Revue d'histoire des mathématiques
29 (2023), p. 145–232
doi:10.24033/rhm.309

DES MÉTHODES POUR RÉSOUDRE LES PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE DANS LES OUVRAGES DE L'ENSEIGNEMENT PRÉPARATOIRE AU XIX[e] SIÈCLE EN FRANCE

Guillaume Moussard

Résumé. — Le XIX[e] siècle est celui d'une forte structuration de l'enseignement dans les lycées, où se développent des classes préparatoires aux concours des écoles du gouvernement, École polytechnique en tête. Cet article, issu d'un travail de thèse, recense et analyse la présence, dans les ouvrages de l'enseignement préparatoire français du XIX[e] siècle, de propos concernant la ou les méthodes à suivre pour résoudre un problème de géométrie. Le champ de l'étude est limité à la géométrie élémentaire et à la géométrie analytique. De façon différente dans l'un et l'autre de ces domaines, la résolution des problèmes prend une importance croissante, et certains enseignants auteurs entreprennent de munir leur lecteur de moyens de résolution. Nous analysons ce phénomène des points de vue quantitatif et qualitatif.

Abstract (Methods for solving geometry problems in preparatory textbooks in 19th-century France)

The 19th century was marked by a strong structuring of teaching in high schools, where preparatory classes were developed for government school competitions, led by the École polytechnique. This paper, based on a thesis work,

Texte reçu le 8 février 2019, revisé le 18 mai 2023, accepté pour publication le 16 janvier 2024.

G. Moussard, Lycée Jean Perrin, 13 010 Marseille, France.
Courrier électronique : moussardguillaume@yahoo.fr

Classification mathématique par sujets (2000) : 01A55, 97-03.

Mots clefs : Méthode, histoire des mathématiques, histoire de l'enseignement, géométrie, classes préparatoires, École polytechnique, lieux géométriques, transformations, manuel scolaire, géométrie élémentaire, géométrie analytique, XIX[e] siècle, géométrie moderne, problèmes.

Key words and phrases. — Method, history of mathematics, history of teaching, geometry, preparatory classes, Polytechnic school, geometric loci, transformations, textbook, elementary geometry, analytical geometry, 19th century, modern geometry, problems.

identifies and analyses the presence, in the books of French preparatory education of the 19th century, of statements concerning the methods to be followed to solve a problem of geometry. The scope of the study is limited to elementary and analytical geometry. In different ways in each of these areas, problem solving became increasingly important, and some teacher-authors undertook to equip their readers with the means of solving them. We analyse this phenomenon both quantitatively and qualitatively.

INTRODUCTION

Ce texte étudie la présence, dans les ouvrages d'enseignement préparatoire de la géométrie élémentaire et de la géométrie analytique en France au XIX^{e} siècle, de discours sur la ou les méthode(s) à suivre pour la résolution des problèmes, c'est-à-dire de propos qui indiquent une marche à suivre pour résoudre une catégorie, plus ou moins précisément identifiée, de problèmes.

En effet, les problèmes prennent une place et une importance croissantes dans l'enseignement de la géométrie tout au long du siècle [Moussard 2017]. Dès lors, certains auteurs de manuels présentent, analysent, structurent des méthodes avec l'intention explicite de munir le lecteur de moyens pour faire face à un exercice pédagogique qui va prendre une importance de premier plan : résoudre seul des problèmes.

Si l'intérêt des enseignants pour les problèmes, et pour les méthodes, pourra, le cas échéant, être rattaché à des conceptions épistémologiques ou pédagogiques propres sur l'enseignement des mathématiques, nous verrons que la motivation principale de cet intérêt reste la pression exercée par les examens et concours. Car l'enseignement préparatoire aboutit à un concours où les mathématiques jouent le rôle principal et dont la forme est avant tout orale. Il concerne les candidats à l'École polytechnique, créée au lendemain de la Révolution, à l'École normale, dont le concours d'accès est tenu pour la première fois en 1818, et peu à peu à d'autres écoles dites du gouvernement[1]. L'enseignement préparatoire, essentiellement scientifique et surtout mathématique, est hébergé dans les Lycées, aussi appelés Collèges royaux selon la conjoncture politique, en marge des études classiques [Belhoste 2001]. Il est très centralisé à Paris, où les Lycées sont peu à peu secondés par des institutions privées où les élèves sont hébergés et entraînés à répéter leurs leçons, institutions qui pourront prendre leur complète autonomie après la loi Falloux de 1850.

[1] L'École spéciale militaire de Saint-Cyr en 1818, l'École forestière en 1825, l'École navale à partir de 1830, l'École centrale des arts et manufactures après 1857, et enfin l'Institut national d'agronomie à partir de 1888.

Tout au long de ce XIXe siècle, le cadre universitaire, qui englobe les Lycées, reste assez stable, avec ses disciplines, ses professeurs, ses établissements, ses programmes officiels, pas toujours suivis nous le verrons, sa structure administrative [Savoie 2013]. Il s'adresse à un public restreint et privilégié [Gispert 2014] : quelques milliers d'élèves à peine suivent un enseignement préparatoire [Belhoste 2001]. L'École polytechnique joue au sein de ce dernier un puissant rôle structurant, sur le plan institutionnel par la publication d'un programme d'admission qui définit les objectifs de l'enseignement préparatoire, et sur le plan scientifique par l'immense influence de ses professeurs. Nous verrons que de très nombreux auteurs des ouvrages que nous étudierons en sont issus.

Nous avons compulsé dans le cadre d'un travail de thèse [Moussard 2015] les ouvrages d'enseignement de géométrie de niveau préparatoire afin de repérer les discours sur la méthode en lien avec la résolution de problèmes. Pour constituer notre corpus, nous avons utilisé la liste officielle des ouvrages autorisés pour l'enseignement publiée jusqu'en 1850, et la très riche bibliographie d'un ouvrage particulier dans son édition de 1896, les *Exercices de géométrie* de Frère Gabriel Marie. Néanmoins le résultat obtenu s'est avéré incomplet, et nous avons recouru à des recherches systématiques à partir de mots clefs dans le fonds de la Bibliothèque Nationale de France. Une telle étude systématique est inédite, même s'il existe des études partielles [Barbin 2012 ; Lorenat 2019] et de nombreux ouvrages présentés ici n'ont jamais fait l'objet d'un travail historique. Ce sont des ouvrages de cours, mais aussi des recueils de problèmes. Ils sont souvent adressés aux élèves préparationnaires, même si leur public peut être plus large. Soit en aval, pour la géométrie élémentaire enseignée dans les classes antérieures. Soit en amont, car les auteurs s'adressent également à leurs collègues.

En effet, il faut garder à l'esprit qu'un professeur choisit un ouvrage de référence pour faire son cours, qui est bien entendu le sien lorsqu'il est aussi auteur. Les professeurs usagers d'un ouvrage adressent volontiers leurs commentaires à l'auteur, susceptible de les prendre en compte dans les éditions ultérieures. Cela signifie qu'un ouvrage d'enseignement constitue dans bien des cas un reflet instructif des cours dispensés [Schubring 1987], par des professeurs appartenant à un réseau resserré et actif [Barbin 2017]. En cela, l'étude des manuels d'enseignement ouvre une porte d'accès, parmi d'autres, à la compréhension du déroulement des cours dans les classes. Le choix d'un manuel de référence dans les classes est contrôlé par l'administration, qui publie jusqu'au milieu du siècle la liste officielle des ouvrages autorisés [Choppin 1986 ; Giraud 1851], liste à laquelle appartiennent le plus souvent les ouvrages que nous mentionnerons. D'ailleurs, jusque dans les années 1830, les programmes officiels consistent en de simples renvois à des ouvrages particuliers [Belhoste 1995]. Parfois, le fait que des auteurs soient également des membres des jurys d'examen a pu soulever des conflits d'intérêt [Belhoste 2002, p. 8].

Nous avons donné, lorsque c'était possible, des éléments biographiques sur les auteurs des manuels, dressant par là un panorama partiel, mais sans doute assez représentatif, des enseignants en classes préparatoires, et de leurs parcours de carrière.

La question de la méthode possède de nombreuses significations en mathématiques, et l'histoire très internaliste des méthodes géométriques qu'a proposée l'ouvrage de Julian Lowell Coolidge [Coolidge 1947] ne répond pas à la question de savoir ce que désigne la notion de méthode en géométrie. Le questionnement abordé ici se place du point de vue de l'enseignement, mais il ne porte pas sur la méthode que choisit un auteur pour construire son cours, à savoir les principes qu'il retient, l'ordre d'exposition des théorèmes, la nature même des démonstrations qu'il expose, autant de choix essentiels et difficiles pour qui rédige un ouvrage d'enseignement. Notre travail porte sur un autre sujet, à savoir sur la façon dont cet auteur munit explicitement son lecteur de moyens d'aborder et de résoudre seul un problème nouveau. Cela nous a amené à écarter de notre étude les intéressantes questions, par exemple, du traitement de l'incommensurable ou encore de l'acceptation du mouvement en géométrie. Nous serons amenés, comme cela a été fait récemment dans un ouvrage sur la généralité [Chemla et al. 2016], à nous intéresser aux différentes valeurs que les auteurs attribuent à la méthode en géométrie : généralité, uniformité, efficacité, simplicité, fécondité ou encore élégance.

Ces valeurs nous fournissent des indications sur les conceptions des auteurs sur la géométrie et son enseignement. Même si, encore une fois, c'est la réussite aux concours qui guide avant tout leurs préoccupations. Aux concours des Écoles du gouvernement, il faut d'ailleurs ajouter, et peut-être même de façon encore plus importante, le concours général [Champion 1975]. Celui-ci revêt un grand prestige, pour ses lauréats, comme pour leurs établissements et leurs professeurs respectifs. Ainsi un éminent auteur, Antoine Reynaud, polytechnicien, professeur à l'École polytechnique et surtout examinateur d'admission, annonce-t-il dans la préface de son recueil de deux cents énoncés de problèmes qu'il a « cherché à préparer les élèves aux concours généraux » [Reynaud & Duhamel 1823, p. 5]. Autre élément qui atteste de l'importance de premier plan de ce concours, la parution en 1831 des premiers programmes détaillés pour les Collèges de Paris et de Versailles, « pour rendre uniforme l'enseignement des sciences [et] faciliter les compositions du concours général » [Belhoste 1995, p. 130]. Il est essentiel de relever ici que l'enjeu de la réussite à ce concours n'est pas de restituer un contenu défini à l'avance, mais bien de savoir résoudre un problème nouveau, et cela change profondément la perspective des enseignants qui préparent les futurs candidats, mis en situation de trouver par eux-mêmes.

Sur le plan des recherches géométriques, les questions de méthode sont ravivées au tournant du XIXe siècle par les travaux de Gaspard Monge [Sakarovitch 1998], qui prône l'utilisation conjointe des méthodes analytiques et géométriques. Ses héritiers, Carnot, Brianchon, Poncelet, ou Chasles, s'emploieront à développer des théories géométriques susceptibles de rivaliser avec l'analyse [Chemla 2016 ; Nabonnand 2011a ;b] qui avait dominé les travaux mathématiques du siècle précédent, théories bientôt qualifiées de « géométrie moderne », et comprenant des notions nouvelles comme les transversales, les pôles et les polaires, les axes radicaux, ou le rapport anharmonique [Nabonnand 2006]. Cette géométrie moderne n'apparaîtra jamais dans les programmes de la période étudiée ici, ni aucune considération sur la notion de méthode de résolution des problèmes. C'est-à-dire que l'objet de notre étude reste en-dehors de toute instruction à caractère officiel, d'où des façons à la fois libres et diverses de s'en saisir de la part des auteurs qui choisissent de traiter des méthodes.

Enfin, nous nous sommes restreints dans ce travail à la géométrie élémentaire et à la géométrie analytique, couvrant ainsi un champ déjà très large[2]. Si nous focalisons notre étude sur les ouvrages d'enseignement préparatoire, nous serons néanmoins amenés pour en comprendre les innovations et les modifications à explorer certains travaux influents des géomètres du siècle. Nous limitons, enfin, notre période d'étude entre la création des Lycées en 1802, et la réforme de l'enseignement moderne en 1891 qui introduit des conceptions nouvelles qui mèneront aux profondes réformes de 1902-1905 [Belhoste 1990].

L'article est organisé en deux parties. La première concerne la géométrie élémentaire. Nous montrons comment se développe tout au long du siècle un intérêt croissant des enseignants pour la question de la méthode pour résoudre les problèmes, et comment cet intérêt croissant s'accompagne d'une modification conceptuelle essentielle de la notion même de

2 L'enseignement de la géométrie descriptive a été étudié ailleurs autour d'autres questions [Barbin 2015 ; 2019]. Par ailleurs, nous abordons peu l'introduction du calcul différentiel en géométrie, et renvoyons pour cela à un travail de thèse qui étudie en détail les ouvrages d'enseignement de l'analyse au XIXe siècle [Renaud 2017].

méthode, de l'unicité d'une analyse uniforme vers la multiplicité des méthodes particulières, ces dernières s'enrichissant des apports de la récente géométrie moderne. La deuxième partie aborde la géométrie analytique. D'abord enseignée comme une méthode de résolution des problèmes, celle-ci se constitue au début du siècle en une discipline d'enseignement centrée sur l'établissement des propriétés des courbes et surfaces du second degré. Dans la deuxième moitié du siècle, et sous la pression des concours, les problèmes prennent nettement plus d'importance dans les ouvrages. Sont alors publiés de premiers ouvrages d'enseignement largement tournés vers la résolution des problèmes et introduisant pour cela des notions et des méthodes nouvelles comme le principe de la notation abrégée [Barbin 2009b] et les coordonnées homogènes et tangentielles. C'est seulement au milieu des années 1880 qu'apparaissent d'importants recueils de problèmes en géométrie analytique, qui intègrent pleinement les théories récentes.

1. DES MÉTHODES PARTICULIÈRES EN GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Le corpus de propositions constituant la géométrie élémentaire reste assez stable au long du XIX^e siècle, et un ouvrage en particulier reste une référence absolue [Barbin & Menghini 2014, p. 477-478], les *Éléments de géométrie* d'Adrien-Marie Legendre [Legendre 1794], publiés en 1794, puis complétés et annotés en 1845[3]. Malgré la prééminence indiscutable des *Éléments* de Legendre, les publications d'ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire abondent, et opèrent des choix parfois très différents quant à la sélection et à l'ordre des théorèmes, à la place et au nombre des problèmes, au choix des méthodes de démonstration, etc.

Nous avons recensé ceux de ces ouvrages qui abordent la question de la méthode de résolution des problèmes, ce qui n'est pas le cas du plus répandu d'entre eux, l'ouvrage de Legendre. Notre histoire commence dans les premières décennies du siècle avec les discussions autour de l'analyse et de la synthèse, dont nous verrons qu'elles occupent les auteurs de manuels, et que certains font le choix d'exposer la solution des problèmes par l'analyse, censée montrer la voie de l'invention. Parallèlement, le géomètre Gabriel Lamé conçoit une notion innovante de *méthode particulière* qui sera reprise et progressivement développée au long du siècle dans certains ouvrages d'enseignement jusqu'à connaître

[3] Par Alphonse Blanchet (1813-1894) [Legendre 1845], polytechnicien et futur directeur de l'école préparatoire privée Sainte-Barbe [Belhoste 2001, p. 11].

un important succès. Nous développerons spécialement l'étude de trois de ces méthodes : la méthode des lieux géométriques, la transformation des figures, et les maxima et minima. Enfin, nous verrons comment les théories de la géométrie moderne sont introduites dans les ouvrages d'enseignement secondaire, surtout après 1865, dans le but de faciliter la résolution des problèmes[4].

1.1. *La question de la méthode devient pédagogique*

1.1.1. *L'analyse et la synthèse dans les ouvrages d'enseignement*

La question de la définition de ce que sont l'analyse et la synthèse en mathématique a fait l'objet de très nombreuses interprétations depuis l'Antiquité [Panza & Otte 1997].

Les débats philosophiques autour de cette question de la définition et des mérites relatifs de l'analyse et de la synthèse sont encore très vifs au début de la période que nous étudions[5]. Ainsi Olry Terquem, géomètre, polytechnicien de la promotion 1801 et professeur de mathématiques, affirme dans la préface de son *Manuel de géométrie* de 1829, qu'« on débat souvent la question de préférence entre la *méthode synthétique* et la *méthode analytique* » [Terquem 1829], sans pour autant porter intérêt à cette question dans le cours de son ouvrage, rédigé de manière synthétique. Autre exemple, Auguste Mutel, capitaine d'artillerie et polytechnicien de la promotion 1813, explique dans l'avertissement à son *Cours de géométrie et de trigonométrie* [Mutel 1831] de 1831 ce que sont pour lui l'analyse et la synthèse, situant la première du côté de la découverte, précédant à la seconde qui a la vertu d'être plus courte car plus directe. Il affirme utiliser autant l'une que l'autre.

Sylvestre François Lacroix va nous fournir des considérations plus développées dans son *Essai sur l'enseignement des mathématiques* [Lacroix 1805] publié en 1805. Il y reconnaît « deux méthodes pour traiter les sciences mathématiques, la *synthèse* et l'*analyse* » [Lacroix 1805, p. 234]. La première est associée à la rigueur déductive, elle procède du connu à l'inconnu par déduction, et possède par là une valeur démonstrative. La seconde est associée à l'invention, elle remonte de l'inconnu au connu, c'est-à-dire qu'elle part de la proposition cherchée pour remonter à une chose connue. Ces

[4] Dans cet article, les figures sont réalisées par l'auteur-même d'après les sources, sauf si la provenance de la figure est indiquée explicitement.

[5] Ainsi, Joseph Diaz Gergonne, le rédacteur du premier périodique consacré aux mathématiques et à leur enseignement, répond-il à un concours organisé en 1813 par l'Académie de Bordeaux sur le thème de la synthèse et l'analyse mathématiques [Dahan-Dalmedico 1986].

deux voies, analyse et synthèse, sont présentées par Lacroix comme symétriques, complémentaires et successives : « Après s'être servi de l'analyse pour trouver quelque vérité, on se sert de l'autre méthode [la synthèse] pour expliquer ce que l'on a trouvé » [Lacroix 1805, p. 373]. Lacroix a une nette préférence pour l'exposé analytique [Lacroix 1805, p. 308] mais il cède à la fois aux usages et au poids de la tradition euclidienne dans ses propres *Éléments de géométrie* :

> Si [...] j'ai laissé entrevoir, à dessein, dans ces Éléments [de géométrie], quelques traces de la méthode analytique, je n'en suis pas moins persuadé de les avoir rédigés d'après le style des anciens, parce que j'ai toujours eu soin de me conformer à leur genre de démonstration, de m'attacher, ainsi qu'ils l'ont fait, à la rigueur des raisonnements [Lacroix 1798a, p. 340].

Au contraire de Lacroix, Legendre, préoccupé de rigueur et d'exactitude, avait défendu dans ses propres *Éléments de géométrie* un retour à la précision des Anciens, et il annonce dans son ouvrage avoir privilégié la synthèse. D'autre part la conception selon laquelle l'analyse est du côté de l'invention et la synthèse du côté de la démonstration n'est pas unanimement partagée. « Je serai même tenté, écrit Gergonne, de considérer la synthèse comme étant, plus proprement encore que l'analise, une méthode d'invention » [Gergonne 1817, p. 354]. Un avis partagé par Michel Chasles dans le discours d'inauguration de son cours de géométrie supérieure : « C'est la *synthèse* seule qui constitue la méthode d'invention par laquelle on forme et l'on accroît une science » [Chasles 1852, p. XLII].

Nous le voyons, les conceptions des auteurs sur les caractéristiques propres à l'analyse et la synthèse sont diverses, parfois même jusqu'à s'opposer. Le sujet est largement débattu sans que jamais un consensus ne s'impose. Mais pour nous l'intérêt est ailleurs : ces débats montrent une préoccupation des auteurs pour la question de la méthode, et se forgent autour des concepts disponibles d'analyse et de synthèse. Si les propos restent le plus souvent essentiellement rhétoriques, nous allons voir comment certains professeurs traduisent leur réflexion par des choix pédagogiques effectifs dans leurs manuels.

1.1.2. *Présenter la solution des problèmes par l'analyse*

Un auteur va faire le choix de privilégier l'analyse pour la résolution des problèmes, tout en préférant la synthèse pour la démonstration des théorèmes [Vincent 1834, p. 36]. Alexandre Joseph Hydulphe Vincent (1797-1868) a eu Lacroix comme professeur à l'École normale. Il est professeur à Reims, puis, après la première publication de son *Cours* en 1826, il est nommé à Paris, et termine sa carrière au Lycée Saint-Louis. Son *Cours de* *géométrie élémentaire* rencontre un certain succès et connait plusieurs rééditions. L'auteur signale notamment que « plusieurs professeurs [se sont] empressés d'en faire le texte de leurs leçons ».

Une des innovations du *Cours* de Vincent est le nombre élevé de problèmes, dont la place dans l'ouvrage varie au fil des rééditions, à la recherche d'une organisation pédagogique optimale [Moussard 2015, p. 133-144]. Vincent reconnaît deux méthodes pour résoudre les problèmes : l'analyse, « la méthode d'invention », ou la synthèse, « la méthode de démonstration » [Vincent 1834, p. 34-35]. La solution des problèmes est le plus souvent donnée par l'analyse, suivie de la construction de la solution à la règle et au compas.

Un autre recueil de problèmes fait le choix d'exposer les solutions sous la forme de l'analyse sans pour autant développer de discours sur la méthode. Le mathématicien Eugène Catalan, reçu à l'École polytechnique en 1833, auteur d'*Éléments de géométrie* et d'un *Traité de géométrie descriptive*, a enseigné à l'École supérieure des arts et métiers, à l'École polytechnique et aux prestigieux Lycées Charlemagne puis Saint-Louis. Il reprend en 1852, à la demande des éditeurs Carilian et Gœury, un recueil de théorèmes et de problèmes d'un certain La Frémoire [La Frémoire 1852]. Il modifie en profondeur l'ouvrage et choisit de rédiger les solutions des problèmes sous la forme de l'analyse, sans que ce choix soit signalé ni commenté de sa part. Catalan suit l'ordre des livres de Legendre, mais pas la forme d'exposition des solutions.

1.1.3. *La méthode analytique de Georges Ritt*

Au-delà du choix, innovant, de présenter la solution des problèmes par l'analyse, un autre auteur, Georges Ritt, développe en amont d'un recueil de problèmes un long discours sur l'analyse comme moyen de résolution des problèmes, qui en précise les étapes successives et vise à convaincre le lecteur de son efficacité. La question de la méthode dépasse ici les cadres philosophique et mathématique pour devenir également une question pédagogique, celle de la voie à suivre pour résoudre un problème posé dans un contexte particulier, celui de l'enseignement.

Georges Ritt (1801-1864) a étudié à l'École normale mais celle-ci est dissoute en 1822, avant la fin de ses études[6], car jugée trop libérale [Hummel dir., p. 13]. Il publie en 1836 plusieurs recueils de problèmes contenant chacun des centaines d'énoncés, un sur la géométrie, un sur l'application de l'algèbre à la géométrie, et un sur l'algèbre. De telles recensions

6 Il enseigne alors dans des pensions à Paris et donne des cours particuliers en Allemagne et en Russie pendant quelques années; revenu en France, il est nommé

d'énoncés de problèmes, en lien étroit avec la partition des mathématiques telles qu'elles sont enseignées, constituent un objet éditorial d'un genre nouveau au XIX^{e} siècle [Moussard 2015, p. 155]. Les *Problèmes de géométrie et de trigonométrie* [Ritt 1836] comptent plus de quatre cent problèmes dès la première édition, résolus à partir de la deuxième édition de 1842, et répartis en huit Livres, en suivant l'ordre des *Éléments* de Legendre. Il s'agit d'un travail d'une ampleur inédite, qui s'ouvre sur une longue introduction, dont la première section nous intéresse particulièrement ici puisqu'elle est intitulée « méthode analytique et considérations générales sur la résolution des problèmes de géométrie ». Ritt condamne les ouvrages contemporains qui déclinent les énoncés de problèmes avec leurs solutions synthétiques pour leur stérilité par rapport à l'objectif d'apprendre au lecteur à résoudre de nouveaux problèmes par lui-même, et non plus de connaître par cœur les solutions d'un corpus figé :

> Dans la plupart des ouvrages élémentaires, on trouve l'énoncé du problème, qui indique les opérations à effectuer, les constructions à faire sur les données ; la solution, qui fait connaître le procédé à employer pour résoudre la question ; et enfin la démonstration, qui achève de prouver l'exactitude du procédé et lève toute incertitude. Il y a, dans cette méthode, à la fois problème et théorème, synthèse et analyse ; mais rien n'indique la marche qu'a suivie l'esprit pour arriver à la solution, et il est bien peu probable que cette indication pure et simple du procédé de solution puisse mettre sur la voie de la solution d'un second, d'un troisième problème [...] ce moyen ne paraît pas de nature à activer le développement de l'intelligence, et ne sert qu'à surcharger la mémoire d'une foule de notions mal ordonnées, et généralement peu comprises [Ritt 1836, p. 3].

Donner la solution des problèmes aux élèves ne suffit donc pas. Il faut montrer aux élèves comment la solution a été trouvée, quelle « marche a suivie l'esprit », car cela seul développe l'intelligence, et permettra de résoudre de nouveaux problèmes. Ritt compare sur cinq problèmes les solutions données sous forme synthétique et sous forme analytique, dans le but de convaincre son lecteur des avantages de la seconde. Il aboutit à la formulation détaillée en quatre parties de cette méthode analytique :

---

inspecteur de l'instruction primaire du département de la Seine en 1836, puis inspecteur général de l'instruction publique en 1852. Dans ces diverses fonctions, Georges Ritt se signale par un grand dévouement à la cause de l'éducation populaire. On lui doit en grande partie l'introduction du dessin linéaire dans le programme obligatoire des études primaires [Havelange et al. 1986, p. 587]. Il a d'ailleurs publié de nombreux ouvrages à destination tant de l'enseignement primaire que de l'enseignement secondaire – une polyvalence remarquable alors que les deux systèmes sont pensés pour être étanches.

1. Hypothèses et constructions préparatoires ;
2. Examen des relations entre les données et les inconnues du problèmes ;
3. Solution et construction finale ;
4. Démonstration.

À quoi il faut ajouter une cinquième partie, très importante, la discussion [Ritt 1836, p. 6].

Ritt illustre successivement chacune de ces étapes par la résolution de nombreux problèmes[7]. Il formule ainsi, dès les premières pages de son ouvrage, le projet explicite de structurer la démarche de résolution de problème en exhibant une unique méthode analytique censée s'appliquer à la résolution de tout problème. L'enjeu est de convaincre le lecteur tout à la fois de l'uniformité, par sa description monolithique, et de l'efficacité, par le nombre important de problèmes résolus, de la méthode.

Il est frappant de relever à quel point Ritt cherche à établir, implicitement, un parallèle entre sa méthode et l'analyse algébrique. En donnant

---

7 Nous les illustrerons toutes ensembles sur la résolution du problème suivant :

PROBLÈME 17. Inscrire dans un triangle donné un rectangle d'espèce donnée, c'est-à-dire semblable à un rectangle donné, $\frac{m}{n}$ étant le rapport des côtés [Ritt 1836, p. 13].

