Revue d'histoire des mathématiques
30 (2024), p. 261–291
doi:10.24033/rhm.317

LES TRAVAUX DE LAGUERRE SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES ET L'INFLUENCE HERMITIENNE

Yannick Vincent

Résumé. — Il existe un certain nombre de points communs entre Edmond Laguerre et Charles Hermite, deux mathématiciens français du XIX^e siècle, tant du point de vue de leurs parcours au sein des institutions mathématiques du XIX^e siècle que de leurs travaux. Ils se sont tous les deux intéressés au sujet des équations polynomiales et nous décrivons dans cet article le rôle qu'a pu jouer Hermite dans les travaux de Laguerre. Nous nous attachons ainsi à décrire l'ensemble des résultats publiés par Laguerre sur le sujet tout en pointant l'importance tant quantitative que qualitative de Hermite. Une dernière partie permettra de saisir les points communs et les similarités entre les approches de Hermite et de Laguerre. Plus généralement, il s'agira de montrer qu'ils ont des conceptions similaires tant sur la question de la généralité en mathématiques que sur les interactions entre algèbre et analyse par exemple.

Abstract. — Edmond Laguerre and Charles Hermite are both French mathematicians of the 19th century. They shared a common professional background in various institutions and the way they did mathematics. They were both interested in the subject of polynomial equations and we shall see in this article what role Hermite played in Laguerre's works. We describe how the results published by Laguerre emphasized the importance of Hermite. A last part deals with common points and similarities between the approaches of Laguerre and

Texte reçu le 5 octobre 2022, version revisée reçue le 13 juillet 2023, accepté le 19 septembre 2023.

Y. Vincent, Laboratoire LinX – École polytechnique.
Courrier électronique : `yannickvincent@ecomail.fr`

Classification mathématique par sujets (2010) : 01A55, 01A85.
Mots clefs : Laguerre, Hermite, equations, polynoms, roots, approximations, history of algebra.
Key words and phrases. — Laguerre, Hermite, équations, polynômes, racines, approximations, histoire de l'algèbre.

Hermite. More globally, we show that they had comparable conceptions of various issues: about the question of generality in mathematics and about interactions between calculus and algebra.

INTRODUCTION

Pour bon nombre de mathématiciennes et de mathématiciens aujourd'hui, un des éléments rapprochant Charles Hermite d'Edmond Laguerre est sans doute qu'ils ont tous les deux donné leur nom à une famille de polynômes. Ceux de Hermite vérifient l'équation différentielle $y'' - xy' + ny = 0$ tandis que ceux de Laguerre vérifient l'équation différentielle $xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$. Ils ont en fait bien d'autres points communs. Tous deux ont intégré l'École polytechnique, en tant qu'élèves, à seulement un peu plus d'une dizaine d'années d'intervalle[1]. Hermite y a été répétiteur de 1848 à 1853 puis professeur de 1869 à 1876 et Laguerre y a été répétiteur de 1864 à 1886. Nous savons qu'il pouvait arriver à Laguerre de remplacer Hermite à l'amphithéatre en cas d'absence[2] et qu'Hermite reprenait des démonstrations de Laguerre dans son propre cours[3]. Ils se rencontraient aussi dans le cadre de la Société mathématique de France dont ils étaient tous les deux membres [Hermite & Mittag-Leffler 1984, p. 141].

Tous les deux étaient également reconnus par le monde académique de leur temps en devenant, par exemple, membres de l'Académie des Sciences dans la section Géométrie. Hermite est ainsi entré à l'Académie des Sciences en 1856 à l'âge de 34 ans, rejoint plus tard par Laguerre en 1885 à l'âge de 51 ans. Entre 1856 et 1885, un grand nombre de notes publiées par Laguerre dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* ont été présentées en séance par Hermite[4]. Hermite a d'ailleurs soutenu la

---

1 Hermite fait partie de la promotion 1842 et Laguerre de la promotion 1853 de l'École polytechnique.

2 Poincaré explique par exemple dans une lettre envoyée à sa mère : « Une fois Hermite était malade et Laguerre nous faisant l'amphi nous fit une certaine question. Mais comme il écrit très mal à la planche, je n'avais pu prendre de notes ». [Rollet 2017, p. 84].

3 Plus précisément, Stieltjes écrit à Hermite dans une lettre datée du 2 juillet 1889 : « il semble qu'il doit être plus facile d'obtenir les théorèmes de Fuchs que les développements en séries, c'est aussi ce qui résulte des démonstrations de Laguerre et de Goursat que vous donnez dans votre Cours » [Hermite & Stieltjes 1898, p. 292].

4 Chaque note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* devait être présentée par un membre de l'Académie des Sciences. S'il n'était pas nécessaire de connaître un académicien pour publier, la proximité entre Hermite et Laguerre peut

candidature de Laguerre à l'Académie. Il indique par exemple dans une lettre à Gosta Mittag-Leffler datée de 1881 avoir « l'intention de proposer à la section de Géométrie de mettre en seconde ligne et seul [derrière Darboux], Mr Laguerre qui a beaucoup grandi depuis quelques temps par les recherches algébriques » [Hermite & Mittag-Leffler 1984, p. 110].

Cette même correspondance témoigne de la proximité personnelle entre les deux mathématiciens, lorsqu'Hermite écrit qu'il est « en [rapports d'amitié] avec Mr Laguerre qui est un excellent homme, et aussi un géomètre du plus rare mérite » [Hermite & Mittag-Leffler 1985, p. 105] puis que « la mort de Mr Laguerre, avec qui [il] était lié affectueusement depuis longtemps [le] prive malheureusement d'un appui important » [Hermite & Mittag-Leffler 1985, p. 128]. Quelques années plus tard, Hermite sera d'ailleurs l'un des éditeurs des *Œuvres* de Laguerre. Réciproquement, Eugène Rouché, camarade de Laguerre à l'École polytechnique, note que Laguerre « professait une si légitime admiration » pour Hermite [Rouché 1887, p. 148].

A la lecture des *Œuvres* de Laguerre, outre le fait qu'Hermite est l'un des éditeurs, on constate que le nom de Hermite apparaît très souvent. Nous reviendrons sur le fait que c'est même le nom le plus cité par Laguerre dans ses travaux. Cela traduit là aussi une certaine proximité, Laguerre faisant par exemple mention de discussions avec Hermite. Dans [Laguerre 1882a], il écrit par exemple :

> M. Hermite m'a dit tenir de M. Genocchi que la méthode généralement attribuée à Plana appartient en réalité à F. Chio. [Laguerre 1882a, p. 161]

De même, dans [Laguerre 1882b], Laguerre écrit :

> Je tiens de M. Hermite, à qui j'avais communiqué ces résultats, qu'il les avait obtenu de son côté et par la même voie. [Laguerre 1882b, p. 636]

Ces quelques éléments illustrent non seulement la présence de Hermite dans les travaux de Laguerre par le biais de citations mais également la collaboration et les échanges directs entre les deux mathématiciens.

On peut toutefois se demander pourquoi Laguerre cite autant Hermite alors que leurs travaux portent globalement sur des domaines assez différents. Laguerre a en effet publié majoritairement des articles en Géométrie tandis que ce sujet n'est que peu traité par Hermite. Inversement, Hermite s'est davantage intéressé à la théorie des nombres, sujet fort peu exploré

---

toutefois expliquer que le nom de Hermite revienne souvent parmi ceux qui présentent les notes de Laguerre avant sa propre élection [Crosland 1992, p. 288-293].

par Laguerre. En fait, dans les travaux de Laguerre, les références à Hermite sont surtout importantes à propos d'un sujet spécifique, celui des équations polynomiales[5]. Cela n'est d'ailleurs pas étranger au fait qu'ils ont fréquenté le même cadre scolaire. La résolution pratique des équations et l'approximation des racines avaient en effet une place importante dans la formation mathématique de l'École polytechnique et des classes préparatoires. On peut notamment citer les théorèmes de Hermite et de Laguerre qui portent sur les équations numériques, c'est-à-dire sur les équations résolues de manière approchée. Laguerre s'est beaucoup intéressé à ce sujet à partir des années 1870 lorsqu'il est devenu répétiteur à l'École polytechnique et examinateur du concours d'admission. De son côté, Hermite a su trouver et démontrer un résultat concernant les racines des équations dont les coefficients forment une progression arithmétique. Il l'a fait alors qu'il était encore élève en classes préparatoires. Nous aurons l'occasion d'y revenir lorsque nous aborderons la question des points communs entre les deux mathématiciens mais il est clair que la thématique des équations polynomiales est un sujet qui a intéressé tant Hermite que Laguerre. Notre objectif sera alors de comprendre pourquoi Laguerre fait autant de références à Hermite sur ce sujet. Il s'agira, d'une part, de présenter les différents articles de Laguerre au sujet des équations et, d'autre part, de capter l'influence et l'importance de Hermite sur ces travaux.

Les deux premières parties de notre article sont essentiellement factuelles. La première présente un panorama général des travaux de Laguerre et revient sur l'importance quantitative de Hermite dans ces travaux. La seconde partie apporte des détails sur les résultats dûs à Laguerre au sujet des équations numériques et explicite l'objet des références à Hermite. La dernière partie vise enfin à présenter les points de convergence entre les deux mathématiciens, tant dans leurs objets d'étude que dans leur conception des mathématiques. L'exemple des équations numériques permettra notamment d'illustrer cette convergence de point de vue.

