Astérisque

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS
DANIEL PERRIN

Sur la classification des courbes gauches

Astérisque, tome 184-185 (1990)
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1990__184-185__1_0>

184-185 ASTÉRISQUE

1990

SUR LA CLASSIFICATION DES COURBES GAUCHES

Mireille MARTIN-DESCHAMPS, Daniel PERRIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

A.M.S. Subjects classification : 14 H 10, 14 H 50, 14 C 03, 14 F 05

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

On désigne par k un corps algébriquement clos et par R l'anneau de polynômes $k[X, Y, Z, T]$.

Dans tout ce qui suit on appelle courbe gauche (ou simplement courbe) un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_k^3$ de dimension 1 sans composante ponctuelle (immergée ou non), donc localement de Cohen-Macaulay.

Cette restriction apparaît comme la condition minimale pour pouvoir utiliser les techniques de dualité ou de liaison et pour éviter certains phénomènes pathologiques (cf. [jH] ou I 2.2).

A l'inverse, même si l'on s'intéresse en priorité aux courbes lisses et connexes, il est nécessaire d'étudier aussi ces courbes générales, d'abord parce qu'il y a presque toujours des courbes réductibles ou non réduites même dans les plus belles familles de courbes (penser aux courbes planes de degré fixé), ensuite et surtout parce que, comme nous le verrons en IV, de telles courbes plus générales, non lissifiables, peuvent apparaître naturellement comme courbes "minimales" dans les classes de biliaison, même si ces classes contiennent par ailleurs des courbes lisses.

Dans ce travail nous avons donc pris le parti de nous intéresser à ces courbes (au sens général), sans nous préoccuper des problèmes de lissité. Ceci nous permet de travailler en caractéristique quelconque, mais il est clair qu'il reste un travail important "alla Bertini" à faire sur ce point.

La voie usuelle pour aborder la classification des courbes gauches consiste à se donner un certain nombre d'invariants $\lambda_1(C), \ldots, \lambda_n(C)$ — en général numériques — attachés à la courbe C. On a alors à résoudre les deux problèmes fondamentaux suivants :

Problème A : Quelle est l'image de l'application $C \mapsto \lambda(C)$, i.e., quels sont les invariants possibles ?

Problème B : Décrire les fibres de cette application, i.e., la famille $H_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ des courbes d'invariants donnés. Plus précisément on souhaite munir cette famille d'une structure de schéma (qu'on dira généralement "de Hilbert") et on se demande alors en particulier s'il est irréductible ? lisse ? et quelle est sa dimension ?

Historiquement les premiers invariants étudiés ont été le degré $d(C)$ et le genre $g(C)$ des courbes (pour les courbes qui nous concernent, il s'agit évidemment du genre arithmétique). On sait bien qu'il revient au même de considérer la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{O}_C(n)) = nd + 1 - g$ du faisceau des fonctions sur C, tordu par l'entier n, voire celle du faisceau d'idéaux

$\mathcal{J}_C(n)$ qui définit C.

Dans ce cas la réponse au problème A a été donnée (dans le cas des courbes lisses et connexes) par G.Halphen en 1882 (cf. [H]), mais une preuve correcte n'a été fournie qu'un siècle plus tard par Gruson et Peskine (cf. [GP2]).

Il reste alors le problème B, i.e., l'étude des schémas de Hilbert $H_{d,g}$, qui n'a reçu jusqu'à présent que des réponses partielles. En particulier le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ n'est, en général, ni irréductible (cf. cependant [Ein]), ni lisse (cf. [M1]). Pire, si g est grand par rapport à d (disons $g \gg d^{3/2}$), $H_{d,g}$ a une profusion de composantes irréductibles ce qui rend vaine la recherche d'une formule pour sa dimension. (Pour l'intérêt d'une telle formule, cf. par exemple [P], Conjecture C.)

Lorsqu'on étudie de plus près pourquoi $H_{d,g}$ n'est pas toujours irréductible, on se rend compte que la caractéristique d'Euler n'est pas un invariant assez fin pour assurer cette irréductibilité et on est conduit, à la suite d'Halphen, à chercher des invariants plus fins que le degré et le genre.

Un exemple bien connu de schéma de Hilbert réductible est le schéma $H_{9,10}$ qui contient deux composantes H_1 et H_2, l'une formée des intersections complètes de deux surfaces cubiques, l'autre des courbes de bidegré $(6,3)$ sur une quadrique. Ce qui différencie les deux composantes est ici évident : les courbes de H_1 (resp. H_2) vérifient $h^0\mathcal{J}_C(2) = 0$ (resp. $h^0\mathcal{J}_C(2) = 1$). L'invariant qui sépare les deux composantes est donc la **postulation** de C, i.e., la collection de tous les nombres $h^0\mathcal{J}_C(n)$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

On déduit aussitôt de cet exemple en effectuant une liaison par deux surfaces de degré 6 que $H_{27,81}$ a deux composantes irréductibles sur lesquelles $h^1\mathcal{O}_C(6) = h^2\mathcal{J}_C(6)$ vaut respectivement 0 ou 1. Cette fois, l'invariant qui sépare les composantes est la **spécialité**, i.e., la collection des nombres $h^1\mathcal{O}_C(n) = h^2\mathcal{J}_C(n)$, pour $n \in \mathbf{Z}$ (on notera que la liaison échange postulation et spécialité).

L'idée naturelle suggérée par ces exemples est donc de considérer, au lieu de la caractéristique d'Euler du faisceau $\mathcal{J}_C(n)$, tout ou partie de la **cohomologie** de ce faisceau, c'est-à-dire, la postulation, la spécialité et ce que nous appellerons la fonction de Rao : $\rho_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n)$, pour $n \in \mathbf{Z}$ (on notera que le terme $h^3\mathcal{J}_C(n)$ ne présente pas d'intérêt). Bien entendu, comme les $h^i\mathcal{J}_C(n)$, pour $i \geq 1$ et $n \gg 0$ sont nuls, seuls un nombre fini de ces nombres sont pertinents ; de plus, la donnée de deux des trois nombres h^0, h^1, h^2 détermine le troisième.

Forts de ces remarques, nous proposons d'abord, pour étudier les schémas de Hilbert $H_{d,g}$, de considérer leur **stratification naturelle** par les sous-schémas (localement fermés en vertu du Th. de semi-continuité) à cohomologie constante que nous définissons soigneusement au chapitre VI. Il restera ensuite, last but not least, à recoller tous ces sous-schémas pour retrouver $H_{d,g}$, nous donnons dans les derniers chapitres des exemples qui montrent comment on peut aborder ce problème, voir ci-dessous.

Le premier résultat probant dans cette direction concerne les courbes **arithmétiquement de Cohen-Macaulay** (en abrégé ACM), i.e., les courbes qui vérifient pour tout n : $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$. On peut aussi les caractériser comme les courbes qui sont dans la classe de liaison des intersections complètes ([PS]). Dans ce cas les problèmes A et B ont une solution complète, au moins pour les courbes intègres :

A) On connait l'image de l'application $C \mapsto h^0\mathcal{J}_C(n)$ lorsque C est ACM et intègre ([GP1]). Pour cela, Gruson et Peskine introduisent le **caractère numérique** de C (dont nous utiliserons une variante notée $\gamma_C(n)$, cf. plus loin), et dont la donnée est équivalente à celle de la postulation. La condition de [GP1] est alors que ce caractère soit **connexe** (cf. I et V).

B) Le schéma de Hilbert H_γ des courbes ACM intègres de caractère γ est alors irréductible, lisse et de dimension :

$$\delta_\gamma = \sum_{k\geq 1} \gamma(k)\binom{k+2}{2} + \sum_{k,l\geq 1} \gamma(k)\gamma(l)\binom{k-l+2}{1} - \gamma(1),$$

et il est ouvert dans $H_{d,g}$ (Ellingsrud, [E]).

Pour démontrer les résultats de Gruson-Peskine et d'Ellingsrud une voie intéressante et naturelle (qui n'est pas toujours celle qu'ont utilisé ces auteurs) consiste à les prouver d'abord pour les intersections complètes (c'est facile), puis à raisonner par récurrence en utilisant la liaison, ou plutôt la biliaison (ou liaison paire), qui conserve postulation et spécialité. Nous utiliserons systématiquement cette technique dans la suite.

Après ces travaux, l'objectif était de passer au cas général où les $h^1\mathcal{J}_C(n)$ sont non tous nuls. Bien entendu, pour espérer une formule de dimension analogue à celle d'Ellingsrud, il faut pratiquement que le schéma $H_{\gamma,\rho}$ des courbes à cohomologie fixée soit irréductible. Malheureusement il n'en est rien en général (cf. [BB] ou VI 4) et les invariants de nature purement numériques envisagés ci-dessus vont s'avérer insuffisants pour séparer les composantes de $H_{d,g}$, ruinant ainsi le vieil espoir d'Halphen.

En fait, l'invariant pertinent dans la situation actuelle n'est pas seulement numérique, mais algébrique, c'est le module : $M_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$. Il s'agit d'un R-module gradué de longueur finie, introduit par Hartshorne ([rH1]), et étudié par Rao ([R]), dont la propriété majeure est de caractériser les classes de liaison (à décalage de la graduation près pour la liaison paire, à décalage et dualité près pour la liaison impaire). Nous le nommerons simplement module de Rao de la courbe C. On associe à un tel module M sa fonction (de Rao) $\rho(n) = \dim_k M_n$.

Si, comme les auteurs de ces lignes en sont convaincus, la liaison, ou plutôt la biliaison, est appelée à jouer un grand rôle dans la classification, il est tout à fait naturel d'utiliser ce module.

L'intérêt de l'introduction de cet invariant M non discret est de scinder en deux étapes les problèmes A et B pour les invariants γ et ρ. La première étape concerne les modules.

Problème A : Quelles sont les fonctions ρ qui correspondent à un module M ? Ici, la réponse est évidente : toutes. Il suffit de prendre comme module une somme directe de k-espaces vectoriels des bonnes dimensions et d'y faire agir R trivialement (module "de Buchsbaum").

Problème B : Pour ρ fixé, étudier la famille E_ρ des modules de fonction ρ (attention, cette famille n'est pas en général un schéma, ce n'en est un que si l'on rigidifie M en en fixant une base, cf. VI) et de se poser les questions habituelles : irréductibilité, lissité, dimension.

La deuxième étape (dite intermédiaire) va des modules aux courbes :

Problème A : La fonction ρ et un module M de fonction ρ étant fixés, on cherche quels sont les caractères de postulation γ qui conviennent, c'est-à-dire qui correspondent à des courbes de module M.

Problème B : On a, au moins ensemblistement, une flèche naturelle Φ : $H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ qui associe à une courbe C son module de Rao M_C, et pour étudier $H_{\gamma,\rho}$ il reste à décrire la flèche Φ et en particulier à se poser les questions usuelles (irréductibilité, lissité, dimension) sur Φ et sur la fibre $H_{\gamma,M}$ de Φ en M.

L'étape "modules" semble délicate, en particulier parce que la famille E_ρ n'est pas irréductible en général (c'est ainsi que l'on s'aperçoit que $H_{\gamma,\rho}$ n'est pas toujours irréductible, cf. [BB] ou VI 4).

L'objet du présent travail, une fois reconnue cette difficulté incontournable, va être l'étude de l'étape intermédiaire. Autrement dit, nous allons résoudre les problèmes A et B lorsque les invariants choisis sont le module de Rao M_C et le caractère de postulation γ_C.

Disons d'abord un mot des objets utilisés.

a) Le caractère de postulation.

Pour une fonction $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ on définit la **différence première** ∂f par : $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$ et de même les différences successives.

Alors, si C est une courbe on définit son caractère de postulation γ_C par la formule :

$$\begin{aligned}\gamma_C(n) &= \partial^3(h^0\mathcal{J}_C(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n))\\ &= \partial^3 h^0\mathcal{J}_C(n) - \binom{n}{0}\end{aligned}$$

(où $\binom{n}{0} = 0$ pour $n < 0$ et 1 pour $n \geq 0$).
On a les propriétés suivantes :
1) γ_C est nul presque partout.
2)

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \gamma_C(n) = 0$$

3) γ_C détermine la postulation de C :

$$h^0\mathcal{J}_C(n) = \binom{n+3}{3} + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{n-k+2}{2}\gamma_C(k)$$

4) γ_C détermine le degré et le genre de C (cf. I).

5) Si C est ACM et si $s_0 = \inf\{\, n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0 \,\}$, la donnée de γ_C est équivalente à celle du caractère numérique $n_0, n_1, \ldots, n_{s_0-1}$ de [GP1] par les formules :

$$\gamma_C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \ ; \\ -1 & \text{si } 0 \leq n < s_0 \ ; \\ \big|\{i | n_i = n\}\big| & \text{si } n \geq s_0. \end{cases}$$

L'intérêt de γ_C, par rapport au caractère numérique de [GP1], est qu'il conserve tout son sens pour les courbes qui ne sont plus ACM. La différence essentielle est alors que pour $n > s_0$ on peut avoir $\gamma_C(n) < 0$ (par exemple si C est la réunion disjointe de deux droites, on a $\gamma_C(0) = \gamma_C(1) = -1, \gamma_C(2) = 3, \gamma_C(3) = -1$ et les autres termes sont nuls). Cela revient à tolérer des n_i (au sens de [GP1]) intervenant avec des multiplicités négatives.

Les auteurs espèrent convaincre dans ce travail que ce caractère et ses variantes (dont le caractère de spécialité σ_C, cf. I) sont les mieux adaptés à la généralisation voulue, notamment au niveau des calculs.

b) Les résolutions.

On utilise ensuite pour décrire une courbe C deux résolutions canoniques de son faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$.

a) Une résolution dite de type E :

Elle est obtenue à partir d'une résolution graduée minimale de l'idéal saturé I_C de C dans R et est de la forme :

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0$$

où $\mathcal{F}$ est un fibré dissocié (i.e. une somme directe de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules inversibles), et $\mathcal{E}$ un fibré conoyau d'un morphisme injectif de fibrés dissociés.

b) Une résolution dite de type N :

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0$$

où $\mathcal{P}$ est un fibré dissocié et $\mathcal{N}$ un fibré noyau d'un morphisme surjectif de fibrés dissociés (cf. [LR] ou II ci-après).

On remarque qu'une résolution de type E (resp. N) détermine la postulation de C (resp. sa spécialité) et que ces types de résolution sont échangés par une liaison (ou plus généralement par une suite d'un nombre impair de liaisons), mais conservés par liaison paire.

Nous définissons à ce sujet une opération de **biliaison élémentaire** de type (s, h), analogue à celle de [LR] (cf. III) : c'est une suite de deux liaisons par des surfaces Q, S (resp. Q, S') avec deg $Q = s$, deg S' – deg $S = h$. Si C' est obtenue à partir de C par une telle biliaison on a $\mathcal{J}_{C'/Q} \simeq \mathcal{J}_{C/Q}(-h)$ où $\mathcal{J}_{C/Q}$ désigne le faisceau d'idéaux de C dans Q . La liaison est dite **ascendante** (resp. **descendante**) si on a $h \geq 0$ (resp. $h \leq 0$). On contrôle alors complètement la variation des invariants de C dans une telle biliaison (cf. III). Par exemple on a : $M_{C'} = M_C(-h)$ (i.e. $\forall n \ \ M_{C',n} = M_{C,n-h}$). On a aussi :

$$\gamma_{C'}(n) = \gamma_C(n-h) + \binom{n-h}{0} + \binom{n-s}{0} - \binom{n}{0} - \binom{n-s-h}{0}$$

De même il est facile de déterminer les résolutions de type E ou N de $\mathcal{J}_{C'}$ à partir de celles de $\mathcal{J}_C$.

La philosophie de notre travail, s'agissant de ces questions de liaison, est de décrire la classe de biliaison associée à un module M (non nul) au moyen des biliaisons élémentaires, (si possible toutes ascendantes ou toutes descendantes), de façon à pouvoir raisonner par récurrence, par exemple pour calculer les caractères de postulation, voire les dimensions des schémas de Hilbert, cf. VII et les exemples des chapitres IX, X et XI.

Pour cela, reprenant au départ le problème traité par Rao, nous construisons une courbe **minimale** C de la classe, i.e., telle que les modules de Rao des courbes C' de la classe sont des modules décalés à droite par rapport à M_C: $M_{C'} = M_C(-h)$ avec $h \geq 0$.

Ces courbes, dont l'existence est claire (cf. [Mi]) n'étaient bien connues jusqu'ici que dans des cas particuliers : soit avec la condition $e+3 < s_0$ (cf. [LR]) ou pour les courbes de Buchsbaum (cf. [BM1], [BM2], [BM3]).

Dans ce travail, nous construisons **explicitement** (c'est-à-dire en fournissant un algorithme de calcul) la courbe minimale (unique à déformation près) associée à un module M dont on connait une résolution minimale. Pour ce faire, nous partons de la remarque, déjà faite par Rao, que les fibrés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}$ qui interviennent dans les deux résolutions de $\mathcal{J}_C$ sont liés au module de Rao. Précisément, si on une résolution libre graduée minimale $(*)$ de ce module :

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \longrightarrow 0,$$

si on pose $E_0 = \mathrm{Ker}\sigma_2$, $N_0 = \mathrm{Im}\sigma_2$ et si $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{N}_0$ sont les les faisceaux associés aux modules E_0 et N_0, on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}'$ où $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont dissociés et où leurs rangs augmentent en général dans une biliaison ascendante.

On va donc chercher une courbe minimale comme une courbe pour laquelle $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}$ sont minimaux, i.e., $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$ et $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0$ à un décalage près (attention, ces conditions ne suffisent pas à assurer que la courbe est minimale).

On construit la courbe minimale associée à un R-module M gradué de longueur finie, non nul, muni d'une résolution $(*)$ comme ci-dessus, en fabriquant un facteur direct $\mathcal{P}$ de $\mathcal{L}_2$ (faisceau associé au module L_2), de rang égal au rang de $\mathcal{N}_0$ diminué de 1 , tel que le conoyau de la restriction à $\mathcal{P}$ de la flèche $\tilde{\sigma}_2$ associée à σ_2 soit sans torsion, et de degré maximum pour ces conditions. Ce conoyau est alors de rang 1 et c'est, à décalage près, l'idéal de la courbe cherchée.

Plus précisément, si on pose :

$$\mathcal{L}_2 = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-k)^{l_2(k)},$$

on définit par récurrence, en termes de certaines restrictions de la flèche $\tilde{\sigma}_2$, une fonction q de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, avec $q(n) \leq l_2(n)$ (cf. IV). On a alors le théorème (cf. IV 4.1 et 4.3) :

Théorème 1. *Soit M un R-module gradué de longueur finie non nul muni d'une résolution de la forme $(*)$. Avec les notations précédentes, il existe une courbe C , unique à déformation près (à cohomologie et module de Rao constants) dont le faisceau d'idéaux (décalé) admet les résolutions suivantes :*

$$0 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C(h) \to 0$$

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{J}_C(h) \to 0$$

avec

$$\mathcal{P} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-k)^{q(k)}$$

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-k)^{l_2(k)-q(k)}$$

et $h = \deg \mathcal{N}_0 - \deg \mathcal{P}$ *. On a donc* $\mathcal{L}_2 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{F}$*. Ces résolutions déterminent entièrement la cohomologie de* $\mathcal{J}_C$ *et notamment* d, g, γ_C*. On a* $M_C = M(-h)$ *de sorte que* C *est bien dans la classe de biliaison associée à* M*.*

La fonction q est explicitement calculable en termes de rangs de certaines matrices extraites de σ_2. Un algorithme pour ce calcul est explicité en IV 6. Il est illustré par plusieurs exemples (modules associés à une suite régulière, modules de Buchsbaum, modules de dimensions $1, 2, 1$ en degrés $0, 1, 2$).

Le théorème suivant montre qu'on a bien trouvé une courbe minimale associée à M et précise la structure de la classe de biliaison (cf. IV 5.1) :

Théorème 2. *Avec les notations du Th.1 (en particulier la courbe* C *qui y est définie), si* C' *est une courbe de la classe de biliaison définie par* M*, il existe une suite de courbes* $C_0 = C, C_1, \cdots, C_n$ *telles que* C_i *est obtenue à partir de* C_{i-1} *par une biliaison élémentaire* **ascendante** *et* C' *à partir de* C_n *par une déformation à cohomologie et module de Rao constants. En particulier, on a* $M_{C'} = M_C(-h)$ *avec* $h \geq 0$*,* $d(C) \leq d(C')$ *,* $g(C) \leq g(C')$ *de sorte que* C *est une courbe minimale de la classe aux trois sens du module de Rao, du degré et du genre, cf. [LR].*

Ce résultat (sans la construction explicite de la courbe minimale) a été obtenu indépendamment par Ballico, Bolondi et Migliore ([BBM]).

Le problème A pour le couple d'invariants (M, γ) est alors aisément résolu. On sait, d'après Rao ou le théorème 1 ci-dessus que tout module de longueur finie M est, à décalage près, le module de Rao d'une courbe, le théorème 1 précisant de plus la courbe minimale. Pour résoudre entièrement le problème A pour le couple (M, γ), il reste à préciser quels décalages et quels caractères correspondent à un module donné. La réponse est donnée par le théorème 2 qu'on traduit en introduisant une relation d'ordre sur les caractères, $\gamma_{C'} \geq \gamma_C$ qui exprime simplement le fait que C' s'obtient à partir de C par une suite de biliaisons élémentaires ascendantes (cf. V). Cette relation compare essentiellement le caractère $\gamma_{C'}$ au caractère γ_C décalé d'un certain entier h. On a ainsi (cf. V 2.5) :

Théorème 3. *Soit* M *un* R*-module gradué de longueur finie, non nul. Soit* C *la courbe minimale associée à* M *et* γ *son caractère.*

1) Si C' est une courbe de la classe de biliaison définie par M on a $\gamma_{C'} \geq \gamma$.
2) Réciproquement, si γ' est un caractère admissible (cf. V) qui majore γ il existe une courbe C' de la classe de M telle que $\gamma' = \gamma_{C'}$.

Le problème A est alors entièrement résolu par la procédure suivante :
Soit M un module gradué de longueur finie, non nul. On calcule une résolution libre minimale de M. On détermine la courbe minimale C associée à ce module par le théorème 1. On calcule en particulier le caractère γ_C et le décalage h du module de Rao M_C par rapport à M. Ensuite, si C' est une courbe de la classe, on sait que son caractère majore γ_C et on en déduit quels sont les caractères possibles. Enfin, il faut encore noter que, pour γ' fixé, il y a en général plusieurs décalages possibles h tels qu'il existe une courbe C' avec $M_{C'} = M_C(-h)$ et $\gamma' = \gamma_{C'}$, les h convenables étant ceux qui interviennent dans la relation d'ordre $\gamma' \geq \gamma_C$.

La deuxième partie de notre travail (Chapitres VI à XI) est consacrée toute entière à l'étude des schémas de Hilbert et en particulier à la résolution du problème B pour les invariants γ et M.

Nous commençons par définir la **stratification** du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes de degré d et genre g par les sous-schémas $H_{\gamma,\rho}$ à cohomologie constante (cf. VI 3). Les idées sous-jacentes à cette construction (platitude et commutation au changement de base) sont clairement dues à Grothendieck, mais faute d'une référence disponible sur leur application au schéma de Hilbert, nous définissons ici soigneusement (i.e., pas seulement de manière ensembliste) les sous-schémas en question . De façon précise, si γ et ρ sont un caractère de postulation et une fonction de Rao, un point de $H_{\gamma,\rho}$ à valeurs dans un schéma Y est une courbe C_Y de $\mathbf{P}^3 \times Y$, plate sur Y et telle que, si π désigne la projection de $\mathbf{P}^3 \times Y$ sur Y, les faisceaux $R^i\pi_*\mathcal{J}_{C_Y}(n)$ pour $i = 0, 1, 2$ et n quelconque soient localement libres, de rangs donnés par γ et ρ et commutent au changement de base (cf. VI). En particulier, les points rationnels de $H_{\gamma,\rho}$ correspondent à des courbes à cohomologie constante donnée par γ et ρ. De la même manière, nous définissons les schémas H_γ et H_σ des courbes à postulation et à spécialité constante.

Nous définissons ensuite en VI 4 le **"schéma" des modules de Rao**. Précisément, soit ρ une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ à support fini, V_n un k-espace vectoriel de dimension $\rho(n)$ et V_ρ la somme directe des V_n. Le foncteur $\widehat{E}_\rho$ (resp. E_ρ) associe à un schéma Y l'ensemble des structures de $R \otimes \mathcal{O}_Y$-module gradué sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y$ (resp. des classes d'isomorphisme de structures de $R \otimes \mathcal{O}_Y$-module gradué $\mathcal{M} = \oplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}_n$ où $\mathcal{M}_n$ est un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang $\rho(n)$). Le groupe $G = \Pi\, GL(V_n)$ opère sur $\widehat{E}_\rho$ et E_ρ est égal au quotient de $\widehat{E}_\rho$ par cette opération. On montre facilement que $\widehat{E}_\rho$ est représentable par un schéma affine (défini par des équations quadratiques dans un espace affine). En revanche, E_ρ n'est pas représentable en général, même dans des cas très simples, cf. VI 4.3. En effet, les stabilisateurs des points M de $\widehat{E}_\rho$ (c'est-à-dire des modules gradués) sont les groupes $\mathrm{Aut}M$ qui ne sont pas triviaux en général, ni même constants. Le foncteur E_ρ n'est donc pas en général un faisceau, même pour la topologie de Zariski, donc a fortiori pas un schéma.

