Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

INDUCTION AUTOMORPHE POUR LES REPRÉSENTATIONS ELLIPTIQUES

Martin Fatou

Tome 152
Fascicule 2

2024

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 355-375

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 2, tome 152, juin 2024

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 160 € ($ 240),
avec supplément papier : Europe 244 €, hors Europe 330 € ($ 421)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
152 (2), 2024, p. 355-375

INDUCTION AUTOMORPHE POUR LES REPRÉSENTATIONS ELLIPTIQUES

par Martin Fatou

Résumé. — Nous étendons l'application de relèvement pour l'induction automorphe définie par une identité de caractères à toutes les représentations elliptiques.

Abstract (*Automorphic induction for elliptic representations*). — We extend the lift application for automorphic induction defined by a character identity to all elliptic representations.

Introduction

Soit F un corps commutatif localement compact non archimédien, soit E une extension cyclique de F de degré d et soit $m \geq 1$ un entier. D'après le théorème du corps de classes local, l'extension E est définie par un caractère $\kappa : F^\times \to \mathbb{C}^\times$ tel que $\ker(\kappa) = \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$, où $\mathrm{N}_{E/F} : E^\times \to F^\times$ est l'application norme. L'induction automorphe (locale) est une application qui associe à une représentation lisse irréductible τ de $\mathrm{GL}_m(E)$ une représentation lisse irréductible π de $\mathrm{GL}_{md}(F)$ qui est κ-stable, i.e. isomorphe à $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$. Cette

Texte reçu le 2 juin 2022, modifié le 9 novembre 2023, accepté le 12 janvier 2024.

Martin Fatou, Université Aix-Marseille, 163 avenue de Luminy, 13009 Marseille, France • *E-mail :* martin.fatou@univ-amu.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 22E50.

Mots clefs. — Induction automorphe, représentations elliptiques, opérateurs d'entrelacement, induction parabolique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2024/355/$ 5.00
doi:10.24033/bsmf.2891

application s'exprime par une identité de caractères et correspond, via la correspondance de Langlands locale, à l'induction de E à F des représentations galoisiennes.

L'induction automorphe pour les représentations irréductibles génériques unitaires a été démontrée pour F de caractéristique nulle par G. Henniart et R. Herb dans [4], et pour F de caractéristique > 0 par G. Henniart et B. Lemaire dans [5]. Nous démontrons ici que cette application existe également pour les représentations (irréductibles) elliptiques en utilisant uniquement des arguments locaux (et grâce aux résultats de [4] et [5] qui ont été obtenus par une technique locale-globale). Ces méthodes locales constituent un des outils qui seront utilisés plus tard pour démontrer l'induction automorphe pour toutes les représentations unitaires.

Pour cela, nous nous inspirons de l'article de A. Badulescu et G. Henniart [1][1], qui concerne le changement de base. Rappelons que le changement de base associe à une représentation lisse irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ une représentation lisse irréductible σ-stable de $\mathrm{GL}_n(E)$ où σ est un générateur de $\mathrm{Gal}(E/F)$. Tout comme pour l'induction automorphe, l'application de changement de base s'exprime par une identité de caractères.

A. Badulescu et G. Henniart démontrent (en particulier) que le changement de base existe pour les représentations elliptiques (Theorem C). Nous suivons de très près leur article.

Nous donnons dans la première section l'identité de caractères définissant l'induction automorphe. Puis nous rappelons les différentes classifications des représentations. L'identité de caractères donnée en section 1 nécessite un opérateur d'entrelacement, c'est pourquoi nous les définissons en section 3. Nous définissons d'abord l'opérateur d'entrelacement d'une induite, puis d'un sous-quotient irréductible et enfin d'un sous-quotient irréductible d'une induite. Nous normalisons ces opérateurs en utilisant les fonctionnelles de Whittaker. En section 4 nous rappelons la construction des représentations elliptiques à partir des représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable. Nous profitons des sections 5 et 6 pour rappeler des résultats déjà établis sur l'induction automorphe : en section 5 l'induction automorphe pour les représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable et en section 6 la compatibilité entre l'induction parabolique et l'induction automorphe. Enfin nous démontrons notre théorème en section 7. Nous montrons que les représentations elliptiques admettent une induite automorphe en exploitant les propriétés des opérateurs d'entrelacement.

Je remercie Bertrand Lemaire pour son aide considérable ainsi que le rapporteur anonyme pour ses nombreuses remarques qui ont permis d'améliorer le texte.

1. Observons que [1] est écrit en caractéristique nulle mais que les résultats dont nous nous inspirons ici sont valables en toute caractéristique.

Notations et conventions. On note $|.|_F$ et $|.|_E$ les valeurs absolues normalisées de F et E.

On note H le groupe $\mathrm{GL}_m(E)$ et G le groupe $\mathrm{GL}_n(F)$ où $n = md$.

On verra κ comme un caractère de G, toujours noté κ, via $\kappa(g) = \kappa(\det g)$ pour $g \in G$.

Nous ne considérerons que des représentations lisses complexes, i.e. à valeurs dans le groupe des automorphismes d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Pour une représentation π de G, on note $\kappa\pi$ la représentation $(\kappa \circ \det) \otimes \pi$.

1. Définition de l'induction automorphe

Soit τ une représentation irréductible de H.

On définit la notion de κ-relèvement de τ.

Pour cela il faut d'abord définir la notion d' intégrales orbitales qui se correspondent puis on définira le κ-relèvement à l'aide d'une égalité de caractères.

1.1. Induction parabolique. — On note P_0 le sous-groupe de Borel de G formé des matrices triangulaires supérieures et A_0 le tore maximal de G formé des matrices diagonales. Un sous-groupe parabolique, resp. de Levi, de G est dit *standard*, resp. *semi-standard* s'il contient P_0, resp. A_0. Nous ne considérerons dans la suite que des sous-groupes de Levi standard, i.e. des sous-groupes de matrices diagonales par blocs de tailles données. Par exemple pour G, si $n_1, \dots, n_k$ sont les tailles des blocs avec $\sum_{i=1}^k n_i = n$, alors L, sous-groupe de Levi standard de G associé à $(n_1, \dots, n_k)$, est le groupe $\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \mathrm{GL}_{n_2}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_k}(F)$. Nous notons alors P_L le sous-groupe parabolique standard associé, à savoir que P_L est le produit semi-direct $L \rtimes U$ où U est le radical unipotent de P_L, c'est-à-dire le groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $n_1, \dots, n_k$.

Nous noterons alors ι_L^G l'induction parabolique normalisée de (L, P_L) à G.

Si, pour $i = 1, \dots, k$, π_i est une représentation de $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$, nous notons alors $\pi_1 \times \pi_2 \times \cdots \times \pi_k$ la représentation $\iota_L^G(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes \cdots \otimes \pi_k)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$.

1.2. Facteurs de transfert. — Pour $x \in G$ on écrit $\det(T - 1 + \mathrm{Ad}_G(x) \mid \mathrm{Lie}(G)) = D_G(x)T^n + \dots$ où D_G est une fonction polynomiale non nulle sur G, avec Ad_G l'action adjointe sur l'algèbre de Lie : pour $x \in G$ et $h \in \mathrm{Lie}(G), \mathrm{Ad}_G(x)(h) = xhx^{-1}$.

On note $G_{\mathrm{reg}} = \{x \in G, D_G(x) \neq 0\}$ l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G ; c'est encore l'ensemble des éléments de G qui ont n valeurs propres distinctes dans une clôture algébrique de F.

On définit de la même manière D_H et H_{reg}. On obtient un plongement de H dans G en fixant une base de E^m en tant que F-espace vectoriel. On remarque que $H \cap G_{\mathrm{reg}} \subset H_{\mathrm{reg}}$.

Pour $\gamma, \delta \in H$ soient $c_1, \ldots, c_m$ (respectivement $d_1, \ldots, d_m$) les valeurs propres de γ (respectivement δ) dans une certaine extension de E.

On pose :

$$r(\gamma, \delta) = \prod_{i,j=1}^{m} (c_i - d_j).$$

Le groupe $\mathrm{Gal}\,(E/F)$ agit sur H. Soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}\,(E/F)$. Pour $\gamma \in H$ on définit

$$\tilde{\Delta}(\gamma) = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant d-1} r(\sigma^i \gamma, \sigma^j \gamma).$$

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, $\tilde{\Delta}(\gamma) \in E^{\times}$. On sait qu'il existe $e \in E^{\times}$ tel que $e\tilde{\Delta}(\gamma) \in F^{\times}$ pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$.

