

THE CORRESPONDENCE FROM AUGUST GUTZMER TO FRANCISCO GOMES TEIXEIRA

Pedro J. Freitas

Abstract. — This paper presents a commented edition of the letters from August Gutzmer to Francisco Gomes Teixeira, a Portuguese mathematician, present in the Coimbra Archive of correspondence sent to Gomes Teixeira. These detail the relationship between the two mathematicians, shedding a new light on the correspondence network established by Gomes Teixeira throughout his life.

Résumé (La correspondance d'August Gutzmer à Francisco Gomes Teixeira)

Cet article présente une édition commentée des lettres d'August Gutzmer à Francisco Gomes Teixeira, mathématicien portugais, présentes dans les archives de Coimbra, contenant la correspondance envoyée à Gomes Teixeira. Ces lettres détaillent la relation entre les deux mathématiciens, apportant un nouvel éclairage sur le réseau de correspondance établi par Gomes Teixeira tout au long de sa vie.

Texte reçu le 3 juillet 2023, version révisée reçue le 24 avril 2024, accepté le 14 mai 2024.

P. J. Freitas, Centro Interuniversitário de História das Ciências e da Tecnologia e, Departamento de História e Filosofia das Ciências, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, 1749-016 Lisboa, Portugal.

Courrier électronique : pjfreitas@fc.ul.pt

2000 Mathematics Subject Classification : 01A55, 01A70.

Key words and phrases : Correspondance scientifique, Francisco Gomes Teixeira, August Gutzmer, mathématiques du XIX^e siècle.

Mots clefs. — Scientific correspondence, Francisco Gomes Teixeira, August Gutzmer, 19th century mathematics.

1. INTRODUCTION

Francisco Gomes Teixeira (1851-1933) was the most active and best-known Portuguese mathematician of the late 19th and early 20th centuries. Having studied in Coimbra, and concluded his doctorate in 1875, he secured a teaching position in that university the same year. This is where his first scientific activity began. He then moved to the Polytechnic Academy of Porto in 1884, and accompanied its transformation into the University of Porto, in 1911, shortly after the implementation of the Portuguese Republic in 1910.

Gomes Teixeira contributed greatly to the modernisation and internationalization of Portuguese mathematics. We start by considering Gomes Teixeira's books. His textbooks *Curso de análise infinitesimal, cálculo diferencial* (1887) and *Cálculo integral* (1889) constituted an innovation in the way these subjects were presented to students at the time, in terms of scope and rigor. Along with these works, Gomes Teixeira also produced two books: *Sobre o Desenvolvimento das Funções em Série* (On the Development of Functions in Series) [Teixeira 1897] and *Tratado de las curvas especiales notables* (Treatise on Special and Remarkable Curves) [Teixeira 1905] which was later expanded, translated to French, and republished in 1917. Both these books received prizes from the Royal Academy of Sciences of Madrid, in 1895 and 1897 respectively. The French translation of the second book was awarded the Binoux Prize of the French Academy of Sciences in 1917 for its historical part. In 1902, the Portuguese government acknowledged Gomes Teixeira's prominence as a mathematician by funding the publication of his works, in seven volumes, under the general title *Obras sobre Mathematica* (Works on Mathematics). These volumes republish many of his articles, his textbooks on differential and integral calculus, and the treatise on special curves.

The international attention given to these publications was a novelty for Portuguese mathematics of the time, and was the result of a conscious effort of internationalization by Gomes Teixeira. One of the clearest signs of this desire was the creation, in 1877, of the *Jornal de Sciencias Matemáticas e Astronómicas*, which we will abbreviate as JSMA,¹ a journal which, in Gomes Teixeira's own words in the introduction to the first number, should be exclusively dedicated to "Astronomical and Mathematical Sciences," following the path of "almost all of the European countries". This was the first

¹ The journal is now fully digitized and can be found at www.fc.up.pt/fa/index.php?p=nav&f=html.fbib-Periodico-oa.

Portuguese journal exclusively dedicated to mathematics. With time, the participation became more and more international, with an overall participation of foreign authors reaching 42.1% of all articles, [Saraiva 2014, p. 86].

Teixeira also promoted exchanges of the JSMA with several foreign journals. In Germany, the JSMA had exchanges with the University of Berlin and the Hamburg Mathematical Society since 1884, the Royal Society of Sciences of Göttingen since 1885, and the Wittenberg Mathematical Society since 1889.

The JSMA was published until 1905, and in that same year, Gomes Teixeira started the *Annaes Scientificos da Academia Polytechnica do Porto*, which had a broader scientific scope—in the first volume, Teixeira notes that the section on mathematics of the *Annaes* replaces the JSMA. For more on Gomes Teixeira's life and work, see for instance [de Vilhena 1936], [Kharlamova 2013] and [Alves 2004], and also [Saraiva 2000, pp. 313–315] and [Saraiva 2014], which has more information about the JSMA.

Another sign of Gomes Teixeira's interest in internationalization of mathematics is the volume of his correspondence with foreign mathematicians. The Archive of the University of Coimbra keeps a collection of more than two thousand letters, received by Gomes Teixeira, who made a meticulous catalog of this correspondence. These letters deal with all sorts of mathematical, pedagogical, personal and sometimes political matters, and in many cases refer to articles published in the JSMA and the *Annaes*, as is the case with his correspondence with August Gutzmer, which we present in this paper.

August Gutzmer (1860–1924) attended the University of Berlin from 1881 to 1887, even though he only registered as a student in 1884. He completed his doctorate in 1893, under the supervision of Wangerin.² After a period as an assistant at the Technische Hochschule of Charlottenburg, he submitted his *Habilitation* thesis to the University of Halle-Wittenberg in 1896 and worked there as a *Privatdozent* until March 1899, when he was appointed as professor of mathematics at the University of Jena, a position he held until 1905. In that year, Gutzmer obtained an ordinary professorship at the University of Halle-Wittenberg, where he came to perform the function of Rector.

While at Jena, Gutzmer was elected to the German Academy of Scientists Leopoldina in 1900, becoming president of the society in 1921. He

² Albert Wangerin (1844–1933), a German mathematician who worked on potential theory, spherical functions and differential geometry.

also devoted some work to other scientific organizations, having written a history of the German Mathematical Society in 1909. A more detailed account of Gutzmer's life and work can be found in [Malonek & Kharlamova 2010], which also emphasizes his relationship with Gomes Teixeira and his journal. A short biography can be found in [Volk 1966] and an obituary in [Kratzer 1925].

The national situations for these two mathematicians were quite different. Gomes Teixeira was in a peripheral European country, making an effort to establish international connections in order to bring Portugal's mathematical level up to date with the latest developments in the area. Spain developed a similar effort, with Zoel García de Galdeano,³ another of Gomes Teixeira's correspondents, being the most active Spanish mathematician in this endeavor—he was the founder of the journal *El Progreso Matemático* in 1891.

On the other hand, Gutzmer worked in Germany, one of the mathematical powerhouses of Europe, with the universities of Göttingen and Berlin being at the mathematical forefront of the time. Gutzmer himself never held a place at either of these universities (even though he did get a doctorate from the University of Berlin), so one could say that he was in a peripheral position within a central country in the development in mathematics.

The goal of the present paper is to present and study the correspondence from Gutzmer to Gomes Teixeira, which can be found in the Archive of the University of Coimbra. This correspondence, which lasted from 1887 to 1920, sheds a more detailed light on the relationship between these two mathematicians, in the context of a growing network of international mathematical relations. All letters are in French, we present the text verbatim, including occasional linguistic mistakes. We have made an effort to locate the correspondence from Gomes Teixeira to Gutzmer (namely, in the archives of Halle University and of the Germany Academy of Sciences Leopoldina) but failed to find any letters.

To the best of our knowledge, this is the third paper devoted to the systematic study of the correspondence received by Gomes Teixeira—the other ones being [Freitas 2019] and [Freitas 2020], focusing on the correspondence with Cesàro and Hermite, respectively.

³ Zoel García de Galdeano y Yanguas (1846–1924), a Spanish mathematician, a prolific author who promoted the internationalization of mathematics in Spain and the dissemination of modern mathematical concepts of his time.

2. AN OVERVIEW OF THE LETTERS

We present and analyze all the letters from August Gutzmer to Gomes Teixeira, extant in the Archive in Coimbra, following the chronological order, and including the numbers given by Gomes Teixeira to each letter in his catalog (which do not reflect any special organization of the letters). The distribution of the letters with time is as follows.

