dans le cas de convergence en x_0, l'intégrale $f(x)$ représente sur le segment $[0x_0]$ la fonction $FC(x)$ ainsi que sa continuation analytique sur ce segment.
(3) L'intégrale $f(x)$ converge uniformément pour tout domaine à l'intérieur de l'étoile $B^{(\alpha)}$.

Dans tous les cas Mittag-Leffler en déduit, en passant de l'intégrale qui dépend de α à sa limite lorsque α tend vers 0, une expression ayant pour étoile de convergence A.

Enfin le théorème 11 détermine, bien sûr avec une double limite, une expression simple de la branche FA sous la forme suivante :

$$FA(x) = \lim_{\alpha=0}\lim_{\omega=\infty}\frac{1}{E_\alpha(\omega)}\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(F(a) + \frac{1}{\lfloor\underline{1}}F^{(1)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{\lfloor\underline{\mu}}F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}\right)\frac{\omega^{\mu+1}}{\lfloor\underline{\alpha(\mu+1)}},$$

où $E_\alpha(x)$ désigne la fonction $E_\alpha(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{x^\nu}{\lfloor\underline{\alpha\nu}}$, [Mittag-Leffler 1905, p.173-174].

Mittag-Leffler obtient la convergence uniforme sur tout domaine à l'intérieur de l'étoile A. Une version avec reste intégral est aussi donnée en utilisant un contour dans l'étoile qui enserre le segment $[ax]$.

La fin de la cinquième note revient sur l'emploi de figures cunéiformes que Mittag-Leffler avait initialement montrées à Volterra des années plus tôt, et qu'il nomme ici $V^{(\alpha)}$ en hommage à son ami italien. Elles permettent à nouveau d'obtenir une représentation de la branche FA avec reste intégral.

3.6. *Étoile 6 [Acta Math 42, 1920]*

Cette sixième et ultime publication [Mittag-Leffler 1920, Acta Math 42, 1920] de Mittag-Leffler sur le sujet est un peu à part, car elle est publiée après la Première Guerre mondiale, à la reprise d'*Acta Mathematica* qui était à l'arrêt depuis 1916. Mittag-Leffler a alors 74 ans, et cherche à relancer le journal qui a du interrompre ses publications durant plusieurs années.

Le temps a permis de mieux comprendre les notions d'étoile et de représentation des fonctions analytiques. Mittag-Leffler rappelle que Borel et Phragmén ont montré qu'il était impossible d'obtenir une formulation qui donnerait une expression générale à l'intérieur de l'étoile A et qui cesserait de converger à l'extérieur.

Une façon de dépasser cet obstacle revient à admettre dans l'étoile un certain type de singularités. L'idée, d'abord émise par von Koch, sera donc reprise par Mittag-Leffler ici et il proposera une nouvelle généralisation.

La démarche repose sur une nouvelle étoile K en limitant les rayons cette fois-ci en s'arrêtant au « point le plus rapproché du centre qui n'est ni un point régulier ni un pôle de la fonction définie par les constantes k_i ».

D'autre part, Mittag-Leffler construit une fonction entière G qui a entre autres la propriété que $G(\omega(x-1))$ converge uniformément vers 0 lorsque ω tend vers l'infini, x restant dans un domaine X qui ne rencontre pas la partie de l'axe réel de 1 à l'infini.

Selon la méthode éprouvée, Mittag-Leffler part de l'intégrale de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_B \frac{F(z)\cdot G(\omega(\frac{x}{2}-1))}{z-x}dz,$$

où B est un contour autour de l'origine, inclus dans l'étoile K et qui ne passe par aucun pôle de F. Il s'ensuit un développement en série qui permet d'établir une représentation de FK sous la forme :

$$(*) \qquad FK(x) = \lim_{\omega=\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}(k_0 + k_1 x + \cdots + k_\nu x^\nu)K_{\nu+1}(\omega)$$

où les fonctions K_ν sont liées au développement

$$G(\omega(x-1)) = \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu(\omega)x^\nu,$$

Mittag-Leffler en donnant une expression explicite, [Mittag-Leffler 1920, p.303].