Pour $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on pose alors

$$\Delta(\gamma) = \kappa \left(e\tilde{\Delta}(\gamma) \right)$$

(dépend du choix de e et σ).

On pourra se reporter à [4] pour les propriétés de ces facteurs de transfert (notamment le paragraphe 4).

1.3. Intégrales orbitales. — Soit $\mathrm{d}g$ une mesure de Haar sur G et $\mathrm{d}h$ sur H.

Pour tout $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$, puisque γ est semisimple régulier comme élément de G son centralisateur dans G est un tore T_γ et ce tore est contenu dans H. On fixe sur T_γ la mesure de Haar $\mathrm{d}t_\gamma$ telle que le sous-groupe compact maximal de T_γ soit de volume 1.

Soient $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$ et $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}$ les mesures quotient sur $T_\gamma \backslash G$ et $T_\gamma \backslash H$ respectivement.

On peut maintenant définir les intégrales orbitales.

On note $\mathcal{C}_c^\infty(G)$ l'espace des fonctions complexes sur G qui sont localement constantes et à support compact. Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $\gamma \in G_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash G} \phi(g^{-1}\gamma g)\kappa(g) \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t_\gamma}$$

si γ est tel que $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ (i.e. $T_\gamma \subset \ker(\kappa)$), et

$$\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) = 0$$

sinon (observons que si $\gamma \in H \cap G_{\mathrm{reg}}$ on a $\kappa(g) = 1$ pour tout $g \in T_\gamma$ car $T_\gamma \subset H$ et κ est trivial sur H).

Pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ et $\gamma \in H_{\mathrm{reg}}$ on pose

$$\Lambda^H(f, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash H} f(h^{-1}\gamma h) \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t_\gamma}.$$

On peut alors donner la formulation de l'induction automorphe en termes d'intégrales orbitales.

On dit que $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H)$ *concordent* ou que f est un *transfert* de ϕ si pour tout $\gamma \in H \cap G_{\text{reg}}$,

$$\Delta(\gamma)|D_G(\gamma)|_F^{\frac{1}{2}}\Lambda_\kappa^G(\phi, \gamma) = |D_H(\gamma)|_E^{\frac{1}{2}}\Lambda^H(f, \gamma).$$

1.4. κ-relèvement. — Soient τ une représentation irréductible de H, π une représentation irréductible de G et A un isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π : $A \circ \kappa\pi(g) = \pi(g) \circ A$ pour tout $g \in G$.

Pour $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G)$, on note $\pi(\phi)$ l'opérateur $v \in V \mapsto \int_G \phi(g)\pi(g)(v)\mathrm{d}g$ où V est l'espace de π (de même pour $\tau(f)$).

Puisque π et τ sont admissibles la trace de ces opérateurs est bien définie.

On dit que π est un *κ-relèvement* de τ s'il existe un nombre complexe non nul $c = c(\tau, \pi, A)$ tel que l'on ait

$$\mathrm{tr}\,(\pi(\phi) \circ A) = c(\tau, \pi, A)\mathrm{tr}\,(\tau(f))$$

dès que $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(G_{\text{reg}})$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(H \cap G_{\text{reg}})$ concordent.

La notion de κ-relèvement ne dépend que des classes d'isomorphisme de τ et π.

Notons que Hiraga et Ichino ont montré que l'on peut normaliser les facteurs de transfert de telle manière que la constante c vaille toujours 1 [7, Theorem 1.4].

2. Classifications

On énonce les classifications pour $\mathrm{GL}_n(F)$.

On dispose de la classification de Bernstein-Zelevinsky pour les représentations de carré intégrable et de la classification de Langlands pour les représentations irréductibles.

2.1. Classification de Bernstein-Zelevinsky. — La classification de Bernstein-Zelevinsky ([3]) concerne les représentations de carré intégrable.

Soit δ une représentation irréductible de carré intégrable de $\mathrm{GL}_n(F)$, alors il existe une paire (ρ, k), où k est un diviseur de n et ρ est une représentation irréductible cuspidale unitaire de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$, telle que δ est isomorphe à l'unique sous-représentation irréductible $\delta(\rho, k)$ de $\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{k-1}{2}-1}\rho \times \cdots \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\rho$, où ν est le caractère de $\mathrm{GL}_n(F)$ égal à la composition de la norme $|\ |_F$ avec l'application déterminant et où l'on induit par rapport au parabolique standard associé au sous-groupe de Levi standard $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ (k fois).

L'entier k et la classe d'isomorphisme de ρ sont déterminés par la classe d'isomorphisme de δ.

La représentation $\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \times \nu^{\frac{k-1}{2}-1}\rho \times \cdots \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\rho$ a aussi un unique quotient irréductible, son quotient de Langlands, que nous définissons au prochain paragraphe.

Soit δ une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_n(F)$. Alors il existe un entier k divisant n et une représentation irréductible cuspidale ρ de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ tels que δ est l'unique sous-représentation irréductible de $\nu^{k-1}\rho \times \nu^{k-2}\rho \times \cdots \times \rho$. L'ensemble $\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{k-1}\rho\}$ s'appelle le *segment de Zelevinsky* de δ, l'entier k est sa longueur.

Notons que δ est de carré intégrable (i.e. unitaire) si et seulement si $\rho' = \nu^{\frac{k-1}{2}}\rho$ est unitaire, auquel cas l'unique sous-représentation irréductible de $\nu^{k-1}\rho \times \nu^{k-2}\rho \times \cdots \times \rho$ est $\delta(\rho', k)$.

2.2. Classification de Langlands. — La classification de Langlands (cf. [9]) exprime une représentation irréductible en fonction de représentations tempérées.

Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ une partition de n pour des entiers $n_i \geqslant 1$.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des nombres réels tels que $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$.

Soient $\tau_1, \ldots, \tau_k$ des représentations irréductibles tempérées des groupes $\mathrm{GL}_{n_i}(F)$.

Alors la représentation $\nu^{\alpha_1}\tau_1 \times \nu^{\alpha_2}\tau_2 \times \cdots \times \nu^{\alpha_k}\tau_k$ a un unique quotient irréductible, appelé le *quotient de Langlands* et noté $L(\nu^{\alpha_1}\tau_1, \nu^{\alpha_2}\tau_2, \ldots, \nu^{\alpha_k}\tau_k)$.

La classification de Langlands énonce alors que toute représentation irréductible π de $\mathrm{GL}_n(F)$ est isomorphe à un tel $L(\nu^{\alpha_1}\tau_1, \nu^{\alpha_2}\tau_2, \ldots, \nu^{\alpha_k}\tau_k)$ où k, les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ et les classes d'isomorphisme des représentations irréductibles tempérées $\tau_1, \ldots, \tau_k$ sont déterminés par la classe d'isomorphisme de π.

3. Opérateurs d'entrelacement

Pour π une représentation d'un groupe G on notera V_π l'espace vectoriel associé.

3.1. Définition de l'opérateur d'entrelacement d'une induite. — Soit τ une représentation κ-stable d'un sous-groupe de Levi standard L de G et soit $P = P_L$. On note $B : \kappa\tau \to \tau$ un opérateur d'entrelacement, i.e. un L-isomorphisme entre $\kappa\tau = (\kappa \circ \det) \otimes \tau$ et τ.

Vocabulaire. Pour une représentation π_0, nous appellerons *κ-opérateur sur* π_0 un opérateur d'entrelacement entre $\kappa\pi_0$ et π_0.

Soit $\pi = \iota_L^G(\tau)$. La représentation $\kappa\pi$ agit sur le même espace V_π que π et l'action est donnée par $\kappa\pi(g) = \kappa \circ \det(g)\pi(g)$ pour $g \in G$, π agissant par translations à droite sur V_π : pour $f \in V_\pi$, $g, g' \in G$, $\pi(g)(f)(g') = f(gg')$.

La représentation π est κ-stable et $A : f \in V_\pi \mapsto (g \mapsto \kappa(g)B(f(g)))$ est un κ-opérateur sur π (vérification facile laissée au lecteur).

3.2. Propriété de multiplicité 1. — On énonce dans cette section une propriété qui donne un lien entre les isomorphismes d'une représentation et les sous-quotients irréductibles de cette représentation.

On suppose que π est de longueur finie et κ-stable. On fixe $f : \kappa\pi \to \pi$ un G-isomorphisme. Soit π_0 un sous-quotient irréductible de π, supposé κ-stable.