Year	1887	1888	1889	1890	1891	1892
No. of letters	2	4	2	2	2	1
Year	1895	1896	1899	1904	1905	1906
No. of letters	1	1	1	1	1	1
Year	1908	1909	1910	1911	1920	
No. of letters	1	1	2	1	1	

This collection of 25 letters is the largest among all German correspondents of Gomes Teixeira, which indicates, as we will see, that a close relationship did develop between the two mathematicians. The correspondence was more frequent in the early years, probably motivated by Gutzmer's need to establish himself as a mathematician, starting in his last year at the University of Berlin.

Five of the letters, listed below, contain the material for articles, eventually published in JSMA, some with an introduction or a conclusion.

— Letters 103 and 104, May 20 and August 29, 1887, contain the paper [Gutzmer 1887a], “Sur une série considérée par M. Lerch”.

— Letter 105, January 15, 1888, contains the paper [Gutzmer 1887b], “Remarques sur la théorie des séries”.

— Letter 1703, May 1888, contains the paper [Gutzmer 1887c], “Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d’une variable complexe”.

— Letter 1704, no date (1890?), contains the paper [Gutzmer 1891], “Remarque sur certaines équations différentielles”.

We will not reproduce these letters here, except for the introduction to letter 104, and the conclusion of letter 1704, which present some information and comments about the papers.

These were among the first letters sent from Gutzmer to Gomes Teixeira. Malonek & Kharlamova [2010] point out in that the first three papers ever published by Gutzmer were actually the first three papers mentioned above and published in volume 8 of the JSMA, thus marking the start of

Gutzmer's scientific career. The website⁴ at Halle University shows a copy of the list of 16 publications presented by Gutzmer at the occasion of his admission at the German Academy of Sciences Leopoldina in 1900. The first six ones are articles published in the JSMA.

As this was a relatively new journal, it is possible that Gutzmer found it to be a good outlet to publish his early work. The recommendation may have come from Matyáš Lerch,⁵ one of the authors who contributed most to the JSMA. Lerch also corresponded with Gomes Teixeira, more than fifty letters can be found in Gomes Teixeira's *Nachlass*, a collection that has yet to be thoroughly analyzed. Lerch's first paper in the JSMA is found in volume 7 (1886), with participation in every volume of the JSMA from that moment on. Lerch is mentioned in several of the letters presented here. In letter 104 (August 29, 1887), Gutzmer mentions that it was through Lerch that he came to read a paper by Cesàro,⁶ published in the JSMA and, in letter 107 (November 10, 1889), Lerch is also mentioned as the source of information about one of Gomes Teixeira's textbooks. Moreover, Gutzmer calls Lerch a friend in letter 110 (August 7, 1891). And, concerning Gutzmer's participation in the JSMA, his first published paper in the journal, [Gutzmer 1887a], refers to a then recent paper by Lerch, also published in the JSMA.

We note that there are two more papers by Gutzmer in the JSMA, which were not sent in the extant letters: [Gutzmer 1889], "Note sur un point de la théorie des séries," which is a reprint of a paper published in the *Nouvelles Annales de Mathématiques* and [Gutzmer 1897], "Note sur certaines équations différentielles linéaires".

In the same vein of these letters, containing articles for the JSMA, there are nine letters about exchange of scientific works, such as books (letters 107, 108, 111, 113, 385, 386, 243, 387, and 193). Four others address mathematical issues (104, 384, 389, 109 and 100), the last one involving a quarrel with Cesàro,⁷ another of Gomes Teixeira's correspondents (see [Freitas 2019]).

⁴ August Gutzmer (1860–1924), disk.mathematik.uni-halle.de/history/gutzmer/index.html.

⁵ Matyáš Lerch (1860–1922), a prolific Czech mathematician who worked in analysis and number theory.

⁶ Ernesto Cesàro (1859–1906), an Italian mathematician whose main contributions were to differential geometry and divergent series, and also worked on the theory of numbers.

⁷ We consulted the *Fondo Cesàro* (pzm.math.unibas.it/PRIN/STMAT/index.php), which collects letters both sent to and received by Ernesto Cesàro, but found no record of correspondence to or from Gutzmer.

Other letters have a more personal flavor. There are three that concern a trip of Gomes Teixeira to Germany and the attendance of mathematical congresses (106, 500 and 501), one about a philosopher, Waihinger, seeking a contact in Spain (112) and two with personal notes (243, 1820).

In the next section, we analyze each letter individually.

3. THE LETTERS

August 29, 1887 (letter 104)

This letter makes reference to two papers both published in Vol. 7 of the JSMA. One of these is “Remarques sur la théorie des séries,” by Cesàro [1889], which offers a comment on a paper with a very similar name, “Remarque sur la théorie des séries” by Lerch [1886]. Both papers are about convergence criteria for infinite series and the non-validity of its reciprocal statements, a topic which will reappear in the correspondence. The letter also mentions a previous paper by Lerch on the subject, [Lerch 1885], published in the Proceedings of the Royal Bohemian Society of Sciences.

Berlin, Jaegerstr. 20, le 29 août 1887.

Monsieur !

Je prends encore une fois la liberté de vous adresser quelques lignes relativement à une série étudiée par M. Lerch, dans votre Journal. C’est par la bonté de M. Lerch que j’ai lu l’article extrêmement intéressant que M. Cesàro vient de publier au numéro dernier du Journal, et je vois que M. Cesàro trouve l’exemple de M. Lerch un peu trop compliqué et qu’il cherche à donner d’autres exemples plus simples.

Or, M. Lerch à déjà publié le 13 mars 1885 dans les “Comptes rendues des séances de la Société royale des sciences de Bohême,” en langue bohémienne, un article intitulé “Contributions à la théorie des séries infinies,” dans lequel il a communiqué, pour la première fois, de telles séries que jouissent de la propriété d’être convergentes, malgré que le quotient $\frac{x_y+1}{x_y}$ n’ait point de sens ou puisse devenir aussi grand que l’on voudra. C’est pourquoi je vous demande la bonté de faire ajouter, s’il est possible, à ma petite remarque, que vous voulez bien faire imprimer au numéro de octobre de votre “Journal” estimé, à une place convenable, environ ces mots comme note:

The remainder of the letter is part of the paper [Gutzmer 1887a], as we have mentioned.

May 5, 1888 (postcard 388)

This letter acknowledges the receipt of a copy of the journal issue that contains the paper mentioned in the previous letter.

Berlin, le 5 mai, 1888

Monsieur !

J'ai reçu le numéro dernier de votre journal que vous m'avez bien voulu adresser et où vous avez fait imprimer ma lettre. (Les extraits ne sont pas encore arrivés). Je vous en remercie vivement, et j'espère vous communiquer bientôt d'autres remarques sur quelques points de la théorie des séries.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus parfaite,
A. Gutzmer.

End of May, 1888 (letter 1703)

As we have mentioned, this letter contains the paper [Gutzmer 1887c], after which follow these remarks, asking for some copies of the paper.

Berlin, vers la fin du mai 1888
Jaegerstr. 20. pt.

[...]

Voilà la communication, Monsieur, que j'ai promis de vous faire dans ma carte. Peut-être vous l'admettez dans votre Journal honoré sous le titre "Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe". Quant aux extraits, je vous serais obligé beaucoup, quand vous voudriez bien me faire imprimer – cette fois exceptionnellement et event. à mes frais – 50 exemplaires.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

A. Gutzmer.

June 12, 1888 (postcard 389)

After acknowledging the receipt of another number of Teixeira's journal, Gutzmer discusses, as before (see letter 104, August 29, 1887), issues pertaining to convergence criteria for series. The article by Weyr⁸ mentioned is [Weyr 1887], which comments on Gutzmer's article [Gutzmer 1887a] on the same volume of the JSMA.

Berlin, le 12 juin 1888

Monsieur !

J'ai reçu le n.º 4 de votre journal honoré et votre carte du 7.VI.: je vous en remercie vivement. La note de M. Weyr m'a intéressé beaucoup, et son premier théorème forme en quelque sorte la fin des recherches relatives a ces séries intéressantes. Je m'étais douté depuis longtemps de l'existence de ce théorème

⁸ Eduard Weyr (1852–1903), a Czech mathematician who was the discoverer of a certain canonical form for square matrices. He also worked on projective geometry and differential geometry.

de M. Weyr, sans pouvoir le démontrer. Peut-être il n'est pas sans intérêt de remarquer que M. Stern⁹ a évidemment supposé l'existence de telles séries, car il dit (voyez la note à la page 91 de son "Lehrbuch der algebraischen Analysis," Leipzig 1860):

"Wenn die Glieder theils zunehmen theils abnehmen, lassen sich wie sich von selbst versteht, bei der grossen Mannichfaltigkeit der hier möglichen Fälle, keine allgemeinen Regeln geben."

(Trad: Si les termes croissent en partie et décroissent en partie, on ne peut pas, comme se comprend de soi-même, donner des règles générales, à cause de la variété des cas possibles.)