1. PANORAMA GÉNÉRAL DES TRAVAUX DE LAGUERRE ET DE L'INFLUENCE HERMITIENNE

1.1. *Les mathématiques de Laguerre*

Publiées en 1898 par Charles Hermite, Henri Poincaré et Eugène Rouché, les *Œuvres* de Laguerre contiennent 148 articles, classés en trois

[5] Les deux mathématiciens ont aussi tous les deux travaillé sur les fonctions elliptiques et Laguerre a régulièrement cité Hermite à ce sujet (les articles de Laguerre sur la questions sont classés dans la rubrique Calcul intégral de ses *Œuvres*). Nous n'aborderons néanmoins pas cette thématique ici.

parties : 45 dans la rubrique « Algèbre », 21 dans celle de « Calcul intégral » et 82 en « Géométrie ». À cela, nous pouvons aussi ajouter un article de Charles Hermite intitulé « Sur un mémoire de Laguerre concernant les équations algébriques » et inséré à la fin du premier volume des *Œuvres*. Cette présence de Hermite dans les *Œuvres* de Laguerre renforce encore un peu plus l'impression de proximité évoquée en introduction. Cela signifie en outre que si Laguerre a été influencé par les mathématiques de Hermite, ce dernier s'est, réciproquement, intéressé aux travaux du premier. Deux articles de Laguerre sont d'ailleurs cités à plusieurs reprises par Hermite, à savoir [Laguerre 1877] et [Laguerre 1880b], en particulier au moment de l'édition des *Œuvres*.

Dans le cadre de cet article, et sauf mention explicite du contraire, les termes Algèbre, Calcul intégral et Géométrie désigneront les trois parties des *Œuvres*. Les travaux de Laguerre en Géométrie ont globalement précédé ceux d'Algèbre et de Calcul intégral[6]. Après avoir rédigé quelques articles alors qu'il était encore élève (ces articles portent sur la théorie des foyers), Laguerrre a recommencé à publier en 1865. Entre temps, de 1853 à 1864, il s'est écoulé une décennie où, engagé dans l'armée, il ne publie aucun texte mathématique. En 1864, il obtint alors un poste de répétiteur de Géométrie descriptive à l'École polytechnique, moment qui correspond à une reprise de ses publications. Dans un premier temps, jusqu'en 1874, ses articles sont en fait très majoritairement classés en Géométrie et ne seront donc que peu utiles dans le cadre de notre étude sur les équations polynomiales[7]. À partir de 1874, Laguerre s'est en revanche d'avantage intéressé à des sujets d'Algèbre et de Calcul intégral tout en continuant à publier des articles de Géométrie pendant quelques années. C'est ainsi qu'en 1874, il a publié son premier article sur les équations numériques dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* : « Sur une formule nouvelle permettant d'obtenir, par approximations successives, les racines d'une équation dont toutes les racines sont réelles ».

À partir de là, Laguerre a publié régulièrement des articles dont le titre comporte les mots « équations numériques », ce sujet constituant alors une sorte de fil rouge dans ses travaux. Autour de ce fil rouge, il est de plus possible de distinguer des périodes de trois ou quatre années durant lesquelles Laguerre s'est consacré à un sujet plus particulier. Par exemple, à la fin des années 1870, entre 1877 et 1880, il a publié plusieurs articles

---

6 Pour plus d'informations concernant les travaux de Laguerre, voir [Vincent 2019].

7 De 1852 à 1875, 51 articles sur 62 ont été classés dans la rubrique Géométrie des *Œuvres*.

sur les développements des fonctions en séries ou en fractions continues. D'ailleurs, l'idée que ce groupe d'articles constitue un sujet de recherche à part est confirmé par le fait que les éditeurs des *Œuvres* ont choisi de tous les rassembler à la fin de la rubrique Algèbre. Ensuite, de 1880 à 1884, là où Laguerre a rédigé essentiellement des articles d'Algèbre, on retrouve de nombreux articles faisant référence aux équations transcendantes. À la fin de sa vie, de 1880 jusqu'à sa mort en 1886, il s'est en tout cas principalement consacré à des sujets d'Algèbre et n'a plus guère publié en Géométrie[8].

1.2. *L'importance quantitative de Hermite*

Le nom de Hermite est celui qui est le plus fréquemment cité par Laguerre. On dénombre en effet, dans l'ensemble des *Œuvres* de Laguerre pas moins de 32 occurences du nom « Hermite ». Parfois, il s'agit de références assez vagues à un résultat ou à une méthode attribué à Hermite mais bien souvent, Laguerre donne aussi la référence précise d'un article ou d'un ouvrage. Il est d'ailleurs fait mention de Hermite dans les titres de deux articles de Laguerre : « Sur le calcul des systèmes linéaires, extrait d'une lettre adressée à Charles Hermite » [Laguerre 1867] et « Sur quelques théorèmes de M. Hermite, lettres à Borchardt » [Laguerre 1880c].

Jusqu'au début des années 1870, le nom de Hermite apparaît en fait très peu dans les articles de Laguerre. On retrouve par exemple bien plus souvent des citations de travaux de Chasles, de Steiner, de Clebsch ou de Mannheim. Ceci s'explique avant tout par les sujets auxquels s'intéresse Laguerre, portant davantage sur la Géométrie alors qu'Hermite a relativement peu publié sur ce sujet. Ainsi, avant 1870, seules trois articles de Laguerre citent explicitement Hermite. La première référence apparaît dans [Laguerre 1867]. Plus précisément, dans cet article, Laguerre cite un article de Hermite de 1843 « Sur la division des fonctions abeliennes ou ultra elliptiques » [Hermite 1843] ainsi qu'un article de 1854 « Sur la théorie des formes quadratiques » [Hermite 1854]. Par la suite, toutes les références à des articles de Hermite seront faites entre 1878 et 1882. La majorité d'entre elles réfèrent d'ailleurs aux quatre articles suivants, qui sont donc cités plusieurs fois :

[8] Sur les 37 articles publiés par Laguerre à cette période, 26 sont effectivement classés dans la rubrique Algèbre par les éditeurs des *Œuvres*. Seuls quelques articles de Géométrie, portant en particulier sur la géométrie de direction, font exception.

Table 1. Nombre de références à des mathématiciens dans les volumes 1 et 2 des *Œuvres* de Laguerre

Références du Volume 1	Nombre d'occurences
Hermite	32
Jacobi	28
Descartes	18
Sturm	9
Cauchy	7
Rolle	7
Liouville	5
Weierstrass	3
Biehler	2
Eisenstein	2
Liouville	1
Jonquières	1
Sylvester	1
Références du Volume 2	**Nombre d'occurences**
Chasles	19
Steiner	15
Joachimsthal	11
Cayley	9
Darboux	8
Mannheim	5
Liouville	3
Sturm	1

– « Sur un nouveau développement en série des fonctions », 1864, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* [Hermite 1864].

– « Extrait d'une lettre à Mr Borchardt (sur quelques approximations algébriques) », 1873, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* [Hermite 1873a].

– « Sur la fonction exponentielle », 1873, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences* [Hermite 1873b].

– « Extrait d'une lettre à M. Fuchs de Gottingue sur quelques équations différentielles linéaires », 1875, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* [Hermite 1875].

Quelques autres articles de Hermite sont cités en revanche une seule fois par Laguerre. Là aussi, il s'agit en tout cas de citations datant du début des années 1880.

Finalement, la grande majorité des interactions avec Hermite s'est faite au sujet de l'Algèbre et du Calcul intégral. Il semblait ainsi raisonnable de s'intéresser à ces sujets et plus particulièrement aux équations polynomiales où le nombre de références à Hermite est effectivement important.

Réciproquement, et sans rentrer dans les détails, on peut ajouter que Laguerre est régulièrement cité par Hermite. Il s'agit d'ailleurs d'un des rares auteurs nouveaux cités sur plusieurs décennies par Hermite après 1860, ce qui s'explique principalement par le fait qu'Hermite ait relu les articles de Laguerre au moment de la publication des *Œuvres* [Goldstein 2012, p. 533].

La seconde partie de cet article visera à décrire plus en détails les travaux de Laguerre. Il existe toutefois une difficulté :

> Si la variété des sujets rend les Mémoires difficiles à classer, la concision avec laquelle il les rédigeait les rend encore plus impropre à l'analyse ; et, pour mettre son oeuvre dans tout son jour, il faudrait en reproduire la majeure partie. [Rouché 1887, p. 106]

Pour cette raison, et plûtot que de décrire les *Œuvres* de Laguerre linéairement, article après article, nous avons préféré utiliser des synthèses rédigés par deux des éditeurs des *Œuvres* : Henri Poincaré et Eugène Rouché[9]. Ces documents nous permettront d'avoir une première approche des travaux de Laguerre sur les équations et d'en saisir les points importants.

2. LES TRAVAUX DE LAGUERRE SUR LES ÉQUATIONS ET L'OBJET DES RÉFÉRENCES À HERMITE

2.1. *Le point de vue de deux des éditeurs des Œuvres : Henri Poincaré et Eugène Rouché*

2.1.1. *La structure des exposés de Poincaré et de Rouché*

Deux documents rédigés par les éditeurs des *Œuvres* synthétisent et présentent les travaux de Laguerre dans leur globalité. Le premier est signé Henri Poincaré : il s'agit de la préface des *Œuvres* [Laguerre 1898]. Le second, d'Eugène Rouché, est paru dans les *Nouvelles Annales* en 1887, un an après la mort de Laguerre [Rouché 1887].