Cette situation va nous contraindre à un petit détour (cf. aussi [BB]). Le morphisme qui nous intéresse, celui de "l'étape intermédiaire", est le morphisme de foncteurs $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$ qui associe à une courbe son module de Rao. Pour étudier ce morphisme et sa "fibre" $H_{\gamma,M}$, on va passer par le schéma $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ dont les points rationnels C sont les mêmes que ceux de $H_{\gamma,\rho}$, mais avec une donnée supplémentaire : un isomorphisme (de k-espaces vectoriels) du module de Rao M_C sur V_ρ. On a alors une flèche de schémas $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}_\rho$ qui relève Φ et on a ainsi rigidifié la situation en tuant les automorphismes de M. Soit $\widehat{H}_{\gamma,M}$ la fibre en M de cette flèche. Le schéma $H_{\gamma,M}$ des courbes à cohomologie et module de Rao constants est alors le quotient de $\widehat{H}_{\gamma,M}$ sous l'action de $\mathrm{Aut}M$. On montre (VI 4) que c'est un sous-schéma de $H_{\gamma,\rho}$ et que la projection $\widehat{H}_{\gamma,M} \to H_{\gamma,M}$ est lisse, ce qui atteste que le détour effectué est essentiellement innocent.

Le théorème suivant et son corollaire (cf. VII) résolvent alors la première partie du problème B :

Théorème 4. *La flèche $\widehat{\Phi}$ est irréductible et lisse.*

Corollaire 5. *Le schéma $H_{\gamma,M}$ est irréductible et lisse.*

La démonstration du théorème 4 se fait par relèvement infinitésimal, à la manière d'Ellingsrud [E], mais avec des difficultés techniques supplémentaires dûes au fait que les courbes considérées ne sont plus ACM. Le point clé de la preuve est un lemme de relèvement à un anneau artinien des résolutions de types E ou N d'une courbe sur un corps.

Bien entendu ce théorème ramène le problème de la lissité et de l'irréductibilité du schéma $H_{\gamma,\rho}$ au même problème sur $\widehat{E}_\rho$, d'où l'intérêt de l'étude du schéma des modules, cf. ci-dessous problème 1.

Nous étudions aussi dans le chapitre VII l'effet sur les schémas $H_{\gamma,\rho}$ des opérations de liaison et de biliaison. Dans les deux cas nous montrons que les schémas $H_{\gamma,\rho}$ et $H_{\gamma',\rho'}$ correspondant à des courbes échangées par liaison (resp. biliaison) sont dominés par un même schéma $\mathcal{D}$ (de drapeaux au sens de Kleppe [K]), avec les deux projections irréductibles et lisses. En particulier ceci permet de conclure à l'irréductibilité, à la lissité de $H_{\gamma',\rho'}$ partant de celle de $H_{\gamma,\rho}$ et de calculer aisément les dimensions de ces schémas l'une en fonction de l'autre.

Ces résultats sont essentiellement inspirés par les travaux de Kleppe [K] qui en donne une version pour les schémas de Hilbert $H_{d,g}$. Bien entendu, dans ce cas, comme la cohomologie n'est pas constante, les projections ne sont pas en général lisses, ni même plates car les fibres ne sont pas de dimension constante.

Pour finir de résoudre le problème B, il reste à calculer la **dimension** de $H_{\gamma,M}$. Comme ce schéma est irréductible et lisse, il suffit de calculer la dimension de son espace tangent $T_{\gamma,M}$ en un point. Nous déterminons plus généralement au chapitre VIII les espaces tangents aux schémas H_γ, H_σ, $H_{\gamma,\rho}$ et $H_{\gamma,M}$. On sait que l'espace tangent $T_{d,g}$ à $H_{d,g}$ en C est égal à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C)$ c'est-à-dire à l'espace des extensions de $\mathcal{J}_C$ par lui-même. Une première description, évidente, des espaces tangents aux schémas de la stratification (qui sont des sous-espaces de $T_{d,g}$ notés T_γ,...) consiste à traduire en termes d'extensions les conditions sur les faisceaux $R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n)$.

Nous donnons aussi d'autres caractérisations de ces espaces tangents à l'aide des résolutions de type E ou N. Par exemple la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0$$

induit un morphisme τ : $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{F},\mathcal{J}_C)$ et l'espace tangent en C à H_γ (schéma des courbes à postulation constante) n'est autre que le noyau de τ. On peut encore le décrire comme l'espace des extensions de R-modules : $\mathrm{Ext}^1_R(I_C,I_C)^0$. Nous donnons de même des caractérisations des espaces tangents à H_σ, $H_{\gamma,\rho}$, $H_{\gamma,M}$ en termes d'extensions qu'il serait fastidieux d'énumérer ici. Nous renvoyons le lecteur au Chapitre VIII pour toutes précisions.

Nous sommes maintenant en mesure de venir à bout des calculs de dimensions (cf. IX). En particulier nous obtenons pour $H_{\gamma,M}$ le théorème suivant qui donne la réponse au problème B pour γ et M :

Théorème 6. *Soit γ un caractère et M un module gradué de longueur finie. On pose $\rho(n) = \dim M_n$.*
Le schéma de Hilbert $H_{\gamma,M}$ (supposé non vide) des courbes C telles que $\gamma_C = \gamma$ et $M_C = M$ est irréductible, lisse et de dimension $\delta_\gamma + \epsilon_{\gamma,\rho} - h_M$ où h_M désigne la dimension de l'espace vectoriel des endomorphismes de degré 0 de M et où l'on a posé :

$$\delta_\gamma = \sum_{k\geq 1} \gamma(k)\binom{k+2}{2} + \sum_{k,l\geq 1} \gamma(k)\gamma(l)\binom{k-l+2}{1} - \gamma(1),$$

$$\epsilon_{\gamma,\rho} = \sum_{n>0} \rho(n)\partial\gamma(n+4).$$

Nous obtenons en outre les dimensions des autres espaces tangents, cf. IX. Par exemple, si on désigne par h la flèche naturelle de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F})$ associée à une résolution de type E de C, on a les formules suivantes:

Corollaire 7.
1) $\dim T_{\gamma,\rho} = \dim T_{\gamma,M} + \dim \mathrm{Ext}^1_R(M,M)^0$.
2) $\dim T_\gamma = \dim T_{\gamma,M} + \dim \mathrm{Ker} h$.
3) $\dim T_{d,g} = \dim T_\gamma + \dim \mathrm{Im}\tau$.

Le reste de notre travail est consacré à l'étude détaillée d'un certain nombre d'**exemples** : courbes de degré 8 et genre 5 au chapitre IX, courbes de la classe de liaison de deux droites disjointes au chapitre X, courbes de degré 14 et de genre 24 au chapitre XI. Cette étude a plusieurs objectifs :

1) Montrer comment on peut effectivement calculer avec les invariants introduits : les modules M et les nombres h_M et $\dim \mathrm{Ext}^1_R(M,M)^0$ qui leur sont associés, ou encore les caractères γ, σ, ρ et les fonctions δ_γ, $\epsilon_{\gamma,\rho}$,... qui peuvent a priori sembler compliqués. Ceci est fait à la fin du chapitre IX où nous proposons des techniques de calcul qui utilisent les résolutions, la liaison, la biliaison, ainsi qu'une formule de nature purement combinatoire (formule "des pas") qui permet de se ramener pour le calcul de δ_γ au cas des courbes ACM.

2) Montrer comment la connaissance des schémas $H_{\gamma,M}$, $H_{\gamma,\rho}$, H_γ, H_σ permet d'approcher le schéma de Hilbert $H_{d,g}$, conformément au plan initial prévu et fournir quelques idées pour une étude ultérieure. Nous montrons en particulier comment on peut souvent comprendre et dédramatiser certaines singularités de $H_{d,g}$. Vu le théorème 4 ci-dessus, cette étude suppose, en fait, que l'on connaisse le schéma des modules E_ρ (ou plutôt $\widehat{E}_\rho$). Dans le cas de la classe de deux droites ce schéma est réduit à un point. Dans les autres cas, cf. par exemple au chapitre XI, nous faisons à la main les calculs qui nous sont nécessaires. Il est clair qu'une étude plus approfondie s'impose, voir plus loin.

La philosophie qui tend à se dégager de ces exemples est la suivante. On a vu que le schéma $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ est lisse sur $\widehat{E}_\rho$. Dans les cas étudiés, les schémas $\widehat{E}_\rho$ étant très simples, on montre que les schémas $H_{\gamma,\rho}$ sont en fait lisses et irréductibles. Les schémas H_γ et H_σ sont stratifiés par les $H_{\gamma,\rho}$ et le théorème de semi-continuité explique comment se font les diverses spécialisations et générisations possibles. Ces schémas, H_γ et H_σ, dans les exemples étudiés, sont lisses aux points génériques des strates $H_{\gamma,\rho}$. Le schéma $H_{d,g}$ enfin est stratifié par les précédents et cette stratification permet le plus souvent d'en décrire les composantes irréductibles, liées aux strates, et d'en comprendre certaines singularités (notamment celles qui apparaissent à l'intersection des adhérences de strates, cf. X). La seule exception notable, rétive à une explication complète, est la composante non réduite de $H_{14,24}$, cf. XI. Les dimensions des schémas se calculent facilement grâce aux calculs effectués en IX et aux techniques de liaison. Concernant les singularités et les générisations, il est manifeste sur tous les exemples et notamment ceux du chapitre X qu'elles sont étroitement liées à l'existence de termes répétés dans les résolutions minimales. A cet égard les lemmes de "générisation simplifiante" (X 4.1, 4.2, 4.3) ont une importance capitale et sont sans doute susceptibles de vastes généralisations.

Problèmes et perspectives.

On peut considérer que les résultats ci-dessus (théorèmes 3 et 4) résolvent entièrement les problèmes A et B pour "l'étape intermédiaire" (c'est-à-dire l'étude du morphisme $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$) de la classification des courbes. Pour avoir une classification vraiment satisfaisante il reste à étudier de manière plus approfondie les étapes extrêmes et à résoudre les problèmes de lissité :

1) Etude de $\widehat{E}_\rho$ et E_ρ :

Elle nous paraît être la tâche la plus urgente dans la perspective de la classification des courbes gauches, l'objectif étant de passer des invariants γ et M aux invariants γ et ρ.

Les questions essentielles à cet égard nous semblent être les suivantes (comme on le constatera elles ne sont pas indépendantes) :

a) Etudier le problème de la représentabilité de E_ρ. Sur quels sous-schémas de $\widehat{E}_\rho$ le quotient existe-t-il?

b) Quand $\widehat{E}_\rho$ est-il irréductible ? lisse ? est-il toujours génériquement lisse, i.e. réduit? Préciser les composantes irréductibles et les ouverts de lissité.

Quelle est la dimension de $\widehat{E}_\rho$, de E_ρ ? Comparer avec celle de l'espace tangent $\mathrm{Ext}^1_R(M,M)^0$?

c) Pour ρ fixée, décrire les modules M en commençant par les génériques. Donner les générateurs et les relations et plus précisément les résolutions. L'idéal en ce domaine serait de disposer d'un algorithme explicite que l'on puisse soumettre au besoin à un traitement informatique.

Ces problèmes devraient pouvoir se traiter, comme ceux des schémas de Hilbert, en stratifiant le schéma E_ρ.

Cette étude, jointe à nos résultats permettrait sans doute de résoudre les problèmes A et B pour les invariants γ et ρ i.e., pour toute la cohomologie. Pour le problème B c'est à peu près clair vu la lissité de $\widehat{\Phi}$. Pour le problème A, il faudrait pour cela disposer en plus de théorèmes de finitude explicites, permettant d'affirmer que pour un degré d et un genre g fixés la "taille" du module de Rao est bornée en fonction de d et g. Cela doit pouvoir se faire avec les techniques de IV 6.

2) Passage des $H_{\gamma,\rho}$ aux $H_{d,g}$.

Il s'agit ici de recoller les sous-schémas $H_{\gamma,\rho}$ pour reconstituer $H_{d,g}$. Les exemples que nous étudions ici montrent que cela est possible (mais compliqué, même en petit degré) et qu'une voie essentielle pour cela est sans doute l'étude différentielle de ces schémas. L'examen des résolutions et de leurs répétitions jouera aussi manifestement un grand rôle dans ce cadre et un objectif important est l'extension des lemmes de générisation simplifiante du chapitre X. On peut interpréter ces lemmes comme des propriétés de lissité de certains schémas de flèches et ils sont directement liés au problème de savoir si la courbe générique d'un schéma $H_{\gamma,\rho}$ est un point lisse des schémas H_γ et H_σ qui la contiennent, ce qui est le cas dans les exemples étudiés. Si tel était encore le cas en général, cela signifierait que les schémas $H_{\gamma,\rho}$, H_γ et H_σ sont génériquement lisses (au moins si tel est le cas pour $\widehat{E}_\rho$). Les singularités vraiment méchantes seraient alors limitées au niveau du schéma total $H_{d,g}$ comme dans le cas de $H_{14,24}$.

3) Problèmes de lissité des courbes. Nous avons délibérément écarté ces problèmes dans ce travail. Il n'empêche qu'ils se posent et qu'il faudra sans doute des techniques nouvelles pour les aborder, mais la construction des courbes minimales que nous donnons ici est au moins un point de départ.

Applications.

Il est clair que tout progrès dans un problème de classification comme celui-ci doit apporter, à plus ou moins long terme, son lot d'applications. Nous avons en particulier en projet les suivantes :

a) **Majoration des dimensions des schémas de Hilbert** à l'aide du théorème 6 ci-dessus (cf. conjecture C de [P]).

b)**Construction de courbes "générales".**

De nombreux géomètres recherchent depuis longtemps (comme d'autres poursuivent des baleines blanches) des courbes "générales", vaguement mythiques qui seraient, dans chaque schéma de Hilbert, plus belles que les autres.

Une tentative en ce sens a été la quête, très active ces dernières années, des courbes de rang maximum. A dire vrai, il nous semble que tout autant que celles-ci, les courbes de corang maximum (i.e. telles que $H^1\mathcal{J}_C(n)$ et $H^1\mathcal{O}_C(n)$ ne soient pas simultanément non nuls) méritent l'attention. Plus généralement, l'une des idées-force qui nous est apparue dans ce travail et dont nous aimerions convaincre le lecteur est que l'on doit mener de front les études duales de la postulation et de la spécialité (donc les problèmes de rang et de corang maximum) ou encore des résolutions de type E et N, sans privilégier l'un des points de vue a priori.

A la vérité, les courbes les plus belles sont sans doute les courbes qui sont à la fois de rang et de corang maximum (on dit encore que leur l'idéal $\mathcal{J}_C$ a une cohomologie semi-naturelle). Ces courbes sont, en tous cas, ensemblistement générales en vertu du théorème de semi-continuité et l'hypothèse assure que les espaces tangents à $H_{\gamma,\rho}$ et $H_{d,g}$ sont les mêmes, ce qui signifie qu'elles sont aussi schématiquement générales et qu'elles sont des points lisses du schéma de Hilbert, pourvu que les modules de Rao correspondants soient des points non singuliers de $\widehat{E}_\rho$. Cependant, nous montrerons, dans un prochain travail, que cela n'est pas toujours vrai donc que ces courbes peuvent être des points singuliers du schéma de Hilbert, ce qui contredit une conjecture de Walter (raffinant celle, déjà infirmée, de Sernesi). Là encore, comme au Chapitre X, les singularités du schéma de Hilbert se révèleront liées aux résolutions plus qu'à la cohomologie.

O RAPPELS ET NOTATIONS

Dans tout ce travail, nous travaillons sur un corps k algébriquement clos. On désigne par Ens (resp. Sch/k) la catégorie des ensembles (resp. des k-schémas), par R l'anneau de polynômes $k[X, Y, Z, T]$, par $\mathbf{m}$ l'idéal (X, Y, Z, T).

1. Modules.

On désigne par A un anneau, par S l'anneau de polynômes $A[X, Y, Z, T]$ gradué de la manière usuelle, par J l'idéal (X, Y, Z, T), de sorte que l'on a $S/J \simeq A$. Pour tout S-module M (resp. tout S-homomorphisme u), on note $\overline{M}$ (resp. $\overline{u}$) la réduction modulo J de M (resp. u).

Pour tout couple de S-modules M, N, on note $\mathrm{Hom}_S(M, N)$ (ou plus simplement $\mathrm{Hom}(M, N)$) l'ensemble des S-homomorphismes de M dans N. Si M et N sont des S-modules gradués, on note $\mathrm{Hom}_S(M, N)^d$ (ou plus simplement $\mathrm{Hom}(M, N)^d$) l'ensemble des S-homomorphismes homogènes de degré d de M dans N, $\mathrm{Ext}^i_S(.,.)^d$ les foncteurs dérivés du bifoncteur $\mathrm{Hom}_S(.,.)^d$; sauf mention explicite du contraire, tous les homomorphismes de S-modules gradués sont supposés homogènes de degré 0.

Si $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n$ est un S-module gradué, on note $M(p)$ le module gradué décalé défini par : $M(p)_n = M_{n+p}$.

Lemme 1.1. (Nakayama gradué). *Soit M un S-module gradué de type fini. Alors, $\overline{M} = 0$ implique $M = 0$.*

Démonstration. Si M n'est pas nul, on prend un générateur homogène x de degré minimal dans M, il est nul dans $\overline{M}$, donc s'écrit comme combinaison linéaire finie des générateurs de M, à coefficients dans J, ce qui est absurde pour une raison de degré.

Corollaire 1.2. *Soit $f : M \to N$ un homomorphisme (homogène de degré zéro) entre deux S-modules gradués de type fini . Si $\overline{f}$ est surjectif, il en est de même de f .*

Démonstration. On applique le lemme 1 à $\mathrm{Coker} f$.

Corollaire 1.3. *On suppose A local noethérien. Un S-module gradué M plat et de type fini est libre, i.e. une somme directe finie de $S(-n_i)$. En particulier, tout facteur direct d'un S-module gradué libre de type fini est libre.*

Démonstration. Comme M est plat sur S, $\overline{M}$ est plat sur A donc libre. Si les éléments homogènes $x_1, \ldots, x_n$ de degrés d_i engendrent M, on peut supposer que leurs images $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r$ avec $r \leq n$ forment une base de $\overline{M}$. On considère alors l'homomorphisme $f : L = \bigoplus_{i=1}^r S(-d_i) \to M$ défini par les x_i, il est surjectif car $\overline{f}$ l'est (cf.1.2). D'autre part, comme M est plat sur S, la suite $0 \to K \to L \xrightarrow{f} M \to 0$ reste exacte après réduction modulo J et comme $\overline{f}$ est aussi injectif, il en résulte que f est injectif.

Dans la suite de ce paragraphe, nous nous limiterons au cas où $A = k$, donc $S = R$.

Définitions 1.4. *Une* **présentation graduée minimale** *de M (resp. un* **homomorphisme gradué minimal***) est un homomorphisme de R-modules gradués :*
$\varphi : L = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-d_i) \to M$ tel que $\overline{\varphi}$ soit bijectif (resp. injectif). Il revient au même de dire que les images $x_1, \dots, x_r$ des générateurs du R-module libre L forment un système minimal (resp. une partie d'un système minimal) de générateurs de M.
Une **résolution graduée minimale** *de M est une suite exacte de R-modules libres gradués :*

$$0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\varphi_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\varphi_1} L_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \longrightarrow 0,$$

telle que $\overline{\varphi}_0$ soit bijectif et $\overline{\varphi}_i$ soit nul pour tout $i > 0$. Il revient au même de dire que pour tout $i \geq 0$, φ_i définit une présentation graduée minimale de $\mathrm{Ker}\varphi_{i-1}$.

Lemme 1.5. *Soient $\varphi : L = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-d_i) \to M$ un homomorphisme gradué minimal et $\varphi' : F = \bigoplus_{j=1}^{s} R(-d_j) \to M$ un homomorphisme gradué surjectif. Alors il existe un homomorphisme gradué $\theta : L \to F$ injectif tel que $\varphi = \varphi'\theta$ et un R-module libre gradué L' tel que $F \simeq L \oplus L'$.*

Démonstration. L'existence de θ est immédiate. Il est défini par une matrice à coefficients homogènes, dont tous les mineurs sont aussi homogènes. Puisque $\overline{\varphi}$ est injectif, $\overline{\theta}$ l'est aussi, donc un $s-r$-mineur de la matrice est non nul modulo $\mathbf{m}$, donc est inversible dans R. On en déduit que θ admet une rétraction.

Lemme 1.6. *Une résolution graduée minimale d'un R-module gradué s'identifie à un facteur direct de n'importe quelle autre résolution libre graduée, en particulier une telle résolution est unique à isomorphisme près.*

Démonstration. Elle est analogue à celle de 1.5.

1.7. Soit $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} M_n$ un R-module gradué. Le k-espace vectoriel dual

$$M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_k(M_{-n}, k) = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} (M^*)_n$$

gradué par les $(M^*)_n$, est muni d'une structure de R-module par $a.f(x) = f(ax)$ pour $a \in R$, $f \in M^*$, $x \in M$.

Remarques 1.8.

a) Ne pas confondre M^* et $M^\vee = \mathrm{Hom}_R(M, R)$.

b) Si M est de longueur finie sur R, il en est de même de M^*.

Exemples 1.9.

a) Si $M = R$, $(R^*)_n = \mathrm{Hom}_k(R_{-n}, k)$ est non nul pour $n \leq 0$, nul pour $n > 0$.

b) Si $M = R(d)$, on a $(M^*)_n = \mathrm{Hom}_k(R_{d-n}, k) = (R^*)_{n-d}$, donc on a $R(d)^* = R^*(-d)$.

Proposition 1.10. *Soient M et L deux R-modules gradués. Si L est libre de type fini, on a un isomorphisme de k-espaces vectoriels, fonctoriel en M :*

$$\mathrm{Hom}_R(M, L^*)^0 \simeq (\mathrm{Hom}_R(L^\vee, M)^0)^*.$$

Démonstration. Démontrons le d'abord dans le cas $L = R$. On a alors $\mathrm{Hom}_R(L^\vee, M)^0 = M_0$. Puisque $(R^*)_0 = k$, on a une flèche évidente λ_0 : $\mathrm{Hom}_R(M, R^*)^0 \to \mathrm{Hom}_k(M_0, k)$, qui à un homomorphisme associe sa restriction à M_0. La flèche en sens inverse se construit grâce à la structure de R-module de M : pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a une application bilinéaire $\mu_n : R_{-n} \times M_n \to M_0$. Soit alors $f_0 \in \mathrm{Hom}_k(M_0, k)$; pour tout n, on définit $f_n : M_n \to (R^*)_n = \mathrm{Hom}_k(R_{-n}, k)$ par $f_n(x).a = f_0(\mu_n(a, x))$. On vérifie aisément qu'on obtient bien ainsi un élément de $\mathrm{Hom}_R(M, R^*)^0$ et que ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre.

Dans le cas $L = R(d)$, on déduit de ce qui précède qu'on obtient un isomorphisme λ_d:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M, R(d)^*)^0 = \mathrm{Hom}_R(M, R^*(-d))^0 &= \mathrm{Hom}_R(M(d), R^*)^0 \\ &\simeq \mathrm{Hom}_k(M_d, k) = (\mathrm{Hom}_R(R(-d), M)^0)^*,\end{aligned}$$

qui à un homomorphisme associe sa restriction à M_d.

Enfin, si $L = \bigoplus_{i=1}^r R(d_i)$, la somme directe des λ_{d_i} est l'isomorphisme cherché de

$$\mathrm{Hom}_R(M, L^*)^0 = \bigoplus_{i=1}^r (\mathrm{Hom}_R(M, R(d_i)^*)^0)$$

sur

$$(\mathrm{Hom}_R(L^\vee, M)^0)^* = \bigoplus_{i=1}^r (\mathrm{Hom}_R(R(-d_i), M)^0)^*.$$

Corollaire 1.11. *Soit M un R-module gradué de type fini. On a un isomorphisme (homogène de degré 0) :* $\mathrm{Hom}_R(M, R^*) \simeq M^*$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(M,R^*) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_R(M,R^*)^n &= \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathrm{Hom}_R(M(-n),R^*)^0 \\ &\simeq \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} M^*_{-n} = M^*.\end{aligned}$$

Proposition 1.12. *Soit M un R-module gradué de longueur finie, et M^* son dual. Alors on a $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$ pour $i\neq 4$ et $\mathrm{Ext}^4_R(M,R)\simeq M^*(4)$.*

Démonstration. Ce sont des conséquences de la dualité locale (cf. [G]). D'une part, puisque $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)$ est le dual de $H^{4-i}_{\mathbf{m}}(M)$, il est nul pour $i\neq 4$ puisque le support de M est de dimension 0 ; d'autre part les deux foncteurs $M\to M^*$ et $M\to \mathrm{Ext}^4_R(M,R)(-4)$ sont deux foncteurs dualisants de la catégorie des R-modules gradués de longueur finie dans elle-même, donc sont isomorphes.

2. Faisceaux.

Soient X un schéma, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathcal{O}_X$-modules. On note $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ l'ensemble des homomorphismes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ le faisceau des homomorphismes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}(.,.)$ et $\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_X}(.,.)$ les dérivés des bifoncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(.,.)$ et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(.,.)$. On supprimera l'indice $\mathcal{O}_X$ lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible. Enfin on note $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ le schéma (au-dessus de X) des homomorphismes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.