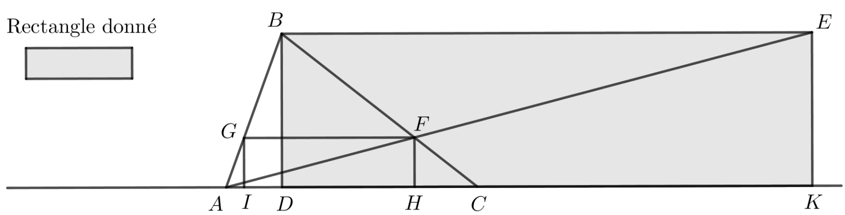


Figure du Problème 17

La première étape part du problème considéré comme résolu, en l'occurrence la figure d'un rectangle inscrit dans un triangle. Elle est complétée par le tracé de quelques lignes préparatoires, permettant, dans la deuxième étape, de « faire ressortir les relations qui existent entre les données et les inconnues ». Les « données » et les « inconnues », des mots habituellement employés en algèbre, désignent ici respectivement la figure donnée, le triangle ABC, et la figure à tracer, le rectangle $GFHI$. Les lignes BD et AE, ainsi que le rectangle $BEKD$, font donc « ressortir leurs relations », c'est-à-dire que l'examen de la figure met en évidence que les rectangles $BEKD$ et $GFHI$ sont semblables. À ce stade, il est d'une « nécessité indispensable » de connaître les diverses propriétés des figures, d'avoir en mémoire les théorèmes sur lesquels se fondera la solution. La troisième étape est la construction effective des rectangles $BEKD$ puis $GFHI$, par le moyen de leurs relations avec les données qu'a mises en évidence l'analyse. La quatrième est la démonstration que le rectangle $GFHI$ est la solution du problème. Enfin, la discussion consiste à « généraliser la solution en l'étendant à tous les cas possibles, et à montrer l'impossibilité ou la possibilité du problème » selon les cas. Ici, la discussion permet de s'apercevoir que le problème s'étend à la résolution du problème de l'inscription d'un carré dans un triangle.

à voir une méthode unique, et universelle, d'une part, et en recourant d'autre part à un vocabulaire algébrique en géométrie, comme dans l'expression « les relations entre les données et les inconnues ». Cette volonté de prouver l'équivalence des moyens de la géométrie pure avec ceux que confèrent l'emploi de l'algèbre sera explicitement défendue par Michel Chasles dans son *Aperçu historique* publié un an après le recueil de Ritt.

Deux autres traits de sa méthode confortent le parallèle entre l'analyse géométrique de Ritt et l'analyse algébrique : sa généralité et sa valeur de démonstration. La première apparaît particulièrement à l'étape de la discussion : « La discussion analytique d'un résultat trouvé, écrit-il, met en lumière une foule de propriétés nouvelles, qui fournissent les énoncés de nouveaux théorèmes ou servent à la résolution d'autres problèmes » [Ritt 1836, p. 25]. La seconde est exprimée tout à fait clairement : « lorsque la solution a été préparée par l'analyse, la démonstration est à peu près inutile »[Ritt 1836, p. 21].

1.1.4. *Conclusion*

Il apparaît que la question de la méthode pour résoudre les problèmes en géométrie s'est constituée comme question pédagogique dans le contexte de l'enseignement préparatoire de la première moitié du XIX^{e} siècle, les professeurs proposant des moyens à leurs élève pour faire face à des énoncés nouveaux, que ce soit en leur présentant les solutions sous la forme de l'analyse, censée montrer le chemin suivi pour l'invention, ou en exhibant de façon très détaillée une méthode à suivre.

Précisons que si la référence à la dichotomie entre analyse et synthèse est fréquente dans les ouvrages d'enseignement de la première moitié du siècle, et au-delà, un discours développé comme celui de Ritt sur la méthode analytique, ou bien le choix de rédiger les solutions sous la forme d'une analyse, comme le font Vincent et Catalan, restent des initiatives isolées dans le champ éditorial, même si nous pensons qu'elles témoignent de préoccupations largement partagées.

Notons enfin que le recueil de Catalan réunit les problèmes de construction à résoudre et les théorèmes à démontrer. La distinction entre ces types de propositions va progressivement s'estomper au profit des termes englobants de question ou d'exercice.

1.2. *De* la *méthode vers* les *méthodes*

Plusieurs auteurs vont s'émanciper du cadre rigide d'une analyse uniforme pour décrire une pluralité de méthodes particulières, une expression qui traduit bien la rupture du lien entre les notions de méthode et d'universalité. Un géomètre joue un rôle décisif dans cette émancipation : Gabriel Lamé. Son programme de recherche visant à découvrir ce qu'il baptise des « méthodes particulières » va diffuser dans les ouvrages d'enseignement et sera pleinement réalisé à la fin du siècle.

1.2.1. *Gabriel Lamé : la notion de méthodes particulières*

Gabriel Lamé[8] publie, en 1818, un ouvrage qu'il adresse aux professeurs, intitulé *Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie* [Lamé 1818]. Celui-ci contient de nombreux problèmes résolus de manière originale, les premiers par la géométrie élémentaire, puis dans la suite de l'ouvrage en appliquant l'algèbre à la géométrie [Barbin 2009b, p. 101–111]. Lamé déplore que la synthèse, qualifiée de « méthode énigmatique », soit si présente dans les mathématiques élémentaires, alors qu'elle est pratiquement absente des mathématiques transcendantes où règne l'analyse. Pourtant, « un problème quel qu'il soit, écrit-il, ne peut être trouvé que par *une* méthode analytique » [Lamé 1818, p. 9]. Nous soulignons l'article indéfini pour insister sur le fait que Lamé envisage, dans le cadre de l'analyse, une multiplicité de méthodes possibles. Pour exhiber celles-ci, il est parti des ressemblances entre plusieurs solutions :

> Il faudrait principalement s'attacher à donner quelques méthodes générales pour la solution d'un problème, […] on pourrait, il me semble, classer les problèmes suivant les ressemblances plus ou moins grandes de leurs moyens de solution, et l'on parviendrait peut-être, sinon à une méthode unique, du moins à un composé de moyens différens, que l'on pourrait regarder comme généraux vu leurs nombreuses applications [Lamé 1818, p. 6].

Les solutions des problèmes constituent donc le point de départ de son investigation. En observant de nombreuses solutions de problèmes, il s'emploie à repérer, a posteriori donc, des « moyens de solution » communs à des classes de problèmes. Ces moyens, une fois mis en évidence, sont qualifiés par lui de « méthodes générales », et munissent le géomètre d'une multiplicité de moyens de résolution pour aborder un problème nouveau. Lamé s'excuse de cet ordre des problèmes vers les méthodes :

> Quant aux réflexions qu'il [l'ouvrage] contient, j'avoue qu'elles m'ont été suggérées pour la plupart, par les problèmes que j'y ai fait entrer, tandis

[8] Reçu à l'École polytechnique en 1814, il en est congédié avec toute sa promotion deux ans plus tard par Louis XVIII pour indiscipline. Il doit donc momentanément enseigner les mathématiques pour subvenir à ses besoins [Barbin 2009a].

qu'au contraire des réflexions générales auraient dû me conduire au choix des exemples [Lamé 1818, p. v].

Assumer de la sorte une démarche des solutions vers les méthodes est tout à fait novateur. Cela aboutit à une pluralité de méthodes dont les champs d'application respectifs restent indéfinis. Les trois « moyens » qu'expose Lamé en géométrie simple sont : les figures semblables, la méthode inverse, et les lieux géométriques[9].

[9] Le premier de ces moyens consiste en la situation où « l'on est analytiquement conduits à construire une figure semblable à celle que l'on cherche ». L'exemple que donne Lamé est : « Connaissant les trois hauteurs d'un triangle, le construire » [Lamé 1818, p. 15]. Les hauteurs h, h', h'' d'un triangle étant en raison inverse de ses côtés a, a', a'', on connaît les rapports entre les trois côtés du triangle, et par conséquent en prenant un de ces côtés arbitrairement, on construit un triangle semblable au triangle cherché, à partir duquel il est aisé de construire la solution du problème.
Le second moyen, appelé « méthode inverse », « consiste à renverser l'énoncé, à prendre pour données les inconnues, et réciproquement ». Il est possible d'identifier un premier domaine d'application de cette méthode : « c'est sur-tout quand il s'agit d'inscrire dans un polygone donné une figure semblable à une autre aussi donnée, que l'on préfère la méthode inverse » [Lamé 1818, p. 16]. Prenons le problème par exemple d'inscrire dans un quadrilatère A un quadrilatère B semblable à un quadrilatère donné. La méthode inverse prescrit de construire d'abord un quadrilatère semblable à B et circonscrit à A, problème dont la solution est connue.
Le troisième moyen consiste à rechercher des lieux géométriques. « Les questions de Géométrie se réduisent presque toujours à la recherche d'un ou de plusieurs points. Un point est ordinairement déterminé par l'intersection de deux lieux géométriques, sur lesquels il jouit de deux propriétés différentes et réunies ». Dès lors, en traçant ces deux lieux géométriques, si du moins ce sont des droites et des cercles, on trouve à leur intersection les points solutions du problème. En exemple, Lamé propose, « étant donnés quatre points A, B, C, D en ligne droite, de trouver hors de cette ligne un point X tel, que les lignes AB, BC, CD, y soit vues sous un même angle » [Lamé 1818, p. 24]. Le point X se trouve de fait sur deux lieux que l'on sait tracer. Le premier est le lieu des points d'où les lignes AB et BC sont vues sous un même angle, ce qui signifie que les angles AXB et BXC sont égaux, et le deuxième est bien sûr celui d'où les lignes BC et CD sont vues sous un même angle. À l'intersection de ces deux lieux, qui sont deux cercles, se trouvent les points X qui répondent au problème.

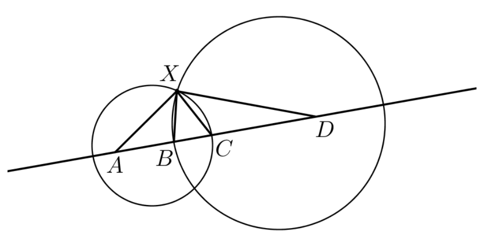


Figure de l'exemple de Lamé :
« Connaissant les trois hauteurs d'un triangle, le construire ».

Remarquons que Gabriel Lamé n'est pas l'inventeur de ces méthodes : la méthode des figures semblables est décrite par Carnot dans sa *Géométrie de position* de 1803 [Carnot 1803, p. 260], la méthode inverse est déjà « connue » d'après Lamé lui-même, et la méthode des lieux géométriques est décrite par Simon Lhuilier dans ses *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques* [Lhuilier 1809]. Toutefois Lamé va bien au-delà de la considération de telle ou telle méthode pour la résolution d'un problème en particulier. Il a renversé le point de vue en partant des solutions pour exhiber des méthodes, c'est-à-dire des moyens généraux permettant de résoudre une multiplicité de problèmes. Ces moyens de résolution des problèmes, ainsi que la nouvelle conception de la notion de méthode qu'ils portent, sont repris par plusieurs auteurs de manuels, qui sont également des professeurs. Certains citent d'ailleurs l'ouvrage de Lamé, ou bien reprennent ses exemples ou les termes qu'il emploie, comme nous allons le voir.

1.2.2. *Les méthodes particulières de Lamé dans les manuels*

Commençons par signaler, en contre-point, un ouvrage destiné à l'enseignement et rédigé par des auteurs de premier plan, qui ne réfère pas à Lamé, et défend une position opposée au sujet de la notion de méthode. Antoine André Louis Reynaud (1771-1844), professeur et examinateur à l'École polytechnique, auteur de nombreux et influents ouvrages d'enseignement, rédige en 1823 des *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques* qui contiennent environ deux cents énoncés de problèmes corrigés, et sont précédés de « considérations générales » rédigées par son ancien élève, Jean Marie Constant Duhamel (1797-1872), futur académicien et futur professeur à l'École polytechnique. Celui-ci est de la même promotion, licenciée, de l'École que Gabriel Lamé, et enseigne alors dans des institutions privées. Ses « considérations » forment un ensemble de réflexions métaphysiques sur l'enseignement des mathématiques. Il n'y aborde pas les notions d'analyse et de synthèse, et affirme à propos de « la marche à suivre dans la résolution des problèmes, [qu']il est difficile de rien dire de général à cet égard sans tomber dans le vague ». Il recommande sur ce sujet « aux élèves de résoudre le plus grand nombre de questions » [Reynaud & Duhamel 1823, p. 50].

Au contraire de Duhamel, nous avons vu comment Ritt, dans son recueil de 1836, développe minutieusement la méthode analytique de résolution des problèmes. Celui-ci a-t-il lu Lamé ? Si nous poursuivons la lecture de Ritt au-delà de cette description détaillée de l'analyse, nous trouvons encore plusieurs sections de considérations générales sur la résolution des problèmes[10], qui nous évoquent le travail de Lamé. Sans que ce soit présenté comme tel, Ritt y expose des procédés particuliers de résolution de problèmes, ce que d'autres auteurs après lui, nous le verrons bientôt, qualifierons de méthodes particulières. Le premier de ces procédés est le recours aux lieux géométriques. Un chapitre est consacré à l'« application des lieux géométriques à la résolution des problèmes déterminés » [Ritt 1836, p. 49] et un autre à la « méthode inverse » [Ritt 1836, p. 56]. Ainsi, s'il conçoit la méthode comme devant être uniforme, il présente néanmoins à l'intérieur de ce cadre général de l'analyse géométrique deux des trois méthodes particulières exposées par Lamé.

Nous retrouvons également la trace des méthodes particulières de Lamé dans un autre ouvrage, du professeur agrégé Nicolas Jules Percin (1804-1882). Nommé au Lycée de Nancy en 1830 [Condette 2006], il publie en 1848 une *Géométrie simplifiée*, à destination des collèges, des nouvelles écoles normales et des écoles primaires supérieures, plusieurs fois rééditée. Il la fait suivre, la même année, d'un *Complément* à l'intention des candidats aux écoles du gouvernement. Le troisième livre de ce *Complément* porte sur les problèmes et s'ouvre sur un paragraphe intitulé « Des méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie ». L'auteur compare la synthèse et l'analyse, et souhaite initier les élèves à la seconde, car elle « est la plus propre à mettre en jeu leur sagacité, à développer leur intelligence et cet esprit d'investigation, si utile dans les diverses carrières où ils seront appelés » [Percin 1848, p. 121]. L'enseignement de l'analyse touche donc pour Percin, au-delà de la résolution des problèmes, à la formation de l'intelligence des élèves. S'il reconnaît l'absence de méthode générale en géométrie, Percin expose, dans le cadre de l'analyse géométrique, quelques « règles » pouvant servir de guide :

– 1re règle. Supposer le problème résolu.
– 2e règle. Ramener la question à ses termes les plus simples.
– 3e règle. Mener des lignes auxiliaires.
– 4e règle. Résoudre un problème inverse.
– 5e règle. Construire une figure égale ou semblable.

Si les trois premières règles peuvent être regardées comme des étapes de l'analyse géométrique, nous reconnaissons dans les quatrième et cinquième règles deux procédés décrits par Lamé. Percin présente, peu après ces règles, les « lieux géométriques », c'est-à-dire le troisième de ces procédés.

---

10 Elles portent sur les problèmes déterminés et indéterminés, le calcul algébrique, la trigonométrie, les constructions à la règle seule ou au compas seul.

D'autres auteurs de manuels vont reprendre les idées de Lamé, en se référant cette fois à son travail, mais entretemps un géomètre publie un ouvrage à la gloire des méthodes qui reprend et poursuit dans sa première partie le programme de Lamé.

1.2.3. *Paul Serret (1855) : sauver les méthodes de l'oubli*

Le géomètre Paul Serret (1827-1898) rédige en 1855 un ouvrage qui expose la diversité des méthodes géométriques, sans être toutefois un ouvrage d'enseignement. Il veut remédier au double constat que « les méthodes des inventeurs sont généralement ignorées des élèves [et qu'] elles ont disparu sous l'uniformité d'une analyse élégante » [Serret 1855, p. v] telle qu'enseignée à l'École polytechnique. Nous allons voir que l'ouvrage de Serret[11] à la fois relance l'intérêt des professeurs pour les méthodes et poursuit le projet de Lamé de recensement des méthodes particulières. Dédié aux méthodes en géométrie, celui-ci s'ouvre sur une citation de Poncelet recommandant de ne pas oublier les principes faciles et ingénieux de la géométrie des anciens, « car ce ne sont pas tant les vérités particulières que les méthodes qu'il ne faut pas laisser périr ». Serret s'emploie donc à sauver de l'oubli les méthodes des géomètres du passé, et s'adresse tout particulièrement aux élèves de l'École polytechnique éblouis selon lui par « les lumières de l'analyse contemporaine »[Serret 1855, p. v]. Serret réfère ici aux procédures systématiques de la géométrie analytique qui, bien que très efficaces, sont relativement uniformes et par là sollicitent peu le pouvoir d'invention du géomètre. Or, nous l'avons bien compris, pour Serret comme pour Poncelet avant lui, le pouvoir d'invention des méthodes est plus précieux encore que le contenu des propositions elles-mêmes.

L'ouvrage compte deux parties, une sur les méthodes de la géométrie des figures finies, et l'autre sur la géométrie infinitésimale. Dans la première, à l'instar de Gabriel Lamé dont il cite dès la première page l'« excellent ouvrage », Serret s'emploie à exhiber des procédés généraux qu'il décline en autant de méthodes, dont il ne cherche pas à limiter le nombre. Notons qu'il n'y a plus de restriction aux seuls problèmes de construction comme chez Lamé, mais que les méthodes s'appliquent aussi bien à la démonstration des théorèmes. La deuxième partie de l'ouvrage est davantage à caractère historique et porte sur l'étude des courbes.

11 Ancien élève de Vincent au Lycée Monge (futur Lycée Saint-Louis), Serret est reçu à l'École normale supérieure en 1849 mais doit quitter l'école pour cause de résultats insuffisants en physique. Jamais agrégé, il enseigne les mathématiques dans les institutions privées parisiennes [Brasseur 2020].

La première partie est donc une recension aussi importante qu'originale de méthodes en géométrie élémentaire ; elle exprime la volonté de reconnaître dans toute solution ou démonstration l'expression d'une méthode, ou la combinaison de plusieurs d'entre elles. Serret recense ainsi onze méthodes pour la géométrie des figures finies, et il enjoint à son lecteur de les essayer tour à tour lorsqu'il est confronté à une question nouvelle[12].

---

[12] Sa classification est remarquable par le nombre et la diversité des méthodes :

- Par substitutions successives.
- Par construction.
- Par duplication.
- Par abstraction ou généralisation.
- Par composition et décomposition.
- Par les limites.
- Par la réduction à l'absurde.
- Par inversion.
- Par les lignes, les aires, ou les volumes auxiliaires.
- Par les solides auxiliaires.
- Par la transformation des figures [Serret 1855, p. IX].

Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples d'un niveau bien souvent soutenu et peu accessible aux élèves de mathématiques élémentaires. La première méthode est l'analyse géométrique, qui fait dépendre la solution de la question proposée d'une autre plus simple, etc. La deuxième consiste à substituer à la définition d'un élément de la figure une construction géométrique équivalente. La troisième consiste à construire le symétrique d'une partie de la figure par rapport à une ligne de la figure. Elle est illustrée sur ce problème aujourd'hui classique : « Trouver le plus court chemin pour aller d'un point à un autre, en passant par une droite donnée qui laisse d'un même côté les deux points donnés » [Serret 1855, p. 7]. La quatrième méthode prescrit de faire abstraction d'une propriété qui définit certains éléments de la figure pour établir une proposition plus générale que la proposée, et dont elle serait un cas particulier. Serret donne en exemple la démonstration du « théorème de Newton » [Serret 1855, p. 9] : Dans un quadrilatère circonscrit à un cercle, la droite qui joint les milieux des diagonales passe par le centre du cercle. Il montre que le théorème de Newton est un cas particulier de l'énoncé suivant : Tout point o satisfaisant à la relation tri oab + tri ocd = tri obc + tri oda est situé sur la droite mn qui joint les milieux des diagonales. Cet énoncé est effectivement plus général, et Serret le démontre aisément. Cette méthode contient celle des lieux géométriques. La cinquième méthode « consiste à composer avec les grandeurs dont on veut établir l'égalité, d'autres grandeurs auxiliaires dont l'égalité est évidente » [Serret 1855, p. 10]. La méthode prend le nom de décomposition lorsque les grandeurs dont on veut établir l'égalité sont décomposées en un même nombre de parties dont on prouve l'égalité deux à deux. La méthode par les limites déduit d'une relation entre des grandeurs variables la même relation entre leurs grandeurs limites. La méthode par la réduction à l'absurde ne doit être utilisée que lorsqu'elle fournit une démonstration plus simple que l'analyse, car « ces sortes de démonstration peuvent convaincre l'esprit mais non l'éclairer » [Serret 1855, p. 11], écrit Serret en citant la *Logique de Port-Royal*. La méthode par inversion est celle décrite par Lamé sous le nom de méthode inverse, qui consiste à prendre les données pour inconnues et vice-versa. La méthode par les lignes, les aires, ou les volumes auxiliaires « consiste à employer comme auxiliaires, dans la recherche d'une relation entre des

Serret réalise le programme de Lamé d'exhiber des méthodes particulières en géométrie élémentaire, en cherchant manifestement à repérer dans toute solution l'expression d'une méthode, à savoir un chemin suivi qui pourrait être employé à la résolution d'autres questions. Cette détermination est particulièrement claire lorsqu'on considère la méthode par duplication dont l'emploi semble très restreint : il n'empêche, Serret veut y voir l'expression d'une méthode.

1.2.4. *Vers une multiplicité de méthodes*

Dans plusieurs manuels de la deuxième moitié du siècle qui abordent cette question de la méthode de résolution des problèmes, la conception d'une multiplicité de méthodes possibles est désormais pleinement assumée. Jusqu'ici, les auteurs de manuels rencontrés qui traitent de la question de la méthode de résolution des problèmes en géométrie élémentaire, Vincent, Catalan, Ritt et Percin, s'inscrivent tous dans le cadre général d'une seule analyse. Néanmoins, chez les deux derniers, nous avons trouvé sous forme de « considérations générales » ou de « règles » les trois méthodes décrites par Lamé.

Notre premier auteur, Antoine Désiré Alphonse Amiot[13] (1812-1865) adopte un choix éditorial innovant en proposant dans un ouvrage à part les solutions des problèmes posés dans ses *Éléments*, choix qui sera plus répandu dans les années 1880. Amiot et son collègue A. Desvignes entament leurs *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les Éléments de géométrie* (1858), par une vingtaine de pages d'« observations sur la résolution des problèmes de géométrie », et dont les premières lignes sont, justement, une citation de l'*Examen* de Lamé. Quatre méthodes sont décrites et illustrées sur des problèmes, qui sont parfois ceux qu'avait exposés Lamé justement : l'« emploi des lieux géométriques » [Amiot & Desvignes 1858, p. 6], la « méthode des figures semblables »[Amiot & Desvignes 1858, p. 8], « la réduction d'un problème à un autre plus simple » [Amiot & Desvignes 1858, p. 11] et enfin l'emploi de l'algèbre [Amiot & Desvignes

---

grandeurs d'une certain espèce (lignes , aires ou volumes), des grandeurs d'espèces différentes (aires, volumes ou lignes) »[Serret 1855, p. 14]. La méthode par les solides auxiliaires « consiste à faire intervenir la géométrie à trois dimensions dans la solution d'une question de géométrie plane »[Serret 1855, p. 17]. Enfin, il y a la méthode par la transformation des figures sur laquelle nous allons revenir.

13 Il a échoué au concours de l'École normale supérieure, mais obtient néanmoins l'agrégation en 1842 et enseigne les mathématiques dans plusieurs établissements, notamment à Dijon puis à Paris, avant d'être nommé en Mathématiques Élémentaires en 1852 et en Mathématiques Spéciales en 1862 au Lycée Saint-Louis. Il est l'auteur de nombreux ouvrages d'enseignement plusieurs fois réédités, de géométrie élémentaire, de géométrie descriptive et d'algèbre.

1858, p. 15]. Il est à noter que la troisième méthode est une analyse géométrique : d'un cadre unique chez les auteurs étudiés précédemment, elle est devenue ici une méthode particulière parmi d'autres.

Un deuxième auteur, Charles de Comberousse[14] (1826-1897), fait suivre le deuxième tome de son *Cours de Mathématiques* [Comberousse 1860–1862], qui porte notamment sur la géométrie élémentaire, d'un complément. Celui-ci expose les « principes généraux relatifs à la résolution des problèmes », et se réfère d'emblée à deux ouvrages, ceux de Lamé et de Serret. Comberousse associe l'analyse à la découverte, et la synthèse à la démonstration. Il considère que :

> Il est impossible d'indiquer une méthode générale et certaine [...] cependant il existe des méthodes particulières qui s'appliquent plus directement à certaines classes de questions; et si l'on sait discerner à quelle catégorie appartient le problème dont on s'occupe, on a déjà fait un grand pas vers la solution, puisque la manière dont les recherches doivent être dirigées se trouve connue d'avance [Comberousse 1860–1862, p. 224].

Comberousse réalise le programme de Lamé de déterminer une multiplicité de méthodes particulières, et considère que la résolution d'un problème passe par l'identification de celle de ces méthodes qui sera adaptée[15].

Les ouvrages ultérieurs publiés par Comberousse viennent toutefois nuancer son engouement pour les méthodes particulières. D'abord,

---

14 Sorti en 1850 de l'École centrale des Arts et Manufactures, il enseigne à partir de 1852, après deux ans passés dans les chemins de fer, au collège Chaptal en même temps qu'à l'École centrale. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages d'enseignement, un *Cours complet* en trois volumes rédigé entre 1860 et 1862, et plusieurs manuels de géométrie, dont un avec Eugène Rouché qui connaîtra un grand succès éditorial.

15 Il illustre « les plus importantes de ces méthodes spéciales » sur de nombreux exemples, qui sont aussi bien des problèmes que des théorèmes :

- Méthode des substitutions
- Méthode par symétrie
- Méthode des figures semblables
- Méthode par inversion
- Méthode des relations auxiliaires
- Méthode par projection
- Réduction à l'absurde, méthode des limites
- Méthode des lieux géométriques
- Emploi de l'algèbre

Nous reconnaissons dans cette liste à la fois les procédés de Lamé et de Serret, et les exemples donnés pour les illustrer sont souvent communs. La méthode par projection n'est pas nouvelle et correspond à la méthode par les solides auxiliaires de Serret. Surtout, nous lisons par l'emploi répété du mot « méthode » combien l'idée d'une multiplicité de méthodes est clairement affichée.