La préface de Poincaré comporte onze pages et traite essentiellement de mathématiques. Elle balaie l'ensemble des sujets abordés par Laguerre au cours de sa carrière. Il commence par parler de la Géométrie des substitutions linéaires, qu'il rattache à l'étude des formes quadratiques et des fonctions abéliennes. Ensuite, il cite les idées générales de Laguerre sur

9 Malheuresement il n'existe pas de telle synthèse rédigée par Charles Hermite luimême.

la théorie des équations différentielles avec la notion d'invariants avant de s'attarder un peu plus longuement sur la théorie des équations numériques. Enfin, il termine sa présentation par un paragraphe sur l'étude des fractions continues et leur utilisation pour approcher des fonctions.

L'article de Rouché est quant à lui plus long, composé de 69 pages. Après avoir présenté succinctement la vie de Laguerre, Rouché passe à la description détaillée de ses travaux. Rouché divise son exposé en sept parties :

– Emploi des imaginaires en Géométrie.
– Application du Calcul intégral à la théorie des formes en Géométrie.
– Géométrie infinitésimale.
– Géométrie de direction.
– Méthodes d'approximation pour certaines fonctions analytiques.
– Résolution numérique des équations.
– Équations différentielles et fonctions elliptiques.

On observe une similitude dans la façon dont Poincaré et Rouché ont choisi de diviser leur exposé. En effet, ils distinguent quatre grandes parties liées à la Géométrie auxquelles ils ajoutent une concernant les équations numériques, une sur les approximations de fonctions avec les fractions continues notamment et une sur les équations différentielles. Ils proposent ainsi un classement des travaux de Laguerre plus détaillé que la simple division des *Œuvres* en trois parties (Algèbre, Calcul Intégral et Géométrie) qui ne permettait que peu de nuances.

Si cette différence pouvait s'expliquer par la nature fondamentalement différente des deux classements (celui permettant d'éditer des œuvres complètes et celui permettant de présenter des idées générales sur les travaux d'une vie), elle n'en reste pas moins intéressante à souligner. Cela permet par exemple à Rouché de regrouper l'ensemble des articles sur les fractions continues dans une même section, distincte des travaux sur les équations numériques et distincte également de ceux sur les équations différentielle. Les éditeurs des *Œuvres* ont au contraire regroupé certaines de ces références dans la rubrique Algèbre alors que d'autres étaient placés dans la rubrique Calcul intégral. Cela vient en tout cas conforter l'idée que le sujet des fractions continues pourrait constituer une thématique relativement autonome et faisant un lien entre des sujets d'Algèbre et de Calcul intégral dans les travaux de Laguerre.

2.1.2. *Les équations numériques*

Poincaré et Rouché semblent considérer que la résolution des équations numériques constitue une part importante des travaux de Laguerre.

Rouché introduit la partie sur les équations numériques en disant qu'il s'agit de « la plus considérable de son œuvre, et peut-être celle à laquelle il attachait le plus de prix » [Rouché 1887, p. 153], quand Poincaré la présente comme « la partie la plus remarquable de [son] œuvre » [Laguerre 1898, preface, p. xii]. Ajoutons que le sujet des équations numériques n'est pas seulement important pour Laguerre lui-même mais est au cœur du système d'enseignement à l'École polytechnique au XIX^e siècle. Et s'il est enseigné de manière assez routinière en général, il donne aussi l'occasion de recherches nouvelles qui peuvent être intégrées dans les exercices ou les cours. On verra notamment qu'un théorème attribué à Laguerre au sujet des équations numériques pouvait être utilisé par les candidats lors des examens du concours d'admission et a fait l'objet de publications de professeur et d'élèves dans des journaux comme les *Nouvelles annales de mathématiques.* Chose intéressante : Hermite a lui aussi démontré un résultat sur les équations numériques dans un cadre proprement scolaire, alors qu'il était encore élève de classe préparatoire. Là aussi, la découverte du résultat a été suivie d'un certain nombre de publications dans les *Nouvelles annales de mathématiques.* Si les deux résultats ne sont pas directement liés, c'est en tout cas un point commun remarquable entre les deux hommes sur lequel nous reviendrons.

Les deux éditeurs, Rouché et Poincaré, semblent en outre s'entendre sur le fait que Laguerre n'a pas complètement achevé ses travaux sur le sujet. Poincaré parle « d'une méthode ingénieuse pour séparer et calculer les racines imaginaires, mais dont Laguerre n'a pas eu le temps de tirer toutes les conséquences » quand Rouché explique que le mémoire [Laguerre 1883] paru dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* était censé former les premiers chapitres d'un ouvrage plus général sur la question des équations numériques mais dont la rédaction est restée inachevée[10] : « Il se proposait avant que la mort vînt le surprendre, de coordonner ces recherches et de les réunir en un Volume qui en eut renfermé l'exposition complète. »

Rouché explique que Laguerre avait prévu d'organiser son ouvrage en trois parties. La première concernait la généralisation du théorème de Descartes et ses applications. C'est justement l'objet du mémoire [Laguerre 1883] qui synthétise l'ensemble des travaux de Laguerre sur le sujet et qui reprend le contenu de publications antérieures parues dans les *Nouvelles annales de mathématiques* et dans les *Comptes rendus de l'Académie*

---

10 On pourra consulter [Vincent 2019, p. 263-279] pour une étude détaillée de ce mémoire et [Vincent 2022] pour un exposé « moderne » des résultats de Laguerre sur les équations numériques.

des sciences, en particulier [Laguerre 1879a; 1880a; 1881a] et [Laguerre 1881b]. La seconde partie présentait des méthodes d'approximations des racines d'une équation reprenant une partie du mémoire [Laguerre 1883] mais présentant également des résultats supplémentaires développés dans [Laguerre 1880b] et [Laguerre 1880h]. La troisième partie enfin était consacrée à la recherche des racines imaginaires. Moins développée que les deux premières parties, Laguerre avait tout de même publié quelques articles sur le sujet, notamment [Laguerre 1874c], [Laguerre 1878a] et [Laguerre 1880g].

Rouché décide ainsi de structurer son exposé en reprenant successivement les travaux de Laguerre dans ces trois parties. Il est intéressant de noter que Poincaré semble avoir retenu une structuration similaire pour présenter sa préface. Nuance tout de même avec la présentation de Rouché, il termine sa présentation sur les équations en présentant la résolution des équations transcendantes alors que Rouché incluait cette question dans la première partie.

Le théorème de Descartes[11] *et ses applications*

Concernant la généralisation du théorème de Descartes, Rouché indique qu'il « s'agit de la plus complète et Laguerre semble avoir dit son dernier mot sur le sujet ». Il commence par citer le théorème de Descartes sous la forme suivante : « $F(x)$ désignant un polynôme ordonné suivant les puissances décroissantes de x, le nombre des racines positives de l'équation $F(x) = 0$ est au plus égal au nombre des variations du polynôme $F(x)$ » (le nombre des variations d'un polynôme désigne ici le nombre de changements de signes dans la suite des coefficients de ce polynôme). Par exemple, pour le polynôme $x^5 + 4x^3 - x^2 + 3$ admet au plus deux racines positives étant donné que la suite des coefficients $(1, 0, 4, -1, 0, 3)$ présente deux changements de signes.

Rouché détaille ensuite en quelques lignes la nouvelle démonstration proposée par Laguerre « non seulement à cause de sa simplicité, mais surtout parce qu'on y trouve l'origine de l'extrême généralisation que Laguerre est parvenu à donner au théorème de Descartes ». Cette démonstration se fait par récurrence sur le nombre de variations du polynôme F et utilise principalement le théorème de Rolle. Plus précisément, Laguerre considère un polynôme F dont le nombre de variations est n et

[11] Le théorème de Descartes est aussi parfois appelé « règle des signes de Descartes ».

utilise, pour un réel α quelconque, l'équivalence suivante :

$$F(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{F(x)}{x-\alpha} = 0.$$

Pour un réel α bien choisi, il montre que la dérivée de $\frac{F(x)}{x-\alpha}$ admet au plus $n-1$ variations donc, par hypothèse de récurrence, que l'équation $\left(\frac{F(x)}{x-\alpha}\right)' = 0$ admet au plus $n-1$ solutions. D'après le théorème de Rolle, c'est que l'équation $\frac{F(x)}{x-\alpha} = 0$ admet au plus n solutions, ce qui est par conséquent également le cas de l'équation $F(x) = 0$ et permet à Laguerre de conclure la récurrence.

Dans cette démonstration, Laguerre ne suppose pas que l'équation soit polynomiale, utilisant principalement la continuité de F à travers le théorème de Rolle. Ainsi, cela signifie que l'énoncé proposé par Laguerre est donc identique à celui de la règle de Descartes si ce n'est que $F(x)$ peut désigner une série entière. Rouché énumère alors différents cas pour lesquels Laguerre peut appliquer son résultat généralisé : pour l'évaluation du nombre de solutions des équations de la forme

$$\frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{L}{x-l} = 0$$

(où les nombres $A, B, \ldots, L$, $a, b, \ldots, l$ sont des nombres réels), celles de la forme

$$\int_a^b e^{-zx}\Phi(z)dz = 0$$

(où a, b et x sont des nombres réels et d'après Laguerre, $\Phi(z)$ désigne une fonction entièrement arbitraire, continue ou discontinue d'une façon quelconque, pouvant par exemple être nulle dans autant d'intervalles qu'on veut » [Laguerre 1883][12]), celles de la forme

$$\int_a^b \frac{\Phi(z)}{(z-x)^n}dz = 0,$$

ou encore celles de la forme

$$A_1F(\alpha_1 x) + \cdots + A_nF(\alpha_n x) = 0$$

(où pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i et α_i sont des nombres réels et F est une série entière).

