Revue d'histoire des mathématiques
30 (2024), p. 71–116
doi:10.24033/rhm.312

LA THÈSE DE LOUIS GÉRARD SUR LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE (1892): UNE NOUVELLE ÉTAPE DANS L'HISTOIRE DE CETTE DISCIPLINE

Jean-Daniel Voelke

Résumé. — Le mathématicien français Louis Gérard a soutenu en 1892 à la Faculté des sciences de Paris une thèse sur la géométrie non euclidienne. Après les travaux de De Tilly et Flye Sainte-Marie publiés au début des années 1870, c'est le plus important travail publié sur ce sujet en français. Gérard expose une nouvelle méthode pour fonder la trigonométrie non euclidienne. Il résout aussi de nombreux problèmes de construction et expose une théorie de l'aire des polygones en géométrie euclidienne et non euclidienne. La thèse de Gérard est un travail original et sans équivalent en France à cette époque. Elle témoigne de l'élévation des exigences de rigueur que l'on observe durant la dernière décennie du XIXe siècle en relation avec un intérêt croissant pour l'axiomatique. Elle enrichit le corpus de la géométrie non euclidienne de nouveaux résultats. C'est un témoignage de l'activité scientifique d'un professeur de lycée à la fin du XIXe siècle.

Abstract. — In 1892, the French mathematician Louis Gérard defended a thesis on non-Euclidean geometry at the Faculté des Sciences in Paris. After the work of De Tilly and Flye Sainte-Marie published in the early 1870s, this was the most important work published on this subject in French. Gérard presented a new method for founding non-Euclidean trigonometry. He also solved numerous construction problems and presented a theory of polygon area in Euclidean and non-Euclidean geometry. Gérard's thesis is an original work, unparalleled in France at the time. It bears witness to the rising standards of rigor observed in the last decade of the 19th century, in conjunction with a growing

Texte reçu le 28 février 2024, accepté le 17 juin 2024.

J.-D. Voelke, Chemin de Primerose 47, CH-1007 Lausanne.
Courrier électronique : jd.voelke@netplus.ch

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A55, 01A60, 51-03, 51M10.

Mots clefs : Louis Gérard, géométrie non euclidienne, constructions géométriques, théorie de l'aire des polygones.

Key words and phrases. — Louis Gérard, non-Euclidean geometry, geometric constructions, area theory for polygons.

interest in axiomatics. It enriched the corpus of non-Euclidean geometry with new results. It also illustrates the scientific activity of a high school teacher at the end of the 19th century.

1. INTRODUCTION

Comme on le sait, la géométrie non euclidienne a été inventée par Bolyai et Lobatchevski entre 1820 et 1830[1]. Leurs travaux sont cependant passés presque inaperçus lors de leur publication. La correspondance de Gauss montre de son côté qu'il avait à cette époque déjà reconnu la possibilité d'une géométrie fondée sur la négation du postulat des parallèles [Gauss 1900]. Des lettres plus tardives adressées à l'astronome Heinrich Christian Schumacher confirment ce point de vue et donnent une appréciation très favorable des travaux de Lobatchevski. C'est grâce à la publication de cette correspondance entre 1860 et 1865 que ces travaux ainsi que ceux de Bolyai seront redécouverts. Ils suscitent un grand intérêt et, dès la fin des années 1860, la géométrie non euclidienne fait l'objet de nouvelles recherches mathématiques[2]. Parmi celles-ci il faut citer en particulier les *Études de mécanique abstraite* de Joseph-Marie De Tilly [1870][3] et les *Études analytiques sur la théorie des parallèles* de Camille Flye Sainte-Marie [1871]. Ces deux mémoires présentent de nouvelles méthodes pour fonder la géométrie non euclidienne et en particulier la trigonométrie. À la même époque, Beltrami [1868] puis Klein [1871] trouvent des interprétations de cette géométrie au sein de théories connues : la géométrie différentielle et la géométrie projective. Ces interprétations vont contribuer à son acceptation par la communauté mathématique. Les débats philosophiques à son sujet se poursuivront néanmoins jusqu'à la fin du XIXe siècle. En France, Poincaré joue à partir des années 1880 un rôle particulièrement important. Il trouve de nouvelles interprétations de la géométrie non euclidienne et introduit aussi un nouveau point de vue dans le débat épistémologique : l'idée de convention [Poincaré 1891]. C'est dans ce contexte que le mathématicien français Louis Gérard soutient en 1892 à la Faculté des sciences de Paris une thèse intitulée *Sur la géométrie non euclidienne* [Gérard 1892]. Après ceux de Flye Sainte-Marie et De Tilly, il s'agit du travail le plus important sur ce sujet

---

1 Pour une histoire générale de la géométrie non euclidienne, citons l'ouvrage classique de Roberto Bonola traduit en anglais et régulièrement réédité [Bonola 1955] ainsi que [Gray 1989].

2 Cf. [Voelke 2005].

3 De Tilly a donné un second exposé de sa méthode dans [Tilly 1879]. C'est à cette version que Gérard se réfèrera.

publié dans les pays francophones. Comme celui de Flye Sainte-Marie, il a été publié par l'éditeur Gauthier-Villars. Vingt ans d'écart séparent cependant la thèse de Gérard des mémoires de ses prédécesseurs et le contexte est différent. Au début des années 1890 la géométrie non euclidienne est une théorie mathématique bien établie et il ne s'agit plus d'en montrer la possibilité. L'intérêt est d'en proposer de nouvelles approches, plus rigoureuses ou plus satisfaisantes que celles des inventeurs. C'est la démarche suivie par Gérard.

Gérard est né en 1859 à Grand dans les Vosges[4]. Bachelier en sciences à Nancy en 1879 puis licencié en sciences mathématiques en 1881 et en sciences physiques en 1882 à Marseille, il obtient l'agrégation de mathématiques en 1883. Il a accompli toute sa carrière dans l'enseignement secondaire et a été professeur de lycée à Lorient, Brest, Lyon puis dans divers établissements parisiens. Il a été aussi, dès ses débuts en 1895, rédacteur du *Bulletin de Mathématiques élémentaires*[5]. Ce journal, créé par Boleslas Niewenglowski[6], s'adressait aux enseignants du niveau secondaire. Il publiait des questions d'examen et des problèmes, des articles de vulgarisation et touchant à l'enseignement ainsi que des comptes-rendus de manuels. Gérard y a très largement contribué et y a publié de nombreux articles témoignant d'une grande sensibilité aux questions de rigueur. Il a aussi publié de nombreux articles dans le *Bulletin de mathématiques spéciales*, une autre revue du même type[7]. Il a rédigé en collaboration avec Niewenglowski un manuel de géométrie [Niewenglowski & Gérard 1898] et est aussi l'auteur de plusieurs manuels destinés aux candidats au baccalauréat. Sa thèse sur la géométrie non euclidienne est son principal travail de recherche mathématique[8]. Après l'avoir soutenue, il s'est consacré principalement à ses activités pédagogiques et

[4] Les renseignements biographiques sur Gérard sont extraits de [Brasseur 2022]. La date de son décès est inconnue mais postérieure à 1939.

[5] Cette revue prendra dès sa troisième année d'existence le nom de *Bulletin de Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires*. Elle paraîtra jusqu'en 1910.

[6] Les parcours de Gérard et Niewenglowski (1846-1933) sont semblables. Après avoir soutenu à Paris en 1880 une thèse intitulée *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour donné*, ce dernier accomplit toute sa carrière dans l'enseignement secondaire. Il est l'auteur de plusieurs manuels. Cf. [Brasseur 2022].

[7] Cette revue fut aussi créée par Niewenglowski en 1894. À partir de 1896, Gérard et Gaston Gohierre de Lonchamps (1842-1906), également professeur de lycée, en furent aussi rédacteurs, et ceci jusqu'à la disparition de la revue en 1900.

[8] Il faut y ajouter quelques notes sur la théorie de l'aire des polygones et un article sur la construction au compas du polygone régulier à 17 côtés publié dans les *Mathematische Annalen* [Gérard 1897].

éditoriales[9]. Gérard a effectué sa formation en province et il serait intéressant de savoir comment il a été amené à soutenir une thèse à Paris, dix ans après la fin de ses études et à côté de son activité au lycée de Brest. Il vaudrait la peine de savoir aussi ce qui a motivé le choix du sujet. C'est peut-être grâce au célèbre *Traité de géométrie* d'Eugène Rouché et Charles de Comberousse [Rouché & de Comberousse 1883] que Gérard a entendu parler pour la première fois de géométrie non euclidienne[10]. Nous ne disposons malheureusement d'aucune indication sur le rôle du jury de thèse. Il était constitué d'Appell (président et dédicataire) et de Picard et Poincaré (examinateurs). C'est à ce dernier qu'est dû le rapport sur la thèse cité à la fin de cet article (cf. §6). Rien ne permet de dire si Poincaré a suivi de près les recherches de Gérard ou s'il s'est contenté de donner son appréciation sur un travail achevé.

La thèse de Gérard n'a jusqu'à maintenant pas fait l'objet d'une étude approfondie et c'est le but de cet article. Il s'agit d'un travail important dont la publication constitue une nouvelle étape dans le développement de la géométrie non euclidienne. Gérard expose une méthode originale pour fonder la trigonométrie non euclidienne. Elle témoigne d'une élévation des exigences de rigueur et la comparaison avec des travaux antérieurs est à cet égard significative. En résolvant un grand nombre de problèmes de construction, Gérard enrichit également la géométrie non euclidienne d'un corpus analogue à celui de la géométrie synthétique élémentaire et aborde des problèmes qui susciteront l'intérêt d'autres mathématiciens au XX^e^ siècle. Sa thèse apporte enfin une contribution nouvelle à la théorie de l'aire des polygones.

2. GÉNÉRALITÉS SUR LA MÉTHODE DE GÉRARD

Bolyai et Lobatchevski ont établi la trigonométrie non euclidienne en utilisant l'horisphère, surface de l'espace non euclidien dont la métrique est euclidienne. De Tilly et Flye Sainte-Marie ont pour leur part établi cette

---

9 Gérard semble avoir joui d'une très grande puissance de travail. Un rapport datant de 1918 et cité dans [Brasseur 2022] affirme « qu'il a une excellente santé, n'a jamais été malade et peut travailler sans fatigue 14 heures par jour ».

10 Dans la cinquième édition de cet ouvrage, les auteurs introduisent en effet pour la première fois une note sur la géométrie non euclidienne à laquelle Gérard se réfère à deux reprises. Ils reprennent une méthode due à Giuseppe Battaglini pour fonder la trigonométrie non euclidienne [Battaglini 1867]. Comme Gérard le relève à juste titre, cette méthode « n'est peut-être pas à l'abri de toute objection » [Gérard 1892, p. 3]. Cf. aussi [Voelke 2005, pp. 74-81].

théorie en raisonnant uniquement dans le plan et en faisant appel aux outils du calcul différentiel et intégral[11]. Cette méthode a été ultérieurement utilisée par d'autres mathématiciens[12]. Gérard est le premier à proposer une nouvelle approche visant à fonder la trigonométrie non euclidienne en raisonnant de manière presque exclusivement géométrique et dans le plan seulement. Il sera suivi une décennie plus tard en Allemagne par Schur, Hilbert et Liebmann[13]. Sa thèse comporte un avant-propos suivi d'un court paragraphe intitulé « préliminaires »[14] puis de trois parties. L'avant-propos nous renseigne sur ses intentions et le contenu général de l'ouvrage. En voici le début :

> Dans la première Partie de ce travail, j'expose une méthode nouvelle pour établir les formules fondamentales de la Géométrie non euclidienne, en partant de cette remarque que :
>
> *Si l'on désigne par L une longueur arbitraire, il existe un nombre correspondant λ tel que, dans tout quadrilatère $ABCD$ qui a trois angles droits A, B, C, on ait*
>
> $$\frac{1}{2}(e^{\lambda\frac{BC}{L}}+e^{-\lambda\frac{BC}{L}}) < \frac{CD}{AB} < \frac{1}{2}(e^{\lambda\frac{AD}{L}}+e^{-\lambda\frac{AD}{L}});$$

---

11 Cf. [Voelke 2005, chapitres 6 et 7]. De Tilly utilise aussi des raisonnements cinématiques.

12 [Killing 1885] et [Simon 1892]. À l'instar de Flye Sainte-Marie, ces deux mathématiciens utilisent le fait que les relations métriques dans un triangle infinitésimal sont euclidiennes.

13 [Schur 1901] (ce dernier n'utilise pas d'axiome de continuité mais effectue un passage par l'espace), [Hilbert 1903], [Liebmann 1904] et [Liebmann 1907]. Liebmann qualifie cette approche de « construction libre de la géométrie hyperbolique » [Liebmann 1904, p. 111] et donne comme exemple la méthode de Gérard. L'originalité de celle-ci a aussi été soulignée ultérieurement par le mathématicien hongrois Paul Szász, auteur d'une série d'articles sur la géométrie non euclidienne [Szász 1954, p. 113].

14 Il ne concerne pas spécifiquement la géométrie non euclidienne et témoigne de l'influence de De Tilly et Otto Stolz. Gérard entend d'abord démontrer que si deux segments AB et CD sont superposables, c'est aussi le cas de AB et DC. Il propose une preuve différente de celle donnée par De Tilly [1879, pp. 47-48]. Gérard énonce aussi les principales propriétés de l'addition des segments et souligne la nécessité d'admettre l'axiome d'Archimède pour définir le rapport de deux segments. Il se réfère à ce propos aux *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* de Stolz [1885]. Il ajoute : « Le rapport de deux droites données est un nombre déterminé, commensurable ou non ; mais, comme nous n'acceptons que les constructions qu'on peut faire avec la règle et le compas, nous n'admettrons pas qu'à tout nombre donné a corresponde nécessairement un système de deux droites A, B telles que $\frac{A}{B}=a$. » [Gérard 1892, p. 7]. Gérard n'identifie donc pas la droite géométrique à l'ensemble des nombres réels, mais seulement à un sous-ensemble constitué de points ou nombres « constructibles », ce que confirme le quatrième paragraphe de la citation qui suit. Je reviendrai sur cette question plus loin (cf. note 41, §4.2, note 57 et §4.4).

on en déduit immédiatement la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle rectangle et, par suite, toutes les autres formules.

Je n'ai pas cru devoir employer les procédés du Calcul infinitésimal, qui masqueraient l'enchaînement des raisonnements géométriques, sans apporter de simplifications notables.

En outre, je me suis astreint à la condition de ne raisonner que sur des figures *que l'on sache construire*.

Cette condition, qu'Euclide s'est imposée comme une règle inflexible, n'est plus guère observée aujourd'hui ; on a été jusqu'à dire que c'est une pure règle de jeu indigne de la Géométrie[15].

Il semble pourtant qu'elle soit indispensable si l'on veut réduire au minimum le nombre des postulats qu'on est obligé d'admettre sans démonstration.