Comberousse publie quelques années plus tard avec Eugène Rouché [16] (1832-1910) le célèbre *Traité de Géométrie élémentaire* qui fait suivre le Livre II sur le cercle d'un appendice intitulé « Considérations sur la résolution des problèmes ». Ils y opposent la synthèse, méthode d'exposition qui prouve les vérités connues, à l'analyse, méthode d'invention, par laquelle on découvre. Il leur paraît « impossible d'indiquer une méthode générale et certaine pour résoudre tous les problèmes de Géométrie » [Rouché & Comberousse 1866, p. 102], et s'opposent à l'idée que toute solution procède d'une méthode[17] :

> Nous devons faire une remarque essentielle. Dans un grand nombre de cas, une heureuse inspiration […] conduit à des constructions auxiliaires qui facilitent singulièrement la construction du problème que l'on cherche [mais] on ne ferait pas ressortir la moindre règle générale relative à ces constructions, dont la diversité tient à la nature si variable du sujet lui-même et constitue au fond la richesse inépuisable de la géométrie [Rouché & Comberousse 1866, p. 108].

L'enthousiasme initial de Comberousse en faveur des méthodes particulières de Lamé et Serret est revu ici à la baisse auprès de Rouché. Ensuite, les mêmes auteurs publient l'année suivante, à la demande de leur éditeur Gauthier-Villars, des *Éléments de géométrie* conçus pour être en lien plus étroit avec les programmes officiels, et par là plus accessibles. Dans cette version, qui connaîtra également le succès avec une septième édition en 1932, on ne trouve guère sur la question de la méthode qu'une scolie mentionnant rapidement la méthode des substitutions successives et la méthode par intersection de lieux géométriques [Rouché & Comberousse 1873, p. 96]. Les éditeurs, comme les programmes, ne s'intéressent pas aux méthodes particulières.

Nous terminons notre revue par un troisième ouvrage, d'une ampleur considérable, et qui connaîtra un vaste succès éditorial jusqu'à une sixième réédition en 1920. Il expose, analyse et structure une grande diversité de méthodes particulières et les associe à des milliers de questions de géométrie. Il s'agit des *Exercices de Géométrie comprenant l'exposé des méthodes*

---

16 Polytechnicien de la promotion 1852, il enseignera dans plusieurs établissements, dont le Lycée Charlemagne, l'École polytechnique comme répétiteur, l'École centrale et plus tard le Conservatoire National des Art et Métiers.

17 Néanmoins ils exposent les procédés suivants : par substitutions successives, la méthode par symétrie, la méthode de réduction à l'absurde et enfin la méthode par intersection de lieux géométriques.

géométriques et 2000 questions résolues de Frère Gabriel Marie [18] (FGM). Dans la première édition publiée en 1875 à Paris et en 1877 à Tours sous le titre plus court d'« Exercices de Géométrie », les méthodes sont déjà abordées, mais à la fin du livre et de façon rapide. Dès la deuxième édition, en 1882, la partie concernant l'étude des méthodes se situe au début de l'ouvrage et se trouve largement développée. L'auteur affirme que : « Les Méthodes constituent la partie la plus importante de tout l'ouvrage, comme elles en sont d'ailleurs la plus originale » [Marie 1896, p. ii]. Il semble donc qu'entre les deux éditions, la réflexion sur les méthodes se soit imposée avec succès comme constituant un intérêt majeur de l'ouvrage.

La première partie recense donc les méthodes propres à résoudre des problèmes de géométrie élémentaire[19]. L'auteur accorde aux méthodes particulières une importance de tout premier plan :

> Tout professeur, et même tout élève sérieux, devrait posséder parfaitement ce complément de géométrie ; car l'exposition des méthodes fait naître et développe les idées générales ; elle permet de rattacher des milliers d'exercices variés à quelques types principaux, que l'on retient sans peine et que l'on applique avec facilité [Marie 1896, p. ii].

Cet intérêt pour les méthodes conduit l'auteur à présenter éventuellement plusieurs fois le même théorème ou le même problème dès lors qu'il est résolu ou démontré par des méthodes différentes :

> En agissant ainsi, nous avons voulu montrer l'avantage que peut présenter telle marche sur telle autre, donner quelques exemples de l'admirable fécondité de certaines méthodes, et surtout encourager les chercheurs, en leur prouvant qu'on peut arriver, par bien des voies, au résultat demandé [...] L'emploi judicieux des Méthodes conduit à des démonstrations ou à des solutions remarquables par leur simplicité [Marie 1896, p. iv].

---

18 Edmond Brunhes (1838-1916), Frère Gabriel Marie de son nom en religion, appartient à l'ordre des Frères des Écoles Chrétiennes, institut religieux laïc de vie consacrée voué à l'enseignement et à la formation des jeunes depuis 1680. Si l'essentiel des établissements dirigés par les Frères sont des écoles primaires, ils possèdent aussi des établissements pour la formation de leurs maîtres et des établissements d'enseignement secondaire, pour lesquels ils éditent un *Cours de mathématiques élémentaires* en plusieurs livres couvrant l'ensemble du programme.

19 L'exposé de ces méthodes est systématiquement accompagné de nombreux exercices. La seconde partie, encore plus conséquente, propose, ainsi que l'annonce le titre, plus de 2 000 exercices. Tous sont corrigés et accompagnés d'une figure placée dans le corps du texte. Ils sont regroupés selon les huit Livres des *Éléments*, c'est-à-dire implicitement ceux de Legendre. Tout au long de l'ouvrage, chaque fois que cela lui a été possible, l'auteur donne les noms des mathématiciens à l'origine des propositions énoncées.

Relevons que la valeur des méthodes réside pour FGM dans leur fécondité et dans la simplicité des solutions qu'elles procurent. Il s'agit non seulement de résoudre les problèmes et démontrer les théorèmes, mais de le faire le plus simplement possible, ce qui relève directement d'un choix judicieux de la méthode. FGM formalise la distinction entre méthodes générales et méthodes particulières à l'œuvre depuis l'ouvrage de Lamé :

> L'Analyse et la Synthèse sont les seules méthodes générales ; mais par le fait même qu'elles s'appliquent à toutes les questions, il en résulte qu'elles ne dispensent point de chercher des méthodes particulières, des procédés spéciaux pour traiter rapidement certains groupes d'exercices [Marie 1896, p. ii].

FGM a manifestement construit sa liste de méthodes[20] à la manière indiquée par Lamé, c'est-à-dire en partant des questions et des solutions qui en sont connues, pour reconnaître les procédés communs employés pour une diversité de questions. Le chapitre sur les figures auxiliaires montre combien ce travail est mené de façon approfondie[21]. La première d'entre elles joue un rôle à part et mérite notre attention. Intitulée « constructions auxiliaires », elle ne participe pas, selon l'auteur, d'une véritable méthode, mais constitue un simple procédé, par ailleurs employé très fréquemment. Néanmoins FGM a introduit les « constructions

---

20 Les méthodes exposées, pour certaines déclinées en quelque sorte en sous-méthodes, sont :

– Analyse et synthèse
– Lieux géométriques
– Emploi des figures auxiliaires
– Transformation des figures
– Discussion
– Extension
– Méthode algébrique
– Maxima et minima

Nous reconnaissons certaines des méthodes déjà rencontrées plus haut. En revanche les maxima et minima apparaissent pour la première fois : nous leur consacrerons plus loin un paragraphe. La discussion et l'extension font en réalité suite à la résolution d'une question, respectivement pour en étudier les divers cas de possibilité, et pour envisager une reformulation plus générale de la propriété obtenue lorsque ses hypothèses se sont révélées surabondantes.

21 Elles ont été rangées en sous-groupes distincts dont voici la liste :

– Constructions auxiliaires
– Figures symétriques
– Composition ou décomposition
– Surfaces auxiliaires
– Volumes auxiliaires
– Projections ou sections

Les méthodes des figures auxiliaires sont illustrées notamment par la construction auxiliaires » dans la liste des méthodes, de sorte que tous les énoncés de l'ouvrage relèvent au moins d'une des méthodes qu'il décline[22]. C'est que « Parfois une seule ligne donne des rapports inattendus d'où dérive directement la solution » [Marie 1896, p. 57]. Ainsi, l'auteur intègre dans un ouvrage sur les méthodes des solutions particulières, attachées à un problème unique. Ce choix nous montre que son intérêt réside d'abord dans la simplicité des solutions et des démonstrations qu'il expose. Le recensement des méthodes permet d'agrandir le nombre de ses moyens, mais sans toutefois que les démarches méthodiques, au sens d'applicables à une classe étendue de questions, soient exclusivement retenues.

1.2.5. *Conclusion*

Nous avons montré l'affirmation progressive, dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire que nous avons présentés, de la notion de méthode particulière. D'abord formulée par Lamé, cette notion

---

d'un quadrilatère inscriptible, connaissant les quatre côtés, par la démonstration des théorèmes de Menelaüs et de Ceva par la construction d'une ligne auxiliaire, ou encore par le théorème de Desargues démontré au moyen d'une figure dans l'espace. Toutes ces méthodes, en-dehors de la première, se trouvent parmi les méthodes de Serret, avec un nom parfois différent, la méthode des figures symétriques correspondant à la méthode par duplication.

22 Parmi les exemples donnés, en voici un pour lequel l'auteur affirme que, bien qu'il pourrait suivre la méthode des lieux géométriques, il souhaite en exposer une « solution particulière très simple » :

«Étant données deux circonférences sécantes A et B, mener par l'un des points d'intersection E une sécante qui soit divisée par ce point dans un rapport donné $\frac{m}{n}$.

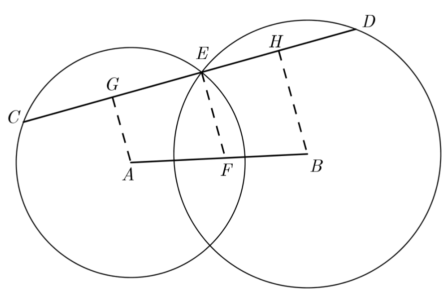


Figure de l'exemple de FGM.

Si l'on mène par le point E une perpendiculaire EF à GH, la ligne AB sera divisée dans le rapport donné, et le point F fera connaître la direction de FE ; donc il faut diviser AB dans le rapport $m : n$. Joindre le point F au point E, puis élever une perpendiculaire CD à la droite FE [Marie 1896, p. 58].»

Nous voyons que le tracé des lignes auxiliaires EF et AB donne accès à une solution simple du problème.

diffuse et se développe dans les ouvrages de l'enseignement préparatoire, où l'idée d'une analyse géométrique unique et universelle, sur le modèle de l'analyse algébrique, cède progressivement le pas à la reconnaissance d'une pluralité de méthodes particulières. De sorte que le programme de Lamé de mettre à jour ces méthodes particulières de manière à ce que la résolution de tout problème soit ramenée à trouver la méthode idoine semble pleinement réalisé à la fin du siècle dans l'ouvrage de Frère Gabriel Marie.

Par ailleurs, les méthodes présentées par les auteurs sont d'abord appliquées à la résolution des problèmes de construction géométrique, puis appliquées également à la démonstration des théorèmes.

1.3. *Trois méthodes particulières*

La revue que nous avons faite jusqu'ici du développement de la notion de méthode particulière au long de la période étudiée ne nous a pas permis de traiter suffisamment en détail certaines de ces méthodes dont l'importance nous paraît mériter une attention plus approfondie. La méthode des lieux géométriques illustre comment la question de la méthode amène les auteurs à adopter un regard nouveau sur un corpus de théorèmes déjà connus. La méthode par transformation des figures nous montrera comment les travaux des géomètres contemporains influencent la réflexion de nos auteurs sur les méthodes. Et enfin, la méthode des maxima et minima éclaire la façon dont la géométrie élémentaire, munie de méthodes appropriées, est susceptible de traiter des questions de géométrie infinitésimale qui semblaient devenues l'apanage du calcul algébrique.

1.3.1. *La méthode des lieux géométriques*

La méthode des lieux géométriques peut nous sembler remonter à l'Antiquité. D'ailleurs nous en avons mentionné la description en 1809 par Lhuilier dans une nouvelle restauration, en français, d'un ouvrage perdu, les *Lieux plans* d'Apollonius. Mais Lhuilier puis Lamé attirent l'attention sur l'efficacité de cette méthode pour résoudre les problèmes de construction, et elle acquière ainsi une visibilité nouvelle, particulièrement dans le cadre innovant du projet de Lamé de reconnaître dans toute solution l'expression d'une méthode. Nous avons vu que les auteurs de manuels lui confèrent une importance croissante au fil du siècle.

À la suite de Lamé, les ouvrages de Ritt et de Percin exposent la méthode des lieux géométriques. Puis, dans l'ouvrage de Serret, elle est comprise dans une méthode plus large, appelée méthode « par abstraction ou généralisation ». Amiot et Desvignes enfin la placent en tête de leur recension des méthodes. Voici la description qu'ils en donnent :

> Lorsque la résolution d'un problème ne dépend que de la détermination d'un point, son énoncé renferme deux conditions qui fixent la position de ce point. Si l'on fait abstraction de l'une de ces conditions, le point cherché peut prendre sur le plan de la figure une infinité de positions qui sont déterminées par l'autre condition, et dont l'ensemble forme un lieu géométrique du point. En considérant isolément, à son tour, la condition omise, on voit que le point inconnu décrirait sur le même plan un second lieu géométrique, relatif à cette condition; par conséquent, il se trouve à l'intersection de deux lieux géométriques [Amiot & Desvignes 1858, p. 6].

Cette description de la méthode des lieux géométriques prescrit la construction d'un lieu nouveau pour les besoins de la résolution d'un problème particulier, là où Ritt et Percin ne font que constater que le point cherché appartient à un lieu connu de par un théorème connu. Le problème suivant, traité par la trigonométrie dans l'*Examen* de Lamé [Barbin 2009b], illustre cette différence essentielle :

> Inscrire un triangle équilatéral ABC dans trois circonférences concentriques OA, OB, OC [Amiot & Desvignes 1858, p. 7].

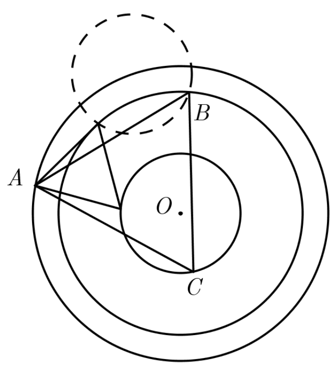


Figure 1. Problème de l'*Examen* de Lamé.

Le sommet A étant fixé sur l'une des circonférences, le point B doit appartenir à la circonférence OB. Pour obtenir un second lieu géométrique du point B, Amiot fait abstraction de cette condition. Le triangle équilatéral ABC est alors variable, et le point B décrit un second lieu géométrique, composé de deux circonférences. L'intersection de ce lieu avec la circonférence OB détermine quatre solutions du problème. Nous avons représenté deux d'entre elles.

Quand on sait que ce problème a été posé sans succès au concours général de 1814 pour les classes de mathématiques élémentaires, on mesure à quel point le fait de penser sa résolution par le moyen de cette méthode des lieux géométriques confère un avantage déterminant dans la résolution du problème.

FGM aussi considère que la méthode des lieux géométriques est de toute première importance : « Les Lieux géométriques sont si utiles, que nul ne regrettera les développements que nous avons donnés à leur recherche et à leur emploi » [Marie 1896, p. 4]. Pour en systématiser l'emploi, FGM établit une liste de lieux de référence[23]. Pour la première fois dans les descriptions de la méthode des lieux géométriques que nous avons rencontrées, une liste de lieux de référence est établie. Tous les lieux employés par la suite lorsque les questions de l'ouvrage sont résolues par cette méthode appartiennent à cette liste. Il est intéressant de remarquer que certains de ces lieux sont intégrés aux programmes de 1891 des enseignements aussi bien moderne que classique.

1.3.2. *La méthode par transformation des figures*

Si les lieux géométriques sont connus de longue date mais revisités ici en termes de méthode de résolution des problèmes, en revanche la transformation des figures est directement influencée par les travaux des géomètres du siècle.

La méthode par transformation des figures est, de l'avis de Serret, « l'une des plus importantes et des plus fécondes de la géométrie » au point d'affirmer qu'elle « constitue la véritable méthode en géométrie » [Serret 1855, p. 20]. S'il trouve la trace de cette méthode chez Cavalieri, Grégoire de Saint-Vincent, Pascal, Newton ou MacLaurin, il considère que

[23] – Lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux droites données égale une ligne donnée.

– Lieu des points dont les distances à deux droites sont dans un rapport donné.

– Lieu des points dont les distances à deux points donnés sont dans un rapport donné.

– Lieu des points d'où les droites menées d'un point à une droite ou à une circonférence sont divisés dans un rapport donné $m : n$.

– Lieu des points N d'où une droite OM, menée d'un point O, à une droite ou à une circonférence, est divisée en deux parties telles que le produit $OM \times ON$ est constant.

– Lieu des points dont la somme ou la différence des carrés des distances à deux points donnés égale une valeur donnée.

ce sont les géomètres de son siècle qui s'en sont particulièrement servi, Poncelet, Chasles et Dupin. Poncelet, par exemple, utilise la projection centrale pour ramener au cas plus élémentaire du cercle la démonstration de certaines propriétés des coniques [Poncelet 1822, p. 51].

Serret montre quant à lui comment la méthode par transformation permet de créer des propositions nouvelles. Il consacre un chapitre complet à la transformation par rayons vecteurs réciproques[24]. Serret donne à voir l'exemple spectaculaire de la transformation de la relation triviale entre trois points alignés. En choisissant le centre d'inversion extérieur à la droite qui porte les trois points, la transformée de la droite est un cercle passant par ce centre. Et les propriétés de cette transformation font immédiatement correspondre à la relation triviale $ac = ab + bc$ la nouvelle relation :

$$a'c'.ob' = a'b'.oc' + b'c'.oa'$$

C'est-à-dire que : « Dans un quadrilatère inscrit à une circonférence, le rec-

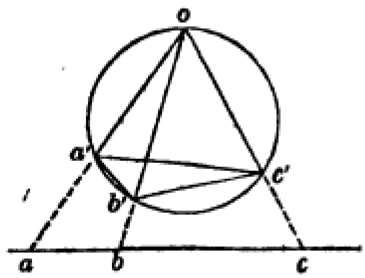


Figure 2. Application d'une inversion à trois points alignés [Serret 1855, p. 29].

tangle des diagonales est égal à la somme des rectangles des côtés opposés » [Serret 1855, p. 29]. Cette démonstration, frappante par sa simplicité, sera reprise par plusieurs auteurs de manuels qui traitent de l'inversion, et notamment par FGM. Lui aussi attache une importance de premier ordre à la méthode de transformation des figures :

> La Transformation des figures [...] est le moyen le plus puissant d'investigation que les Éléments de Géométrie puissent nous fournir pour découvrir de nouveaux théorèmes, ou pour trouver d'heureuses solutions [Marie 1896, p. iii].

24 Terme introduit par Liouville dans son *Journal* [Liouville 1847], et qui correspond à ce que l'on désigne quelques années plus tard, et encore aujourd'hui, par le terme d'inversion.

Prenons bien garde qu'une transformation n'est pas, chez FGM, un objet mathématique étudié en lui-même, comme cela sera le cas au siècle suivant. Une transformation est toujours conçue comme une relation particulière entre deux figures particulières. Précisément, cette méthode « consiste à remplacer une figure donnée par une figure plus simple, liée à la première par des relations de position et de grandeur » [Marie 1896, p. 84]. C'est une « modification » d'une figure primitive pour l'amener dans une situation plus favorable. L'auteur décline plusieurs transformations :

- Le déplacement parallèle ;
- La réduction et l'inclinaison des ordonnées d'une figure ;
- La similitude ;
- Le problème contraire ;
- L'inversion [Marie 1896, p. 84]

Nous avons déjà rencontré les trois dernières méthodes, la similitude et le problème contraire chez Lamé, l'inversion chez Serret. En revanche les deux premières nous semblent des innovations de l'auteur. Le déplacement parallèle est appliqué à des problèmes qui demandent de transformer un polygone donné en un triangle de même aire, ou de partager un polygone en parties de même aire. Il s'agit là de problèmes très classiques, dont la solution repose sur la proposition que l'aire d'un triangle ne varie pas lorsque son sommet se déplace sur une ligne parallèle à sa base. FGM érige en méthode la transformation qui consiste à remplacer un triangle par un autre en déplaçant son sommet parallèlement à sa base. Voici une application donnée de cette méthode :

> 189. Problème. Dans un triangle ABC, mener une parallèle à la base de manière que le rectangle inscrit correspondant ait une valeur donnée r^2 pour somme des carrés des deux côtés adjacents.

FGM transporte le sommet C en D de manière à obtenir un triangle rectangle ABD. La condition devient $EG^2+EH^2 = r^2$, c'est-à-dire que le point E appartient à la circonférence de centre A et de rayon r. Il trouve deux points E et F solution, le premier menant sur la figure à la construction du rectangle $MNPQ$ répondant au problème.

Nous voyons comment FGM se saisit d'une notion géométrique utilisée avec succès par les géomètres du début du siècle pour construire une catégorie de méthodes faisant se correspondre deux figures et leurs propriétés respectives, et qu'il appelle « transformation des figures ». Il y incorpore des méthodes déjà connues, et ajoute d'autres méthodes tout à fait originales comme la translation parallèle.

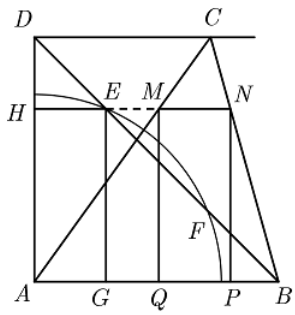


Figure 3. Solution du problème 189 [Marie 1896, p. 85].

1.3.3. *Les maxima et minima*

Le développement d'un intérêt pour les questions de maxima et de minima témoigne d'une réappropriation en géométrie élémentaire de questions qui avaient contribué à l'immense succès de l'analyse algébrique. Serret, dans son travail de réhabilitation des méthodes géométriques du passé, consacre deux chapitres de la deuxième partie de son ouvrage, sur les méthodes infinitésimales cette fois-ci, aux maxima et minima. Il reformule d'une manière strictement géométrique le principe de Fermat : « Si l'on prend une grandeur variable dans son état de maximum ou de minimum et dans un second état infiniment voisin du premier, les valeurs correspondantes de cette grandeur sont égales » [Serret 1855, p. 103]. De là, il résout un problème qui sera repris par FGM dans ses méthodes :

> Dans un segment donné d'une courbe quelconque, inscrire un rectangle d'aire maximum.

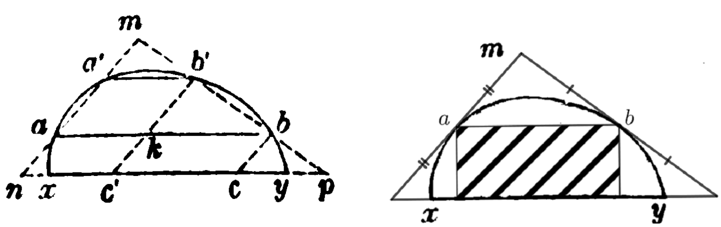


Figure 4. La figure de Serret [1855, p. 105], et la solution (figure reproduite par l'auteur).

Serret applique le principe ci-dessus et aboutit par des propositions de géométrie élémentaire à la conclusion que le côté *ab* du rectangle maximum est également éloigné de la base *xy* du segment et du point de concours des tangentes aux sommets a et b. Autre témoin de ce regain d'intérêt pour les méthodes infinitésimales d'avant le calcul différentiel, Duhamel publie pour l'Institut quelques années plus tard un *Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes* [Duhamel 1860].

Certains auteurs intègrent dans leurs ouvrages d'enseignement de la géométrie élémentaire ces questions de maxima et de minima. Adolphe Desboves, un auteur sur lequel nous allons bientôt revenir en détail, consacre la dernière partie d'un important recueil de problèmes à la détermination des maxima et minima[25]. Nous allons donner un exemple de la dernière de ces méthodes, dite « par les infiniment petits », qui montre l'intérêt de l'auteur pour la méthode infinitésimale en géométrie élémentaire, exposée dans la première partie de son ouvrage :

> On pourrait penser que la [méthode infinitésimale] ne devrait pas trouver place dans un ouvrage élémentaire. Mais je me suis assuré, par l'expérience d'un long enseignement, que, dans les limites où je l'ai renfermée, elle est très bien comprise et fort goûtée des élèves, qui en font souvent d'ingénieuses applications [Desboves 1880, p. iv].

Desboves s'appuie pour mettre en œuvre sa méthode des infiniment petits sur le théorème suivant :

> Y étant une fonction de la variable indépendante x, si, lorsque cette variable prend un accroissement positif h, la variation correspondante de Y est mise sous la forme d'une différence $k - l$ […] les maxima et minima de la fonction auront lieu quand la limite du rapport $\frac{k}{l}$ sera égale à l'unité [Desboves 1880, p. 117].

25 Il recense cinq méthodes propres à la résolution de ce type de problèmes [Desboves 1880, p. 398] :

– « Par la discussion d'un problème ordinaire de géométrie ». Une valeur arbitraire est attribuée à la grandeur dont on cherche les extrema. La discussion du problème met alors en évidence que cette grandeur doit être comprise entre certaines valeurs, qui en constituent le maximum et le minimum.

– « Par substitutions successives ».

– « Par la considération de valeurs fixes attribuées successivement à chacune des variables indépendantes ». Quand la grandeur géométrique dépend de plusieurs variables, on considère successivement chaque variable comme constante.

– « Par renversement ». Cette méthode ramène la recherche d'un maximum à celle d'un minimum et vice-versa.

– « Par les infiniment petits ».

Voici une application de ce théorème sur un problème très répandu dans les classes aujourd'hui[26] :

> Étant donnée une feuille de papier rectangulaire, on enlève des carrés égaux aux quatre coins [...] on demande quel doit être le côté des carrés pour que le volume de la boîte ainsi formée [en repliant les bords] soit le plus grand possible.

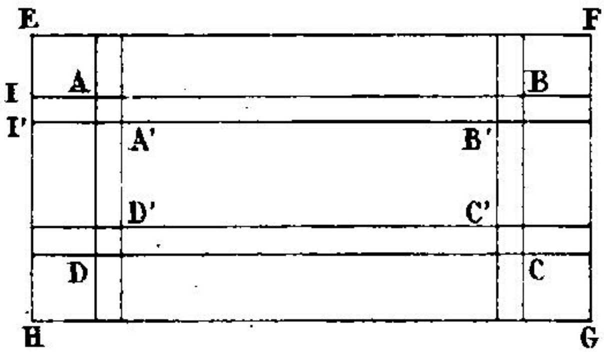


Figure 5. Le problème du volume maximal de la boîte chez Desboves [Desboves 1880, p. 423].

Nous retrouvons cet intérêt pour les méthodes infinitésimales en géométrie dans l'ouvrage de FGM, qui considère que les maxima et minima sont une « véritable nouveauté » propre à son ouvrage. Pourtant, ils figurent dans les ouvrages de Desboves et de Millet [Millet 1870], qu'il connaît, mais FGM considère que « le petit nombre d'exemples qu'on pourrait en trouver dans d'autres ouvrages ne constituent ni une méthode ni même un simple procédé susceptible de s'appliquer à quelques exercices » [Marie 1896, p. iv]. Conscient que d'ordinaire ce genre de problèmes sont traités par l'algèbre, « la méthode la plus générale et la plus féconde pour déterminer le *maximum* ou le *minimum* d'une quantité », il

26 La figure représente deux découpages proches possibles. Lorsqu'on passe de l'un à l'autre, le volume de la boîte diminue de la quantité $(AB \times AD - A'B' \times A'D') \times EI$ pour ce qui provient du rétrécissement de la base, et augmente de la quantité $A'B' \times A'D' \times II'$ pour ce qui provient de l'augmentation de la hauteur. En égalant la limite du rapport de ces deux quantités à 1, on trouve la solution du problème :

$$EI = \frac{AB \times AD}{2(AB + AD)}.$$

considère qu'on peut néanmoins résoudre « d'une manière très simple un grand nombre de telles questions par des moyens géométriques » [Marie 1896, p. 168]. Six méthodes sont décrites[27].