On suppose de plus que π_0 est de multiplicité 1 dans π. Il existe une paire (U, W) de sous-espaces stables de V_π avec $W \subset U$ telle que $\pi_0 \simeq \pi_{U/W}$. Si de plus U est maximal pour cette propriété, ce que l'on suppose, alors la paire (U, W) est déterminée de manière unique [1, prop. 7.1, (b)]. On fixe un G-isomorphisme $\phi : \pi_0 \simeq \pi_{U/W}$.

L'application f induit par passage au quotient un G-isomorphisme $\overline{f}$: $\kappa\pi_{U/W} \to \pi_{U/W}$. Alors on obtient un opérateur d'entrelacement

$$\phi^{-1}\overline{f}\phi : \kappa\pi_0 \to \pi_0$$

qui ne dépend pas du choix de ϕ (lemme de Schur).

On dit que l'opérateur $\phi^{-1}\overline{f}\phi$ est le κ-opérateur sur π_0 obtenu à partir de f par la propriété de multiplicité 1.

3.3. Induction parabolique et multiplicité 1. — Reprenons les hypothèses et les notations de 3.1. On peut noter $B_\kappa(\pi)$ l'opérateur d'entrelacement A défini en loc. cit., c'est-à-dire pour $f \in V_\pi$, $B_\kappa(\pi)(f)$ est donné par $B_\kappa(\pi)(f)(g) = \kappa(g)B(f(g))$ pour $g \in G$.

Nous énonçons ici la *propriété d'induction parabolique et de multiplicité 1* qui consiste à mixer les deux constructions précédentes et donc à construire un opérateur d'entrelacement sur un sous-quotient irréductible de multiplicité 1 d'une représentation induite parabolique.

Plus précisément, soit τ une représentation κ-stable d'un Levi L, soit $B : \kappa\tau \to \tau$ un opérateur d'entrelacement et soit $\pi = \iota_L^G(\tau)$. Nous rencontrerons souvent la situation où π a un sous-quotient π_0 irréductible de multiplicité 1 et κ-stable. Alors, d'après 3.2 le κ-opérateur $B_\kappa(\pi)$ sur π obtenu à partir de B par induction parabolique (cf. ci-dessus) induit par la propriété de multiplicité 1 un opérateur $B_\kappa(\pi_0)$ sur π_0 qui est bien défini, i.e. ne dépend pas de la manière dont on réalise π_0 comme sous-quotient de π.

Définition. — On dit que $B_\kappa(\pi_0)$ est le κ-opérateur sur π_0 obtenu à partir de B par la propriété d'induction parabolique et de multiplicité 1.

Compatibilité des κ-opérateurs avec l'induction parabolique. — Soit L' un sous-groupe de Levi de G tel que $L \subset L'$.

On pose

$$V' = \{f : L' \to W \text{ lisse}, f(pg) = \delta^{1/2}(p)\tau(p)f(g) \forall g \in L', p \in P_L \cap L'\}$$

et $\tau' = \iota_L^{L'}\tau$ la représentation par translations à droite de L' dans V'.

On induit encore, la représentation $\iota_{L'}^G\tau'$ est la représentation par translations à droite de G dans V'' où

$$V'' = \{f : G \to V' \text{ lisse}, f(pg) = \delta^{1/2}(p)\tau'(p)f(g) \forall g \in G, p \in P_{L'}\}.$$

On sait alors (transitivité du foncteur induction parabolique) qu'il existe un isomorphisme $h : V'' \to V_\pi$ entre $\iota_{L'}^G \tau'$ et π défini pour $f \in V''$ par $h(f) = (g \in G \mapsto f(g)(1))$.

On a alors la proposition suivante qui nous dit principalement (deuxième point) que le κ-opérateur sur π_0 défini plus haut ne "dépend pas" de la réalisation de l'induite parabolique dont π_0 en est un sous-quotient.

Proposition 3.1. — *On suppose que τ est κ-stable et que B entrelace $\kappa\tau$ et τ.*

1. *On a $h \circ (B_\kappa(\tau'))_\kappa(\pi) = B_\kappa(\pi) \circ h$.*
2. *Soit π_0 un sous-quotient κ-stable irréductible de π de multiplicité 1. Soit τ_0' le sous-quotient irréductible de τ' tel que π_0 soit un sous-quotient de $\iota_{L'}^G(\tau_0')$. Si τ_0' est κ-stable on a :*

$$B_\kappa(\pi_0) = (B_\kappa(\tau_0'))_\kappa(\pi_0).$$

Démonstration. — 1. Soient donc $f \in V''$ et $g \in G$. On a

$$(B_\kappa(\pi) \circ h)(f)(g) = B_\kappa(\pi)(h(f))(g) = \kappa(g) B(h(f)(g)) = \kappa(g) B(f(g)(1)).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}(h \circ (B_\kappa(\tau'))_\kappa(\pi))(f)(g) &= ((B_\kappa(\tau'))_\kappa(\pi)(f))(g)(1) \\ &= \kappa(g) B_\kappa(\tau')(f(g))(1) = \kappa(g) B(f(g)(1)).\end{aligned}$$

2. Soit

$$0 \to W' \to U' \to \tau_0' \to 0$$

une suite exacte de représentations, où (U', W') est la paire maximale de sous-représentations de τ' telle que $\tau_0' \simeq U'/W'$. D'après [1, prop. 7.1 (c)], U' et W' sont stables par $B_\kappa(\tau')$.

Le foncteur induction parabolique $\iota_{L'}^G$ est exact et on obtient la suite exacte de G-modules :

$$0 \to \iota_{L'}^G W' \to \iota_{L'}^G U' \xrightarrow{F} \iota_{L'}^G \tau_0' \to 0.$$

Alors π_0 est un sous-quotient κ-stable irréductible de $\iota_{L'}^G \tau_0'$ de multiplicité 1. Soit (U, W) la paire maximale de sous-représentations de $\iota_{L'}^G \tau_0'$ telle que $\pi_0 \simeq U/W$.

On a donc une chaîne d'inclusions

$$\iota_{L'}^G W' \subset F^{-1}(W) \subset F^{-1}(U) \subset \iota_{L'}^G U'$$

telle que l'isomorphisme (déduit de F)

$$\iota_{L'}^G U' / \iota_{L'}^G W' \simeq \iota_{L'}^G(\tau_0')$$

envoie $F^{-1}(U)/\iota_{L'}^G W'$ sur U et $F^{-1}(W)/\iota_{L'}^G W'$ sur W.

Par le point 1, en notant $\widetilde{B}$ l'opérateur obtenu sur U' par restriction de $B_\kappa(\tau')$, on sait que l'opérateur sur $\iota_{L'}^G U'$ obtenu par restriction de $B_\kappa(\pi)$ est égal à $\widetilde{B}_\kappa\left(\iota_{L'}^G U'\right)$.

Or, $F^{-1}(U)$ est le sous-module maximal de $\iota_{L'}^{G}U'$ admettant π_0 comme quotient.

Donc, les deux opérateurs, construits grâce à la propriété de multiplicité 1 en utilisant les deux façons de voir π_0 comme un sous-quotient, coïncident, i.e.

$$B_\kappa(\pi_0) = \left(B_\kappa(\tau_0')\right)_\kappa(\pi_0). \qquad \square$$

3.4. Normalisation. — On part d'une représentation κ-stable et on veut normaliser l'opérateur d'entrelacement A. Pour cela on traite d'abord le cas des représentations génériques puis on obtient le cas général grâce à la classification de Langlands.

Rappelons ce qu'est une représentation générique.

On fixe un caractère additif non trivial ψ de F. On obtient un caractère $\theta = \theta_\psi$ du sous-groupe unipotent supérieur U de G via :

$$\theta(u) = \psi\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_{i,i+1}\right) \text{ pour } u = (u_{i,j}) \in U.$$

Soit π une représentation irréductible de G. On dit que π est *générique* s'il existe une forme linéaire non nulle λ sur l'espace V_π de π telle que l'on ait $\lambda\left(\pi(u)(v)\right) = \theta(u)\lambda(v)$ pour $u \in U$ et $v \in V_\pi$.

Cette existence ne dépend pas du choix de ψ, et λ est unique à un scalaire près, on l'appelle *fonctionnelle de Whittaker* pour π relative à ψ. On note $\mathcal{D}(\pi, \psi)$ leur ensemble.

Soit λ une fonctionnelle de Whittaker pour π relative à ψ. Alors pour $u \in U$ et $v \in V_\pi$,

$$\lambda\left(\kappa\pi(u)(v)\right) = \kappa \circ \det(u)\lambda\left(\pi(u)(v)\right) = \theta(u)\lambda(v)$$

car $\det(u) = 1$.