L'espace projectif $\mathbf{P}^3_k$ sera noté simplement $\mathbf{P}^3$, et son faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$. Dans la suite tous les $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules seront supposés **cohérents**.

Pour tout R-module gradué M (resp. tout R-homomorphisme u), on note $\widetilde{M}$ (resp. $\widetilde{u}$) le $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module (resp. l'homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules) associé.

Si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module, on note $\mathcal{F}^\vee$ son dual, $H^i\mathcal{F}$ l'espace vectoriel $H^i(\mathbf{P}^3,\mathcal{F})$, $h^i\mathcal{F}$ sa dimension, et $\chi(\mathcal{F})$ sa caractéristique d'Euler-Poincaré. On pose $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^i\mathcal{F}(n) = H^i_*\mathcal{F}$. C'est un R-module gradué.

On rappelle qu'un fibré est par définition un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module localement libre de type fini.

Proposition 2.1. *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules, $E=H^0_*\mathcal{E}$ et $F=H^0_*\mathcal{F}$. On a une suite exacte, dite de comparaison :*

$$\begin{aligned}0\to \mathrm{Ext}^1_R(E,F)^0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \to \mathrm{Hom}_R(E,H^1_*\mathcal{F}) \to &\mathrm{Ext}^2_R(E,F)^0 \\ &\to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{E},\mathcal{F})\end{aligned}$$

Démonstration. On a l'égalité de foncteurs de la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules dans $\underline{\mathrm{Ens}}$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\widetilde{E},.) = \mathrm{Hom}_R(E,.)\circ H^0_*$. La suite exacte des termes de bas degré associée à la suite spectrale des foncteurs composés nous donne le résultat.

On peut facilement décrire les deux premières flèches. Un élément de $\mathrm{Ext}^1_R(E,F)^0$ correspond à la classe d'une extension de R-modules gradués : $0 \to F \to G \to E \to 0$. Son image dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ est la classe de la suite exacte de $\mathcal{O}_\mathbf{P}$-modules associée.

L'image de la classe d'une extension de $\mathcal{O}_\mathbf{P}$-modules : $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to 0$ dans $\mathrm{Hom}_R(E, H^1_*\mathcal{F})$ est le cobord associé à cette suite exacte.

Corollaire 2.2. *Avec les notations de 2.1, si $H^1_*\mathcal{F}$ est nul, on a un isomorphisme :* $\mathrm{Ext}^1_R(E,F)^0 \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$.

Définition 2.3. *On appelle* **fibré dissocié** *une somme directe finie de faisceaux de la forme $\mathcal{O}_\mathbf{P}(n)$, $n \in \mathbf{Z}$.*

Proposition 2.4. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_\mathbf{P}$-module sans torsion de rang 1. Il existe $a \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathcal{F}(a)$ soit le faisceau d'idéaux d'un fermé de $\mathbf{P}^3$ de codimension ≥ 2. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau d'idéaux, a est positif ou nul.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{F}$ est sans torsion, il est localement libre en codimension 1, et l'homomorphisme canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est injectif et est un isomorphisme en codimension 1. D'autre part, $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un $\mathcal{O}_\mathbf{P}$-module réflexif de rang 1 donc est de la forme $\mathcal{O}_\mathbf{P}(-a)$, et $\mathcal{F}$ est isomorphe à $\mathcal{J}(-a)$, où $\mathcal{J}$ est l'idéal du fermé de $\mathbf{P}^3$ en-dehors duquel $\mathcal{F}$ est localement libre.

Si $\mathcal{F}$ est un idéal, $\mathcal{F}^{\vee\vee} = \mathcal{O}_\mathbf{P}(-a)$ est contenu dans $\mathcal{O}_\mathbf{P}$, donc on a $a \geq 0$.

3. Courbes.

Une **courbe** C de $\mathbf{P}^3$ est un sous-schéma fermé purement de dimension 1, localement Cohen-Macaulay, c'est-à-dire sans points immergés.

Une courbe C est définie par un faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$, et par un idéal saturé de R $I_C = H^0_*\mathcal{J}_C$. On désigne par R_C (resp. A_C) l'anneau R/I_C (resp. $H^0_*\mathcal{O}_C$).

On pose

$$s_0(C) = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\};$$
$$e(C) = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}.$$

Proposition 3.1.
Considérons la suite d'homomorphismes de R-modules gradués :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{a(n)} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0, \tag{1}$$

et la suite d'homomorphismes de $\mathcal{O}_\mathbf{P}$-modules :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{a(n)} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{b(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Alors l'exactitude de (1) est équivalente à celle de (2).

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ le noyau de $\tilde{\pi}$. En prenant la cohomologie, on déduit de l'exactitude de (2) des suites exactes :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{a(n)} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \longrightarrow H^0_* \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow H^0_* \mathcal{E} \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow H^1_* \mathcal{E}$$

mais $H^1_* \mathcal{E}$ est nul puisque l'on a

$$H^1_*(\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{b(n)}) = H^2_*(\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{a(n)}) = 0$$

d'où l'exactitude de (1).

D'autre part, le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$ est exact donc l'exactitude de (1) entraîne celle de (2).

Proposition 3.2. *La flèche $\theta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$ provenant de la suite exacte : $0 \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{O}_C \to 0$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On a un lemme d'algèbre linéaire :

Lemme 3.3. *Soit A un anneau, $\varphi : A^{n+1} \to A^n$ une application linéaire définie par une matrice M. Soit I l'idéal engendré par les n-mineurs de M. Alors l'image de φ contient le sous-module I^n de A^n.*

Démonstration. Soit $j : A^n \to A^{n+1}$ l'application linéaire correspondant au choix de n vecteurs de la base canonique de A^{n+1}, $\psi = \varphi j$ et Δ le déterminant de ψ, qui est un des n-mineurs de M. Si ${}^{ad}\psi$ est l'adjointe de ψ, on a $\psi\, {}^{ad}\psi = \Delta Id$, donc l'image de φ contient ΔA^n. Ceci étant vrai pour tous les n-mineurs de M, l'image de φ contient I^n.

Le lemme 3.3 entraine le corollaire suivant :

Corollaire 3.4. *Soit A l'anneau local d'un point fermé de $\mathbf{P}^3$, $X = \mathrm{Spec} A$, I l'idéal qui définit la courbe C dans X. La flèche naturelle $\theta' : \mathrm{Hom}_A(I, A/I) \to \mathrm{Ext}^1_A(I, I)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soient $\mathcal{J}$ le faisceau associé à l'idéal I, U l'ouvert complémentaire de C dans X. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & \mathrm{Hom}_A(I, I) & \to & \mathrm{Hom}_A(I, A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(U, \mathcal{O}_X) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{J}|_U, \mathcal{J}|_U) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{J}|_U, \mathcal{O}_U) \end{array}$$

où les flèches de la première ligne sont définies de manière évidente, les flèches de la deuxième ligne, qui sont leurs restrictions, sont des isomorphismes, et les flèches verticales sont injectives car $\mathrm{Hom}_A(I,I)$ et $\mathrm{Hom}_A(I,A)$ sont sans torsion. De plus $A \to H^0(U,\mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme puisque le complémentaire de U est de codimension 2, donc il en est de même de toutes les flèches du diagramme.

De la suite exacte $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ on déduit donc la suite exacte de cohomologie :

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(I,A/I) \xrightarrow{\theta'} \mathrm{Ext}^1_A(I,I) \to \mathrm{Ext}^1_A(I,A) \to \mathrm{Ext}^1_A(I,A/I)$$

et il reste à montrer que la flèche $\mathrm{Ext}^1_A(I,A) \to \mathrm{Ext}^1_A(I,A/I)$ est injective. Soit K son noyau.

L'anneau A/I est un A-module de Cohen-Macaulay de profondeur 1, donc de dimension projective 2. L'idéal I a donc une résolution de la forme :

$$0 \longrightarrow A^n \xrightarrow{\varphi^\vee} A^{n+1} \xrightarrow{\psi} I \longrightarrow 0$$

qui est localement scindée dans U.

Considérons l'homomorphisme $\overset{n}{\wedge}\varphi : A^{n+1} \to A$ défini par les n-mineurs de φ. Il est surjectif dans U, et vérifie $(\overset{n}{\wedge}\varphi)\varphi^\vee = 0$, donc il existe $a \in A$ tel que $\overset{n}{\wedge}\varphi = a\psi$. Si a n'est pas inversible, $\overset{n}{\wedge}\varphi$ est nul sur le fermé non vide $U \cap \mathrm{Spec}A/(a)$, ce qui est une contradiction.

Donc on peut supposer que ψ est défini par les n-mineurs de φ. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & I^n \arrow[d] & K \arrow[d] & \\
A^{n+1} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & A^n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ext}^1_A(I,A) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
(A/I)^{n+1} \arrow[r, "\varphi\otimes_A A/I"] & (A/I)^n \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_A(I,A/I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

L'image de I^n dans $\mathrm{Ext}^1_A(I,A)$ est égale à K, et d'après 3.3, elle est nulle.

Fin de la démonstration de 3.2. D'après ce qui précède, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules : $\mathcal{O}_{\mathbf{P}} \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C)$, donc $H^1\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) = H^2\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) = 0$. La suite exacte des termes de bas degré associée à la suite spectrale des Ext nous donne alors un isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) \to H^0\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C)$.

De plus, l'homomorphisme de faisceaux : $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$ est un isomorphisme. On vérifie la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\theta} & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & H^0\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \end{array}$$

où la première flèche verticale est l'isomorphisme naturel et la deuxième est l'isomorphisme ci-dessus. D'où le résultat.

Définition et propriété 3.5. *Soient d, g des entiers, S un schéma. Une* **famille de courbes de degré** d **et genre** g *paramétrée par S est un sous-schéma fermé $\mathcal{C}_S$ de $\mathbf{P}^3 \times S$, plat sur S, dont les fibres géométriques sont des courbes de degré d et genre g. On définit ainsi un foncteur, représentable par un schéma $H_{d,g}$, appelé* **schéma de Hilbert** *des courbes de $\mathbf{P}^3$ de degré d et genre g (cf. [FGA]).*

I LES INVARIANTS

Nous introduisons dans ce numéro les invariants attachés à une courbe C: ses caractères de postulation γ_C, de spécialité σ_C, son module de Rao M_C et la fonction associée ρ_C.

1. Fonctions sur Z.

Nous aurons besoin de quelques résultats faciles sur les fonctions de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$. Les démonstrations sont laissées au lecteur.

a. Conventions sur les coefficients binômiaux.

On définit pour $n, p \in \mathbf{Z}$ le symbole $\binom{n}{p}$ comme suit :

Si $p \geq 0$ et $n \geq p$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

(avec, bien sûr, $0! = 1$).

Si $p \geq 0$ et $n < p$ $\binom{n}{p} = 0$.

Si $p < 0$ et $p \leq n \leq -1$

$$\binom{n}{p} = (-1)^{-(n+p)} \binom{-p-1}{-n-1}.$$

Si $p < 0$ et ($n < p$ ou $n \geq 0$) $\binom{n}{p} = 0$.

On vérifie alors que la formule de Pascal :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

vaut pour tous $p, n \in \mathbf{Z}$.

On notera que $\binom{n}{-1}$ est la fonction de Dirac au point -1.

b. Différences.

Définition 1.1. *Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ une application. On définit sa différence première ∂f par la formule $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$. On définit de même la différence p-ième par $\partial^0 f = f$ et $\partial^p f = \partial(\partial^{p-1}) f$ pour $p \geq 1$.*

Remarque 1.2. Si la fonction g est donnée par $g(n) = f(a-n)$, on a :

$\partial^k g(n) = (-1)^k \partial^k f(a+k-n)$.

Proposition 1.3. *On a, pour $p \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{Z}$:*

$$\partial^p f(n) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} f(n-k)$$

Proposition 1.4. *Posons, pour $n, p \in \mathbf{Z}$, $f_p(n) = \binom{n}{p}$. On a, pour $k \in \mathbf{N}$:*

$$\partial^k f_p(n) = \binom{n-k}{p-k} = f_{p-k}(n-k).$$

Remarque 1.5. Bien sûr, la différence ∂f est nulle pour $n \gg 0$ (resp. $n \ll 0$) si et seulement si f est constante pour $n \gg 0$ (resp. $n \ll 0$).

c. Primitives.

Définition 1.6. *Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ une application. On appelle primitive de f une fonction F telle que $\partial F = f$. On définit de même les primitives p-ièmes.*

Proposition 1.7. *Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ une application, F une primitive de f, $n_0 \in \mathbf{Z}$. On a les formules :*

$$F(n) = \begin{cases} F(n_0) + \displaystyle\sum_{k=n_0+1}^{n} f(k), & \text{pour } n > n_0 \text{ ;} \\ F(n_0) - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n_0} f(k), & \text{pour } n < n_0. \end{cases}$$

En particulier, il existe une unique primitive de f qui prend une valeur donnée en n_0.

Corollaire 1.8. *Si f est nulle pour $n \gg 0$ (resp. $n \ll 0$), f a une unique primitive $f^\flat$ (resp. $f^\sharp$) nulle pour $n \gg 0$ (resp. $n \ll 0$), et on a :*

$$f^\flat(n) = - \sum_{k \geq n+1} f(k) \text{ ;}$$
$$f^\sharp(n) = \sum_{k \leq n} f(k) \text{ .}$$

Remarque 1.9. Si f est à support fini (i.e., nulle pour $n \gg 0$ et $n \ll 0$), f admet à la fois une primitive nulle pour $n \gg 0$ et une autre nulle pour $n \ll 0$ et on a :

$$f^\flat = f^\sharp \iff \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(n) = 0.$$

Définition 1.10. *Une fonction $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, à support fini, et telle que l'on ait $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = 0$ est appelée un* **caractère**.

Proposition 1.11. *La différence première d'une fonction à support fini est un caractère. Une somme de caractères est un caractère. Un caractère admet une unique primitive à support fini.*

Proposition 1.12. *(Primitives d'ordre supérieur). Soit $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ une application nulle pour $n \ll 0$ (resp. $n \gg 0$) et $p \in \mathbf{N}$. Il existe une unique primitive $p+1$-ème de f, notée $f^{\sharp(p+1)}$ (resp. $f^{\flat(p+1)}$), nulle pour $n \ll 0$ (resp. $n \gg 0$). On a :*

$$f^{\sharp(p+1)}(n) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{n-k+p}{p} f(k) \, ;$$

$$f^{\flat(p+1)}(n) = (-1)^{p+1} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{k-n-1}{p} f(k) \, .$$

Proposition 1.13. *Soit $F : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ une fonction à support fini et $f = \partial^p F$ pour $p \in \mathbf{N}$, $p \geq 1$. On a, pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq p-1$:*

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(k)k^i = 0.$$

De plus on a, pour $n \gg 0$:

$$F^{\sharp}(n) = \frac{1}{p!} \sum_{k\leq n} k^p f(k),$$

ou encore :

$$F^{\sharp}(\infty) = \frac{1}{p!} \sum_{k\in\mathbf{Z}} k^p f(k).$$

2. Les caractères d'une courbe.

a. Définitions.

Définition 2.1. *Soit C une courbe. On définit sa fonction de Rao ρ_C par la formule : $\rho_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n)$ pour $n \in \mathbf{Z}$.*

On pose : $r_{a,C} = \inf\{\, n \mid \rho_C(n) \neq 0 \,\}$, $\quad r_{o,C} = \sup\{\, n \mid \rho_C(n) \neq 0 \,\}$.

Remarque 2.2. La fonction ρ_C est à support fini (il est clair que $\rho_C(n) = 0$ pour $n \gg 0$ par Serre ; pour $n \ll 0$ cela résulte du fait que $\rho_C(n) = h^2\mathcal{E}(n)$ avec $\mathcal{E}$ localement libre, cf. II, et de la dualité de Serre). On notera que cela n'est plus vrai si on tolère que les courbes aient des composantes de dimension zéro, immergées ou non. Par exemple, la courbe C_λ définie pour $\lambda \in k^*$ par les équations $Z = Y^2 - \lambda YT = XY = 0$ est la réunion d'une droite et d'un point et on vérifie que l'on a $h^1\mathcal{J}_C(n) = 1$ pour tout $n \leq 0$. La courbe C_0 limite de la famille plate (C_λ) pour $\lambda = 0$ vérifie encore la même propriété.

Définition 2.3. *Soit C une courbe. On définit ses caractères de postulation γ_C et de spécialité σ_C par les formules :*

$$\gamma_C(n) = \partial^3(h^0\mathcal{J}_C(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)) = \partial^3 h^0\mathcal{J}_C(n) - \binom{n}{0},$$

$$\sigma_C(n) = \partial^3 h^2\mathcal{J}_C(n) = \partial^3 h^1\mathcal{O}_C(n).$$

Exemple 2.4. Si D est une droite, on a $h^0\mathcal{O}_D(n) = h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) - h^0\mathcal{J}_D(n) = n+1$ pour $n \geq 0$. On en déduit aussitôt $\gamma_D(0) = -1$, $\gamma_D(1) = 1$, $\gamma_D(n) = 0$ pour $n \neq 0, 1$ et $\sigma_D(n) = -\gamma_D(n)$ pour tout n.

Remarques 2.5.

a) On notera que la fonction $h^0\mathcal{J}_C(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$ est l'opposée de la fonction de Hilbert de C, dimension de l'image de la flèche de restriction : $H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \to H^0\mathcal{O}_C(n)$.

b) La fonction γ_C est un caractère (cf. 1.10). En effet, la fonction $h^0\mathcal{J}_C(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$ est nulle pour $n < 0$ et vaut $-(nd + 1 - g)$ pour $n \gg 0$. Sa différence seconde est donc à support fini, donc γ_C est un caractère.

c) On a $\gamma_C = \partial^3\rho_C - \sigma_C$. Cela résulte des égalités : $\chi(\mathcal{J}_C(n) = \chi\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) - \chi\mathcal{O}_C(n)$, $\chi\mathcal{O}_C(n) = nd + 1 - g$, $h^3\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) = h^3\mathcal{J}_C(n)$, valables pour tout n.

d) Il en résulte que σ_C est aussi un caractère, cf. 2.2. On note qu'on a aussi $\sigma_C(n) = \partial^3 h^0\mathcal{O}_C(n)$.

Proposition 2.6. *a) Le caractère γ_C détermine la* **postulation** *de la courbe (i.e., les $h^0\mathcal{J}_C(n)$) :*

$$h^0\mathcal{J}_C(n) = \binom{n+3}{3} + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \binom{n-k+2}{2}\gamma_C(k).$$

b) Le caractère σ_C détermine la **spécialité** *de la courbe (i.e., les $h^1\mathcal{O}_C(n) = h^2\mathcal{J}_C(n)$) :*

$$h^1\mathcal{O}_C(n) = -\sum_{k \in \mathbf{Z}} \binom{k-n-1}{2}\sigma_C(k).$$

On a aussi :

$$h^0\mathcal{O}_C(n) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{n-k+2}{2}\sigma_C(k).$$

c) γ_C *et* σ_C *déterminent le* **degré** *et le* **genre** *de* C *:*

$$d = \sum_{k\in\mathbf{Z}} k\gamma_C(k) = -\sum_{k\in\mathbf{Z}} k\sigma_C(k) = -\gamma_C^{\sharp\sharp}(\infty) = \sigma_C^{\sharp\sharp}(\infty).$$

$$g-1 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(k-1)(k-2)}{2}\gamma_C(k) = -\sum_{k\in\mathbf{Z}} \frac{(k-1)(k-2)}{2}\sigma_C(k),$$

qu'on peut encore écrire

$$g = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{k-1}{2}\gamma_C(k).$$

Démonstration. a) et b) résultent de 1.12. Pour c) on note que pour $n \gg 0$, on a :

$$\begin{aligned} h^0\mathcal{O}_C(n) &= nd + 1 - g \\ &= \frac{n^2}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sigma_C(k) + n\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{-2k+3}{2}\sigma_C(k) + \sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{(k-1)(k-2)}{2}\sigma_C(k)\end{aligned}$$

et le résultat s'en déduit en tenant compte de $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sigma_C(k) = 0$. Les formules sur γ_C en résultent grâce à l'égalité $\gamma_C = \partial^3\rho_C - \sigma_C$ et à 1.13.

Remarques 2.7.

a) Particularités de γ_C.

Soit $s_0 = \inf\{n \in \mathbf{N} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\}$; on a $s_0 \geq 1$. Alors, on a : $\gamma_C(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma_C(n) = -1$ pour $0 \leq n < s_0$, $\gamma_C(s_0) \geq 0$ (précisément: $\gamma_C(s_0) = h^0\mathcal{J}_C(s_0) - 1$).

b) Particularités de σ_C.

Soit $e = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\}$. On a $\sigma_C(n) = 0$ pour $n > e+3$ et $\sigma_C(e+3) = -h^1\mathcal{O}_C(e)$. Si C est réduite, on a $h^0\mathcal{O}_C(n) = 0$ pour $n < 0$, donc $\sigma_C(n) = 0$ pour $n < 0$.

c) Intégrales premières.

Comme γ_C et σ_C sont des caractères, ils ont des primitives à support fini, $\gamma_C^\sharp$ et $\sigma_C^\sharp$ (cf. 1.8), avec $\gamma_C^\sharp = \partial^2\rho_C - \sigma_C^\sharp$.

Proposition 2.8. *On a $\sigma_C^\sharp(n) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. Choisissons deux plans H, L de $\mathbf{P}^3$ tels que $H \cap L$ ne rencontre pas C. Les multiplications par H et L donnent lieu au diagramme suivant de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0\mathcal{O}_C(n-2) & \xrightarrow{.H} & H^0\mathcal{O}_C(n-1) & \xrightarrow{\pi_2} & H^0\mathcal{O}_{C\cap H} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{.L} & & \downarrow{.L} & & \downarrow{.L} & & \\
0 & \longrightarrow & H^0\mathcal{O}_C(n-1) & \xrightarrow{.H} & H^0\mathcal{O}_C(n) & \xrightarrow{\pi_1} & H^0\mathcal{O}_{C\cap H} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^0\mathcal{O}_{C\cap L} & \xrightarrow{.H} & H^0\mathcal{O}_{C\cap L} & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

Il en résulte : $\dim \operatorname{Im}\pi_2 = h^0\mathcal{O}_C(n-1) - h^0\mathcal{O}_C(n-2) \leq \dim \operatorname{Im}\pi_1 = h^0\mathcal{O}_C(n) - h^0\mathcal{O}_C(n-1)$. Comme on a $\sigma_C^\sharp(n) = \partial^2 h^0\mathcal{O}_C(n)$, le résultat en découle.

b. Exemples.

Exemple b.1. Les courbes arithmétiquement de Cohen-Macaulay.

Nous établissons ici le lien entre les caractères γ_C et σ_C définis ci-dessus et le caractère numérique de [GP1].

On rappelle qu'une courbe C est dite arithmétiquement (ou projectivement) de Cohen-Macaulay, en abrégé ACM , si elle vérifie $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (i.e., si $\rho_C = 0$). Avec les notations de 0.3, il revient au même de dire que l'anneau $R_C = R/I_C$ est de Cohen-Macaulay en $\mathbf{m} = (X, Y, Z, T)$. Rappelons brièvement la définition du caractère numérique d'une telle courbe. On choisit une surface Q contenant C, d'équation $Q(X, Y, Z, T)$, de degré minimum s_0. On peut, quitte à changer de coordonnées, supposer que Q a un terme en T^{s_0} non nul. L'anneau gradué $A_Q = R/(Q)$ est alors, si $R_0 = k[X, Y, Z]$, un R_0-module libre de base $1, t, \ldots, t^{s_0-1}$, donc on a : $A_Q \simeq \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} R_0(-i)$. Soit $I_{C/Q}$ le noyau de la surjection naturelle de A_Q dans R_C ; R_C et $I_{C/Q}$ sont aussi des R_0-modules et l'hypothèse sur C implique que R_C est de profondeur 2 sur R_0, donc de dimension projective 1. Comme s_0 est le degré minimum d'une surface contenant C, $1, t, \ldots, t^{s_0-1}$ forment un système minimal de générateurs du R_0-module R_C et il en résulte que le noyau $I_{C/Q}$ est libre :

$$I_{C/Q} \simeq \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} R_0(-n_i).$$

On a donc la suite exacte de R_0-modules gradués :

$$0 \to \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} R_0(-n_i) \to \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} R_0(-i) \to R_C \to 0$$

et la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}$-modules :

$$0 \to \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-n_i) \to \bigoplus_{i=0}^{s_0-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(-i) \to \mathcal{O}_C \to 0.$$

La suite ordonnée $n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_{s_0-1}$ est, par définition, le **caractère numérique** de C.

Proposition 2.9. *Soit C une courbe ACM. La donnée du caractère numérique est équivalente à celle de γ_C (ou de $\sigma_C = -\gamma_C$), plus précisément :*
1) Si $n_0 \geq n_1 \geq \cdots \geq n_{s_0-1}$ est le caractère numérique on a :

$$\gamma_C(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0; \\ -1 & \text{si } 0 \leq n < s_0; \\ \big|\{i | n_i = n\}\big| & \text{si } n \geq s_0. \end{cases} \tag{1}$$

2) Réciproquement, si γ_C est donné, s_0 est le plus petit entier > 0 tel que $\gamma_C(n) \geq 0$ et la suite (n_i) est la suite des entiers $n \geq s_0$, chacun compté $\gamma_C(n)$ fois.