En effet, la possibilité des constructions qu'on effectue avec la règle et le compas repose uniquement sur quatre hypothèses parfaitement définies :

1° Par deux points on peut faire passer une droite ;

2° On peut tracer un cercle ayant pour centre un point donné et pour rayon une longueur donnée ;

3° Une droite qui rencontre le périmètre d'un polygone en un point autre que l'un des sommets le recoupe en un ou plusieurs points ;

4° Deux lignes droites, ou deux cercles, ou une ligne droite et un cercle se rencontrent, si l'une de ces deux lignes a des points situés de part et d'autre de l'autre. [Gérard 1892, pp. 1-2]

Cette citation contient plusieurs éléments importants. Relevons tout d'abord que si l'inégalité mentionnée dans le deuxième paragraphe joue effectivement un rôle important dans les raisonnements de Gérard, elle ne permet pas au lecteur de se faire une idée de la méthode suivie. Sa signification n'apparaîtra que plus loin. On notera qu'il s'agit d'une inégalité et non d'une égalité. Comme nous le verrons, les raisonnements de Gérard sont fondés principalement sur des inégalités. En parlant de calcul infinitésimal, il fait allusion aux méthodes de De Tilly et Flye Sainte-Marie. La suite du texte témoigne du besoin de rigueur de Gérard et de son souci de revenir à la méthode euclidienne. Les deux premiers postulats ne sont autres que les deux premières demandes d'Euclide. Les deux derniers sont en revanche nouveaux. Le troisième correspond à l'axiome dit « de Pasch »[16]. Quant aux propriétés énoncées dans le quatrième postulat, Gérard est sans doute l'un des premiers mathématiciens, du

15 Gérard fait ici allusion à un article de J. A. Wilson paru dans le *Giornale di Matematiche* [Wilson 1868]. Cet article prend place dans le cadre d'une polémique sur l'enseignement de la géométrie en Italie.

16 Il n'y a pas de référence à Pasch chez Gérard.

moins en France, à les mentionner[17]. Il est conscient qu'un fondement solide nécessite l'introduction de nouveaux postulats[18], en particulier si l'on souhaite effectuer des constructions, ce qui est l'un de ses principaux objectifs. Il poursuit en expliquant en effet qu'il ne veut pas, à l'instar de Bolyai et Lobatchevski, introduire des figures non constructibles comme des droites parallèles, des horicyles ou des horisphères[19]. Il faut soit admettre l'existence de ces figures ou en démontrer la possibilité en invoquant un « principe assez mal défini qu'on peut appeler le *principe de continuité* » [Gérard 1892, p. 2][20]. Gérard affirme qu'il a essayé d'établir les relations métriques dans un triangle sans faire appel à ce principe, uniquement à partir des quatre hypothèses énoncées ci-dessus[21].

Dans la deuxième partie de sa thèse, Gérard étudie la géométrie analytique non euclidienne et utilise les résultats obtenus pour résoudre différents problèmes de construction. Après Bolyai, il est le premier mathématicien à s'intéresser à nouveau à ce type de problèmes. On retrouvera cet intérêt quelques années plus tard chez d'autres mathématiciens[22].

La troisième partie est consacrée à la mesure des aires des polygones. Gérard traite ce problème dans le cas non euclidien et indique brièvement

17 Klaus Volkert signale que l'on trouve ce type de postulats dans des manuels allemands déjà dans la première moitié du XIXe siècle [Hilbert 2015, p. 3]. Vingt-cinq ans avant Gérard, Jules Houël, un fervent défenseur d'Euclide, admet encore comme une évidence que si un cercle possède un point à l'intérieur et un point à l'extérieur par rapport à un autre cercle, les deux cercles se coupent [Houël 1867, p. 14]. Notons encore que les deux postulats d'intersection d'une droite et d'un cercle et de deux cercles apparaîtront peu après Gérard dans le manuel [Veronese & Gazzaniga 1900, p. 78]. En ce qui concerne ces postulats et leur rôle en axiomatique, on pourra se reporter à [Hessenberg & Diller 1967, pp. 238-239] et [Hartshorne 2000, pp. 108-110].

18 Gérard manifestera par la suite un grand intérêt pour les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert [1899]. Il contribuera à la révision de la traduction française de Léonce Laugel [Hilbert 1900, p. 25] et rédigera une brève présentation de l'ouvrage pour le *Bulletin de Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires* [Gérard 1900–1901].

19 Gérard relève en note que Bolyai a donné une construction des parallèles. Sa justification n'intervient cependant qu'après que ce dernier a établi les « formules fondamentales » [Gérard 1892, p. 2]. Comme Marvin Greenberg l'a par ailleurs souligné, la justification classique de la construction de Bolyai présuppose l'existence des parallèles [Greenberg 1979, p. 47] (cf. aussi §4.2 ci-dessous). Le fait que Gérard soit le premier mathématicien à fonder la trigonométrie hyperbolique directement dans le plan en évitant de recourir aux notions de parallèles et d'horicycle a été souligné par Szász [Szász 1952, p. 174].

20 Gérard utilise ici une terminologie due Poncelet. Il n'y a cependant pas de lien direct avec la géométrie projective.

21 Gérard a donné un résumé de sa méthode dans un article publié dans les *Nouvelles Annales* [Gérard 1893]. J'y reviendrai plus loin.

22 [Engel 1898], [Engel 1899], [Barbarin 1900] et [Liebmann 1901].

comment procéder dans le cas euclidien. Peu de temps après, plusieurs mathématiciens proposeront, dans ce dernier cas, des solutions analogues.

3. FONDEMENTS DE LA TRIGONOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

Commençons avec la première partie de la thèse. Gérard rappelle d'abord qu'en vertu des deux théorèmes de Legendre, la somme des angles d'un triangle est toujours égale à deux droits ou toujours inférieure[23]. Il explique qu'il travaillera dans la seconde hypothèse, celle qui « sert de base » à la géométrie non euclidienne [Gérard 1892, p. 8]. Comme annoncé dans l'avant-propos, l'hypothèse initiale n'est pas la même que chez Bolyai et Lobatchevski. Gérard n'introduit en effet pas le concept de droites parallèles. Le point de départ de ses raisonnements est le théorème suivant (fig. 1) :

> 6. Si, dans un quadrilatère *ACca* qui a deux angles droits *a* et *c*, l'angle *A* est droit ou obtus, le côté *Aa* est moindre que le côté opposé *Cc*.
>
> [Gérard 1892, p. 9]

Il s'agit d'un résultat déjà établi par Lambert dans son mémoire *Theorie der Parallellinien*[24]. À l'époque où Gérard rédige sa thèse, ce mémoire est cependant oublié[25]. L'*Euclides Ab Omne Naevo Vindicatus* de Saccheri vient en revanche d'être redécouvert par Beltrami [1889] et Mansion [1890] qui publient chacun un article sur cet ouvrage. Gérard en a entendu parler puisqu'il le cite plus loin dans sa thèse[26]. Il paraît cependant peu probable

---

23 Le premier théorème de Legendre affirme que la somme des angles d'un triangle est inférieure ou égale à deux droits. Rappelons que sa preuve nécessite de recourir à l'axiome d'Archimède. Mais au début des années 1890, la question de la nécessité de recourir à cet axiome en géométrie ne se pose pas encore. Comme indiqué ci-dessous (cf. note 14), il est néanmoins cité par Gérard dans un autre contexte. Le second théorème de Legendre affirme pour sa part que s'il existe un triangle pour lequel la somme des angles est égale à deux droits, c'est le cas pour tous les triangles. Ces deux théorèmes figurent en bonne place dans la notice sur la géométrie non euclidienne ajoutée par Rouché et de Comberousse dans leur manuel à partir de la cinquième édition [Rouché & de Comberousse 1883, pp. 556-558].

24 [Lambert 1786, p. 343]. Je parlerai dans ce qui suit du « théorème de Lambert ». Gérard suppose que l'angle *A* est droit ou obtus alors que Lambert suppose qu'il est droit. Ce dernier distingue trois hypothèses selon que le quatrième angle du quadrilatère est droit, obtus ou aigu. Gérard se place donc dans la troisième hypothèse.

25 Il ne sera réédité que quelques années plus tard par Paul Stäckel et Friedrich Engel [Engel & Stäckel 1895].

26 Gérard se réfère à Saccheri pour dire que l'on savait déjà longtemps avant Lobatchevski que deux droites peuvent être sécantes, avoir une perpendiculaire commune ou « se rapprocher indéfiniment sans se rencontrer. » [Gérard 1892, p. 58]

qu'il ait inspiré Gérard, ce d'autant plus que la figure fondamentale chez Saccheri est un quadrilatère birectangle isocèle[27]. Comme nous allons le voir dans la suite du raisonnement, il faut plutôt chercher l'origine de la méthode de Gérard chez De Tilly. Il vaut à ce propos la peine de citer une courte lettre de Gérard ajoutée à l'édition numérisée de sa thèse effectuée par la Bibliothèque de l'Université du Michigan. Cette lettre se trouvait probablement dans le volume. Elle est datée du 6 novembre 1893 à Lyon. Le nom du destinataire n'est pas indiqué mais ce pourrait être De Tilly. Gérard écrit en effet :

> Monsieur ! J'ai l'honneur de vous adresser un exemplaire de ma thèse sur la Géométrie non euclidienne, et vous prie d'en agréer l'hommage.
>
> Je sais que vous avez fait de nombreux et importants travaux sur la question ; je n'espère donc pas que mon petit ouvrage contiendra quelque chose de nouveau pour vous. Mais j'ose croire que vous voudrez bien l'accepter tel qu'il est comme un hommage d'un disciple à son maître.

La référence à d'importants travaux sur la question s'applique bien à De Tilly. Elle pourrait aussi convenir à Poincaré, mais il serait curieux que Gérard ait attendu une année pour envoyer sa thèse à un membre du jury.

Revenons au texte principal. Gérard déduit du théorème de Lambert le théorème fondamental suivant (fig. 1) :

> 7. Dans un quadrilatère $ACca$ qui a deux angles droits a et c et un angle A droit ou obtus, si d'un point B du côté AC on abaisse Bb perpendiculaire sur ac, on a :
>
> $$Aa < Bb < Cc$$
> $$\frac{ac}{ab} < \frac{AC}{AB}$$
> $$\frac{Cc - Aa}{Bb - Aa} > \frac{AC}{AB}.$$ [28]

La première inégalité est une conséquence immédiate du théorème de Lambert. La deuxième est également établie à partir de ce théorème[29]. La

27 Il faut quand même noter qu'avant le théorème de Lambert, Gérard établit un premier résultat qui n'est autre que le premier théorème de Saccheri : « Si, dans un quadrilatère $ABCD$ qui a deux angles droits A et B, les côtés AD et BC sont égaux, les angles C et D sont aussi égaux. » [Gérard 1892, p. 8]. Saccheri suppose pour sa part que les angles A et B sont égaux, mais pas forcément droits (cf. [Saccheri 2014, p. 71]). Gérard n'utilise qu'une fois ce résultat dans sa thèse et il ne joue pas de rôle important.

28 [Gérard 1892, pp. 9-10]

29 Gérard signale en note qu'on trouve un raisonnement analogue dans [Tilly 1879, p. 137]. Ce raisonnement l'a probablement inspiré. Il concerne le cas particulier du triangle expliqué ci-dessous et est succinct. De Tilly affirme aussi qu'il n'effectuera

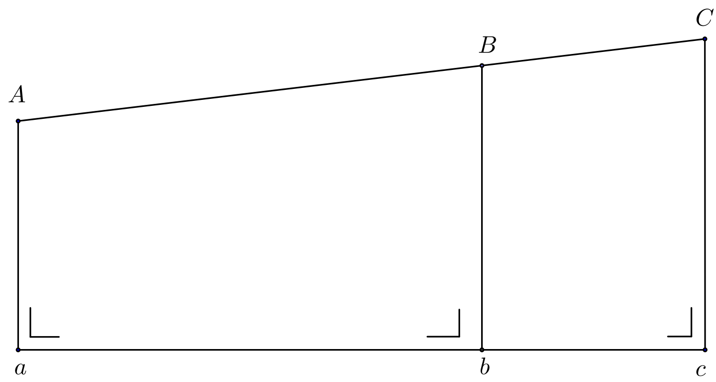

Figure 1. Le théorème de Lambert et ses conséquences

preuve de la troisième inégalité est du même type. On a de plus le corollaire suivant (fig. 2) :

> 8. Dans le cas particulier où le côté Aa se réduit à un point, le quadrilatère $ACca$ devient un triangle ; mais le théorème que nous venons de démontrer est toujours vrai.
>
> Donc, *dans un triangle* ACc *rectangle en* c, *si d'un point* B *de l'hypoténuse on abaisse* Bb *perpendiculaire sur* Ac, on a
>
> $$\frac{Ac}{Ab} < \frac{AC}{AB} < \frac{Cc}{Bb}.$$ [30]

Considérons maintenant deux demi-droites ax et Ay perpendiculaires à une même droite Aa (fig. 3). Abaissons d'un point B de Ay une perpendiculaire Bb à ax. La deuxième inégalité du théorème du n° 7 cité ci-dessus montre que le rapport $\frac{AB}{ab}$ décroît lorsque B se rapproche de A. Si l'on fait tendre AB vers zéro, ce rapport tend donc vers une limite notée $f(aA)$. On retrouve dans la fonction f la fonction équidistante $\mathrm{eq}(aA)$ définie et calculée par De Tilly[31]. On notera que la définition donnée par Gérard n'est

---

pas la discussion du cas d'incommensurabilité car elle est « connue ». Soucieux de précision, Gérard effectue cette discussion.

30 [Gérard 1892, pp. 13-14]. C'est le cas traité dans [Tilly 1879, p. 137].

31 Les définitions des deux mathématiciens sont différentes. De Tilly ne fait pas appel à un passage à la limite et définit la fonction équidistante $\mathrm{eq}(aA)$ comme égale au rapport de la longueur d'un arc d'équidistante de hauteur aA à sa base [Tilly 1870, p. 12] et [Tilly 1879, pp. 142-143]. Il affirme sans démonstration que ce rapport est indépendant de cette base. Si la longueur de celle-ci tend vers zéro, la longueur de l'arc

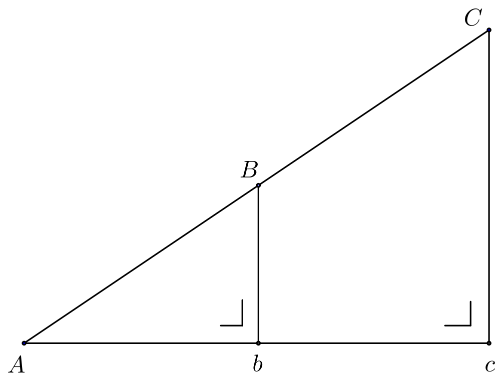

Figure 2. Cas particulier d'un triangle rectangle

pas purement géométrique puisqu'elle fait appel à la notion de limite[32].

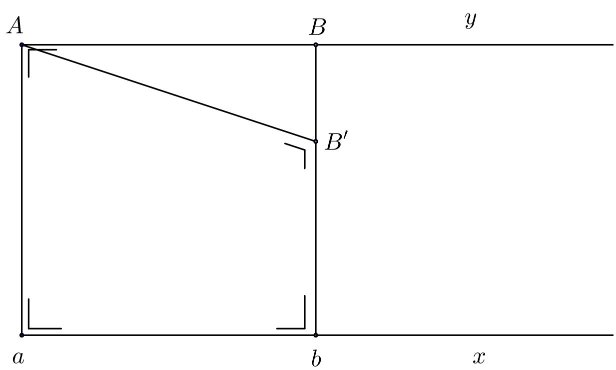

Figure 3. Définition de la fonction f

tend vers celle de la corde et l'on retrouve la définition de Gérard. Notons que l'introduction d'une courbe non constructible comme l'équidistante n'est pas compatible avec la demande de Gérard de considérer uniquement des figures constructibles. De Tilly introduit aussi dans ses raisonnements une fonction notée circR donnant la longueur d'une circonférence de rayon R. Un raisonnement mêlant des considérations cinématiques et des infiniment petits lui permet d'établir une équation différentielle à laquelle doit satisfaire cette dernière fonction. En résolvant cette équation, il obtient aussi la valeur de la fonction eq [Tilly 1879, pp. 146-149].