La représentation de la fonction reste valide en tout point régulier à l'intérieur de K. En ce qui concerne FA la série $(*)$ représente bien la fonction à l'intérieur de l'étoile A, avec convergence uniforme sur tout domaine à l'intérieur de A. De plus, la série converge encore en dehors de A sur toute demi-droite passant par un sommet qui est un pôle de $F(x)$ situé à l'intérieur de l'étoile K. La convergence est même uniforme sur toute partie de la demi-droite située à une distance finie entre deux pôles consécutifs ou entre le sommet et le pôle le plus proche de lui sur le rayon. Mittag-Leffler souligne de plus que la fonction FK est méromorphe si elle n'a pas d'autres singularités que des pôles.

En parallèle, Hadamard avait donné un critère de méromorphie grâce à la limite d'une suite de déterminants qui tend vers 0 :

$$\lim_{p=\infty} \sqrt[p]{\overline{\lim_{n}}\, D_n^{(p)}} = 0 \text{ avec } D_n^{(p)} = \begin{vmatrix} k_{n+1} & k_{n+2} & \dots & k_{n+p} \\ k_{n+2} & k_{n+3} & \dots & k_{n+p+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n+p} & k_{n+p+1} & \dots & k_{n+2p-1} \end{vmatrix}.$$

En se servant de ce critère, en 1919 T. Carleman avait montré que les fonctions $u_\lambda(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 K(x;y)u_\lambda(y)dy$ solutions de l'équation de Fredholm (avec $|K(x;y)| < 1$ et $|f - x)| < 1$ étaient méromorphes [Carleman 1919]. L'analyse s'appuie sur le développement $u_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(c)\lambda^n$ où l'on définit par récurrence $f_0(x) = f(x)$ et $f_n(x) = \int_0^1 K(x;y)f_{n-1}(y)dt$.

La forme obtenue par Mittag-Leffler permet alors d'écrire

$$u_\lambda(x) = \lim_{\omega=\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (f(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)\lambda^n)K_{n+1}(\omega).$$

Enfin dans une dernière section Mittag-Leffler fait un nouveau pas vers davantage de généralité en incorporant désormais des points singuliers isolés.

À cette fin il introduit la notion de *poloïde* [Mittag-Leffler 1920, p.305] : la fonction est régulière dans un voisinage du point, mais pas en ce point. On peut alors, au voisinage d'un poloïde P, écrire f grâce à la somme de deux séries $\beta\left(\frac{1}{x-P}\right) + \overline{\beta}(x-P)$. Si la première série est en fait une somme finie, on est en présence d'un pôle. Les points singuliers qui ne sont pas des poloïdes sont appelés points singuliers essentiels.

Mittag-Leffler définit alors une nouvelle étoile L où les rayons sont limités par le premier point qui n'est ni régulier ni un poloïde. Elle lui permet d'utiliser ses résultats précédents pour montrer que la fonction F définie par la branche $FC(x) = \sum k_i x^i$ est représentée à l'intérieur de l'étoile L

par une triple limite

$$\lim_{\alpha=0}\lim_{\omega=0}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{k_\nu}{(\alpha\nu)!}\int_0^{\omega^{\frac{1}{\alpha}}} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}\omega^{\nu}d\omega^{\frac{1}{\alpha}}\left((x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)^{\nu}.$$

Cette expression converge uniformément dans tout domaine intérieur à l'étoile A. Elle converge aussi à l'extérieur de A sur toute demi-droite qui passe par un sommet de A qui est un poloïde intérieur à L.

On a de plus

$$FL(x)=\lim_{\alpha=0}\int_0^{\infty} e^{-\omega^{\frac{1}{\alpha}}}F_\alpha\left(\omega(x-a)e^{i\alpha\frac{\pi}{2}}\right)d\omega^{\frac{1}{\alpha}},$$

où $F_\alpha(\omega x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{k_\nu}{(\alpha\nu)!}(\omega x)^{\nu}$, l'égalité valant pour tout point régulier à l'intérieur de l'étoile L.