Veuillez agréer, Monsieur, avec l'expression de mes remerciements, l'assurance de ma considération la plus distinguée.

A. Gutzmer.

November 10, 1889 (letter 107)

In this letter, Gutzmer acknowledges the receipt of the first volume of Teixeira's book on integral calculus and offers to make a review, once he receives news about the content of the second part of the tome. He refers to a review of this book, done by M. Cantor,¹⁰ [Cantor 1888], in the the *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, which he considers superficial.

Berlin, Jaegerstr. 20. le 10 Novbr. 1889

Monsieur,

Je vous demande pardon de ce que je vous remercie si tard de votre lettre et de votre beau livre; mais ma santé n'était pas bonne pendant ces derniers mois et il m'était presque impossible de travailler quelque chose. Je vous remercie donc bien sincèrement de votre excellent livre que j'ai parcouru avec le plus vif intérêt, et je me ferai un grand plaisir d'en faire un rapport dans un journal allemand. Mais, avant de le faire, je vous prie de vouloir bien me donner quelques indications que vous intendiez à traiter dans la seconde partie du "Calculo Integral". Aussi j'ai le regret de dire que je ne connais pas bien le calcul différentiel; il est vrai que j'en ai lu un résumé et que M. Lerch m'en a donné quelques notices, mais je ne l'ai pas vu moi-même. M. Cantor a publié, il y a quelque temps, un rapport de votre calcul différentiel dans le "Zeitschrift" de M. Schlömilch,¹¹ mais le rapport est un peu superficiel et ne donne pas une idée complète de votre œuvre. C'est pourquoi j'intends de donner ma analyse

⁹ Moritz Stern (1807–1894), a German mathematician who worked in number theory, and who was also recognized for his teaching in the University of Göttingen.

¹⁰ Moritz Cantor (1829–1920), a German historian of mathematics. In 1859, he became editor of the *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, along with Schlömilch, taking charge of the historical and literary section.

¹¹ Oscar Schlömilch (1823–1901), a German mathematician who worked in mathematical analysis, founder of the journal *Zeitschrift für Mathematik und Physik*.

un peu plus complète de vos livres en dirigeant l'attention des géomètres sur les recherches nouvelles que vous y avancez.

Je crois que cette intention trouve votre consentement. Mais pour l'exécuter, il me faut attendre que le calcul différentiel – dont vous voulez bien m'envoyer un exemplair [*sic*] – soit réimprimé et que vous ayez peut-être la bonté de me donner quelques notices sur le contenu de la deuxième partie du calcul intégral.

Je vous remercie encore une fois de votre savant livre et je vous remercie d'avance de l'exemplaire du calcul différentiel et des indications.

Veillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments de remerciements et de ma considération la plus distinguée.

A. Gutzmer.

November 22, 1889 (letter 384)

Gutzmer acknowledges the receipt of another issue of Teixeira's journal, with a reprint of one of his articles, [Gutzmer 1889], noting some typos in the text and asking for copies to be sent to Catalan,¹² Weyr and Lerch, upon their request.

In the second part, Gutzmer refers to an article of Hurwitz,¹³ [Hurwitz 1889], which responds to two of Gomes Teixeira's articles, [Teixeira 1885] and [Teixeira 1887], all published in the *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. The theorems in these articles are about functions, expressed by series of powers, that are solutions of algebraic differential equations.

Hurwitz notes that Teixeira's theorem, as stated in [Teixeira 1887], is incorrect, presenting a counter-example. He also suggests a new, more intricate, statement for the theorem, relating it to a theorem by Eisenstein,¹⁴ see [Eisenstein 1852].

The new formulation gives a necessary condition for a series of powers to be the solution of an algebraic differential equation, a condition that depends upon the existence of a function γ , without making it explicit. Gutzmer notes that the statement is indeed more intricate ("le théorème

¹² Eugène Catalan (1814-1894), a Belgian mathematician who defined the numbers named after him, while considering dissections of polygons. He established a conjecture, also bearing his name, on the solutions of the Diophantine equation $x^m - y^n = 1$, which is now proved.

¹³ Adolf Hurwitz (1859-1919), a German mathematician who worked on algebra, analysis, geometry and algebraic number theory. He studied the genus of the Riemann surface and established foundational results on algebraic curves.

¹⁴ Gotthold Eisenstein (1823-1852), a German mathematician who worked on number theory, especially on reciprocity laws and elliptic functions.

de M. Hurwitz n'est pas propre à une application commode sur une série donnée") and proposes to write to Hurwitz about this.

This debate has already been mentioned in the analysis of the correspondence of Hermite¹⁵ to Gomes Teixeira in [Freitas 2020].

Berlin, Jaegerstr. 20. le 22 Novbr 1889

Monsieur,

Je viens de recevoir le n.º 2 du vol. IX de votre "Jornal," où vous avez bien voulu faire réimprimer ma "Note sur un point de la théorie des séries" des Nouvelles Annales. Acceptez mes remerciements sincères de votre bonté et de l'honneur que vous m'en faites.

Malheureusement il y a une faute d'impression dans le texte allemand que M. Rouché¹⁶ n'a pas fait corriger malgré ma prière. Le texte allemand doit être: "Ainsi M. Stern dit, dans une Note de son Lehrbuch des algebraischen Analysis: Wenn die Glieder theils zunehmen, theils abnehm̄en, lassen sich, wie sich von selbst versteht, bei der grossen Mannigfaltigkeit der hier möglichen Fälle, Keine allgemeinen Regeln geben."... Autrement cette phrase donne le sens contraire! Mais il n'est pas d'une grande importance de corriger cette faute d'impression. Une autre petite faute se trouve sur p. 64, ligne 5, où il faut être celles au lieu de celle.

Comme je ne pouvais pas obtenir des extraits de ma Note dans les Nouvelles Annales – la composition étant déjà détruite quand je m'aperçut [*sic*] de ce que mon article se trouvait dans le n.º de janvier – j'ai ma petite prière. Est-il possible de m'envoyer quelques extraits de votre journal? Je n'ose pas l'espérer et je vous prie de ne pas vous faire de grandes peines de ma prière. Mais comme M. Catalan, M. Weyr, M. Lerch, etc. m'ont prié des extraits, je vous serais extrêmement obligé quand votre provision de numéros serait assez grande pour me donner quelques extraits – naturellement à mes frais.

J'ai lu l'autre jour l'article de M. Hurwitz dans les Annales de l'École Normale, où il traite de l'analogie du théorème d'Eisenstein pour des équations différentielles algébriques en modifiant votre théorème. Mais je trouve que le théorème de M. Hurwitz n'est pas propre à une application commode sur une série donnée. Comment trouver une fonction $\gamma(z)$, pour décider si la série proposée

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

satisfait (ou peut satisfaire) à une équation différentielle algébrique quelconque? Sans doute, le théorème de M. Hurwitz est vrai, mais il n'offre pas un moyen commode pour décider de ce qu'une série y peut satisfaire à une

¹⁵ Charles Hermite (1822–1901), a French mathematician whose work in the theory of functions includes the application of elliptic functions to the quintic equation. He published the first proof that e is a transcendental number.

¹⁶ Eugène Rouché (1832–1910), a French mathematician with work on complex functions, and author of several textbooks.

équation différentielle algébrique ou non. Je vais écrire a M. Hurwitz, pour l'interroger sur ce point. C'est une question d'une importance considérable.

Veillez agréer, Monsieur, l'assurance des mes sentiments d'estime et de remerciements.

A. Gutzmer

October 26, 1890 (letter 108)

In this letter, Gutzmer acknowledges the receipt of the second volume of Teixeira's textbook on analysis (following the first, cited in letter 107, November 10, 1889), noting that, even though there is a language barrier, he uses these textbooks on an almost daily basis. He then refers to a specific proposition in the textbook, the presentation of D'Alembert's criterion for the convergence of a series (see [Teixeira 1906, p. 38]), noting that Gomes Teixeira makes a reference to articles by Gutzmer (and also Lerch, Cesàro and Weyr) on this topic, published in the JSMA, and appreciates this reference.

In the second part, Gutzmer notes that he couldn't find the JSMA in two institutions he visited in Berlin, the Polytechnic School and the Royal Library. A similar remark is to be found in letter 106 (March 24, 1895), transcribed below. Nevertheless, we know that the exchange of the JSMA with the University of Berlin had already started in 1884.

Berlin, Jaegerstr. 20 le 26 Octobre 1890

Monsieur

Je viens de recevoir la deuxième édition de Votre excellent cours de calcul différentiel et je me hâte de vous en remercier sincèrement. Vous m'avez fait un grand plaisir par l'offre de ce beau volume et je ne manquerai de le recommander dans une revue que je vais écrire. Malgré que je ne connaisse pas Votre langue, je comprend tout et je me sers presque journallement des deux volumes que vous avez bien voulu présenter.