12 En termes modernes, il faut bien sûr considérer en pratique que cette fonction Φ est intégrable.

Rouché cite ensuite le « cas où le premier membre de l'équation est exprimé linéairement au moyen des polynômes de Legendre, et plus généralement au moyen de polynômes entiers satisfaisant à certaines équations différentielles linéaires du second ordre ». Pour conclure cette partie sur le théorème de Descartes, Rouché parle du cas général où le premier membre de l'équation est une fonction entière de x.

Avec ces différentes applications, il apparaît donc qu'un des liens établi par Laguerre entre Algèbre et Calcul intégral provient de la généralisation du théorème de Descartes aux séries entières. Poincaré s'exprime d'ailleurs en des termes similaires en considérant que « le théorème de Descartes devient un instrument d'une flexibilité merveilleuse ; manié par Laguerre, il le conduit à des règles élégantes, bien plus simples que celles de Sturm et s'appliquant à des classes très étendues d'équations ».

Approximation des racines

Après cette première partie sur la règle de Descartes et ses applications, Rouché passe donc à la seconde : l'approximation des racines d'une équation algébrique ou transcendante. Il commence par rappeler les résultats classiques fournissant une limite supérieure des racines, notamment la « méthode de Newton[13] » qui consiste « à trouver une quantité qui rende positive la fonction $f(x)$ et ses dérivées successives ». Pointant les difficultés de calculer ces dérivées, il énonce alors le résultat de majoration des racines suivant, connu sous le nom de « théorème de Laguerre » au XIXe siècle et présentant justement l'intérêt de se calculer facilement :

> Considérant une équation
>
> $$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$$
>
> et forme la suite de polynômes suivants :
>
> $$\begin{aligned} f_m(x) &= A_0, \\ f_{m-1}(x) &= A_0 x + A_1 \\ &\vdots \\ f_1(x) &= A_0 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \\ f(x) &= A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m. \end{aligned}$$
>
> Tout nombre positif a qui rend positifs les polynômes de la suite [ci-dessus], est une limite supérieure des racines de l'équation $\left[f(x) = 0\right]$.
>
> [Rouché 1887, p. 157]

13 Nous attirons l'attention sur le fait qu'il ne s'agit pas ici de la méthode algorithmique portant le même nom et permettant d'approximer le zéro d'une fonction.

La démonstration de ce résultat découle d'ailleurs de la règle des signes de Descartes généralisée, appliquée au développement en série de la fraction $\frac{f(x)}{x-a}$. Comme application de ce résultat, on peut par exemple citer le cas d'une équation présentée par Laguerre lui-même dans [Laguerre 1883] :

> En considérant l'équation
>
> $$f(x) = x^5 - 3x^3 + x^2 - 8x - 10 = 0,$$
>
> avec $a = 3$, on obtient $f_5(a) = 1$, $f_4(a) = 3$, $f_3(a) = 6$, $f_2(a) = 19$, $f_1(a) = 49$ et $f(a) = 137$. Cela signifie par conséquent qu'il n'existe pas de solution supérieure à 3.

Comme on le voit, cette règle fournissant une majoration de la plus grande des racines ne constitue pas une approximation des racines à proprement parler mais une sorte de préalable afin de localiser les racines et de pouvoir ensuite en proposer une approximation. C'est sans doute en le voyant comme une étape préliminaire que Rouché a décidé d'inclure ce résultat dans la partie « approximation des racines ». Après avoir présenté quelques variantes à cette première règle, il passe donc à la méthode d'approximation des racines en tant que telle. Il rappelle la méthode d'approximation de Newton qui donne, à condition d'avoir une valeur suffisamment approchée d'une racine, « un moyen commode et rapide d'approcher indéfiniement de cette racine ». Laguerre cherche un moyen d'établir une méthode qui marche à tous les coups, quel que soit le point de départ considéré. Rouché explicite le résultat établi par Laguerre, insistant sur le fait que cette méthode offre « l'avantage de n'être jamais en défaut, quelle que soit la valeur de départ α :

> En désignant par $f(x) = 0$ une équation de degré n dont toutes les racines sont réelles et par α une quantité arbitraire, les deux valeurs de x déterminées par l'équation
>
> $$(*) \qquad \frac{1}{x-\alpha} = -\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} \pm \frac{1}{nf(\alpha)}\sqrt{(n-1)H(\alpha)}$$
>
> sont respectivement comprises entre α et les deux racines de l'équation proposée qui avoisinent x.
>
> Dans la formule [ci-dessus], $H(x)$ représente le Hessien de $f(x)$:
>
> $$H(x) = f'^2(x) - nf(x)f''(x). »$$
>
> [Rouché 1887, p. 157]

Partant d'une valeur réelle quelconque, cela permet donc à Laguerre d'obtenir une approximation des racines de manière itérative. Dans sa préface, Poincaré n'est pas aussi précis que Rouché et se contente de présenter l'idée générale que Laguerre a mise en place. Il compare notamment la méthode de Laguerre avec celle de Newton :

> La méthode de Newton consiste à remplacer l'équation à résoudre par une équation du premier degré qui en diffère très peu ; Laguerre la remplace par une équation du deuxième degré qui en diffère moins encore. L'approximation est plus rapide ; de plus, la méthode n'est jamais en défaut au moins quand toutes les racines sont réelles. Le procédé nouveau est surtout avantageux quand le premier membre de l'équation est un des polynômes qui satisfont à une équation différentielle linéaire et dont le rôle analytique est si important.
> [Laguerre 1898, préface, p. xiii]

Cette citation nous permet de mieux appréhender la formule d'approximation précédente $(*)$. En effet, la première partie de l'égalité $(\frac{1}{x-\alpha} = -\frac{f'(\alpha)}{f(\alpha)} + \cdots)$ rappelle la méthode d'approximation de Newton alors que la seconde partie $(\frac{1}{nf(\alpha)}\sqrt{(n-1)H(\alpha)})$ fait apparaître une dérivée seconde, correpondant à l'ordre deux dont parle Poincaré.

Avant de passer à la question des racines imaginaires, Rouché termine cette deuxième partie en écrivant quelques lignes sur les équations dont toutes les racines sont réelles, expliquant qu'elles « s'offrent de manière fréquente en Analyse ». Il parle notamment d'une méthode élaborée par Laguerre pour déterminer si, oui ou non, une équation donnée n'admet que des racines réelles.

Recherche des racines imaginaires

Rappelons que cette partie est considérée comme étant inachevée par Rouché et par Poincaré. Rouché explique toutefois que pour déterminer les racines imaginaires d'une équation, Laguerre a utilisé « une notion absolument nouvelle, celle des points dérivés ». En fait, partant d'une équation polynomiale, il forme « l'équation $f(x,y) = 0$ où y a été introduit pour rendre le polynôme f homogène ». Il nomme alors « point dérivée » d'un point M d'affixe x le point d'affixe ζ définie par la relation

$$\zeta\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} = 0.$$

Cette notion lui permet alors d'établir le théorème suivant :

> Tout cercle passant par un point quelconque du plan et par le point dérivé renferme au moins une racine de l'équation ; et il y a aussi au moins une racine en dehors du cercle. [Rouché 1887, p. 161]

C'est ensuite ce résultat « géométrique » qui permet à Laguerre de présenter une méthode d'approximation successives des racines imaginaires.

Les travaux sur les développements de fonctions en lien avec la résolution des équations

Dans la partie sur les développements de fonctions exposée par Rouché, deux paragraphes abordent explicitement la résolution des équations polynomiales en lien avec des développements en séries ou en fraction continues. Nous verrons d'ailleurs qu'il s'agit d'une approche que l'on retrouve dans les travaux de Hermite[14].

Le premier paragraphe de Rouché fait état d'une démonstration nouvelle proposée par Laguerre au sujet des fonctions symétriques des racines. Plus exactement, Rouché explique que :

> Une démonstration, faite par la théorie des fractions continues algébriques, du théorème fondamental de la théorie des fonctions symétriques des racine d'une équation, théorème qui donné d'abord par Cauchy, avait été démontré par Borchardt au moyen de la théorie des fonctions ultra-elliptiques.
>
> [Rouché 1887, p. 152]

Il s'agit donc d'une utilisation de développements en fractions continues dans l'objectif de résoudre un problème sur les équations, et plus particulièrement d'exprimer les coefficients d'un polynôme en fonction des sommes de Newton formées à partir des racines[15]. Cette démarche est sans doute à replacer dans un contexte plus général des XVIIIe et XIXe siècles où la question de la résolution des équations polynomiales par des techniques de développements de fonctions, que ce soit un développement en séries ou en fraction continues, était souvent posée. Pour ne donner que quelques exemples, dès le XVIIIe siècle, Lagrange proposait une manière de résoudre les équations par des développements en série dans [Lagrange 1770]. Cette « formule » est ensuite reprise, développée et discutée, entre autres, par Laplace, Fourier, Chio et Cauchy[16]. Sur la question de la résolution d'équations à l'aide des fractions continues, Lagrange est aussi considéré comme un précurseur avec son article [Lagrange 1769][17]. Il y démontre qu'un irrationnel est racine d'une équation de degré deux si et

14 Voir [Goldstein 2011] et [Sinaceur 1991].

15 On rappelle que si l'on note $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ les racines d'un polynôme de degré n, les sommes de Newton sont les $S_k = 1 \leq i \leq n x_i^k$.