4. CONCLUSION

Nous finissons cet article en mentionnant la postérité de la fonction de Mittag-Leffler que nous avions évoquée en introduction et qui est née au beau milieu des travaux que nous venons d'étudier. Cette fonction célèbre a en effet une actualité récente à plus d'un titre, et a même donné lieu à de nombreuses variantes pour mieux s'adapter a des situations diverses.

La fonction fut officiellement introduite en 1903 dans une note aux comptes rendus de l'académie des sciences de Paris intitulée « Une généralisation de l'intégrale de Laplace–Abel » [Mittag-Leffler 1903]. Elle est donnée par la série :

$$F_\alpha(x)=k_0+k_1\,\frac{x}{(\alpha\cdot 1)!}+k_2\,\frac{x^2}{(\alpha\cdot 2)!}+\cdots+k_n\,\frac{x^n}{(\alpha\cdot n)!}+\cdots,$$

où $(\alpha\cdot n)!=\Gamma(\alpha\cdot n+1)$ et les coefficients k_i vérifient la condition de Cauchy $\limsup_i|\sqrt[i]{k_i}|=\frac{1}{r}$.

Cette fonction permet, comme nous l'avons vu, de généraliser l'intégrale de Laplace–Abel en modifiant la fonction génératrice qui intervient dans l'intégrale. Mittag-Leffler identifie alors l'étoile de convergence B^α de la fonction donnée par l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\omega}F_\alpha(\omega^\alpha x)d\omega$.

C'est aussi l'occasion pour Mittag-Leffler de mettre en évidence l'importance de l'étude de la fonction entière

$$E_\alpha(x)=1+\frac{x}{\lfloor\alpha.1\rfloor}+\frac{x^2}{\lfloor\alpha.2\rfloor}+\cdots+\frac{x^\nu}{\lfloor\alpha.\nu\rfloor}+\cdots,$$

« qui est une généralisation de la fonction exponentielle ».

En ce qui concerne la postérité et l'actualité de ces fonctions, on pourra lire par exemple le livre de R. Gorenflo A. Kilbas, F. Mainardi et S. Rogosin intitulé *Mittag-Leffler functions, related topics and applications* et constater le foisonnement des publications dédiées à la fonction de Mittag-Leffler :

> After the appearance of the first edition of our book *Mittag-Leffler Functions : Related Topics and Applications*, we have observed a growing interest in the subject. Many new research articles and books have appeared. This is mainly due to the central role of the Mittag-Leffler functions in Fractional Calculus and Fractional Modeling. [...] New results have been added to practically all sections of the book.
>
> [Gorenflo et al. 2020, Introduction]

Depuis l'introduction de la fonction initiale par Mittag-Leffler, de nombreuses variantes et généralisations ont vu le jour et interviennent dans des domaines divers, aussi bien en mathématiques fondamentales qu'appliquées. Dans leur livre *Mittag-Leffler Functions and Their Applications* [Haubold et al. 2011], H. J. Haubold, A. M. Mathai, et R. K. Saxena dressent un panorama assez large des développements mathématiques et des perspectives qu'offre l'utilisation des fonctions de Mittag-Leffler.

L'examen des idées qui se sont développées à la suite des travaux de Mittag-Leffler dépasse de loin le cadre de cet article, mais on peut émettre quelques remarques, à partir de l'examen que nous avons mené, sur ce qui a rendu possible cette riche postérité. Une des raisons pour lesquelles les idées du mathématicien suédois sont si adaptables, c'est qu'elles se présentent sous une forme compatible avec un domaine qui est justement en train de voir le jour au moment où il travaille, à savoir l'analyse fonctionnelle. On peut penser, à première vue, qu'il y a une différence entre les idées de Mittag-Leffler, dans la lignée de Weierstraß comme nous l'avons rappelé, et celles mises en place par Volterra par exemple qui développe un calcul différentiel pour des lignes et fait émerger petit-à-petit une notion de fonctionnelle, ou celles d'un Fréchet dont nous avons mentionné rapidement les travaux. La mise en perspective des travaux de Mittag-Leffler au début du XX^e^ avec des travaux du début du XXI^e^ siècle permet de comprendre qu'il n'y a pas une distinction aussi étanche entre l'analyse classique et l'analyse fonctionnelle.