De même j'ai à Vous remercier de ce que Vous avez bien voulu citer ma note modeste qui a été publié dans votre "Jornal" excellent. Malheureusement il n'y a pas d'occasion à Berlin de lire votre journal ni à la Bibliothèque Royale ni à celle de l'École Polytechnique ; j'ai déjà essayé de faire abonner ces bibliothèques, mais jusqu'à présent sans succès.

Veillez bien accepter mes félicitations du succès de Vos livres et veuillez agréer l'expression de mes sentiments de remerciements et de ma considération la plus distinguée.

A. Gutzmer

February 9, 1891 (letter 109)

This letter contains a request for corrections in a paper Gutzmer submitted to the JSMA, the one in Letter 1704, [G5], “Remarque sur certaines équations différentielles,” in which he asks to reference a note by Brassine¹⁷ in Sturm’s¹⁸ *Cours d’analyse*. “Note III: Analogie des équations différentielles linéaires a coefficients variables, avec les équations algébriques,” [Sturm 1868, 345–361]. The corrections were duly introduced. Gutzmer also appreciates Gomes Teixeira’s 1890 paper in the *Bulletin des Sciences Mathématiques*, [Teixeira 1890].

Berlin, le 9 février 1891

Monsieur,

Je vous remercie sincèrement de Votre lettre bienveillante que je viens de recevoir, et je suis très heureux de ce que vous jugez ma petite communication digne d’une publication dans Votre excellent “Jornal”.

Mais je vous prie de vouloir bien changer un peu les derniers mots qui se rapportent aux intégrales multiples considérées par M. Koenigsberger et à la note aux pied de la page. En effet il ne faut pas citer là M. Koenigsberger et son livre, mais – ce que j’avais oublié en écrivant ma lettre – la note de M. E. Brassinne contenue dans le cours d’analyse de Sturm (t.II.). Veuillez donc remplacer, dans le passage indiquée de ma lettre, les mots “intégrales multiples considérées par M. L. Koenigsberger dans son livre” par les mots “solutions conjuguées étudiés par M. E. Brassinne dans une note inserée au t. II. du cours d’analyse de Sturm”. En outre je vous prie de vouloir écarter la note au pied (“Lehrbuch des Theorie etc”).

J’espère que ce changement ne produira pas de confusions; malheureusement je n’ai pas le texte de ma lettre, de sorte que je vous prie de vouloir bien m’envoyer (en cas qu’il soit nécessaire) une épreuve.

J’ai encore à vous remercier vivement de votre mémoire paru dans le Bulletin des Sciences Mathématiques. Les développements que vous y donnez et en particulier les applications intéressantes que vous en faites m’ont intéressé beaucoup. Il me semble qu’on peut en tirer encore un grand nombre de conséquences.

Veillez agréer, Monsieur, l’expression de mes sentiments de remerciements et l’assurance de ma considération la plus distinguée.

A. Gutzmer

Berlin, Jaegerstr. 20 (dès le 1^{er} avril 1891: Berlin, Dessauerstr. 28 part.)

¹⁷ Émile Brassinne (1805–1884), a French mathematician who taught applied sciences in Toulouse and produced a *précis* of the works of Fermat and Diophantus.

¹⁸ Jacques Sturm (1803–1855), a French mathematician, best known for the Sturm-Liouville problem, an eigenvalue problem in differential equations.

August 7, 1891 (letter 110)

In this letter, Gutzmer comments on the ongoing discussion between Cesàro and himself about convergence criteria for series, in successive articles published in the JSMA. This was already the topic of letters 104 (August 29, 1887) and 389 (June 12, 1888). These comments were prompted by the latest article by Cesàro on this subject, [Cesàro 1891], a reprint from the *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Gutzmer disagrees with Cesàro's remarks about his own articles (which dwell on Gutzmer's expression "la plus remarquable," applied to a series), but declines to publish a response.

He also acknowledges a mention of one of his articles in the "Bibliography" section of the JSMA (vol. 10, p. 54). The article in question is [Gutzmer 1890].

Berlin, Dessauerstr. 28, le 7 août 1891

Monsieur,

Je viens de recevoir les trois n.^{os} de votre Journal vous avez bien voulu m'envoyer, et je me hâte de vous en remercier sincèrement. Je vois que l'article de Monsieur Cesàro a paru d'abord dans les *Nouvelles Annales* en 1890; il m'avait échappé jusqu'à présent. Je suis étonné qu'un mathématicien du rang de Monsieur Cesàro insiste de nouveau sur les mots "la plus remarquable" qui, du moins pour moi, ne sont pas d'importance. La série de M. Lerch m'a intéressé par cette circonstance qui il y a, pour ainsi dire, une irrégularité dans les oscillations de l'expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$; il aurait été le même, si les termes où le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ cesse d'être inférieur à l'unité devenaient par degrés plus fréquents, ou tantôt plus rares ou tantôt plus fréquents. Sous ce point de vue l'article de M. Cesàro semble être inspiré d'un esprit de philologie.

Quant au théorème de Weyr, je n'ai jamais pensé à lui ôter une partie de l'intérêt qu'il mérite et je crois qu'il est impossible de trouver une telle tendance dans mon article. Pourquoi donc écrire telles – malices? M. Cesàro semble être un peu sensible que ses séries ne me semblaient pas "les plus remarquables"! Quel philologue – ce M. Cesàro!

Comme je n'ai rien d'essentiel à ajouter à mon article dans Votre Journal et celui des *Nouvelles Annales*, et que M. Cesàro n'a pas fait des objections concrètes, je crois devoir renoncer à une réponse. Je n'aime pas à faire une dispute sur le goût personnel; "de gustibus non est disputandum," comme écrit mon ami M. Lerch. Je ne crois pas qu'on me tienne battu, parce que je ne réponds pas à M. Cesàro.

J'ai eu ces jours de conversations heureuses avec mon ami, M. Lerch, qui se trouve à présent à Berlin, pour faire des études sur les fonctions abéliennes. Il partira le 11 août pour Prague; ses études sur la théorie de M. Weierstraß¹⁹ ont été couronnés du plus beau succès.

¹⁹ Karl Weierstrass (1815–1897), a German mathematician, with notable work on the theory of complex functions and the establishment of the foundations of analysis.

J'ai encore à vous remercier de la manière bienveillante dont vous avez parlé, dans le n.º 2 t X, de mon mémoire du Journal de Liouville!²⁰

Veillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments de remerciements et de haute estime.

A. Gutzmer

May 19, 1892 (letter 111)

This is a brief note appreciating the receipt another volume of Teixeira's textbook, with an offer to write a review.

Berlin, Dessauerstr. 28, le 19 mai 1892

Monsieur,

J'ai reçu avec le plus grand plaisir la troisième partie de votre excellent "Curso de Analyse Infinitesimal," et je m'empresse de vous en exprimer mes remerciements les plus vifs. En lisant votre livre, on est surpris de l'élégance des développements et de la richesse de théories y contenues. J'ai l'intention de publier une analyse de votre œuvre dans un de nos journaux, si vous voulez bien le permettre, et de prouver par là combien je vous suis obligé de ce don.

Veillez agréer, Monsieur, l'expression de mes sentiments les plus sincères et l'assurance de ma considération la plus distinguée.

A. Gutzmer

March 24, 1895 (letter 106)

Gutzmer acknowledges the receipt of some issues of Teixeira's journal, along with a photo of him. He replies, mentioning his election as Secretary of the German Mathematical Society, as well as own collaboration in the *Jahresberichte*, the yearly reports of the society, and commenting on the preparations for the 1900 International Congress of Mathematicians in Paris. The letter concludes with a reference to Gomes Teixeira's wife, indicating that a more personal relationship had developed.

Berlin, Marburgerstrasse 13, le 24 mars 1895

Monsieur,

J'ai reçu avec le plus grand plaisir votre lettre aimable et votre envoi, et je me hâte de vous en remercier sincèrement. C'est en particulier votre visite en photographie qui m'a causé une vive joie, et je vous exprime tous mes remerciements de ce don qui orne maintenant mon album.

²⁰ Joseph Liouville (1809–1882), a French mathematician and engineer, with broad interests, including number theory and integral equations. He is also known as the founder of the *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

Vous avez la bonté de vouloir m'envoyer régulièrement votre journal estimé dont vous m'avez déjà adressé les n.^{os} 1 et 2 du vol. XII. Je ne puis vous dire combien je suis reconnaissant de cette promesse d'autant plus que votre "Jornal" ne se trouve pas dans les bibliothèques de Berlin.