16 Pour plus de détails sur les travaux de Lagrange et des autres mathématiciens sur cette question, la lectrice pourra consulter l'article [Chabert 2015].

17 Chabert [2015] donne également des informations à ce sujet.

seulement si son développement en fraction continue est périodique à partir d'un certain rang. Plusieurs décennies après, Galois complétera ce théorème en s'intéressant au cas particulier des irrationels dont le développement en fractions continues est « purement périodique »[18]; Le travail de Laguerre dont fait mention Rouché semble s'inscrire dans ce cadre plus général où l'on utilise les développements de fonctions comme des outils pour la résolution d'équations.

Le deuxième passage dans lequel Rouché fait allusion à un problème lié à celui de la résolution des équations numériques est assez différent dans la démarche. Le résultat en question, que Rouché juge « très important », est le suivant :

> $F(x)$ désignant un polynôme de degré $n\mu$, tellement choisi que les fractions
>
> $$\frac{\Phi_1(x)}{F(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{F(x)}, \ldots, \frac{\Phi_n(x)}{F(x)}$$
>
> approchent le plus les transcendantes
>
> $$e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \ldots, e^{a_n x},$$
>
> le polynôme $F(x)$ est entièrement caractérisé par cette propriété que, dans le développement de $F(x)e^{zx}$ suivant les puissances croissantes de x, le coefficient de $x^{\mu(n-1)}$ est
>
> $$z^{\mu}(z-a_1)^{\mu}\cdots(z-a_n)^{\mu}.$$
>
> L'expression de $F(x)$ résulte de là fort aisément. [Rouché 1887, p. 151]

En fait, Rouché explique que Laguerre a utilisé un autre résultat pour le démontrer. Il s'agit d'un théorème de Hermite dont Laguerre propose une nouvelle démonstration, qualifiée par Rouché de « géométrique ». Ce théorème donne une condition suffisante à la réalité des racines d'une équation. Plus précisément :

> Si pour toutes les racines de l'équation
>
> $$F(x) + i\Phi(x) = 0,$$
>
> le coefficient de i a le même signe, l'équation
>
> $$pF(x) + q\Phi(x) = 0,$$
>
> où p et q désignent deux nombres réels arbitraires, a toutes ses racines réelles. [Rouché 1887, p. 151]

18 À ce sujet, on pourra consulter l'article de Catherine Goldstein sur Galois et Hermite [Goldstein 2011].

Pour démontrer ce résultat, Laguerre note $\alpha+ai$, $\beta+bi,\ldots$ les racines de $F(x)+i\Phi(x)$ et il remarque alors qu'en posant $H(x-\alpha-ai) = F(x)+i\Phi(x)$, l'équation $pF(x) + q\Phi(x) = 0$ implique que

$$(p - iq)H(x - \alpha - ai) + (p + iq)H(x - \alpha + ai) = 0$$

et par suite que $H(x - \alpha + ai)$ et $H(x - \alpha - ai)$ ont le même module. Il peut alors conclure que toute racine de $pF(x) + q\Phi(x)$ est à équidistance de $\alpha+ai$ et $\alpha-ai$ dans le plan complexe et, se situant sur l'axe des abscisses, est donc réelle [Laguerre 1880c].

Ainsi, dans ce cas, il apparaît que Laguerre ne se propose pas de résoudre une équation à l'aide de développements de fonctions mais cherche, au contraire, à utiliser un résultat relatif à la résolution des équations pour établir un développement en série. Cette perspective nous paraît assez remarquable et mérite une attention particulière.

Nous avons jusque là présenté les travaux de Laguerre et vu que le nom de Hermite apparaissait fréquemment dans les articles sur les équations numériques. Il s'agit maintenant de comprendre, d'un point de vue plus qualitatif, comment et pourquoi Laguerre cite Hermite dans ses articles.

2.2. *L'objet des références à Hermite*

Les articles de Laguerre citent Hermite pour différentes raisons. Un premier ensemble de citations concerne notamment le résultat évoqué par Rouché sous le nom de « théorème de M. Hermite » et publié dans [Hermite 1879]. Ainsi, dans [Laguerre 1880c], Laguerre commence par rappeler le résultat puis par remarquer que « M. Biehler a obtenu en même temps ce théorème [...] et [que] sa démonstration, comme celle de Hermite, repose sur la considération de l'indice de la fraction $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ » [Laguerre 1880c, p. 239]. Il propose alors une autre démonstration du résultat, utilisant la représentation géométrique dans le plan des racines complexes et des considérations sur les modules. C'est d'ailleurs la même démonstration qu'il reproduit dans [Laguerre 1880d] où il présente différents types d'équations dont toutes les racines sont réelles. Aussi, à d'autres moments, Laguerre propose une application de ce théorème de Hermite. Par exemple, dans [Laguerre 1884b], Laguerre utilise ce résultat afin de prouver que « Si l'équation $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots a_nx^n = 0$ a toutes ses racines réelles et de même signe, l'équation

$$a_0 \cos(\lambda) + a_1 \cos(\lambda + \theta)x + a_2 \cos(\lambda + 2\theta)x^2 + \ldots + a_n \cos(\lambda + n\theta)x^n = 0,$$

où λ et θ désignent deux arcs arbitraires, a toutes ses racines réelles » [Laguerre 1884b, p. 121].

Il existe quelques autres exemples, assez rares, où Laguerre cite un résultat de Hermite pour l'appliquer ou pour le démontrer d'une autre manière. Ainsi, dans [Laguerre 1880e], Laguerre fait référence à un autre résultat de Hermite paru dans [Hermite 1873a] :

> Soient $a, b, c, \dots, l, m$ quantités arbitraires et $F, F_1, F_2, \dots, F_{m-1}$, m polynômes entiers en x. Si l'on désigne respectivement par $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ les degrés de ces polynômes et si l'on pose, pour abréger,
>
> $$\mu = \alpha + \beta + \gamma + \cdots + \lambda,$$
>
> on voit que, dans l'expression
>
> $$V = Fe^{ax} + F_1 e^{bx} + F_2 e^{cx} + \cdots + F_{m-1} e^{lx},$$
>
> figurent les $\mu+m$ coefficients des polynômes $F, F_1, F_2, \dots F_{m-1}$. [...] M. Hermite a donné une méthode très simple et très élégante pour déterminer les valeurs de ces polynômes. [Laguerre 1880e, p. 11]

Dans la suite de l'article, Laguerre fait remarquer qu'il a traité le cas où tous les coefficients a, b, c, λ sont égaux dans [Laguerre 1880c] puis il propose, dans le cas général, une méthode différente de celle de Hermite pour retrouver les valeurs des polynômes.

Un autre exemple intéressant est donné par l'article [Laguerre 1880c] où Laguerre indique que la formule qu'il avait présentée dans un précédent article « appartient en réalité à M. Hermite ». Il développe et explique également les différences d'approches qu'il a avec Hermite :

> Seulement, tandis que M. Hermite prend pour point de départ les propriétés des réduites de la fonction $\log\left(\frac{x-1}{x}\right)$, je m'appuie sur les propriétés des réduites de e^x ; on apperçoit, dans cette circonstance, le premier indice d'une liaison singulière entre les réduites de fonctions si différentes.
>
> [Laguerre 1880c, p. 241]

Les réduites de la fonction exponentielle sont en fait des fractions rationnelles telles que leur développement en série coïncide avec les premiers termes de la série définissant la fonction exponentielle, à savoir $\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!}$. La référence aux résultats de Hermite à ce sujet est ici doublement intéressante. Tout d'abord, il s'agit des résultats qui ont mené Hermite à la célèbre démonstration de la transcendance du nombre e. Pour autant, il est tout aussi important de souligner que Laguerre, tout comme Hermite lui-même, s'intéresse avant tout à ces résultats en ce qu'ils donnent un moyen d'approximer des fonctions [Serfati 1992]. Il ne mentionne pas en revanche la transcendance de e.