Donc λ est également une fonctionnelle de Whittaker pour $\kappa\pi$ relative à ψ.

Si π est κ-stable, en notant A l'isomorphisme entre $\kappa\pi$ et π, on normalise A en imposant $\lambda \circ A = \lambda$ pour toute fonctionnelle de Whittaker λ. On note $A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ cet opérateur d'entrelacement normalisé, on a donc

$$\lambda \circ A^{\text{gén}}(\pi, \psi) = \lambda.$$

Contrairement au cas du changement de base, cet opérateur $A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ dépend du choix de ψ.

Si $a \in F^\times$ et si on note ψ^a le caractère $x \in F \mapsto \psi(ax)$ alors on a

$$A^{\text{gén}}(\pi, \psi^a) = \kappa(t_a)^{-1} A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$$

où $t_a = \operatorname{diag}(a^{n-1}, a^{n-2}, \ldots, a, 1)$.

En effet, on a un isomorphisme

$$\lambda \in \mathcal{D}(\pi, \psi) \to \lambda \circ \pi(t_a) \in \mathcal{D}(\pi, \psi^a).$$

Par définition de $A^{\text{gén}}(\pi,\psi^a)$ on a l'égalité

$$\lambda' \circ A^{\text{gén}}(\pi,\psi^a) = \lambda' \text{ pour tout } \lambda' \in \mathcal{D}(\pi,\psi^a)$$

donc en particulier, grâce à l'isomorphisme ci-dessus, pour tout $\lambda \in \mathcal{D}(\pi,\psi)$ on a

$$\lambda \circ \pi(t_a) \circ A^{\text{gén}}(\pi,\psi^a) = \lambda \circ \pi(t_a).$$

D'où

$$\pi(t_a) \circ A^{\text{gén}}(\pi,\psi^a) \circ \pi(t_a)^{-1} = A^{\text{gén}}(\pi,\psi)$$

et donc, comme $A^{\text{gén}}(\pi,\psi)$ entrelace $\kappa\pi$ et π,

$$\begin{aligned} A^{\text{gén}}(\pi,\psi^a) &= \pi(t_a)^{-1} \circ A^{\text{gén}}(\pi,\psi) \circ \pi(t_a) \\ &= \pi(t_a)^{-1}\kappa(t_a)^{-1} \circ A^{\text{gén}}(\pi,\psi) \circ \kappa\pi(t_a) \\ &= \kappa(t_a)^{-1}\pi(t_a)^{-1}\pi(t_a)A^{\text{gén}}(\pi,\psi) \\ &= \kappa(t_a)^{-1}A^{\text{gén}}(\pi,\psi). \end{aligned}$$

On note $A^{\text{gén}}_\pi$ l'opérateur $A^{\text{gén}}(\pi,\psi)$ lorsque le caractère ψ est sous-entendu ou si son choix n'est pas important pour les résultats en question.

Compatibilité de $A^{gén}_\pi$ avec les isomorphismes. — Soit π une représentation irréductible générique de G. Si π' est une représentation isomorphe à π et si on note $\phi : \pi \to \pi'$ un isomorphisme alors $\lambda' \mapsto \lambda' \circ \phi$ est un isomorphisme de $\mathcal{D}(\pi',\psi)$ sur $\mathcal{D}(\pi,\psi)$.

Donc $A^{\text{gén}}_{\pi'} \circ \phi = \phi \circ A^{\text{gén}}_\pi$.

Définition de $A(\pi,\psi)$ pour π irréductible et κ-stable. — On s'appuie sur la classification de Langlands.

Soit π une représentation irréductible κ-stable de G. On sait que π est isomorphe à un quotient de Langlands $L(\pi_1,\dots,\pi_r)$ où les π_i sont essentiellement tempérées (et donc génériques). Par unicité de la donnée de Langlands associée à une représentation irréductible, les π_i sont également κ-stables. On a donc un opérateur d'entrelacement normalisé $A^{\text{gén}}_{\pi_i}$ entre $\kappa\pi_i$ et π_i, et on obtient un opérateur d'entrelacement $B = A^{\text{gén}}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes A^{\text{gén}}_{\pi_r}$ entre les représentations $\kappa\pi_1 \otimes \cdots \otimes \kappa\pi_r$ et $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$ de L, où $L = \mathrm{GL}(n_1,F) \times \cdots \times \mathrm{GL}(n_r,F)$ est le sous-groupe de Levi de G sur lequel vit la représentation $\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_r$.

Cet opérateur donne par induction parabolique un opérateur d'entrelacement $A = \iota_L^G(B)$ entre $\kappa\Sigma$ et Σ où $\Sigma = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$.

On note $\overline{\Sigma} = L(\pi_1,\dots,\pi_r)$ l'unique quotient irréductible de Σ. Puisque Σ est κ-stable, $\kappa\overline{\Sigma} \simeq \overline{\Sigma}$ et $\kappa\overline{\Sigma}$ est l'unique quotient irréductible de $\kappa\Sigma$.

Par passage au quotient, l'opérateur A induit un isomorphisme $\overline{A}$ entre $\kappa\overline{\Sigma}$ et $\overline{\Sigma}$. Observons que le quotient de Langlands est un cas d'induction parabolique et multiplicité 1 (en prenant pour U l'espace de Σ tout entier) : on a $\overline{A} = B_\kappa(\overline{\Sigma})$.

Par construction $\pi \simeq \overline{\Sigma}$, il existe donc un morphisme surjectif de G-modules $f : V_\Sigma \to V_\pi$, qui se factorise en un isomorphisme

$$\overline{f} \in \mathrm{Isom}_G(\overline{\Sigma}, \pi) = \mathrm{Isom}_G(\kappa\overline{\Sigma}, \kappa\pi)$$

qui ne dépend pas de f à multiplication près par une constante (lemme de Schur).

On définit alors l'opérateur $A(\pi, \psi)$ par

$$A(\pi, \psi) := \overline{f} \circ \overline{A} \circ \overline{f}^{-1},$$

opérateur qui ne dépend pas du choix de f.

A_π est compatible avec les isomorphismes. — Si π' est une autre représentation lisse irréductible κ-stable de G telle que $\pi' \simeq \pi$ et si $\phi \in \mathrm{Isom}_G(\pi, \pi')$ alors $\overline{f'} = \phi \circ \overline{f} : V_{\overline{\Sigma}} \to V_{\pi'}$ est un isomorphisme surjectif de G-modules et, d'après le point précédent

$$A(\pi', \psi) = \overline{f'} \circ \overline{A} \circ (\overline{f'})^{-1} = \phi \circ A(\pi, \psi) \circ \phi^{-1}.$$

D'où

$$A(\pi', \psi) \circ \phi = \phi \circ A(\pi, \psi).$$

A_π bien défini. — Montrons que la définition ci-dessus est bien correcte dans le sens où l'opérateur $A(\pi, \psi)$ coïncide avec $A^{\text{gén}}(\pi, \psi)$ lorsque π est générique. La classification des représentations génériques de G est due à Zelevinsky [12, §9].

Soit donc π générique. On écrit π comme un quotient de Langlands $L(\pi_1, \dots, \pi_r)$. Comme π est générique, le produit $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ est irréductible et $L(\pi_1, \dots, \pi_r) = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$. Par compatibilité avec les isomorphismes (point précédent) on peut en fait supposer que $\pi = \pi_1 \times \cdots \times \pi_r$.

Il s'agit de vérifier que $A(\pi, \psi)$ vérifie

$$\Lambda \circ A(\pi, \psi) = \Lambda$$

pour Λ une fonctionnelle de Whittaker pour π relative à ψ. On commence par construire une telle fonctionnelle de Whittaker.

Soit, pour chaque $i \in \{1, \dots, r\}$, $\lambda_i \in \mathcal{D}(\pi_i, \psi)$. D'après [8, formula (2) chapter 3] on a alors une fonctionnelle de Whittaker Λ sur $\pi_1 \times \cdots \times \pi_r$ donnée par

$$\Lambda(f) = \int_U \lambda(f(u))\overline{\Theta_\psi(u)}\mathrm{d}u$$

où $\lambda = \lambda_1 \otimes \lambda_2 \otimes \cdots \otimes \lambda_k$, f est une fonction dans l'espace de $\pi_1 \times \cdots \times \pi_k$ et du est une mesure de Haar sur U ; l'intégrale étant toujours convergente d'après [8].