Je profiterai volontiers de votre invitation si aimable de publier quelques mots dans votre Journal aussitôt que j'ai le temps de rédiger une notice. À présent je suis fort occupé à l'édition des œuvres de M. Weierstraß (le t. II paraîtra en peu de temps) ; de plus, j'ai été élu secrétaire de la Société des Mathématiciens Allemands (Deutsche Mathematiker-Vereinigung) et membre de la rédaction des annuaires (Jahresberichte) publiées par cette société. Vous pouvez imaginer que la correspondance et les autres affaires absorbent beaucoup de temps.

Je ne sais si vous connaissez déjà ces "Jahresberichte," et je me permets de vous en dire quelques mots. Jusqu'à présent la société a publié trois volumes. Ils contiennent des notices sur la chronique de la société (status, affaires, nécrologes), les sommaires des communications faites au congrès annuel de la société, et des rapports scientifiques sur le développement de quelques branches des Mathématiques dans les derniers temps. Certainement vous avez lu le rapport de M. Fr. Meyer²¹ sur le développement de la théorie des invariants, qui paraît maintenant en traduction française dans le Bulletin de M. Darboux.²² C'est le rapport contenu dans le t. I des Jahresberichte. Le t. II contient un rapport de M. F. Kötter²³ sur le développement de la théorie de la poussée des terres (Erddruck), et le t. III contient deux rapports, l'un de M. Henneberg,²⁴ "Ueber die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke" (c'est une partie de la graphostatique), l'autre de Mrs. Brill²⁵ et Noether²⁶ sur le développement de la théorie des fonctions algébriques dans les temps anciens et modernes. Le dernier rapport est un travail d'une grande importance et d'une valeur indiscutable ; il renferme environ 450 pages. Je crois devoir attirer votre intérêt spécialement sur cette œuvre, publiée il y a peu de temps.

Les séances ou réunions de la Société de Mathématiciens Allemands ont lieu une fois par an au mois de septembre ; dans cette année dans la semaine du 16 au 21 septembre à Lübeck, peut-être aurons-nous l'honneur et le plaisir de vous y saluer?

²¹ Friedrich Meyer (1856–1934), a German mathematician who studied algebraic geometry, algebraic curves and invariant theory.

²² Jean Gaston Darboux (1842–1917), a French mathematician with important contributions to differential geometry and analysis, particularly known for the Darboux integral, named after him.

²³ Fritz Kötter (1857–1912), a German applied mathematician. He was the first Professor in the field of technical mechanics at the TU Berlin.

²⁴ Ernst Henneberg (1850–1933), a German professor of mechanics, with a minimal surface named after him.

²⁵ Alexander von Brill (1842–1935), a German mathematician who worked in algebraic geometry, having also an interest in the history of mathematics.

²⁶ Max Noether (1844–1921), a German mathematician with important work on algebraic geometry. He was also the father of Emmy Noether.

L'année dernière on a commencé à discuter la question d'un congrès international de Mathématiques ou de Mathématiciens, qui est projeté d'avoir lieu pour la première fois en 1900 à Paris. Mais il faut dire que jusqu'à présent les correspondances préliminaires ne sont pas encore finies ; pourtant il me semble être vraisemblable que ce projet sera réalisé et que les géomètres les plus éminents de toute nation se réuniront dans les conférences.

Ma femme et moi, nous présentons nos meilleurs respects à vous et a Madame votre épouse. Veuillez agréer, Monsieur, l'assurance de ma considération la plus parfaite.

A. Gutzmer.

June 29, 1896 (letter 112)

Gutzmer acknowledges and thanks Teixeira for the publication of the article [Gutzmer 1897] in the JSMA. He then asks Teixeira for assistance, on the behalf of Hans Vaihinger (1852-1933), a neo-Kantian German philosopher and a Professor in Halle. Vaihinger contacted Teixeira himself (letter 114 in the archive), asking for assistance in finding correspondents in Portugal, Gomes Teixeira advised him to contact Francisco Coelho (1847-1919), a Portuguese philologist. In the present letter, Gutzmer asks Teixeira for help in finding Vaihinger a contact in Spain, with knowledge of Kant. Teixeira forwarded the request to Galdeano, another of his correspondents, and Galdeano replied (letter 953 in the archive), providing a list of Spanish philosophers.

Halle a.S., Gartenstr. 5, le 29 juin 1896

Monsieur,

Je m'empresse de vous exprimer Mes remerciements sincères de votre lettre aimable et de ce que vous voulez bien admettre ma note modeste dans votre "Jornal" estimé.

M. Vaihinger m'a chargé de vous remercier du secours que vous voulez bien lui rendre ; je vous adresse par le même courrier encore quelques prospectus nouveaux. M. Vaihinger vous serait fort obligé, si vous pouviez lui procurer un correspondant espagnol pour ses "Kantstudien," car M. Lutoslawski,²⁷ qui a promis d'écrire un article sur "Kant in Spanien" n'est pas un philosophe espagnol.

En vous remettant les compliments de M. Vaihinger, je vous prie de vouloir bien agréer l'expression de mes remerciements sincères et de mes sentiments de la considération la plus parfaite.

A. Gutzmer

²⁷ Wincenty Lutosławski (1863-1954), a Polish philosopher and mystic, with studies on Plato.

February 25, 1899 (letter 113)

Gutzmer acknowledges the receipt of Teixeira's work on series, [Teixeira 1897], and a new issue of the JSMA. He also communicates his transfer to Jena University.

Halle a.S., Gartenstr. 5, le 25 février 1899

Monsieur et très honoré collègue,

Il y a bien longtemps que je ne vous ai pas écrit, je vous en demande pardon. Les années dernières j'avais toujours tant à faire que je devais négliger beaucoup ma correspondance et mes relations scientifiques.

Je hâte de vous dire que j'avais reçu en effet votre mémoire bien intéressant sur la théorie des séries, publié dans le recueil de l'Académie de Madrid, et je l'ai lu avec le plus vif intérêt ; je me suis réservé l'étude pénétrante de votre mémoire pour le loisir des vacances.

Je profite de cette occasion pour vous dire que, en avril, j'irai à Jena comme professeur à l'université.

Cette délogement me cause naturellement quelques troubles, parce que je n'ai pas encore trouvé un logement convenable. Mais je suis bien heureux d'avoir obtenu cette place.

J'ai encore à vous remercier sincèrement des numéros de votre "Jornal" bien estimé, que vous avez bien voulu m'envoyer régulièrement ; l'autre jour j'ai reçu le N.º 5 du volume XIII. Je lis le journal toujours avec le plus vif intérêt, et j'espère à trouver bientôt assez de loisir pour rédiger quelques notes à vous l'adresser avec la prière de vouloir bien l'admettre dans Votre Journal.

Veillez bien agréer, Monsieur, l'expression de ma considération la plus parfaite et de mes sentiments de reconnaissance.

A. Gutzmer

April 9, 1904 (letter 385)

Gutzmer acknowledges the receipt of the first volume of Teixeira's Complete Works (published in 5 volumes, from 1904 to 1909) and expresses the wish of getting to know Gomes Teixeira personally at the third International Congress of Mathematicians, in Heidelberg (1904). This meeting didn't happen, since, in letter 501 (May 7, 1910), Gutzmer still expresses the desire of meeting Teixeira personally. According to [Kharlamova 2013, pp. 229] the first International Congress of Mathematicians that Gomes Teixeira attended was in Cambridge, 1912.

Jena, 9 avril 1904

Monsieur et cher collègue,

J'ai reçu votre carte-postale du 28 mars et le tome I de vos ouvrages, et je m'empresse de vous en exprimer mes remerciements les plus cordiales. Je vous félicite de ce que votre gouvernement vous a fait l'honneur de publier vos ouvrages, mesures qui honore en même temps le gouvernement lui-même et les hautes mathématiques. C'est avec le plus grand plaisir que je publierai aussitôt

que possible une notice du tome I dans mon Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

J'espère pouvoir vous presser la main au congrès de Heidelberg et je vous prie de me croire

votre bien dévoué

A. Gutzmer.

December 15, 1905 (letter 386)

After some remarks about the end of the JSMA and the beginning of the *Annaes*, as Gomes Teixeira moves to Porto, Gutzmer mentions a translation he has produced of a book by Giulio Vivanti,²⁸ [Vivanti 1906], a translation of the Italian original, [Vivanti 1901]. In the foreword of the translation, Gutzmer says that he felt the need to rewrite the third part and expand it. He then states he discussed the changes with Vivanti, who agreed to rewrite the third part and do similar work for parts one and two as well.