Cette réappropriation en géométrie élémentaire des problèmes de maxima et de minima témoigne de la vigueur d'une volonté de mettre en évidence la fécondité des méthodes géométriques.

1.4. *Recourir aux théories de la géométrie moderne*

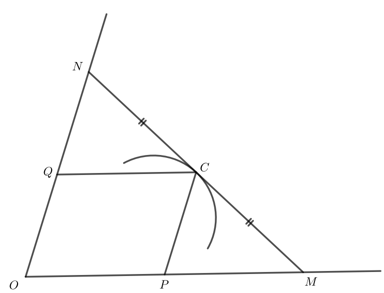
Pour faire face aux questions toujours plus difficiles des examens et concours, certains professeurs constatent que les théories de la géométrie élémentaire ne suffisent plus. Ils vont alors puiser dans les notions de la géométrie moderne pour concevoir de nouvelles méthodes, bien que celles-ci ne figurent pas aux programmes officiels.

---

27 Elles sont intitulées :

- Solution limite
- Emploi des principes
- Variable regardée comme constante
- Emploi de la tangente (à la moitié)
- Volume maximum et minimum
- Emploi de la tangente (au tiers)

La première et la troisième de ces méthodes correspondent à la première et la troisième méthode que Desboves décrit sur ce même sujet des maxima et minima. Pour la deuxième méthode, six principes sont déclinés sur lesquels s'appuyer, « de même qu'en algèbre ». Par exemple le premier d'entre eux énonce que « le produit de deux facteurs dont la somme est constante est maximum lorsque ces deux facteurs sont égaux entre eux ». L'emploi de la tangente évoque la méthode décrite par Serret, dont le théorème reproduit ci-dessus est cité. FGM établit que le parallélogramme inscrit dans un angle et une courbe est maximum lorsque la tangente au sommet situé sur la courbe est partagée en deux parties égales par les côtés de l'angle. Les deux dernières méthodes reprennent des principes précédents pour la géométrie dans l'espace.



Problème 360. Parallélogramme inscrit maximum entre deux droites et une courbe, figure réalisée à partir de [Marie 1896, p. 179].

Sur ce thème de la géométrie moderne, les ouvrages de Michel Chasles font référence. Ceux-ci poursuivent toutefois un objectif bien différent, sinon opposé, à la préparation aux examens et concours. Dès lors, trois auteurs s'emploient à la fin des années 1860 à reformuler les théories de la géométrie moderne sous forme de méthodes de résolution des problèmes adaptées aux besoins des élèves préparationnaires.

1.4.1. *Un besoin de nouvelles méthodes*

À la fin des années 1850 et au début des années 1860, plusieurs professeurs signalent le besoin de recourir aux théories de la géométrie moderne pour faire face aux questions posées aux élèves aux concours. Parmi eux, Alphonse Amiot termine l'introduction de ses *Solutions raisonnées* en regrettant que les théories de la géométrie moderne ne soient pas aux programmes :

> *Remarque générale.* En terminant ces observations sur la résolution des problèmes, nous ferons remarquer que nous sommes loin d'avoir épuisé la matière d'un sujet si étendu. Mais les principales théories sur lesquelles nos observations pourraient encore porter sont étrangères au programme des études, et par conséquent ne se trouvent pas dans les *Éléments de géométrie.* Que de problèmes de géométrie pure dont la solution devient impossible lorsqu'on se prive des immenses ressources que donnent les théorèmes sur les transversales, la théorie des pôles et des polaires, l'involution de Desargues, et l'homographie dont *M. Chasles* a enrichi la géométrie ! (Voir son *Traité de géométrie supérieure.*) [Amiot & Desvignes 1858, p. 18].

Charles Housel, professeur, et auteur d'un ouvrage auquel nous allons particulièrement nous intéresser, affirme que les théories de la géométrie moderne sont nécessaires aux candidats :

> On sait que les théories de l'ancienne Géométrie, telles que les expose le *Traité* de Legendre, sont devenues insuffisantes pour résoudre une foule de questions que les élèves sont appelés à traiter. Le but que nous nous proposons est d'exposer, avec les développements nécessaires, les méthodes modernes qui deviennent alors indispensables. Pour cela, nous n'avons pu mieux faire que de prendre pour base de notre travail le *Traité de Géométrie supérieure* de M. Chasles, en cherchant à vulgariser cet ouvrage, si important pour la science, mais qui n'a pas été écrit en vue des examens et des concours [Housel 1865, p. 3].

Rouché et Comberousse, enfin, considèrent que « la Géométrie [...] a regagné sur l'analyse le terrain perdu » [Rouché & Comberousse 1866, p. xiii], mais ils déplorent que :

> Les magnifiques découvertes de la Géométrie moderne n'ont pas pénétré dans l'enseignement : délaissées par les Programmes, elles n'occupent pas dans

la série des études mathématiques la place qui leur est due [Rouché & Comberousse 1866, p. xiv].

Dans les faits, de premières notions de géométrie moderne sont enseignées dans les Lycées depuis le début du siècle, et l'on trouve par exemple dans le *Cours de Géométrie élémentaire* de Vincent, dès la deuxième édition de 1832, des rudiments sur les notions de transversale, de centre de similitude de deux cercles, de division harmonique, de quadrilatère complet, de pôle et de polaire par rapport à un angle, d'axes radicaux[28].

Autre attestation de l'enseignement des notions de géométrie moderne en classes préparatoires, ce commentaire à une solution du sujet posé en 1866 au concours général qui recourt à la notion de faisceau harmonique, publié dans les *Nouvelles Annales* par son rédacteur Eugène Prouhet :

> On nous dit, mais nous avons peine à le croire, que cette copie a été écartée par une fin de non-recevoir, comme ne s'appuyant pas sur *une méthode classique*. Cela nous surprend d'autant plus qu'il y a nombre d'années que tous les professeurs enseignent les propriétés de la division harmonique et des faisceaux harmoniques, en sorte qu'il y a bien peu d'élèves qui ne les connaissent. Écarterait-on une copie où l'on s'appuierait sur la théorie des transversales ? Cependant il n'y a rien de plus classique, quoique les programmes n'en parlent pas [Grossouvres 1866].

Les notions de géométrie moderne sont donc enseignées malgré leur absence des programmes officiels, mais dans les ouvrages d'enseignement, elles sont confinées dans des appendices ou de courts chapitres superficiels. De ce point de vue, l'initiative la plus importante est sans doute due à Rouché et Comberousse dont le titre complet du *Traité* de 1866 est : *Traité de Géométrie élémentaire, conforme aux programmes officiels, renfermant un très grand nombre d'exercices et plusieurs appendices consacrés à l'exposition des principales méthodes de la géométrie moderne.* Ils font suivre le troisième Livre portant sur les figures semblables d'un appendice présenté comme « une sorte de préparation à la lecture de la Géométrie supérieure de Chasles »[29] [Rouché & Comberousse 1866, p. xv]. Ils y exposent « plusieurs théories qui sont d'un grand secours dans la résolution

28 Deux autres ouvrages, des géomètres Lucien Bergery et Étienne Bobillier, traitent avec davantage d'étendue ces notions, mais ils ne s'adressent pas au public des classes préparatoires [Moussard 2015, p. 93-107].

29 Sont traités sur une cinquantaine de pages le principe des signes, le rapport anharmonique, les triangles homologiques, l'hexagone de Pascal, les proportions harmoniques, le quadrilatère complet, le pôle et la polaire dans le cercle, la méthodes

des problèmes, et dont quelques-unes sont même de puissantes méthodes d'investigation » [Rouché & Comberousse 1866, p. 200].

Nous lisons dans l'introduction à l'ouvrage la difficulté qu'éprouvent les auteurs face aux écarts entre les programmes officiels et les exigences liées aux examens et concours :

> Il y a aujourd'hui deux manières d'écrire un livre destiné aux études : on peut se restreindre aux Programmes officiels et n'en pas franchir le cadre ; on peut aussi [...] aller au delà et essayer de les compléter. Pour appliquer une science, il ne suffit pas d'en connaître quelques parties ; il faut être familiarisé avec toutes ses méthodes, être maître de l'ensemble. [...] Ne peut-on apprendre un programme d'examen et essayer en même temps de comprendre la portée de la science que l'on étudie, en prenant une connaissance rapide, une vue générale de ses principales méthodes ? Telle est la pensée qui nous a guidés dans la composition de cet ouvrage [Rouché & Comberousse 1866, p. xiv].

Pour dépasser les difficultés signalées par Rouché et Comberousse, plusieurs auteurs vont rédiger des ouvrages exclusivement consacrés aux méthodes de la géométrie moderne. Ils se réfèrent largement aux ouvrages de Michel Chasles. Mais le projet de ce dernier d'élaborer une méthode uniforme de démonstration en géométrie pure ne correspond pas aux besoins des auteurs de munir leur lecteur de moyens rapides et efficaces pour résoudre des problèmes.

1.4.2. *Le Traité de Chasles : une méthode uniforme de démonstration*

Nous avons pu remarquer dans les citations précédentes que leurs auteurs se réfèrent au sujet de la géométrie moderne à Michel Chasles. Éminent géomètre français, polytechnicien et pendant un temps professeur à l'École polytechnique, titulaire de la chaire de géométrie supérieure créée pour lui à la faculté des sciences de Paris en 1846, celui-ci a rédigé en 1837 puis en 1852 deux ouvrages de géométrie qui s'attachent l'un et l'autre à montrer que la géométrie pure dispose désormais de moyens comparables à ceux de l'analyse :

> Aussi concluons-nous de notre aperçu, que les ressources puissantes que la Géométrie a acquises depuis une trentaine d'années sont comparables, sous plusieurs rapports, aux méthodes analytiques, avec lesquelles cette science peut rivaliser désormais, sans désavantage, dans un ordre très-étendu de questions [Chasles 1837, p. 2].

---

des polaires réciproques, les figures homothétiques, les axes radicaux, la transformation par rayons vecteurs réciproques, les transversales. Le plus souvent, seules les premières propriétés de ces notions sont exposées, et appliquées à un nombre restreint de propositions.

Le premier de ces ouvrages, l'*Aperçu historique sur l'origine et la développement des méthodes en géométrie*, s'emploie, à travers un travail de recensement historique, à dégager des principes généraux de l'apparent foisonnement hétéroclite des méthodes récentes de la géométrie pure. L'ouvrage développe tout particulièrement les « théories récentes de la géométrie moderne », c'est-à-dire celles exposées dans les ouvrages de Monge, Carnot, Servois, Dupin, Hachette, Brianchon, ou encore Poncelet. L'ambition de l'auteur est de relier entre elles ces théories afin de mettre en évidence les principes généraux dont elles dépendent. Il regroupe ainsi les « ressources puissantes » que contiennent ces ouvrages en quatre divisions : la théorie des transversales, la transformation des figures, la théorie des polaires réciproques et la projection stéréographique. Chasles s'emploie à repérer, a posteriori et pour les instituer, des principes communs dans des travaux mathématiques pourtant divers et variés à tous points de vue. Nous relevons dans le discours de Chasles les caractéristiques qui font selon lui la valeur des théories de la « géométrie moderne » et les rendent dignes de concourir avec l'analyse algébrique, au point de les désigner par le terme de « méthodes » : leur généralité, leur fécondité et la facilité qu'elles procurent [Moussard 2015, p. 188-211].

Chasles publie quinze ans après l'*Aperçu historique* un *Traité de géométrie supérieure* rédigé conformément aux cours donnés à la Sorbonne à la chaire de géométrie supérieure récemment créée. Ce traité sera suivi en 1865 d'un *Traité des sections coniques* qui en constitue la suite. Déjà dans son *Aperçu*, Chasles n'était pas pleinement satisfait par le classement opéré sur les méthodes car ne réalisant pas complètement l'objectif de faire dépendre celles-ci d'un nombre restreint de principes. Au contraire, le *Traité de géométrie supérieure* organise les propositions de géométrie de façon déductive en un « corps de doctrine ». Il se distingue donc nettement de l'ouvrage précédent par l'« uniformité de la méthode de démonstration » [Chasles 1852, p. I]. Cette volonté essentielle d'uniformité amène Chasles à abandonner certaines méthodes pourtant extrêmement fécondes, les méthodes de transformation, largement exposées dans l'*Aperçu* :

> En se privant du secours de ces méthodes, on se crée parfois des difficultés; mais ce n'est pas sans utilité, parce que l'obligation de démontrer par les ressources naturelles du sujet certaines propositions qui auraient pu se conclure par des méthodes de transformation, met toujours sur la voie de beaucoup d'autres vérités qui accroissent souvent d'une manière inattendue et fort propice le sujet que l'on traite [Chasles 1852, p. 434].

Les méthodes de transformation sont reléguées à la fin de l'ouvrage et remplacées par des démonstrations directes, appuyées sur un jeu de notions géométriques, en l'occurrence le rapport anharmonique, l'involution et l'homographie.

Prenons le temps d'exposer ces notions pour mesurer à la fois l'ampleur du travail de réécriture de la géométrie opéré et la rigueur et l'efficacité avec lesquelles ce travail est réalisé. Le rapport anharmonique de quatre points a, b, c, d est défini par le birapport $(ac/ad)/(bc/bd)$. On peut définir également le rapport anharmonique de quatre droites concourantes oa, ob, oc, od comme étant égal au rapport anharmonique des quatre points alignés a, b, c, d. Chasles introduit ensuite la notion de division homographique : « Quand deux droites sont divisées en des points qui se correspondent un à un et tellement que le rapport anharmonique de quatre points quelconques de l'une soit égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants de l'autre, nous dirons que les points de division forment deux divisions homographiques » [Chasles 1852, p. 67].

Par exemple, étant données deux tangentes à un cercle, les autres tangentes font correspondre aux points a, b, etc. de la première droite les points a', b', etc. de la deuxième droite. Chasles démontre que ces divisions sont homographiques. Là aussi la notion de division homographique s'étend à deux faisceaux de droites se correspondant une à une. Ici, en menant d'un point extérieur P des droites dans toutes les directions, on obtient un faisceau de droites sur lequel sont définies deux divisions homographiques, induites respectivement par les divisions des points de chacune des droites ab et $a'b'$. Venons-en à la notion d'involution. Étant donnés deux couples de points sur une droite, les deux points d'un même couple étant considérés comme étant chacun le « conjugué » de l'autre, alors à tout point c de cette droite correspond un unique point conjugué c' tel que le rapport anharmonique de quatre de ces six points soit égal au rapport anharmonique de leurs quatre conjugués. Sur notre figure, les couples de droites conjuguées $(Pa; Pb')$ et $(Pb; Pa')$ définissent une involution, pour laquelle Chasles démontre que les deux tangentes issues de P sont conjuguées. D'où le théorème :

> Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les deux couples de droites menées d'un même point à ses sommets opposés, et les deux tangentes menées du même point à la circonférence du cercle, forment un faisceau en involution [Chasles 1852, p. 471].

Voyons maintenant comment Chasles utilise les trois notions de rapport anharmonique, d'homographie et d'involution pour démontrer des théorèmes et établir les propriétés des figures. Chasles a prouvé qu'un faisceau en involution possède deux points doubles, c'est-à-dire qui sont leur

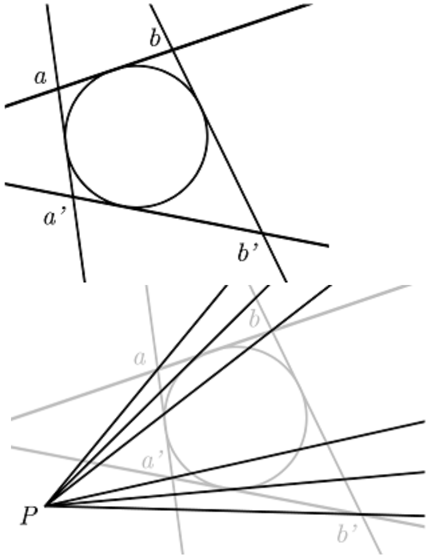


Figure 6. Un quadrilatère inscrit et ses tangentes après [Chasles 1852, p. 471].

propre conjugué, et qu'ils sont les deux points qui divisent harmoniquement les couples de points homologues. Si l'on considère un quadrilatère traversé par une sécante L, et la droite L' qui relie les conjugués harmoniques de chacun des points d'intersection de cette transversale sur les diagonales, les droites L et L' sont les points doubles de l'involution.

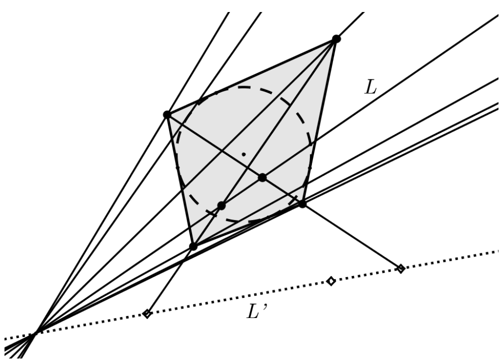


Figure 7. Un quadrilatère inscrit et ses diagonales après [Chasles 1852, p. 488].

Par conséquent elles partagent harmoniquement le couple des tangentes au cercle. Une propriété des polaires permet alors d'en déduire que le pôle de la droite L par rapport au cercle appartient à la droite L'. Dans le cas particulier où la droite L est la droite de l'infini, son pôle est le centre du cercle, et les conjugués harmoniques de ses points d'intersection avec les diagonales sont leurs milieux, d'où le théorème :

> Quand un quadrilatère est circonscrit à un cercle, les milieux des deux diagonales et le centre du cercle sont sur une même droite [Chasles 1852, p. 488].

Nous voyons que, pour satisfaire son exigence d'une méthode uniforme de démonstration, Chasles organise le *Traité de géométrie supérieure* du général au particulier. Pour ce faire, il traite d'abord les théories spéciales que sont le rapport anharmonique, l'homographie et l'involution, aussi appelés « principes », parce que c'est en employant ces notions qu'il peut démontrer des théorèmes extrêmement généraux, théorèmes qu'il applique ensuite à la démonstration des propriétés particulières des figures, comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent. L'uniformité du procédé de démonstration est rendue possible par la grande généralité des théories spéciales, généralité qui constitue un objectif majeur des travaux de Chasles, et déjà à l'œuvre dans l'*Aperçu* [Chemla 2016].

1.4.3. *Montrer l'efficacité des notions de la géométrie moderne*

Mais l'ouvrage de Chasles ne répond pas immédiatement à un élève en quête de moyens pour résoudre une question. C'est que Chasles conçoit les énoncés sur les figures géométriques comme autant de corollaires d'énoncés plus généraux, ainsi que nous venons de le voir. La question de la résolution d'une question particulière est ramenée à une généralisation de son énoncé, pour le saisir dans le cadre des théories spéciales, où il va se présenter comme un corollaire d'un théorème connu.

Bien sûr, cette conception n'est pas satisfaisante pour les professeurs et leurs élèves, car ces derniers n'ont pas le temps de s'approprier le *Traité* de Chasles, dont le contenu est d'ailleurs étranger aux programmes officiels. Certains professeurs vont alors adapter la présentation des notions de la géométrie moderne aux besoins des élèves pour la résolution des questions posées aux examens et concours.

Entre 1865 et 1870, trois auteurs rédigent chacun un ouvrage entièrement dédié à ces théories, en lien fort avec la résolution des problèmes. Ce qui intéresse avant tout ces professeurs, c'est de fournir aux élèves des moyens de résolution des questions posées aux examens et concours. Cette intention est déterminante dans la présentation et l'organisation des théories. D'autre part, plusieurs éléments de contexte historique paraissent favorables à la publication de tels ouvrages. Au plan institutionnel, l'autoritaire réforme (voir § 2.3) de la bifurcation a été abandonnée, ce qui permet davantage de souplesse vis à vis des programmes officiels, et Briot donne depuis quelques années des leçons à l'École normale supérieure qui traitent, analytiquement toutefois, des notions de géométrie moderne. Au plan éditorial, le *Traité des propriétés projectives des figures* de Poncelet vient d'être réédité en même temps que paraît le deuxième volume, consacré aux courbes et surfaces du second ordre, du *Traité de géométrie supérieure* de Chasles [Chasles 1865].

Charles Housel, le premier de nos trois auteurs, est admis à l'École normale supérieure en 1837[30]. Il écrit son *Introduction à la géométrie supérieure* [Housel 1865] pour enseigner les méthodes de la géométrie moderne aux élèves préparationnaires, auxquels les théories de l'ancienne géométrie ne suffisent plus. Il déclare prendre pour base de son travail le *Traité de géométrie supérieure de Chasles*, dont il a d'ailleurs repris le titre, ce qui peut surprendre tant les choix qu'il opère sont contraires à ceux de Chasles dans l'exposition des théories. Les chapitres successifs sont principalement articulés autour des notions de géométrie moderne[31].

---

30 Mais la quitte l'année suivante et ne sera jamais agrégé. Il a été régent de physique à Chartres et à Nogent-le-Rotrou, répétiteur et « professeur libre » à Paris. Il publie avec le directeur de l'institution Sainte-Barbe, Justin Bourget, trois manuels d'arithmétique, de géométrie élémentaire, et de géométrie analytique.

31 En voici le sommaire :

Chap. I	Transversales
Chap. II	Rapport harmonique, Polaires
Chap. III	Polaires dans le cercle et les coniques
Chap. IV	Puissance des points, Axes radicaux
Chap. V	Rapport anharmonique, Division homographique
Chap. VI	Théorie de l'involution
Chap. VII	Applications de l'involution
Chap. VIII	Centres de similitudes ou d'homothétie
Chap. IX	Contacts d'un cercle avec trois autres
Chap. X	Théorèmes et problèmes sur le triangles
Chap. XI	Systèmes de points en ligne droite
Chap. XII	Droites mobiles, Triangles homologiques
Chap. XIII	Figures homologiques
Chap. XIV	Figures homographiques et corrélatives
Chap. XV	Théorème de Pascal etc.
Chap. XVI	Théorèmes de Newton et de Carnot
Chap. XVII	Autres propriétés des coniques
Chap. XVIII	Construction des coniques
Chap. XIX	Rotation des figures

Les notions de rapport anharmonique, d'homographie et d'involution, principielles dans l'ouvrage de Chasles, sont présentées sur le même plan que d'autre notions de géométrie moderne comme les transversales, les polaires, les axes radicaux, les centre de similitude. Housel n'a pas repris la structure déductive et uniforme du *Traité.* Il s'en explique en écrivant que si « un grand monument a besoin d'unité, [...] un élève, aux prises avec une question difficile, frappe à toutes les portes pour demander une solution » [Housel 1865, p. iii]. Les théories de la géométrie moderne sont pour lui autant de portes, dont il montre les nombreuses applications. Il en établit les premières propriétés et démontre de premiers théorèmes sans s'occuper de construire un corpus homogène. C'est un ouvrage visant à initier, c'est-à-dire à présenter rapidement les premiers résultats de ces théories et à en donner le goût au lecteur, en démontrant des énoncés variés sans chercher à établir de lien entre eux. Certains chapitres sont entièrement consacrés à la résolution de problèmes et à la démonstration de théorèmes.

L'ouvrage ne recherche pas non plus l'uniformité au point de vue des contenus. Même si les notions présentées sont principalement celles de la géométrie moderne, l'auteur recourt également au calcul algébrique sur les coordonnées, dans le chapitre sur l'homographie, à la manière de Briot [Briot & Bouquet 1864], et même aux méthodes de la traditionnelle géométrie euclidienne dans le chapitre IX sur le problème classique des trois cercles.

Enfin, et pour compléter le tableau des différences essentielles entre cet ouvrage et le *Traité* de Chasles, donnons en exemple la démonstration du théorème de Pascal, qui affirme que les points d'intersection des côtés opposés d'un hexagone inscrit dans une conique sont alignés. Housel procède du particulier au général en démontrant le théorème d'abord dans le cas d'un cercle, par une triple application du théorème de Menelaüs au triangle PQR, puis en étend le résultat par projection à toutes les coniques [Housel 1865, p. 204]. Ce théorème et l'idée de projection sont des ressources intéressantes pour un élève aux prises avec un problème de géométrie.

Au contraire, Chasles démontre ce théorème en s'appuyant sur un théorème général établi sur les faisceaux homographiques[32].

---

32 L'énoncé de ce théorème est le suivant :

«Étant donnés deux faisceaux homographiques, si l'on prend dans le premier deux rayons quelconques A, B, et dans le second, les deux rayons homologues A', B', la droite qui joindra le point d'intersection des deux rayons non homologues A, B' au point d'intersection des deux autres B, A' passera toujours par un même point fixe [Chasles 1852, p. 75].»

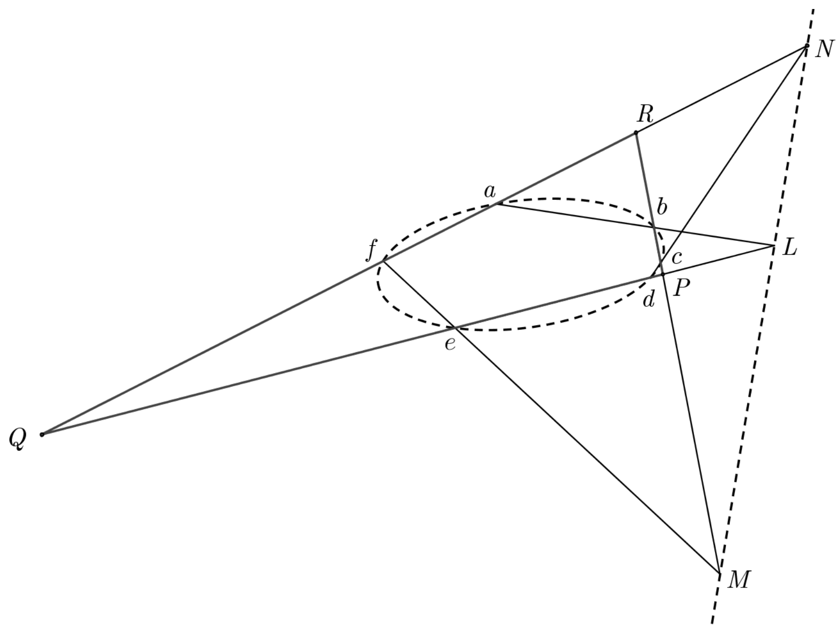


Figure 8. Le théorème de Pascal d'après le traitement de Housel.

En conclusion, Housel a pris l'initiative de rédiger un important ouvrage de géométrie moderne consacré spécifiquement aux élèves préparationnaires. L'objectif d'en faire un ouvrage utile et accessible pour la préparation des concours et examens l'amène à abandonner la structure du *Traité* de Chasles, dont il se réclame pourtant, ainsi que l'uniformité des contenus et de la méthode de démonstration, au profit d'une collection de propositions censée illustrer la fécondité des théories de la géométrie moderne dans la résolution des questions de géométrie.