Alors, pour $u \in U$ on a

$$\lambda\left(A(\pi,\psi)(f)(u)\right) = \lambda\left(\kappa(u) A^{\text{gén}}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes A^{\text{gén}}_{\pi_r}\left(f(u)\right)\right).$$

Or, pour $u \in U$, $\kappa(u) = \kappa \circ \det(u) = 1$ et

$$\lambda \circ A^{\text{gén}}_{\pi_1} \otimes \cdots \otimes A^{\text{gén}}_{\pi_r} = \lambda$$

par définition des $A^{\text{gén}}_{\pi_i}$ et de $\lambda = \lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_r$.

D'où

$$\lambda\left(A(\pi,\psi)(f)(u)\right) = \lambda(f(u))$$

et donc

$$\Lambda \circ A(\pi,\psi) = \Lambda,$$

ce que l'on voulait.

Compatibilité entre l'induction parabolique et les κ-opérateurs normalisés. — La proposition suivante exprime la compatibilité entre l'induction parabolique et l'opérateur de κ-entrelacement normalisé.

Proposition 3.2. — *Soit L un sous-groupe de Levi standard de G, τ une représentation générique κ-stable de L et $A_\tau = A^{gén}(\tau,\psi)$ l'opérateur de κ-entrelacement normalisé de τ. Alors $\iota_L^G(\tau)$ a un unique sous-quotient irréductible générique π_0 qui est κ-stable. Si on note $A_{\tau,\kappa}(\pi_0)$ l'opérateur sur π_0 obtenu à partir de A_τ par la propriété d'induction parabolique et de multiplicité* 1 *(3.3.1), alors $A_{\tau,\kappa}(\pi_0) = A^{gén}(\pi_0,\psi)$.*

Démonstration. — Puisque τ est générique, on sait d'après [10] que $\pi = \iota_L^G(\tau)$ a une unique droite de fonctionnelles de Whittaker. Donc il y a un unique sous-quotient irréductible π_0 de π avec des fonctionnelles de Whittaker non nulles, i.e. π_0 générique et donc $\kappa\pi_0$ générique.

On sait que $\pi = \iota_L^G$ est κ-stable donc par la propriété de multiplicité 1 on obtient que π_0 est κ-stable.

On note $\pi_0 = U/V$ avec $V \subset U \subset V_\pi$ et U maximal. Alors U et V sont stables par $A_{\tau,\kappa}(\pi)$ qui induit donc par passage aux quotients un opérateur $A_{\tau,\kappa}(\pi_0)$ sur π_0.

Si Λ est une fonctionnelle de Whittaker non nulle pour π alors elle induit par restriction une fonctionnelle Λ_U sur U. Cette fonctionnelle Λ_U est non nulle car sinon le quotient V_π/U aurait un sous-quotient irréductible générique, ce qui est impossible puisque π_0 est l'unique sous-quotient irréductible générique de $\iota_L^G\tau$. Le même argument donne que la restriction Λ_V de Λ à V est nulle et donc Λ_U se factorise en une fonctionnelle linéaire non nulle sur π_0. De la même manière que dans la preuve du point précédent, l'opérateur $A_{\tau,\kappa}(\pi)$ fixe Λ et donc sa restriction à U fixe Λ_U. Donc $A_{\tau,\kappa}(\pi_0) = A^{\text{gén}}(\pi_0)$. □

4. Construction de représentations elliptiques

Une représentation irréductible est dite *elliptique* si son caractère ne s'annule pas sur l'ouvert des éléments semi-simples elliptiques réguliers. Observons qu'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable est elliptique (par exemple grâce au théorème d'orthogonalité des caractères) alors qu'une induite parabolique irréductible à partir d'un sous-groupe de Levi propre n'est jamais elliptique.

Rappelons la construction des représentations elliptiques ([2, §2.5]). Notre théorème traitant des représentations elliptiques de H, nous donnons ici la construction pour H de manière à conserver les mêmes notations dans le paragraphe 7. D'après loc. cit., une représentation irréductible de H est elliptique si et seulement si elle a le même support cuspidal qu'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable, en l'occurrence un segment de Zelevinsky. Fixons donc une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H. On décrit ci-dessous les représentations irréductibles de H ayant même support cuspidal que celui de τ_E.

D'après la classification de Bernstein-Zelevinsky (voir 2.1), il existe un entier k divisant m et une représentation cuspidale ρ_E de $\mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E)$ tels que τ_E se réalise comme l'unique sous-représentation irréductible de l'induite parabolique

$$\nu_E^{k-1}\rho_E \times \nu_E^{k-2}\rho_E \times \cdots \times \rho_E$$

où l'on a posé $\nu_E = \nu \circ N_{E/F}$.

Les sous-groupes de Levi de H contenant $L_E = \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E)$ sont paramétrisés par les sous-ensembles I de $\mathcal{K} = \{1, \ldots, k-1\}$. Pour un tel I, on définit le sous-groupe de Levi $L_{E,I}$ de H contenant L_E de la manière suivante : si I est le complémentaire de $\{s_1, s_1+s_2, \ldots, s_1+s_2+\cdots+s_{t-1}\}$ dans $\{1, \ldots, k-1\}$, alors on pose

$$L_{E,I} = \mathrm{GL}_{s_1\frac{m}{k}}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_t\frac{m}{k}}(E)$$

où s_t est tel que $s_1 + s_2 + \cdots + s_t = k$. On a alors

$$L_{E,I} \subset L_{E,J} \text{ si } I \subset J$$

et en particulier $L_{E,\emptyset} = L_E$ et $L_{E,\mathcal{K}} = H$.

Pour chaque sous-ensemble I de $\mathcal{K}$ on note :

- $\tau_{E,I}$ l'unique sous-représentation irréductible de $\iota_{L_E}^{L_{E,I}}(\nu_E^{k-1}\rho_E \otimes \nu_E^{k-2}\rho_E \otimes \cdots \otimes \rho_E)$;
- $\pi_{E,I}$ le quotient de Langlands, i.e. l'unique quotient irréductible, de $X_{E,I} = \iota_{L_{E,I}}^H(\tau_{E,I})$.

Observons que $\tau_{E,I}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $L_{E,I}$ qui s'écrit $\tau_{E,I} = \tau_{E,I}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tau_{E,I}^{(t)}$, où $\tau_{E,I}^{(j)}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{s_j\frac{m}{k}}(E)$. Les représentations $\tau_{E,I}^{(1)}, \dots, \tau_{E,I}^{(t)}$ sont en position standard (pour la classification de Langlands, cf. 2.2) ce qui donne un sens à la définition de $\pi_{E,I}$: on a

$$\pi_{E,I} = L(\tau_{E,I}^{(1)}, \dots, \tau_{E,I}^{(t)}).$$

On en déduit (d'après la classification de Langlands) que $\pi_{E,I} \not\simeq \pi_{E,J}$ si $I \neq J$ et que les $\pi_{E,I}$ pour $I \subset \mathcal{K}$ sont, à isomorphisme près, toutes les représentations irréductibles de H ayant pour support cuspidal le segment de Zelevinsky $\{\rho_E, \nu_E\rho_E, \dots, \nu_E^{k-1}\rho_E\}$. Observons que si $I \subset J$ alors $X_{E,J}$ est une sous-représentation de $X_{E,I}$. De plus, $\pi_{E,J}$ est un sous-quotient de $X_{E,I}$ si et seulement si $I \subset J$. En particulier $\pi_{E,I}$ est un sous-quotient irréductible de la représentation

$$X_{E,\emptyset} = \nu_E^{k-1}\rho_E \times \nu_E^{k-2}\rho_E \times \cdots \times \rho_E.$$

Comme tout sous-quotient irréductible de $X_{E,\emptyset}$ a pour support cuspidal le segment de Zelevinsky $\{\rho_E, \nu_E\rho_E, \dots, \nu_E^{k-1}\rho_E\}$, les $\pi_{E,I}$ pour $I \subset \mathcal{K}$ sont exactement les sous-quotients irréductibles de $X_{E,\emptyset}$ et ils apparaissent avec multiplicité 1 dans $X_{E,\emptyset}$ (cf. [12, §2]).

Les représentations elliptiques de H sont exactement les représentations $\pi_{E,I}$ ainsi construites à partir d'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H.

Nous avons la même construction pour les représentations elliptiques de $G = \mathrm{GL}_n(F)$.

5. Résultats connus d'induction automorphe que l'on va utiliser

Nous exposons ici les résultats déjà démontrés d'induction automorphe. Cela concerne les représentations irréductibles essentiellement de carré intégrable.