Halle A. S., den 15 décembre 05

Monsieur et cher Collègue,

Je vous remercie sincèrement de vos lignes aimable du 12 novembre, ou vous me dites que le journal va se terminer et que vous commencez à publier les *Annaes*. Malgré le regret de la mort prématurée du "Jornal," je ne peux que vous féliciter de la revue nouvelle qui sans doute continuera d'une manière excellente l'œuvre inauguré par le "Jornal". Dans le cahier de janvier du Jahresbericht j'ai donné une petite note concernant vos deux journaux, pour attirer l'attention des mathématiciens sur ce point et pour les informer de la fin du Jornal.

J'ai encore à vous remercier de l'invitation pour collaborer aux *Annaes*. Je profiterai volontiers de cette invitation honorable aussitôt que je ne serai plus si surchargé que maintenant.

Dans ces jours j'ai fini l'édition allemande du cours de la théorie des fonctions de M. Vivanti. L'édition allemande diffère beaucoup de l'originale italienne. J'ai écrit à M. Teubner²⁹ à vous adresser en mon nom un exemplaire et je vous prie de vouloir bien l'accepter comme témoignage de haute estime et de sympathie. J'espère que M. Teubner a déjà envoyé le livre à votre adresse.

Veillez agréer, Monsieur et cher collègue, l'expression de ma considération la plus distinguée.

A. Gutzmer.

²⁸ Giulio Vivanti (1859–1949), an Italian mathematician who worked in analysis, with a lot of work on didactic issues. He was a prolific writer, having about 200 publications listed in some recensions of his work.

²⁹ Benedictus Teubner (1784–1856), an editor and bookseller, famous for his editions of Greek and Latin classics, the *Bibliotheca Teubneriana*.

June 29, 1906 (letter 213)

This letter concerns the proposal of Gutzmer for the election of Gomes Teixeira as a member of the German Academy of Scientists Leopoldina (*Kaiserliche Leopoldinisch–Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher*), which happened in October 30th, 1906 (with registration number 3227). A more detailed account of this election can be found in [Kharlamova 2013, pp. 235–245]. The proposal had the support of Gutzmer, Stäckel,³⁰ Wangerin (who was president, at the time) and Cantor³¹ and included other names, such as Levi-Civita.³²

Halle A. S., den 29.Juin.1906.

Cher Monsieur et très honoré Collègue,

Je prends la liberté de vous dire que je vous ai proposé comme membre de la “Kaiserliche Leopoldinisch–Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher” à Halle. Vous savez que c’est l’Académie la plus vieille de l’Allemagne. Je me réjouis que ma proposition, appuyée par Ms. G. Cantor, Stäckel et Wangerin, a fini par votre élection, et certainement M. le Président vous informera officiellement dans quelques jours que vous êtes élu membre.

En vous félicitant de cette élection, je vous prie, Cher Monsieur et Collègue de vouloir bien agréer l’expression de mes sentiments de sympathie et de haute estime.

A. Gutzmer.

March 20, 1908 (letter 243)

This is a brief note about exchange of scientific works, with a reference to the International Congress of Mathematicians in Rome, which Gomes Teixeira did not attend (in letter 501 from May 7, 1910, Gutzmer still states his wish to meet Teixeira personally).

Halle A. S., den 20.mars 1908.

Cher Monsieur et très honoré Collègue,

Je viens de recevoir le 4^e volume de vos “Obras sobre Mathematica,” et je me hâte de vous en remercier sincèrement. Votre “Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches” m’intéresse beaucoup et j’en profite pour les exercices de nos étudiants.

³⁰ Paul Stäckel (1862–1919), a German mathematician, with work in differential geometry, number theory, and non-Euclidean geometry.

³¹ Georg Cantor (1845–1918), a Russian-born mathematician who can be considered the founder of set theory and who established the theory of cardinal numbers.

³² Tullio Levi-Civita (1873–1941), an Italian mathematician, with fundamental work on absolute differential calculus (tensor calculus) and its applications to the theory of relativity.

Dans quelques jours j'irai en Italie pour assister au congrès international de Rome. J'espère que j'aurai le bonheur de vous voir à Rome et de faire votre connaissance personnelle.

Je me suis permis de vous faire adresser un exemplaire du "Gesamtbericht" de la commission allemande pour l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles. En même temps je fais envoyer un exemplaire au ministre de l'instruction publique de votre pays.

Je vous prie, cher Monsieur et très honoré Collègue, de vouloir bien agréer l'expression de mes sentiments de remerciement, de sympathie et de la considération de la plus distinguée.

A. Gutzmer.

November 27, 1909 (letter 387)

Just as in the previous letter, this one contains notes and comments about exchange of scientific works, and their use in teaching. Gutzmer acknowledges the receipt of the fifth volume of Teixeira's works, [Teixeira 1909], which contains a reprint of the treatise on special curves.

Halle A. S., den 27. November. 1909.

Cher Monsieur et très honoré Collègue,

Je viens de recevoir le volume V de vos OBRAS et je me hâte de vous en remercier sincèrement. En même temps je me permets de vous féliciter de nouveau de cette excellente édition de vos travaux.

Le volume V, contenant la fin de votre traité des courbes spéciales, m'arrive bien à propos, car je fais à présent un cours sur ces courbes combiné avec des exercices. Comme mes étudiants connaissent déjà la première partie de votre traité sur les courbes spéciales, ils attendent avec ardeur le présent volume. En outre je me permettrait d'en publier une revue dans mon Jahresbericht.

J'ose vous envoyer en même temps quelques extraits parmi lesquelles je me permets de signaler la dissertation (thèse de doctorat) d'un de mes élèves (Dr. E. Roeser),³³ qui a étudié – suivant quelques indications que je lui avait données – la courbe de poursuite sur la sphère. Dans un appendix il a encore développé quelques propositions de la courbe de poursuite pour la pseudosphère.

Agréez, cher Monsieur et très honoré Collègue, l'expression de ma reconnaissance et les sentiments de sympathie et de haute considération.

A. Gutzmer.

April 22, 1910 (letter 500)

After the establishment of the Republican regime in Portugal, in 1910, and in an effort to modernize Portuguese scientific institutions, Gomes

³³ Ernst Roeser (1881-1967), a German mathematician and poet, with work on non-Euclidean geometry.

Teixeira led a team of scholars from the *Academia Polytechnica do Porto* that visited several countries in Europe, from June to September, including Germany. In this letter, Gutzmer gives Teixeira some contacts for this journey, and, moreover, offers to write to these mathematicians to introduce Gomes Teixeira to them. This is a sign of the special relationship that existed, at this time, between the two mathematicians.

This visit prompted several further contacts from mathematicians in the visited countries. In Germany, besides Gutzmer, Gomes Teixeira received letters from Otto Blumenthal³⁴ (Aachen), Moritz Cantor and L. Königsberger³⁵ (Heidelberg) in the wake of his visit. Vilhena [de Vilhena 1936, p. 128] notes that the visit was also mentioned in the Portuguese newspaper *Comércio do Porto*.

It was also after the return of these scholars that the University of Porto was founded (at the same time as the University of Lisbon), which incorporated the former *Academia Polytechnica*, enlarging its scope and teaching practices. Gomes Teixeira was elected Rector at the inauguration, on July 16, 1911.

The handwritten notes in this letter probably refer to the dates of the visit.

Halle A. S., den 22. April 1910.

Cher Monsieur et très honoré Collègue,

J'espère que vous avez reçu ma carte postale de Lausanne où je vous ai écrit par quelques circonstances j'ai été empêché de vous répondre à temps.

Retourné à Halle je me hâte de vous donner les adresses de quelques amis qui se feront l'honneur et le grand plaisir de vous donner tous les renseignements et de faciliter votre voyage. Les voici:

Aix-la-Chapelle:

Professor Dr. E. Kötter,³⁶ Aachen, Nizza Allee 41.

" " O. Blumenthal, " , Rütcherstr. 48.

[handwritten note: 9–11]

" " Kähler,³⁷ Aachen. (Professor der Nationalökonomie.) [handwritten note: 6–8]

³⁴ Ludwig Blumenthal (1876-1944), a German mathematician, with contributions to applied mathematics and aerodynamics.

³⁵ Leo Königsberger (1837-1921), a German mathematician and historian of science, with work on elliptic functions and differential equations. He is known for his biography of Helmholtz.

³⁶ Ernst Kötter (1859–1922), a German mathematician, with work on algebraic plane curves.

³⁷ Wilhelm Kähler (1871–1934), a German lawyer, economist, university lecturer and politician.

Darmstadt:

Geheimrat Prof. Dr. H. Wiener,³⁸ Darmstadt, Grüner Weg 28.

Professor Dr. Reinhold Müller,³⁹ " , Wittmannstr. 38.

Geheimrat Prof. Dr. Berndt,⁴⁰ Darmstadt. (Prof. für Maschinenbau.)