En particulier, si la fonction de Mittag-Leffler s'adapte si bien, c'est qu'elle est construite sur un mode qui allie un aspect algébrique (les opérations) et des propriétés topologiques (on a vu plusieurs modes de convergence au cours de notre analyse). Ainsi, par exemple, tout comme la fonction exponentielle qui permet de concevoir des exponentielles de matrices, la fonction de Mittag-Leffler s'adapte parfaitement au calcul matriciel.

En 2019, dans son article «Delayed perturbation of Mittag-Leffler functions and their applications to fractional linear delay differential equations», Mahmudov introduit la définition suivante :

Definition 1. Mittag-Leffler type matrix function of two parameters $\Phi_{\alpha,\beta}(A,z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ is defined by

$$\Phi_{\alpha,\beta}(A,z) := z^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(Az^{\alpha}\right) := z^{\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k z^{\alpha k}}{\Gamma(k\alpha+\beta)}, \quad \alpha,\beta > 0, z \in \mathbb{R}.$$

[Mahmudov 2019]

Il me semble que cet exemple montre bien la façon dont un type de considération souvent classé du côté de l'analyse classique (et même qualifiée de vieillissante lorsque l'on cherche des périodisations franches), véhicule des idées et des potentialités qu'on ne croyait lire que du côté de l'émergence d'une analyse fonctionnelle qui semble plus générale.

RÉFÉRENCES DES TEXTES DE MITTAG-LEFFLER

MITTAG-LEFFLER (Gösta)

[1898a] Om en generalisering af potensserien, *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens förhandlingar Stockholm*, 55 (1898), p. 135–138.

[1898b] Om den analytiska framställningen af en allmän monogen funktion ; första, andra om tredje meddelande, *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens förhandlingar Stockholm*, 55 (1898), p. 247–262, 263–282, 375–385.

[1899a] Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Première note), *Acta Mathematica*, 23 (1899), p. 43–62.

[1899b] Sur la représentation d'une branche uniforme de fonction analytique., *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 128 (1899), p. 1212–1215.

[1900a] Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Seconde note), *Acta Mathematica*, 24 (1900), p. 183–204.

[1900b] Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Troisième note), *Acta Mathematica*, 24 (1900), p. 205–244.

[1902] Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. (Quatrième note), *Acta Mathematica*, 26 (1902), p. 353–392.

[1903] Une généralisation de l'intégrale de *Laplace-Abel*, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 136 (1903), p. 537–539.

[1905] Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (Cinquième Note), *Acta Mathematica*, 29 (1905), p. 101–182.

[1920] Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène. Sixième note, *Acta Mathematica*, 42 (1920), p. 285–308.

RÉFÉRENCES DONNÉES PAR MITTAG-LEFFLER

Borel (Émile)

[1899a] Mémoire sur les séries divergentes., *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Troisième Série*, 16 (1899), p. 9–131.

[1899b] Addition au mémoire sur les séries divergentes, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Troisième Série*, 16 (1899), p. 132–136.

[1899c] Sur le calcul des séries de Taylor à rayon de convergence nul, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 128 (1899), p. 1281–1283.

[1900] Sur la généralisation du prolongement analytique, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 130 (1900), p. 1115–1118.

[1901a] Addition au mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles, *Acta Mathematica*, 24 (1901), p. 383–388.

[1901b] Sur les séries de polynomes et de fractions rationelles, *Acta Mathematica*, 24 (1901), p. 309–382.

[1901c] *Leçons sur séries divergentes*, Paris : Gauthier Villars, 1901.

Carleman (Torsten Tage Gillis)

[1919] Sur les équations intégrales. (Extrait d'une lettre adressée à M. Hadamard.), *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 169 (1919), p. 773–776.

De Galdeano (Zoel Garcia)

[1900] *Estudios de crítica y pedagogía matemática*, Zaragoza : Imprenta de la Vda. de C. Ariño., 1900.

dell' Agnola (Carlo-Alberto)

[1901a] Sulle serie di polinomi che rappresentano un ramo di funzione analitica monogena, *Annali di Matematica Pura ed Applicata. III. Serie*, 6 (1901), p. 227–248.