32 On pourra se reporter à ce sujet au compte-rendu de Poincaré (cf. §6 ci-dessous).

Projetons encore A sur bB en B'. Le rapport $\frac{AB'}{ab}$ augmente lorsque ab diminue[33]. Comme $AB' < AB$, ce rapport tend vers une limite inférieure ou égale à $f(aA)$ lorsque ab tend vers 0. On a donc

$$\frac{AB'}{ab} < f(aA). \tag{1}$$

En échangeant le rôle des segments aA et bB, on obtient

$$\frac{AB}{ab} < f(bB). \tag{2}$$

On peut donc écrire

$$f(aA) < \frac{AB}{ab} < f(bB). \tag{3}$$

Cette dernière inégalité est celle mentionnée par Gérard dans l'avant-propos (cf. §2). La seule différence est que l'expression explicite de la fonction f n'apparaît pas encore. En vertu du théorème de Lambert, $\frac{AB'}{ab} > 1$ et on a donc $f(aA) > 1$. L'inégalité (1) permet de plus à Gérard de démontrer que la fonction f est croissante. Cette propriété sera utilisée dans la conclusion du raisonnement.

L'étape suivante consiste à calculer cette fonction. La méthode exposée dans la thèse comporte un passage compliqué nécessitant de longs calculs (six pages). Je présenterai donc une version simplifiée que Gérard semble avoir trouvée peu après avoir terminé ses recherches. Elle est en effet exposée en annexe à sa thèse sous le titre *Supplément au nº 10*[34]. Soit X et H deux segments avec $H < X$[35]. Gérard démontre[36] en utilisant uniquement les deux premières inégalités du théorème du nº 7 que l'on a

$$f(X+H) + f(X-H) = 2f(X)f(H). \tag{4}$$

C'est l'équation fonctionnelle dite « de d'Alembert » introduite par ce dernier en 1750[37]. Soit X un segment quelconque. Comme $f(X) > 1$, on peut

---

33 Gérard ne fait qu'esquisser la preuve de ce résultat.

34 Elle sera reprise dans l'article des *Nouvelles Annales* [Gérard 1893].

35 Gérard utilise toujours le terme de longueur et non celui de segment. Pour éviter de confondre un segment et sa mesure, j'utiliserai ici le second terme.

36 Il démontre successivement que $f(X+H) + f(X-H) \leq 2f(X)f(H)$ et $f(X+H) + f(X-H) \geq 2f(X)f(H)$. Des passages à la limite sont nécessaires.

37 Cf. [Aczél 1966, p. 6 et pp. 117-120]. Cette équation a ensuite été résolue pour une fonction continue f par Cauchy [1821, pp. 114-122]. Gérard ne se réfère pas à ce dernier, mais il ne pouvait sans doute ignorer sa solution.

écrire ce nombre sous la forme $f(X) = \cosh(\phi(X))$ avec $\phi(X) > 0$. On déduit alors de la relation (4) que $\phi(2H) = 2\phi(H)$[38] et, plus généralement, $\phi(nH) = n\phi(H)$[39].

Revenons au texte principal. Soit aA un segment arbitraire et X un segment quelconque. Supposons que $X = \frac{m}{n} aA = maa_1$. On a alors

$$\phi(X) = m\phi(aa_1) = \frac{m}{n}\phi(aA) = \frac{X}{aA}\phi(aA).$$

En utilisant le fait que la fonction f, et donc la fonction Φ, est croissante, Gérard démontre que ce résultat reste vrai lorsque X et aA ne sont pas commensurables[40]. Si l'on suppose que la longueur du segment X est représentée par le nombre $x = \frac{X}{Aa}\phi(Aa)$[41], on obtient en fin de compte $\phi(X) = x$ ou $f(X) = \cosh(x)$[42].

L'ensemble du raisonnement constitue l'un des passages les plus originaux de la thèse. Il est fondé entièrement sur des inégalités. Une douzaine d'années seulement séparent De Tilly de Gérard, mais la différence des méthodes et des exigences de rigueur et de précision est considérable. Gérard évite le recours à des infiniment petits utilisés de manière intuitive et n'a pas besoin de résoudre une équation différentielle pour obtenir la valeur de la fonction équidistante. On observe ici un changement de paradigme sur lequel je reviendrai.

Après avoir calculé la fonction f, Gérard établit une première relation métrique dans un triangle rectangle. Je présenterai d'abord la version de l'article des *Nouvelles Annales* [Gérard 1893]. Elle permet de mieux saisir le principe du raisonnement que celle de la thèse. La méthode consiste à déplacer de deux manières différentes un triangle ABC et évoque les méthodes cinématiques de De Tilly. Considérons deux triangles rectangles

---

38 La solution triviale $f(X) \equiv 0$ est exclue et on a donc $f(0) = 1$.

39 C'est ce résultat qui est établi de manière beaucoup plus compliquée dans le texte principal, sans recourir à l'équation de d'Alembert.

40 Comme f est croissante, Gérard n'a pas besoin de supposer, au contraire de Cauchy, que cette fonction est continue. En introduisant dans l'inégalité (3) ci-dessus les valeurs de la fonction f, on obtient l'inégalité mentionnée dans l'avant-propos (cf. §2).

41 Le segment $K = Aa/\phi(Aa)$ est « l'unité naturelle » de longueur de Bolyai [1832, n° 33]. Ce segment n'est pas constructible (cf. §4.4 ci-dessous) et Gérard refuse pour cette raison de l'introduire. Il faudrait en effet, selon lui, un nouveau postulat affirmant l'existence de ce segment. On retrouve ici l'exigence constructiviste de Gérard (cf. notes 14 et 57). Sa définition du nombre x suppose uniquement l'existence, assurée par l'axiome d'Archimède, du rapport X/Aa et de la limite $f(Aa)$.

42 Dans la suite de sa thèse, Gérard identifie un segment X à sa mesure x et écrit simplement $f(x) = \cosh(x)$.

ABb et ACc ayant en commun un angle aigu A. Comme on l'a vu précédemment (cf. fig. 2), le rapport $\frac{bB}{AB}$ décroît lorsque AB décroît et tend donc vers une limite lorsque AB tend vers zéro[43].

> Cherchons maintenant la relation qui existe entre les trois côtés d'un triangle ABC rectangle en A (fig. 4). D'un point B' pris sur le prolongement de l'hypoténuse, abaissons $B'A'$ perpendiculaire sur AC ; faisons glisser le triangle ABC le long de AC jusqu'en $A'B_1C_1$, puis le long de BC jusqu'en $A_2B'C_2$. Puis, par le milieu E de CC_1, menons à BC une perpendiculaire EF, qui sera aussi perpendiculaire à B_1C_1 en un point G tel que $EF = EG$. De même la perpendiculaire HI à la droite AC, menée par le milieu $[H]$ de CC_2, est aussi perpendiculaire à A_2C_2 en un point J tel que $HI = HJ$. Enfin menons B_1D_1 perpendiculaire à BC et BD perpendiculaire sur $A'B'$. [Gérard 1893, p. 81]

Les triangles rectangles $BB'D$ et B_1D_1B' ont en commun l'angle B'. On a donc si BB' tend vers 0

$$\lim \frac{BD}{BB'} = \lim \frac{B_1D_1}{B'B_1}.$$

Pour des raisons analogues, on a

$$\lim \frac{HI}{CH} = \lim \frac{EF}{EC}$$

ou

$$\lim \frac{IJ}{CC_2} = \lim \frac{FG}{CC_1}.$$

En divisant membre à membre et en remarquant que $CC_2 = BB'$ et $CC_1 = AA'$, on a

$$\lim \frac{BD}{AA'} \lim \frac{B'B_1}{IJ} = \lim \frac{B_1D_1}{FG}.$$

En considérant le quadrilatère trirectangle $ABDA'$ et en utilisant l'inégalité (3), on peut écrire

$$\cosh(A'D) < \frac{BD}{AA'} < \cosh(AB).$$

Si BB' tend vers 0, le rapport $\frac{BD}{AA'}$ tend ainsi vers $\cosh(AB)$. De même en considérant le quadrilatère trirectangle FGB_1D_1, on démontre que le rapport $\frac{B_1D_1}{FG}$ tend vers $\cosh(BC)$. Gérard démontre enfin que le rapport $\frac{B'B_1}{IJ}$

43 On peut définir le sinus de l'angle comme égal à cette limite. C'est le procédé utilisé par Flye Sainte-Marie [1871, p. 71] et De Tilly [1879, p. 136].

tend vers $\cosh(AC)$[44]. Il obtient ainsi la relation fondamentale

$$\cosh(AB)\cosh(AC) = \cosh(BC).$$

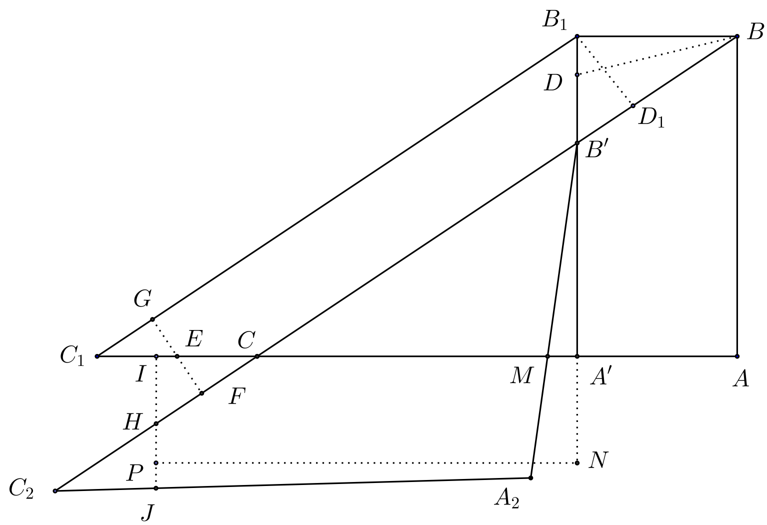

Figure 4. Établissement de la relation trigonométrique fondamentale

Voyons maintenant quelles sont les différences avec le raisonnement présenté dans la thèse. Celui-ci se distingue tout d'abord par une vérification de tous les détails de la figure. Gérard justifie par exemple le fait que le point D est situé à l'intérieur du segment B_1B' et le point D_1 à l'intérieur du segment BB' ou que le point P tombe entre I et J. Les calculs de limite sont pour leur part formulés en termes d'inégalités. Gérard démontre à cet effet le résultat préliminaire suivant. Considérons deux triangles ABb et ACc rectangles en b et en c (fig. 2 avec C entre A et B). Soit ϵ un nombre strictement positif quelconque. Il existe une longueur δ telle que si $AC < AB < \delta$, on a

$$\frac{Cc}{AC} < \frac{Bb}{AB} < \frac{Cc}{AC}(1+\epsilon),$$

quelle que soit la valeur de l'angle commun A. La preuve fait encore une fois appel aux théorèmes des numéros 7 et 8. Il n'est ainsi pas nécessaire

44 Afin d'établir ce résultat, la figure est complétée par le point N situé sur le prolongement de $B'A'$ et tel que $A'N = B'B_1$ et par le point P pied de la perpendiculaire à IJ issue de N.

de considérer explicitement la limite du quotient $\frac{Bb}{AB}$. En appliquant ce résultat dans le cas du raisonnement précédent, on peut donc affirmer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une longueur δ telle que si $BB' < \delta$, on a

$$\frac{BD}{BB'} < \frac{B_1D_1}{B'B_1}(1+\epsilon).$$

En retranscrivant de cette manière le raisonnement précédent, Gérard démontre que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $BB' < \delta$ on a

$$\frac{\cosh(AB-BB')\cosh(AC-BB')}{(1+\epsilon)\cosh BC} < 1 < \frac{\cosh AB \cosh(AC+3BB')}{\cosh(BC-BB')}(1+\epsilon).$$

Il conclut que $\cosh BC = \cosh AB \cosh AC$.

La formulation du calcul de limite et le choix des lettres δ et ϵ évoquent la « nouvelle analyse » de Weierstrass et montrent qu'un nouveau langage est en train de se mettre en place. Ayant étudié au début des années 1880, ce n'est pas dans le cadre de ses études que Gérard a pu se familiariser avec les méthodes de Weiertrass. Elles ne se sont en effet répandues en France qu'une décennie plus tard (cf. [Gispert 1982]). Si Gérard a pris connaissance de ces méthodes, c'est peut-être grâce aux *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* de Stolz [1885]. Cet ouvrage est cité à deux reprises dans sa thèse (cf. note 14 et §5). Il constitue le premier traité en allemand exposant l'analyse weierstrassienne.

L'étape suivante consiste à définir le cosinus et le sinus d'un angle. Gérard suit un chemin original. Voici son raisonnement (fig. 5) :

> Ceci posé, soient xAy un angle aigu, B un point de Ax, C un point de Ay ; menons CD perpendiculaire sur AB ; les triangles rectangles ACD, BCD donnent
>
> $$\cosh BC = \cosh CD \cosh(AB - AD)$$
> $$\cosh CD = \frac{\cosh AC}{\cosh AD}$$
>
> d'où
>
> $$\begin{aligned}\cosh BC &= \frac{\cosh AC}{\cosh AD}(\cosh AB \cosh AD - \sinh AB \sinh AD)\\ &= \cosh AB \cosh AC - \sinh AB \sinh AC \frac{\tanh AD}{\tanh AC}.\end{aligned}$$
>
> De même, en abaissant BE perpendiculaire sur AC, on a
>
> $$\cosh BC = \cosh AB \cosh AC - \sinh AB \sinh AC \frac{\tanh AE}{\tanh AB}.$$
>
> Donc
>
> $$\frac{\tanh AD}{\tanh AC} = \frac{\tanh AE}{\tanh AB};$$

comme les longueurs AB et AC sont quelconques, il faut en conclure que la valeur du rapport $\frac{\tanh AD}{\tanh AC}$ ne dépend pas de la longueur AC, mais seulement de l'angle A ; c'est cette valeur qu'on appelle le *cosinus* de l'angle A et qu'on désigne par $\cos A$, de sorte que

$$\cosh BC = \cosh AB \cosh AC - \sinh AB \sinh AC \cos A$$ [45]

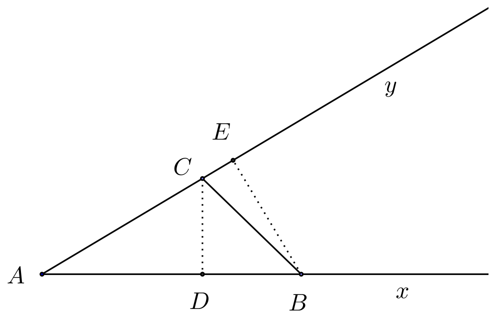

Figure 5. Définition du cosinus

Gérard démontre que dans le cas où l'angle A est obtus, il faut poser $\cos A = -\cos(180° - A)$. Le sinus d'un angle aigu ou obtus est ensuite défini comme la valeur positive du radical $\sqrt{1-\cos^2 A}$. Cette définition du cosinus et du sinus est un peu artificielle mais elle a l'avantage d'éviter la considération de limites. Elle montre aussi immédiatement que la fonction $\cos A$ est décroissante entre $0°$ et $180°$. Cette propriété sera nécessaire dans la suite du raisonnement. Gérard déduit encore de la relation fondamentale ci-dessus d'autres relations trigonométriques dans un triangle quelconque et dans un triangle rectangle. Il démontre aussi que les formules d'addition sont vraies pour le cosinus et le sinus ainsi définis.