Démonstration. Si on définit γ_0 par la formule (1) ci-dessus, la suite exacte qui définit les n_i donne :

$$h^0\mathcal{O}_C(n) = \sum_{i=0}^{s_0-1} \binom{n-i+2}{2} - \sum_{i=0}^{s_0-1} \binom{n-n_i+2}{2} = -\sum_{i \in \mathbf{Z}} \binom{n-i+2}{2} \gamma_0(i)$$

d'où en dérivant :

$$\partial^3 h^0\mathcal{O}_C(n) = \sigma_C(n) = -\sum_{i \in \mathbf{Z}} \binom{n-i-1}{-1} \gamma_0(i) = -\gamma_0(n) = -\gamma_C(n)$$

(car ρ_C est nul).

Remarque 2.10. Si C a pour caractère numérique $6, 6, 5, 5, 5$, on a $\gamma_C(n) = -1$ pour $0 \leq n \leq 4$, $\gamma_C(5) = 3$, $\gamma_C(6) = 2$ et $\gamma_C(n) = 0$ sinon. (On sait d'après [GP1] qu'il existe une courbe lisse et connexe admettant ce caractère).

Remarque 2.11. On note que si C est ACM le caractère γ_C est positif, i.e., on a $\gamma_C(n) \geq 0$ pour $n \geq s_0$ (cf. V). Si de plus C est intègre, le caractère numérique est connexe (cf. [GP1]), c'est-à-dire que $\{ n \in \mathbf{N} \mid \gamma_C(n) > 0 \}$ est un ensemble connexe d'entiers : si on a $p < q < r$ avec $\gamma_C(p) > 0$ et $\gamma_C(r) > 0$, on a aussi $\gamma_C(q) > 0$.

Exemple b.2. La réunion disjointe de deux droites.

Soient D_1,D_2 deux droites disjointes et $C = D_1 \cup D_2$. Comme $\mathcal{O}_C$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{D_1} \oplus \mathcal{O}_{D_2}$, on a $h^0\mathcal{O}_C(n) = 2n + 2$ pour $n \geq 0$ et $h^0\mathcal{O}_C(n) = 0$ pour $n < 0$. On en déduit aussitôt $\sigma_C(0) = 2 , \sigma_C(1) = -2$, les autres termes étant nuls. On a donc $d_C = 2$, $g_C = -1$. Par ailleurs, comme $h^0\mathcal{O}_C = 2$, on a $h^1\mathcal{J}_C = 1$ et comme C n'est pas plane, on a $h^0\mathcal{J}_C(1) = h^1\mathcal{J}_C(1) = 0$. Il en résulte que $\mathcal{J}_C(2)$ est engendré par ses sections et qu'on a $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ pour $n \neq 0$ par le critère de Castelnuovo-Mumford ([M2]). On en déduit $\gamma_C(0) = \gamma_C(1) = -1$, $\gamma_C(2) = 3 , \gamma_C(3) = -1$ par 2.5.c. On notera que le caractère γ_C n'est pas positif.

3. Le module de Rao.

a. Définition.

Le module de Rao d'une courbe C a été introduit par R.Hartshorne [rH] et étudié par A.P.Rao [R]. Son intérêt principal est de fournir un invariant des classes de liaison (cf. III 1).

Définition 3.1. *Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$. Le module de Rao de C est le R-module* $M_C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$.

Remarque 3.2. a) C'est un R-module gradué, avec $\dim_k M_{C,n} = h^1\mathcal{J}_C(n) = \rho_C(n)$; il est de longueur finie (cf. 2.2).

b) La courbe C est ACM si et seulement si $M_C = 0$; plus généralement, avec les notations du Ch. 0, on a la suite exacte :

$$0 \to I_C \to R \to A_C \to M_C \to 0.$$

b. Exemple de calcul du module de Rao : la réunion disjointe de n courbes.

Soient $C_1, \ldots, C_n$ n courbes disjointes et C leur réunion . On pose $I_k = I_{C_k}$, $A_k = A_{C_k}$, $M_k = M_{C_k}$. On a $I_C = I_1 \cap \ldots \cap I_n$, et, comme les C_k sont disjointes, on a $A_C = \bigoplus_{k=1}^{n} A_k$. Soit $\Delta : R \to \bigoplus_{k=1}^{n} R/I_k$ l'application diagonale naturelle.

Proposition 3.3. *On a une suite exacte de R-modules gradués :*

$$0 \to \mathrm{Coker}\Delta \to M_C \to \bigoplus_{k=1}^{n} M_k \to 0.$$

Démonstration. Cela résulte aussitôt de la considération du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R/I_C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, equal] & \bigoplus_{k=1}^{n} R/I_k \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\Delta \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & R/I_C \arrow[r] & A_C = \bigoplus_{k=1}^{n} A_k \arrow[r] \arrow[d] & M_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \bigoplus_{k=1}^{n} M_k \arrow[r, equal] \arrow[d] & \bigoplus_{k=1}^{n} M_k \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Proposition 3.4. Description de CokerΔ. *On a une suite exacte de R-modules gradués :*

$$0 \longrightarrow I_C \xrightarrow{\Delta'} \bigoplus_{k=1}^{n} I_k \xrightarrow{\alpha} R^{n-1} \longrightarrow \mathrm{Coker}\Delta \longrightarrow 0$$

où α est définie par $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 - x_n, \ldots, x_{n-1} - x_n)$ et où Δ' est l'application diagonale.

Démonstration. C'est une variante du lemme chinois.

Corollaire 3.5. *Si C_1 et C_2 sont deux courbes ACM disjointes et $C = C_1 \cup C_2$, on a $M_C \simeq R/I_1 + I_2$. En particulier si C_1 et C_2 sont deux intersections complètes d'équations (f_1, f_2) et (f_3, f_4), on a $M_C = R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$ et la suite des f_i est régulière.*

Les propositions précédentes seront utilisées en II pour calculer les résolutions des modules de Rao, puis en IV pour déterminer les courbes minimales admettant ces modules à décalage près.

Définition 3.6. *Soient M et M' deux R-modules gradués. On dit que M et M' sont de même type s'il existe un automorphisme gradué σ de R et un isomorphisme $u : M \to M'$, gradué, k-linéaire et σ-semi-linéaire (i.e., tel que l'on ait pour $x \in M$ et $a \in R$, $u(ax) = \sigma(a)u(x)$).*

On notera que l'automorphisme σ est déterminé par sa restriction à R_1 qui est un élément de $GL(R_1)$, de sorte que deux modules sont de même type s'ils s'obtiennent l'un à partir de l'autre par un changement de variables dans R.

II LES RÉSOLUTIONS

Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$. Si $\mathcal{F}$ est un fibré et $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C$ un homomorphisme surjectif, le noyau de σ est aussi un fibré puisque C est localement Cohen-Macaulay. On obtient ainsi une résolution de $\mathcal{J}_C$ par des fibrés :

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0.$$

Quand C est ACM, une résolution libre graduée de I_C, de longueur 1, donne une telle présentation avec $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ dissociés.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que pour une courbe quelconque, on peut encore imposer que $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{F}$ soit dissocié, et qu'il y a alors unicité de la résolution, en un sens que nous préciserons.

1. Comment construire des courbes avec deux fibrés de rangs r et $r+1$.

Proposition 1.1. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux fibrés sur $\mathbf{P}^3$, de rangs r et $r+1$, de même degré d, et $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorphisme injectif. On a les équivalences:*
i) Coker φ est un idéal de $\mathcal{O}_\mathbf{P}$.
i') Coker φ est égal à $\mathcal{O}_\mathbf{P}$ ou est l'idéal d'une courbe.
i'') Coker φ est sans torsion.
ii) L'homomorphisme :

$$\overset{r}{\wedge}\varphi^\vee(d) : (\overset{r}{\wedge}\mathcal{B}^\vee) \otimes \mathcal{O}_P(d) \simeq \mathcal{B} \to \mathcal{O}_P$$

n'est nul sur aucun diviseur de $\mathbf{P}^3$.
iii) Le complexe :

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{B} \xrightarrow{\overset{r}{\wedge}\varphi^\vee(d)} \mathcal{O}_P$$

est une suite exacte .

Démonstration. L'image de $\overset{r}{\wedge}\varphi^\vee(d)$ est un idéal de $\mathcal{O}_\mathbf{P}$, qu'on peut écrire $\mathcal{J}(-\alpha)$, où $\mathcal{J}$ est l'idéal d'un fermé de $\mathbf{P}^3$ de codimension ≥ 2, et α un entier naturel (cf. 0 2.4). Alors on a $ii \Leftrightarrow \alpha = 0$.

Soit $\mathcal{A}'$ le noyau de $\overset{r}{\wedge}\varphi^\vee(d)$. On a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} & \longrightarrow & \text{Coker}\,\varphi & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{A}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\overset{r}{\wedge}\varphi^\vee(d)} & \mathcal{J}(-\alpha) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les flèches non nommées sont les homomorphismes évidents, $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est injective, Coker $\varphi \to \mathcal{J}(-\alpha)$ est surjective et son noyau isomorphe à $\mathcal{A}'/\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}'$ est de rang r, $\mathcal{A}'/\mathcal{A}$ est de torsion d'où $iii \Leftrightarrow \mathcal{A}'/\mathcal{A} = 0 \Leftrightarrow i''$. Soient U l'ouvert complémentaire du fermé défini par $\mathcal{J}$, et $j : U \to \mathbf{P}^3$ l'immersion canonique. Le faisceau $\overset{r}{\wedge}\mathcal{A}'$ est un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module de rang 1 sans torsion, localement libre sur U, donc on a un isomorphisme : $\overset{r}{\wedge}\mathcal{A}' \simeq \mathcal{J}'(d')$, où $\mathcal{J}'$ est un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ dont le radical contient $\mathcal{J}$, et $d' = d + \alpha$.

On a évidemment : $i' \Rightarrow i \Rightarrow i''$.

$i'' \Rightarrow iii$: Coker φ est sans torsion si et seulement si $\mathcal{A}'/\mathcal{A} = 0$;

$iii \Rightarrow i$: si $\mathcal{A}'/\mathcal{A} = 0$, Coker $\varphi \simeq \mathcal{J}(-\alpha)$;

$ii \Rightarrow iii$: si $\alpha = 0$, l'homomorphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est un isomorphisme sur U. D'où le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_*(\mathcal{A})|_U & \longrightarrow & j_*(\mathcal{A}')|_U \end{array}$$

La flèche verticale de droite est injective, celle de gauche est un isomorphisme puisque le complémentaire de U est de codimension ≥ 2, donc l'homomorphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ est un isomorphisme partout.

$iii \Rightarrow ii$: si $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, $\mathcal{O}_U(d') \simeq \mathcal{O}_U(d)$, donc, toujours pour des raisons de codimension, $d = d'$,

$iii \Rightarrow i'$: soit $\mathcal{O}_C$ le conoyau de $\overset{r}{\wedge}\varphi^\vee(d)$. Par construction la dimension projective de $\mathcal{O}_C$ est ≤ 2 partout, donc sa profondeur est ≥ 1. Mais on sait aussi que la dimension de C est ≤ 1, donc C est vide ou est une courbe localement Cohen-Macaulay.

Corollaire 1.2. *Soient S un schéma, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux fibrés sur $\mathbf{P}^3 \times S$, de rangs r et $r+1$, de même degré d et $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorphisme injectif. Soit $\mathcal{O}_Y$ le conoyau de $\overset{r}{\wedge}\phi^\vee(d)$. Supposons que Y domine S. L'ensemble des points s de S où la restriction du complexe de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times S}$-modules :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\phi} \mathcal{B} \xrightarrow{\overset{r}{\wedge}\phi^\vee(d)} \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times S} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow 0$$

est une suite exacte est ouvert et est égal à l'ensemble des points s de S où Y_s est une courbe. De plus, si S est réduit, Y est plat sur S au-dessus de cet ouvert.

Démonstration. L'égalité des deux ensembles est une conséquence de 1.1, le fait que ce soit un ouvert résulte de [PS].

Pour vérifier la platitude lorsque S est réduit, on applique le critère valuatif, donc on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}A$, où A est un anneau de valuation discrète d'uniformisante t. Il suffit alors de vérifier que $\mathcal{O}_Y$ est sans torsion sur A.

Soit s (resp. η) le point fermé (resp. générique) de S. Puisque Y_η est une courbe sur $k(\eta)$, et Y_s une courbe sur $k(s)$, on a $\dim Y = 1 + \dim S = 2$ et $\dim Y_s = 1$, donc t n'est pas diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_Y$, qui est sans torsion sur A.

Corollaire 1.3. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux fibrés sur $\mathbf{P}^3$, de rangs r et $r+1$, de même degré d, et φ_1 et φ_2 deux homomorphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ vérifiant les conditions de 1.1, et définissant deux courbes C_1 et C_2 (non vides). Alors C_1 et C_2 sont dans la même composante irréductible du schéma de Hilbert.*

Démonstration. Soient $S = \operatorname{Spec} k[t]$ et $\phi = (1-t)\varphi_1 + t\varphi_2$. Conservons les notations de 1.2. Par construction, Y n'est pas vide et est de codimension ≤ 2 dans $\mathbf{P}^3 \times S$, donc de dimension ≥ 2. S'il ne domine pas S, les fibres non vides sont aussi de dimension ≥ 2 ce qui contredit l'hypothèse. Alors 1.2 montre qu'un ouvert de S contenant les points $t = 0$ et $t = 1$ paramètre une famille irréductible et plate de courbes reliant C_1 et C_2.

Remarque 1.4. Lorsque $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$ est dissocié, la cohomologie et le module de Rao de n'importe quelle courbe de la famille sont indépendants de t, donc on passe de C_1 à C_2 par une déformation à cohomologie et module de Rao constants.

Remarque 1.5. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux fibrés sur $\mathbf{P}^3$, de rangs r et $r+1$, de degrés différents, on peut facilement transposer la proposition 1.1 compte tenu du fait que $\overset{r}{\wedge}\varphi^\vee \otimes \det \mathcal{B}$ est un homomorphisme de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{O}_P(\deg \mathcal{B} - \deg \mathcal{A})$.

2. Résolution d'un R-module gradué de longueur finie.

Dans tout ce paragraphe, on conservera les notations suivantes :

M est un R-module gradué de longueur finie, et

$$0 \longrightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \longrightarrow 0$$

est une résolution graduée minimale de M (par des R-modules libres gradués). On désigne par N_0 (resp. E_0) le noyau de σ_1 (resp. σ_2).

On sait que l'on a $\operatorname{Ext}^i_R(M,R) = 0$ pour $i \neq 4$, d'où l'on déduit immédiatement $\operatorname{Ext}^i_R(N_0,R) = 0$ pour $i \neq 0,2$ et $\operatorname{Ext}^i_R(E_0,R) = 0$ pour $i \neq 0,1$.

De plus $\operatorname{Ext}^4_R(M,R) \simeq \operatorname{Ext}^2_R(N_0,R) \simeq \operatorname{Ext}^1_R(E_0,R)$ s'identifie à $M^*(4)$, où M^* est le dual de M considéré comme k-espace vectoriel (cf. 0 1.12), et a pour résolution graduée minimale :

$$0 \longrightarrow L_0^\vee \xrightarrow{\sigma_1^\vee} L_1^\vee \xrightarrow{\sigma_2^\vee} L_2^\vee \xrightarrow{\sigma_3^\vee} L_3^\vee \xrightarrow{\sigma_4^\vee} L_4^\vee \longrightarrow M^*(4) \longrightarrow 0$$

Par dualité, les rôles de E_0 et N_0 sont échangés puisque $E_0^\vee$ (resp. $N_0^\vee$) est le noyau de $\sigma_4^\vee$ (resp. $\sigma_3^\vee$).

Soient $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{E}_0$ les faisceaux associés à N_0 et E_0, qui sont des fibrés sur $\mathbf{P}^3$.

Proposition 2.1. *On a :*

$$H^0_*\mathcal{N}_0 = N_0 \qquad H^1_*\mathcal{N}_0 = M \qquad H^2_*\mathcal{N}_0 = 0.$$

$$H^0_*\mathcal{E}_0 = E_0 \qquad H^1_*\mathcal{E}_0 = 0 \qquad H^2_*\mathcal{E}_0 = M.$$

Démonstration. Les R-modules N_0 et E_0 sont de dimension projective ≤ 2 donc de profondeur ≥ 2. D'où les égalités $H^0_*\mathcal{N}_0 = N_0$, et $H^0_*\mathcal{E}_0 = E_0$.

D'autre part on a deux suites exactes de $\mathcal{O}_P$-modules :

$$0 \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{L}_2 \to \mathcal{N}_0 \to 0,$$

où $\mathcal{L}_i$ est le fibré dissocié associé au R-module L_i. Les autres égalités s'en déduisent en prenant les suites exactes de cohomologie, compte-tenu de : $H^0_*\mathcal{L}_i = L_i$, $H^j_*\mathcal{L}_i = 0$ pour $j \neq 0$.

Grâce à la dualité, on obtient immédiatement le

Corollaire 2.2. *On a :*

$$H^0_*\mathcal{N}_0^\vee = N_0^\vee \qquad H^1_*\mathcal{N}_0^\vee = 0 \qquad H^2_*\mathcal{N}_0^\vee = M^*(4).$$

$$H^0_*\mathcal{E}_0^\vee = E_0^\vee \qquad H^1_*\mathcal{E}_0^\vee = M^*(4) \qquad H^2_*\mathcal{E}_0^\vee = 0.$$

et grâce à la minimalité de la résolution :

2.3. Calcul des caractéristiques numériques de M. *On a*

$$\begin{aligned}
\rho(n) = \dim_k M_n &= \sum_{i=0}^{4}(-1)^i h^0\mathcal{L}_i(n),\\
r_a = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid M_n \neq 0\} &= \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{L}_0(n) \neq 0\}\\
&= \inf\{\textit{degrés des générateurs de } L_0\},\\
r_o = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid M_n \neq 0\} &= -4 - \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{L}_4^\vee(n) \neq 0\}\\
&= \sup\{\textit{degrés des générateurs de } L_4\} - 4.
\end{aligned}$$

Proposition 2.4. *N_0 (resp. E_0) n'admet pas de facteur direct libre et $\mathcal{N}_0$ (resp. $\mathcal{E}_0$) n'admet pas de facteur direct inversible.*

Démonstration. Puisque $H^0_*\mathcal{N}_0 = N_0$ (resp. $H^0_*\mathcal{E}_0 = E_0$), les deux assertions sont équivalentes. Elles résultent du lemme suivant appliqué successivement au noyau de σ_0 et à N_0 :

Lemme 2.5. *Soit N un R-module gradué qui vérifie :* $\operatorname{Ext}^1_R(N,R) = 0$. *Soit $\sigma : L \to N$ une présentation graduée minimale et I le noyau de σ. Alors I n'a pas de facteur direct libre.*

Démonstration. Supposons que l'on ait $I = R(-a) \oplus I'$.

En dualisant la suite exacte :

$$0 \to R(-a) \oplus I' \longrightarrow L \xrightarrow{\sigma} N \to 0$$

on obtient la suite exacte :

$$0 \to N^\vee \xrightarrow{\sigma^\vee} L^\vee \longrightarrow R(a) \oplus I'^\vee \to 0.$$

En particulier l'homomorphisme composé $L^\vee \to R(a) \oplus I'^\vee \to R(a)$ est surjectif, donc $R(a)$ (resp. $R(-a)$) est un facteur direct de $L^\vee$ (resp. de L), ce qui contredit la minimalité de σ.

Exemples 2.6. a) Intersection complète : soient (f_1, f_2, f_3, f_4) une suite régulière et $M = R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$ (cf. I 3.5). Posons $n_i = \deg f_i$ et $\nu = \sum_{i=1}^4 n_i$. La résolution graduée minimale de M s'obtient par le complexe de Koszul :

$$0 \to R(-\nu) \to \bigoplus_{i=1}^{4} R(n_i - \nu) \to \bigoplus_{i<j} R(-n_i - n_j) \to \bigoplus_{i=1}^{4} R(-n_i) \to R \to M \to 0.$$

Dans ce cas on a :

$$r_a = 0, \qquad r_o = \nu - 4,$$

$$\rho(n) = \binom{n+3}{3} - \sum_{i=1}^{4} \binom{n - n_i + 3}{3} + \sum_{i<j} \binom{n - n_i - n_j + 3}{3}$$
$$- \sum_{i=1}^{4} \binom{n + n_i - \nu + 3}{3} + \binom{n - \nu + 3}{3}.$$

b) Module de Buchsbaum : $M = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} k^{\rho(n)}$ avec une structure de R-module triviale. La résolution graduée minimale de M s'obtient en ajoutant les résolutions graduées minimales des $M_n = k^{\rho(n)}$:

$$0 \to \bigoplus_{n=0}^{s} R(-4-n)^{\rho(n)} \to \bigoplus_{n=0}^{s} R(-3-n)^{4\rho(n)} \to \bigoplus_{n=0}^{s} R(-2-n)^{6\rho(n)}$$
$$\to \bigoplus_{n=0}^{s} R(-1-n)^{4\rho(n)} \to \bigoplus_{n=0}^{s} R(-n)^{\rho(n)} \to M \to 0.$$

3. La résolution de type E de l'idéal d'une courbe.

Dans la suite du II, les notations ne changeront plus.

Soient C une courbe, M_C son module de Rao, $\sigma_i : L_i \to L_{i-1}$ une résolution graduée minimale de M_C, E_0 le noyau de σ_2, et $\mathcal{E}_0$ le faisceau associé.

Une résolution graduée minimale de I_C est de longueur ≤ 2 :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{a(n)} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0.$$

Nous avons vu (cf.0 3.1) qu'il revient au même de se donner la résolution de $\mathcal{J}_C$ par des $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules dissociés :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{a(n)} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{b(n)} \xrightarrow{\tilde{\psi}} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0.$$

Nous dirons que la résolution de $\mathcal{J}_C$ est minimale si celle de I_C l'est. Dans ce cas les entiers $a(n)$, $b(n)$, $c(n)$ sont nuls pour $n \leq 0$.

Proposition 3.1. *Soient $E = \operatorname{Ker} \pi$ et $\mathcal{E} = \operatorname{Ker} \tilde{\pi}$ le faisceau associé. Il existe un R-module libre L (resp. un faisceau dissocié $\mathcal{L}$) tel que $E \simeq E_0 \oplus L$ (resp. $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L}$) .*

Démonstration. Nous reproduisons celle de [R].

Le faisceau $\mathcal{E}$ est un fibré. De la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

on déduit :

$$M_C = H^1_* \mathcal{J}_C = H^2_* \mathcal{E}.$$

On a aussi :

$$(H^2_*\mathcal{E})^* \simeq (H^1_*\mathcal{E}^\vee)(-4)$$
$$M^*_C \simeq \mathrm{Ext}^4_R(M_C, R)(-4)$$

(le premier isomorphisme provient de la dualité de Serre),
d'où un isomorphisme

$$H^1_*\mathcal{E}^\vee \simeq \mathrm{Ext}^4_R(M_C, R).$$

De la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)^{b(n)} \xrightarrow{\tilde{\varphi}^\vee} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)^{a(n)} \longrightarrow 0$$

on déduit par cohomologie une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0_*\mathcal{E}^\vee \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(n)^{b(n)} \xrightarrow{\varphi^\vee} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(n)^{a(n)} \longrightarrow H^1_*\mathcal{E}^\vee \longrightarrow 0.$$

Il s'ensuit d'une part que $H^0_*\mathcal{E}^\vee \simeq E^\vee$, d'autre part qu'on a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
E_0^\vee & \rightarrow & L_3^\vee & \xrightarrow{\sigma_4^\vee} & L_4^\vee & \rightarrow & \mathrm{Ext}^4_R(M_C, R) & \rightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle \theta'_3} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_3} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_4} & & \| & & \\
E^\vee & \rightarrow & \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(n)^{b(n)} & \xrightarrow{\varphi^\vee} & \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(n)^{a(n)} & \rightarrow & H^1_*\mathcal{E}^\vee & \rightarrow & 0
\end{array}$$

où θ_3 et θ_4 sont scindés.

Mais $\overline{\varphi^\vee} = 0$, donc $\overline{\theta_4}$ est un isomorphisme, ainsi que θ_4 par Nakayama. On a donc:

$$L_4 \simeq \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{a(n)} \qquad L_3 \oplus L \simeq \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \qquad E_0 \oplus L \simeq E$$

où L est un R-module libre gradué.

En posant $F = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{c(n)}$(resp. $\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{c(n)}$), on obtient donc :

Corollaire 3.2. *Il existe une suite exacte de R-modules gradués (resp. de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules) :*

$$0 \longrightarrow E_0 \oplus L \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0$$
$$\big(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0\big)$$

où L et F sont libres (resp. $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$ sont dissociés), et où $\overline{\alpha} = 0$.

Une telle résolution est unique, en un sens que nous allons préciser :

Proposition 3.3. *S'il existe une suite exacte de R-modules gradués :*

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \xrightarrow{\pi_1} I_C \longrightarrow 0$$

où F_1 est libre et où $\overline{\alpha_1} = 0$, alors c'est celle de 3.2, à isomorphisme près.