[1901b] Sulle serie di polinomi, *Atti del Reale Istituto veneto di scienze, lettere ed arti*, 60 (1901), p. 171–180.

Faber (Georg)

[1903a] *Über Reihenentwicklungen analytischer Funktionen*, Thèse, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1903.

[1903b] Über die Fortsetzbarkeit gewisser *Taylor*scher Reihen, *Math. Annalen*, 57 (1903), p. 369–388.

[1903c] Über polynomische Entwicklungen, *Math. Annalen*, 57 (1903), p. 389–408.

Fejér (Leopold)
[1904] Untersuchungen über *Fourier*sche Reihen, *Math. Annalen*, 58 (1904), p. 51–69.

Fouët (Edward)
[1902] *Leçons sur la théorie des fonctions analytiques. Première partie. Fonctions en général. Fonctions analytiques : Leurs modes de définition et de représentation*, Paris : Gauthier-Villars, 1902.

Fredholm (Ivar)
[1901] Sur la méthode de prolongement analytique de *M. Mittag-Leffler*, *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens förhandlingar Stockholm*, 58 (1901), p. 203–205.

Hadamard (Jacques)
[1901] *La série de Taylor et son prolongement analytique*, Paris : C. Naud, 1901.

Hanni (Lucius)
[1901] Über *Borels* Verallgemeinerung des Grenzbegriffes, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 12 (1901), p. 256–289.

[1903] Zurückführung der allgemeinen Mittelbildung *Borel*s auf *Mittag-Leffler*s n-fach unendliche Reihen, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 14 (1903), p. 105–124.

[1904] Über die Beziehungen zwischen der Darstellung eines eindeutigen Zweiges einer monogenen Funktion durch Herrn Mittag-Leffler, der Methode der Mittelwerte des Herrn Borel und der Transformation des Herrn Lindelöf, *Acta Mathematica*, 29 (1904), p. 25–58.

Leau (Leopold)
[1899] Représentation des fonctions par des séries de polynômes, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 27 (1899), p. 194–200.

Le Roy (Édouard)
[1900] Sur les séries divergentes, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 130 (1900), p. 1293–1296.

Lindelöf (Ernst)
[1901] Sur le prolongement analytique, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 29 (1901), p. 157–160.

[1902] Une application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de *Taylor.*, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 135 (1902), p. 1315–1318.

[1903a] Sur la détermination de la croissance des fonctions entières définies par un développement de Taylor, *Bulletin des Sciences Mathématiques. Deuxième Série*, 27 (1903), p. 213–226.

[1903b] Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. 5. Série*, 9 (1903), p. 213–221.

Malmqvist (Johannes)

[1903] Sur le calcul des intégrales d'un système d'équations différentielles par la méthode de *Cauchy-Lipschitz*, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, 1 (1903), p. 149–156.

[1905] Étude d'une fonction entière, *Acta Mathematica*, 29 (1905), p. 203–215.

Mittag-Leffler (Gösta)

[1899] Sulla rappresentazione analitica di un ramo uniforme di una funzione monogena, *Atti della Accademia delle Scienze di Torino*, 34 (1899), p. 481–491.

[1900a] On the analytical representation of a uniform branch of a monogenic function, *Cambridge Transactions*, 18 (1900), p. 1–11.

[1900b] On multiply infinite series and on an extension of Taylor's series, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 32 (1900), p. 72–78.

[1900c] Ueber eine Verallgemeinerung der Taylor'schen Reihe, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1900, p. 194–205.

[1901a] Analytische Darstellung monogener Funktionen von mehreren unabängigen Veränderlichen, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV)*, 9(1) (1901), p. 74–77.

[1901b] Sur le terme complémentaire de mon développement de la branche uniforme d'une fonction monogéne dans le cas où ce développement possède une étoile de convergence, *Öfversigt af Kongliga Vetenskaps-Akademiens förhandlingar Stockholm*, 58 (1901), p. 785–790.