La dernière étape consiste à démontrer que ces définitions sont identiques aux définitions analytiques du cosinus et du sinus[46]. Gérard considère les deux fonctions

$$C(x) = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots \qquad\qquad S(x) = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

45 [Gérard 1892, pp. 29-30]

46 On pourra comparer le raisonnement de Gérard avec celui donné beaucoup plus tard par Perron [1962, chap. VII]. Ce dernier définit le sinus et le cosinus de la même manière que Flye Sainte-Marie ou De Tilly comme des limites. Il démontre ensuite que cette définition est identique à celle donnée à partir de l'exponentielle. Ses calculs sont plus longs que ceux de Gérard. L'idée qu'il convient de démontrer l'identité des deux définitions apparaît déjà chez De Tilly [1879, p. 140]. Ce dernier ne démontre cependant pratiquement rien.

Soit $\frac{\pi}{2}$ le premier zéro positif de la fonction C et D l'angle droit. En utilisant le fait que les fonctions C et cos satisfont aux mêmes formules d'addition, Gérard démontre que si l'on prend comme mesure d'un angle A le nombre $a = \frac{A}{D}\frac{\pi}{2}$, on a

$$\cos(a) = C(a) \qquad\qquad \sin(a) = S(a).$$

Il établit ces égalités d'abord dans le cas où le rapport $\frac{A}{D}$ est rationnel. Comme la fonction C est continue et décroissante entre 0 et π et la fonction cos décroissante[47], il conclut que l'égalité est vraie dans tous les cas. Il parvient ainsi au terme de ce processus de reconstruction de la trigonométrie non euclidienne. Il termine la première partie de sa thèse en établissant encore des formules de trigonométrie dans un quadrilatère birectangle (ayant deux angles droits) et dans un quadrilatère trirectangle (quadrilatère de Lambert). Elles seront utiles pour justifier certaines constructions.

4. CONSTRUCTIONS

La deuxième partie de la thèse a pour but principal d'étudier les constructions à la règle et au compas en géométrie non euclidienne. L'intérêt pour ce type de problèmes est sans doute dû à la lecture de Bolyai ainsi qu'à la pratique de l'enseignement secondaire. Les justifications des différentes constructions reposent à plusieurs reprises sur des arguments analytiques. Il faut donc commencer par définir un système de coordonnées et déterminer l'équation de la droite et des différents types de « cycles » (cercle, hypercycle et horicycle) dans ce système. Gérard aboutit par une autre voie à des résultats déjà établis par Beltrami et Klein. Le début de cette deuxième partie est d'un intérêt moindre. Je le résumerai brièvement de manière à pouvoir présenter ensuite quelques-unes des nombreuses applications à des problèmes de construction. Elles constituent l'intérêt principal de cette partie.

4.1. *Géométrie analytique*

Gérard commence par introduire le système de coordonnées suivant. Considérons un système d'axes rectangulaires Oxy. Soit M un point, P et Q ses projections orthogonales sur les axes Ox et Oy (fig. 6). Les nombres $X = \sinh QM$, $Y = \sinh PM$, $Z = \cosh OM$ sont appelés « coordonnées

[47] Cet argument est utilisé implicitement.

normales » du point M. Si λ est un nombre réel ou imaginaire non nul quelconque, les coordonnées $x = \lambda X$, $y = \lambda Y$, $z = \lambda Z$ sont appelées « coordonnées homogènes » du point M. Comme

$$X = \sinh OM \cos \omega \qquad Y = \sinh OM \sin \omega \qquad Z = \cosh OM,$$

les coordonnées X, Y, Z satisfont à la relation $X^2 + Y^2 - Z^2 = -1$. Si les coordonnées homogènes x, y, z de M sont réelles, on a donc $x^2 + y^2 - z^2 < 0$. Gérard démontre de plus que l'on a

$$\frac{x}{z} = \tanh(OP) \qquad \frac{y}{z} = \tanh(OQ).$$

Il note que ces deux rapports correspondent aux coordonnées utilisées par Beltrami[48]. Le système de coordonnées X, Y, Z apparaît quelques années

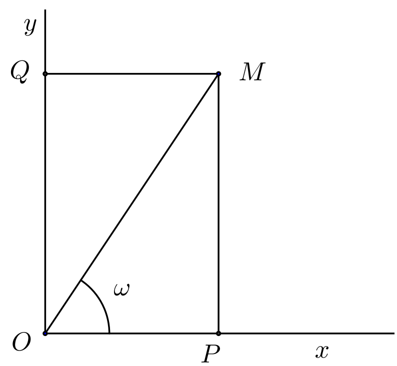

Figure 6. Définition des coordonnées

plus tôt dans le livre de Wilhelm Killing *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* [Killing 1885, p. 17][49]. Gérard ne cite cependant

48 Rappelons que Beltrami montre que le plan non euclidien peut-être représenté dans le plan euclidien par les points $M(u; v)$ situés à l'intérieur d'un cercle d'équation $u^2 + v^2 < a^2$ [Beltrami 1868]. Si l'on se réfère à la figure 6, on a $u/a = \tanh(OP)$ et $v/a = \tanh(OQ)$ où OP et OQ sont des distances non euclidiennes.

49 Killing affirme que c'est Weierstrass qui a utilisé pour la première fois ce système de coordonnées dans un cours donné à Berlin durant l'été 1872. La première partie de son livre présente un exposé de géométrie analytique traitant simultanément les géométries sphérique, elliptique et hyperbolique. Après avoir établi les relations fondamentales de la trigonométrie par une méthode infinitésimale, Killing établit des formules donnant la distance de deux points, l'équation d'une droite, la distance d'un point à une droite ainsi que l'équation d'un cercle. On retrouve ces formules, présentées sous une forme un peu différente, dans la thèse de Gérard.

pas cet ouvrage et son traitement de la géométrie analytique provient peut-être directement de la lecture de Beltrami.

Gérard démontre que l'équation d'une droite est de la forme $WZ - VY - UX = 0$ avec des coefficients U, V, W satisfaisant à la relation $U^2 + V^2 - W^2 = 1$. Trois nombres réels ou imaginaires non tous nuls u, v, w proportionnels à U, V, W sont appelés « coordonnées homogènes » de la droite. Gérard démontre aussi que la distance de deux points $A(X;Y;Z)$ et $A_1(X_1;Y_1;Z_1)$ est donnée par la relation $\cosh(AA_1) = ZZ_1 - XX_1 - YY_1$. L'angle de deux droites $D(U;V;W)$ et $D_1(U_1;V_1;W_1)$ est donné pour sa part par la relation $\cos(\widehat{DD_1}) = WW_1 - VV_1 - UU_1$.

Comme les coordonnées homogènes réelles x, y, z d'un point satisfont à la relation $x^2+y^2-z^2 < 0$, le plan non euclidien peut-être identifié à l'intérieur du cercle d'équation $x^2+y^2-z^2 = 0$. C'est l'interprétation de Beltrami et Klein. Trois nombres réels x, y, z non tous nuls représentent alors un point *réel* si $x^2+y^2-z^2 < 0$, un point *limite* si $x^2+y^2-z^2 = 0$ et un point *idéal* si $x^2+y^2-z^2 > 0$. Des points dont les coordonnées sont proportionnelles sont identiques. On définit de manière semblable une droite *réelle, limite* ou *idéale*. Les formules donnant la distance de deux points ou l'angle de deux droites se généralisent à des points et droites quelconques. On notera que Gérard semble admettre ici implicitement qu'à tout triple de nombres réels non tous nuls correspond un point ou une droite, contrairement à ce qui a été affirmé plus tôt (cf. notes 14 et 41). Nous verrons plus loin que cela n'est malgré tout pas le cas (cf. note 57 et §4.4).

Un *cycle* est le lieu des points équidistants d'un point fixe appelé *centre* et, par conséquent, aussi équidistants de la polaire du centre[50]. Cette droite est l'*axe* du cycle. Il s'agit d'un cercle si le centre est réel et d'un hypercycle si le centre est idéal. Cette dernière courbe est constituée de deux branches situées de part et d'autre de l'axe. L'équation d'un cycle de centre $(x_0;y_0;z_0)$ et de rayon R[51] est, en coordonnées homogènes, de la forme

$$(zz_0 - yy_0 - xx_0)^2 = \cosh^2 R(z_0^2 - y_0^2 - x_0^2)(z^2 - y^2 - x^2).$$

On peut mettre cette équation sous la forme

$$(zz_0 - yy_0 - xx_0)^2 = z^2 - y^2 - x^2.$$

Cette dernière équation n'est pas homogène et le choix d'un facteur de proportionnalité dans les coordonnées du centre équivaut à déterminer le rayon. Dans le cas où le point $(x_0;y_0;z_0)$ est sur le cercle-limite, la seconde

50 Il s'agit de la polaire par rapport au cercle limite $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

51 Dans le cas d'un hypercycle, le rayon est de la forme $R = \alpha + \frac{\pi}{2}i$.

équation représente une courbe réelle puisque $z^2 - y^2 - x^2 > 0$. Si l'on suppose que les coordonnées d'un point de la courbe sont normales, c'est-à-dire de la forme X, Y, Z avec $Z^2 - Y^2 - X^2 = 1$, cette équation prend la forme

$$Zz_0 - Yy_0 - Xx_0 = 1.$$

Gérard démontre que si l'on prend deux points de la courbe, la médiatrice du segment déterminé par ces deux points passe par le point limite $(x_0; y_0; z_0)$. C'est la propriété caractéristique d'un horicycle[52].

Il convient de dire encore que Gérard introduit la notion d'axes radicaux de deux cycles et établit le résultat suivant : soit d une droite variable passant par un point fixe A_1 et coupant un cycle en deux points A' et A''. Soit $\rho' = A_1A'$ et $\rho'' = A_1A''$. Le produit $\tanh \frac{\rho'}{2} \tanh \frac{\rho''}{2}$ reste constant lorsque la sécante d varie[53]. Ce produit est la *puissance* du point par rapport au cycle.

4.2. *Constructions de droites*

Après avoir établi les formules de base de la géométrie analytique, Gérard passe à des applications. Il démontre analytiquement le théorème de géométrie élémentaire suivant : les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point réel, limite ou idéal. Il poursuit en introduisant la notion de droites parallèles[54]. Deux droites sont dites « parallèles » lorsqu'elles se coupent sur le cercle limite. Considérons une droite d et un point A extérieur à cette droite (fig. 7). Soit O le pied de la perpendiculaire à d issue de A, δ la distance OA. Gérard démontre analytiquement qu'une droite issue de A et faisant avec AO un angle ω coupe d en un point M réel, limite ou idéal selon que $\tan(\omega)$ est inférieur, égal ou supérieur à $1/\sinh(\delta)$. Il ajoute que « Bolyai a montré que l'on peut *construire* un angle dont la tangente est égale à $1/\sinh(\delta)$ » [Gérard 1892, p. 55]. Il suffit en effet de reprendre la construction des parallèles à une droite

---

52 Dans ce qui suit, le terme *cycle* englobera aussi les horicycles.

53 Ce théorème est aussi démontré par Perron [1962]. Ce dernier distingue trois cas selon que le cycle est un cercle, un horicycle ou un hypercycle. Ses preuves sont synthétiques et nécessitent des calculs beaucoup plus longs que ceux de Gérard. Ce dernier traite les trois cas en même temps. À la différence de Perron, Gérard considère qu'un hypercycle est constituée de deux branches. Si la droite coupe la courbe en deux points A' et A'' situés sur des branches différentes, le produit $\tanh \frac{\rho'}{2} \tanh \frac{\rho''}{2}$ doit être remplacé par le quotient $\tanh \frac{\rho'}{2} / \tanh \frac{\rho''}{2}$.

54 Rappelons que Gérard a choisi de ne pas introduire cette notion dès le début de ses raisonnements, pour éviter de considérer une figure de prime abord non constructible.

issues d'un point exposée par ce dernier [Bolyai 1832, nº 34]. Les relations trigonométriques établies dans la première partie de la thèse permettent de démontrer que les droites obtenues de cette manière font bien avec OA un angle ω tel que $\tan(\omega) = 1/\sinh(\delta)$. Cette dernière relation donne aussi la valeur de l'angle de parallélisme $\Delta = \Pi(\delta)$ associé à un segment $OA = \delta$[55].

Gérard entend encore démontrer que toute droite issue de A et faisant avec AO un angle ω inférieur à Δ coupe d en un point M ayant une « existence géométrique » [Gérard 1892, p. 56]. En d'autres termes, p et p' sont des parallèles asymptotiques à d. Cette preuve est cependant superflue. Dans la mesure où il travaille dans un plan de Hilbert non euclidien, archimédien et où le postulat d'intersection d'une droite et d'un cercle est vérifié[56], les parallèles p et p' sont asymptotiques (cf. [Hessenberg & Diller 1967, p. 239] et [Greenberg 1979, p. 55])[57]. La question de savoir si, dans un plan non euclidien, il existe nécessairement des parallèles asymptotiques est néanmoins pertinente et sera discutée ultérieurement par Schur[58].

Le théorème des hauteurs permet à Gérard de donner aussi une construction de la perpendiculaire commune à deux droites divergentes[59] (fig. 7). Soit d une droite, A un point extérieur à d et O la projection de A sur d. Soit p et p' les parallèles à d issues de A et Δ l'angle formé par celles-ci avec AO. Soit encore d' une droite passant par A et faisant avec AO un

---

55 On a $\tan(\Delta) = 1/\sinh(\delta)$.

56 Rappelons que ce postulat a été énoncé au début de la thèse (cf. §2).

57 Gérard pense qu'une preuve est nécessaire car une droite issue de A pourrait couper d en un point M « réel » mais n'ayant pas « d'existence géométrique ». C'est la question déjà rencontrée de savoir si à un nombre réel donné correspond un segment ayant ce nombre comme mesure de longueur (cf. notes 14 et 41). Le problème est que la différence entre un point réel et un point géométrique n'est pas clairement expliquée et que l'on ne sait parfois pas dans quel ensemble de points on se situe. Les points géométriques sont apparemment ceux qui peuvent être obtenus à l'aide d'une construction. Nous verrons au §4.4 que si l'on se limite à ces points, le plan considéré par Gérard est isomorphe au disque de Klein sur le sous-corps euclidien E de $\mathbb{R}$ constitué des nombres constructibles.

58 [Schur 1909, p. 100 et p. 126]. Schur donne l'exemple d'un plan non euclidien et non archimédien dans lequel de telles parallèles n'existent pas. Cf. aussi [Hessenberg & Diller 1967, p. 219].