Deux autres ouvrages sont publiés en 1870 qui proposent de présenter aux élèves préparationnaires les méthodes de la géométrie moderne. Ceux-ci font suivre l'exposé des méthodes par de nombreuses applications à la résolution des problèmes et la démonstration des théorèmes.

Chasles considère les faisceaux $a(b,c,e,f)$ et $d(b,c,e,f)$. La propriété fondamentale des coniques qui ouvre le *Traité des sections coniques* [Chasles 1865] établit que ces deux faisceaux ont des rapports anharmonique égaux. De là, les faisceaux $a(b,c,e,f)$ et $d(c,b,f,e)$ ont immédiatement des rapports anharmoniques égaux. L'application de la propriété ci-dessus établit que les droites bc, ef et la droite qui joint l'intersection des droites af et dc avec l'intersection des droites ab et de sont concourantes. C'est-à-dire que les points M, N et L sont alignés.

Un même énoncé est fréquemment prouvé de plusieurs manières différentes au fil des pages, un choix particulièrement original[33].

Luc Alphonse Millet (1842-1877), ancien élève de l'École normale supérieure, est agrégé en 1865[34]. Dans les chapitres successifs de son ouvrage *Principales méthodes de géométrie moderne*, lithographié et sans doute peu diffusé, il donne de nombreuses applications à la résolution de problèmes et à la démonstration de théorèmes, en particulier des énoncés du concours général. Il signale dans l'avertissement des emprunts faits à Paul Serret et au *Traité de géométrie élémentaire* de Rouché et Comberousse. Les titres des chapitres, comme celui de l'ouvrage, mettent en avant la notion de méthode[35]. Il traite de nombreuses notions déjà rencontrées jusqu'ici. Nous allons commenter deux intitulés de chapitre en particulier, ce qui nous permettra de relever certaines caractéristiques de l'ouvrage de Millet.

La méthode de transformation par les polaires réciproques, au chapitre v, est présentée dans le cadre de polygones dont les côtés de l'un sont les polaires des sommets de l'autre par rapport à un cercle donné. Les premières propriétés de cette transformation permettent à Millet de fabriquer des théorèmes à partir de théorèmes connus. Par exemple, « les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point » donne, dans la figure réciproque :

> Si, d'un point pris dans le plan d'un triangle, on mène des droites aux trois sommets, les perpendiculaires à ces droites, élevées par le point fixe, vont rencontrer les côtés opposés aux trois sommets, respectivement en trois points en ligne droite [Millet 1870, p. 79].

---

33 Et à l'image des dix solutions que Michel Chasles a publiées au problème qu'il avait lui-même posé au concours général en 1851 [Chasles 1885].

34 Professeur en classe de mathématiques élémentaires au Lycée de Laval, puis de Troyes, et enfin de Besançon, mais jamais affecté en mathématiques spéciales, sans doute à cause de la gêne occasionnée par sa jambe amputée [Brasseur 2012]. Cette carrière entièrement effectuée en mathématiques élémentaires, où il enseigne la géométrie élémentaire et non la géométrie analytique, peut expliquer qu'il se soit particulièrement intéressé aux méthodes de la géométrie moderne.

35 En voici le sommaire :

Chap. i	Méthode des transversales
Chap. ii	Division anharmonique et faisceaux homographiques. Division harmonique
Chap. iii et iv	Pôles et polaires dans le cercle
Chap. v	Méthode de transformation par les polaires réciproques
Chap. vi	Méthode des figures semblables, et des figures égales
Chap. vii et viii	Figures inverses. Méthode de transformation par rayons vecteurs réciproques
Chap. ix et x	Propriétés projectives des figures
Chap. xi	Méthode géométrique de Fermat pour la recherche des maxima et minima

Ce procédé souligne comment ces théories de la géométrie moderne permettent de créer de nouveaux théorèmes à partir de théorèmes connus. Dans le chapitre IX sur les propriétés projectives des figures, à peine les premières propriétés établies, Millet formule des méthodes, par exemple pour démontrer que des droites AA', BB', CC', DD' sont concourantes en un point O :

> Méthode à suivre. On considère le point O comme défini par l'intersection des deux droites AA' et BB' et on transporte le point O à l'infini [...] il suffira de prouver alors que cc', dd', projections perspectives de CC', DD' sont parallèles à aa', bb' [Millet 1870, p. 172].

Cette méthode est appliquée à la démonstration des théorèmes de Pascal et de Desargues. Elle est employée également à la résolution de problèmes, comme par exemple :

> Étant données deux droites SA, SB et un point O, on mène deux sécantes OMN, OPQ et on joint MQ, NP, trouver le lieu des points d'intersection H de ces deux dernières droites.

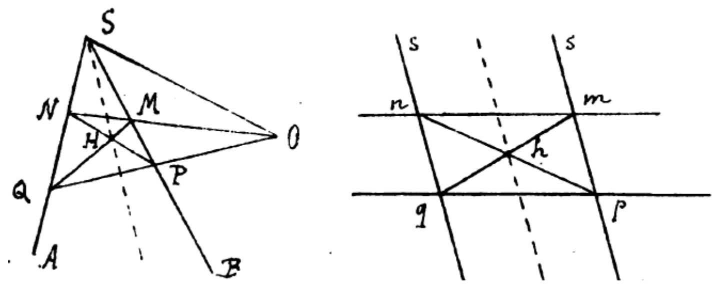


Figure 9. Détermination d'un lieu de points [Millet 1870, p. 184].

La droite SO est envoyée à l'infini, de sorte que le problème est ramené à la recherche du lieu des centres des parallélogrammes construits sur deux droites parallèles données. Nous voyons à quel point l'auteur est soucieux de fournir des méthodes à son lecteur pour répondre aux questions de géométrie.

Millet se restreint dans son ouvrage à la droite et au cercle, montrant par là son intention d'un exposé didactique des méthodes, davantage que l'établissement de résultats étendus et généraux. Il ne se réfère pas à Chasles, et intègre de nombreuses contributions de Carnot, Lamé, Poncelet et encore Serret. Certains énoncés sont suivis de plusieurs démonstrations à la suite, ce qui constitue une présentation tout à fait originale qui souligne encore l'intérêt majeur porté aux méthodes. Ainsi du théorème suivant qui avait été proposé au concours général :

> Étant donnés deux cercles qui ne se touchent pas [...] de chaque point M de l'un d'eux, on mène deux droites passant par les centres de similitude S et S' des deux cercles, ces droites rencontrent chacune le second cercle en deux points, on joint ces deux points deux à deux en croix, on demande de démontrer que, des deux droites ainsi obtenues, l'une est le diamètre du second cercle, l'autre passe par un point fixe.

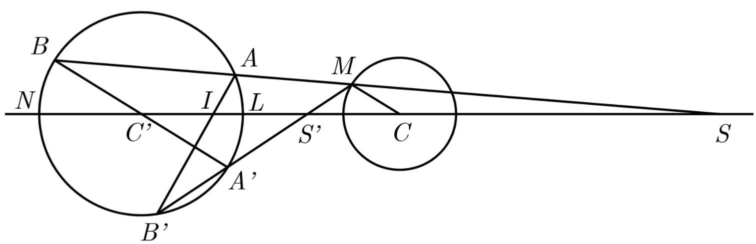


Figure 10. Solution d'un problème posé au concours général [Millet 1870, p. 62].

Millet expose quatre solutions, faisant successivement appel aux propriétés des centres de similitude de deux cercles, aux propriétés des transversales, aux propriétés des faisceaux homographiques, et enfin aux pôles et aux axes radicaux.

Adolphe Desboves[36] (1818-1888) publie en 1880[37] des *Questions de géométrie : méthodes et solutions, avec un exposé des principales théories et de nombreux exercices proposés*, traitées par des méthodes purement géométriques. Il veut « habituer les jeunes gens à bien enchaîner leurs idées, et à suivre, dans toutes ses parties, un raisonnement continu ». C'est que « la géométrie est la science du raisonnement par excellence » et les exercices rendent « leur intelligence plus lucide et plus ferme ». La géométrie est aussi « la partie des Mathématiques la plus propre à faire naître le goût des recherches et à éveiller l'esprit d'invention ». Ainsi, Desboves propose d'enseigner

36 Normalien, agrégé en 1843, docteur en 1848, et professeur à Paris au Lycée Condorcet, rebaptisé Bonaparte puis Fontanes pendant sa période d'exercice. Il publie des travaux de recherche en géométrie, et plusieurs recueils de *Questions*, de géométrie, d'algèbre et de trigonométrie, à destination des candidats aux Écoles.

37 Il s'agit d'une troisième édition, la première remontant à 1870.

d'abord la géométrie élémentaire d'Euclide et de Legendre avec laquelle « l'intelligence est d'autant mieux tenue en haleine que ses ressources sont plus restreintes », et de n'enseigner qu'ensuite les « méthodes générales qui ont renouvelé la Géométrie », afin que les élèves « en sentent d'autant mieux le prix, [qu'ils] résolvent, à première vue, les questions dont la solution leur avait coûté auparavant le plus d'efforts. La méthode d'inversion et la méthode infinitésimale sont celles dont ils apprécient le mieux l'élégance et la fécondité ».

L'ouvrage est composé de deux parties. La première présente les théories, essentiellement les théories de la géométrie moderne dont il veut montrer la fécondité, partie qui sera enrichie dans la deuxième édition de 1875, et à nouveau dans la troisième de 1880 à laquelle nous nous référerons. La deuxième partie propose de nombreux exercices, regroupés en quatre groupes : théorèmes, lieux géométriques, problèmes, et détermination de maxima et minima. Cette deuxième partie met en application les théories exposées dans la première, et l'auteur donne à plusieurs reprises différentes solutions à une même question, se montrant par là attaché à la diversité des méthodes de démonstrations. Desboves indique les sources variées auxquelles il a puisé ses questions, parmi lesquelle dix-sept sujets du concours général [Moussard 2015, p. 421].

La première partie sur les théories met en évidence plusieurs situations où des propositions sont inventées à partir de propositions connues. Dans l'exposé des théories[38], Desboves s'en tient à chaque fois à quelques théorèmes principaux, et à leurs premières applications. Par exemple, pour la théorie des transversales, il expose les théorèmes dits aujourd'hui de Menelaüs et de Ceva, et démontre en application le théorème de Pascal.

38 Voici le sommaire de cette première partie :

Chap. I	Théorie des transversales
Chap. II	Division harmonique d'une droite. Faisceaux harmoniques. Pôle et Polaire par rapport à deux droites, [...] à deux plans
Chap. III	Pôle et Polaires dans le cercle, [...] la sphère
Chap. IV	Emploi des signes + et − en géométrie [...]
Chap. V	Axes et plans radicaux
Chap. VI	Propriétés générales des figures homothétiques [...]
Chap. VII	Propriétés générales des figures inverses [...]
Chap. VIII	Projection orthogonale. Perspective ou projection conique
Chap. IX	Propriétés du rapport anharmonique
Chap. X	Propriétés de la division homographique. Faisceaux homographiques. Propriétés de l'Involution
Chap. XI	Propriétés des figures Polaires Réciproques
Chap. XII	Principes élémentaires de géométrie infinitésimale. Détermination de la tangente à quelques courbes [...] Maxima et minima
Chap. XIII	Théorèmes sur le déplacement des figures

Plus loin, les premiers résultats de la théorie des pôles et des polaires permettent d'établir le théorème de Brianchon.

Dans la deuxième partie, Desboves montre comment les théories exposées dans la première permettent de résoudre des questions choisies, classées en théorèmes, lieux, problèmes et maxima et minima. S'il s'emploie à décrire à chaque fois la méthode à suivre, relevons que contrairement à ce que nous avons observé chez d'autres auteurs plus haut dans ce texte, Desboves n'est pas convaincu de la pertinence d'une formulation de règles pour résoudre les questions, et son commentaire rappelle les mots de Rouché et Comberousse :

> C'est souvent le choix plus ou moins heureux des lignes auxiliaires qui conduit à une démonstration plus ou moins rapide d'un théorème. On ne peut donner aucune règle générale à cet égard [...] On pourrait faire [bien des] observations de détail, mais c'est surtout en étudiant avec soin les procédés variés de démonstration suivis dans un grand nombre de théorèmes que les élèves pourront acquérir de l'habileté [Desboves 1880, p. 142].

Signalons toutefois que dans la partie sur les problèmes de construction, plusieurs méthodes particulières sont décrites : une méthode qualifiée de générale, la méthode des lieux géométriques, et trois autres qualifiées de particulières, la méthode par renversement (la méthode inverse de Lamé), la méthode des figures symétriques (la méthode par duplication de Serret) et la méthode des figures semblables. Enfin, voici un énoncé du Concours donné par Desboves avec quatre solutions différentes :

> Étant donné un cercle dont le centre est O, et un point P, par ce point on mène deux sécantes PAB, $PA'B'$, et on circonscrit un cercle à chacun des triangles PAA', PBB' (fig. 144) ; on demande le lieu du second point d'intersection M des deux derniers cercles [Desboves 1880, p. 284].

La première démonstration utilise la propriété de l'angle inscrit, la deuxième la notion de polaire, la troisième les axes radicaux et la quatrième l'inversion.

Nous avons recensé trois ouvrages qui exposent des notions de géométrie moderne, et parfois quelques autres, dans le but premier de fournir des moyens de résolution des problèmes aux élèves préparationnaires. Ils contiennent de très nombreux énoncés, en particulier des sujets du concours général, qui sont fréquemment résolus de plusieurs manières différentes. Au-delà de ces caractéristiques communes, chacun de ces ouvrages a sa propre façon d'aborder la question des méthodes. Housel présente les théories de la géométrie moderne en les faisant à chaque fois suivre de la résolution de quelques problèmes qui en illustrent la

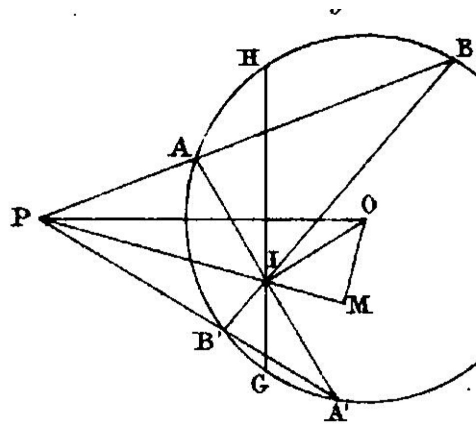


Figure 11. Un problème posé au concours général [Desboves 1880, p. 284].

fécondité. Millet quant à lui s'emploie d'emblée à reformuler les notions de la géométrie moderne sous forme de méthodes de résolution des problèmes. Enfin, Desboves présente séparément les théories, et les applique dans une deuxième partie de l'ouvrage à un corpus de questions classées selon leur nature.

2. LA NOTION DE MÉTHODE DE RÉSOLUTION DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

Nous allons maintenant nous intéresser aux ouvrages d'enseignement de la Géométrie analytique. Celle-ci se constitue au XIXe siècle en un champ disciplinaire à part entière, en réponse aux exigences du programme d'admission à l'École polytechnique qui requiert : « La discussion complette (sic) des lignes représentées par les équations du premier et second degré à deux inconnues ; les propriétés principales des sections coniques » [Hachette An XIV], une formulation qui reste stable durant toute la première moitié du siècle. La *Géométrie analytique*, indifféremment appelée *Application de l'algèbre à la géométrie*, compte pour une part importante dans la formation mathématique des élèves préparant les concours des Écoles du gouvernement. Le programme de mathématiques spéciales de 1809 indique quant à lui pour les mathématiques : « l'Algèbre et l'application de l'algèbre à la géométrie » [Belhoste 1995], et renvoie aux ouvrages de Lacroix et de Biot. Ces programmes sont précisés et élargis au long du siècle, mais restent axés sur l'étude des courbes et surfaces du second degré en coordonnées cartésiennes.

Géométrie élémentaire et géométrie analytique sont toutes deux évaluées au concours d'entrée à l'École polytechnique, comme cela apparaît sur les évaluations des candidats portées par Auguste Comte lorsqu'il occupe la charge d'examinateur d'entrée, évaluations heureusement conservées et publiées dans les *Nouvelles Annales* [Laffite 1894]. Par exemple, le candidat Doutres, 19 ans, obtient une appréciation passable au problème de géométrie élémentaire d'« Inscrire un carré dans un triangle », mais très favorable au problème de géométrie analytique de déterminer le « Lieu des sommets des hyperboles ayant une même asymptote et un même foyer ».

Nous allons voir que dans les ouvrages d'enseignement de géométrie analytique, la question de la résolution des problèmes cède rapidement le pas à une méthode uniforme de démonstration des théorèmes. Puis, dans le troisième tiers du siècle, sous la pression des examens et concours toujours plus difficiles, et en écho aux progrès de la géométrie pure, certains ouvrages introduisent en géométrie analytique les théories de la géométrie moderne, ainsi que de nouveaux systèmes de coordonnées, qui donnent lieu à de nouvelles méthodes. Les premières initiatives de ce genre restent assez marginales, et c'est véritablement dans les années 1880 que la géométrie analytique se trouve renouvelée dans des ouvrages de premiers plan, et surtout qu'apparaissent d'importants recueils de problèmes qui s'intéressent à la question des méthodes de résolution.

2.1. *Vers une méthode uniforme de démonstration*

L'application de l'algèbre à la géométrie est conçue au début de notre période d'étude comme une méthode féconde de résolution des problèmes. Elle va rapidement se constituer, dans le contexte de la préparation au concours de l'École polytechnique, en corps de doctrine, présentant une méthode uniforme de démonstration des propriétés des courbes et des surfaces du second degré.

2.1.1. *Deux méthodes pour appliquer l'algèbre à la géométrie*

En fait de méthode de résolution des problèmes, nous allons voir que l'application de l'algèbre à la géométrie se présente sous deux formes différentes dans les ouvrages d'enseignement.

Étienne Bézout, dans son célèbre *Cours* en sept volumes [Alfonsi 2011], encore publié et utilisé au début du XIX^e siècle, fait suivre le troisième livre sur l'algèbre de l'application de cette algèbre à l'arithmétique et, pour ce qui nous concerne, à la géométrie [Bézout 1764-1769]. Il s'agit alors de présenter une méthode de résolution des problèmes, et l'auteur en illustre et commente les difficultés sur une série d'énoncés : choix des inconnues, mise en équation, résolution des équations, interprétation et construction des solutions.

Sylvestre François Lacroix publie en 1798 un ouvrage très différent. Connu pour son immense travail de rédaction d'ouvrages élémentaires sur les connaissances mathématiques de son temps [Ehrhardt 2009], ses ouvrages servent de référence lors de la constitution d'un enseignement secondaire et supérieur. En particulier, son *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique et d'application de l'algèbre à la géométrie* [Lacroix 1798b] est l'ouvrage de référence pour les programmes officiels à la création des Lycées en 1802, et connaît de nombreuses rééditions jusqu'en 1863.

Lacroix n'a pas tant en vue la résolution des problèmes, que l'exposé des propriétés des courbes du second degré. Il montre comment le choix d'un système d'axes permet d'exprimer les lignes par des équations, ainsi que toutes les grandeurs géométriques par des expressions algébriques. Ensuite, la partie principale de l'ouvrage est consacrée à établir les propriétés de ces courbes par un travail algébrique sur les équations.

Néanmoins, dans la quatrième édition de 1807, il intègre plusieurs problèmes dont certains de ceux résolus dans le cours de Bézout. Cela l'amène à identifier et comparer deux méthodes qu'il applique successivement à un même problème, tiré de l'*Arithmétique universelle* de Isaac Newton [Newton 1802] :

> Par un point E, placé comme on voudra à l'égard de deux droites AB et AC, perpendiculaires entre elles, mener une droite de manière que la partie $D'F'$ de cette droite, interceptée entre les deux lignes proposées, soit d'une grandeur donnée m.

La première méthode, celle qui était présentée par Bézout, est décrite ainsi : « il faut d'abord mettre la question en équation, tirer l'expression de l'inconnue [et enfin] effectuer sur les lignes connues les opérations graphiques correspondantes à celles qui sont indiquées par les signes algébriques » [Lacroix 1807, p. 90]. Lacroix l'applique à ce problème en nommant les lignes $GE = a$, $HE = b$ et $AD' = y$. La similitude des triangles EGD' et $F'AD'$, ainsi que la relation entre les côtés du triangle rectangle $F'AD'$, mènent à l'équation :

$$y^4 - 2by^3 + (b^2 + a^2 - m^2)y^2 + 2bm^2y - b^2m^2 = 0$$

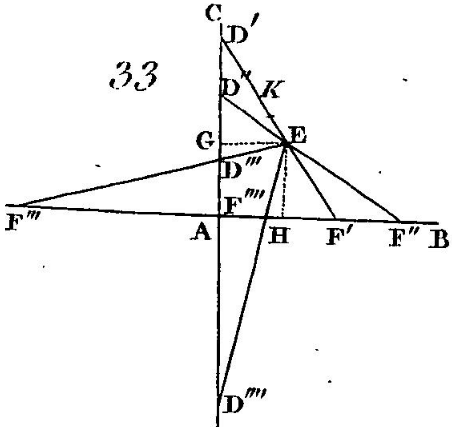


Figure 12. Un problème d'intercalation [Lacroix 1807, p. 104].

La deuxième méthode consiste « à déterminer les équations des lignes de la figure, en partant des propriétés de ces lignes » . Prenant les droites AB et AC comme axes des coordonnées [Lacroix 1807, p. 135], Lacroix désigne par α et β les coordonnées du point E. L'équation de la droite cherchée ED' est alors de la forme $y - \beta = -a(x - \alpha)$, d'où sont tirées les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes. F' a pour coordonnées $\frac{\beta+a\alpha}{a}$ et 0 et D' a pour coordonnées 0 et $\beta + a\alpha$. La distance $F'D'$ est alors donnée par l'expression :

$$F'D' = \sqrt{\left(\frac{\beta + a\alpha}{a}\right)^2 + (\beta + a\alpha)^2} = \frac{\beta + a\alpha}{a}\sqrt{1 + a^2}.$$

Cette longueur étant donnée, égale à m, le coefficient directeur a de la droite cherchée $F'D'$ est solution d'une équation du quatrième degré, qui se trouve être justement celle obtenue précédemment. Lacroix analyse la différence entre ces deux méthodes :

> Il doit être évident, d'après ce qui précède, que les questions de géométrie peuvent être traitées par deux méthodes bien distinctes : l'une consiste à déterminer les équations des lignes qui contiennent les points cherchés, en partant des propriétés de ces lignes ; et l'autre, à déduire immédiatement de la considération des triangles semblables et des triangles rectangles que présente la figure résultante du problème supposé résolu, [...] les relations des droites qui déterminent la position de ces points.

> La première de ces méthodes, quelquefois plus élégante que la seconde, est toujours plus générale ; mais la seconde est souvent plus simple [Lacroix 1807, p. 154].

Nous voyons comment Lacroix reconnaît des valeurs distinctes aux deux méthodes : la généralité pour la méthode des coordonnées, et la simplicité pour l'autre, que nous désignerons par le nom d'analyse algébrique des figures.

Nous l'avons mentionné, l'objet de Lacroix n'est pas la résolution des problèmes, contrairement à Bézout. Pour cela il renvoie à des ouvrages contenant de nombreux énoncés de problèmes : pour ce qui concerne la deuxième méthode, l'*Arithmétique universelle* de Newton, la *Géométrie de position* de Lazare Carnot, et les ouvrages de Thomas Simpson [Lacroix 1807, p. 112]. Pour s'entraîner à la première, il renvoie à un *Recueil* contemporain [Puissant 1801], de Louis Puissant (1769-1843), qui mérite toute notre attention.

Formé à l'École normale de l'an III et professeur à l'école centrale du Lot-et-Garonne [Lacroix 1807, p. 154], celui-ci se propose de compléter la théorie exposée dans l'ouvrage de Lacroix par des applications « utiles au développement de l'intelligence », puisque « rien n'est plus propre à éclaircir un sujet abstrait, que de s'exercer à analyser des questions qui s'y rapportent » [Puissant 1809, p. vii], une conception du savoir mathématiques qui donne la prééminence à la capacité à résoudre des problèmes. L'ouvrage expose trente-huit énoncés de problèmes résolus et de théorèmes démontrés en employant un « procédé uniforme », « afin de faire mieux ressortir les avantages de l'Algèbre » [Puissant 1801, p. 6]. Quitte à ne pas proposer la solution la plus simple, comme pour le problèmes suivant tout à fait immédiat par la géométrie élémentaire :

> Un cercle d'un rayon connu, et une ligne CB étant donnés de position par rapport à deux axes fixes, mener au cercle une tangente TM, qui soit en même temps parallèle à CB.

Ayant désigné par « r le rayon du cercle, a la tangente trigonométrique de l'angle BCA, α la distance inconnue AT, et x, y les coordonnées du point de contact », Puissant aboutit à la relation :

$$a = \frac{r}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}},$$

qui donne ensuite :

$$\alpha = \frac{r\sqrt{a^2 + 1}}{a}.$$

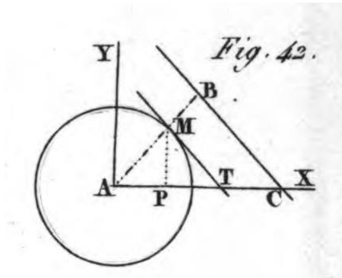


Figure 13. Un problème de tracé d'une tangente au cercle [Puissant 1801, p. 36].

De cette dernière relation il déduit la construction du point T. Puissant a choisi d'exposer cette solution car elle est générale, c'est-à-dire qu'elle peut être appliquée de manière similaire à une autre courbe que le cercle. Ainsi, et même si l'ouvrage contient de nombreux énoncés difficiles sur les courbes du second degré, Puissant n'hésite pas à montrer sur des énoncés élémentaires le fonctionnement de la méthode des coordonnées. Il démontre notamment que les médianes d'un triangle sont concourantes en partant de leurs équations dans un repère lié au triangle [Puissant 1801, p. 28].

L'ouvrage de Puissant est réédité en 1809 dans une version trois fois plus importante, destinée aux « jeunes analystes [...] afin de les mettre sur la voie de faire eux-mêmes des recherches utiles en ce genre » [Puissant 1809, p. x]. La troisième et dernière édition, en 1824, est cette fois adressée « aux élèves qui suivent les leçons des Collèges royaux, ou qui se destinent pour l'École polytechnique » [Puissant 1824, p. x]. La préparation au concours est devenue la principale cible des éditeurs de ce type d'ouvrage.

2.1.2. *La géométrie analytique constituée en discipline d'enseignement*

Dans les décennies qui suivent la publication de l'ouvrage de Lacroix, des professeurs vont écrire des ouvrages de géométrie analytique spécifiquement pour les candidats aux Écoles du gouvernement. Ces ouvrages sont essentiellement consacrés, conformément aux programmes des concours, à l'exposé des propriétés des courbes et des surfaces du second ordre établies par un travail algébrique sur les coordonnées cartésiennes. La réflexion sur les méthodes de résolution des problèmes y est peu, voire pas du tout traitée.