Ainsi, il existe un certain nombre d'exemples qui montrent que Laguerre et Hermite travaillent sur des sujets similaires et que Laguerre utilise parfois des résultats de Hermite, tout en proposant également d'autres preuves de ces résultats. Cela ne doit toutefois pas masquer le fait qu'une grande partie des références à Hermite sont d'un autre type. En effet, bien souvent, Laguerre cite Hermite non pas pour utiliser un de ses résultats mais plutôt pour faire référence à un objet introduit par Hermite et que Laguerre utilise dans un tout autre contexte. Ainsi, il fait référence aux polynômes de Hermite à plusieurs reprises afin, pour ainsi dire, de tester ses propres résultats sur les équations. Par exemple, il illustre les propriétés qu'il vient de démontrer dans [Laguerre 1880f, p. 810] en les appliquant aux polynômes de Hermite et en faisant référence à [Hermite 1864] dans lequel Hermite avait justement introduit les polynômes qui portent son nom. C'est également cette même démarche qu'adopte Laguerre dans [Laguerre 1880g, p. 251], dans [Laguerre 1878c] ou encore dans [Laguerre 1880h, p. 306] où Laguerre détermine une limite inférieure de la différence entre deux racines consécutives des polynômes de Hermite en application d'un résultat présenté notamment dans [Laguerre 1880b]. Un autre exemple de citations du même type concerne les références à l'article « Sur la fonction exponentielle » [Hermite 1873b]. Laguerre cite souvent cet article pour prendre l'exemple des réduites de la fonction exponentielle c'est-à-dire « une fraction $\frac{\Phi(x)}{F(x)}$ dont les deux termes sont des polynômes de degré n tels que le développement de cette fraction suivant les puissances croissantes de x coïncide, jusqu'au terme du degré $2n$ inclusivement, avec le développement de e^x » [Laguerre 1880a, p. 102]. Dans [Laguerre 1880a], Laguerre applique justement la règle des signes de Descartes et sa généralisation au cas des séries aux réduites de l'exponentielle. Dans [Laguerre 1880d, p. 230], il établit un résultat portant sur le nombre de racines réelles de ces réduites. Ici, Laguerre prend donc des polynômes définis par Hermite comme des exemples sur lesquels il applique des théorèmes divers et variés. La référence à Hermite ne correspond donc pas exactement à une référence directe à ses travaux mais illustre malgré tout l'influence que pouvait avoir Hermite sur les mathématiques de l'époque.

Un autre type de citations consiste enfin, pour Laguerre, à faire référence à Hermite et à l'un de ses articles tout en expliquant qu'il ne souhaite pas développer davantage. Dans [Laguerre 1880i, p. 44], avant de faire référence à un article de Hermite, Laguerre écrit par exemple : « il serait facile d'exprimer Δ au moyen d'une intégrale multiple, mais je ne m'étendrai pas sur le sujet ». De la même manière, dans [Laguerre 1880c, p. 242], il indique qu'« il ne [s']étendra pas davantage sur ce sujet » avant, là aussi, de citer Hermite.

Enfin, à plusieurs reprises Laguerre cite le cours de Hermite professé à l'École polytechnique. Dans ce cas, il s'agit plutôt de renvoyer le lecteur à une référence que l'on peut qualifier de classique. Il y fait par exemple référence dans [Laguerre 1880d, p. 229] lorsqu'il utilise le théorème de Rolle.

Finalement, il est clair que Hermite est très souvent cité par Laguerre et ce pour des raisons assez diverses. La description précédente donne néanmoins l'impression que les résultats pour lesquels Hermite est cité ne concernent pas toujours les aspects les plus importants développés par les deux mathématiciens autour des équations. Pour le dire autrement, bien que Laguerre cite parfois des articles célèbres d'Hermite, il ne le fait en général pas pour en reprendre les résultats principaux. Ainsi, lorsqu'il cite le fameux article « Sur la fonction exponentielle » de 1873, ce n'est jamais pour faire référence à la transcendance du nombre e mais plutôt pour parler des réduites de l'exponentielle. Aussi, il cite le *Mémoire sur l'équation du cinquième degré* [Hermite 1866] dans [Laguerre 1878b], non pas pour faire référence à la résolutibilité des équations (aux fonctions elliptiques ou aux équations modulaires par exemple[19]) mais simplement à propos d'une remarque faite par Hermite permettant de remplacer, dans l'application du théorème de Sturm, le polynôme dérivé par une combinaison linéaire du polynôme dérivé et du polynôme lui-même. Le fait que Laguerre cite ainsi Hermite sur des questions assez spécifiques voires techniques donnent en tout cas l'impression que Laguerre avait l'habitude de lire dans les détails les travaux de Hermite et était familier de ses publications.

3. SIMILARITÉS ENTRE LAGUERRE ET HERMITE

Les éléments présentés jusqu'ici étaient principalement factuels. Il s'agit maintenant d'ouvrir le propos en soulignant, de manière plus générale, les points communs qui peuvent exister entre les deux mathématiciens. Nous disposons pour cela d'un autre document : un compte rendu d'Émile Borel où il commente les travaux de Laguerre d'un point de vue, pour ainsi dire, plus philosophique.

3.1. *Le point de vue d'Émile Borel*

Émile Borel peut être qualifié de contemporain d'Edmond Laguerre, étant né en 1871 alors que Laguerre est mort en 1886. Toutefois, Borel

19 À propos des travaux de Hermite sur les équations, on pourra consulter [Goldstein 2011].

n'a pas cotoyé Laguerre en tant que mathématicien étant donné qu'il n'avait que 15 ans à la mort de Laguerre. En 1898, Borel a donc 27 ans lorsque les *Œuvres* de Laguerre sont publiées et que lui revient de faire un compte rendu dans le *Bulletin des Sciences mathématiques.* Le compte rendu qu'il propose [Borel 1898, p. 305] en un peu moins de sept pages est relativement différent des textes de Rouché et même de Poincaré. Il procède en trois partie, la première sur les équations algébriques, la seconde sur les équations transcendantes, et la dernière sur les fractions continues. Autre différence notable avec les présentations de Rouché et de Poincaré, Borel ne présente que peu de résultats et ne les détaille pour ainsi dire quasiment pas mais insiste sur les motivations de Laguerre et pour ainsi dire, les aspects philosophiques liés à ses travaux. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle nous avons préféré présenter séparément ce document : après avoir focalisé notre présentation autour des résultats mathématiques de Laguerre et de leur structuration, nous allons maintenant élargir notre propos à partir du point de vue personnel de Borel.

3.1.1. *La division des Œuvres entre Algèbre et Calcul Intégral*

Rappelons que les éditeurs des *Œuvres* n'ont pas retenu le même plan pour structurer les articles de Laguerre et pour les présenter dans [Rouché 1887] et [Laguerre 1898, preface]. Borel donne un certain nombre d'éléments permettant de comprendre ces choix :

> Les Mémoires de Laguerre sont classés sous deux rubriques distinctes : Algèbre, Calcul Intégral; et, dans cette classification, on est tout d'abord étonné de voir les recherches de Laguerre sur les transcendantes entières, et d'autres encore, figurer parmi les mémoires d'Algèbre. Cet étonnement disparaît lorsque, au lieu de lire seulement la Table des matières, on étudie le texte même; on voit alors que l'un des traits caractéristiques de Laguerre est l'aisance avec laquelle il résout bien des questions d'Analyse par les méthodes de l'Algèbre la plus élémentaire, et l'on s'aperçoit à peine de la transition entre l'Algèbre des polynômes et l'Algèbre des fonctions transcendantes, si l'on peut ainsi s'exprimer. [Borel 1898, p. 305]

Ainsi, lorsqu'il s'agit d'organiser la table des matières des *Œuvres*, les éditeurs ont retenus deux grandes parties, Algèbre et Calcul Intégral dans lesquelles le critère de classement semble être lié aux méthodes utilisées. D'un côté, les résultats faisant intervenir des méthodes « élémentaires ». De l'autre, des travaux mobilisant des méthodes et des technique liées au calcul d'intégrales ou à la résolution d'équations différentielles. En revanche, lorsque ces mêmes éditeurs, Rouché et Poincaré, ont voulu présenter une synthèse des travaux de Laguerre, ils n'ont pas retenus les mêmes distinctions. Dans ce cas, ils ont plutôt classés les résultats mathématiques de Laguerre en fonction des objets mathématiques abordés dans les articles en séparant par exemple les équations polynomiales, les équations différentielles et les développements de fonctions en séries ou en fractions continues. Cela permet donc de comprendre un peu mieux la structuration des *Œuvres* et la place que peut occuper un sujet tel que les fractions continues, à l'intersection entre Algèbre et Calcul intégral dans les *Œuvres* de Laguerre.

La remarque de Borel est d'ailleurs à rapprocher de conceptions similaires chez Hermite. Ce dernier considère en effet qu'il existe une certaine continuité entre l'étude des nombres entiers, des polynômes et des séries entières. Il considère les séries comme des généralisations des polynômes, eux même généralisations des entiers, et fait ainsi un lien entre arithmétique, algèbre et analyse [Goldstein et al. 2007, pp. 399-401]

3.1.2. *Aspects théoriques et pratiques chez Laguerre*

Émile Borel revient à plusieurs reprises sur la tension qui peut exister entre théorie et pratique chez Laguerre, notamment ceux sur les équations algébriques. Afin d'introduire son propos sur les équations, Borel rappelle d'ailleurs les difficultés calculatoires souvent rencontrées lorsqu'il est question d'équations numériques :

> La détermination exacte du nombre des racines réelles d'une équation algébrique et la séparation de ces racines ont longtemps été au nombre des plus importantes préoccupations des géomètres. La beauté de la solution de Sturm, perfectionnée par M. Hermite, et aussi la multitude d'autres sujets nouveaux qui sollicitaient l'attention ont, dès le milieu de ce siècle, diminué beaucoup l'importance relative de ces questions. La complication rapidement inextricable qu'atteignent les calculs dans les applications n'était d'ailleurs pas faits pour encourager l'étude. [Borel 1898, pp. 305-306]

Ainsi, le théorème de Sturm apparaît à la fois comme utile pour répondre à une question mathématique « importante » mais en même temps peu propice aux calculs pratiques. À l'opposé de ce résultat, Borel cite la règle des signes de Descartes qui est très facile d'application mais qui ne donne pas toujours une majoration très intéressante du nombre de racines. Borel explique alors que Laguerre souhaitait trouver une sorte de compromis entre ces deux règles :

> Laguerre pensa cependant qu'entre les méthodes imparfaites, mais simples, dont la règle des signes de Descartes fut le premier exemple, et les méthodes parfaites, mais pratiquement compliquées, dont Sturm a donné le type, il y avait

place pour d'autres méthodes moins imparfaites que les premières et plus aisément utilisables que les secondes.