Démonstration. L'identité de I_C se relève en $\theta : F \to F_1$ et $\theta' : E_0 \oplus L \to E_1$, de sorte que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_0 \oplus L & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\pi} & I_C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \theta'} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & F_1 & \xrightarrow{\pi_1} & I_C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Puisque $\overline{\pi}$ est un isomorphisme, θ identifie F à un facteur direct de F_1, donc α_1 induit un isomorphisme de Coker θ' avec Coker θ, ce qui contredit l'hypothèse si Coker $\theta \neq 0$. Donc θ et θ', qui sont injectifs, sont des isomorphismes.

Proposition 3.4. *S'il existe une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\tilde{\alpha}_1} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\tilde{\pi}_1} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{F}_1$ est dissocié, où $H^1_*\mathcal{E}_1 = 0$ et où $\overline{\alpha_1} = 0$, α_1 étant l'homomorphisme de R-modules gradués associé à $\tilde{\alpha}_1$, alors c'est celle de 3.2, à isomorphisme près.

Démonstration. Posons $E_1 = H^0_*\mathcal{E}_1$, $F_1 = H^0_*\mathcal{F}_1$. Puisque $H^1_*\mathcal{E}_1 = 0$, on a aussi une suite exacte de R-modules gradués :

$$0 \longrightarrow E_1 \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \xrightarrow{\pi_1} I_C \longrightarrow 0$$

vérifiant les conditions de 3.3, ce qui permet de conclure.

Corollaire 3.5. *S'il existe une suite exacte de R-modules gradués :*

$$0 \longrightarrow E'_0 \oplus L' \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\pi'} I_C \longrightarrow 0$$

où F' et L' sont libres, où E'_0 n'admet aucun facteur direct libre, et où $\overline{\alpha'} = 0$, alors E_0 et E'_0 (resp. F et F', L et L') sont isomorphes. En d'autres termes, E_0, F et L sont déterminés de manière unique à isomorphisme près par ces conditions.

Démonstration. Posons $E = E_0$, $E' = E'_0$. Il suffit de montrer que si $E \oplus L$ et $E' \oplus L'$ sont isomorphes, alors il en est de même de E et E' (resp. de L et L'), ce que nous allons faire par récurrence sur le rang de L.

Notons θ l'isomorphisme de $E \oplus L$ dans $E' \oplus L'$, i_L (resp. i_E, $i_{L'}$, $i_{E'}$) l'injection canonique de L dans $E \oplus L$ (resp. de E dans $E \oplus L$, de L' dans

$E' \oplus L'$, de E' dans $E' \oplus L'$), et q_L (resp. q_E, $q_{L'}$, $q_{E'}$) la projection canonique de $E \oplus L$ sur L (resp. de $E \oplus L$ sur E, de $E' \oplus L'$ sur L', de $E' \oplus L'$ sur E'). Si $L = 0$, le résultat est immédiat.

Sinon, posons $L = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-a_i)$, ($a_i \in \mathbf{Z}$) et $M = \bigoplus_{i=1}^{r-1} R(-a_i)$ de sorte que $L = M \oplus R(-a_r)$.

Montrons tout d'abord que si $u : R(-a) \to E \oplus L$ ($a \in \mathbf{Z}$) est un homomorphisme qui admet une rétraction r, alors ri_L est une rétraction de $q_L u$. En effet la flèche composée :

$$R(-a) \xrightarrow{u} E \oplus L \xrightarrow{q_E} E \xrightarrow{i_E} E \oplus L \xrightarrow{r} R(-a)$$

est la multiplication par une constante. Comme E n'a aucun facteur direct libre, elle est nulle. On en déduit $0 = ri_E q_E u = r(1 - i_L q_L)u$ et $1 = ri_L q_L u$, donc la flèche composée :

$$R(-a) \xrightarrow{u} E \oplus L \xrightarrow{q_L} L \xrightarrow{i_L} E \oplus L \xrightarrow{r} R(-a)$$

est l'identité. On a alors un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & E' & \simeq & K & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \theta^{-1} i_{E'}} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R(-a_r) & \xrightarrow{i_r} & E \oplus L & \longrightarrow & E \oplus M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle q_{L'}\theta} & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & R(-a_r) & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où i_r est l'injection canonique de $R(-a_r)$ dans $E \oplus L$, M' est le conoyau de $q_{L'}\theta i_r$, K est le noyau de la flèche de $E \oplus M$ dans M' induite par $q_{L'}\theta$. On sait que $q_{L'}\theta i_r$ admet une rétraction, donc M' est un facteur direct de L' et en particulier un R-module libre et la deuxième suite exacte verticale est scindée, ce qui donne un isomorphisme de $E \oplus M$ avec $E' \oplus M'$.

On conclut alors par récurrence.

Corollaire 3.6. *S'il existe une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}'_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\tilde{\alpha}'} \mathcal{F}' \xrightarrow{\tilde{\pi}'} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{L}'$ sont dissociés, où $\mathcal{E}_0'$ n'admet aucun facteur direct dissocié, où $H^1_*\mathcal{E}_0' = 0$ et où $\overline{\alpha'} = 0$, α' étant l'homomorphisme de R-modules gradués associé à $\tilde{\alpha}'$, alors $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{E}_0'$ (resp. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$) sont isomorphes.

Définition 3.7. *Une suite exacte*

$$0 \longrightarrow E_0 \oplus L \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0$$

$$\left(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0\right)$$

vérifiant les conditions de 3.5 (resp. 3.6), est appelée **résolution de type E** *de I_C (resp. de $\mathcal{J}_C$).*

4. La résolution de type N de l'idéal d'une courbe.

On rappelle qu'on note A_C l'anneau gradué $H^0_*\mathcal{O}_C$, N_0 le noyau de σ_1, et $\mathcal{N}_0$ le faisceau associé.

Proposition 4.1. *Il existe une suite exacte de R-modules gradués (resp. de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules) (obtenue à partir d'une résolution graduée minimale de A_C comme dans [LR])*

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\beta} N_0 \oplus L' \xrightarrow{\epsilon} I_C \longrightarrow 0$$

$$\left(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\tilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0\right)$$

où P et L' sont libres (resp. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}'$ sont dissociés), et où $\overline{\beta^\vee} = 0$.

Démonstration. On a une suite exacte :

$$0 \to R/I_C \to A_C \to M_C \to 0$$

qui reste exacte après tensorisation sur R par $k = R/\mathbf{m}$. (Sinon on aurait $1 \in \mathbf{m}A_C$, et $\forall (n,p) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}\quad A_{C,n} \subset \mathbf{m}A_{C,n-1} \subset \cdots \subset \mathbf{m}^p A_{C,n-p}$ et ce dernier est nul pour p grand.)

Donc puisque $\sigma_0 : L_0 \to M_C$ est une présentation graduée minimale de M_C on peut construire une présentation graduée minimale $\tau_0 : L_0 \oplus R \to A_C$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} L_0 \oplus R & \xrightarrow{\tau_0} & A_C \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ L_0 & \xrightarrow{\sigma_0} & M_C \end{array}$$

où p est la projection canonique.

L'anneau A_C est de profondeur 2 sur R, donc est de dimension projective 2. On peut donc construire une résolution graduée minimale de A_C de la forme :

$$0 \longrightarrow L'_2 \xrightarrow{\tau_2} L'_1 \xrightarrow{\tau_1} L_0 \oplus R \xrightarrow{\tau_0} A_C \longrightarrow 0.$$

On vérifie que Im $p\tau_1 =$ Ker σ_0, donc on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & & R \arrow[r] \arrow[d] & R/I_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L'_2 \arrow[r, "\tau_2"] \arrow[d, "\beta"] & L'_1 \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, equal] & L_0 \oplus R \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[d, "p"] & A_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & L'_1 \arrow[r, "p\tau_1"] & L_0 \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d] & M_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où N est le noyau de $p\tau_1$ et β est induite par τ_2.

Le début de résolution graduée minimale de M_C :

$$0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M_C \longrightarrow 0$$

est donc un facteur direct de la deuxième suite exacte horizontale du diagramme ci-dessus, et on a des isomorphismes :

$$L'_1 \simeq L_1 \oplus L' \qquad N \simeq N_0 \oplus L'$$

où L' est libre comme facteur direct de L'_1.

D'autre part, le lemme du serpent montre que le conoyau de β est isomorphe à I_C. En posant $L'_2 = P$ on obtient la suite annoncée. La suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules s'en déduit immédiatement. Il reste à montrer que $\overline{\beta^\vee} = 0$. Pour cela on remarque que l'homomorphisme dual de l'injection $N_0 \to L_1$ (resp. $N \to L'_1$) est surjectif et qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L_1'^\vee \arrow[r] \arrow[d, equal] & N^\vee \arrow[d, "\beta^\vee"] \\
L_1'^\vee \arrow[r, "\tau_2^\vee"] & L_2'^\vee
\end{tikzcd}$$

avec $\overline{\tau_2^\vee} = 0$.

Il y a encore unicité de cette résolution au sens suivant :

Proposition 4.2. *S'il existe une suite exacte de R-modules gradués :*

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\beta_1} N_1 \xrightarrow{\epsilon_1} I_C \longrightarrow 0$$

où P_1 est libre, où $\mathrm{Ext}^1_R(N_1, R) = 0$, et où $\overline{\beta_1^\vee} = 0$, alors c'est celle de 4.1, à isomorphisme près.

Démonstration. Puisque $\mathrm{Ext}^1_R(N_0 \oplus L', P_1)$ est nul, l'identité de I_C se relève en $\theta : N_0 \oplus L' \to N_1$ et $\theta' : P \to P_1$, de sorte que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\beta} & N_0 \oplus L' & \xrightarrow{\epsilon} & I_C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \theta'} & & \downarrow{\scriptstyle \theta} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & P_1 & \xrightarrow{\beta_1} & N_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & I_C & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

En dualisant, on obtient un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\epsilon_1^\vee} & N_1^\vee & \xrightarrow{\beta_1^\vee} & P_1^\vee & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(I_C, R) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \theta^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \theta'^\vee} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{\epsilon^\vee} & N_0^\vee \oplus L'^\vee & \xrightarrow{\beta^\vee} & P^\vee & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(I_C, R) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Puisque $\overline{\beta^\vee} = 0$ et $\overline{\beta_1^\vee} = 0$, $\overline{\theta'^\vee}$ est un isomorphisme, donc aussi $\theta'^\vee$,θ' et θ.

Remarque 4.3. On peut remplacer l'hypothèse $\overline{\beta_1^\vee} = 0$ par la condition (moins forte) : pour tout homomorphisme u surjectif de N_1 dans un module libre L_1, l' homomorphisme composé $u\beta_1$ n'est pas surjectif. La démonstration reste valable.

Proposition 4.4. *S'il existe une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\tilde{\beta}_1} \mathcal{N}_1 \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_1} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P}_1$ est dissocié, où $H^2_*\mathcal{N}_1 = 0$ et où $\overline{\beta_1^\vee} = 0$, β_1 étant l'homomorphisme de R-modules gradués associé à $\tilde{\beta}_1$, alors c'est celle de 4.1, à isomorphisme près.

Démonstration. Posons $P_1 = H^0_*\mathcal{P}_1$, $N_1 = H^0_*\mathcal{N}_1$. On a aussi une suite exacte de R-modules gradués :

$$0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\beta_1} N_1 \xrightarrow{\epsilon_1} I_C \longrightarrow 0$$

On sait que $H^2_*\mathcal{N}_1 = 0 = H^3_{\mathfrak{m}}N_1$, donc par dualité locale, $\mathrm{Ext}^1_R(N_1, R) = 0$, ce qui permet de conclure.

On laisse au lecteur le soin de formuler l'équivalent de 3.5 et de 3.6.

Définition 4.5. *Une suite exacte*

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\beta} N_0 \oplus L' \xrightarrow{\epsilon} I_C \longrightarrow 0$$

$$\big(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\tilde{\beta}} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\tilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0\big)$$

où P et L' sont libres (resp. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}'$ sont dissociés), où N_0 (resp. $\mathcal{N}_0$) n'admet aucun facteur direct libre (resp. dissocié), où $\mathrm{Ext}^1_R(N_0, R) = 0$ (resp. $H^2_*\mathcal{N}_0 = 0$) et où $\overline{\beta^\vee} = 0$ est appelée **résolution de type N** *de I_C (resp. de $\mathcal{J}_C$).*

Corollaire 4.6. *Soit M' un R-module gradué de longueur finie, $\sigma'_i : L'_i \to L'_{i-1}$ une résolution graduée minimale de M', E'_0 (resp. N'_0) le noyau de σ'_2 (resp. σ'_1). Si C' est une courbe de la classe de biliaison déterminée par M', il existe $h \in \mathbf{Z}$ et deux résolutions:*

$$0 \longrightarrow E'_0 \oplus L \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\pi} I_{C'}(h) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow P_0 \xrightarrow{\beta} N'_0 \oplus L' \xrightarrow{\epsilon} I_{C'}(h) \longrightarrow 0$$

satisfaisant aux conditions de 3.2 et de 4.1.

Remarque 4.7. On verra au III que les deux types de résolutions s'échangent par liaison, ce qui correspond au fait que les rôles de E_0 et N_0 s'échangent par dualité.

5. Application au calcul des invariants.

Les deux types de résolutions ont chacun leur intérêt en ce qui concerne les calculs, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

5.1. Fonctions associées aux résolutions de type E et N. Soient

$$0 \longrightarrow E_0 \oplus L \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0$$

une résolution de type E de I_C,

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\beta} N_0 \oplus L' \xrightarrow{\epsilon} I_C \longrightarrow 0$$

une résolution de type N de I_C,

$$0 \longrightarrow L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \longrightarrow E_0 \longrightarrow 0$$

une résolution graduée minimale de E_0, et

$$0 \longrightarrow N_0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M_C \longrightarrow 0$$

le début d'une résolution graduée minimale de M_C.

On écrit :

$$L_4 = \underset{n \in \mathbf{Z}}{\oplus} R(-n)^{a(n)} \quad L_3 \oplus L = \underset{n \in \mathbf{Z}}{\oplus} R(-n)^{b(n)} \quad F = \underset{n \in \mathbf{Z}}{\oplus} R(-n)^{c(n)},$$

$$L_0 = \underset{n \in \mathbf{Z}}{\oplus} R(-n)^{a'(n)} \quad L_1 \oplus L' = \underset{n \in \mathbf{Z}}{\oplus} R(-n)^{b'(n)} \quad P = \underset{n \in \mathbf{Z}}{\oplus} R(-n)^{c'(n)},$$

et on définit ainsi six fonctions de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$ à support fini. (Nous savons que les trois premières proviennent en fait d'une résolution graduée minimale de I_C:

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{a(n)} \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0$$

de sorte que l'on a $a(n) = b(n) = c(n) = 0$ pour $n \leq 0$).

On définit aussi :

$$r_C(n) = a(n) - b(n) + c(n) - \binom{n-1}{-1}$$

$$r'_C(n) = a'(n) - b'(n) + c'(n) + \binom{-n-1}{-1}$$

et on remarque que pour des raisons de rang, $\sum_{n \in \mathbf{Z}} r_C(n) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} r'_C(n) = 0$, donc r_C et r'_C sont des caractères.

Proposition 5.2. *On a :*

$$\gamma_C(n) = \sum_{k \leq n} r_C(k) = r_C^{\sharp}(n), \quad \text{donc} \quad r_C = \partial \gamma_C,$$

$$\sigma_C(n) = \sum_{k \leq n} r'_C(k) = r'^{\sharp}_C(n), \quad \text{donc} \quad r'_C = \partial \sigma_C,$$

$$s_0 = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid c(n) \neq 0\},$$

$$e = -4 + \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid c'(n) \neq 0\}.$$

On a aussi :

$$d = -\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^2 r_C(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^2 r'_C(n),$$
$$g - 1 + 2d = -\frac{1}{6}\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^3 r_C(n) = \frac{1}{6}\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^3 r'_C(n).$$

Démonstration. La résolution de type E donne :

$$\begin{aligned} h^0\mathcal{J}_C(n) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} (a(k) - b(k) + c(k))\binom{n-k+3}{3} \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(r_C(k) + \binom{k-1}{-1}\right)\binom{n-k+3}{3}. \end{aligned}$$

En différentiant 3 fois, compte-tenu de la valeur de $\binom{n-k}{0}$, on obtient :

$$\partial^3 h^0\mathcal{J}_C(n) = \sum_{k\leq n}\left(r_C(k) + \binom{k-1}{-1}\right) = \sum_{k\leq n} r_C(k) + \binom{n}{0}$$
$$\text{donc}\quad \gamma_C(n) = \partial^3 h^0\mathcal{J}_C(n) - \binom{n}{0} = \sum_{k\leq n} r_C(k).$$

Le calcul de $\sigma_C(n)$ est analogue.

Puisque $\pi : F \to I_C$ est une présentation minimale de I_C on a :

$$\begin{aligned} s_0 &= \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\} \\ &= \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{F}(n) \neq 0\} \\ &= \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid c(n) \neq 0\}. \end{aligned}$$

On a vu aussi (démonstration de 4.2) que $P^\vee \to \mathrm{Ext}^1_R(I_C, R)$ est une présentation minimale de $\mathrm{Ext}^1_R(I_C, R)$ qui n'est autre, par dualité locale, que le dual de $H^3_{\mathbf{m}} I_C(4) = H^2_* \mathcal{J}_C(4) = H^1_* \mathcal{O}_C(4)$. Donc

$$\begin{aligned} e &= \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid h^1\mathcal{O}_C(n) \neq 0\} \\ &= -4 - \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid \mathrm{Ext}^1_R(I_C, R)_n \neq 0\} \\ &= -4 + \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid c'(n) \neq 0\}. \end{aligned}$$

D'après I 2.6, on a $d = -\gamma_C^{\sharp\sharp}(\infty) = \sigma_C^{\sharp\sharp}(\infty)$. Compte-tenu de $\gamma_C = r_C^\sharp$, et de I 1.13 appliqué à la fonction (à support fini) $\gamma_C^\sharp = r_C^{\sharp\sharp}$, on obtient :

$$d = -r_C^{3\sharp}(\infty) = -\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^2 r_C(n).$$

On a aussi

$$\begin{aligned} g-1 &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(n-1)(n-2)}{2}\gamma_C(n) \\ &= -\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} r_C(n) \\ &= -\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{n^3}{6} r_C(n) + \sum_{n\in\mathbf{Z}} n^2 r_C(n), \end{aligned}$$

d'où $$g-1+2d = -\frac{1}{6}\sum_{n\in\mathbf{Z}} n^3 r_C(n).$$

Les expressions faisant intervenir r'_C se calculent de la même manière, mais on peut aussi utiliser I 1.13 et $r_C + r'_C = \partial^4 \rho_C$.

6. Lien entre les deux types de résolutions.

Proposition 6.1. *Soient C une courbe,*

$$0 \longrightarrow E_0 \oplus L \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\pi} I_C \longrightarrow 0$$

une résolution de type E de I_C, et

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\beta} N_0 \oplus L' \xrightarrow{\epsilon} I_C \longrightarrow 0$$

une résolution de type N de I_C. Il existe deux modules libres L'_2 et L''_2, et des isomorphismes:

$$L_2 \simeq L'_2 \oplus L''_2 \qquad F \simeq L'_2 \oplus L' \qquad P \simeq L''_2 \oplus L$$

et, quitte à modifier α par un automorphisme de $E_0 \oplus L$, une suite exacte scindée :

$$0 \longrightarrow P \xrightarrow{\lambda} L_2 \oplus L \oplus L' \xrightarrow{\mu} F \longrightarrow 0$$

tels que α (resp. β) s'obtienne en composant μ à gauche avec l'injection canonique $E_0 \oplus L \to L_2 \oplus L \oplus L'$ (resp. λ à droite avec la projection canonique $L_2 \oplus L \oplus L' \to N_0 \oplus L'$).

Démonstration. On a par construction une suite exacte :

$$0 \longrightarrow E_0 \xrightarrow{i} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} N_0 \longrightarrow 0.$$

Puisque π est surjectif et $L_2 \oplus L'$ libre, on a un carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} L_2 \oplus L' & \xrightarrow{\sigma_2 \oplus 1} & N_0 \oplus L' \\ \downarrow{\scriptstyle \mu'} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} \\ F & \xrightarrow{\pi} & I_C \end{array}$$

Quand on tensorise par k, les deux flèches horizontales deviennent des isomorphismes, $\overline{\epsilon}$ est surjectif, donc aussi $\overline{\mu'}$ et μ', dont le noyau est donc un facteur direct de $L_2 \oplus L'$, c'est-à-dire un module libre L_2''. On a un homomorphisme induit $\gamma : L_2'' \to P$ qui est injectif après tensorisation par k, donc qui est injectif et identifie L_2'' à un facteur direct de P. On a donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 0 & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & \longrightarrow & L_2'' & \xrightarrow{\gamma} & P & \longrightarrow & P/L_2'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda'} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & E_0 & \longrightarrow & L_2 \oplus L' & \xrightarrow{\sigma_2 \oplus id_{L'}} & N_0 \oplus L' & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mu_0'} & & \downarrow{\scriptstyle \mu'} & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & E_0 \oplus L & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\pi} & I_C & \longrightarrow & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & 0 & & & & \end{array}$$

où λ' est l'injection canonique et μ_0' est induit par μ. On vérifie que μ_0' est injectif, et que son conoyau est isomorphe à P/L_2'', qui est libre. On a donc un isomorphisme $E_0 \oplus L \simeq E_0 \oplus P/L_2''$. D'après la démonstration de 3.5, on en déduit que L est isomorphe à P/L_2''. D'où l'isomorphisme $P \simeq L_2'' \oplus L$.

Soit q (resp. q') la projection de $N_0 \oplus L'$ (resp. $L_2 \oplus L'$) sur L'. D'après la minimalité de la résolution de type N de I_C, on a $\overline{\beta^\vee} = 0$, donc on a $\overline{(q\beta)^\vee} = 0$, $\overline{q\beta} = 0$, $\overline{(q\beta\gamma)} = \overline{(q'\lambda')} = 0$, et L_2'' s'identifie à un facteur direct de L_2.

Ecrivons $L_2 \simeq L_2' \oplus L_2''$, alors on a $F \simeq L_2' \oplus L'$ et on a obtenu les isomorphismes annoncés. Il reste à construire λ et μ ;

$\lambda : P \to L_2 \oplus L \oplus L'$ est obtenu en relevant β en $\beta_1 : P \to L_2 \oplus L'$ tel que $\beta_1\gamma = \lambda'$ et en lui ajoutant la projection canonique $P \to P/L_2'' \simeq L$. On vérifie que λ est scindé car λ' l'est.

$\mu : L_2 \oplus L \oplus L' \to F$ est défini par $\mu|_{L_2 \oplus L'} = \mu'$ et $\mu|_L = -\mu'\beta_1|_L$.

On vérifie qu'on a alors un diagramme commutatif de suites exactes :

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & P & = & P & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\
0 & \longrightarrow & E_0 \oplus L & \longrightarrow & L_2 \oplus L \oplus L' & \longrightarrow & N_0 \oplus L' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} & & \\
0 & \longrightarrow & E_0 \oplus L & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\pi} & I_C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

et μ induit un automorphisme de $E_0 \oplus L$. D'où le résultat.

Corollaire 6.2. *Soit C une courbe dont l'idéal I_C a des résolutions de type E et N avec $L = L' = 0$. Alors il existe un diagramme commutatif de suites exactes :*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & P & = & P & & \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \\
0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{i} & L_2 & \xrightarrow{\sigma_2} & N_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\epsilon} & & \\
0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\pi} & I_C & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

où λ admet une rétraction. En particulier, si on connait une des résolutions, on connait la deuxième.

7. Exemples.

Nous précisons ici les résolutions de type E et N pour quelques courbes particulières. Nous verrons d'autres méthodes de calcul en III 1 et III 4.

a) Les courbes ACM.

Si C est une courbe ACM, on a $M_C = 0$, donc $E_0 = N_0 = 0$ et $A_C = R/I_C$. Les résolutions de type E et N coïncident ; on a, par exemple :

$$0 \to E \to F \to I_C \to 0$$

avec E et F libres, d'où $P = E$, $N = F$. On a donc, pour tout n : $a'(n) = a(n) = 0$, $b'(n) = c(n)$, $c'(n) = b(n)$, d'où $r'_C(n) = -r_C(n)$ et on retrouve ainsi l'égalité $\gamma_C = -\sigma_C$.

Par exemple, si C est l'intersection complète de deux surfaces d'équations f, g de degrés s, t , l'idéal I_C est engendré par f et g avec l'unique relation $gf - fg = 0$, d'où la résolution :

$$0 \to R(-s-t) \to R(-s) \oplus R(-t) \to I_C \to 0.$$

On en déduit aussitôt :

$$\gamma_C(n) = \binom{n-s}{0} + \binom{n-t}{0} - \binom{n-s-t}{0} - \binom{n}{0},$$

c'est-à-dire, si $s < t$:

$$\gamma_C(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0 \;; \\ -1 & \text{pour } 0 \leq n < s \;; \\ 0 & \text{pour } s \leq n < t \;; \\ 1 & \text{pour } t \leq n < s+t \;; \\ 0 & \text{pour } n \geq s+t \;; \end{cases}$$

et, si $s = t$:

$$\gamma_C(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n < 0 \;; \\ -1 & \text{pour } 0 \leq n < s \;; \\ 1 & \text{pour } s \leq n < 2s \;; \\ 0 & \text{pour } n \geq 2s. \end{cases}$$

Pour une courbe ACM quelconque, la résolution et le caractère γ_C se calculent par liaison, cf. III 1.2 et 1.4.

b) Réunion disjointe de deux courbes ; la résolution de type N.