Rappelons que le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(E/F)$ opère sur les représentations de H via son action naturelle sur H : pour $\gamma \in \Gamma$ et τ_E une représentation de H, on pose $\gamma(\tau_E) = \tau_E \circ \gamma^{-1}$. Nous avons la proposition suivante dans [6, p. 148], résultat donné en caractéristique >0 mais valable en toute caractéristique ([4]).

Proposition 5.1. — 1. *Soit ρ_E une représentation irréductible cuspidale de H. Si la classe d'isomorphisme de ρ_E a un stabilisateur d'ordre d_1 dans $\Gamma = Gal(E/F)$, alors il existe une représentation irréductible cuspidale ρ de $GL_{n_1}(F)$, $n = n_1 d_1$, ayant pour stabilisateur $\kappa^{d_1\mathbb{Z}}$ dans $\kappa^{\mathbb{Z}}$, telle que la représentation (induite parabolique irréductible) $\rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho$ soit un κ-relèvement de ρ_E à G.*

2. *Soit τ_E une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de H de support cuspidal $\{\rho_E, \nu_E\rho_E, \dots, \nu_E^{k-1}\rho_E\}$, où ρ_E est une représentation irréductible cuspidale de $GL_s(E)$, $sk = m$ (cf. 2.1). D'après le point 1, "le" κ-relèvement de ρ_E est une représentation de*

$GL_{sd}(F)$ de la forme (induite parabolique irréductible) $\rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho$, $sd = n_1 d_1$, où ρ est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$. Soit τ_1 la représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $GL_{n_1k}(F)$ de support cuspidal $\{\rho, \nu\rho, \dots, \nu^{k-1}\rho\}$. Alors la représentation (induite parabolique irréductible) $\tau_1 \times \kappa\tau_1 \otimes \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_1$ est un κ-relèvement de τ_E à G.

6. Compatibilité induction automorphe - induction parabolique

Comme nous pouvons le voir dans la construction des représentations elliptiques l'induction parabolique est très présente. Nous nous intéressons donc à la question de la compatibilité entre l'induction parabolique et l'induction automorphe.

Nous avons la proposition suivante dans [6, p.145], on en donne les notations introduites. On se donne des entiers strictement positifs $m_1, \dots, m_t$ tels que $\sum_{i=1}^t m_i = m$. Pour $i = 1, \dots, t$, on choisit un élément e_i de $E^\times$ tel que $\sigma(e_i) = (-1)^{m_i(d-1)} e_i$, ce qui permet de considérer les facteurs de transfert $\tilde{\Delta}_i$ et Δ_i relatifs à l'induction automorphe de $H_i = \mathrm{GL}_{m_i}(E)$ à $G_i = \mathrm{GL}_{m_i d}(F)$. Pour $i = 1, \dots, t$ on se donne une base du F-espace vectoriel E^{m_i}, ce qui donne un plongement de H_i dans G_i. Voyant E^m comme $E^{m_1} \oplus \cdots \oplus E^{m_t}$, on obtient une base du F-espace vectoriel E^m d'où un plongement de H dans G. Le groupe $L = G_1 \times \cdots \times G_t$ apparaît comme un sous-groupe de Levi de G, $L_H = H_1 \times \cdots \times H_t$ comme un sous-groupe de Levi de H, et on a $L_H = L \cap H$.

Soit P le sous-groupe parabolique de G formé des matrices triangulaires inférieures par blocs de taille $m_1 d, \dots, m_t d$, et soit U_P le radical unipotent de P.

Le groupe $P_H = P \cap H$ est un sous-groupe parabolique de H, de radical unipotent $U_{P,H} = U_P \cap H$, et L_H est une composante de Levi de P_H.

Pour $i = 1, \dots, t$ on se donne une représentation π_i de G_i.

Proposition 6.1. — *Supposons que pour $i = 1, \dots, t$, la représentation (irréductible, κ-stable) π_i de G_i soit un κ-relèvement d'une représentation lisse irréductible τ_i de H_i, et que les représentations $\pi = \iota_P^G(\pi_1 \otimes \cdots \otimes \pi_t)$ de G et $\tau = \iota_{P_H}^H(\tau_1 \otimes \cdots \otimes \tau_t)$ de H soient irréductibles. Alors π est un κ-relèvement de τ. De plus, il existe une racine de l'unité ζ, qui ne dépend ni des π_i, ni des τ_i, telle que si pour $i = 1, \dots, t$, A_i est un isomorphisme de $\kappa\pi_i$ sur π_i, et que A est l'isomorphisme de $\kappa\pi$ sur π associé aux A_i comme plus haut, on ait*

$$c(\tau, \pi, A) = \zeta \Pi_{i=1}^t c(\tau_i, \pi_i, A_i).$$

Remarque. — L'égalité des traces reste vraie sans supposer que les représentations τ et π sont irréductibles (c'est une simple application de la variante tordue de la formule de Van Dijk pour le caractère d'une induite parabolique, cf. [5, 3.7]) : il existe une constante $c \in \mathbb{C}^\times$ telle que pour toutes fonctions $f \in C_c^\infty(H)$ et $\phi \in C_c^\infty(G)$, on ait

$$\mathrm{tr}(\pi(\phi) \circ A) = c\,\mathrm{tr}(\tau(f)).$$

7. Induction automorphe pour les représentations elliptiques

On reprend dans cette section 7 les notations introduites dans la section 4. Le théorème 7.1 est le résultat principal de l'article.

On a vu dans la section 4 que toute représentation elliptique de H se réalise comme le quotient de Langlands $\pi_{E,I}$ d'une induite parabolique $X_{E,I} = \iota_{L_{E,I}}^H(\tau_{E,I})$ où $L_{E,I}$ est un sous-groupe de Levi de H et $\tau_{E,I}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $L_{E,I}$. La représentation $\tau_{E,I}$ est construite à partir d'une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H de support cuspidal $\{\rho_E, \nu_E\rho_E, \ldots, \nu_E^{k-1}\rho_E\}$ et d'un sous-ensemble I de $\{1, \ldots, k-1\}$. Le sous-groupe de Levi $L_{E,I}$ de H contient $L_E = \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{\frac{m}{k}}(E)$ et $\tau_{E,I}$ est l'unique sous-représentation irréductible de l'induite parabolique $\iota_{L_E}^{L_{E,I}}(\nu_E^{k-1}\rho_E \otimes \nu_E^{k-2}\rho_E \otimes \cdots \otimes \rho_E)$. D'après la proposition 5.1, la représentation ρ_E admet un κ-relèvement de la forme $\rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho$ où ρ est une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_{n_1}(F)$, $n_1 d_1 = \frac{m}{k}d = \frac{n}{k}$, et la représentation τ_E admet un κ-relèvement à G de la forme $\tau_1 \times \kappa\tau_1 \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_1$ où τ_1 est la représentation essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{n_1 k}(F)$ de support cuspidal $\{\rho, \nu\rho, \ldots, \nu^{k-1}\rho\}$. Comme dans la section 4, la paire (τ_1, I) définit une représentation elliptique π_I de $G_1 = \mathrm{GL}_{n_1 k}(F)$:

- I définit un sous-groupe de Levi $L_{1,I}$ de G_1 contenant $L_1 = \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_1}(F)$;
- $\tau_{1,I}$ est l'unique sous-représentation irréductible de $\iota_{L_1}^{L_{1,I}}(\nu^{k-1}\rho \otimes \cdots \otimes \nu\rho \otimes \rho)$;
- $\pi_{1,I}$ est le quotient de Langlands de $X_{1,I} := \iota_{L_{1,I}}^{G_1}(\tau_{1,I})$.

Le candidat naturel pour être un κ-relèvement de $\pi_{E,I}$ à G est la représentation κ-stable (induite parabolique irréductible)

$$\pi_I := \pi_{1,I} \times \kappa\pi_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I}.$$

En effet, le sous-groupe de Levi $L_{E,I}$ de H est de la forme $\mathrm{GL}_{s_1\frac{m}{k}}(E) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_t\frac{m}{k}}(E)$ pour des entiers $s_1, \ldots, s_t \geq 1$ et la représentation $\tau_{E,I}$ s'écrit $\tau_{E,I}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tau_{E,I}^{(t)}$, où $\tau_{E,I}^{(j)}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{s_j\frac{m}{k}}(E)$. D'après la proposition 5.1, $\tau_{E,I}^{(j)}$ admet un κ-relèvement $X_I^{(j)}$ qui est une représentation irréductible essentiellement tempérée κ-stable de $\mathrm{GL}_{s_j\frac{n}{k}}(F)$. Les représentations $X_I^{(1)}, \ldots, X_I^{(t)}$ sont en ordre standard (pour la classification de Langlands) et on verra que π_I coïncide avec le quotient de Langlands $L\left(X_I^{(1)},\ldots,X_I^{(t)}\right)$ de l'induite parabolique $X_I^{(1)}\times\cdots\times X_I^{(t)}$.