Ces nouvelles méthodes devaient permettre, au prix de calculs assez simples, de résoudre *dans la plupart des cas*, le problème pratique de la séparation des racines. [Borel 1898, p. 306]

Pour Borel, les travaux de Laguerre sur les équations sont donc, en quelque sorte, un juste milieu entre l'impératif théorique d'exprimer le nombre exact des racines en fonction des coefficients de l'équation et l'impératif pratique de mener à bien le calcul de ce nombre de racines.

3.1.3. *Conception de la généralité chez Laguerre et place accordée aux cas particuliers*[20]

Borel insiste sur le positionnement de Laguerre concernant la question de la généralité en mathématiques en donnant l'exemple de ses travaux sur les équations :

> L'étude des travaux de Laguerre sur la théorie des équations met déjà en évidence une qualité qu'il possédait au plus haut degré et que l'on retrouve dans le reste de son œuvre : je veux parler de sa faculté de généralisation, à la fois prudente et hardie. [Borel 1898, p. 307]

Borel explicite ensuite ce point de vue en précisant ce qu'il entend par le terme « généralisation » :

> Généraliser une proposition est souvent très facile, si l'on entend par là donner un énoncé assujetti à la seule condition de contenir le premier comme cas particulier. Mais la généralisation ainsi comprise sera rarement intéressante, rarement féconde.
>
> Presque toujours généraliser une propriété d'une certaine classe d'être algébriques (ou géométriques, etc.), c'est étendre cette propriété à une classe plus large. Cette extension ne sera le plus souvent possible que si l'on modifie la forme de la proposition, si on la réduit à ce qu'elle a d'*essentiel*, et voilà un premier point où la sagacité de l'analyste devra s'exercer. [Borel 1898, p. 307]

Ainsi, Borel pense que la capacité de Laguerre à généraliser une proposition de manière utile est liée à sa compréhension des « raisons essentielles » de ce résultat. Il explique qu'une généralisation pertinente consiste à « étendre une proposition autant que possible en surface, tout en la réduisant le moins possible en profondeur ». Là encore, il s'agit, d'une certaine manière, de « juste mesure ». Il poursuit :

---

20 À propos de la question de la généralité en mathématiques, on pourra consulter [Chemla et al. 2016].

> Mais ce n'est pas tout ; il est clair que, plus on élargit la classe d'êtres auxquels on veut étendre la proposition, plus cette proposition devra elle même être restreinte dans son énoncé. Il y a donc à garder une mesure et c'est là que la lecture de Laguerre peut nous fournir des modèles incomparables.
>
> [Borel 1898, p. 307]

Une généralisation adaptée consiste donc à élargir la classe d'objets considérés sans que l'énoncé ne devienne inintéressant. Pour mieux faire comprendre ce double impératif, il donne alors quelques exemples, notamment celui des équations transcendantes. Laguerre a en fait généralisé certains résultats concernant les polynômes aux fonctions entières. Pour cela, il a repris les travaux de Weierstrass et proposé une classification des fonctions entières par une notion nouvelle : leur genre. Borel explique que cela lui permet d'établir un résultat, légèrement modifié par rapport à la proposition initiale, et valable pour les fonctions de genre fini. En cela, Laguerre a dû définir la classe d'objet adaptée au problème qu'il considère en introduisant un nouveau concept. C'est en cela que la recherche de généralité n'est pas prévisible mais au contraire, résulte de l'exercice de « la sagacité de l'analyste ».

3.2. *Deux résultats de Laguerre et de Hermite au sujet des équations numériques*

Nous avons déjà mentionné le théorème de Laguerre permettant de calculer une approximation des racines d'un polynôme. Ce résultat et certains de ses corollaires ont fait l'objet de nombreux articles dans les *Nouvelles Annales,* revue de mathématiques à destination de professeurs et d'élèves de classes préparatoires au concours de l'École polytechnique notamment. Laguerre a publié ses résultats dans les *Nouvelles Annales* mais ils ont également été repris, discutés ou améliorés par d'autres auteurs de ce journal. Un des élèves de Laguerre à l'École polytechnique, Gabriel Candèze a notamment publié une contribution, comparant l'efficacité du théorème de Laguerre avec les autres règles déjà connues à l'époque comme celles de Budan et de Fourier [Candèze 1880].

De son côté, Hermite a découvert et démontré un résultat ensuite associé à son nom au sujet des équations numériques alors qu'il était élève en classes préparatoires. Plus précisément, il était élève du collège Louis-le-Grand et suivait les cours du professeur Richard lorsqu'il a participé au Grand concours de 1842. Chaque année, ce concours proposait une question pour les élèves en classe de mathématiques élémentaires et une pour ceux de mathématiques spéciales. Cette année, le sujet de mathématiques spéciales portait sur « la règle des signes de Descartes » et Hermite se distingua en remarquant un résultat nouveau concernant certaines équations particulières :

> Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation forment une progression arithmétique, l'équation a nécessairement des racines imaginaires. [Terquem 1843]

S'il ne s'agit sans doute pas du résultat de Hermite ayant le plus marqué l'histoire de l'algèbre, il est toutefois intéressant de noter un certain nombres de points commun avec Laguerre. Tout comme le résultat de Laguerre, celui de Hermite est repris et discuté dans les *Nouvelles Annales*. Dans [Guilmin 1846], Adrien Guilmin, normalien de la promotion 1836 en propose par exemple une démonstration avant d'énoncer un corollaire : « si une équation a trois coefficients consécutifs en progression géométrique, elle a des racines imaginaires ». De même, le professeur lyonnais de Virieu généralise le théorème de Hermite en proposant une nouvelle démonstration [de Virieu 1846]. En outre, nous avons retrouvé dans les papiers d'Abel Transon, professeur de classes préparatoires puis examinateur d'admission à l'École polytechnique, les traces du résultat de Hermite. Le brouillon en question contient l'énoncé du théorème ainsi qu'une brève allusion à la démonstration de De Virieu[21].

Finalement, et bien qu'il n'y ait pas de lien directs entre les deux résultats de Laguerre et de Hermite, cela témoigne d'une présence commune dans les milieux d'enseignement des classes préparatoires et de l'École polytechnique. D'après l'*Enseignement mathématique* [1914, p. 352], les deux résultats ont d'ailleurs fait l'objet de questions au concours d'admission de l'École polytechnique dans les années 1880. Cela illustre également le fait que le lien entre les mathématiques de Hermite et de Laguerre ne sauraient se comprendre uniquement du point de vue des idées et des références intertextuelles présentes dans les articles. Ce lien traduit aussi un ancrage commun dans un même milieu professionnel (celui des enseignants) et institutionnel (celui de l'École polytechnique).

3.3. *Une similarité d'approche et de conception des mathématiques*

Dans les articles de Hermite, ce ne sont pas les résultats vus généralement comme les plus importants qui sont repris par Laguerre. Cela s'explique sans doute par le fait qu'Hermite et Laguerre ne s'intéressent pas

21 Pour plus de détails concernant le résultat de Hermite et sa réception, consulter [Vincent 2020].

toujours au même domaines des mathématiques. Laguerre ne publie par exemple quasiment pas en théorie des nombres et n'est pas amené à considérer des questions de transcendances de nombres.

Pourtant, il y a une approche et des conceptions similaires chez les deux mathématiciens. Pour Laguerre comme pour Hermite, la résolution des équations polynomiales n'est pas un sujet d'algèbre isolé du reste de leurs travaux mathématiques. Chez Laguerre, nous avons vu qu'il aborde cette question d'une manière très « analytique » en basant par exemple la démonstration de son théorème sur les équations numériques sur le théorème de Rolle. Cela le mène à généraliser certains résultats aux séries entières et à s'intéresser aux zéros de fonctions analytiques. De la même manière, les travaux de Hermite sur les équations ne se limitent pas à des considérations uniquement « algébriques » [Goldstein et al. 2007, p. 403-406].

De ce point de vue, la démarche de Laguerre, consistant à utiliser les développements en séries et les fractions continues pour résoudre des problèmes relatifs aux équations, est à rapprocher de la démarche d'Hermite lorsqu'il démontre la transcendance du nombre e en utilisant et généralisant les fractions continues [Goldstein et al. 2007, p. 381]. Il n'existe malheuresement pas de commentaire de Laguerre lui-même, dans ses *Œuvres* ou ses correspondances, faisant référence à une influence qu'aurait pu avoir Hermite sur sa conception des mathématiques. Cependant, il est clair qu'il existe une forme d'interdépendance et de similarité entre les approches des deux mathématiciens. Cette proximité n'était d'ailleurs pas nécessairement visible au début de leurs carrières, lorsqu'ils s'intéressaient à des sujets différents, mais devient de plus en en plus claire par la suite, dans les années 1870-1880. S'il existe une proximité en termes d'approches, l'étude des citations dans les *Œuvres* de Laguerre a également permis de montrer que Laguerre faisait aussi bien souvent référence à des objets spécifique définis par Hermite (les polynômes de Hermite, les réduites de la fonction exponentielle, etc.). Pour ainsi dire, les objets qu'Hermite a introduit ou sur lesquels il a travaillé faisaient partie du paysage mathématique, incontournable à qui travaille sur les équations à son époque. Pour Laguerre en tout cas, il est une source d'inspiration du quotidien, avec qui il a par ailleurs l'occasion d'échanger. Cela est donc à relier à une autre proximité qu'a permis de mettre en évidence notre étude : Laguerre et Hermite évoluent dans les mêmes institutions, tant à l'École polytechnique qu'à l'Académie des Sciences et certains de leurs résultats comme ceux sur les équations numériques en sont fortement marqués.