Le premier d'entre eux est l'œuvre du mathématicien, astronome et physicien Jean Baptiste Biot [39] (1774-1862), qui publie en 1802 un *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré* [Biot 1802], rebaptisé *Essai de géométrie analytique* [Biot 1805] dès la deuxième édition de 1805, et jusqu'à la huitième de 1834. « Cet ouvrage est principalement destiné aux jeunes gens qui étudient pour entrer à l'École polytechnique », avertit d'emblée l'auteur. Or il ne traite pas de la résolution des problèmes, et a choisi de « n'employer que des méthodes générales » [Biot 1805, p. vj], c'est-à-dire surtout la méthode des coordonnées, à la discussion des courbes et des surface du second ordre.

Pour illustrer rapidement comment les propriétés des courbes et des surfaces du second ordre sont établies, prenons l'exemple d'un ouvrage qui a connu un certain succès, l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Pierre Louis Marie Bourdon (1779-1854), publié en 1825, qui connaitra plusieurs rééditions, jusqu'à une 7e édition en 1906. Son auteur est entré à l'École polytechnique en 1796, et il obtient en 1811 le tout premier diplôme de doctorat décerné par l'Université impériale[40].

Bourdon procède de la façon suivante pour déterminer l'équation de la tangente à une ellipse dont l'équation, ramenée à ses axes, est :

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

La tangente passant par un point de coordonnées (x', y') s'écrit $(y - y') = a(x - x')$. En substituant dans la première équation, on obtient un unique point d'intersection, puisqu'on cherche une tangente, lorsque la relation suivante est vérifiée :

$$-(y' - ax')^2 + A^2a^2 + B^2 = 0.$$

On trouve deux valeurs de a correspondant aux deux tangentes dès lors que $A^2y'^2 + B^2x'^2 - A^2B^2 > 0$, c'est-à-dire que le point donné est extérieur à l'ellipse. De cette façon sont établies, sur des centaines de pages, les nombreuses propriétés des courbes et surfaces du second degré.

39 Polytechnicien de la toute première promotion de 1794, professeur à l'école centrale de l'Oise puis au collège de France, et examinateur d'admission à l'École polytechnique.

40 Professeur aux Lycées Charlemagne et Napoléon notamment, il est examinateur à l'École polytechnique, inspecteur général, et enfin membre du conseil royal de l'Instruction Publique. Outre l'ouvrage auquel nous nous intéressons ici, il est l'auteur notamment d'*Éléments d'arithmétique* et d'*Éléments d'algèbre* à succès. Il est également le beau-père de Joseph Hydulphe Vincent [Havelange et al. 1986, p. 187].

Ces démarches doivent être parfaitement maîtrisées par les candidats à l'École polytechnique, car il leur est demandé de les restituer lors de l'examen d'admission, comme dans cette question d'un sujet posé dans les années 1830 :

> Exposer la méthode générale des tangentes aux courbes algébriques, et déterminer les points de la courbe pour lesquels la tangente est parallèle aux axes.
> Appliquer cette méthode à la recherche de l'équation de la tangente aux courbes du 2e degré représentées par l'équation la plus générale [Ritt 1839, p. 53].

Ces sujets demandent davantage un travail de mémorisation et d'acquisition d'automatismes que la capacité d'invention d'une solution à un problème nouveau. C'est plutôt au concours général que cette dernière qualité est mobilisée, puis également dans les épreuves écrites des concours, qui apparaissent pour les mathématiques à l'École polytechniques à partir de 1840, mais qui gardent un rôle secondaire jusqu'à la fin du siècle [Belhoste 2002].

Concernant la résolution des problèmes, les ouvrages de géométrie analytique exposent en général au début de l'ouvrage la résolution de quelques problèmes très élémentaires, par l'une ou l'autre des méthodes présentées plus haut. Bourdon par exemple distingue bel et bien les deux méthodes identifiées par Lacroix :

> Le premier chapitre est consacré au développement des méthodes particulières de l'*Application* ; de ces méthodes qui varient avec la nature des problèmes, mais qui, par leur simplicité, ont souvent l'avantage sur les méthodes générales […]
> Au troisième chapitre commence la Géométrie analytique proprement dite, c'est-à-dire, la méthode qui consiste à résoudre les questions de Géométrie par le secours des équations du point, des lignes et des surfaces [Bourdon 1825, p. v].

Nous reconnaissons bien entendu des propos très proches de ceux de Lacroix. Bourdon met en regard la simplicité des méthodes particulières et la généralité de la Géométrie analytique. Pour chacune de ces deux méthodes, il montre, dans un paragraphe séparé, leur emploi sur plusieurs problèmes de construction et théorèmes à démontrer[41].

---

[41] Pour la première, l'inscription d'un carré dans un triangle, le tracé d'une parallèle à la base d'un triangle qui soit d'une longueur donnée, le partage d'un trapèze en deux parties dans un rapport donné par une parallèle à la base, le tracé d'une droite

En application de la méthode des coordonnées, Bourdon distingue les problèmes déterminés des problèmes indéterminés. Il montre par exemple que les médianes, les hauteurs, les médiatrices d'un triangle sont concourantes, et que les trois points de concours correspondants sont alignés[42].

Une revue exhaustive de tous les énoncés traités comme des questions à résoudre dans un ouvrage de premier plan et relativement riche de ce point de vue nous montre nettement que la part dédiée à ces questions est très réduite en comparaison de celle dédiée à l'exposition de la théorie.

2.1.3. *Auguste Comte : la généralité inhérente à la méthode analytique*

En réaction à ces ouvrages d'enseignement qui déroulent les propriétés des coniques par des manipulations algébriques efficientes, sans chercher à dégager l'essence des méthodes employées, Auguste Comte (1798-1857) prône un retour à la conception cartésienne de l'application de l'algèbre à la géométrie comme méthode générale. Examinateur d'entrée à l'École polytechnique et auteur d'un ouvrage de géométrie analytique, ses conceptions influencent les professeurs et les auteurs de manuels.

La recherche de la tangente à l'ellipse telle que traitée par Bourdon nous a donné un exemple de fonctionnement des méthodes analytiques attaché à une courbe particulière. Ce procédé est vivement critiqué par Auguste Comte, qui y voit un défaut de généralité contraire à l'esprit de la méthode analytique.

Auguste Comte publie en 1843 un traité de géométrie analytique qui propose une refonte de son enseignement dans les classes de mathématiques spéciales. Entré à l'École polytechnique en 1814, il est de la même promotion que Gabriel Lamé, licenciée en 1816. Répétiteur à l'École à partir de 1832, et examinateur d'entrée de 1836 à 1843, avec Bourdon justement, il a également donné de nombreuses leçons privées

dans un angle par un point donné qui fasse un triangle de surface donnée, l'expression de la surface d'un triangle au moyen de ses trois côtés, et la relation entre les trois côtés d'un triangle et le rayon de son cercle circonscrit.

42 Puis il résout les problèmes de tracer une sécante à un cercle par un point donné qui intercepte une corde de longueur donnée, de tracer une sécante à deux cercles qui intercepte des cordes égales et de longueur donnée, de mener une tangente commune à deux cercles, et démontre l'alignement des trois points d'intersection des paires de tangentes communes à trois cercles donnés pris deux à deux. Ensuite, il résout des problèmes indéterminés, le lieu des points dont la somme des carrés des distances à deux points donnés est connue, le lieu des points qui forment avec deux points donnés un angle donné, le lieu des points d'intersection des tangentes aux deux points d'intersection d'une sécante menée par un point donné à un cercle donné. Ces lieux sont tous des droites et des cercles.

de mathématiques et des cours dans une institution privée [Petit 1996]. Son *Traité élémentaire de géométrie analytique* [Comte 1843] rompt avec les traités contemporains sur cette matière, dont il qualifie l'organisation de « désastreuse routine scolastique » [Comte 1843, p. VIII]. Il se réfère à Descartes pour rappeler que l'analyse a pour objet de généraliser les théories géométriques, et non de les borner de la sorte à un groupe restreint de figures particulières, en l'occurrence les coniques :

> La géométrie analytique, telle que Descartes l'a fondée, est essentiellement destinée à généraliser le plus possible les diverses théories géométriques, d'après leur intime subordination à des conceptions analytiques, en soumettant les différentes questions à autant de méthodes uniformes, nécessairement applicables à toutes les figures convenablement définies [Comte 1843, p. 1].

Comte s'attache à soumettre les différentes questions fondamentales de la géométrie à des méthodes uniformes applicables à toutes les figures d'une classe à définir avec précision. Il écarte, au moins dans un premier temps, les problèmes particuliers attachés à une figure particulière :

> Les questions vraiment limitées à certaines figures, et qui ne comportent pas de généralisation réelle, n'offrent presque jamais qu'un intérêt très-secondaire, à moins qu'elles ne constituent, comme il arrive souvent, de simples modifications particulières d'une considération pleinement générale [Comte 1843, p. 2].

Il recense donc des questions fondamentales auxquelles il associe des méthodes générales. Après une première partie expliquant et illustrant comment les lignes sont représentées par des équations, il décline la deuxième partie de l'ouvrage en théories générales, au nombre de sept[43].

La troisième partie de l'ouvrage concerne l'étude des courbes, et se présente comme une mise en œuvre des théories et des méthodes développées auparavant. L'étude des coniques apparaît à son tour dans la quatrième et dernière partie comme cas particulier de cette étude générale des courbes.

---

43 Ces théories sont :

– La théorie du nombre de points nécessaires à la détermination de chaque espèce de courbe ;
– La théorie des tangentes ;
– La théorie des asymptotes ;
– La théorie des diamètres ;
– La théorie des centres ;
– La théorie de la similitude des courbes ;
– La théorie des quadratures, et, par suite, des rectifications et des cubatures [Comte 1843, p. 567-570].

Comte introduit de nouvelles notions pour satisfaire son exigence de généralité. Plus question de déterminer une tangente à la manière de Bourdon, attachée à une courbe particulière. Comte expose le calcul des dérivées d'une fonction, étranger aux programmes du concours, pour traiter le problème des tangentes de manière générale. Nous retrouvons donc chez Comte un attachement à la généralité comparable à celui de Chasles dans le *Traité de géométrie supérieure*. Dans ce contexte, les problèmes sur les figures sont conçus comme des cas particuliers de problèmes généraux, traités par des théories générales.

À en croire un professeur et auteur de nombreux manuels, Paul-Louis Cirodde[44] (1794-1849), les conceptions de Comte sont mises en application à l'examen d'entrée à l'École polytechnique :

> À l'époque où je publiai la première édition de mes Leçons de Géométrie analytique [en 1843], les questions de l'examen pour l'admission à l'École polytechnique avaient pris une extension démesurée. Ainsi on interrogeait les candidats non-seulement sur les méthodes des tangentes, des asymptotes, des centres et des diamètres, mais encore sur la détermination des points maximums et minimums, des points d'inflexion, sur la discussion des courbes d'ordre quelconque, sur leur similitude, etc., etc. C'était donc la Géométrie générale que les professeurs avaient à enseigner à leurs élèves; de sorte que l'étude des propriétés des courbes du second ordre devait se déduire, comme simple application, des théories dont nous venons de parler [Cirodde 1848, p. I].

Dans les décennies suivantes, les manuels de géométrie analytique iront progressivement, de manière très inégale d'un ouvrage à l'autre, vers davantage de généralité. Les programmes officiels également, mais de façon timide, ceux de mathématiques spéciales de 1853 abordant par exemple les tangentes et les asymptotes de manière générale en amont de l'étude particulière des courbes du second degré.

2.2. *Nouvelles méthodes et nouvelles notions en géométrie analytique*

À l'opposé de la quête de généralité que défend Comte, certains auteurs décrivent des méthodes particulières pour résoudre les problèmes en géométrie analytique. Soit en reprenant des considérations empruntées à

44 Ce professeur a connu une brillante carrière sans jamais passer de concours. Parti à dix-huit ans du premier échelon comme régent de mathématiques au collège de Châteauroux, il connaît plusieurs affectations avant d'obtenir un poste de professeur à Dijon en 1820, où il intervient après 1830 dans le cours de mathématiques spéciales. Le succès de ses nombreux ouvrages d'enseignement l'amène à être appelé par Poisson au Lycée Henri IV en 1837 [Terquem 1849].

Newton sur la meilleure façon de mettre un problème en équation. Soit en mélangeant les méthodes analytiques et géométriques. Soit enfin en recourant aux notions de géométrie moderne, reformulées à cette occasion dans le langage de la géométrie analytique.

2.2.1. *Mettre un problème en équation*

Certains auteurs s'étendent plus longuement que Lacroix ne l'avait fait sur la difficulté de mettre un problème en équation. Comme ce dernier, ils se réfèrent à l'*Arithmétique universelle* de Newton, traduite en français au début du siècle [Newton 1802], mais reprennent davantage en détail les règles qui y figurent sur ce sujet.

C'est le cas du mathématicien Louis-Étienne Lefébure de Fourcy [45] (1787-1869). Dans ses *Leçons de géométrie analytique* de 1827, plusieurs fois rééditées jusqu'en 1863, il reconnaît que, bien souvent, « on a besoin de méthodes et d'artifices particuliers pour former les équations d'où dépendent les inconnues » [Lefébure de Fourcy 1827, p. 3]. Il développe plusieurs pages de réflexions sur les moyens de mettre en équation un problème, accompagnées d'exemples, en essayant de dégager des règles, tirées de l'*Arithmétique universelle*.

Paul-Louis Cirodde considère quant à lui qu'« il n'existe point de règle fixe et déterminée » pour mettre les problèmes en équation, et fournit lui aussi les règles édictées par Newton. Ces règles se terminent par le principe suivant :

> Il est une considération très-importante qu'il ne faut *jamais* négliger [c'est] d'examiner avec soin combien [le problème] doit admettre de solutions puis de *choisir de préférence, pour inconnues, parmi toutes les quantités dont la détermination peut conduire à la résolution du problème, celles qui, dans les diverses solutions dont il est susceptible, admettent le plus petit nombre de valeurs*; car on conçoit que le calcul de ces inconnues conduira, *en général*, à des équations dont le degré sera moins élevé [Cirodde 1848, p. 113].

Ce principe est mis en œuvre sur le même problème qu'avaient choisi Newton et Bézout, et dont nous avons vu la résolution par Lacroix dans un cadre plus général :

> Par un point A donné à égale distance de deux droites rectangulaires Xx et Yy, mener une sécante telle que la partie interceptée par ces droites soit égale à une droite donnée m [Cirodde 1848, p. 120].

45 Polytechnicien de la promotion 1803, diplômé du doctorat en 1811, professeur et examinateur à l'École polytechnique, professeur également au Lycée Louis-le-Grand en 1817 puis au Lycée Saint-Louis à sa création en 1820.

Après une longue discussion sur les différents choix possibles d'inconnue, Cirodde adopte une solution qu'il attribue à Gergonne, et qui consiste à prendre comme inconnue la distance entre la sécante et le point d'intersection des droites données, choix qui mène à une équation du second degré seulement.

2.2.2. *La géométrie moderne reformulée dans le langage analytique*

Pour accompagner les élèves dans leur préparation aux concours, deux auteurs vont chercher dans les théories de la géométrie moderne à la fois une ressource et un terrain d'exercice pour la géométrie analytique, en reformulant leur contenu dans le langage analytique. Un paradoxe que relèvent Rouché et Comberousse dans leur *Traité de géométrie élémentaire* de 1866 :

> On en parle à peine et accessoirement [des découvertes de la géométrie moderne] en Géométrie analytique, où elles semblent bien à tort être une nouvelle conquête de l'admirable instrument créé par Descartes [Rouché & Comberousse 1866, p. xiv].

Le premier d'entre eux, Charles Émile Page[46] écrit un *Complément de géométrie analytique* en 1841 pour les candidats à l'École polytechnique, en leur donnant « quelques théories générales qui ne sont pas ordinairement comprises dans l'enseignement élémentaire » et qui peuvent « être d'un grand secours pour la solution des questions qui les embarrassent le plus souvent » [Page 1841, p. v]. Particularité très instructive, il énonce la liste des « sources originales » de ces théories : il cite les travaux de Carnot, Servois, Brianchon, Lamé, Chasles, Gergonne, Poncelet et encore Sturm. Il est surprenant de voir dans cette liste, alors que l'ouvrage porte le titre de géométrie analytique, des références qui traitent peu de géométrie analytique, voire même pour la plupart en proposent une alternative. Page mêle dans son ouvrage les méthodes géométriques et analytiques, dépassant les cloisonnements scolaires et les clivages scientifiques[47].

---

46 Professeur à l'École d'application de l'Artillerie et du Génie, une des Écoles d'application de l'École polytechnique [Belhoste 2003, p. 17].

47 L'ouvrage est décliné en cinq Livres. Les deux premiers traitent des notions de rapport anharmonique, d'involution, de transversales, de faisceau harmonique, de pôle et de polaire par rapport à deux droites et de quadrilatère complet, exposées géométriquement. L'auteur aboutit à des théorèmes d'importance comme le théorème de Desargues, et les théorèmes de Pascal et de Brianchon sur l'hexagone. Le troisième Livre, en revanche, introduit la géométrie analytique à proprement parler. Par exemple, le théorème concernant la puissance d'un point par rapport à un cercle, appartenant habituellement au corpus de la géométrie euclidienne, est démontré en choisissant un repère attaché à la figure. Étant donnés un point fixe o et deux sécantes

Nous avons déjà rencontré le deuxième auteur qui introduit les théories de la géométrie moderne en géométrie analytique : Cirodde introduit certaines notions de géométrie moderne à l'occasion de la résolution de quelques problèmes, en l'occurrence les notions d'axe radical, de polaire et de faisceau harmonique. Par exemple, la définition de l'axe radical de deux cercles est donnée à l'issue de la résolution du problème suivant[48] : « Trouver le lieu de tous les points desquels on peut mener des tangentes égales à deux circonférences données » [Cirodde 1848, p. 210].

Les théories de la géométrie moderne se présentent dans cet ouvrage comme un terrain d'application pour la géométrie analytique. Elles fournissent l'occasion d'exercices, là où Page est davantage tourné vers l'exposition des théories. Un autre ouvrage va intégrer les notions de la géométrie moderne mais en les reconnaissant cette fois clairement comme des méthodes de résolution des problèmes.

---

menées de ce point au cercle, l'équation du cercle dans le repère constitué de ce point et des deux droites s'écrit :

$$y^2 + x^2 + 2\cos\theta xy + Dy + Ex + F = 0.$$

Notant m et n, p et q, les points d'intersection de chaque sécante avec le cercle, et faisant $y = 0$ dans l'équation, on trouve que l'équation $x^2 + Ex + F = 0$ a pour solutions om et on, c'est-à-dire que $om.on = F$. De même en faisant $x = 0$, on trouve $op.oq = F$. Par conséquent, $om.on = op.oq$. Cette propriété est immédiatement employée pour démontrer, géométriquement cette fois, les théorèmes de Carnot sur le triangle dont les trois côtés coupent une circonférence, et de Desargues sur la sécante à un quadrilatère inscrit dans un cercle. Au cinquième Livre, la notion de polaire par rapport à une courbe du second ordre est traitée également de manière analytique. Elle permet de résoudre le problème de mener une tangente à une courbe du second ordre par un point donné, puisque la polaire coupe la courbe aux points de contact des deux tangentes qui lui sont menées du point fixe. Puis la construction d'une conique connaissant cinq éléments de la courbe, points ou tangentes, en utilisant le théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit à une conique. Page va plus loin en montrant comment construire deux diamètres conjugués de la conique cherchée. Pour y parvenir, il a donné un peu auparavant, en corollaire du théorème de Pascal, la construction de la tangente en un point d'une conique connaissant quatre autres de ses points. Il trace alors trois tangentes à la conique cherchée, puis deux diamètres qui se coupent au centre, et de là deux diamètres conjugués.

48 t étant la longueur des tangentes évoquées, (α, β) et (α', β') les coordonnées des centres des cercles, et r et r' leurs rayons, les coordonnées (x, y) du point cherché vérifient les équations :

$$\begin{cases} (y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = t^2 + r^2, \\ (y-\beta')2 + (x-\alpha')2 = t^2 + r'^2. \end{cases}$$

La différence entre ces deux équations donne l'équation d'une droite qui est le lieu cherché.

2.2.3. *Pour la multiplication des procédés particuliers*

Cet ouvrage, qui connaîtra un immense succès éditorial avec une vingt-deuxième édition en 1916, ranime l'intérêt porté à la question des méthodes en géométrie analytique. Les mathématiciens Charles Briot (1817-1882) et Jean-Claude Bouquet (1819-1885) sont tous deux normaliens, alors professeurs respectivement au Lycée Bonaparte de Paris et à la Faculté des sciences de Lyon. Ils défendent dans leurs *Leçons Nouvelles de Géométrie Analytique* de 1847 le recours à des méthodes particulières :

> Avant l'invention de Descartes, chaque problème de géométrie se résolvait par un précédé spécial ; la représentation des figures par des équations donne une méthode uniforme applicable à toutes les questions géométriques [...] Si, au fur et à mesure, on cherche les équations de toutes [les] lignes, la vérification du théorème ou la détermination des inconnues du problème sera évidemment ramenée à une simple question algébrique [...] Mais cette méthode n'est pas toujours la plus simple, et dans beaucoup de cas il vaut mieux recourir à des procédés particuliers [Briot & Bouquet 1851, p. 213].

Les auteurs se montrent assez critiques vis-à-vis de la méthode uniforme des coordonnées, susceptible selon eux de mener à des calculs algébriques difficiles. Ils présentent sur divers problèmes des choix pertinents des inconnues, sans chercher cependant à établir de règles générales comme dans les ouvrages de Lefébure de Fourcy et de Cirodde.

Mais l'innovation majeure de l'ouvrage de Briot et Bouquet de ce point de vue consiste en l'introduction dans la deuxième édition de leurs *Leçons* en 1851, à la suite des Livres portant classiquement sur l'étude des courbes puis des surfaces du second degré, d'une troisième partie intitulée « Des méthodes en géométrie ». Ce Livre expose les méthodes d'invention et de démonstration auxquelles donnent lieu les théories de la géométrie moderne comme les pôles et les polaires, les transversales, les méthodes de projection et de perspective, les courbes enveloppes, les coordonnées tangentielles, les figures corrélatives, la dualité, l'homographie et l'homologie. Les auteurs démontrent de nombreux théorèmes et résolvent quelques problèmes de construction par des méthodes variées, présentant ainsi au lecteur la multiplicité des moyens à la disposition du géomètre. Ils recherchent ostensiblement la simplicité et l'élégance davantage que l'uniformité des méthodes. Les raisonnements de nature algébrique et géométrique sont mobilisés conjointement au gré des énoncés : telle propriété des polaires est démontrée par la manipulation des équations sur les coordonnées, et telle autre par un raisonnement géométrique[49].

Cette troisième partie sur les méthodes, originale par son extension dans un ouvrage d'enseignement secondaire, présente la richesse des moyens du géomètre pour démontrer des propositions, en s'appuyant sur les raisonnements et les outils les mieux adaptés à chaque situation particulière. La multiplicité des propositions démontrées n'est pas organisée ni exhaustive. Cette présentation dynamique et variée rompt avec le cadre structuré et homogène caractéristique des ouvrages de géométrie analytique de la première moitié du siècle.

2.3. *Renouvellement de la géométrie analytique et importance des problèmes*

Jusqu'ici les théories de la géométrie moderne sont apparues de manière accessoire ou dans un *Complément*, et dans les années suivantes la situation n'évolue pas. En effet la réforme autoritaire dite de la bifurcation engagée par le ministre Henri Fortoul à l'avènement du second Empire en 1852 est portée par une conception utilitaire de l'enseignement des sciences, et met fin provisoirement aux initiatives novatrices. Le strict respect des programmes est désormais de rigueur, et surveillé de près par l'administration, qui impose aux enseignants de consigner dans un journal quotidien l'avancement de leur cours [Hulin 1982]. Une classe de Mathématiques Spéciales, niveau où est enseignée la géométrie analytique, est officiellement créée dans chaque Lycée, avec des horaires et une pédagogie précisément établis ; le programme, commun avec celui des concours d'admission aux Écoles polytechnique et normale, en est rédigé en détail. Les notions de géométrie moderne n'y figurent pas, et la troisième édition de l'ouvrage de Briot et Bouquet, en 1860, s'avère bien plus élémentaire que la précédente, les théories ne figurant pas aux programmes étant renvoyées à un futur *Complément de géométrie analytique*.

Mais la réforme de la bifurcation est mal reçue et se trouve définitivement abandonnée en 1864. Le ministre Duruy rétablit un enseignement classique élitiste, et promulgue des instructions précises concernant l'organisation de classes préparatoires, notamment en Province, sur le modèle des classes préparatoires privées florissantes depuis la loi Falloux. Il préconise entre autres choses des « interrogations multipliées [et des] épreuves réitérées [afin] d'entraîner l'élève au but » [Belhoste 1995, p. 409].

---

49 Voici un exemple pour montrer comment Briot et Bouquet à la fois mélangent les méthodes analytique et géométrique, et font intervenir les théories de la géométrie

Parallèlement les ouvrages d'enseignement de géométrie analytique donnent de plus en plus d'importance aux exercices à résoudre, répartis au fil des chapitres. À titre d'exemple, la quatrième édition des *Leçons de géométrie analytique* de Briot et Bouquet en 1863 totalise cent soixante deux exercices rien que pour la géométrie plane. Cette présence très importante de questions à résoudre, sans la solution, dans des ouvrages qui sont conçus, ne l'oublions pas, pour « faire classe », indique sans aucun doute une modification des pratiques d'enseignement vers davantage de temps passé à la résolution des problèmes, probablement le plus souvent en-dehors de la classe, lors des entraînements préconisés par le ministre, et déjà mis en œuvre depuis longtemps dans les préparations privées [Belhoste 2001]. Difficile toutefois de connaître précisément le temps passé par les élèves à s'entraîner à résoudre des problèmes. On comprend dans le commentaire suivant que rédige Prouhet dans les *Nouvelles Annales* à propos du sujet donné à l'École polytechnique en 1865, que ce n'est pas une activité généralisée chez tous les élèves :

> On ne devrait étudier aucune théorie un peu importante, sans traiter une question qui s'y rapporte. Malheureusement il n'en est pas ainsi : nous avons vu des élèves intelligents ne point faire les compositions données par leurs professeurs. Ils aiment mieux, disent-ils, repasser leur cours. C'est une mauvaise spéculation dont ils s'aperçoivent quand il n'est plus temps [Prouhet 1866].

---

moderne. Les auteurs prouvent que si trois côtés d'un triangle *MPQ* tournent autour de trois points fixes *A*, *B* et *C*, tandis que deux sommets glissent sur deux droites fixes *OE* et *OD*, le troisième sommet *M* décrit une courbe du second degré [Briot & Bouquet 1851, p. 364].