[1901c] Sur une formule de *M. Fredholm*, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 132 (1901), p. 751–753.

[1901d] Über den Konvergenzbereich der *Bernoulli*schen Reihe, *Archiv der Mathematik und Physik. 3. Reihe*, 2 (1901), p. 49–54.

[1902a] Un critère pour reconnaître les points singuliers de la branche uniforme d'une fonction monogène, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 133 (1902), p. 357–361.

[1902b] Sur l'intégrale de *Laplace-Abel.*, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 135 (1902), p. 937–939.

[1903] Une généralisation de l'intégrale de *Laplace-Abel*, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 136 (1903), p. 537–539.

[1904a] Sur la nouvelle fonction $E_\alpha(x)$, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 137 (1904), p. 554–558.

[1904b] Sopra la funzione $E_\alpha(x)$, *Accademia dei Lincei, Rendiconti, V. Serie*, 13(1) (1904), p. 3–5.

[1904c] Un nouveau théorème général de la théorie des fonctions analytiques, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 138 (1904), p. 881–884.

[1904d] Une nouvelle fonction entière, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 138 (1904), p. 941–942.

PAINLEVÉ (Paul)

[1899a] Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique en série de polynômes, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 129 (1899), p. 27–31.

[1899b] Sur le développement d'une branche uniforme de fonction analytique, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 128 (1899), p. 1277–1280.

[1899c] Sur le calcul des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy-Lipschitz, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 128 (1899), p. 1505–1508.

[1899d] Sur le développement des fonctions analytiques de plusieurs variables, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 129 (1899), p. 92–95.

[1902] Sur le développement des fonctions analytiques en série de polynomes, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 135 (1902), p. 11–15.

PHRAGMÉN (Lars Edvard)

[1899] Sur une extension d'un théorème de M. Mittag-Leffler, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 128 (1899), p. 1434–1437.

PICARD (Émile)

[1899a] Sur les développements en série des intégrales des équations différentielles par la méthode de Cauchy, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 128 (1899), p. 1363–1366.

[1899b] *Lectures on Mathematics (Clark University, 1889-1899 : Decennial Celebration)*, Worcester, MA : Clark University, 1899.

PINCHERLE (Salvatore)

[1903] Di una nuova operazione funzionale e di qualche sua applicazione, *Rendiconto della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna*, 7 (1903).

PRINGSHEIM (Alfred)

[1902] *Jacques Hadamard : La serie de Taylor et son prolongement analytique : Rezensionen*, Wiesbaden : Teubner, 1902.

RADELFINGER (Frank G.)

[1901] Analytic representation of complex functions, *Washington Bulletin*, 14 (1901), p. 227–232.

VIVANTI (Giulio)

[1901] *Teoria delle funzioni analitiche*, Milano : U. Hoepli, 1901.

WIMAN (Anders)

[1905a] Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Mathematica*, 29 (1905), p. 217–234.

[1905b] Über den Fundamentalsatz in der Theorie der Funktionen $E_\alpha(x)$, *Acta Mathematica*, 29 (1905), p. 191–201.

LITTÉRATURE SECONDAIRE

Barrow-Green (June E.)
[2002] Gösta Mittag-Leffler and the foundation and administration of Acta Mathematica, dans *Mathematics unbound : The evolution of an international mathematical research community, 1800–1945. Based on a three-day international symposium, Charlottesville, VA, USA, May 27–29, 1999* Providence, RI : Amer. Math. Soc. (AMS), 2002, p. 139–164.

Boniface (Jacqueline)
[2004] *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*, Paris : Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.

Bottazzini (Umberto)
[1986] *The higher calculus : a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Transl. from the Italian by Warren Van Egmond, New York etc. : Springer, 1986.

Bottazzini (Umberto) & Gray (Jeremy)
[2013] *Hidden harmony – geometric fantasies. The rise of complex function theory*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, New York etc. : Springer, 2013.

Cramér (Harald)
[1958] Lars Edvard Phragmén : Minnesteckning, *Kungliga Svenska Vetenskapsakademiens Årsbok*, 1958, p. 279–301.