59 Ce terme n'est pas utilisé par Gérard. D'autres constructions seront données ultérieurement par Engel [1899, p. 253 et pp. 255-256], Liebmann [1901, pp. 479-480] et Barbarin [1900, p. 10]. À côté de Gérard, Paul-Jean Barbarin (1855-1931) est en France le principal mathématicien à s'intéresser à cette époque à la géométrie non euclidienne. Il est l'auteur d'un important mémoire de géométrie analytique non euclidienne [Barbarin 1900] et d'un traité sur le sujet [Barbarin 1902]. Comme Gérard, il a accompli toute sa carrière dans l'enseignement secondaire.

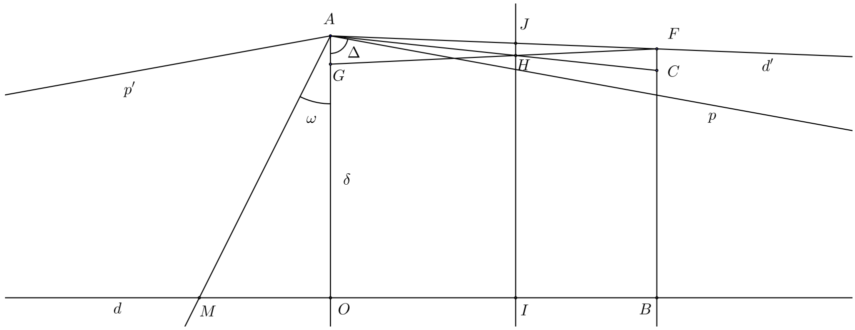

Figure 7. Angle de parallélisme et perpendiculaire commune à deux droites divergentes

angle aigu supérieur à Δ. Les droites d et d' ne se coupent pas et on peut trouver sur d' un point F dont la distance à p est plus grande que AO[60]. Si l'on abaisse la perpendiculaire FB à d, on a donc $FB > AO$. D'après le théorème de Lambert, l'angle en F du quadrilatère birectangle $AOBF$ est donc aigu. C'est aussi par hypothèse le cas de l'angle OAF. Les perpendiculaires AC et FG abaissées de A sur BF et de F sur AO se coupent donc en un point H. Dans le triangle AHF la hauteur HJ passe par le point de concours des hauteurs AG et FB[61]. Elle est donc perpendiculaire à OB au point I. C'est la perpendiculaire commune cherchée. On notera que cette construction souffre d'un défaut : le point F n'est pas explicitement construit.

Une autre construction importante résolue par Gérard est la suivante : mener une droite parallèle à une droite D et perpendiculaire à une droite D' (fig. 8). Il s'agit, dans le cas où les deux droites sont sécantes, d'un problème déjà résolu par Bolyai[62]. Gérard en donne une solution plus simple fondée sur le théorème des hauteurs dans un triangle :

60 Cf. [Gérard 1892, p. 14].

61 C'est le pôle de OB.

62 [Bolyai 1832, nº 35]. Cette construction sera résolue quelques années plus tard par Engel en utilisant la notion de triangles rectangles associés [Engel 1899, pp. 242-243]. Cf. aussi [Liebmann 1901, p. 482]. Dans un article ultérieur, Liebmann écrit que la solution de Gérard est la plus simple [Liebmann 1904, p. 116]. Celle-ci nécessite cependant de choisir un point B « assez éloigné de A », ce qui oblige à répéter un nombre indéterminé de fois la même opération. La solution d'Engel évite cette difficulté. Une autre solution a été donnée à la même époque par Barbarin [1900, p. 8].

En effet, supposons d'abord que les droites D et D' se coupent en un point A, et soit DAD' l'angle aigu formé par ces deux droites. Nous savons qu'on peut trouver sur AD' un point B assez éloigné du point A pour que la perpendiculaire menée par ce point à la droite D' ne rencontre pas la droite D[63] ; donc, en menant BC parallèle à AD, l'angle ABC sera aigu, lui aussi. Dans ces conditions, les perpendiculaires AF et BE abaissées des points A et B sur BC et AD respectivement se coupent en un point O et, dans le triangle OAB, la hauteur OH issue du point O est la droite demandée, car elle passe par le point de concours des autres hauteurs AD et BC, c'est-à-dire qu'elle leur est parallèle.

Si maintenant les deux droites données D et D' ne se rencontrent pas, il n'y a qu'à mener par un point de D' une parallèle à D pour être ramené au cas précédent. [Gérard 1892, p. 74]

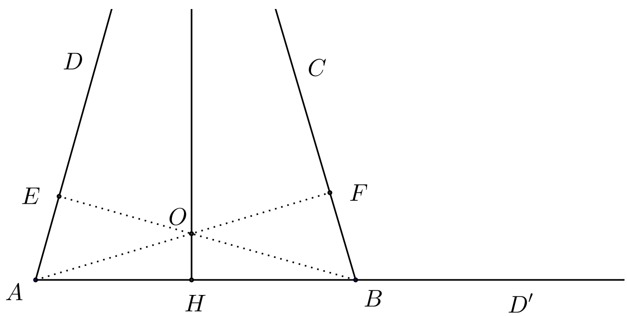

Figure 8. Construction de la perpendiculaire à une droite donnée parallèle à une autre droite donnée

Dans le cas où D et D' sont sécantes, le problème revient donc à construire le segment δ telle que $\Pi(\Delta) = \delta$ où $\Delta = \widehat{DAD'}$[64].

Gérard montre aussi comment construire les droites parallèles à deux droites données. Il faut distinguer trois cas selon que les deux droites sont sécantes, admettent une perpendiculaire commune ou sont parallèles. Cette construction fait appel à la précédente.

En considérant un quadrilatère de Lambert $ABCD$[65] et en utilisant la construction présentée ci-dessus du segment δ associé à un angle de parallélisme Δ donné, Gérard résout encore les trois problèmes suivants[66] :

---

63 Ce résultat a été démontré précédemment par Gérard.

64 Cette solution sera reprise par Bonola [1955, p. 106] mais sans référence à Gérard.

65 Les angles en B, C et D sont droits.

66 D'autres solutions seront données ultérieurement par Barbarin [1900, pp. 8-9]. Le problème général de construire un triangle à partir de ses trois angles sera résolu par Liebmann [1901].

1) Construire un triangle rectangle connaissant un cathète et l'angle opposé
2) Construire le quadrilatère connaissant deux côtés opposés AD et BC
3) Construire un triangle rectangle connaissant les deux angles aigus

4.3. *Intersection d'une droite et d'un cycle et de deux cycles*

Les cas à examiner sont ceux où le cycle est un hypercycle ou un horicycle. Soit D la droite donnée. Considérons d'abord le cas d'un hypercycle déterminé par son axe et la distance δ de l'un de ses points à cet axe. Si D rencontre celui-ci en un point réel, la construction 1) citée à la fin du paragraphe précédent permet de construire son intersection avec la courbe. Si D rencontre l'axe en un point idéal[67], la construction 2) permet de construire son intersection avec la courbe. Enfin si D est parallèle à l'axe, la solution est plus simple et nécessite seulement de construire une parallèle à une droite par un point.

Passons au cas d'un horicycle déterminé par un point A et par le rayon AB passant par ce point. Trois cas sont à distinguer.

> 1° Si la droite donnée D est elle-même un rayon, c'est-à-dire si elle est parallèle à AB, le point où elle rencontre l'horicycle est symétrique de A par rapport à la droite *équidistante* des deux droites D et AB. [Gérard 1892, p. 77]

La construction de cette droite équidistante a déjà été donnée précédemment par Gérard[68].

> 2° Si la droite D passe par le point A, elle rencontre l'horicycle en un second point qui est symétrique de A par rapport au rayon perpendiculaire à D.
> [Gérard 1892, p. 77]

La construction d'une droite parallèle à AB et perpendiculaire à D a aussi été donnée précédemment par Gérard.

Le troisième cas est le plus intéressant puisqu'il fait intervenir la notion de puissance d'un point par rapport à un horicycle (fig. 9) :

> 3° Enfin, si la droite D est quelconque, les deux points M et M' où elle coupe l'horicycle sont symétriques par rapport au point C où elle est rencontrée par le rayon CE qui lui est perpendiculaire.
>
> Menons la droite AC qui rencontre l'horicycle en un second point A' que nous savons déterminer (2°), et décrivons un demi-cercle sur AA' comme diamètre ; le point C ayant même puissance par rapport à ce cercle et par rapport à

67 Les deux droites ont une perpendiculaire commune.

68 [Gérard 1892, p. 75]. La construction proprement dite est résolue d'une autre manière par Bolyai grâce à un raisonnement dans l'espace [Bolyai 1832, n° 37].

l'horicycle, en menant par le point C une perpendiculaire à AA' qui rencontre le cercle en N, nous aurons $CN = CM = CM'$. [Gérard 1892, pp. 77-78]

La droite CE est perpendiculaire à D et parallèle à l'axe AB. Sa construction a été donnée précédemment. Comme la puissance de C par rapport à l'horicycle et au cercle de diamètre AA' est la même, on peut écrire

$$\tanh\frac{CM}{2}\tanh\frac{CM'}{2} = \tanh\frac{CA}{2}\tanh\frac{CA'}{2} = (\tanh\frac{CN}{2})^2.$$

Gérard étudie encore la construction des points d'intersection de deux

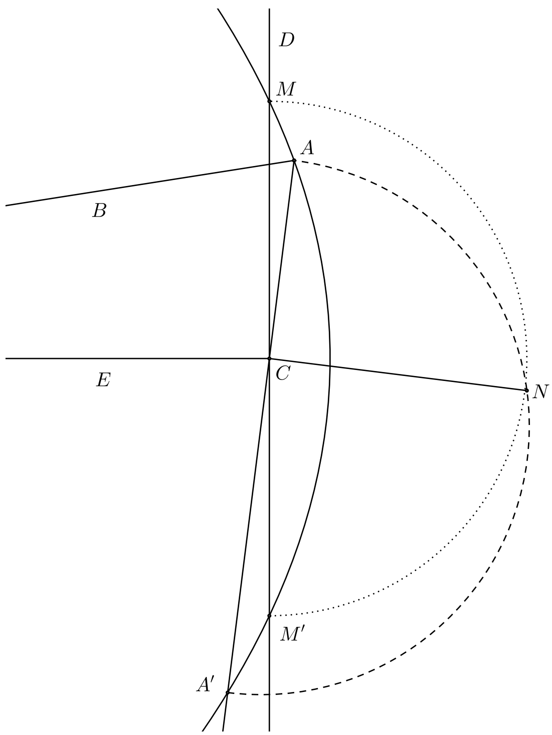

Figure 9. Intersection d'une droite et d'un horicycle

cycles. Il énonce un principe général assez vague avant de résoudre le problème en détail dans le cas de deux hypercycles. Celui-ci revient à construire leur axe radical. Trois cas doivent être distingués selon que les axes des hypercycles sont sécants, parallèles ou ont une perpendiculaire commune.

En résolvant les différentes constructions présentées dans ce paragraphe, Gérard aborde un problème qui sera étudié de manière plus générale au XXe siècle par le mathématicien russe Nikolai M. Nestorovitch[69]. Comme il y a trois types de cycles en géométrie non euclidienne, on peut imaginer trois types de compas. Le premier permet de tracer un cercle à partir de son centre et de son rayon, le deuxième un hypercycle à partir de son axe et de la distance d'un point à cet axe et le troisième un horicycle à partir d'un diamètre et d'un point. Nestorovitch a démontré que toute construction réalisable à l'aide de la règle et de l'un des trois compas peut être effectuée à l'aide de la règle et de l'un quelconque des deux autres compas.

4.4. *Constructions diverses*

Un dernier ensemble de constructions concerne des longueurs[70]. Ce sont les plus intéressantes. La première est analogue à la construction d'une quatrième proportionnelle :

> Étant données trois longueurs a, b, c, on peut toujours construire une longueur x telle que
> $$\sinh x = \frac{\sinh b \sinh c}{\sinh a}.$$[71]

Cette construction se résout facilement à partir d'un triangle. Gérard résout ensuite les trois constructions suivantes. Etant données deux longueurs a et b et deux nombres entiers m et n, construire une longueur x telle que

$$\sinh x = \sinh a \pm \sinh b, \qquad \sinh x = \frac{m}{n} \sinh a, \qquad \sinh^2 x = \sinh a \sinh b.$$

Ces constructions font intervenir un horicycle et sont justifiées analytiquement. Expliquons la première. Considérons dans un système d'axes Oxy un horicycle de sommet O et d'axe Oy (fig. 10). Son équation est, en coordonnées normales, $Z - Y - 1 = 0$[72]. On déduit de la condition $Z^2 - Y^2 - X^2 = 1$

---

69 [Nestorovitch 1949a] et [Nestorovitch 1949b]. Cf. aussi [Handest 1956].

70 Rappelons que dans toutes les formules métriques, la mesure d'un segment X est supposée égale à $x = \frac{X}{Aa}\phi(Aa)$ (cf. §3). Gérard identifie un segment à sa mesure et le terme longueur désigne à la fois un segment et sa mesure (cf. note 42).

71 [Gérard 1892, p. 81].

72 Le centre de l'horicycle est en effet, en coordonnées homogènes, le point à l'infini $(0; 1; 1)$ et il passe par l'origine $(0 ; 0 ; 1)$ (en coordonnées normales).

la relation $X^2 = 2Y$. Les coordonnées d'un point A de l'horicycle sont donc

$$Z = \cosh OA \qquad Y = 2\sinh^2 \frac{OA}{2}{}^{73} \qquad X = \pm 2\sinh \frac{OA}{2}.$$

Soient A et A' deux points de l'horicycle. On déduit de la relation $\cosh AA' = ZZ' - YY' - XX'$ l'égalité

$$\sinh \frac{AA'}{2} = \sinh \frac{OA}{2} \pm \sinh \frac{OA'}{2}$$

selon que A et A' ne sont pas du même côté de l'axe Oy ou sont du même côté. Soit maintenant a et a' deux longueurs données. On construit un point A de l'horicycle tel que $\frac{OA}{2} = a$ en prenant l'intersection avec l'horicycle d'une droite faisant avec l'axe Oy un angle $\widehat{BOA}$ égal à $\Pi(\frac{a}{2})$. On trouve de même A' tel que $\frac{OA'}{2} = a'$. Soit $2x$ la longueur de la corde AA'. On a $\sinh x = \sinh a \pm \sinh a'$ selon la position de A et A' par rapport à l'axe Oy.

Soit B le point d'intersection de AA' avec l'axe Oy, P et P' les projections de A et A' sur cet axe. Soit encore M un des points d'intersection avec l'horicycle de la perpendiculaire à Oy par B. Gérard démontre que $\sinh AP \sinh A'P' = \sinh^2 BM$. En construisant A et A' sur l'horicycle tels que $AP = a$ et $A'P' = a'$[74], on résout la troisième construction.