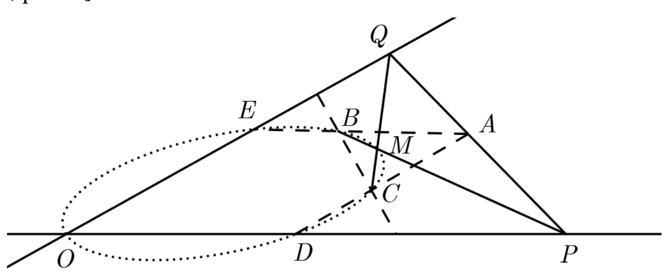


Figure pour [Briot & Bouquet 1851, p. 364].

Ce résultat est démontré en manipulant les équations des droites de la figure dans un repère bien choisi. Dans un deuxième temps, cette figure est considérée comme générale pour en déduire le théorème de Pascal : les côtés opposés de l'hexagone inscrit *OEBMCD* se coupent selon trois points en ligne droite *Q*, *A*, *P*. Enfin, la méthode des polaires réciproque est invoquée pour déduire de ce théorème le théorème de Brianchon sur les diagonales d'un hexagone circonscrit cette fois à une conique.

Par ailleurs, l'intérêt pour d'autres méthodes en géométrie analytique se trouve stimulé par les leçons d'un genre nouveau que donne Briot à l'École normale supérieure[50].

Dans ce contexte d'un intérêt renouvelé pour les problèmes comme pour les méthodes nouvelles, deux ouvrages d'enseignement préparatoire centrés sur les théories de la géométrie moderne sont publiés en 1866, en lien fort avec la résolution des questions. Ces théories sont introduites en recourant notamment à de nouveaux systèmes de coordonnées. Un troisième ouvrage de ce genre apparaît en 1872, mais ces premiers ouvrages sont peu diffusés et ce n'est que dans les années 1880 que sont publiés sur ce sujet des ouvrages d'enseignement davantage reconnus, ouvrages de cours d'abord, recueils d'exercices ensuite.

2.3.1. *Les leçons de Briot à l'ENS*

Briot donne à partir de 1863 des leçons de géométrie moderne à l'École normale supérieure, où il est maître de conférence d'astronomie et de mécanique. Ces leçons sont publiées par ses élèves sous le titre *Complément de la géométrie analytique*, en « espérant, écrit l'auteur, qu'il sera utile aux professeurs et aux meilleurs élèves de nos Lycées » [Briot & Bouquet 1864].

Briot introduit les notions de transversales, de rapport anharmonique, d'homographie et d'involution, la théorie des polaires réciproques, mais cela, contrairement à Chasles et Poncelet dont il se réclame pourtant, dans le cadre de la géométrie analytique. De ce point de vue, il s'est inspiré des travaux du troisième mathématicien auquel il se réfère, le mathématicien irlandais Georges Salmon [Gow 1997], auteur d'une collection d'ouvrages de géométrie analytique très différente de ce qui est publié en France à la même époque. Connus en France, d'après Poncelet [Poncelet 1862, p. 212], ces ouvrages exposent des méthodes récentes, les méthodes des notations abrégées et des coordonnées tangentielles, dont il affirme qu'il est alors le premier à publier un exposé systématique et élémentaire. Mais aussi des méthodes purement géométriques lorsqu'elle conduisent « plus simplement et plus rapidement à une solution que l'analyse » [Salmon 1870, p. 514]. Les ouvrages de Salmon portent en effet une grande attention aux méthodes, ainsi qu'à la recherche de simplicité et de rapidité [Moussard 2015, p. 360-374]. Si les références de Salmon sont d'abord françaises : Carnot, Brianchon, Poncelet, Chasles, Bobillier et Gergonne, il s'est

---

50 Signalons également l'ouvrage d'un ingénieur des ponts et chaussées, Félix Lucas, qui publie en 1864 des *Études analytiques sur la théorie des courbes planes* [Lucas 1864] dans lesquelles il se propose l'ambitieux objectif d'exposer, en coordonnées cartésiennes, l'ensemble des théories de la géométrie moderne.

également nourri des travaux des allemands August Ferdinand Möbius et Julius Plücker, du suisse Jakob Steiner, et enfin de l'anglais Arthur Cayley.

Briot se situe à un niveau avancé de généralité. Il introduit d'emblée les points à l'infini, les points imaginaires, la notation abrégée, les coordonnées tangentielles. Il traite de cette façon les notions de géométrie moderne pour établir de nombreux théorèmes d'abord sur les courbes et les surfaces du second degré, puis sur les courbes algébriques en général.

2.3.2. *De premiers ouvrages innovants à la marge*

Deux ouvrages d'enseignement publiés en 1866, et largement tournés vers la résolution des questions comme nous allons le voir, sont consacrés aux méthodes de géométrie moderne et à de nouveaux systèmes de coordonnées.

Louis Félix Painvin [51] (1826-1875) est l'auteur de *Principes de la géométrie analytique* qui seront suivis trois ans plus tard d'un ouvrage complémentaire pour la géométrie dans l'espace. Ce sont deux ouvrages volumineux, plus de huit cents pages pour le premier, et extrêmement novateurs.

Painvin ambitionne de regagner le terrain que l'Analyse a selon lui perdu sur la géométrie moderne :

> Sous la puissante impulsion des Chasles, Steiner, Poncelet, etc., la Géométrie pure a réalisé des progrès immenses et laissé, bien loin derrière elle, la Géométrie Analytique. Pour regagner le terrain perdu, nous ne devons négliger aucune des ressources de l'Analyse [Painvin 1866, p. i].

Tout en suivant le cadre et l'ordre des programmes, chaque chapitre est prolongé de compléments établis dans d'autres systèmes de coordonnées. Ainsi il traite les chapitres de l'ouvrage successivement en coordonnées cartésiennes, puis homogènes, puis tangentielles. Il renvoie pour les points qu'il ne peut traiter dans le cadre de son ouvrage « aux excellents traités de M. Salmon ».

> Le cours que je publie aujourd'hui [...] renferme d'abord les matières exigées par nos programmes [...] Les parties complémentaires qui traitent des coordonnées trilatères et des coordonnées tangentielles [...] sont principalement destinées à des élèves de seconde année. [Elles] seront un aliment nouveau à leur curiosité ; et [...] ils pourront, par cette étude, acquérir plus de

---

51 Docteur en 1854, il est d'abord chargé de cours dans les principales institutions privées de Paris. Il obtient l'agrégation en 1859, et en conséquence est nommé professeur de mathématiques spéciales au Lycée de Douai l'année suivante. Il enseignera par la suite au Lycée de Lyon, en 1869, puis succède à Darboux à Louis-le-Grand en 1872. Il rédige de nombreux articles de géométrie dans plusieurs journaux.

ressources pour l'attaque et la résolution des problèmes, et élargir, en même temps, le champ de leurs idées sur la Géométrie [Painvin 1866, p. i].

Comme nous le lisons, Painvin a en vue la résolution des problèmes, et son ouvrage contient un grand nombre d'énoncés de questions à résoudre. Plusieurs livres se terminent par des listes d'exercices, pour un total de plus de trois cents énoncés, en plus de centaines de courbes à construire à partir de leurs équations. Enfin, quatre-vingt-deux questions données entre 1812 et 1867 au concours général et aux Écoles polytechniques et normale supérieure terminent l'ouvrage. Painvin est le premier à écrire un ouvrage élémentaire sur les coordonnées tangentielles :

> L'étude des coordonnées tangentielles n'a encore été présentée systématiquement dans aucun de nos ouvrages français, la Géométrie Analytique de MM. Briot & Bouquet n'en renferme guère que la définition, le traité de M. Salmon contient au commencement des notions un peu plus étendues [...] La géométrie analytique de M. Hesse [1861] est, je crois, le seul ouvrage dans lequel on ait fait un usage systématique de ces coordonnées [Painvin 1866, p. ii].

Par ailleurs, Painvin intègre dans son ouvrage de nombreuses notions de géométrie moderne. Nous allons en donner quelques exemples. Commençons par la propriété fondamentale de la théorie des transversales. La proposition est démontrée ici de plusieurs façons. D'abord, en coordonnées cartésiennes [Painvin 1866, p. 32], l'auteur montre, comme le fait Salmon, que si un segment M_1M_2 est coupé par une droite d'équation $Ax + By + C = 0$ en un point I, on a la relation :

$$\frac{M_1I}{IM_2} = -\frac{Ax_2 + By_2 + C}{Ax_1 + By_1 + C}.$$

Donc si un triangle $M_1M_2M_3$ est coupé par une transversale $I_1I_2I_3$, la relation précédente, appliquée aux trois côtés, mène, en prenant le produit des trois égalités obtenues, au théorème :

$$\frac{M_2I_1}{I_1M_3} \cdot \frac{M_3I_2}{I_2M_1} \cdot \frac{M_1I_3}{I_3M_2} = -1.$$

Plus avant dans l'ouvrage, Painvin reprend la démonstration de cette proposition en coordonnées « trilatères » [Painvin 1866, p. 56], une dénomination introduite par Painvin lui-même [Painvin 1865] : les coordonnées X, Y, Z d'un point sont égales, éventuellement à un multiple près, à ses distances, comptées positivement ou négativement, aux trois côtés d'un triangle de référence. Painvin établit que l'équation d'une droite s'écrit sous la forme $MX + NY + PZ = 0$.

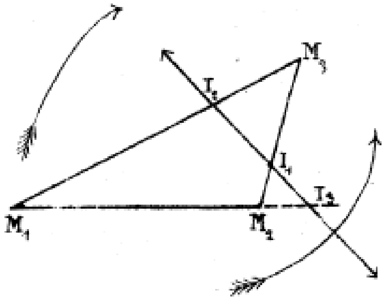
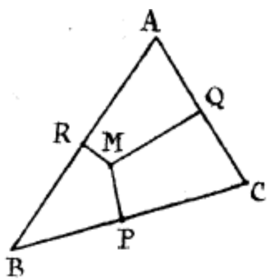


Figure 14. Théorème sur la transversale à un triangle [Painvin 1866, p. 32].



$X = MP$
$Y = MQ$
$Z = MR$

Figure 15. Coordonnées trilatères d'un point [Painvin 1866, p. 56].

Reprenons la configuration d'un triangle et d'une sécante. Le point a, situé sur le côté BC, a pour abscisse $X_0 = 0$ et ses deux autres coordonnées vérifient $\frac{Y_0}{Z_0} = -\frac{P}{N}$. Or $Y_0 = Ca \sin C$ et $Z_0 = -Ba \sin B$. En remplaçant, et en multipliant les égalités obtenues pour les trois points a, b, c, on obtient le théorème suivant attribué à Jean de Céva :

$$\frac{Ca}{Ba} \cdot \frac{Ab}{Cb} \cdot \frac{Bc}{Ac} = +1.$$

Un troisième exemple nous fournira une illustration de l'emploi des coordonnées tangentielles. Dans ce système, une droite d'équation $ux + vy - 1 = 0$ a pour coordonnées (u, v) et une équation de la forme $au + bv - 1 = 0$ caractérise un point. Painvin démontre l'énoncé suivant qu'il tire du *Traité de géométrie supérieure* de Chasles [Chasles 1852, p. 468] : « Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à un cercle, si une tangente roule sur le cercle, le produit de ses distances à deux sommets opposés est au produit de ses distances aux deux autres sommets dans un

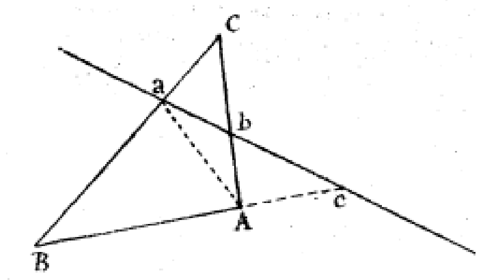


Figure 16. Théorème de Céva [Painvin 1866, p. 69].

rapport constant » [Painvin 1866, p. 180]. Painvin écrit les coordonnées

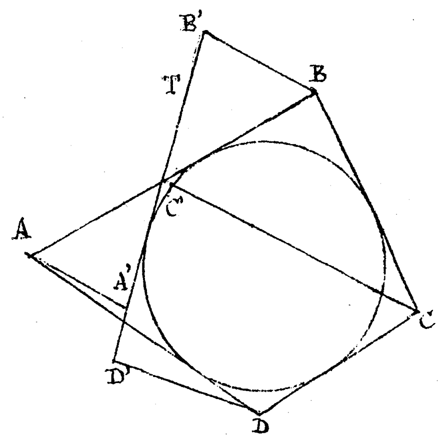


Figure 17. Cercle inscrit dans un quadrilatère [Painvin 1866, p. 181].

tangentielles des quatre sommets du quadrilatère :

$$\begin{cases} A = au + a_1 v - 1 = 0 \\ B = bu + b_1 v - 1 = 0 \\ C = cu + c_1 v - 1 = 0 \\ D = du + d_1 v - 1 = 0 \end{cases}$$

Dès lors une conique tangente aux quatre côtés du quadrilatère a nécessairement une équation en coordonnées tangentielles de la forme $AC - \lambda BD = 0$. En effet, d'une part, il s'agit d'une équation du second degré. Et d'autre part la droite AB par exemple a pour coordonnées la solution du système $A = 0$ & $B = 0$, donc elle vérifie l'équation, c'est-à-dire qu'elle est tangente à la conique. Donc le cercle considéré a une équation de cette forme. Les distances des quatre sommets à une tangente quelconque de coordonnées (u, v) sont :

$$AA' = \frac{au + a_1 v - 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{A}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad BB' = \frac{B}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$
$$CC' = \frac{C}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad DD' = \frac{D}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Painvin en déduit :

$$\frac{AA'.CC'}{BB'.DD'} = \frac{A.C}{B.D} = \lambda.$$

L'ouvrage de Painvin est donc extrêmement novateur par plusieurs aspects : pour le nombre considérable de questions à résoudre et de questions résolues, notamment des questions de concours ; pour l'intérêt porté aux méthodes de résolution, en présentant fréquemment plusieurs démonstrations d'une même proposition ; et enfin pour l'introduction de nouveaux systèmes de coordonnées, tout particulièrement les coordonnées tangentielles, introduites ici pour la première fois dans un ouvrage élémentaire en France.

Le deuxième ouvrage publié en 1866 qui intègre des notions de géométrie moderne en géométrie analytique est un recueil d'exercices presque entièrement tirés du premier volume du cours de Salmon, en se limitant aux énoncés sur la droite et le cercle. Son auteur, Eugène Jubé [52] (1816-1894), publie ce court recueil, une succession des propositions sans organisation apparente, « avec la conviction d'être utile aux élèves des classes de mathématiques spéciales ». C'est surtout l'emploi de la notation abrégée qui intéresse Jubé :

> Je recommande surtout à l'attention des élèves la méthode abrégée ; je ne sache pas qu'elle ait été présentée dans aucun des traités de géométrie analytique qu'ils ont entre les mains. Cependant c'est un procédé avantageux, introduit depuis longtemps dans l'enseignement chez nos voisins. Pourquoi rester en arrière dans la patrie de Descartes ? [Jubé 1866, préface].

52 Il est d'abord répétiteur dans l'institution tenue par son oncle à Paris [Brasseur 2020]. Agrégé en 1845, il enseigne alors au Collège royal de Saint-Omer puis en mathématiques spéciales à Brest en 1852. Il est par la suite inspecteur d'académie de 1857 à 1877.

Ainsi Jubé abrège-t-il sous la forme $\alpha = 0$ l'équation d'une droite de la forme $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$. α désigne alors, au signe près, la distance d'un point de coordonnées $(x; y)$ à la droite. Jubé utilise immédiatement cette notation pour démontrer que les bissectrices, les médianes et les hauteurs d'un triangle sont concourantes [Jubé 1866, p. 17]. Pour les premières par exemple, en vertu de la propriété que nous venons de signaler, l'équation de la bissectrice de deux droites d'équations respectives $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ est $\alpha = \beta$ ou encore $\alpha - \beta = 0$. Dans un triangle dont les côtés auraient pour équations $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $\gamma = 0$, l'équation de la troisième bissectrice est alors la somme des équations des deux autres, donc le point d'intersection des deux premières bissectrices appartient aussi à la troisième, c'est-à-dire qu'elles sont concourantes.

Nous voyons que la méthode des notations abrégées procure des démonstrations simples et courtes. Jubé souligne également, comme Salmon, le pouvoir d'invention de ces méthodes. L'équation du cercle circonscrit à un triangle de côtés α, β, γ est cherchée sous la forme :

$$l\beta\gamma + m\gamma\alpha + n\alpha\beta = 0,$$

où l, m et n sont trois coefficients numériques et α, β, γ les notations abrégées des équations des trois côtés du triangle. En effet, il s'agit de l'équation d'une courbe du second degré passant par les trois sommets du triangle. Un calcul permet de déterminer les coefficients de l'équation et Jubé obtient pour l'équation du cercle :

$$\beta\gamma \sin A + \gamma\alpha \sin B + \alpha\beta \sin C = 0,$$

les angles A, B, et C étant les trois angles du triangle [Jubé 1866, p. 45]. Une lecture attentive de cette équation donne lieu à l'invention d'un théorème : pour un point quelconque O, chacun de ces termes mesure le double de l'aire de l'un des trois triangles OPQ, OQR et ORP. Nous lisons donc sur cette équation le théorème de Simson selon lequel l'ensemble des points dont les projetés orthogonaux sur les trois côtés d'un triangle sont alignés est le cercle circonscrit à ce triangle, puisque dans ce cas l'aire du triangle PQR est nulle.

Les notions de géométrie moderne apparaissent encore, quelques années plus tard, dans un autre ouvrage d'enseignement. Voici comment Emile Joseph Boquel (1841-18..), un ancien élève de l'École polytechnique, de la promotion 1861, professeur de mathématiques dans une école préparatoire, introduit en 1872 ses *Leçons nouvelles de géométrie analytique* :

> J'ai voulu leur donner [aux élèves] les moyens de voir quel parti on peut tirer de certaines méthodes en Géométrie, j'ai cherché à leur inspirer le goût de cette admirable science. Le second motif qui m'a déterminé à publier ces leçons et à les intituler « leçons nouvelles » est le changement radical qui s'est introduit peu à peu dans l'enseignement de la Géométrie Analytique. À tort ou à raison, les ouvrages qui sont aujourd'hui entre les mains des élèves ne me paraissent plus en harmonie avec l'importance attribuée maintenant dans les cours et dans les examens à certaines questions. J'ai essayé de combler cette lacune, sans négliger pour cela les matières qui fesaient exclusivement l'objet de l'enseignement ancien [Boquel 1872].

Boquel introduit ainsi dans son ouvrage les notions de quadrilatère complet, de rapport anharmonique, de pôle et de polaire, de notation abrégée, de coordonnées homogènes, trilinéaires et tangentielles. Les chapitres se terminent par des exercices, plusieurs centaines au total, souvent tirés des sujets de concours.

Ces trois ouvrages que nous avons présentés restent peu diffusés et ne seront jamais réédités. Ce sont des initiatives isolées, et très discrètes au plan éditorial en comparaison des grandes éditions contemporaines. Par exemple, l'*Application de l'algèbre à la géométrie* de Bourdon connaît en 1872 une septième édition revue et annotée par Gaston Darboux. Cette édition ne fait pas mention des coordonnées homogènes, trilatères ou tangentielles, ni des notions de géométrie rationnelle. La troisième édition des *Leçons de géométrie analytique* de Briot et Bouquet est à nouveau publiée en 1868, 1875, 1878 et 1883. Elle contient un chapitre consacré à la théorie des pôles et des polaires depuis l'édition de 1863, et un autre sur les propriétés générales des sections coniques depuis celle de 1865, qui traite rapidement des coordonnées trilinéaires et des systèmes homographiques. Signalons enfin un troisième ouvrage au succès durable, les *Éléments de géométrie analytique* de Hippolyte Sonnet et Geronimo Frontera, qui connaissent une dizaine d'éditions entre 1854 et la Première Guerre mondiale. L'édition de 1877 se termine par un court chapitre d'une dizaine de pages consacrées aux coordonnées polaires, trilinéaires et tangentielles.

2.3.3. *Des ouvrages de cours actualisés*

Dans les années 1880, de nouveaux ouvrages sont publiés, considérablement plus étendus. Pourtant le programme d'admission au concours de l'École polytechnique a peu évolué. Rien sur les coordonnées trilinéaires, tangentielles, ou la notation abrégée, ni sur les théories de la géométrie moderne. Mais nous savons que les programmes officiels ne sont pas forcément respectés ni par les candidats ni par les examinateurs.

Depuis quelques années, Gaston Darboux donne des leçons de géométrie analytique qui portent des conceptions nouvelles. Il enseigne entre 1872 et 1876 à l'École normale supérieure, et à partir de 1879 à la Chaire de géométrie supérieure de la faculté des sciences de Paris, où il supplée à Chasles avant de lui succéder en 1881. Darboux, dont les leçons ont été publiées par la suite [Darboux 1917], reprend les progrès de la géométrie depuis environ un siècle, dus à ce qu'il appelle lui-même l'école de Monge, sur des principes qui lui paraissent devoir fonder désormais les études géométriques. Il intègre dès les premières pages les différents types de coordonnées, les notions de géométrie rationnelle, les éléments imaginaires, et défend l'importance majeure de la notion de transformation.

Entre 1882 et 1884, trois auteurs publient des traités de géométrie analytique bien plus étendus que les ouvrages existant. Ils respectent les conceptions de Darboux : réunir méthodes géométriques et analytiques, utiliser les transformations, et adopter un point de vue considérablement plus général, en utilisant notamment différents types de coordonnées. Le premier est rédigé par Louis Didier Henry Picquet[53] (1845-1925) : son *Traité de géométrie analytique à deux dimensions* [Picquet 1882] ne sera pas suivi d'un traité pour la géométrie à trois dimensions ni jamais réédité. Le second ouvrage connaîtra davantage de succès. Il est publié en 1884 par Émile Pruvost[54] (1833-1913). Il écrit ses *Leçons de géométrie analytique* [Pruvost 1884] « à l'usage de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique ». C'est un ouvrage plus accessible que celui de Picquet, en procédant notamment du particulier au général. L'auteur du troisième ouvrage est Gaston Gohierre de Longchamps[55] (1842-1906), auteur entre 1883 et 1885 d'un *Cours de mathématiques spéciales* [Gohierre de Longchamps 1883-1885] contenant trois volumes portant respectivement sur l'algèbre, sur la géométrie analytique à deux, puis à trois dimensions.

53 Capitaine du Génie, polytechnicien de la promotion 1864, répétiteur à l'École polytechnique et examinateur d'admission après 1887, il occupera aussi la présidence de la Société Mathématique de France.

54 Normalien de la promotion 1853, inspecteur général, et ancien professeur de mathématiques spéciales dans plusieurs Lycées, dont finalement Louis-le-Grand.

55 Normalien de la promotion 1863, agrégé, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne au moment de la publication de son *Cours*.

Même s'ils présentent de courtes listes d'exercices à la fin des chapitres successifs, ce sont des ouvrages de théorie, et prêtent peu d'attention à la question de la résolution des questions.

2.3.4. *Deux recueils de problèmes de grande ampleur*

En revanche, deux polytechniciens, tous deux professeurs à l'école préparatoire Sainte-Barbe, publient dans les années suivantes des recueils de problèmes de géométrie analytique. Le premier d'entre eux, Henri Camille Joseph Kœhler (1837-1889), polytechnicien de la promotion 1856, ancien répétiteur à l'École polytechnique et ancien directeur des études de l'École préparatoire Sainte-Barbe, publie en 1886 des *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure* en deux volumes. Il affirme que de tels ouvrages n'existent pas en France. Il est vrai que le recueil de Jubé ne traite que de la droite et du cercle, et que ceux de Puissant et de Ritt sont désormais anciens.

> En dehors des publications périodiques, il n'existe en France aucun Recueil d'Exercices sur la Géométrie analytique [...] Je n'ai pas cru devoir me renfermer strictement dans les limites tracées par les programmes officiels ; je m'adresse aux bons élèves de Mathématiques spéciales, aux jeunes gens qui se préparent aux examens de l'agrégation, et, en conséquence, j'ai donné une large part à des méthodes analytiques et géométriques sur lesquelles on doit se borner, dans l'enseignement classique, à des aperçus très succincts. C'est ainsi que j'ai fait souvent usage des coordonnées tangentielles, et que j'ai consacré plus de deux chapitres de ce volume aux coordonnées trilinéaires et à leurs applications [Kœhler 1886].

Kœhler tire principalement ses énoncés d'un ouvrage de l'anglais Joseph Wolstenholme, avec son accord, intitulé *A book of mathematical problems* [Wolstenholme 1867]. Il a puisé aussi dans l'ouvrage de Painvin, qu'il estime « à peu près introuvable » à son époque. Le deuxième volume sur la géométrie dans l'espace contient de nombreux sujets de problèmes posés à l'Agrégation. Ces deux ouvrages sont d'abord des collections de questions corrigées, tandis que l'ouvrage suivant aborde véritablement la question de la méthode en géométrie analytique.

Un jeune professeur de mathématiques spéciales à l'école préparatoire Sainte-Barbe, polytechnicien de la promotion 1884, Claude Joseph Adrien Rémond (1864-1935), publie en 1887 (2e éd. 1891) des *Exercices élémentaires de géométrie analytique*. La préface annonce un ouvrage portant sur les méthodes générales de la géométrie analytique :

> Les Traités de Géométrie analytique sont consacrés surtout à l'exposé des théories générales et ne peuvent indiquer que d'une manière incidente

> quelques applications. Aussi les élèves éprouvent-ils de réelles difficultés à résoudre les problèmes, et vont-ils un peu au hasard à la recherche des solutions [Rémond 1891, p. v].

Même s'il recommande au lecteur la lecture des ouvrages de Kœhler, d'un niveau plus élevé et par conséquent adressé à un public plus avancé, Rémond explique que son ouvrage s'en distingue également par l'approche davantage centrée sur les méthodes :

> L'Auteur de cet Ouvrage s'est moins préoccupé de réunir des Exercices de Géométrie analytique que d'exposer les Méthodes générales à employer pour résoudre les problèmes. L'élève qui les possèdera parfaitement n'éprouvera aucune difficulté à en faire l'application et pourra même se livrer à des recherches originales.
> L'emploi de ces méthodes donne parfois, en raison même de leur généralité, une solution un peu lourde ; mais cet inconvénient, qui ne se présente pour l'élève qu'au début de ses études, est largement compensé par le profit qu'il en tire en n'étant jamais arrêté par les questions qu'on lui propose [Rémond 1891, p. v].

Les chapitres sont ordonnés selon les notions géométriques concernées : droite, cercle, conique, tangente, normale, etc. Dans chaque chapitre l'auteur rappelle d'abord les résultats démontrés dans tous les cours professés conformément aux programmes officiels. Il donne ensuite la forme sous laquelle ces propriétés se présentent ou s'emploient dans les applications ; il énonce et démontre celles de ces propriétés qui forment la base de la méthode qu'il préconise, lorsqu'il y a lieu. Chaque chapitre se termine par des renvois à des sujets de concours regroupés à la fin d'un deuxième volume, constitué des énoncés donnés aux examens d'admission aux Écoles polytechnique, normale et centrale, ainsi qu'au concours général. Il s'agit en grande majorité de problèmes de détermination de lieux géométriques.