Karlsruhe:

Geheimrat Prof. Dr. Stäckel, Karlsruhe, Stefanierstr. 7.

Professor Dr. Krazer,⁴¹ Karlsruhe, westendstr. 57.

" " Disteli,⁴² " Kriegstr. 152.

" " Heun,⁴³ " Klauprechtstr. 33.

Bonn:

Professor Dr. Study,⁴⁴ Bonn, Argelanderstr. 126.

" " London,⁴⁵ " Coblenzerstr. 102.

" " Hessenberg,⁴⁶ " , Lessingstr. 30. (Ce dernier vous montrera l'École d'agriculture (Landwirtschaftliche Akademie) de Poppelsdorf, tout près de Bonn)

Heidelberg:

Geheimrat Prof. Dr. Königsberger, Heidelberg, Kaiserstr. 2a.

" " " M. Wolf,⁴⁷ Direktor der Sternwarte, Königsstuhl bei Heidelberg (L'Observatoire de Heidelberg est un des plus intéressants!)

Geheimrat Prof. Dr. Moritz Cantor, Heidelberg, Gaisbergstr. 15.

³⁸ Hermann Wiener (1857–1939), a German mathematician, one of the founders of the German Mathematical Society.

³⁹ Reinhold Müller (1857–1939), a German mathematician with works on perspective. He held the *Dekanat der Allgemeinen Abteilung* in Darmstadt TU from 1908 to 1911.

⁴⁰ Karl Berndt (1857–1940), a German mechanical engineering and university lecturer, who is considered the founder of the State Materials Testing Institute (*Materialprüfungsanstalt*)

⁴¹ Adolf Krazer (1858–1926), a German mathematician and astronomer, who was Rector of Karlsruhe TH in 1908/09 (an again in 1914/15).

⁴² Martin Disteli (1862–1923), a German mathematician, with work in geometry.

⁴³ Karl Heun (1859–1929), a German mathematician who introduced Heun's equation, Heun functions, and Heun's method. He taught theoretical mechanics at Karlsruhe TH.

⁴⁴ Eduard Study (1862–1930), a German mathematician, with contributions to several fields in mathematics, and also to biology, quantum chemistry and philosophy.

⁴⁵ Franz London (1863–1917), a German mathematician (born in Liegnitz, now Poland).

⁴⁶ Gerhard Hessenberg (1874–1925), a German mathematician, who worked in the Agricultural Academy in Bonn.

⁴⁷ Max Wolf (1863–1932), a German astronomer and a pioneer of astrophotography. He was the director of the Heidelberg-Königsstuhl State Observatory from 1902 until his death in 1932.

Je me permettrais d'écrire directement à ces Messieurs et de les prier de vous donner toutes les facilitations possibles.

Quoique j'espère que vous serez satisfait de ce que vous verrez, je regrette beaucoup que vous n'ayez pas le temps pour visiter encore la nouvelle École polytechnique de Danzig et celle de Dresden et au moins l'université de Göttingen. Car Bonn et Heidelberg ne possèdent pas des instituts tout à fait modernes: les universités plus modernes sont Göttingen et Jena, et je vous recommande beaucoup de payer une visite à Göttingen où vous trouverez des institutions de mathématiques et de physiques des plus pratiques. Quant aux Écoles polytechniques, il est sûr que Darmstadt et Karlsruhe sont des meilleures en Allemagne, mais je crois que vous auriez encore des informations précieuses en visitant encore Danzig et Dresden. Cette visite prendrai, il est vrai, 4 jours.

Comme la distance de Karlsruhe et Heidelberg de Strasbourg est très petite, je me permets de vous recommander la visite de cette université de Strasbourg, où Weber⁴⁸ et Schur⁴⁹ vous donneront tous les renseignements. De même l'université de Freiburg est très voisine de Karlsruhe (2 heures de chemin de fer). La ville de Freiburg est une des plus jolies de l'Allemagne.

Veillez agréer, cher Monsieur est très honoré Collègue, l'expression de mes sentiments de la plus haute considération et l'assurance ce qu'il me sera un grand plaisir de vous donner encore d'autres renseignements plus spéciaux si vous les désirez.

A. Gutzmer.

May 7, 1910 (letter 501)

This is another letter on the same topic as the previous one, Teixeira's journey through Europe, in which Gutzmer asks Gomes Teixeira to drop him a line in case he does visit Göttingen, so that they can meet personally. According to Kharlamova, [Kharlamova 2013, p. 54], Gomes Teixeira did meet Klein⁵⁰ and Gutzmer in Göttingen.

Halle A. S., den 7. Mai 1910.

Cher Monsieur et très honoré Collègue,

Je vous suis bien reconnaissant de votre lettre du 28 avril et je me permets de vous dire que j'ai écrit à M. Félix Klein. Je l'ai pris de vous procurer toutes les facilitations possibles et je suis sûr que la visite de Göttingen sera très utile pour vous tout égard.

⁴⁸ Heinrich Weber (1842–1913), a German mathematician with work in algebra, number theory and analysis. He is best known for his text *Lehrbuch der Algebra*.

⁴⁹ Friedrich Schur (1856–1932), a German mathematician with work on differential geometry.

⁵⁰ Felix Klein (1849–1925), a German mathematician and mathematics educator, and author of the *Erlangen program*, aimed at classifying geometries by their basic symmetry groups, which profoundly influenced mathematical development.

Je vous recommande d'autant plus d'aller à Göttingen que vous aurez ainsi l'occasion de vous entendre avec M. Klein sur tout le complexe de questions de l'instruction mathématique et sur les rapports pour la commission internationale.

Si votre visite de Göttingen aura lieu, je vous prie de me donner quelques lignes – car ils n'est pas impossible que je puisse aller à Göttingen en même temps. Ce serait une belle occasion de vous connaître personnellement.

Veuillez agréer, cher Monsieur est très honoré Collègue, l'expression de mes sentiments les plus distinguées.

A. Gutzmer.

June 12, 1911 (letter 193)

This letter has a much more personal tone than the ones before, possibly because of the fact that the two mathematicians had met personally. Gutzmer refers to health problems of Cantor, whom he had come to replace in lectures, due to this illness. Cantor gave his last lecture in 1911, and in 1913, Gutzmer succeeded Cantor at his post in Halle.

Halle A. S., den 12. Juin 1911.

Monsieur et Cher Ami,

Je crains que vous ne me trouvez très impoli parce que je n'ai pas encore répondu à votre carte et au colis postal. Je vous demande pardon de ce grand retard, et je vous prie d'être persuadé que seulement les contrariétés diverses m'ont empêché de vous écrire de bonne heure. D'un cote je suis surchargé par trop d'affaires et de cours, car mon collègue M. Georg Cantor a été obligé à interrompre ses cours à cause de mauvaise santé, et de l'autre j'avais des soins dans ma famille; ma fille a subi une opération sérieuse.

Mais maintenant je ne peux plus tarder à vous exprimer mes remerciements les plus sincères des volumes II et III de vos "Obras Mathematicas," par lesquels vous enrichissez d'une manière excellente ma bibliothèque mathématique. Je suis heureux de posséder vos œuvres et je vous félicite de l'exécution brillante de cette édition.

J'avais lu, il y a longtemps, avec le plus grand regret dans une carte de M. R. Guimarães⁵¹ que vous avez été sérieusement malade. J'espère que vous vous trouvez bien maintenant et que vous n'avez retenu rien de votre maladie. De même j'espère que Mademoiselle Teixeira va bien et je vous prie de lui remettre mes compliments.

J'avais l'intention de vous écrire quelques remarques scientifiques qui peut-être vous intéresseront, mais il faut les ajourner pour une prochaine occasion.

Croyez-moi, Monsieur et Cher Ami,
votre très dévoué

A. Gutzmer.

⁵¹ Rodolfo Guimarães (1866–1918), a Portuguese army officer and an historian of mathematics, who also corresponded with many mathematicians abroad.

July 11, 1920 (letter 1820)

This last letter from Gutzmer in Teixeira's estate is a short note about exchange of scientific works, including also some personal notes concerning family issues.

Halle A. S., den 11. juillet 1920.

Monsieur et cher Collègue,

Je vous remercie sincèrement de votre lettre du 30 avril et j'espère que vous avez reçu les thèses de quelques de mes étudiants que je vous j'ai [*sic*] adressées il y a quelques semaines.

Je me réjouis que vous avez bien passé les dernières années. Moi es [*sic*] ma famille nous nous portons bien. Ma fille s'est mariée en automne 1919.