THÉORÈME 7.1. — *Toute représentation elliptique de H admet un κ-relèvement. Précisément (avec les notations ci-dessus), π_I est un κ-relèvement de $\pi_{E,I}$.*

Démonstration. — 1. On utilise les notations introduites avant l'énoncé du théorème. La représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_E de H est fixée pour toute la démonstration. On fera éventuellement varier le sous-ensemble I de $\mathcal{K}=\{1,\ldots,k-1\}$.

On veut montrer que pour un sous-ensemble $I\subset\mathcal{K}$ fixé, π_I est un κ-relèvement de $\pi_{E,I}$. Pour cela nous allons montrer qu'il existe une constante $c\in\mathbb{C}^\times$ telle que pour toutes fonctions $f\in\mathcal{C}_c^\infty(H)$ et $\phi\in\mathcal{C}_c^\infty(G)$ qui se correspondent, on ait la relation

$$\mathrm{tr}\left(\pi_I(\phi)A_{\pi_I}\right)=c\ \mathrm{tr}\left(\pi_{E,I}(f)\right).$$

2. Nous introduisons dans ce paragraphe une représentation Θ telle que les représentations π_I pour $I\subset\mathcal{K}$ soient les sous-quotients irréductibles κ-stables de Θ. Cela permettra de déterminer plus facilement les opérateurs de κ-entrelacement associés aux π_I, opérateurs nécessaires pour montrer ce que l'on veut.

Rappelons que $\{\rho,\nu\rho,\ldots,\nu^{d_1-1}\rho\}$ est le support cuspidal de la représentation irréductible essentiellement de carré intégrable τ_1 de $G_1=GL_{n_1k}(F)$. On note u la représentation de $\mathrm{GL}_{\frac{n}{k}}(F)$ définie par (induite parabolique irréductible)

$$u:=\rho\times\kappa\rho\times\cdots\times\kappa^{d_1-1}\rho.$$

Soit Θ la représentation de G définie par

$$\Theta:=\nu^{k-1}u\times\nu^{k-2}u\times\cdots\times u.$$

Pour $a=0,\ldots,k-1$, on a $\nu^a u=\nu^a\rho\times\nu^a\kappa\rho\times\cdots\times\nu^a\kappa^{d_1-1}\rho$. D'après [12, Prop. 8.5], pour tous $0\leqslant i<j\leqslant d_1-1$ et tous $0\leq a,b\leq k-1$ entiers, la représentation $\nu^a\kappa^i\rho\times\nu^b\kappa^j\rho$ est irréductible et isomorphe à $\nu^b\kappa^j\rho\times\nu^a\kappa^i\rho$. Donc Θ est isomorphe à

$$\Theta_1\times\kappa\Theta_1\times\cdots\times\kappa^{d_1-1}\Theta_1,$$

où l'on a posé

$$\Theta_1:=\nu^{k-1}\rho\times\nu^{k-2}\rho\times\cdots\times\rho.$$

D'après la section 4, nous connaissons tous les sous-quotients irréductibles de Θ_1 : ce sont les représentations $\pi_{1,I}$ définies avant l'énoncé du théorème. Elles sont toutes elliptiques. Observons que $L_{1,\emptyset}=L_1$, $\tau_{1,\emptyset}=\nu^{k-1}\otimes\cdots\otimes\nu\rho\otimes\rho$ et $X_{1,\emptyset}=\iota_{L_1}^{G_1}(\tau_{1,\emptyset})=\Theta_1$.

Pour $i = 1, \ldots, d_1$, les sous-quotients irréductibles de $\Theta_i = \kappa^{i-1}\Theta_1$ sont de multiplicité 1 (d'après [12, §2]). D'autre part pour $1 \leq i \neq j \leq d_1$, comme les supports cuspidaux $\{\kappa^{i-1}\rho, \kappa^{i-1}\nu\rho, \ldots, \kappa^{i-1}\nu^{k-1}\rho\}$ et $\{\kappa^{j-1}\rho, \kappa^{j-1}\nu\rho, \ldots, \kappa^{j-1}\nu^{k-1}\rho\}$ de Θ_i et Θ_j sont disjoints, aucun sous-quotient irréductible de Θ_i n'est isomorphe à un sous-quotient irréductible de Θ_j. Cela entraîne aussi que les sous-quotients irréductibles de $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \cdots \times \Theta_{d_1}$ sont de multiplicité 1 et que si pour $i = 1, \ldots, d_1$, π'_i est un sous-quotient irréductible de Θ_i, alors l'induite parabolique $\pi'_1 \times \cdots \times \pi'_{d_1}$ est un sous-quotient irréductible de Θ. Donc les sous-quotients irréductibles de Θ sont de la forme $\pi_{1,I_1} \times \kappa\pi_{1,I_2} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I_{d_1}}$ pour des sous-ensembles $I_1, \ldots, I_{d_1}$ de $\mathcal{K}$. Pour qu'un tel sous-quotient soit κ-stable, il faut et il suffit que $I_1 = I_2 = \cdots = I_{d_1}$.

Rappelons que pour $I \subset \mathcal{K}$, on a posé

$$\pi_I := \pi_{1,I} \times \kappa\pi_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I}.$$

On a montré que les π_I pour $I \subset \mathcal{K}$ sont exactement les sous-quotients irréductibles de Θ qui sont κ-stables.

3. Déterminons maintenant les opérateurs de κ-entrelacement normalisés A_{π_I} pour $I \subset \mathcal{K}$.

Rappelons que par définition, $\pi_{1,I}$ est le quotient de Langlands de $X_{1,I} = \iota_{L_{1,I}}^{G_1}(\tau_{1,I})$. Posons

$$X_I := X_{1,I} \times \kappa X_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}X_{1,I}.$$

Alors X_I est une sous-représentation de Θ et les sous-quotients irréductibles de X_I sont les représentations $\pi_{1,I_1} \times \kappa\pi_{1,I_2} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\pi_{1,I_{d_1}}$ avec $I \subset I_i \subset \mathcal{K}$ pour chaque $i \in \{1, \ldots, d_1\}$. En particulier les sous-quotients irréductibles de X_I qui sont κ-stables sont les représentations π_J avec $I \subset J \subset \mathcal{K}$. Observons que d'après [12, §2], toute sous-représentation de Θ isomorphe à X_I est égale à X_I.

Reprenons que $\Theta = \nu^{k-1}u \times \cdots \times \nu u \times u$ avec $u = \rho \times \kappa\rho \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\rho$. La représentation u est essentiellement tempérée donc générique. Notons A_Θ l'opérateur de κ-entrelacement obtenu grâce à l'induction parabolique à partir de $A_{\nu^{k-1}u} \otimes \cdots \otimes A_u$ avec (rappel) $A_{\nu^i u} = A^{\text{gén}}(\nu^i u, \psi)$. Puisque la représentation X_I est κ-stable, elle est A_Θ-stable.

Fixons $I \subset \mathcal{K}$ et écrivons $L_{1,I} = \mathrm{GL}_{s_1 n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_t n_1}(F)$ avec $s_1 + \cdots + s_t = k$. Alors la représentation $\tau_{1,I}$ s'écrit $\tau_{1,I} = \tau_{1,I}^{(1)} \otimes \cdots \otimes \tau_{1,I}^{(t)}$ où $\tau_{1,I}^{(j)}$ est une représentation irréductible essentiellement de carré intégrable de $\mathrm{GL}_{s_j n_1}(F)$; et les représentations $\tau_{1,I}^{(1)}, \ldots, \tau_{1,I}^{(t)}$ sont en ordre standard (pour la classification de Langlands). Pour $j = 1, \ldots, t$, posons

$$X_I^{(j)} := \tau_{1,I}^{(j)} \times \kappa\tau_{1,I}^{(j)} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_{1,I}^{(j)}.$$