En réalité la méthode de Rémond consiste essentiellement dans un choix des axes bien adapté au problème, et dans une théorie de l'élimination uniforme exposée dans un premier chapitre de préliminaires. Voyons sur un exemple tiré du chapitre intitulé « Pôle. Polaire » comment fonctionnent les méthodes de Rémond. Il rappelle en tête de ce chapitre, entre autres choses, que si α, β, γ sont les coordonnées homogènes d'un point P appelé pôle, et $F(x, y) = 0$ l'équation d'une conique, alors la polaire du point P a pour équation :

$$\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z = 0$$

où F'_x , F'_y , F'_z désignent les demi-dérivées de la fonction F rendue homogène par rapport à chacune des variables. Le deuxième problème résolu a pour énoncé :

> On donne une conique fixe C et une droite D ; on projette chaque point M de D sur la polaire de ce point par rapport à la conique C : on demande le lieu de cette projection [Rémond 1891, p. 223].

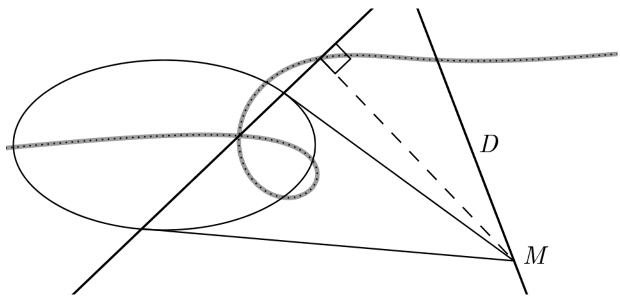


Figure 18. La strophoïde.

Rémond commence par faire un choix approprié des deux axes de coordonnées, en prenant pour l'un un axe de symétrie de la conique et pour l'autre la tangente en un point de cet axe à la conique C, dont l'équation est dès lors de la forme :

$$y^2 - 2px - qx^2 = 0.$$

La droite D a pour équation $Ax + By + C = 0$, et la polaire d'un point $M(\alpha, \beta)$ de la droite D a pour équation :

$$\alpha(p + qx) - \beta y + px = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire à cette polaire passant par le point M est :

$$\beta(x - \alpha) + (\alpha q + p)(y - \beta) = 0.$$

Rémond obtient ainsi deux équations vérifiées par les coordonnées (x, y) d'un point du lieu cherché, auxquelles il ajoute l'équation exprimant l'appartenance du point M à la droite D :

$$\begin{aligned} \alpha(p + qx) - \beta y + px &= 0, \\ \beta(x - \alpha) + (\alpha q + p)(y - \beta) &= 0, \\ A\alpha + B\beta + C &= 0. \end{aligned}$$

Conformément à la méthode d'élimination de deux paramètres entre trois équations dont deux sont linéaires, décrite dans les préliminaires, Rémond homogénéise les trois équations, combine la première et la troisième pour aboutir à la proportionnalité :

$$\frac{\alpha}{Bpx + Cy} = \frac{\beta}{C(p + qx) - Apx} = \frac{\gamma}{-Ax - B(p + qx)}$$

et enfin introduit ces relations dans la deuxième équation :

$$\begin{aligned}(q + 1)&(Bpx + Cy)[C(p + qx) - Apx]\\ &+ [Ay + B(p + qx)]\{qy(Bpx + Cy) + (x - p)[(Cq - Ap)x + Cp]\}\\ &- py[Ay + B(p + qx)]^2 = 0.\end{aligned}$$

C'est l'équation, du troisième degré, du lieu cherché.

3. CONCLUSION

Nous avons établi et analysé dans cet article la présence dans les ouvrages d'enseignement préparatoire de la géométrie au XIX^{e} siècle en France de propos structurés sur la notion de méthode au sens de moyen disponible pour aborder la résolution des problèmes.

L'importance prise par les problèmes dans les ouvrages d'enseignement préparatoire devient en effet considérable au long de la période : de quelques énoncés dans les ouvrages du début du siècle, on est passé à des centaines, voire des milliers d'énoncés dans certains ouvrages de la fin du siècle. Ce changement résulte en bonne part de la pression exercée par les concours, ceux pour l'entrée dans les écoles du gouvernement, mais aussi celui du concours général, dont l'influence sur la pédagogie dans l'enseignement secondaire mériterait d'être étudiée de manière approfondie.

Les programmes officiels ne disent rien ou presque des énoncés de problèmes à donner aux élèves, ou des méthodes à employer pour leur résolution. Dès lors, certains auteurs de manuels, le plus souvent des professeurs, prennent des initiatives.

En géométrie élémentaire, nous avons montré comment certains auteurs exposent à leurs lecteurs la voie de la découverte, et entendent ainsi développer leur intelligence pour résoudre seuls d'autres problèmes. Au-delà de l'intérêt renouvelé pour une analyse purement géométrique, cette recherche de moyens de résolution amène Gabriel Lamé à concevoir une notion nouvelle et a priori contradictoire de « méthode particulière ». Celle-ci est diffusée et développée dans les ouvrages d'enseignement tout au long du siècle, jusqu'à faire l'objet principal d'un ouvrage de grande ampleur consacré à ces méthodes particulières. Certaines de ces méthodes, comme la méthode des lieux géométriques ou la méthode de transformation des figures, s'avèrent d'une grande efficacité. Par ailleurs, et surtout après 1865, les notions de géométrie moderne, elles aussi largement absentes des programmes de l'enseignement préparatoire, sont mobilisées dans des ouvrages entièrement dédiés à ce sujet, présentées et réorganisées pour fournir des moyens de résolution des problèmes.

En géométrie analytique, la chronologie est très largement différente. Constituée en domaine d'enseignement secondaire au début du siècle, l'uniformité de ses moyens de démonstration semble d'abord écarter la nécessité de réflexions approfondies sur les méthodes de résolution des problèmes. Puis, au milieu du siècle, des auteurs comme Briot et Bouquet défendent l'efficacité d'une pluralité de méthodes particulières face à la lourdeur des équations déduites par une méthode uniforme et systématique. Ces méthodes particulières recourent notamment aux théories de la géométrie moderne, exprimées le cas échéant sous une forme analytique. En 1866, deux ouvrages paraissent, l'un de cours, contenant néanmoins des centaines d'énoncés de problèmes, et l'autre d'exercices, tous deux inspirés par des travaux étrangers, qui exposent de nouvelles méthodes en géométrie analytique : la méthode des notations abrégées, et les coordonnées homogènes et tangentielles. Mais ces ouvrages, avec un troisième paru en 1872, restent assez confidentiels. C'est véritablement dans les années 1880 que paraissent des ouvrages de plus grande portée, à la fois des ouvrages de cours qui concrétisent au plan éditorial les renouvellements qu'a connus la discipline, et surtout des recueils d'exercices volumineux, attachés aux questions de méthode de résolution.

Il est apparu dans ce travail, comme cela a été montré ailleurs pour l'enseignement de l'analyse [Renaud 2017], que les ouvrages d'enseignement préparatoire au XIXe siècle sont le lieu d'initiatives fortes, tant par le choix et l'organisation des théories que par la conception même de ces théories mathématiques. Les professeurs – et les examinateurs – profitent d'une grande liberté vis-à-vis des programmes, et bien souvent pèsent sur leur conception, la pratique précédant alors une promulgation officielle.

RÉFÉRENCES

ALFONSI (Liliane)
[2011] *Étienne Bézout (1730-1783). Mathématicien des Lumières*, Paris : L'Harmattan, 2011.

AMIOT (Antoine) & DESVIGNES (A.)
[1858] *Solutions raisonnées des problèmes énoncés dans les éléments de géométrie*, Paris : Dézobry, Magdeleine et cie, 1858.

BARBIN (Évelyne)
[2009a] Gabriel Lamé (1795–1870). Les pérégrinations d'un ingénieur au XIXe siècle, *Bulletin de la Sabix*, 44 (2009).
[2009b] L'association créatrice de l'analyse et de la géométrie selon Gabriel Lamé, dans Barbin (Evelyne), éd., *Gabriel Lamé. Les pérégrinations d'un ingénieur du XIXe siècle*, Paris : Sabix, École polytechnique, 2009, p. 101–111.
[2012] Teaching of conics in 19th and 20th centuries : on the conditions of changing (1854–1997), dans Bjarnadottir (Kristin), Furinghetti (Fulvia), Matos (Jose) & Schubring (Gert), éd., *Dig where you stand 2. Proceedings of the Second International Conference on the History of Mathematics Education*, Lisbon : UIED, 2012, p. 44–59.
[2015] Top-down : the Role of the Classes Préparatoires aux Grandes Écoles in the French teaching of descriptive geometry (1840–1910), dans Bjarnadottir (Kristin), Furinghetti (Fulvia), Pritz (Johan) & Schubring (Gert), éd., *Dig where you stand 3. Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education*, Uppsala : Uppsala University - Department of Education, 2015, p. 49–64.
[2017] Le réseau des professeurs de mathématiques des classes préparatoires au XIXe siècle, dans Hurel (Arnaud), éd., *La France savante*, Paris : CTHS, 2017.
[2019] Descriptive Geometry in France : Circulation, Transformation, Recognition (1795-1905), dans *Descriptive Geometry, The Spread of a Polytechnic Art*, New York, etc. : Springer, 2019, p. 19–38.

BARBIN (Évelyne) & MENGHINI (Marta)
[2014] History of Teaching Geometry, dans Karp (Alexander) & Schubring (Gert), éd., *Handbook on the history of mathematics education*, New York, etc. : Springer, 2014, p. 473–492.

BELHOSTE (Bruno)
[1989] Les caractères généraux de l'enseignement secondaire scientifique : de la fin de l'Ancien Régime à la Première Guerre mondiale, *Histoire de l'éducation*, 41 (1989), p. 3–45.
[1990] L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes, *Revue d'histoire des sciences*, tome 43, no 4 (1990), p. 371–400.
[2001] La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées, *Histoire de l'éducation*, 90 (2001), p. 101–130.
[2002] Anatomie d'un concours. L'organisation de l'examen d'admission à l'École polytechnique de la Révolution à nos jours, *Histoire de l'éducation*, 94 (2002), p. 141–175.
[2003] *La formation d'une technocratie. L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris : Belin, 2003.

Belhoste (Bruno), éd.
[1995] *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789-1914*, Paris : INRP-Economica, 1995.

Bergery (Claude Lucien)
[1826] *Géométrie appliquée à l'industrie, à l'usage des artistes et des ouvriers. Leçons publiques données dans l'hôtel de ville de Metz*, Metz : Lamort, 1826.

Bézout (Étienne)
[1764-1769] *Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*, Paris : Musier, 1764-1769.

Bioche (Charles)
[1891] *Introduction à l'étude de la géométrie moderne*, Paris : Delagrave, 1891.

Biot (Jean Baptiste)
[1802] *Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré*, Paris : Duprat, 1802.
[1805] *Essai de géométrie analytique, appliqué aux courbes et aux surfaces du second ordre*, Paris : Bernard, 1805.

Bobillier (Étienne)
[1827–1828] Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 18 (1827–1828).

Bonnel (Joseph-Florentin)
[1891] *Essai de géométrie rationnelle*, Lyon : Palud, 1891.

Boquel (Émile)
[1872] *Leçons nouvelles de géométrie analytique, à l'usage des candidats aux écoles polytechnique, normale supérieure et centrale des arts et manufactures*, Paris : Chauvin, 1872.

Bourdon (Pierre Louis Marie)
[1825] *Application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Bachelier, 1825.

Boyer (Carl)
[2004] *History of Analytic Geometry*, New York : Dover Publication, 2004 ; édition originale de 1956.

Brasseur (Roland)
[2012] Millet, Luc Alphonse, *L'archicube*, 11 bis (2012), p. 90–93.
[2020] Roland Brasseur, Roland Brasseur, `https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/`, 2020 ; dernière consultation le 2 avril 2020.

Brianchon (Charles)
[1817] *Mémoire sur les lignes du second ordre*, Paris : Bachelier, 1817.

Briot (Charles) & Bouquet (Jean-Claude)
[1851] *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, Paris : Dezobry et Magdeleine, 1851 ; 2e édition.
[1864] *Complément de la géométrie analytique*, Paris : Dunod, 1864.

Carnot (Lazare)

[1803] *Géométrie de position*, Paris : Duprat, 1803.

[1806] *Mémoire sur les relations qui existent entre les distances respectives entre cinq points quelconques pris dans l'espace, suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, Paris : Courcier, 1806.

Champion (Jacques)

[1975] Le concours général et son rôle dans la formation des élites universitaires au xix^e siècle, *Revue française de pédagogie*, 31 (1975), p. 71–82.

Chasles (Michel)

[1830] Note sur les Propriétés Générales du Système de Deux Corps Semblables entr'eux, *Bulletin général et universel des annonces et des nouvelles scientifiques*, xiv (1830), p. 321–326.

[1837] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, Bruxelles : Hayez, 1837.

[1852] *Traité de géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1852.

[1865] *Traité des sections coniques*, Paris : Gauthier-Vallars, 1865.

[1885] Note de géométrie, *Nouvelles annales de mathématiques*, 3^e série, tome 4 (1885), p. 105–109.

Chemla (Karine)

[1998] Lazare Carnot et la généralité en géométrie. Variations sur le théorème dit de Ménélaüs, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 4 (1998), p. 163–190.

[2016] The value of generality in Michel Chasles's historiography of geometry, dans Chemla (Karine), Rabouin (David) & Chorlay (Renaud), éd., *The Oxford handbook of generality in mathematics and the sciences*, Oxford : Oxford Univ. Press, 2016, p. 47–89.

Chemla (Karine), Rabouin (David) & Chorlay (Renaud)

[2016] *The Oxford handbook of generality in mathematics and the sciences*, Oxford : Oxford Univ. Press, 2016.

Chervel (André)

[2015] Les agrégés de l'enseignement secondaire. Répertoire 1809-1960, 2015; `http://rhe.ish-lyon.cnrs.fr/?q=agregsecondaire_laureats`, dernière consultation le 02 Avril 2020.

Chevalarias (Nathalie)

[2014] Changes in the teaching of similarity in France : from similar triangles to transformations (1845-1910), *International journal for the history of mathematics education*, 9(1) (2014), p. 1–32.

Cirodde (Paul Louis)

[1848] *Leçons de géométrie analytique*, Paris : Hachette, 1848; 2^e édition.

Choppin (Alain)

[1986] Le cadre législatif et réglementaire des manuels scolaires. De la Révolution à 1939, *Histoire de l'éducation*, 29 (1986), p. 21–58.

COMBEROUSSE (Charles de)
[1860–1862] *Cours de mathématiques*, Paris : Mallet-Bachelier, 1860–1862.

COMTE (Auguste)
[1843] *Traité élémentaire de géométrie analytique à deux et à trois dimensions contenant toutes les théories générales de géométrie accessibles à l'analyse ordinaire*, Paris : Carilian-Gœury et Vve Dalmont, 1843.

CONDETTE (Jean-François)
[2006] PERCIN Nicolas Jules, dans *Les recteurs d'académie en France de 1808 à 1940. Tome II, Dictionnaire biographique*, Paris : Institut national de recherche pédagogique, 2006, p. 313–314 ; `www.persee.fr/doc/inrp_0298-5632_2006_ant_12_2_4515`, dernière consultation le 2 avril 2020.

COOLIDGE (Julian Lowell)
[1947] *A history of geometrical methods*, Oxford : Oxford Univ. Press, 1947.

DAHAN-DALMEDICO (Amy)
[1986] Un texte de philosophie mathématique de Gergonne, *Revue d'histoire des sciences*, 39 (1986), p. 97–126 ; nº 2.

DARBOUX (Gaston)
[1917] *Principes de géométrie analytique*, Paris : Gauthier-Villars, 1917.

DESBOVES (Adolphe)
[1880] *Questions de géométrie élémentaire : méthodes et solutions, avec un exposé des principales théories et de nombreux exercices proposés*, Paris : Ch. Delagrave, 1880 ; 3e édition.

DUHAMEL (Jean Marie Constant)
[1860] *Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes*, Paris : Firmin Didot, 1860.

[1865-1873] *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, Paris : Gauthier-Villars, 1865-1873 ; 3 vol.

EHRHARDT (Caroline)
[2009] L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant. Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), *Histoire de l'éducation*, 123 (2009), p. 5–43.

GENTIL (Bruno)
[2002] La postérité mathématique d'Auguste Comte : à propos de l'intervention de Jean Dhombres au colloque de Cerisy, *Bulletin de la Sabix*, 30 (2002), p. 7–10.

GERGONNE (Joseph Diaz)
[1817] De l'analise et de la synthèse, dans les sciences mathématiques, *Annales de mathématiques pures et appliquées*, 7 (1817), p. 345–372.

GIRAUD (Charles Joseph Barthélemy)
[1851] Liste chronologique et officielle des ouvrages d'enseignement supérieur et secondaire approuvés de 1802 au 1er septembre 1850, *Bulletin administratif de l'instruction publique*, 2(14) (1851), p. 69–166.

GISPERT (Hélène)
[2014] Mathematics Education in France : 1800-1980, dans Karp (Alexander) & Schubring (Gert), éd., *Handbook on the history of mathematics education*, New York, etc. : Springer, 2014, p. 229–240.

GOHIERRE DE LONGCHAMPS (Gaston)
[1883-1885] *Cours de mathématiques spéciales*, Paris : Delagrave, 1883-1885 ; 3 vol.

GOW (Rod)
[1997] Georges Salmon 1819-1904. His mathematical work and influence, *Irish Mathematical Society Bulletin*, 39 (1997).

GROSSOUVRES (De)
[1866] Concours général (1866). Mathématiques élémentaires, *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e série, tome 5 (1866), p. 556–558.

HACHETTE (J.N.P.)
[Frimaire An XIV] *Correspondance sur l'École polytechnique*, 5 (An XIV).

HAVELANGE (Isabelle), HUGUET (Françoise) & LEBEDEFF-CHOPPIN (Bernadette)
[1986] *Les inspecteurs généraux de l'Instruction publique. Dictionnaire biographique 1802-1914*, Paris : Institut national de recherche pédagogique, 1986.

HOUSEL (Charles)
[1865] *Introduction à la géométrie supérieure*, Paris : Bachelier, 1865.

HULIN (Nicole)
[1982] À propos de l'enseignement scientifique : une réforme de l'enseignement secondaire sous le Second Empire : la «bifurcation» (1852-1864), *Revue d'histoire des sciences*, 35(3) (1982), p. 217–245.

HUMMEL (DIR.) (Pascale)
[1995] *Pour une histoire de l'École normale supérieure : Source d'archives 1794-1993*, Paris : Éditions Rue d'Ulm, 1995 ; dernière consultation le 2 avril 2020.

JUBÉ (Eugène)
[1866] *Exercices de géométrie analytique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales*, Paris : Noblet et Baudry, 1866.

KŒHLER (Henri Camille Joseph)
[1886] *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure à l'usage des candidats aux écoles polytechnique et normale et à l'agrégation*, Paris : Gauthier-Villars, 1886.

LACROIX (Sylvestre François)
[1798a] *Éléments de géométrie*, Paris : Courcier, 1798.
[1798b] *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Duprat, 1798.
[1805] *Essai sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier*, Paris : Courcier, 1805.
[1807] *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris : Courcier, 1807 ; 4[e] édition.

LAFFITE (Pierre)
[1894] Auguste Comte examinateur d'admission à l'École polytechnique , *Nouvelles annales de mathématiques*, 3[e] série, tome 13 (1894), p. 405–428.

LA FRÉMOIRE (Henri Charette de)
[1852] *Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire*, Paris : Carilian Gœury et V[ve] Dalmont, 1852 ; entièrement revue et corrigée par E. Catalan.

LAMÉ (Gabriel)
[1818] *Examen des différentes méthodes employées pour la résolution des problèmes de géométrie*, Paris : V[ve] Courcier, 1818.

LEFÉBURE DE FOURCY (Louis-Étienne)
[1827] *Leçons de géométrie analytique*, Paris : Bachelier, 1827.

LEGENDRE (Adrien-Marie)
[1794] *Éléments de géométrie*, Paris : Firmin Didot, 1794.
[1845] *Éléments de géométrie*, Paris : Firmin Didot, 1845 ; avec additions et modifications par M. A. Blanchet.

LHUILIER (Simon)
[1809] *Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques*, Paris, Genève : Paschoud, 1809.

LIOUVILLE (Joseph)
[1847] Note au sujet de l'article précédent, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 12 (1847), p. 265–290.

LORENAT (Jemma)
[2019] "Je ne point ambitionée d'être neuf" : modern geometry in early nineteenth-century French textbooks, dans Schubring (Gert), éd., *Interfaces between mathematical practices and mathematical education*, New York, etc. : Springer, 2019, p. 69–122.

LORIA (Gino)
[1948] Perfectionnements, Évolution, Métamorphoses du concept de «coordonnées» : Contribution à l'Histoire de la Géométrie Analytique, *Osiris*, 8 (1948), p. 218–288.

LUCAS (Félix)
[1864] *Études analytiques sur la théorie générale des courbes planes*, Paris : Mallet-Bachelier, 1864.

Marie (Frère Gabriel)
[1896] *Exercices de géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues*, Paris : Poussièlgue, 1896 ; 3e édition.

Millet (Luc Alphonse)
[1870] *Principales méthodes de géométrie moderne*, Laval : Deverdun, 1870.

Moussard (Guillaume)
[2015] *Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794–1891)*, Thèse, Université de Nantes, 2015.
[2017] The standardisation of the place of problems in French geometry textbooks during the 19th century, dans Bjarnadottir (Kristin), Furinghetti (Fulvia), Menghini (Marta), Prytz (Johan) & Schubring (Gert), éd., *Dig where you stand 4*, University of Turin : Edizioni Nuova Cultura, 2017, p. 219–234.

Mutel (Auguste)
[1831] *Cours de géométrie et de trigonométrie à l'usage des aspirans à l'École polytechnique et des écoles d'Artillerie et de Marine*, Lyon : Périsse frères, 1831.

Nabonnand (Philippe)
[2006] *Contributions à l'histoire de la géométrie projective au 19e siècle*, Thèse, 2006 ; texte de soutenance d'habilitation à diriger des recherches.
[2011a] L'argument de la généralité chez Carnot, Poncelet et Chasles, dans Flament (Dominique) & Nabonnand (Philippe), éd., *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la maison des sciences de l'homme, 2011, p. 17–47.
[2011b] Une géométrie sans figure ?, dans Barbin (Evelyne) & Lombard (Philippe), éd., *La Figure et la Lettre*, Nancy : Presses Universitaires de Nancy, 2011, p. 99–119.

Newton (Isaac)
[1802] *Arithmétique universelle*, Paris : Bernard, 1802 ; trad. Noël Beaudeux.

Page (Charles-Émile)
[1841] *Complément de géométrie analytique*, Paris : Carilian-Gœury et Vve Dalmont, 1841.

Painvin (Louis Félix)
[1865] Théorie des surfaces polaires d'un point, *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e série(tome 4) (1865), p. 337–346.
[1866] *Principes de la géométrie analytique. Géométrie plane*, Douai : Impr. Robaut, 1866.

Panza (Marco) & Otte (Michael)
[1997] *Analysis and Synthesis in Mathematics*, Dordrecht : Kluwer academic publisher, 1997.

Percin (Nicolas Jules)
[1848] *Complément de géométrie, ou Recueil de questions et de problèmes suivis des principes de géométrie descriptive, à l'usage des aspirants aux écoles spéciales*, Nancy : Grimblot et Vve Raybois, 1848.

Petit (Annie)
[1996] Comte et les mathématiques, dans Barbin (Évelyne) & Caveing (Maurice), éd., *Les Philosophes et les mathématiques*, Paris : Ellipses, 1996, p. 174–192.

Picquet (Henry)
[1882] *Traité de géométrie analytique à l'usage des candidats aux Écoles du gouvernement et aux grades universitaires*, Paris : Masson, 1882.

Poncelet (Jean-Victor)
[1822] *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.
[1862] *Applications d'analyse et de géométrie*, Paris : Mallet-Bachelier, 1862.

Prouhet (Eugène)
[1866] Remarques sur les compositions de trigonométrie et de mathématiques faites en 1865 pour l'admission à l'École polytechnique, *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e série, tome 5 (1866), p. 34.

Pruvost (Émile)
[1884] *Leçons de géométrie analytique à l'usage de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique*, Paris : Dupont, 1884.

Puissant (Louis)
[1801] *Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique, suivant les principes de Monge et de Lacroix*, Paris : Duprat, 1801.
[1809] *Recueil de diverses propositions de géométrie, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique*, Paris : Vve Bernard, 1809 ; 2e édition.
[1824] *Recueil de diverses propositions de géométrie résolues ou démontrées par l'analyse algébrique*, Paris : Bachelier, 1824 ; 3e édition.

Rémond (Antoine)
[1891] *Exercices élémentaires de géométrie analytique à deux et à trois dimensions, avec un exposé des méthodes de résolution*, Paris : Gauthier-Villars, 1891 ; 2e édition.

Renaud (Hervé)
[2017] *La fabrication d'un enseignement de l'analyse pour l'enseignement secondaire en France au XIXe siècle : acteurs, institutions, programmes et manuels*, Thèse, Université de Nantes, 2017.

Reynaud (Antoine André Louis) & Duhamel (Jean Marie Constant)
[1823] *Problèmes et développements sur diverses parties des mathématiques*, Paris : Bachelier, 1823.

Ritt (Georges)
[1836] *Problèmes de géométrie et de trigonométrie rectiligne et sphérique*, Paris : Hachette, 1836.
[1839] *Manuel des aspirants à l'École polytechnique : contenant un très grand nombre de questions recueillies dans les derniers examens de concours avec les solutions*, Paris : Hachette, 1839.

Rouché (Eugène) & Comberousse (Charles)
[1866] *Traité de géométrie élémentaire*, Paris : Gauthier-Villars, 1866.
[1873] *Éléments de géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1873 ; 2e édition.

Sakarovitch (Joël)
[1998] *Épures d'architecture : De la coupe des pierres a la géométrie descriptive xiv^e–xix^e siècles*, Basel : Birkhaüser, 1998.

Salmon (Georges)
[1870] *Traité de géométrie analytique*, Paris : Gauthier-Villars, 1870 ; trad. H. Résal et V. Vaucheret.

Savoie (Philippe)
[2013] *La construction de l'enseignement secondaire (1802-1914) : Aux origines d'un service public*, Lyon : ENS Éditions, 2013 ; http://books.openedition.org/enseditions/5044, dernière consultation le 2 avril 2020.

Schubring (Gert)
[1987] On the Methodology of Analysing Historical Textbooks : Lacroix as Textbook Author, *For the Learning of Mathematics*, 7(3) (1987), p. 41–51.

Serret (Paul)
[1855] *Des méthodes en géométrie*, Paris : Mallet-Bachelier, 1855.

Terquem (Olry)
[1829] *Manuel de géométrie*, Paris : Roret, 1829.
[1849] Cirodde, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 8 (1849), p. 203–206.

Vincent (Alexandre Joseph Hidulphe)
[1834] *Cours de géométrie élémentaire, à l'usage des élèves qui se destinent à l'École polytechnique ou aux Écoles militaires*, Paris : Bachelier, 1834 ; 3e édition.

Wolstenholme (Joseph)
[1867] *A book of mathematical problems*, Londres et Cambridge : Macmillan & co, 1867.