Soient C_1 et C_2 deux courbes disjointes et $C = C_1 \cup C_2$. Soient, pour $k = 1, 2$, M_k le module de Rao de C_k, I_k l'idéal gradué de C_k muni de sa résolution de type N :

$$0 \to P_k \xrightarrow{\beta_k} N_k \xrightarrow{\epsilon_k} I_k \to 0$$

où P_k est libre et N_k défini par la suite exacte :

$$0 \to N_k \to L_{1,k} \xrightarrow{\sigma_{1,k}} L_{0,k} \xrightarrow{\sigma_{0,k}} M_k \to 0.$$

Comme on a $\mathrm{Ext}^2_R(M_k, R) = 0$, la flèche ϵ_k se prolonge en $\epsilon'_k : L_{1,k} \to R$. Comme $\mathcal{O}_C$ est somme directe de $\mathcal{O}_{C_1}$ et $\mathcal{O}_{C_2}$, l'anneau A_C est somme directe de A_{C_1} et A_{C_2}. On obtient alors par la méthode de [LR] la résolution de type N de I_C à partir de celles des I_k :

Proposition 7.1. *L'idéal I_C admet la résolution de type N suivante :*

$$0 \to P \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow I_C \to 0$$

avec $P = P_1 \oplus P_2$, N défini par la suite exacte :

$$0 \to N \longrightarrow L_{1,1} \oplus L_{1,2} \xrightarrow{\theta} L_{0,1} \oplus L_{0,2} \oplus R \to M_C \to 0,$$

avec $\theta = \sigma_{1,1} \oplus \sigma_{1,2} \oplus (\epsilon'_1 - \epsilon'_2)$ et $\beta = \beta_1 \oplus \beta_2$.

Bien entendu la proposition 7.1 s'étend au cas de la réunion de d courbes disjointes. Pour la résolution de type E, voir c).

Exemple 7.2. Soit C la réunion de d droites disjointes. La résolution de type N de C est donnée par $P = R(-2)^d$ et par la suite exacte :

$$0 \to N \to R(-1)^{2d} \to R^{d-1} \to M_C \to 0.$$

Cette suite est le début d'une résolution graduée minimale de M_C donc on a en particulier $N = N_0$.

Si les droites ont pour équations $A_i = B_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, d$, on peut décrire N comme l'ensemble des $(\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_d, \mu_d) \in R(-1)^{2d}$ qui vérifient pour tous i, j : $\lambda_i A_i + \mu_i B_i = \lambda_j A_j + \mu_j B_j$.

c) Réunion disjointe de deux courbes ACM ; la résolution de type E.

On reprend les notations de b), mais cette fois les courbes C_i sont ACM . On considère les résolutions minimales des idéaux I_k :

$$0 \to E_k \xrightarrow{\alpha_k} F_k \xrightarrow{\pi_k} I_k \to 0.$$

Le calcul de la résolution de type E est plus compliqué que celui du type N et nécessite quelques préliminaires.

Lemme 7.3. Résolution d'un produit tensoriel. *Soit R un anneau et considérons deux suites exactes de R-modules :*

$$0 \to E_k \xrightarrow{\alpha_k} F_k \xrightarrow{\pi_k} I_k \to 0 \qquad (k = 1, 2).$$

On suppose E_1 et F_1 libres sur R.
Alors on a une suite exacte de R-modules :

$$(*) \quad 0 \to E_1 \otimes E_2 \xrightarrow{\alpha} (E_1 \otimes F_2) \oplus (F_1 \otimes E_2) \xrightarrow{\psi} F_1 \otimes F_2 \xrightarrow{\pi} I_1 \otimes I_2 \to 0,$$

avec $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$, $\psi = (\alpha_1 \otimes id_{F_2}) + (id_{F_1} \otimes \alpha_2)$, $\alpha = (id_{E_1} \otimes \alpha_2) \oplus (-\alpha_1 \otimes id_{E_2})$.

Démonstration. Comme E_1 et F_1 sont libres, $E_1 \otimes I_2$ et $F_1 \otimes I_2$ s'injectent respectivement dans E_1 et F_1 et il en résulte que la flèche $\alpha_1 \otimes 1 : E_1 \otimes I_2 \to F_1 \otimes I_2$ est injective, donc que l'on a $\mathrm{Tor}^1_R(I_1, I_2) = 0$. Le reste est une vérification sans difficultés.

Lemme 7.4. *Soit R un anneau, I_1, I_2 deux idéaux de R, $\mu : I_1 \otimes I_2 \to I_1 I_2$ la flèche définie par $\mu(x \otimes y) = xy$. Alors* $\mathrm{Ker}\mu$ *est annulé par $I_1 + I_2$.*

Démonstration. Soit $z \in \mathrm{Ker}\mu$, $z = \sum x_i \otimes y_i$ avec $\sum x_i y_i = 0$ et soit $f_k \in I_k$. On a $(f_1 + f_2)z = \sum f_1 x_i \otimes y_i + \sum x_i \otimes f_2 y_i = \sum f_1 \otimes x_i y_i + \sum (x_i y_i \otimes f_2) = f_1 \otimes \sum x_i y_i + (\sum x_i y_i) \otimes f_2 = 0$.

Corollaire 7.5. *On reprend les notations du début de c) : C_1 et C_2 sont deux courbes ACM disjointes d'idéaux I_1 et I_2.*
1) La flèche μ définie en 7.4 est un isomorphisme de $I_1 \otimes I_2$ sur $I_1 I_2$.
2) $I_1 I_2$ est l'idéal saturé de $C = C_1 \cup C_2$.

Démonstration. 1) Comme $C_1 \cap C_2$ est vide, l'idéal $I_1 + I_2$ a pour radical $\mathbf{m}$ et on a, pour n assez grand, $\mathbf{m}^n \subset I_1 + I_2$. Il en résulte que $\mathrm{Ker}\mu$ est annulé par $\mathbf{m}^n$. Mais la suite exacte $(*)$ de 7.3 montre que l'on a $H^0_{\mathbf{m}}(I_1 \otimes I_2) = 0$, donc $\mathrm{Ker}\mu = 0$ et μ est un isomorphisme.

2) Comme $I_1 I_2 = I_1 \otimes I_2$, la suite $(*)$ montre $H^0_{\mathbf{m}} I_1 I_2 = H^1_{\mathbf{m}} I_1 I_2 = 0$, donc $I_1 I_2$ est l'idéal saturé de C . La courbe C est aussi définie par l'idéal $I_1 \cap I_2$ et on a $I_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2$ d'où l'égalité.

Corollaire 7.6. *Avec les notations précédentes, la résolution minimale de type E de I_C est donnée par la suite exacte $(*)$ de 7.3 (avec $I_C = I_1 \otimes I_2$).*

Exemple 7.7. Pour la courbe C réunion disjointe de deux droites, on obtient la résolution :

$$0 \to R(-4) \to R(-3)^4 \to R(-2)^4 \to I_C \to 0.$$

Corollaire 7.8. *Désignons par a_{ij} les vecteurs d'une base de F_j pour $j = 1, 2$ et par A_{ij} leurs images dans I_j. On a la résolution minimale de M_C :*

$$0 \to E_1 \otimes E_2 \xrightarrow{\alpha} (E_1 \otimes F_2) \oplus (F_1 \otimes E_2) \xrightarrow{\theta} (F_1 \otimes F_2) \oplus E_1 \oplus E_2$$
$$\xrightarrow{u} F_1 \oplus F_2 \xrightarrow{\pi_1 - \pi_2} R \to M_C \to 0$$

où l'on a posé : $\alpha = (id_{E_1} \otimes \alpha_2) \oplus (-\alpha_1 \otimes id_{E_2})$, $\theta = \psi \oplus (id_{E_1} \otimes \pi_2) \oplus (\pi_1 \otimes -id_{E_2})$ et où u vaut $\alpha_1 \oplus \alpha_2$ sur $E_1 \oplus E_2$ et est défini sur $F_1 \otimes F_2$ par $u(a_{i1} \otimes a_{j2}) = (A_{j2}a_{i1}, -A_{i1}a_{j2})$.

Démonstration. On a vu en I 3.5 que l'on a $M_C = R/(I_1 + I_2)$. De plus, on a la suite exacte :

$$0 \to I_1 \cap I_2 \to I_1 \oplus I_2 \to I_1 + I_2 \to 0$$

et on sait que $I_1 \cap I_2$ est isomorphe à $I_1 \otimes I_2$. On en déduit la résolution de $I_1 + I_2$ à partir de celles de $I_1 \oplus I_2$ et de $I_1 \otimes I_2$ par la méthode du "mapping cone". Elle est minimale car les matrices qui interviennent sont toutes à coefficients dans $\mathbf{m}$.

Remarques 7.9.

1) Par rapport à l'énoncé 6.1 , on note qu'ici on a $L_2 \simeq P \oplus F$ et $L = L' = 0$.

2) Dans le cas où C_1 et C_2 sont des intersections complètes on retrouve la résolution de M_C vue en 2.6 (cf. aussi l'exemple a) ci-dessus et I 3.5).

3) Le cas où les C_i ne sont pas ACM est nettement plus délicat, voir III 1.7 et 1.8 pour certaines réunions de droites.

III BILIAISON

Nous rappelons dans ce numéro un certain nombre de résultats concernant la biliaison (ou liaison paire), notamment en ce qui concerne la variation des invariants et des résolutions. Nous commençons l'étude des courbes minimales qui sera l'objet principal du IV.

1. Rappels sur la liaison . On se reportera à [PS] ou [R] pour des détails concernant la liaison. Nous nous contentons d'en rappeler les propriétés essentielles.

a) Définition.

Définition 1.1. *Soit C une courbe, X une courbe intersection complète de deux surfaces de degrés s et t contenant C. L'image canonique du faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_X)$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_X$ est un idéal $\mathcal{J}_{\Gamma/X}$ de $\mathcal{O}_X$ qui définit une courbe Γ contenue dans X. De la même manière on a un isomorphisme : $\mathcal{J}_{C/X} \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_\Gamma, \mathcal{O}_X)$. On dit que C et Γ sont liées (algébriquement) par X (ou par les surfaces de degrés s et t définissant X). On parlera en abrégé de liaison $s \times t$.*
On dit que deux courbes C et C' sont dans la même classe de liaison (resp. de biliaison) si et seulement si il existe des courbes $C_0 = C, C_1, \ldots, C_n = C'$ telles que C_i et C_{i+1} soient liées (resp. et si, de plus, n est pair).

b) Variation des invariants.

Proposition 1.2. *Avec les notations de 1.1, on a les propriétés suivantes :*
1) $d_C + d_\Gamma = st$; $g_C - g_\Gamma = (\frac{1}{2}(s+t) - 2)(d_C - d_\Gamma)$.
2) Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a

$$h^1\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{J}_\Gamma(s+t-n-4)$$

(ou encore : $\rho_C(n) = \rho_\Gamma(s+t-n-4)$.
3) Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a :

$$h^0\mathcal{J}_C(n) - h^0\mathcal{J}_X(n) = h^1\mathcal{O}_\Gamma(s+t-n-4)\,;$$
$$h^0\mathcal{J}_\Gamma(n) - h^0\mathcal{J}_X(n) = h^1\mathcal{O}_C(s+t-n-4).$$

3') Pour tout $n \in \mathbf{Z}$ on a :

$$\gamma_C(n) + \sigma_\Gamma(s+t-n-1) = \gamma_\Gamma(n) + \sigma_C(s+t-n-1)$$
$$= \binom{n-s}{0} + \binom{n-t}{0} - \binom{n-s-t}{0} - \binom{n}{0}.$$

4) $M_C \simeq M_\Gamma^*(4-s-t)$.

Remarque 1.3. La formule 3′ s'obtient à partir de 3 par différentiation. On notera que la somme est nulle pour $n < 0$ et $n \geq s+t$. Si C est ACM, il en est de même de Γ (et on a $\sigma_\Gamma = -\gamma_\Gamma$).

c) Variation des résolutions.

Proposition 1.4. *Avec les notations de 1.1, on suppose que $\mathcal{J}_C$ admet une résolution localement libre :*

$$0 \to \mathcal{A}_C \to \mathcal{B}_C \to \mathcal{J}_C \to 0.$$

Alors, $\mathcal{J}_\Gamma$ admet la résolution localement libre, obtenue par "mapping cone" :

$$0 \to \mathcal{B}_C^\vee(-s-t) \to \mathcal{A}_C^\vee(-s-t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-t) \to \mathcal{J}_\Gamma \to 0.$$

Remarques 1.5. a) On notera que la liaison échange le type E ou N des résolutions : si $\mathcal{B}_C$ est dissocié, c'est $\mathcal{A}_\Gamma$ qui est dissocié et inversement.

b) Même si la résolution de C est minimale, au sens de II, celle de Γ ne l'est pas nécessairement.

c) Cette proposition admet une variante évidente obtenue en remplaçant les faisceaux par les modules gradués correspondants.

Exemples 1.6.

a) Les courbes ACM :

Dans ce cas les résolutions de type E et N coïncident et donc 1.4 permet de les calculer à partir de celles des intersections complètes (cf. II 5.a). Par exemple, si C est liée à une droite par deux surfaces de degré s, on a la résolution de l'idéal gradué de C :

$$0 \to R(-2s+1)^2 \to R(-2s+2) \oplus R(-s)^2 \to I_C \to 0.$$

b) Les réunions de droites disjointes :

On peut utiliser 1.4 pour passer d'un type de résolution à l'autre. Dans le cas de la réunion de d droites disjointes, cela peut permettre de calculer la résolution de type E (cf. II 7.c).

Proposition 1.7. *Soit C la réunion de d droites disjointes. On suppose C tracée sur une quadrique lisse Q (on notera que c'est toujours le cas si on a $d \leq 3$). On a alors la résolution minimale de I_C (qui détermine aussitôt celle de type E) :*

$$0 \to R(-d-2)^{d-1} \to R(-d-1)^{2d} \to R(-d)^{d+1} \oplus R(-2) \to I_C \to 0.$$

Démonstration. La courbe C est liée par $2 \times d$ à C' qui est formée de d droites de l'autre famille de Q. On obtient donc la résolution de type E de C à partir de celle de type N de C' (donnée en II 7.c) en utilisant 1.4 .

Dans le cas de 4 droites on a le résultat suivant :

Proposition 1.8. *Soit $C = \bigcup_{i=1}^{4} \Delta_i$ la réunion disjointe de 4 droites. On suppose C non tracée sur une quadrique. Alors, la résolution minimale de I_C est la suivante :*

$$0 \to R(-6)^2 \to R(-5)^4 \oplus R(-4)^3 \to R(-4)^2 \oplus R(-3)^4 \to I_C \to 0.$$

Démonstration. Soient Q_1,Q_2 les quadriques lisses contenant respectivement $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ (resp. $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$). Désignons par $\mathcal{F}_1$(resp. $\mathcal{F}_2$) la famille des droites de Q_1 (resp. Q_2) contenant les Δ_i. L'autre famille sera appelée $\mathcal{G}_1$(resp. $\mathcal{G}_2$). L'intersection $Q_1 \cap Q_2$ contient Δ_2, Δ_3 et deux droites Δ_2', Δ_3' appartenant aux familles $\mathcal{G}_i$. Soit $\Delta_1' \in \mathcal{G}_1$, $\Delta_1' \neq \Delta_2', \Delta_3'$ et soit P_1 le plan $\langle \Delta_1, \Delta_1' \rangle$; il coupe Δ_2' en x_2, Δ_3' en x_3. Soient d'autre part x,y les intersections de Δ_1' avec Q_2 et choisissons un plan P_4 contenant Δ_4 et ne contenant pas les points x_2, x_3, x, y. La courbe C est liée par les deux surfaces cubiques $Q_1 \cup P_4$ et $Q_2 \cup P_1$ à la courbe Γ suivante : $\Gamma = D \cup \Delta_1' \cup \Delta_4' \cup \Delta_2' \cup \Delta_3'$ où $D = P_1 \cap P_4$ et $\Delta_4' \cup \Delta_4 = P_4 \cap Q_2$.

On vérifie aussitôt que Δ_1' et Δ_4' sont non coplanaires (car $x, y \notin \Delta_4'$), que Δ_1' et Δ_4' coupent D et que Δ_2' (resp. Δ_3') ne coupe aucune des autres droites (Δ_2' ne rencontre pas D car $x_2 \notin P_4$). Soit $\Gamma_0 = D \cup \Delta_1' \cup \Delta_4'$. C'est une courbe connexe qui est liée à une droite par deux surfaces de degré 2 : prendre un plan P_1' contenant Δ_1' (resp. P_4' contenant Δ_4') et les surfaces $P_4 \cup P_1'$ et $P_1 \cup P_4'$. On a donc la résolution de type N (ou E, puisque Γ_0 est ACM) de Γ_0 :

$$0 \to R(-3)^2 \to R(-2)^3 \to I_C \to 0$$

(la courbe Γ_0 est une "cubique gauche"). On en déduit la résolution de type N de Γ :

$$0 \to P \to N \to I_\Gamma \to 0$$

avec $P = R(-2)^2 \oplus R(-3)^2$ et N défini par la suite exacte :

$$0 \to N \to R(-1)^4 \oplus R(-2)^3 \to R^2 \to M_\Gamma \to 0.$$

On en déduit la résolution annoncée grâce à 1.4.

Bien sûr, pour une courbe C, il est intéressant de savoir quels sont les couples d'entiers (s,t) permettant de lier C. Le lemme suivant peut être utile en ce sens.

Lemme 1.9. *Soient C une courbe, $Q_0, Q_1, \ldots, Q_r$ les équations de $r+1$ surfaces contenant C, sans composante commune, de degrés $d_0 \leq d_1 \leq \cdots \leq d_r$.*

Alors il existe deux surfaces de degrés d_0 et d_r, sans composante commune, dont les équations sont dans l'idéal engendré par $Q_0, Q_1, \ldots, Q_r$. On peut donc lier C par $d_0 \times d_r$.

Démonstration. Quitte à rajouter dans l'idéal des équations de la forme $Q_i P_{j_i}$, où P_{j_i} parcourt l'ensemble des polynômes homogènes de degré $d_r - d_i$, on peut supposer que $d_1 = \cdots = d_r$.

Soit $\Lambda = k[\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$, $\mathcal{Q} = \sum_{i=1}^r \lambda_i Q_i$. Si pour tout $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ de $k^r - (0, \ldots, 0)$, Q_0 et $\sum_{i=1}^r \lambda_i Q_i$ ont un facteur commun, le sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^3 \times \operatorname{Spec} \Lambda$ défini par Q_0 et $\mathcal{Q}$ est de dimension $r+2$, c'est-à-dire que Q_0 et $\mathcal{Q}$ ont un facteur commun dans $\Lambda[X, Y, Z, T]$, et puisque Q_0 est indépendant des λ_i, ce facteur commun divise tous les Q_i, ce qui contredit l'hypothèse.

2. Biliaison élémentaire.

Nous étudions maintenant l'opération de biliaison élémentaire qui s'obtient en pratiquant deux liaisons successives, l'une des surfaces liantes étant commune aux deux liaisons.

a) Notations et définition.

Définition 2.1. *Soit C une courbe, Q (resp. S) une surface de degré s (resp. t) contenant C. On suppose que Q et S n'ont pas de composante commune. Soit X l'intersection complète de Q et S et Γ la courbe liée à C par X. Soit de plus S' une surface de degré $t+h$, $h \in \mathbf{Z}$, contenant Γ, sans composante commune avec Q, Y l'intersection de Q et S' et C' la courbe liée à Γ par Y; on dit que C' est obtenue à partir de C par une* **biliaison élémentaire** *de* **degré** *s et de* **hauteur** *h, ou, en abrégé, une biliaison élémentaire (s, h).*
La biliaison sera dite **ascendante** *si $h \geq 0$,* **descendante** *si $h \leq 0$.*

Remarque 2.2. Lorsque h est > 0, l'existence d'une telle surface S' est assurée, il suffit de prendre $S' = S \cup H$ où H est une surface de degré h coupant proprement Q. Dans ce cas, la courbe C' est la réunion schématique de C et de l'intersection complète $S \cap H$, de degré sh. On dit alors que la biliaison est **triviale** (cf. [LR] p. 276, "basic double linkage").

En revanche, pour $h \leq 0$, il se peut qu'il n'existe pas de surface S' convenable.

On note $I_{C/Q}$ l'image de I_C dans $R_Q = R/(Q)$.

b) L'homomorphisme u .

Proposition 2.3. *Soient C une courbe, Q une surface de degré s contenant C, C' une courbe tracée sur Q, $h \in \mathbf{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) C' est obtenue à partir de C par une double liaison par des surfaces (Q,S) et (Q,S') avec $\deg S' - \deg S = h$.
2)Il existe un homomorphisme injectif $u : I_{C/Q}(-h) \to R_Q$ (ou, ce qui revient au même, $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$) tel que l'on ait $I_{C'/Q} = \mathrm{Im} u$. On a alors $I_{C'/Q} \simeq I_{C/Q}(-h)$.

Démonstration. Supposons que C' soit obtenue à partir de C par une double liaison comme décrite en 2.1. On a le diagramme commutatif suivant (en notant encore Q, S, S' des équations des surfaces correspondantes) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_{C/Q}(-h) & \longrightarrow & R_Q(-h) & \longrightarrow & R_C(-h) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow .S' & & \downarrow .S' & & \\ 0 & \longrightarrow & R_Q & \xrightarrow{.S} & R_Q(t) & \longrightarrow & R_X(t) & \longrightarrow & 0\,. \end{array}$$

On a, par définition de la liaison : $I_\Gamma = \{ f \in R \mid fI_C \subset I_X \}$ et la formule analogue pour $I_{C'}$.

Les multiplications par S et S' sont injectives dans R_Q. Comme $S' \in I_{\Gamma/X}$, il induit un homomorphisme de R_C dans R_X et donc le diagramme définit un homomorphisme u, injectif, de $I_{C/Q}(-h)$ dans R_Q. On notera en particulier que l'on a $u(S) = S'$. Soit alors C'' le sous-schéma de Q défini par l'idéal $\mathrm{Im} u$ de R_Q. On a donc : $I_{C''/Q} \simeq I_{C/Q}(-h)$, et par définition, $I_{C''/Q} = \{ f \in R_Q \mid \exists\, g \in I_{C/Q} \text{ tel que } Sf = S'g \}$. Nous allons montrer que $I_{C''/Q} = I_{C'/Q}$ et donc $C' = C''$.

Soit $f \in I_{C''/Q}$, il s'agit de voir que $f \in I_{C'/Q}$, i.e., que si $h \in I_{\Gamma/Q}$, on a $fh \in (S')$. Or, il existe $g \in I_{C/Q}$ tel que $Sf = S'g$ d'où $Sfh = S'gh$, et comme $h \in I_{\Gamma/Q}$, $gh = Sh'$ donc $Sfh = SS'h'$. Comme la multiplication par S est injective dans R_Q, on a bien $fh = S'h'$.

Réciproquement, soit $f \in I_{C'/Q}$. Comme $S \in I_{\Gamma/Q}$, on a $Sf = S'g$ et il faut montrer que $g \in I_{C/Q}$, ou encore, par réciprocité de la liaison, que $gI_{\Gamma/Q} \subset (S)$. Mais, si $h \in I_{\Gamma/Q}$, on a $fh = S'h'$ d'où $Sfh = S'gh = S'Sh'$ et donc $gh \in (S)$.

Il reste à prouver que si C' est obtenue par le procédé 2) avec un homomorphisme u elle s'obtient aussi par double liaison. Pour cela, on prend pour S une surface quelconque contenant C et sans composante commune avec Q et on prend S' telle que $S' = u(S)$ dans R_Q.

Nous avons donc ramené le problème de la construction d'une biliaison élémentaire à celui de l'existence d'un homomorphisme, qui est précisé par les deux énoncés suivants :

Lemme 2.4. *Soient C une courbe, Q une surface de degré s contenant C. On a une suite exacte :*

$$0 \to H^0\mathcal{O}_Q(h) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) \to (H^1\mathcal{O}_C(s-4-h))^\vee \to 0$$

et donc une égalité :

$$\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) = h^0\mathcal{O}_Q(h) + h^1\mathcal{O}_C(s-4-h).$$

Démonstration. On a une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules :

$$0 \to \mathcal{J}_{C/Q} \to \mathcal{O}_Q \to \mathcal{O}_C \to 0$$

d'où l'on déduit une autre suite exacte :

$$0 \to H^0\mathcal{O}_Q(h) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C(-h), \mathcal{O}_Q) \to 0.$$

La dualité de Serre sur la surface Q, dont le faisceau dualisant est $\omega_Q = \mathcal{O}_Q(s-4)$, montre que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C(-h), \mathcal{O}_Q)$ est le dual de $H^1\mathcal{O}_C(s-4-h)$, d'où le résultat.

Remarque 2.5. Dans la suite exacte précédente, l'image de $H^0\mathcal{O}_Q(h)$ (c'est-à-dire des éléments homogènes de degré h de R_Q) correspond aux biliaisons élémentaires triviales : si les surfaces S, S' sont telles que $S' = SH$ avec $\deg H = h$ (biliaison élémentaire triviale), u est la multiplication par H dans R_Q.