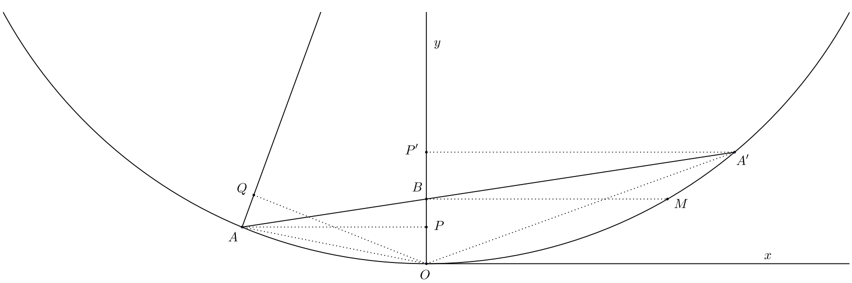

Figure 10. Construction d'une longueur x telle que $\sinh(x) = \sinh(a) \pm \sinh(b)$

Gérard entend ensuite appliquer les résultats précédents pour déterminer l'expression générale des longueurs constructibles à la règle et au

73 On a $\sinh^2(\frac{x}{2}) = \frac{\cosh x - 1}{2}$.

74 Il suffit de considérer, sur une droite passant par O et formant avec Oy un angle égal à $\Pi(a)$, un segment OQ de longueur a. La perpendiculaire à OQ par Q est un axe de l'horicycle et coupe celui-ci au point cherché A.

compas. Il s'agit du problème analogue à celui résolu par Pierre-Laurent Wantzel en 1837 dans le cas euclidien[75]. Le raisonnement est incomplet et souvent peu clair. Gérard a cependant le mérite d'être le premier à aborder ce problème qui sera étudié au XX^e^ siècle par d'autres mathématiciens[76]. Je vais expliquer comment compléter le raisonnement de Gérard en me basant sur une preuve moderne due à Robert Curtis[77]. Il s'agit de prouver qu'une longueur non euclidienne x est constructible si et seulement si la longueur euclidienne $\sinh x$ est constructible. La première étape consiste à démontrer qu'il existe une longueur constructible p telle que $\sinh p = 1$. Cette longueur est la « constante de Schweikart », c'est à dire la longueur p telle que $\Pi(\frac{\pi}{4}) = p$. Elle est en effet constructible (cf. §4.2) et on a $\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sinh p} \Rightarrow \sinh p = 1$. Cette étape est essentielle et n'apparaît pas chez Gérard[78]. À la différence de la géométrie euclidienne où l'on peut choisir arbitrairement la longueur unité, la longueur initiale est ici imposée.

La construction d'une quatrième proportionnelle donnée précédemment par Gérard permet ensuite de montrer que si x et constructible, il existe une longueur constructible x' telle que $\sinh x' = \frac{1}{\sinh x}$. Il suffit de prendre dans la formule citée ci-dessus au début du §4.4 $b = c = p$. Cette formule permet aussi de montrer que si b et c sont constructibles, il existe une longueur constructible x telle que $\sinh x = \sinh b \sinh c$. Il suffit de prendre dans la formule $a = p$. Comme nous l'avons vu, Gérard a démontré que si a et b sont constructibles, il existe x constructible telle que $\sinh x = \sinh a \pm \sinh b$. Prenons enfin $b = p$ dans la formule $\sinh^2 x = \sinh a \sinh b$. On voit que si a est constructible, il existe x constructible telle que $\sinh^2 x = \sinh a$. Ces différents résultats montrent

75 [Wantzel 1837]. Comme Jesper Lützen l'a montré, le résultat de Wantzel ne fut apprécié que tardivement [Lützen 2009]. Gérard ne mentionne pas Wantzel.

76 Les travaux de ces mathématiciens sont pour la plupart en russe et parfois difficilement accessibles. Ils sont répertoriées et brièvement présentés dans [Jagy 1995]. Le plus ancien est [Mordukhaï-Boltovskoï 1927]. J'ai pu le consulter.

77 [Curtis 1990]. Curtis se fonde sur la méthode initiée dans [Mordukhaï-Boltovskoï 1927]. Elle comporte des lacunes. Il se réfère aussi à un ouvrage postérieur que je n'ai pu consulter [Smogorjevskiï 1951]. Les constructions utilisées par ces mathématiciens sont plus simples que celles de Gérard. Celles utilisées par Mordukhaï-Boltovskoï font appel à un quadrilatère de Lambert et sont reprises de Barbarin [1900, pp. 5-10]. Curtis procède encore plus simplement à partir d'un triangle rectangle et d'un quadrilatère de Saccheri. Sa preuve est reprise avec quelques modifications dans [Vries 2021, pp. 36-39].

78 Elle apparaît pour la première fois dans [Mordukhaï-Boltovskoï 1927, p. 71]. Barbarin avait cependant déjà noté l'intérêt d'introduire dans ses formules une longueur u telle que $\sinh u = 1$ [Barbarin 1900, p. 10].

que l'ensemble des longueurs de la forme $\sinh x$ où x est constructible contient le nombre 1, est stable par addition, soustraction, multiplication, inversion et extraction de racines carrées. Cet ensemble constitue donc une extension du corps E des longueurs euclidiennes constructibles à la règle au compas. Gérard n'utilise évidemment pas cette terminologie moderne et écrit que si F est une fonction algébrique qui ne contient comme symboles irrationnels que des radicaux d'indice égal à 2 et si a_1, a_2, a_3, ... sont des grandeurs constructibles et n_1, n_2, n_3, ... des nombres entiers, on peut construire x telle que

$$\sinh x = F(\sinh a_1, \sinh a_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots)$$

« pourvu que la fonction F soit homogène et du premier degré par rapport aux quantités $\sinh a_1$, $\sinh a_2$, ... »[79]. Cette formulation est peu claire.

Pour être complet, il faut encore démontrer la réciproque, à savoir que si x est constructible, $\sinh x \in E$. Ce point n'est pas abordé par Gérard et les résultats obtenus précédemment ne permettent pas de l'établir directement[80]. Il affirme pour conclure avoir démontré qu'il est impossible de construire une longueur, i.e. un segment, dont la mesure est égale à l'unité[81]. L'argumentation est à nouveau peu claire, mais le résultat est correct. En effet, si cette longueur était constructible, on aurait $\sinh 1 \in E$, ce qui n'est pas possible puisque e est transcendant. Gérard obtient ainsi un résultat d'impossibilité. Comme Lützen l'a montré, l'intérêt pour ce type de résultats est caractéristique de la fin du XIXe siècle[82].

Notons encore qu'on vérifie facilement que $\sinh(x) \in E \Leftrightarrow \tanh(x) \in E$ [Vries 2021, p. 39]. Considérons dans un système de coordonnées Oxy un point P de coordonnées homogènes $(x; 0; 1)$. Comme $x = \tanh(OP)$ (cf. §4.1, fig. 6), on voit que P est constructible si et seulement si $x \in E$ et $|x| < 1$. On obtient ainsi une caractérisation précise des points « géométriques » (cf. note 57)[83]. Le plan dans lequel Gérard travaille est en fin de compte isomorphe au disque de Klein sur E et non sur $\mathbb{R}$.

79 [Gérard 1892, p. 86].

80 Cf. [Curtis 1990, p. 58]. On trouvera une autre preuve dans [Vries 2021, pp. 39-43]. Jagy affirme qu'une preuve est donnée dans un autre article de Mordukhaï-Boltosvkoï [Jagy 1995, p. 34]. Je n'ai cependant pas pu examiner cet article publié en 1934 en ukrainien. Le théorème et sa réciproque sont cités dans [Martin 1972, p. 482] sans démonstration et sans référence.

81 Rappelons que ce segment K est « l'unité naturelle » de longueur de Bolyai [1832, nº 33].

82 [Lützen 2009, p. 390].

83 Cette caractérisation est à mettre en relation avec la classification des plans de Hilbert (cf. [Hessenberg & Diller 1967, pp. 226-227]).

Gérard termine la deuxième partie de sa thèse en résolvant encore les constructions suivantes :

> 42. Etant données deux longueurs a et b, construire deux longueurs x et y telles que
>
> $$\begin{cases} \sinh x \pm \sinh y = \sinh a \\ \sinh x \sinh y \quad = \sinh^2 b \end{cases}$$
>
> 43. Construire une longueur x telle que
>
> $$\sinh^2 x = \sinh^2 a + \sinh^2 a'$$

Elles sont effectuées en utilisant un horicycle et justifiées à l'aide des formules établies dans le cas des constructions précédentes[84]. Il démontre aussi, en raisonnant dans l'espace, que la relation de Pythagore est vérifiée dans un triangle rectangle dont les côtés sont des arcs d'horicycle[85]. Il relève qu'il obtient un résultat déjà établi par Bolyai et Lobatchevski, mais sans utiliser, à la différence de ces derniers, l'horisphère. Encore une fois, Gérard établit un résultat connu par une méthode originale.

5. AIRE D'UN POLYGONE

Dans la dernière partie de sa thèse, intitulée « mesure des aires », Gérard expose une théorie de l'aire des polygones en géométrie non euclidienne. Ses recherches prennent place dans une réflexion sur la notion de figures équivalentes qui débute au début des années 1880 en Italie et se poursuivra une décennie plus tard en Allemagne. Elle trouvera son aboutissement dans les *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert [1899][86]. Gérard est le premier à étudier cette question dans le cas non euclidien[87]. Sa méthode sera reprise et perfectionnée par Liebmann [1905] et Anton Finzel [1912]. La notion fondamentale est celle de « polygones équivalents ». Cette notion a été explicitée tout d'abord par Jean-Marie Duhamel dans la deuxième partie de son traité *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement* [Duhamel 1866, pp. 445-450]. Elle a ensuite été reprise par différents mathématiciens

84 La seconde construction est résolue différemment, à l'aide d'un quadrilatère de Lambert, dans [Barbarin 1900, p. 9].

85 Gérard a auparavant démontré que la longueur d'un arc d'horicycle OA est égale à $2\sinh(OA/2)$ où OA désigne la longueur de la corde OA [Gérard 1892, p. 85].

86 On pourra se reporter à ce sujet à [Volkert 1999] et [Giovannini 2021].

87 Le calcul de l'aire d'un triangle en géométrie non euclidienne figure déjà chez Bolyai [1832, §39-42]. Sa méthode fait appel à l'équidistante et est très différente de celle de Gérard.

parmi lesquels il faut citer Stolz [1885, pp. 75-77][88]. Voici cette définition dans la version de Gérard :

> 1° On dit que deux polygones sont *équivalents* quand ils sont ou superposables ou composés d'un même nombre de polygones superposables chacun à chacun. [Gérard 1892, p. 100]

Elle est suivie des deux définitions suivantes :

> 2° On dit qu'un polygone A est la *somme* de plusieurs polygones B, C, D quand il est formé de polygones partiels respectivement équivalents à B, C, D.
>
> 3° On dit qu'un polygone A est *plus grand* qu'un polygone B, ou que B est *plus petit* que A, quand on peut trouver un troisième polygone C tel que A soit la somme de B et de C. [Gérard 1892, p. 100]

La dernière définition figure déjà chez Stolz [1885, p. 75]. Dans son traité, ce dernier démontre que l'on peut (en géométrie euclidienne) construire pour chaque triangle et chaque parallélogramme un parallélogramme équivalent ayant un angle et un côté donnés[89]. C'est donc aussi vrai pour un polygone qui se décompose en triangles. Il conclut que deux polygones sont toujours comparables [Stolz 1885, p. 77]. Sa preuve comporte cependant une lacune. Il admet en effet implicitement que deux décompositions différentes d'un polygone en triangles donnent le même parallélogramme. Cette lacune a été relevée en premier lieu par Killing dans un compte-rendu du livre de Stolz [Killing 1886, p. 186] puis ultérieurement par Schur [1894, p. 4][90]. Gérard la met aussi en évidence[91] :

> Comme on peut décomposer un polygone en plusieurs autres d'une infinité de manières, il y a lieu de démontrer que chacune des trois relations $A = B$, $A > B$, $A < B$ exclut les deux autres. [Gérard 1892, pp. 100-101]

---

88 Rappelons que Gérard connaissait les *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* de Stolz.

89 La preuve fait appel à l'axiome d'Archimède [Stolz 1885, pp. 75-76].

90 Cf. [Volkert 2010, p. 309] et [Giovannini 2021, pp. 665-672]. L'article de Schur est le résumé d'une conférence tenue le 23 janvier 1892 devant la Société des sciences naturelles de Dorpat mais publié seulement dans le 10e volume des comptes-rendus daté de 1894. Il expose une méthode pour résoudre cette difficulté. Elle comporte cependant des lacunes (cf. [Giovannini 2021, pp. 668-671]).

91 Gérard ne mentionne pas le compte-rendu de Killing. Il ne fait non plus pas allusion aux discussions ayant eu lieu à partir de 1881 en Italie sur le problème de l'équivalence des polygones et l'axiome dit « de De Zolt » (cf. [Giovannini 2021, pp. 662-664]).

Dans le cas de la géométrie non euclidienne, le problème peut être facilement résolu grâce à la notion de déficit. Si l'on ajoute à un polygone P un triangle T, le déficit du polygone ainsi formé est égal à la somme des déficits de P et T. Gérard en déduit que « si un polygone est la somme de plusieurs autres, son déficit est la somme des déficits des polygones partiels »[92]. Si $A > B$, le déficit de A est donc plus grand que celui de B. Par ailleurs si $A = B$, les déficits des deux polygones sont égaux. Les relations $A = B$ et $A > B$ s'excluent donc mutuellement.

Gérard note que le même raisonnement s'applique à la géométrie sphérique. Il ouvre ensuite une parenthèse pour montrer comment résoudre de manière analogue ce problème en géométrie euclidienne. Considérons dans un système d'axes orthonormés Oxy du plan les points $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2),\ldots,A_n(x_n;y_n)$. Supposons que ces points soient les sommets d'un polygone $A_1A_2\ldots A_n$ parcouru dans le sens positif (en ayant constamment à sa gauche l'intérieur du polygone) et posons

$$S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & x_1 \\ y_n & y_1 \end{vmatrix}.$$ [93]

Gérard démontre que l'expression S est indépendante de la position du polygone par rapport au système d'axes. Elle est positive et si un polygone est la somme de plusieurs polygones, sa S est égale à la somme des S des différents polygones[94]. Comme dans le cas non euclidien, les relations $A = B$ et $A > B$ sont alors incompatibles[95]. Pour être complet, il faudrait encore démontrer que deux polygones A et B sont toujours comparables, ce que

---

92 [Gérard 1892, p. 102]. Ce point sera repris plus en détail par Liebmann [1905, pp. 73-74] et Finzel [1912, pp. 266-268]. Ce dernier démontre que, quelle que soit la décomposition d'un polygone en triangles, la somme des déficits de ces triangles est égale au déficit du polygone.

93 Chacun des déterminants représente l'aire algébrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$ et $\overrightarrow{OA_{i+1}}$.

94 La preuve est donnée dans un cas particulier seulement. Le principe d'une preuve générale est donné dans [Gérard 1896-97b] puis détaillé dans [Niewenglowski & Gérard 1898]. Cf. aussi [Hilbert 1899, chapitre 4, §20]. Il est indispensable de démontrer que, quelle que soit la décomposition d'un polygone en triangles, la S du polygone est égale à la somme des S des triangles partiels.

95 Gérard réexposera sa méthode, d'une manière un peu différente et en la perfectionnant, dans diverses notes [Gérard 1895], [Gérard 1895-96], [Gérard 1896-97b], puis dans son *Cours de géométrie élémentaire* rédigé en collaboration avec Niewenglowski [Niewenglowski & Gérard 1898, pp. 343-354]. Gérard modifiera en particulier la définition de l'expression S et introduira un facteur 1/2, ce qui permet d'interpréter celle-ci comme une somme d'aires de triangles et non de parallélogrammes. Dans ces diverses notes, il insiste chaque fois sur le fait que sa méthode permet de démontrer

Gérard ne fait pas[96]. Il donne en revanche cette preuve dans le cas de la géométrie non euclidienne. Expliquons son raisonnement.