RÉFÉRENCES

Borel (Émile)
[1898] « Compte rendus et analyses, Œuvres de Laguerre », *Bulletin des Sciences mathématiques*, xxii (1898), p. 304–310.

Candèze (Pierre Antoine Gabriel)
[1880] « Sur une règle de M. Laguerre », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 19 (1880), p. 307–311.

Chabert (Jean-Luc)
[2015] « Sur la résolution numérique des équations », dans Gilain (Christain) & Guilbaud (Alexandre), éds., *Sciences mathématiques, 1750 - 1850, continuités et ruptures*, Paris : CNRS éditions, 2015, p. 475–507.

Chemla (Karine), Chorlay (Renaud) & Rabouin (David)
[2016] *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Oxford : Oxford Univ. Press, 2016.

Crosland (Maurice)
[1992] *Science under control, the French Academy of sciences, 1795–1914*, Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1992.

Gilain (Christian) & Guilbaud (Alexandre), éds.
[2015] *Sciences mathématiques : 1750-1850 : continuités et ruptures*, Paris : CNRS éditions, 2015.

Goldstein (Catherine)
[2011] « Charles Hermite's stroll through the Galois fields », *Revue d'histoire des mathématiques*, 17 (2011), p. 211–270.
[2012] Les autres de l'un : deux enquêtes prosopographiques sur Charles Hermite, dans Rollet (Laurent) & Nabonnand (Philippe), éds., *Les uns et les autres…Biographies et prosopographies en histoire des sciences*, Nancy : PUN - Editions Universitaire de Lorraine, 2012, p. 509–540.

Goldstein (Catherine), Schappacher (Norbert) & Schwermer (Joachim), éds.
[2007] *The Shaping of Arithmetic*, Berlin, Heidelberg, New York : Springer Science, 2007.

Guilmin (Adrien)
[1846] « Conséquences de la règle des signes de Descartes », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 1, 5 (1846), p. 239–244.

Hermite (Charles)
[1843] « Sur la division des fonctions abeliennes ou ultra elliptiques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 17 (1843), p. 82.
[1854] « Sur la théorie des formes quadratiques », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 47 (1854), p. 313–368.
[1864] « Sur un nouveau développement en série des fonctions », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 58 (1864), p. 93–100.

[1866] *Sur l'équation du cinquième degré*, Paris : Gauthier-Villars, 1866.

[1873a] « Extrait d'une lettre à Mr Borchardt (sur quelques approximations algébriques) », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 76 (1873), p. 342–344.

[1873b] « Sur la fonction exponentielle », *Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, 77 (1873), p. 18–24.

[1875] « Extrait d'une lettre à M. Fuchs de Gottingue sur quelques équations différentielles linéaires », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 79 (1875), p. 324–338.

[1879] « Sur l'indice des fractions rationnelles », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 7 (1879), p. 128–131.

HERMITE (Charles) & MITTAG-LEFFLER (Gösta)

[1984] « Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883) », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, s. 1, 5 (1984), p. 49–285.

[1985] « Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884-1891) », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, s. 1, 6 (1985), p. 79–217.

HERMITE (Charles) & STIELTJES (Thomas)

[1898] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, vol. 2, Gauthier-Villars, 1898.

LAGRANGE (Joseph-Louis)

[1769] « Sur la résolution des équations numériques », *Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin, année 1767*, 23 (1769), p. 311–352.

[1770] « Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries », *Histoire de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres de Berlin, année 1768*, 24 (1770), p. 204–233.

LAGUERRE (Edmond Nicolas)

[1867] « Sur le calcul des systèmes linéaires, extrait d'une lettre à M. Hermite », *J. Éc. polytech.*, 62 (1867), p. 215–264.

[1874a] « Sur la théorie des équations numériques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 78 (1874), p. 278–280.

[1874b] « Sur la résolution des équations numériques dont toutes les racines sont réelles », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 79 (1874), p. 996–998.

[1874c] « Sur le rôle des émanants dans la théorie des équations numériques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 78 (1874), p. 278–280.

[1877] « Sur la résolution des équations numériques », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 5 (1877), p. 78–92.

[1878a] « Sur la résolution des équations numériques », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 17 (1878), p. 20–25.

[1878b] « Remarques sur quelques points de la théorie des équations numériques », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 17 (1878), p. 104–106; signé « Un abonné ».

[1878c] « Sur le développement suivant les puissances d'un polynôme », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 86 (1878), p. 295–297.

[1879a] « Sur la règle des signes de Descartes », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 18 (1879), p. 5–13.

[1879b] « Sur la séparation des racines d'une équation algébrique à coefficients numériques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 89 (1879), p. 635–637.

[1880a] « Sur la détermination d'une limite supérieure des racines d'une équation et sur la séparation des racines », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 19 (1880), p. 49–57.

[1880b] « Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 19 (1880), p. 161–171.

[1880c] « Sur quelques théorèmes de M. Hermite, extrait d'une lettre adressée à M. Borchardt », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 89 (1880), p. 239–242.

[1880d] « Sur quelques propriétés des équations algébriques qui ont toutes leurs racines réelles », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 19 (1880), p. 224–236.

[1880e] « Sur la fonction exponentielle », *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 8 (1880), p. 11–18.

[1880f] « Sur les équations algébriques dont le premier membre satisfait à une équation linéaire du second ordre », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 90 (1880), p. 809–812.

[1880g] « Théorèmes généraux sur les équations algébriques », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 2, 19 (1880), p. 241–253.

[1880h] « Sur l'approximation des fonctions circulaires au moyen des fonctions algébriques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 90 (1880), p. 304–307.

[1880i] « Sur le développement d'une fonction suivant les puissances croissantes d'un polynôme », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 88 (1880), p. 35–48.

[1881a] « Sur la séparation des racines des équations numériques », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 92 (1881), p. 1146–1149.

[1881b] « Sur une extension de la règle des signes de Descartes », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 92 (1881), p. 230–233.

[1882a] « Sur quelques équations transcendantes », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 94 (1882), p. 160–163.

[1882b] « Sur la détermination du genre d'une fonction transcendante entière », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 94 (1882), p. 635–638.

[1883] « Sur la théorie des équations numériques », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, s. 3, 4 (1883), p. 99–146.

[1884a] « Sur l'approximation des racines des équations algébriques », *Nouvelles annales de mathématiques*, s. 3, 3 (1884), p. 113–118.

[1884b] « Sur quelques points de la théorie des équations numériques », *Acta Mathematica*, 4 (1884), p. 97–121.

[1898] *Œuvres*, vol. 1, Paris : Gauthier-Villars et fils, 1898.

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
[1914] « Discussion sur la préparation mathématique des ingénieurs », 16 (1914), p. 328–355.

ROLLET (Laurent)
[2017] *La correspondance de jeunesse d'Henri Poincaré. Les années de formation. De l'École polytechnique à l'École des Mines (1873-1878),* Cham : Birkhäuser, 2017.

ROLLET (Laurent) & NABONNAND (Philippe), éds.
[2012] *Les uns et les autres – biographies et prosopographies en histoire des sciences,* Collection Histoire des institutions scientifiques, Nancy : Presses universitaires de Nancy : Editions universitaires de Lorraine, 2012 ; OCLC : ocn847520832.

ROUCHÉ (Eugène)
[1887] « Edmond Laguerre, sa vie et ses travaux », *Nouvelles annales de mathématiques,* s. 3, 6 (1887), p. 105–173.

SERFATI (Michel)
[1992] *Fragments d'histoire des mathématiques, Quadrature du cercle, fractions continues et autres contes sur l'histoire des nombres irrationnels et transcendants aux XVIII^e^ et XVIII^e^ siècles,* vol. tome 4, APMEP, 1992.

SINACEUR (Hourya)
[1991] *Corps et modèles : essai sur l'histoire de l'algèbre réelle,* Mathesis, Paris : J. Vrin, 1991.

TERQUEM (Olry)
[1843] « Grand concours de 1843 », *Nouvelles annales de mathématiques,* s. 1, 2 (1843), p. 374–376.

VINCENT (Yannick)
[2019] *Les répétiteurs de mathématiques à l'École polytechnique de 1798 à 1900,* Thèse, École polytechnique, 2019 ; soutenue le 12 décembre 2019.
[2020] « Ce que nous apprend une étude autour des équations numériques à propos de l'École polytechnique au XIX^e^ siècle », *Philosophia Scientiae,* 1 (2020), p. 59–74.
[2022] « Perfectionnement de la règle des signes de Descartes », *Quadrature,* 125 (2022), p. 29–35.

DE VIRIEU
[1846] « Solution de la question 711 IV », *Nouvelles annales de mathématiques,* s. 2, 4 (1846), p. 79–80.