Proposition 2.6. *Soient C une courbe, Q une surface de degré s contenant C, $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_Q$-modules et $\mathcal{O}_{C'}$ son conoyau ;*
i) si u est surjectif, il est bijectif, h est négatif, C est l'intersection complète de Q avec une surface Q' de degré $-h$;
ii) si u est injectif et non surjectif, C' est une courbe ;
iii) si u n'est pas injectif, C' est une surface contenue dans Q, différente de Q si u n'est pas nul. En particulier, Q n'est pas intègre.

Démonstration. Le noyau de u est égal à $\mathcal{J}_{Q'/Q}(-h)$, où Q' est un sous-schéma de Q qui contient C. En passant au quotient, on obtient un homomorphisme injectif $u' : \mathcal{J}_{C/Q'}(-h) \to \mathcal{O}_Q$. De plus, si les schémas Q et Q' sont égaux en codimension 1, ils sont égaux.

Sur tout ouvert où u est surjectif, u' est bijectif, les schémas Q et Q' qui sont égaux en-dehors de C sont égaux, et le noyau de u est nul. Donc si u est surjectif en codimension 1, il est bijectif, $\mathcal{J}_{C/Q}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_Q(h)$ et l'injection canonique de $\mathcal{J}_{C/Q}$ dans $\mathcal{O}_Q$ correspond à une section non nulle de $\mathcal{O}_Q(-h)$, qui provient d'une section non nulle de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-h)$ ce qui entraîne le résultat.

Si u n'est pas injectif, il n'est pas surjectif en codimension 1, et C' a une composante qui est une surface contenue dans Q (différente de Q si u n'est pas nul).

Si u est injectif et non surjectif, C' n'est pas vide et on a un isomorphisme $\mathcal{J}_{C/Q}(-h) \simeq \mathcal{J}_{C'/Q}$. Il faut montrer que C' est de dimension 1 et n'a pas de composante immergée. Soit x un point de $\mathbf{P}^3$. Si $\mathcal{O}_{\mathbf{P},x}$ est de dimension 1, $\mathcal{O}_{Q,x}$ est artinien, u_x est la multiplication par un élément non diviseur de 0 dans $\mathcal{O}_{Q,x}$, donc c'est un isomorphisme et $\mathcal{O}_{C',x}$ est nul. Si $\mathcal{O}_{\mathbf{P},x}$ est de dimension 3, les profondeurs en x de $\mathcal{J}_C$, $\mathcal{J}_{C/Q} = \mathcal{J}_{C'/Q}(h)$ et $\mathcal{J}_{C'}$ sont égales à 2, donc C' n'a pas de composante immergée.

Remarques 2.7.

a) L'ensemble des homomorphismes injectifs de $\mathcal{J}_{C/Q}(-h)$ dans $\mathcal{O}_Q$ est un ouvert de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q)$, qui contient les multiplications par les éléments homogènes de degré h de R_Q, non diviseurs de zéro. En particulier il n'est pas vide pour $h > 0$.

b) Soit $h < 0$ et supposons que C n'est pas une intersection complète. Si $H^1\mathcal{O}_C(s-4-h)$ est non nul et s'il existe une surface intègre Q de degré s contenant C, il existe une biliaison élémentaire (s, h) qui fait passer de C à C'. C'est le cas en particulier si C est intègre et si $s = s_0(C)$. L'exemple de la réunion disjointe d'une droite et d'une conique, avec $h = -1$ et $s = 2$ montre que l'hypothèse de l'existence d'une surface intègre de degré s est essentielle.

c) Lorsque l'on a $s > e+h+4$, toute biliaison élémentaire (s, h) est triviale. En effet, l'hypothèse signifie que $H^1\mathcal{O}_C(s-4-h)$ est nul. Il suffit alors d'utiliser 2.4.

d) Pour $s > e+3$ il n'existe pas de biliaison élémentaire avec $h < 0$: C est une courbe minimale (cf. 5 ci-dessous).

c) Décomposition des biliaisons.

Lemme 2.8. Déformation. *Soient Γ, Γ' deux courbes liées par $s \times t$ à une même courbe C. Il existe une déformation plate $\pi : G \to U$, paramétrée par un ouvert non vide U de la droite affine $\mathbf{A}^1(k)$ telle que :*
1) Les fibres G_λ de π sont des courbes à cohomologie et module de Rao constants.
2) Γ et Γ' sont deux fibres de π.

Démonstration. Vu 1.4 , cela résulte de II 1.3.

Proposition 2.9. *Soient C, C' deux courbes de la même classe de biliaison. Alors, on passe de C à C' par un nombre fini de biliaisons élémentaires et de déformations (à cohomologie et module de Rao constants).*

Démonstration. On se ramène au cas où C est liée à Γ par des surfaces Q_1, Q_2 de degrés s, t, puis Γ à C' par Q_3, Q_4 de degrés s', t'. On choisit alors Σ de degré t', contenant Γ, sans composante commune avec Q_1 ni Q_3. On lie Γ à C_1 par Q_1, Σ, puis Γ à C_2 par Q_3, Σ. On passe donc de C à C_1 puis à C_2 par deux biliaisons élémentaires. Enfin, C' et C_2, liées à Γ par $s' \times t'$ s'obtiennent par déformation (2.8).

Remarque 2.10. La même méthode montre aussi qu'une biliaison élémentaire de hauteur $h > 0$ s'obtient comme composée de h biliaisons élémentaires de hauteur 1 ou encore de h biliaisons triviales de hauteur 1 et d'une déformation. (On notera qu'une biliaison élémentaire de hauteur 0 est une déformation).

On prendra garde au fait que dans 2.9, certaines biliaisons élémentaires peuvent être ascendantes et d'autres descendantes. Le résultat de 2.9 sera, de ce point de vue, amélioré en IV lorsque l'une des courbes est minimale.

3. Variation des invariants. Dans tout ce qui suit on se place dans la situation de 2.3 : C est une courbe, Q une surface de degré s contenant C, C' la courbe obtenue par une biliaison élémentaire (s, h) sur Q, avec $h \in \mathbf{Z}$. On se propose de calculer les invariants cohomologiques de C' à partir de ceux de C.

a) La méthode. On utilise la relation $\mathcal{J}_{C'/Q} \simeq \mathcal{J}_{C/Q}(-h)$ et les deux suites exactes :

$$0 \to \mathcal{J}_Q = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s) \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{J}_{C/Q} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{J}_Q = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s) \to \mathcal{J}_{C'} \to \mathcal{J}_{C'/Q} \to 0.$$

La plupart du temps les calculs sont évidents à partir de ces remarques et ne seront pas explicités.

Remarque 3.1. Du point de vue cohomologique, deux biliaisons de type (s, h) ont des effets équivalents sur les invariants numériques. De même, si on a $h > 0$, une biliaison (s, h) est équivalente à h biliaisons $(s, 1)$. On pourra donc souvent se borner à expliciter les formules dans ce dernier cas. Pour le cas $h < 0$, il suffit d'échanger les rôles de C et C'.

b) Degré et genre.

Proposition 3.2. *On a : $d' = d + sh$; $g' - g = hd + hs(s + h - 4)/2$.*

(Pour le degré il suffit de penser au cas trivial, cf.2.2 ; pour le genre, le mieux est d'utiliser 1.2.1).

c) Module de Rao.

Proposition 3.3.
On a $M_{C'} \simeq M_C(-h)$; en particulier, $\rho_{C'}(n) = \rho_C(n - h)$.

d) Postulation.

Proposition 3.4.
1) On a :

$$h^0\mathcal{J}_{C'}(n) = h^0\mathcal{J}_C(n-h) + \binom{n-s+3}{3} - \binom{n-s-h+3}{3}.$$

En particulier, pour $h = 1$:

$$h^0\mathcal{J}_{C'}(n) = h^0\mathcal{J}_C(n-1) + \binom{n-s+2}{2}.$$

2) On a :

$$\gamma_{C'}(n) = \gamma_C(n-h) + \binom{n-h}{0} - \binom{n}{0} + \binom{n-s}{0} - \binom{n-s-h}{0}.$$

Pour $h = 1$:

$$\gamma_{C'}(n) = \gamma_C(n-1) + \binom{n-s-1}{-1} - \binom{n-1}{-1}.$$

Autrement dit (toujours pour $h = 1$) :

$$\gamma_{C'}(n) = \begin{cases} \gamma_C(n-1)+1, & \text{si } n = s \ ; \\ \gamma_C(n-1)-1, & \text{si } n = 0 \ ; \\ \gamma_C(n-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

e) Spécialité.

Proposition 3.5.
1) On a :

$$h^2\mathcal{J}_{C'}(n) = h^2\mathcal{J}_C(n-h) + \binom{s+h-n-1}{3} - \binom{s-n-1}{3} + \binom{-n-1}{3} - \binom{h-n-1}{3}.$$

Pour $h = 1$:

$$h^2\mathcal{J}_{C'}(n) = h^2\mathcal{J}_C(n-1) + \binom{s-n-1}{2} - \binom{-n-1}{2}.$$

2) On a :

$$\sigma_{C'}(n) = \sigma_C(n-h) + \binom{s-n-1}{0} - \binom{-n-1}{0} + \binom{h-n-1}{0} - \binom{s+h-n-1}{0}.$$

Pour $h = 1$:

$$\sigma_{C'}(n) = \sigma_C(n-1) - \binom{s-n-1}{-1} + \binom{-n-1}{-1}.$$

Ou encore, toujours pour $h = 1$:

$$\sigma_{C'}(n) = \begin{cases} \sigma_C(n-1)+1, & \textit{si } n = 0 \ ; \\ \sigma_C(n-1)-1, & \textit{si } n = s \ ; \\ \sigma_C(n-1) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

f) Les invariants s_0 et e.

Proposition 3.6. *On suppose $h = 1$.*
a) On a :

$$s'_0 = \begin{cases} s_0, & \textit{si } s = s_0 \ ; \\ s_0+1 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

b) On a :

$$e' = \sup(e+1, s-3) = \begin{cases} e+1, & \textit{si } s \le e+4 \ ; \\ s-3 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

La proposition résulte de 3.4 et 3.5 . On notera qu'on a toujours $s'_0 \ge s_0$ et $e' \ge e+1$.

Remarque 3.7. (rang maximum).
Les calculs précédents, notamment 3.3 et 3.6, montrent que si C' est biliée à C par (s,h) avec $h > 0$, et si C' est de rang maximum (i.e., si $s_0(C') > r_o(C')$), C l'est aussi. En revanche, la réciproque est fausse (prendre pour C la réunion disjointe de deux droites, $s = 2$, $h = 2$, C' est une courbe de degré 6 et genre 3 tracée sur une quadrique, donc non de rang maximum). Nous retiendrons de cet exemple que la propriété de rang maximum a tendance à se perdre par biliaison ascendante. Cependant, si C est de rang maximum, on notera qu'il existe pour tout $h \ge 0$ des courbes C' de rang maximum avec $M_{C'} = M_C(-h)$. Il suffit pour cela de faire une biliaison élémentaire (s,h) avec $s > s_0$. La même remarque vaut aussi pour le corang maximum (i.e. la condition $e(C) < r_a(C)$).

g) Un exemple. On a calculé en I 2.d les invariants de la courbe C réunion disjointe de deux droites. On en déduit par les calculs précédents ceux de toute courbe de sa classe de biliaison (ou de liaison car C est liée à elle-même par 2×2). Par exemple, soit C' biliée à C par $(4,2)$ (la courbe C' correspond à un fibré de corrélation nulle). On a $d_{C'} = 10$; $g_{C'} = 11$; $\gamma_{C'}(0) = \ldots = \gamma_{C'}(3) = -1$, $\gamma_{C'}(4) = 4$, les autres termes étant nuls ; on en déduit $s'_0 = 4$. Pour la spécialité on a $\sigma_{C'}(0) = \sigma_{C'}(1) = 1$, $\sigma_{C'}(2) = 2$, $\sigma_{C'}(3) = -2$, $\sigma_{C'}(4) = \sigma_{C'}(5) = -1$, les autres termes sont nuls et on a $e = 2$.

4. Variation des résolutions.

Toujours dans la situation de 2.3, on cherche cette fois à préciser comment varient les résolutions (de type E et N) en passant de C à C'.

a) Notations. Soit C une courbe, I_C son idéal gradué. On considère une résolution :

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\varphi} \Omega \xrightarrow{p} I_C \to 0$$

où Λ et Ω sont des R-modules gradués de type fini, localement libres en dehors de $\mathbf{m}$ et où on suppose de plus :

$$(*) \qquad \mathrm{Prof}\,\Omega \geq 2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ext}^1_R(\Omega, R) = 0$$

(ou, ce qui revient au même par dualité, $H^2_*\tilde{\Omega} = 0$).

On notera que les résolutions usuelles vues en II vérifient ces conditions.

On considère de plus une surface Q contenant C, de degré s, dont l'équation sera notée encore Q.

b) Modification de la résolution. Deux cas sont possibles :

1) Ω s'écrit sous la forme : $\Omega = \Omega' \oplus R(-s)$ avec Ω' localement libre en dehors de $\mathbf{m}$, de telle sorte que l'image du générateur de $R(-s)$ dans I_C soit Q.

Remarque 4.1. Dans le cas d'une résolution minimale de type E, on a $\Omega = F = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-n_i)$ et les images f_i des générateurs de F sont des générateurs minimaux de I_C. On a donc $Q = \sum_{i=1}^{r} b_i f_i$ et on vérifie que la condition ci-dessus signifie que l'un des b_i est dans k^*.

2) Lorsque Ω ne s'écrit pas sous cette forme, on modifie la résolution donnée; on a la suite exacte :

$$0 \to \Lambda \oplus R(-s) \xrightarrow{\varphi_0} \Omega \oplus R(-s) \xrightarrow{p_0} I_C \to 0$$

avec $p_0(x,b) = p(x) + bQ$ et $\varphi_0(y,b) = (\varphi(y) - bz, b)$ où z est un élément de Ω tel que $p(z) = Q$. Bien entendu, même si la résolution donnée était minimale, celle-ci ne l'est plus.

c) Résolution de $I_{C/Q}$. Quitte à faire la modification ci-dessus, on peut supposer Ω de la forme $\Omega' \oplus R(-s)$. Soit $I_{C/Q}$ l'image de I_C dans l'anneau $R_Q = R/(Q)$. On a alors :

Proposition 4.2. *On a une résolution de $I_{C/Q}$:*

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\varphi'} \Omega' \xrightarrow{p'} I_{C/Q} \to 0$$

avec $\varphi' = q \circ \varphi$ et $p' = \pi \circ p|_{\Omega'}$ où q désigne la projection canonique de Ω sur Ω' et π celle de I_C sur $I_{C/Q}$.

On note que par tensorisation par $R(-h)$ on a aussitôt une résolution de $I_{C/Q}(-h)$, les flèches étant encore notées p' et φ'.

d) Résolution de $I_{C'}$. Soit $u : I_{C/Q}(-h) \to R_Q$ un homomorphisme injectif et C' la courbe biliée à C par u (cf. 2.3). On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda(-h) & \xrightarrow{\varphi'} & \Omega'(-h) & \xrightarrow{p'} & I_{C/Q}(-h) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \\
0 & \longrightarrow & I_Q & \longrightarrow & I_{C'} & \longrightarrow & I_{C'/Q} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

En effet, comme la multiplication par Q est un isomorphisme de $R(-s)$ sur I_Q, l'existence du relèvement p_1 résulte de l'égalité $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega', R) = 0$. De plus, comme on a $p'\varphi' = 0$, $p_1\varphi'$ se factorise par I_Q. En composant cette flèche avec la division par Q on obtient donc une flèche $p_1\varphi'/Q : \Lambda(-h) \to R(-s)$. On obtient alors aisément la proposition suivante qui donne une résolution de $I_{C'}$:

Proposition 4.3. *On a la suite exacte :*

$$0 \to \Lambda(-h) \xrightarrow{\varphi''} \Omega'(-h) \oplus R(-s) \xrightarrow{p''} I_{C'} \to 0,$$

avec $p'' = (p_1, Q)$ et $\varphi'' = (\varphi', -p_1\varphi'/Q)$.

Exemple 4.4. Reprenons la courbe de degré 10 et genre 11 de l'exemple 3.g. On a la résolution de type E de $I_{C'}$:

$$0 \to R(-6) \to R(-6) \oplus R(-5)^4 \to R(-4)^5 \to I_{C'} \to 0$$

et celle de type N :

$$P = R(-4)^2 \oplus R(-6),$$

$$0 \to N \to R(-4) \oplus R(-3)^4 \to R(-2) \to R/\mathbf{m}(-2) \to 0.$$

4.5. Questions de minimalité. Même si la résolution de I_C est minimale, celle de $I_{C'}$ fournie par 4.3 ne l'est pas nécessairement (cf. 4.6). Précisément, elle l'est si et seulement si Q est un générateur minimal de $I_{C'}$. Il en est ainsi, par exemple, si la biliaison élémentaire est triviale. En effet, dans ce cas, u est la multiplication par un polynôme H de degré h, sans facteur commun avec Q. Alors, si $F_1, \ldots, F_r$ sont des générateurs de I_C, les images des HF_i forment un système de générateurs de $I_{C'/Q}$ et Q n'est pas dans l'idéal engendré par les HF_i (sinon H diviserait Q). Il en résulte que la résolution de $I_{C'}$ est minimale.

Exemple 4.6. Prenons pour C la droite d'équations (X, Y) et soient G, H deux quadriques dont l'intersection C' est lisse de degré 4. Posons $Q = XG + YH$. On lie d'abord C par Q et X à la conique $\Gamma = (X, H)$, puis Γ à C' par Q et H. Comme C' est une intersection complète de deux surfaces de degré 2, l'idéal $I_{C'}$ est engendré par ses éléments de degré 2 et précisément par G et H, donc Q n'en est pas un générateur minimal. La résolution donnée par 4.3 :

$$0 \to R(-3) \oplus R(-4) \to R(-2)^2 \oplus R(-3) \to I_{C'} \to 0$$

n'est donc pas minimale, on peut simplifier le terme $R(-3)$.

5. Courbes minimales.

Définition 5.1. *Une courbe C est dite* **minimale** *(sous-entendu dans sa classe de biliaison) si pour toute courbe C' de la classe de biliaison de C on a : $M_{C'} = M_C(-h)$ avec $h \geq 0$.*

Exemple 5.2. Si C vérifie $e + 3 < s_0$, C est minimale (cf. [LR]). De plus, si C' est dans la classe de C, C' s'obtient à partir de C par une suite finie de biliaisons élémentaires triviales (donc ascendantes) suivie d'une déformation à cohomologie et module de Rao constants ([LR] prop. 1.4). Dans ce cas, il résulte par exemple des calculs de 3) que C est aussi de degré et genre minimaux dans sa classe.

Remarques 5.3. a) Nous montrerons en IV l'analogue de la proposition de [LR] dans le cas général ce qui permettra d'affirmer qu'une courbe minimale l'est à la fois aux trois sens du module de Rao, du degré et du genre. En effet, dans une biliaison élémentaire ascendante, les invariants r_o (cf. I), d, g augmentent tous.

b) En revanche ce phénomène ne se produit pas nécessairement dans une double liaison quelconque :

Exemple 5.4. Soit Γ la réunion disjointe de deux droites, liée d'une part à C par deux surfaces de degré s, d'autre part à C' par deux surfaces de degrés 2 et $2s-1$. On a, si $d, \ldots$ (resp. $d', \ldots$) sont les invariants de C (resp. C') : $d = s^2 - 2$, $r_o = 2s - 4$, $g = (s-2)(s^2-4) - 1$; $d' = 4s - 4$, $r'_o = 2s - 3$,

$g' = (2s-3)^2 - 1$. On a $r_o < r'_o$ pour tout $s \geq 2$, mais $g > g'$ pour $s \geq 5$ et $d > d'$ pour $s \geq 4$. (On passe bien de C à C' par des biliaisons élémentaires en vertu de 2.9, mais certaines sont ascendantes et d'autres descendantes).

IV CONSTRUCTION DES COURBES MINIMALES

Soit C une courbe. Nous avons vu au II que le faisceau $\mathcal{J}_C$ possède deux résolutions remarquables :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \mathcal{F} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont dissociés, et où $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{N}_0$ sont construits à partir du module de Rao M_C comme on l'a expliqué.

Nous allons suivre ici la démarche inverse : construire la courbe à partir de $\mathcal{N}_0$ (c'est-à-dire de M_C). Pour cela il nous faut construire deux $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules dissociés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}'$, et une injection $\mathcal{P} \to \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}'$ dont le conoyau soit un idéal, à décalage des degrés près. Le cas le plus simple est celui où $\mathcal{L}' = 0$. Nous allons étudier les modules $\mathcal{P}$ qui conviennent, et montrer qu'il en existe un "meilleur", en un sens que nous préciserons. Cela nous permettra de construire des courbes minimales.

On rappelle que les $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules considérés sont toujours cohérents.

1. Sous-modules maximaux d'un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module.

Définition 1.1. *Soient $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ deux $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules. On dit que $\mathcal{B}$ est* **maximal** *si pour tout $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module $\mathcal{B}'$ de même rang que $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$, on a $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.*

Proposition 1.2. *Soient $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ deux $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules. Considérons les propriétés suivantes :*
i) $\mathcal{B}$ est maximal.
ii) $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est sans torsion.
ii') $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est sans torsion en codimension 1.
iii) $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est localement libre en codimension 1.
iii') $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est de rang constant en codimension 1.
iv) $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est localement facteur direct de $\mathcal{A}$ en codimension 1.
Alors on a : $i \Leftrightarrow ii \Rightarrow ii' \Leftrightarrow iii \Leftrightarrow iii' \Rightarrow iv$.
De plus, si $\mathcal{A}$ est sans torsion et $\mathcal{B}$ localement libre, elles sont toutes équivalentes.

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}/\mathcal{B})^\circ$ le quotient de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ obtenu en tuant la torsion, et $\mathcal{B}_\circ$ le noyau de la projection $\mathcal{A} \to (\mathcal{A}/\mathcal{B})^\circ$. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{B} & \to & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}/\mathcal{B} & \to & 0 & (1) \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & & \\ 0 & \to & \mathcal{B}_\circ & \to & \mathcal{A} & \to & (\mathcal{A}/\mathcal{B})^\circ & \to & 0 & (2) \end{array}$$

Alors $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est sans torsion $\Leftrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_\circ$.

$i \Rightarrow ii$ puisque $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_\circ$ ont même rang.

$ii \Rightarrow i$. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}' \subset \mathcal{A}$ avec $\mathcal{B}'$ de même rang que $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$, $\mathcal{B}'/\mathcal{B}$ est non nul, de torsion, contenu dans $\mathcal{A}/\mathcal{B}$.

$ii' \Rightarrow iii$. Le localisé de $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ aux points de codimension 1 est un module sans torsion sur un anneau de valuation discrète, donc il est libre.

$iii \Rightarrow iv$. En effet, sur tout ouvert affine où $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est libre, la suite (1) est scindée.

Supposons maintenant $\mathcal{A}$ sans torsion et $\mathcal{B}$ localement libre.

$iv \Rightarrow iii$. Sur un ouvert où la suite (1) est scindée, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est sans torsion, donc localement libre en codimension 1.

$iii \Rightarrow ii$. Soit U le plus grand ouvert de $\mathbf{P}^3$ sur lequel $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est localement libre, et $j : U \to \mathbf{P}^3$ l'immersion canonique. Sur U, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ n'a pas de torsion, donc $\mathcal{B}|_U = \mathcal{B}_\circ|_U$. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \mathcal{B}_\circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ j_*(\mathcal{B}|_U) & \simeq & j_*(\mathcal{B}_\circ|_U) \end{array}$$

dont toutes les flèches sont injectives car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_\circ$ sont sans torsion. Puisque $\mathcal{B}$ est localement libre, et le complémentaire de U de codimension > 1, la flèche $\mathcal{B} \to j_*(\mathcal{B}|_U)$ est un isomorphisme. D'où $\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}_\circ$.

Nous nous intéresserons dorénavant au cas où $\mathcal{A}$ est sans torsion et $\mathcal{B}$ dissocié de rang r.

Remarques 1.3.

a) Pour $r =$ rang $\mathcal{A}$, un homomorphisme $\bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a_i) \to \mathcal{A}$

— soit n'est pas injectif

— soit est un isomorphisme

— soit a un conoyau de torsion dont le support contient une surface.

b) Pour $r = 1$, un homomorphisme injectif $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \to \mathcal{A}$ correspond à une section non nulle s de $\mathcal{A}(a)$ donc aussi de $\mathcal{A}^{\vee\vee}(a)$. C'est un sous-module non maximal si et seulement si on peut écrire $s = fs'$, avec $f \in R$, $\deg f \geq 1$, $s' \in H^0\mathcal{A}^{\vee\vee}(a - \deg f)$.

c) Si $\mathcal{A}$ est un fibré de rang $r+1$, et $\mathcal{B}$ un sous-fibré maximal dissocié de rang r de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ est sans torsion de rang 1, donc est un idéal tensorisé par $\det \mathcal{A} \otimes \det \mathcal{B}^{-1}$ (cf. II 1.5). Si cet idéal est égal à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$, la suite exacte (1) est scindée et $\mathcal{A}$ est dissocié. Sinon, d'après II 1.1 cet idéal est celui d'une courbe, ce qui explique notre intérêt pour les sous-fibrés maximaux dissociés d'un fibré.

d) Si $\mathcal{B}$ est un sous-fibré maximal dissocié de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}'$ un facteur direct de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ est aussi un sous-fibré maximal dissocié de $\mathcal{A}$.