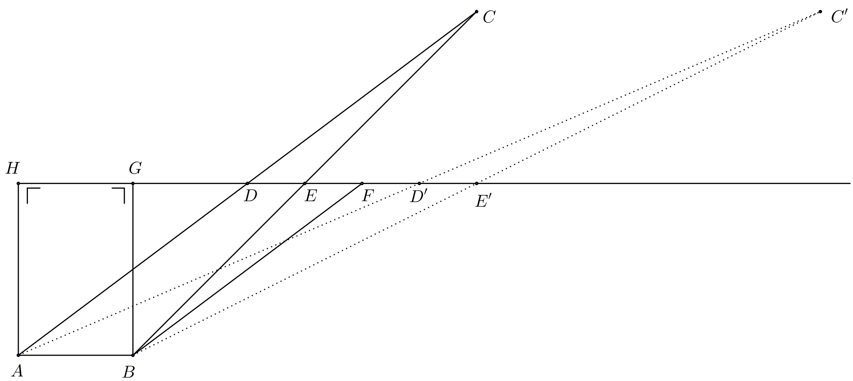

Figure 11. Construction d'un quadrilatère de Saccheri équivalent à un triangle

Considérons tout d'abord un triangle ABC (fig. 11). Soit D le milieu de AC et E le milieu de BC. Soit H le pied de la perpendiculaire à DE issue de A et G le pied de la perpendiculaire à DE issue de B. Soit encore F le point de DE tel que $DE = EF$. Le triangle ABC est équivalent au quadrilatère $ABFD$. Gérard démontre que ce quadrilatère est lui-même équivalent au

que deux polygones sont toujours comparables, et ceci indépendamment de la décomposition en triangles des polygones. Peu après la publication de la thèse de Gérard, d'autres mathématiciens utiliseront une méthode semblable, ramenant la comparaison des polygones à celle de nombres ou de segments (cf. [Rausenberger 1893], [Schur 1894] et [Veronese 1894-95] ainsi que [Amaldi 1900] et [Giovannini 2021, pp. 662-664]). Les trois premiers de ces articles sont mentionnés par Gérard dans une note publiée trois ans après sa thèse [Gérard 1895, p. 268]. Dans ses *Grundlagen der Geometrie* [Hilbert 1899, §20], Hilbert utilisera une méthode proche de celle exposée par Gérard dans son *Cours de géométrie élémentaire*. Dans la traduction française des *Grundlagen* de Laugel, ce manuel ainsi que la thèse sont cités dans une note signée de Hilbert lui-même [Hilbert 1900, p. 51]. Ce dernier souligne la parenté entre sa méthode et celle de Gérard. Une seconde note due à Laugel mentionne les autres contributions de Gérard sur ce sujet. Relevons encore que dans la 7e édition des *Grundlagen der Geometrie* de 1930, Hilbert modifiera de manière importante son traitement de la théorie de l'aire et introduira en particulier un nouveau théorème (le no 49) qui apparaît déjà chez Gérard [Niewenglowski & Gérard 1898, p. 347].

96 Le procédé de comparaison a été exposé par Stolz [1885, pp. 75-77]. Gérard l'explique dans [Niewenglowski & Gérard 1898, p. 344].

quadrilatère $ABGH$[97]. Dans le cas où les segments HG et DF sont disjoints, la preuve fait appel à l'axiome d'Archimède[98]. Il poursuit :

> Inversement, si sur la droite HF on prend un point quelconque D', en menant la droite AD' et en la prolongeant d'une longueur $D'C' = AD'$, on aura un triangle ABC' équivalent à $AHGB$, et par conséquent équivalent au triangle ABC[99]. De plus, on peut faire en sorte que le côté AC' du nouveau triangle soit égal à une longueur donnée l plus grande que AC : il suffit pour cela de prendre $AD' = \frac{l}{2}$.
>
> Ainsi, étant donnés deux triangles quelconques T et T', on pourra construire deux triangles ABC, ABC' [fig. 12] de même base AB, respectivement équivalents à T et T'. [Gérard 1892, p. 106]

Soient maintenant D et D' les milieux de AC et AC', E et E' les milieux de BC et BC' (fig. 12). Soit comme précédemment G et H les pieds des perpendiculaires à DE abaissées de B et A. Comme $ABGH$ est un quadrilatère de Saccheri, la perpendiculaire à AB en son milieu O coupe perpendiculairement DE en un point M. Pour la même raison, elle est aussi perpendiculaire à $D'E'$ en un point M'. Trois cas sont alors possibles selon que $OM = OM'$, $OM > OM'$ ou $OM < OM'$. Dans le premier cas, T et T' sont équivalents. Gérard démontre que dans le deuxième cas on peut trouver un triangle équivalent à T' contenu dans ABC et on a donc $T > T'$. Dans le troisième cas, on a $T < T'$. Deux triangles sont donc toujours comparables.

---

97 Gérard note un peu plus loin que le quadrilatère $ABGH$ est « birectangle et isocèle ». C'est donc ce que l'on appelle aujourd'hui un « quadrilatère de Saccheri ». Il relève aussi que les triangles AHD et BGF sont égaux. Il note qu'en retranchant ces deux triangles du quadrilatère $ABFH$, on pourrait déduire, comme Bolyai, que les quadrilatères $ABFD$ et $ABGH$ sont équivalents. Gérard n'admet cependant pas cette conception (remontant à Euclide) de l'équivalence. Il faut selon lui montrer que l'on peut décomposer les deux quadrilatères en « parties superposables chacune à chacune » [Gérard 1892, p. 105]. On voit apparaître ici la distinction entre polygones « égaux par addition » (« flächengleich ») et « égaux par soustraction » (« inhaltsgleich ») mise en évidence quelques années plus tard par Hilbert [1900, p. 52]. Notons encore que le procédé consistant à transformer un triangle en un quadrilatère de Saccheri équivalent apparaît déjà dans le cas de la sphère dans un article de Gerwien [1833] (cf. [Volkert 1999, pp. 15-16]). Volkert signale que ce procédé est ancien. Gérard ne cite pas l'article de Gerwien qu'il ne connaissait sans doute pas.

98 Gérard ne le mentionne pas explicitement. Il ne mentionne pas non plus un élément important, à savoir que les angles en A et B du quadrilatère $ABGH$ sont égaux à la moitié de la somme des angles du triangle ABC. Cette propriété sera utilisée par Liebmann [1905, p. 70].

99 On démontre facilement que le point d'intersection E' de la droite GH et du côté BC' est le milieu de ce côté.

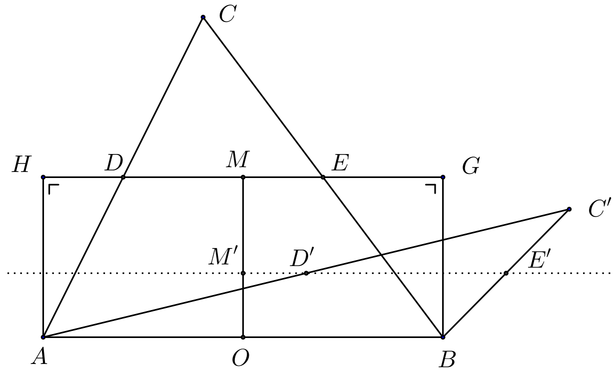

Figure 12. Construction de deux triangles de même base équivalents à deux triangles donnés

Gérard démontre ensuite, en les décomposant en triangles, que deux polygones A et B sont toujours comparables[100]. De plus le déficit de A est supérieur, égal ou inférieur à celui de B selon que $A > B$, $A = B$ ou $A < B$. Il conclut que la réciproque est vraie. On en déduit donc que deux polygones sont équivalents si et seulement s'ils ont le même déficit[101]. Gérard termine en expliquant comment définir le rapport de deux polygones et montre qu'il est égal au rapport de leurs déficits.

Comme indiqué ci-dessus, la théorie de l'aire de Gérard sera reprise par Liebmann [1905][102]. Son exposé est un peu différent de celui de Gérard. Il utilise le fait que chacun des angles en A et B du quadrilatère de Saccheri $ABGH$ associé à un triangle ABC est égal à la moitié de la somme des angles du triangle pour démontrer que deux triangles ayant le même déficit et un côté commun sont équivalents. Il prouve que le résultat reste vrai pour deux triangles quelconques ayant le même déficit. Il démontre enfin, en les décomposant en triangles, que deux polygones de même déficit sont équivalents. L'ensemble du problème sera repris par Finzel pour les trois géométries (euclidienne, non euclidienne et sphérique) [Finzel 1912]. À l'instar de Hilbert, Finzel ne fait pas appel à l'axiome d'Archimède et met au premier plan la notion de figures « égales par soustraction » (« inhaltsgleich »).

100 La preuve est incomplète.

101 Cette conclusion n'est pas mise en évidence par Gérard. Elle est en revanche soulignée par Liebmann [1905, p. 75].

102 Liebmann cite la thèse de Gérard [Liebmann 1905, p. 75]. Sa méthode est étudiée dans [Volkert 1999, pp. 21-22].

6. RÉCEPTION DE LA THÈSE DE GÉRARD

La thèse de Gérard a fait l'objet d'un rapport de Poincaré et de quelques comptes-rendus. Commençons par le rapport de Poincaré :

> Dans le travail qu'il soumet au jugement de la Faculté, M. Gérard s'est proposé de présenter sous une forme nouvelle et plus élémentaire la suite de déductions logiques qui constitue ce que l'on appelle la géométrie non-euclidienne. Il semble s'être surtout attaché à n'employer que des procédés de raisonnement analogues à ceux qui sont familiers à Euclide. Les notations et les méthodes du calcul infinitésimal sont donc bannies de son exposition ; pas complètement cependant car on trouve dans la chaîne de ses déductions plusieurs passages à la limite qu'il lui aurait été d'ailleurs très difficile d'éviter. [Gispert 1991, p. 354]

Poincaré met clairement en évidence les caractéristiques de la méthode de Gérard : retour à une approche synthétique proche de celle d'Euclide et refus d'utiliser le calcul différentiel comme certains de ses prédécesseurs. Elle reste cependant tributaire de passages à la limite et ne s'affranchit pas totalement de la notion de nombre réel. L'utilisation des fonctions hyperboliques nécessite aussi l'utilisation de cette notion. Ce n'est que quelques années plus tard que les géomètres, à la suite de Hilbert et de son calcul segmentaire [Hilbert 1899, pp. 32-39], commenceront à développer une géométrie analytique non numérique. La première phrase montre que la géométrie non euclidienne est considérée comme une théorie récente (« ce que l'on appelle ») et dont l'intérêt est avant tout logique. Poincaré poursuit avec un bref résumé de la matière traitée dans l'ouvrage. Il juge la première partie la plus intéressante. Il conclut :

> La thèse de M. Gérard ne nous apprend rien d'essentiellement nouveau sur la géométrie non-euclidienne ; mais le travail est consciencieux et dénote de sérieuses qualités d'esprit. Le mode d'exposition est original et à certains points de vue préférable à ceux qui sont employés dans la plupart des ouvrages antérieurs. [Gispert 1991, p. 355]

Tout en reconnaissant les qualités et l'originalité de la thèse de Gérard, Poincaré apparaît peu intéressé par des travaux qui se proposent de reconstruire une théorie connue en suivant une autre voie et en lui donnant des fondements plus solides. L'intérêt de la troisième partie en particulier semble lui avoir échappé. L'essentiel est pour lui de trouver de nouveaux résultats.

Examinons maintenant un compte-rendu paru dans le *Journal de mathématiques spéciales* et dû à la plume du rédacteur Gohierre de Longchamps

[Gohierre de Longchamps 1893]. Ce dernier résume simplement le travail de Gérard en le qualifiant d'excellent. Le principal intérêt de ce compte-rendu est de nous donner le point de vue d'un mathématicien « ordinaire » sur la géométrie non euclidienne. L'auteur commence en écrivant que « tout le monde sait aujourd'hui ce qu'il faut entendre par la Géométrie non euclidienne ». Cette affirmation confirme qu'au début des années 1890, il s'agit d'une théorie encore récente mais néanmoins connue. Cela ne signifie cependant pas que son intérêt soit pleinement reconnu par la communauté mathématique. Gohierre de Longchamps conclut en effet son compte-rendu en écrivant :

> Je n'ai jamais été [...] un partisan de la Géométrie non euclidienne, parce que je ne crois pas utile de perdre de vue, dans les spéculations mathématiques, le champ réel. Si l'on consent à l'abandonner à un instant donné. et l'on est parfois contraint de le faire, ce doit toujours être avec l'arrière-pensée de revenir aux applications ; aussi, l'excursion faite dans le champ idéal doit, pour être vraiment digne de notre attention, servir à des faits positifs, susceptibles d'être utilisés dans la géométrie Euclidienne et dans toutes les sciences qui s'y rattachent, la mécanique, l'astronomie, etc. Toute autre chose ne me paraît être qu'un jeu d'esprit qui, malheureusement, pour intéressant qu'il soit, nous prend un temps et des forces que nous pourrions peut-être mieux employer.
> [Gohierre de Longchamps 1893, p. 158]

La géométrie non euclidienne est présentée comme une construction intellectuelle apparemment dépourvue d'applications et qui ne mérite pas qu'on s'y attarde. L'auteur défend une conception utilitaire de la géométrie. Ce jugement montre que la démarche de Gérard suscita peu d'intérêt de la part de certains de ses collègues. Au plan international, sa thèse a malgré tout été considérée comme un ouvrage important puisqu'elle obtint une mention honorable lors de la première édition du prix Lobatchevski organisée en 1897 par la Société physico-mathématique de Kazan[103]. Le premier prix fut à cette occasion attribué au troisième volume de la *Theorie der Transformationsgruppen* de Lie[104].

Comme nous l'avons vu, la thèse de Gérard a suscité l'intérêt de Liebmann, en particulier la dernière partie consacrée à la théorie non euclidienne de l'aire. À côté de Hilbert, Amaldi [1900, pp. 114-115] mentionne aussi les recherches de Gérard sur ce sujet. Sa méthode pour fonder la trigonométrie non euclidienne a pour sa part retenu l'attention de plusieurs

103 Cf. [Vassilief 1898]

104 Neuf ouvrages au total furent proposés. À côté de la thèse de Gérard, deux autres ouvrages obtinrent une mention honorable : *Lezioni di Geometria intrinseca, Napoli 1896* d'Ernesto Cesaro et *L'hyperespace à $n-1$ dimensions, Paris 1892* de Georges Fontené.

mathématiciens. Elle a été reprise par Barbarin [1902] et Coolidge [1909] et adaptée à la « géométrie non euclidienne de Riemann » par Mansion [1895]. Cette appellation désigne la forme sphérique de cette géométrie. Relevons enfin que le problème des constructions a continué à faire l'objet de recherches au XXe siècle.