Votre Traité des courbes est de grand intérêt non seulement pour moi mes [*sic*] aussi pour mes disciples et je regrette beaucoup que notre séminaire mathématique de l'Université ne possède pas ce Traité

Veillez agréer, Monsieur et cher collègue, l'expression de mes sentiments d'estime et de sympathie.

A. Gutzmer.

Monsieur Klein se porte assez bien: il a célébré le 70^e jour de naissance en 1919 et est infatigable au travail scientifique.

4. CONCLUSION

This correspondence, composed of 25 letters, spans a period of 34 years. The letters are more frequent as the correspondence starts, and then taper to not more than one letter per year from 1892 to 1920, with the exception of 1910, when two letters were received, in connection to Teixeira's trip to Germany.

The initial letters are mostly about Gutzmer's papers in the JSMA, with commentaries on other papers published in the same journal, sometimes of a vivid nature. This may indicate that Gutzmer's initial interest in establishing contact was to find a journal in which to publish his first papers, which led to interchanges around the contents of the journal. The themes then drift to longer publications, such as Teixeira's textbooks and *Obras sobre Mathematica*, and Gutzmer's *Jahresberichte*, some of them being sent as gifts. We also see comments on scientific discussions, taking place in the JSMA and in other journals, notably one between Gutzmer and Cesàro, and another involving Hurwitz and Gomes Teixeira. All of these topics are a signal of a greater proximity that was developing between the two mathematicians.

The correspondence also makes reference to scientific institutions and the International Congress of Mathematicians, where Gutzmer expresses a desire to meet Gomes Teixeira personally. Moreover, in the two letters that prepare Gomes Teixeira's trip to Germany, Gutzmer assumes the role of organizer, suggesting names of people and institutions to visit and offering to contact them himself beforehand. It was very probably on this trip that the two mathematicians finally met, as Gutzmer offered to take a trip to Göttingen if Gomes Teixeira gave him notice of his presence there. This is a sign of the closeness of the two mathematicians at this point, in agreement with the fact that Gutzmer was the most prolific German correspondent of Gomes Teixeira.

After this episode, the letters come to have a more personal tone, with reference to family and health issues. The correspondence stops four years before Gutzmer's death in 1924.

Just as with Hermite (studied in [Freitas 2020]), this is a case of a prolific correspondence between someone in a scientific center and someone in a peripheral country, where each mathematician shows genuine interest in the other's work. In this case, however, the dialog is between two peers, whereas Gomes Teixeira regarded Hermite as a senior figure. Many themes of the life of late 19th century mathematics are vividly represented here—publication and discussion in scientific journals, international meetings, pedagogical issues and scientific institutions—materialized in the collaboration of these two mathematicians in the international effort to bring together researchers and disseminate mathematical knowledge.

5. ACKNOWLEDGMENTS

The author wishes to thank Luís Saraiva, Henrique Leitão, João Queiró, António Leal Duarte and Samuel Gessner for many contributions and exchanges of opinions.

Thanks also to the Archive of the University of Coimbra for the kind cooperation, in the access to the letters, and to the Fundação para a Ciência e Tecnologia, I.P./MCTES, for funding, through PIDDAC: UIDB/00286/2020 e UIDP/00286/2020.

Conflict of Interest: The author declares that he has no conflict of interest.

REFERENCES

ALVES (Maria da Graça)

- [2004] *Francisco Gomes Teixeira: o homem, o cientista, o pedagogo*, Ph.D. Thesis, Universidade do Minho, 2004 URL <http://hdl.handle.net/1822/2603>.

CESÀRO (Ernesto)

- [1891] Nouvelles remarques sur divers articles concernant la théorie des séries, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 10 (1891), pp. 57–71.
- [1889] Remarques sur divers articles concernant la théorie des séries, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 9 (1889), pp. 26–32.

CANTOR (Moritz)

- [1888] Curso de analyse infinitesimal por F. Gomes Teixeira, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, XXXIII (1888), pp. 213–215.

EISENSTEIN (Gotthold)

- [1852] Über eine allgemeine Eigenschaft der Reihen-Entwicklungen aller algebraischen Funktionen, *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1852, pp. 441–444.

FREITAS (Pedro J.)

- [2019] The Correspondence from Ernesto Cesàro to Francisco Gomes Teixeira, *Bollettino Di Storia Delle Scienze Matematiche*, XXXIX (2019), pp. 219–233.
- [2020] Hermite's Letters To Francisco Gomes Teixeira, *Revue d'histoire des mathématiques*, (26) 2020, pp. 73–95.

GUTZMER (August)

- [1887a] Sur une série considérée par M. Lerch, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 8 (1887), pp. 33–36.
- [1887b] Remarques sur la théorie des séries, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 8 (1887), pp. 81–88.
- [1887c] Sur certaines moyennes arithmétiques des fonctions d'une variable complexe, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 8 (1887), pp. 147–156.
- [1889] Note sur un point de la théorie des séries, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 9 (1889), pp. 60–64.
- [1891] Remarque sur certaines équations différentielles, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 10 (1891), pp. 3–12.
- [1897] Note sur certaines équations différentielles linéaires, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 13 (1897), pp. 3–9.
- [1890] Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur, *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 4^e série, tome VI (1890), pp. 405–422.

TEIXEIRA (Francisco Gomes)

- [1885] Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 3^e série, vol. 2 (1885), pp. 321–342.
- [1887] Deuxième note sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3^e série, vol. 4 (1887), pp. 107–110 .
- [1897] *Sobre o Desenvolvimento das Funções em Série*, vol. tomo XVIII, parte I, Memorias de la Real Academia de ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid, 1897.
- [1905] *Tratado de las curvas especiales notables*, Imprenta de la “Gaceta de Madrid”, 1905.
- [1906] *Obras sobre Mathematica*, vol. 3, Coimbra: Imprensa da Universidade, 1906.
- [1909] *Obras sobre Mathematica*, vol. 5, Coimbra: Imprensa da Universidade, 1909.
- [1890] Extrait d’une lettre adressée à M. Hermite [Quelques conséquences relatives aux développements des fonctions en série ordonnée suivant de $\sin(x - a)$ et $\cos(x - a)$ déduits d’un integrale curviligne], *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2^e série, t. XIV (1890), pp. 200–208.

HURWITZ (Adolf)

- [1889] Sur le développement des fonctions satisfaisant à une équation différentielle algébrique, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 3^e série, vol. 6 (1889), pp. 327–332.

KHARLAMOVA (Vera Ivanova)

- [2013] *F. G. Teixeira e a comunidade matemática europeia nos séculos XIX-XX*, Ph.D. Thesis, Universidade de Aveiro, 2013 URL <http://hdl.handle.net/10773/12875>.

KRATZER (Adolf)

- [1925] Zum Gedächtnis an August Gutzmer, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 33 (1925), pp. 1–3.

LERCH (Matyáš)

- [1885] Příspěvky k theorii řad nekonečných, *Zprávy zasedací Královská česká společnosti nauk*, II., 1885, pp. 174–179.
- [1886] Remarque sur la théorie des séries, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 7 (1886), pp. 79–80.

MALONEK (Helmut) & KHARLAMOVA (Vera)

- [2010] It all began with publications in Teixeira’s Journal: some remarks on August Gutzmer, in Assis Azevedo (Lisa Santos), Elfrida Ralha, ed., *Proceedings of the Research Seminar on History and Epistemology of Mathematics* Centro de Matemática Universidade do Minho, 2010.

SARAIVA (Luís)

- [2014] A decisive journal in Portuguese mathematics: Gomes Teixeira's *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas (1877–1905)*, in Gerini (C.) & Verdier (N.), eds., *L'émergence de la presse mathématique en Europe au XIX^e siècle* College Publications, 2014.
- [2000] A Survey of Portuguese Mathematics in the Nineteenth Century, *Centaurus*, 42(4) (2000), pp. 297–318.

STURM (Charles-François)

- [1868] *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, Paris: Gauthier-Villars, 1868.

VIVANTI (Giulio)

- [1901] *Teoria delle funzioni analitiche*, Milano: U. Hoepli, 1901.
- [1906] *Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen*, Leipzig: B. G. Teubner, 1906; Umarbeitung unter Mitwirkung des Verfassers, deutsch herausgegeben von A. Gutzmer.

DE VILHENA (Henrique)

- [1936] *O Prof. Doutor Francisco Gomes Teixeira (elogio, notas, notas de biografia, bibliografia, documentos)*, Lisboa, 1936 URL <http://hdl.handle.net/10316.2/26827>.

VOLK (Otto)

- [1966] Neue Deutsche Biographie 7, <https://www.deutsche-biographie.de/pnd116936738.html.ndbcontent> (visited in February 2024): [Online version], 1966.

WEYR (Eduard)

- [1887] Deux remarques relatives aux séries, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas*, 8 (1887), pp. 97–100.