Les représentations $X_I^{(1)}, \ldots, X_I^{(t)}$ sont essentiellement tempérées et elles sont en ordre standard. D'après [11, prop 2.2, 2.3], π_I est le quotient de Langlands de l'induite parabolique

$$X_I^{(1)} \times \cdots \times X_I^{(t)} = \iota_{L_I}^G \left(X_I^{(1)} \otimes \cdots \otimes X_I^{(t)} \right),$$

où l'on a noté L_I le sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}_{s_1 \frac{n}{k}}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{s_t \frac{n}{k}}(F)$ de G : on a

$$\pi_I = L\left(X_I^{(1)}, \ldots, X_I^{(t)} \right).$$

Observons que pour $j = 1, \ldots, t$, s_j est la longueur du segment de Zelevinsky associé à la représentation irréductible essentiellement de carré intégrable $\tau_{1,I}^{(j)}$ de $\mathrm{GL}_{s_j n_1}(F)$. Pour $j = 1$,

$$\nu^{k-1}u \times \nu^{k-2}u \times \cdots \times \nu^{k-s_1}u$$

est une représentation de $\mathrm{GL}_{s_j \frac{n}{k}}(F)$ qui admet $X_I^{(j)}$ comme sous-quotient irréductible de multiplicité 1. Comme la représentation $X_I^{(j)}$ est générique, on peut lui appliquer la proposition 3.2 qui nous dit que son opérateur de κ-entrelacement normalisé est obtenu à partir de $A_{\nu^{k-1}u} \otimes \cdots \otimes A_{\nu^{k-s_1}u}$ par la propriété d'induction parabolique de multiplicité 1. On obtient de manière analogue le même résultat pour les représentations $X_I^{(2)}, \ldots, X_I^{(t)}$. Nous concluons grâce à la proposition 3.1 que

$$A_\Theta(\pi_I) = A_{\pi_I}.$$

4. Soient $f \in C_\mathrm{c}^\infty(H)$ et $\phi \in C_\mathrm{c}^\infty(G)$ deux fonctions qui se correspondent. Pour rappel, nous avons noté $X_{1,I}$ la représentation $\iota_{L_{1,I}}^{G_1}(\tau_{1,I})$ de $G_1 = \mathrm{GL}_{\frac{n}{d_1}}(F)$, $\pi_{1,I}$ le quotient de Langlands de $X_{1,I}$ et X_I la représentation de G définie par

$$X_I := X_{1,I} \times \kappa X_{1,I} \times \cdots \times \kappa^{d_1 - 1} X_{1,I}.$$

Montrons maintenant que

$$\mathrm{tr}\left(X_I(\phi) A_{X_I} \right) = \sum_{I \subset J \subset \mathcal{K}} \mathrm{tr}\left(\pi_J(\phi) A_{\pi_J} \right).$$

Soit $0 \subset U_1 = \pi_\mathcal{K} \subset U_2 \subset \cdots \subset U_m = X_I$ une suite de Jordan-Hölder pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ via Θ et A_Θ, i.e. tous les sous-modules dans la suite sont stables à la fois par Θ et A_Θ et les quotients U_{i+1}/U_i sont irréductibles pour cette action.

D'une part nous avons :

$$\mathrm{tr}\left(X_I(\phi) A_{X_I} \right) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{tr}\left(U_{i+1}/U_i(\phi) A_\Theta(U_{i+1}/U_i) \right)$$

Si U_{i+1}/U_i n'est pas irréductible pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$ alors

$$\mathrm{tr}\left(U_{i+1}/U_i(\phi) A_\Theta(U_{i+1}/U_i) \right) = 0.$$

En effet dans ce cas il existe une sous-représentation ϵ de U_i/U_{i+1} irréductible pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$. Alors ϵ est isomorphe à une représentation de la forme $\sigma_{I_1} \times \kappa\sigma_{I_2} \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\sigma_{I_{d_1}}$ avec les I_i non tous égaux et A_Θ envoie ϵ sur une autre sous-représentation irréductible de U_i/U_{i+1}. Le quotient U_{l+1}/U_l est la somme des conjugués de ϵ sous A_Θ. Comme ces conjugués sont permutés par A_Θ sans point fixe, la trace tordue est nulle.

Il ne reste donc dans la trace tordue que les représentations κ-stables qui sont irréductibles pour l'action de $\mathrm{GL}_n(F)$, à savoir les π_J pour $I \subset J \subset \mathcal{K}$:

$$\mathrm{tr}\,(X_I(\phi)A_{X_I}) = \sum_{I\subset J\subset\mathcal{K}} \mathrm{tr}\,(\pi_J(\phi)A_\Theta(\pi_J))\,.$$

Or, d'après le paragraphe précédent, $A_\Theta(\pi_J) = A_{\pi_J}$. D'où

$$\mathrm{tr}\,(X_I(\phi)A_{X_I}) = \sum_{I\subset J\subset\mathcal{K}} \mathrm{tr}\,(\pi_J(\phi)A_{\pi_J})\,.$$

Sur H (dans le cas non tordu), on obtient de la même manière

$$\mathrm{tr}\,(X_{E,I}(f)) = \sum_{I\subset J\subset\mathcal{K}} \mathrm{tr}\,(\pi_{E,J}(f))\,.$$

5. La représentation irréductible $\xi_I := X_I^{(1)} \otimes \cdots \otimes X_I^{(t)}$ de L_I est essentiellement tempérée et κ-stable, et par construction c'est un κ-relèvement de τ_E à L_I. Puisque $X_I = \iota_{L_I}^G(\xi_I)$ et $X_{E,I} = \iota_{L_{E,I}}^H(\tau_{E,I})$, par compatibilité de l'application de κ-relèvement avec l'induction parabolique (cf. la proposition 6.1 et la remarque qui la suit), on en déduit qu'il existe une constante $c \in \mathbb{C}^\times$ telle que $\mathrm{tr}\,(X_I(\phi)A_{X_I}) = c\ \mathrm{tr}\,(X_{E,I}(f))$ pour toutes fonctions f et ϕ qui se correspondent. Nous avons donc

$$\sum_{I\subset J\subset\mathcal{K}} \mathrm{tr}(\pi_J(\phi)A_{\pi_J}) = \mathrm{tr}(X_I(\phi)A_{X_I}) = c\,\mathrm{tr}(X_{E,I}(f)) = c \sum_{I\subset J\subset\mathcal{K}} \mathrm{tr}\,\pi_{E,J}(f).$$

Puisque $\tau_{E,\mathcal{K}} = \tau_E$ et $\pi_{\mathcal{K}} = \tau_1 \times \kappa\tau_1 \times \cdots \times \kappa^{d_1-1}\tau_1$, par récurrence décroissance sur I, on obtient que

$$\mathrm{tr}\,(\pi_I(\phi)A_{\pi_I}) = c\ \mathrm{tr}\,(\pi_{E,I}(f))\,.$$

pour tout sous-ensemble $I \subset \mathcal{K}$ et toutes fonctions f et ϕ qui se correspondent.

Cela achève la démonstration du théorème. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Badulescu & G. Henniart – « Shintani relation for base change : unitary and elliptic representations », *Advances in the Theory of Automorphic Forms and Their L-functions* **664** (2016), p. 23–68.

[2] A. I. Badulescu – « Jacquet-Langlands et unitarisabilité », *J. Inst. Math. Jussieu* **6** (2007), no. 3, p. 349–379.

[3] J. N. Bernstein & A. V. Zelevinsky – « Induced representations of reductive p-adic groups I », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. (4)* **10** (1977), p. 441–472.

[4] G. Henniart & R. Herb – « Automorphic induction for $\mathrm{GL}(n)$ (over local non-archimedean fields », *Duke Math. J.* **78** (1995), p. 131–192.

[5] G. Henniart & B. Lemaire – « Formules de caractères pour l'induction automorphe », *J. Crelle* **645** (2010), p. 41–84.

[6] ———, *Changement de base et induction automorphe pour* $\mathrm{GL}(n)$ *en caractéristique non nulle*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.), vol. 124, 2011.

[7] K. Hiraga & A. Ichino – « On the Kottwitz-Shelstad normalization of transfer factors for automorphic induction for $\mathrm{GL}(n)$ », *Nagoya Math. J.* **208** (2012), p. 97–144.

[8] H. Jacquet & J. Shalika – « The Whittaker models of induced representations », *Pacific J. Math.* **199** (1983), no. 1, p. 107–120.

[9] D. Renard – *Représentations des groupes réductifs p-adiques*, Cours spécialisé SMF, vol. 17, 2011.

[10] F. Rodier – « Whittaker models for admissible representations of reductive p-adic groups », p. 425–430, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[11] M. Tadic – « Induced representations of $\mathrm{GL}(n, A)$ for p-adic division algebras A », *J. Reine Angew. Math.* **405** (1990), p. 48–77.

[12] A. Zelevinsky – « Induced representations of reductive p-adic groups II », *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* **13** (1980), p. 165–210.