7. CONCLUSION

La thèse de Gérard traite de manière souvent originale d'une grande variété de questions. Dans le domaine des constructions, elle résout en particulier plusieurs problèmes nouveaux. Publiée au début de la dernière décennie du XIXe siècle, une décennie qui verra des changements majeurs dans le domaine des fondements de la géométrie, elle témoigne de l'émergence de nouvelles préoccupations. Gérard montre une sensibilité à certaines questions que l'on retrouve à cette époque en Italie ou en Allemagne. En France il s'agit en revanche d'un essai isolé. Le second compte-rendu cité précédemment est à cet égard significatif. Seul Barbarin semble avoir été véritablement intéressé par les recherches de Gérard[105]. La question demeure ouverte de savoir pour quelles raisons ce dernier a choisi de traiter un sujet apparemment peu considéré. On peut imaginer que l'importance de la géométrie dans l'enseignement secondaire et l'intérêt pour des problèmes de fondement l'ont conduit à ce choix. Les très nombreuses publications pédagogiques de Gérard confortent cette hypothèse. Il insiste en effet régulièrement sur la nécessité de présenter des démonstrations correctes et de ne pas se fier à l'intuition[106]. Comme nous l'avons vu, il fait preuve d'un très grand soin dans la plupart de ses preuves.

La thèse de Gérard constitue un ouvrage de transition entre les travaux des inventeurs de la géométrie non euclidienne et les recherches purement axiomatiques de la fin du XIXe et du début du XXe siècle. C'est à ce titre qu'elle mérite de retenir notre intérêt. Après avoir étudié le moment de son invention, il convient d'examiner la manière dont une théorie est reprise et enrichie de nouveaux résultats par les générations suivantes.

---

105 Il parle de la « belle thèse de M. Gérard » [Barbarin 1900, p. 3].

106 L'intérêt de Gérard pour Hilbert a été mentionné ci-dessus. Il accueillit aussi avec beaucoup d'intérêt les travaux en logique de Peano et Burali-Forti [Gérard 1896-97a]. Un article plus tardif intitulé « Perversion du sens déductif » témoigne de la constance de cette préoccupation [Gérard 1907-1908]. Dans la première partie de cet article, intitulée « Abus de l'intuition », Gérard critique certaines preuves du postulat des parallèles, dues notamment à Legendre.

Celles-ci proposent de nouvelles approches tenant compte des préoccupations de l'époque. Le choix de fonder la trigonométrie à partir de la fonction équidistante et de définir les fonctions trigonométriques d'une manière détournée sont les éléments les plus originaux de la reconstruction proposée par Gérard. À ceci s'ajoutent les diverses constructions permettant de déterminer les longueurs constructibles à la règle et au compas et la volonté de se restreindre à celles-ci. Les solutions compliquées de Gérard seront à leur tour simplifiées par d'autres mathématiciens. Notons enfin que, à la différence des premiers traités sur la géométrie non euclidienne qui paraîtront à partir de 1900[107], la thèse de Gérard constitue un authentique travail de recherche contenant un important matériau nouveau et posant une série de questions d'ordre axiomatique. Jointe aux nombreuses publications pédagogiques de son auteur, c'est aussi un témoignage de l'activité mathématique d'un enseignant de lycée à la fin du XIXe siècle.

Remerciements

Je remercie les deux rapporteurs anonymes pour leurs remarques et suggestions qui m'ont permis en particulier d'enrichir la bibliographie. Il va de soi que le contenu de cet article n'engage que son auteur.

RÉFÉRENCES

Aczél (János)

[1966] *Lectures on functional equations and their applications*, Cambridge, MA : Academic Press, 1966.

Amaldi (Ugo)

[1900] Sulla teoria dell'equivalenza, dans Enriques (Federigo), éd., *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna : Zanichelli, 1900, p. 103–142.

Barbarin (Paul)

[1900] Etudes de géométrie analytique non euclidienne, *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 60 (1900), p. 1–168.

[1902] *La géométrie non euclidienne*, Paris : Naud, 1902.

Battaglini (Giuseppe)

[1867] Sulla geometria immaginaria di Lobatchewsky, *Giornale di Matematiche*, 5 (1867), p. 217–231.

107 Cf. [Voelke 2005, pp. 383-385].

Beltrami (Eugenio)
[1868] Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea, *Giornale di Matematiche*, 6 (1868), p. 284–312.
[1889] Un precursore italiano di Legendre e di Lobatschewski, *Atti della reale Accademia dei Lincei*, 5 (1889), p. 441–448.

Bolyai (János)
[1832] *Appendix, scientiam spatii absolute veram exhibens*, Maros-Vásárhely : J. et S. Kali, 1832.

Bonola (Roberto)
[1955] *Non-euclidean Geometry, Traduction anglaise de H. S. Carslaw avec des appendices*, New York : Dover Publications, 1955.

Brasseur (Roland)
[2022] Dictionnaire des professeurs de mathématiques en classe de mathématiques spéciales entre 1852 et 1914, 2022 ; URL `https://tinyurl.com/uavjbebu`.

Cauchy (Augustin-Louis)
[1821] *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, 1re partie. Analyse algébrique*, Paris : Debure frères, 1821.

Coolidge (Julian Lowell)
[1909] *The Elements of non-euclidean geometry*, Oxford : Clarendon Press, 1909.

Curtis (Robert)
[1990] Duplicating the cube and other notes on constructions in the hyperbolic plane, *Journal of Geometry*, 39 (1990), p. 38–59.

Duhamel (Jean-Marie)
[1866] *Des méthodes dans les sciences de raisonnement, deuxième partie*, Paris : Gauthier-Villars, 1866.

Engel (Friedrich) & Stäckel (Paul)
[1895] *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss*, Leipzig : Teubner, 1895.

Engel (Friedrich)
[1898] Zur nichteuklidischen Geometrie. 1. Die Construction der Parallelen in der nichteuklidischen Geometrie, *Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 50 (1898), p. 181–187.
[1899] *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij, zwei geometrische Abhandlungen aus dem russischen übersetzt, zweiter Theil : Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften.*, Leipzig : Teubner, 1899.

Finzel (Anton)
[1912] Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie, *Math. Annalen*, 72 (1912), p. 262–284.

Flye Sainte-Marie (Camille)
[1871] *Etudes analytiques sur la théorie des parallèles*, Paris : Gauthier-Villars, 1871.

GAUSS (Carl Friedrich)
[1900] *Werke, vol. 8*, Göttingen : Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1900.

GÉRARD (Louis)
[1892] *Sur la géométrie non euclidienne*, Paris : Gauthier-Villars, 1892.
[1893] Sur la géométrie non euclidienne, *Nouvelles Annales de mathématiques, troisième série*, 12 (1893), p. 74–84.
[1895] Sur le postulat relatif à l'équivalence des polygones, considéré comme corollaire du théorème de Varignon, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 23 (1895), p. 268–269.
[1895-96] Sur la mesure des polygones, *Bulletin de mathématiques élémentaires*, 1 (1895-96), p. 100–102.
[1896-97a] Logique mathématique, *Bulletin de mathématiques élémentaires*, 2 (1896-97), p. 17–20.
[1896-97b] Sur l'équivalence, *Bulletin de mathématiques élémentaires*, 2 (1896-97), p. 273–276.
[1897] Construction du polygone régulier de 17 côtés au moyen du seul compas, *Math. Annalen, Leipzig*, 48 (1897), p. 390–392.
[1900–1901] Axiomes géométriques, *Bulletin de Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires*, 6 (1900–1901), p. 177–181.
[1907-1908] Perversion du sens déductif, *Bulletin de Sciences Mathématiques et Physiques élémentaires*, 13 (1907-1908), p. 117–121.

GERWIEN (Paul)
[1833] Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugelfläche in dieselben Stücke, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 10 (1833), p. 235–240.

GIOVANNINI (Eduardo)
[2021] David Hilbert and the foundations of the theory of plane area, *Archive for History of Exact Sciences*, 75 (2021), p. 649–698.

GISPERT (Hélène)
[1982] *Camille Jordan et les fondements de l'analyse*, Thèse, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1982.
[1991] *La France mathématique, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, Paris : Société française d'histoire des sciences et des techniques mathématiques et Société mathématique de France, Paris, 1991.

GOHIERRE DE LONGCHAMPS (Gaston Albert)
[1893] Sur la Géométrie non Euclidienne, par M. L. Gérard, *Journal de mathématiques spéciales* (4) 2 (1893), p. 156–158.

GRAY (Jeremy)
[1989] *Ideas of space, Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic*, Oxford : Clarendon Press, 1989.

GREENBERG (Marvin J.)
[1979] On J. Bolyai's parallel construction, *Journal of Geometry*, 12 (1979), p. 45–64.

HANDEST (Frans)
[1956] Constructions in hyperbolic geometry, *Canadian Journal of Mathematics*, 8 (1956), p. 389–394.

HARTSHORNE (Robin)
[2000] *Geometry : Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

HESSENBERG (Gerhard) & DILLER (Justus)
[1967] *Grundlagen der Geometrie*, Berlin : Walter de Gruyter, 1967.

HILBERT (David)
[1899] *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1899.
[1900] *Les principes fondamentaux de la géométrie*, Paris : Gauthier-Villars, 1900 ; traduction de L. Laugel.
[1903] Neue Begründung der Bolyai-Lobatschefskijschen Geometrie, *Math. Annalen*, 57 (1903), p. 137–150.
[2015] *David Hilbert Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*, éd. par K. Volkert, Berlin : Springer, 2015.

HOUËL (Jules)
[1867] *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions des éléments d'Euclide*, Paris : Gauthier-Villars, 1867.

JAGY (William C.)
[1995] Squaring Circles in the Hyperbolic Plane, *The Mathematical Intelligencer*, 17 (1995), p. 31–36.

KILLING (Wilhelm)
[1885] *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung*, Leipzig : Teubner, 1885.
[1886] Rezension : Otto Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Erster Theil, *Zeitschrift für Mathematik und Physik. Historisch-literarische Abtheilung*, 31 (1886), p. 182–187.

KLEIN (Felix)
[1871] Ueber die sogennante Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen*, 4 (1871), p. 573–625.

LAMBERT (Johann Heinrich)
[1786] Theorie der Parallellinien, *Magazin für reine und angewandte Mathematik*, 1786, p. 137–164.

LIEBMANN (Heinrich)
[1901] Die Construction des geradlinigen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln, *Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 53 (1901), p. 477–491.
[1904] Ueber die Begründung der hyperbolischen Geometrie, *Math. Annalen*, 59 (1904), p. 110–128.
[1905] *Nicht-Euklidische Geometrie*, Leipzig : Göschen, 1905.
[1907] Elementare Ableitung der nichteuklidischen Geometrie, *Sitzungsberichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig*, 59 (1907), p. 187–210.

Lützen (Jesper)

[2009] Why was Wantzel overlooked for a century? The changing importance of an impossibility result, *Historia Mathematica*, 36 (2009), p. 374–394.

Mansion (Paul)

[1890] Analyse des recherches du P. Saccheri, s. j., sur le postulatum d'Euclide, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 14B (1890), p. 46–59.

[1895] *Principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann*, Paris : Gauthier-Villars, 1895.

Martin (George W.)

[1972] *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, New York : Intext Educational Publishers, 1972.

Mordukhaï-Boltovskoï (Dmitri)

[1927] In mem. Lobatchevski, vol. 2, 1927, chap. Sur les constructions géométrique dans l'espace de Lobatchevski (en russe), p. 67–82.

Nestorovitch (Nikolaï)

[1949a] Sur l'équivalence d'un hypercycle et d'un cercle ordinaire dans les constructions dans le plan de Lobatchevski (en russe), *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 69 (1949), p. 731–735.

[1949b] Constructions géométriques avec un compas horicyclique et une règle dans le plan de Lobatchesvki (en russe), *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 66 (1949), p. 1047–1050.

Niewenglowski (Boleslas) & Gérard (Louis)

[1898] *Cours de géométrie élémentaire (I. Géométrie plane)*, Paris : Carré et Naud, 1898.

Perron (Oskar)

[1962] *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene*, Stuttgart : Teubner, 1962.

Poincaré (Henri)

[1891] Les géométries non euclidiennes, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 2, no 23 (1891), p. 769–774.

Rausenberger (Otto)

[1893] Das Grundproblem der Flächen- und Rauminhaltslehre, *Math. Annalen*, 43 (1893), p. 601–604.

Rouché (Eugène) & de Comberousse (Charles)

[1883] *Traité de géométrie, seconde partie, géométrie dans l'espace (cinquième édition)*, Paris : Gauthier-Villars, 1883.

Saccheri (Gerolamo)

[2014] *Euclid Vindicated from Every Blemish*, Basel : Birkhäuser, 2014; Edité et commenté par V. De Risi.

Schur (Friedrich)

[1894] Ueber den Flächeninhalt geradlinig begrenzter ebener Figuren, *Sitzungsberichte der Dorpater Naturforschenden Gesellschaft,* 10 (1894), p. 2–6.

[1901] Ueber die Grundlagen der Geometrie, *Math. Annalen,* 55 (1901), p. 265–292.

[1909] *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig : Teubner, 1909.

Simon (Max)

[1890] Elementargeometrische Ableitung der Parallelenconstruction in der absoluten Geometrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik, Berlin,* 104 (1890), p. 84–86.

[1892] Die Trigonometrie in der absoluten Geometrie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* 109 (1892), p. 187–198.

Smogorjevskiï (A. S.)

[1951] *Constructions géométriques dans le plan de Lobatchevski (en russe),* Moscou, 1951.

Stolz (Otto)

[1885] *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik, erster Theil : Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen,* Leipzig : Teubner, 1885.

Szász (Paul)

[1952] Verwendung einer klassischen Konfiguration Johann Bolyai's bei der Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie in der Ebene, *Acta Scientiarum Mathematicarum,* 14 (1952), p. 174–178.

[1954] Diverses présentations élémentaires de la trigonométrie hyperbolique, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* 5 (1954), p. 105–116.

Tilly (Joseph Marie De)

[1870] Etudes de mécanique abstraite, *Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique,* 21 (1870), p. 1–98.

[1879] Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique, *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux,* 3 (1879), p. 1–190.

Vassilief (Alexandre)

[1898] Prix Lobatchefsky, *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Historisch-litterarische Abteilung,* 43 (1898), p. 121–122.

Veronese (Giuseppe)

[1894-95] Dimostrazione della proposizione fondamentale dell'equivalenza delle figure, *Atti del Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti,* 7(6) (1894-95), p. 421–437.

Veronese (Giuseppe) & Gazzaniga (Paolo)

[1900] *Elementi di geometria ad uso dei ginnasi e licei,* Padova : Fratelli Drucker, 1900.

Voelke (Jean-Daniel)
[2005] *Renaissance de la géométrie non euclidienne entre 1860 et 1900,* Bern : Peter Lang, 2005.

Volkert (Klaus)
[1999] Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone : einige Schritte in der Mathematisierung eines anschaulichen Konzeptes, *Mathematische Semesterberichte,* 46 (1999), p. 1–28.
[2010] Le tout est-il toujours plus grand que la partie ?, *Revue d'Histoire des Mathématiques,* 16, 2 (2010), p. 295–314.

Vries (Ruben De)
[2021] *Compass and Straightedge Constructions in the Hyperbolic Plane,* Thèse, Utrecht University, Faculty of Science, 2021 ; Master's Thesis.

Wantzel (Pierre Laurent)
[1837] Recherches sur le moyen de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 2 (1837), p. 117–127.

Wilson (J. M.)
[1868] Euclide come testo di geometria elementare, *Giornale di Matematiche,* 6 (1868), p. 361–368.