Domar (Yngve)
[1982] On the foundation of Acta Mathematica, *Acta Mathematica*, 148 (1982), p. 3–8.

Duda (Roman)
[1996] Fundamenta Mathematicae, Studia Mathematica, Acta Arithmetica – the first three topic-oriented mathematical journals, *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej. Matematyka-Fizyka*, 1287 (1996), p. 47–80.

Gorenflo (Rudolf), Kilbas (Anatoly A.), Mainardi (Francesco) & Rogosin (Sergei)
[2020] *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*, Berlin : Springer, 2020.

Haubold (Hans-Joachim), Mathai (Arak) & Saxena (Ram Kishore)
[2011] Mittag-Leffler functions and their applications, *Journal of Applied Mathematics*, 2011 (2011), p. 51 ; Id/No 298628.

Jaëck (Frédéric)
[2010] Éléments structurels en analyse fonctionnelle : trois notes de Fréchet sur les opérations linéaires, *Archive for History of Exact Sciences*, 64(4) (2010), p. 461–483.

Jaëck (Frédéric), Mazliak (Laurent), Sallent Del Colombo (Emma) & Tazzioli (Rossana), éd.
[2019] *Gösta Mittag-Leffler and Vito Volterra. 40 years of correspondence*, Berlin : European Mathematical Society (EMS), 2019.

Kaufholz-Soldat (Eva)
[2017] The Institut Mittag-Leffler and its archives : a mathematician and his legacy, *European Mathematical Society Newsletter*, 104 (2017), p. 30–34.

König (Wolfgang) & Sprekels (Jürgen), éd.
[2016] *Karl Weierstraß (1815–1897). Aspekte seines Lebens und Werkes – Aspects of his life and work*, Wiesbaden : Springer Spektrum, 2016.

Lautman (Albert)
[1938] Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques. I : Les schémas de structure. II : Les schémas de genèse, *Actualités scientifiques et industrielles*, 590-591 (1938), p. 1–80 & 83–156.

Mahmudov (Nazim I.)
[2019] Delayed perturbation of Mittag-Leffler functions and their applications to fractional linear delay differential equations, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 42(16) (2019), p. 5489–5497.

Markuševič (Alekseĭ Ivanovich)
[1951] *Очерки по истории теории аналитических функций [Essais sur l'histoire de la théorie des fonctions analytiques]*, Moskau-Leningrad : Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur, 1951.
[1980] Некоторые вопросы истории теории аналитических функций в XIX в. [Quelques questions sur l'histoire de la théorie des fonctions analytiques au XIXe siècle], *Историко-математические исследования [Études historiques et mathématiques]*, 25 (1980), p. 52–70, 378.

Mittag-Leffler (Gösta)
[1884] Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante, *Acta Mathematica*, 4 (1884), p. 1–79.

Nabonnand (Philippe), éd.
[1999] *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler. Avec en annexes les lettres échangées par Poincaré avec Fredholm, Gyldén et Phragmén*, Basel : Birkhäuser, 1999.

Phragmén (Edvard) & Lindelöf (Ernst)
[1908] Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier, *Acta Mathematica*, 31(1) (1908), p. 381–406.

Poincaré (Henri)
[1898] L'œuvre mathématique de Weierstrass., *Acta Mathematica*, 22 (1898), p. 1–18.

RÅGSTEDT (Mikael)

[2016] Prelude : Gösta Mittag-Leffler and his quest for the Weierstraß legacy, dans *Karl Weierstraß (1815–1897). Aspekte seines Lebens und Werkes – Aspects of his life and work* Wiesbaden : Springer Spektrum, 2016, p. 1–9.

TURNER (Laura E.)

[2011] *Cultivating Mathematics in an International Space : Roles of Gösta Mittag-Leffler in the Development and Internationalization of Mathematics in Sweden and Beyond, 1880–1920*, Ph.D., Aarhus Universitet, 2011.

[2013] The Mittag-Leffler theorem : the origin, evolution, and reception of a mathematical result, 1876–1884, *Historia Mathematica*, 40(1) (2013), p. 36–83.