Expliquons le point b) : si l'image de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \to \mathcal{A}$ n'est pas un sous-module maximal, elle est contenue dans un sous-module de rang 1 sans torsion, de la forme $\mathcal{J}_Z(-b)$, où Z est un fermé de $\mathbf{P}^3$ de codimension > 1 (cf. 0 2.4). On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) & \to & \mathcal{J}_Z(-b) & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-b) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{A} & = & \mathcal{A} & \to & \mathcal{A}^{\vee\vee} \end{array}$$

dont toutes les flèches sont injectives, et $b < a$ sinon la première ligne est une suite d'isomorphismes. D'où le résultat dans $\mathcal{A}^{\vee\vee}$.

Inversement, si $s = fs'$ dans $\mathcal{A}^{\vee\vee}$, $\mathcal{A}^{\vee\vee}/(s)$ a de la torsion en codimension 1, donc aussi $\mathcal{A}/(s)$ puisque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^{\vee\vee}$ sont égaux en codimension 1.

2. Deux fonctions de Z dans N associées à un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module.

Soient N un R-module gradué de type fini, $\mathcal{N}$ le faisceau associé, $a \in \mathbf{Z}$. On désigne par $N_{\leq a}$ le sous-module de N engendré par les éléments de degré $\leq a$, et par $\mathcal{N}_{\leq a}$ le sous-$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module de $\mathcal{N}$, image de l'homomorphisme :

$$\bigoplus_{n \leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{h^0\mathcal{N}(n)} \to \mathcal{N}$$

défini par les sections globales de $\mathcal{N}(n)$, pour $n \leq a$.

Lemme 2.1. *Le faisceau $\widetilde{N_{\leq a}}$ associé à $N_{\leq a}$ est contenu dans $\mathcal{N}_{\leq a}$. Lorsque $N = H^0_*\mathcal{N}$, on a $\widetilde{N_{\leq a}} = \mathcal{N}_{\leq a}$ et la flèche naturelle $N_{\leq a} \to H^0_*(\mathcal{N}_{\leq a})$ est une inclusion. C'est un isomorphisme si et seulement si $H^0_*(\mathcal{N}_{\leq a})$ est engendré par ses éléments de degré $\leq a$.*

Démonstration. On remarque que $N_{\leq a}$ est l'image de l'homomorphisme :

$$\bigoplus_{n \leq a} R(-n)^{\dim N_n} \to N$$

défini par des générateurs de N_n, pour $n \leq a$. Il est donc clair que $\widetilde{N_{\leq a}} = \mathcal{N}_{\leq a}$ si $N = H^0_*\mathcal{N}$. On a alors des inclusions :

$$N_{\leq a} \subset H^0_*(\widetilde{N_{\leq a}}) = H^0_*(\mathcal{N}_{\leq a}) \subset H^0_*\mathcal{N} = N.$$

Définition 2.2. Première fonction associée à $\mathcal{N}$. *Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module, et $N = H^0_*\mathcal{N}$. Une présentation graduée minimale de N est de la forme :*

$$\sigma : \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{l_{\mathcal{N}}(n)} \to N$$

où $l_{\mathcal{N}}$ est une fonction de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$ presque partout nulle définie de manière unique.

On note plus simplement l au lieu de $l_{\mathcal{N}}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Lemme 2.3. *a) σ est un isomorphisme si et seulement si $\mathcal{N}$ est dissocié.*
b) La restriction $\sigma_a : \bigoplus_{n \leq a} R(-n)^{l_{\mathcal{N}}(n)} \to N$ de σ a pour image $N_{\leq a}$ et la surjection induite $\sigma'_a : \bigoplus_{n \leq a} R(-n)^{l_{\mathcal{N}}(n)} \to N_{\leq a}$ est une présentation minimale.
c) La restriction $\widetilde{\sigma}_a : \bigoplus_{n \leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_{\mathcal{N}}(n)} \to \mathcal{N}$ de $\widetilde{\sigma}$ a pour image $\mathcal{N}_{\leq a}$ et est injective si et seulement si $\mathcal{N}_{\leq a}$ est dissocié. On a alors $N_{\leq a} = H^0_*(\mathcal{N}_{\leq a})$.

Démonstration. b) On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{n \leq a} R(-n)^{l(n)} \otimes_R k & \xrightarrow{\overline{\sigma'_a}} & \overline{N_{\leq a}} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)} \otimes_R k & \xrightarrow{\overline{\sigma}} & \overline{N}
\end{array}$$

où la première flèche verticale est injective, et $\overline{\sigma}$ est un isomorphisme, donc il en est de même de $\overline{\sigma'_a}$.

c) D'après 2.1, $\mathcal{N}_{\leq a}$ est le faisceau associé à $N_{\leq a}$, donc $\widetilde{\sigma}_a$ a pour image $\mathcal{N}_{\leq a}$. Si ce dernier est dissocié, de la forme $\bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_i)$, on obtient une surjection

$\widetilde{\sigma}_a : \bigoplus_{n \leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_{\mathcal{N}}(n)} \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_i)$, donc pour tout $i \in [1, r]$, on a $n_i \leq a$. Alors $H^0_*(\mathcal{N}_{\leq a}) = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-n_i)$ est engendré par ses éléments de degré $\leq a$, et toujours d'après 2.1, $N_{\leq a} = H^0_*\mathcal{N}_{\leq a}$ est un R-module libre, et σ'_a qui en est une présentation minimale est un isomorphisme.

Jusqu'à la fin du paragraphe, les notations restent les mêmes qu'en 2.2, mais on fera l'hypothèse supplémentaire : **$\mathcal{N}$ est sans torsion**. Il est alors localement libre sur un ouvert de $\mathbf{P}^3$ qui contient les points génériques de tous les diviseurs intègres D de $\mathbf{P}^3$, donc on peut parler du rang de $\widetilde{\sigma}_a$ (resp. de $\widetilde{\sigma}_a|_D$) qui est le rang au point générique de $\mathbf{P}^3$ (resp. de D).

Définition 2.4. *On pose, pour tout $a \in \mathbf{Z}$:*

$$\alpha_a = \operatorname{rang} \widetilde{\sigma_a} = \operatorname{rang} \sigma_a$$
$$\beta_a = \inf{}_D \operatorname{rang} \widetilde{\sigma_a}|_D$$

où D parcourt l'ensemble des diviseurs intègres de $\mathbf{P}^3$.
On a évidemment, en supprimant l'indice de la fonction $l_{\mathcal{N}}$, $0 \le \beta_a \le \alpha_a \le l^\sharp(a) = \sum_{n \le a} l(n)$. On pose aussi :

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 + \sup\{a \in \mathbf{Z} \mid \alpha_a = \beta_a = l^\sharp(a)\} \text{ s'il existe} \\ &= +\infty \text{ sinon.} \\ a_1 &= \inf\{a \in \mathbf{Z} \mid \alpha_a = \beta_a = \operatorname{rang} \mathcal{N}\} \end{aligned}$$

Proposition 2.5. *Lorsqu'il est fini, a_0 est aussi le plus grand entier a tel que l'une des propriétés équivalentes suivantes soit réalisée :*
i) $\mathcal{N}_{\le a}$ est un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$;
ii) $\widetilde{\sigma_a}$ est injectif et a un conoyau de rang constant sur un ouvert qui contient les points génériques de tous les diviseurs ;
iii) $\widetilde{\sigma_a}$ est injectif et a un conoyau sans torsion ;
iv) σ_a est injectif et a un conoyau sans torsion.
En particulier, le rang de $\mathcal{N}_{\le a_0}$ est strictement supérieur à celui de $\mathcal{N}_{\le a_0 - 1}$, donc on a $l(a_0) \neq 0$ et $\alpha_{a_0} > \alpha_{a_0 - 1}$.

Démonstration. D'après 1.2, *ii* est équivalent à $\alpha_a = \beta_a = l^\sharp(a)$.

i $\Leftrightarrow$ *iii* par 2.3.

iii $\Rightarrow$ *iv*. Supposons qu'on ait une suite exacte de faisceaux :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \le a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)} \xrightarrow{\widetilde{\sigma_a}} \mathcal{N} \longrightarrow \operatorname{Coker} \widetilde{\sigma_a} \longrightarrow 0.$$

En prenant la cohomologie, on en déduit une suite exacte de R-modules :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \le a} R(-n)^{l(n)} \xrightarrow{\sigma_a} N \longrightarrow H^0_*(\operatorname{Coker} \widetilde{\sigma_a}) \longrightarrow 0.$$

Donc $H^0_*(\operatorname{Coker} \widetilde{\sigma_a}) = \operatorname{Coker} \sigma_a$ n'a pas de torsion supportée par $\mathbf{m}$, et est sans torsion si et seulement si le faisceau associé $\operatorname{Coker} \widetilde{\sigma_a}$ l'est.

Les autres implications sont immédiates.

Définition 2.6. Deuxième fonction associée à $\mathcal{N}$. *On définit la fonction $q_{\mathcal{N}}$, ou plus simplement q lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, par :*

$$q(n) = l(n) \text{ si } n < a_0 \,;$$
$$q^\sharp(n) = \sum_{m \le n} q(m) = \inf(\alpha_n - 1, \beta_n) \text{ sinon.}$$

Proposition 2.7. Propriétés de la fonction q.
Avec les notations précédentes :
a) si $\mathcal{N}$ est dissocié, on a $l = q$ et $\sum_{n\in\mathbf{Z}} q(n) = \operatorname{rang} \mathcal{N}$;
b) si $\mathcal{N}$ n'est pas dissocié, on a :
$q^\sharp(a_1) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q(n) = \operatorname{rang} \mathcal{N} - 1$;
pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $0 \le q(n) \le l(n)$;
a_0 est fini, $a_0 \le a_1$, $q(a_0) < l(a_0)$, et $q(n) = 0$ pour tout $n > a_1$.

Démonstration. b) Soit $n_0 = \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid l(n) \neq 0\}$. On a $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\le n_0}$, $\sigma_{n_0} = \sigma$, $\alpha_{n_0} = \beta_{n_0} = \operatorname{rang} \sigma = \operatorname{rang} \mathcal{N}$.

Si $n_0 < a_0$, on a $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\le n_0} = \mathcal{N}_{\le a_0 - 1}$ qui est dissocié, ce qui contredit l'hypothèse. Ceci prouve déjà que a_0 est fini et qu'on a $q^\sharp(n_0) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q(n) = \alpha_{n_0} - 1$.

L'encadrement $0 \le q(n) \le l(n)$, vrai pour $n < a_0$, se montre par récurrence sur n. Supposons qu'il soit vérifié pour un $n \ge a_0 - 1$.

On a une surjection $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n-1)^{l(n+1)} \to \mathcal{N}_{\le n+1}/\mathcal{N}_{\le n}$ et une suite exacte

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n-1)^{l(n+1)} \to \mathcal{N}/\mathcal{N}_{\le n} \to \mathcal{N}/\mathcal{N}_{\le n+1} \to 0$$

qui reste exacte sur tous les diviseurs. On en déduit les inégalités :

$$0 \le \operatorname{rang} \mathcal{N}_{\le n+1}/\mathcal{N}_{\le n} = \alpha_{n+1} - \alpha_n \le l(n+1),$$

$$0 \le \operatorname{rang} (\mathcal{N}/\mathcal{N}_{\le n})|_D - \operatorname{rang} (\mathcal{N}/\mathcal{N}_{\le n+1})|_D \le l(n+1),$$

si D est un diviseur de $\mathbf{P}^3$, d'où

$$0 \le \beta_{n+1} - \beta_n \le l(n+1),$$

et d'après 2.5, on a également

$$1 \le \alpha_{a_0+1} - \alpha_{a_0} \le l(a_0+1).$$

On sait que $q(n+1) = q^\sharp(n+1) - q^\sharp(n)$. Il nous faut séparer les différents cas.

Premier cas : $n = a_0 - 1$. Alors $q(a_0) = \inf(\alpha_{a_0} - 1, \beta_{a_0}) - \alpha_{a_0-1} = \inf(\alpha_{a_0} - \alpha_{a_0-1} - 1, \beta_{a_0} - \beta_{a_0-1})$ et $q(a_0) \in [0, l(a_0)[$.

Deuxième cas : $n \ge a_0$. On a $q(n+1) = \inf(\alpha_{n+1}-1, \beta_{n+1}) - \inf(\alpha_n - 1, \beta_n)$.

Si $\alpha_n = \beta_n$ et $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, alors $q(n+1) = \alpha_{n+1} - \alpha_n \in [0, l(n+1)]$.

Si $\alpha_n = \beta_n$ et $\alpha_{n+1} > \beta_{n+1}$, alors $q(n+1) = \beta_{n+1} - \alpha_n + 1 = \beta_{n+1} - \beta_n + 1 < \alpha_{n+1} - \alpha_n + 1$. Donc $q(n+1) \in [1, l(n+1)]$.

Si $\alpha_n > \beta_n$ et $\alpha_{n+1} = \beta_{n+1}$, alors $q(n+1) = \alpha_{n+1} - \beta_n - 1 = \beta_{n+1} - \beta_n - 1 \ge \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Donc $q(n+1) \in [0, l(n+1) - 1]$.

Si $\alpha_n > \beta_n$ et $\alpha_{n+1} > \beta_{n+1}$, alors $q(n+1) = \beta_{n+1} - \beta_n \in [0, l(n+1)]$.

Si a_1 est inférieur à a_0, on a les égalités :

$$q^\sharp(a_1) = l^\sharp(a_1) = \alpha_{a_1} = \beta_{a_1} = \text{rang}\, \mathcal{N}$$

ce qui contredit le fait que q est une fonction positive et que $\sum_{n\in\mathbf{Z}} q(n) = \text{rang}\, \mathcal{N} - 1$. Donc on a $a_0 \leq a_1$, et $q^\sharp(a_1) = \inf(\alpha_{a_1} - 1, \beta_{a_1}) = \text{rang}\, \mathcal{N} - 1 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} q(n)$, et $q(n)$ est nul pour $n > a_1$.

Remarques 2.8.
a) S'il est fini, a_0 est le plus petit entier n tel que $l(n) \neq q(n)$.
b) Pour $n < a_0$, on a $q^\sharp(n) = \alpha_n = \beta_n$.

Proposition 2.9. *Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module sans torsion et $\mathcal{L}$ un fibré dissocié, $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \oplus \mathcal{L}$. On a : $q_{\mathcal{N}'} = q_{\mathcal{N}} + l_{\mathcal{L}}$.*

Démonstration. Il suffit de la faire pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)$, $a \in \mathbf{Z}$.

Posons $q = q_{\mathcal{N}}$, $q' = q_{\mathcal{N}'}$, $N = H^0_*\mathcal{N}$, $N' = H^0_*\mathcal{N}' = N \oplus R(-a)$; on a des présentations graduées minimales

$$\sigma : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)} \to N \qquad \sigma' : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l'(n)} \to N'$$

avec $l'(n) = l(n)$ pour $n \neq a$, $l'(a) = 1 + l(a)$ et $\sigma' = \sigma \oplus id_{R(-a)}$. Il nous faut montrer que $q(n) - q'(n) = l(n) - l'(n)$.

Pour $b \in \mathbf{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \alpha'_b - \alpha_b = \beta'_b - \beta_b = l'^\sharp(b) - l^\sharp(b) &= 0 \text{ si } b < a \\ &= 1 \text{ si } b \geq a. \end{aligned}$$

On en déduit $a_0 = a'_0$ et

$$q(n) = l(n), \quad q'(n) = l'(n) \text{ si } n < a_0;$$
$$q'^\sharp(n) = 1 + q^\sharp(n) \text{ si } n \geq a_0, n \geq a;$$
$$q'^\sharp(n) = q^\sharp(n) \text{ si } a_0 \leq n < a.$$

Donc on a, pour tout n, $q'^\sharp(n) - q^\sharp(n) = l'^\sharp(n) - l^\sharp(n)$, d'où le résultat en différentiant.

3. Existence d'un meilleur sous-fibré maximal d'un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module sans torsion.

Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module sans torsion, $N = H^0_*\mathcal{N}$, $\sigma : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)} \to N$ une présentation graduée minimale de N. L'intérêt de la fonction $q : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ construite en 2 va apparaître dans les théorèmes de cet alinéa.

Théorème 3.1.
*Soient $r : \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ une fonction à support fini et $\widetilde{u} : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)} \to \mathcal{N}$ une injection dont l'image est un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$.
Avec les notations précédentes, on a, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $r^\sharp(n) \leq q^\sharp(n)$.
De plus, pour tout $a \in \mathbf{Z}$ tel que l'image de $\widetilde{u}$ soit contenue dans $\mathcal{N}_{\leq a}$, on a, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $r^\sharp(n) \leq q^\sharp(a)$.*

Démonstration. Soit $u : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{r(n)} \to N$ correspondant à $\widetilde{u}$. Il se relève en $v : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{r(n)} \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)}$ tel que $u = \sigma v$. On a alors pour tout $b \in \mathbf{Z}$ un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus\limits_{n\leq b} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)} & \xrightarrow{\widetilde{u}_b} & \mathcal{N} \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{v}_b} & & \| \\ \bigoplus\limits_{n\leq b} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)} & \xrightarrow{\widetilde{\sigma}_b} & \mathcal{N} \end{array}$$

où $\widetilde{v}$ est associé à v, d'où $\alpha_b = \text{rang}\ \widetilde{\sigma}_b \geq \text{rang}\ \widetilde{u}_b = \sum_{n\leq b} r(n) = r^\sharp(b)$.

La restriction de $\widetilde{u}_b$ à tout diviseur de $\mathbf{P}^3$ est encore injective, donc on a aussi $\beta_b \geq r^\sharp(b)$. Si de plus l'image de $\widetilde{u}$ est contenue dans $\mathcal{N}_{\leq a}$, on a $\inf(\alpha_a, \beta_a) \geq r^\sharp(b)$. Distinguons deux cas :

1) $b < a_0$. Alors on a $r^\sharp(b) \leq \alpha_b = q^\sharp(b)$.
Si $b \leq a$, on a évidemment $q^\sharp(b) \leq q^\sharp(a)$, donc $r^\sharp(b) \leq q^\sharp(a)$.
Si $b > a$, on a alors $q^\sharp(a) = \alpha_a = \beta_a$, donc $r^\sharp(b) \leq q^\sharp(a)$.

2) $b \geq a_0$. On a :

$$\begin{aligned} q^\sharp(b) &= \inf(\alpha_b - 1, \beta_b) \\ q^\sharp(a) &= \inf(\alpha_a - 1, \beta_a) \text{ si } a \geq a_0 \\ &= \alpha_a = \beta_a \text{ si } a < a_0 \end{aligned}$$

On a donc $r^\sharp(b) \leq \inf(q^\sharp(a), q^\sharp(b))$ sauf si on est dans un des cas suivants: $\alpha_b = \beta_b = r^\sharp(b)$ ou $\alpha_a = \beta_a = r^\sharp(b)$ et $a \geq a_0$. Dans le premier cas l'image de $\widetilde{u}_b$ est un sous-fibré maximal de $\mathcal{N}$, contenu dans $\mathcal{N}_{\leq b}$ qui a le même rang, donc il lui est égal, ce qui contredit le fait que, puisque $b \geq a_0$, $\mathcal{N}_{\leq b}$ ne peut être un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$. Le deuxième cas se traite de la même manière.

Corollaire 3.2. *Soit $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module réflexif, l et q les fonctions associées. Alors on a*

$$\inf\{n \in \mathbf{Z} \mid l(n) \neq 0\} = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid q(n) \neq 0\}.$$

Démonstration. Soit $n_0 = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid l(n) \neq 0\} = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{N}(n) \neq 0\}$. Pour $n \leq n_0$, $q(n)$ est nul. Une section non nulle de $H^0\mathcal{N}(n_0)$ correspond à une injection $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_0) \to \mathcal{N}$ dont l'image est un sous-fibré maximal (cf. 1.3.b). D'après le théorème, on a $r^\sharp(n_0) = 1 \leq q^\sharp(n_0) = q(n_0)$. D'où le résultat.

Proposition 3.3. *Sous les hypothèses de 3.1, si $\mathcal{N}$ n'est pas dissocié et si $\sum_{n\in\mathbf{Z}} r(n) = \operatorname{rang}\mathcal{N} - 1$, on a aussi $\sum_{n\in\mathbf{Z}} nq(n) \leq \sum_{n\in\mathbf{Z}} nr(n)$ avec égalité si et seulement si $q = r$.*

Démonstration. On a, pour $m \gg 0$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} nq(n) = (m+1)\sum_{n\in\mathbf{Z}} q(n) - q^{\sharp\sharp}(m)$$

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} nr(n) = (m+1)\sum_{n\in\mathbf{Z}} r(n) - r^{\sharp\sharp}(m)$$

et

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} q(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} r(n) = \operatorname{rang}\mathcal{N} - 1.$$

Il faut donc montrer $r^{\sharp\sharp}(m) \leq q^{\sharp\sharp}(m)$ pour $m \gg 0$ avec égalité si et seulement si $q = r$. Or la primitive (nulle pour $m \ll 0$) de la fonction positive $q^{\sharp} - r^{\sharp}$ est une fonction positive et croissante, donc si elle est nulle pour $m \gg 0$, elle est nulle partout. En différentiant, on obtient $q = r$.

Théorème 3.4.
Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module sans torsion, $N = H^0_*\mathcal{N}$, $\widetilde{\sigma} : \mathcal{L} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)} \to \mathcal{N}$ l'homomorphisme correspondant à une présentation graduée minimale de N. Il existe un facteur direct de $\mathcal{L}$, de la forme $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$, que $\widetilde{\sigma}$ identifie à un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$.

Démonstration. Nous allons montrer par récurrence sur a le résultat plus général suivant, qui implique le théorème :

$\forall a \in \mathbf{Z}$, il existe un facteur direct de $\mathcal{L}$, de la forme $\bigoplus_{n\leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$, que $\widetilde{\sigma}$ identifie à un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$.

Pour $a < a_0$, c'est trivial.

Soit $a \geq a_0$ et supposons le résultat prouvé pour $a - 1$.

Si $q(a) = 0$, on a $\bigoplus_{n\leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} = \bigoplus_{n\leq a-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$, donc le résultat est vrai pour l'entier a.

Si $q(a) \neq 0$, soit m_0 le plus grand entier m tel qu'il existe un facteur direct de $\mathcal{L}$, de la forme $\bigoplus_{n\leq a-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)^m$, que $\widetilde{\sigma}$ identifie à un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$. D'après 3.1, on a $\sum_{n\leq a-1} q(n) + m_0 \leq \sum_{n\leq a} q(n)$, ou encore $m_0 \leq q(a)$, et on veut montrer que $m_0 = q(a)$. Ce sera une conséquence immédiate du lemme suivant:

Lemme 3.5. *Si $m_0 < q(a)$, on est dans un des cas suivants :*
— $\alpha_a \leq \sum_{n \leq a-1} q(n) + m_0 + 1$;
— $\beta_a \leq \sum_{n \leq a-1} q(n) + m_0$.

Démonstration. Notons $\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{n \leq a-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)^{m_0} = \mathcal{L}_1' \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)^{m_0}$, $j : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}$ l'homomorphisme qui fait de $\mathcal{L}_1$ un facteur direct de $\mathcal{L}$, et tel que $\widetilde{u} = \widetilde{\sigma} j$ identifie $\mathcal{L}_1$ à un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$, et $j' : \mathcal{L}_1' \to \mathcal{L}$ la restriction de j. On a donc une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\widetilde{u}} \mathcal{N} \xrightarrow{p} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{M}$ est le conoyau de $\widetilde{u}$, donc est sans torsion, et p est la projection canonique. On en déduit une suite exacte de cohomologie :

$$0 \to H^0\mathcal{L}_1(a) \to H^0\mathcal{N}(a) \to H^0\mathcal{M}(a) \to 0$$

Soit s' une section non nulle de $\mathcal{M}(a)$ (il en existe car $m_0 < l(a)$ donc une base des générateurs minimaux de N de degré a ayant $l(a)$ éléments ne peut pas provenir de $H^0\mathcal{L}_1(a)$). Elle se relève en une section s de $\mathcal{N}(a)$, et en une section (notée encore s) de $\mathcal{L}(a)$, de sorte qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) & \xrightarrow{\widetilde{u}+s} & \mathcal{N} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle j+s} & & \| \\ \mathcal{L} & \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} & \mathcal{N} \end{array}$$

L'homomorphisme $\widetilde{u} + s$ est injectif car $\mathcal{M}$ est sans torsion.

Si l'image de $j + s$ est un facteur direct de $\mathcal{L}$ (c'est-à-dire si s est un générateur minimal de N), par définition de m_0, l'image de $\widetilde{u} + s$ n'est pas un sous-faisceau maximal de $\mathcal{N}$.

Si l'image de $j + s$ n'est pas un facteur direct de $\mathcal{L}$, quitte à modifier s par une section de $\mathcal{L}_1(a)$, on peut supposer que s est dans $N_{\leq a-1}$. Si l'image de $\widetilde{u} + s$ est un sous-faisceau maximal de $\mathcal{N}$, il en est de même par restriction de celle de $\widetilde{\sigma} j' + s : \mathcal{L}_1' \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \to \mathcal{N}$, qui d'après ce qui précède est contenue dans $\mathcal{N}_{\leq a-1}$. D'après la deuxième partie de 3.1, on a alors $r^\sharp(a) \leq q^\sharp(a-1)$, avec $r(n) = q(n)$ pour $n \leq a - 1$ et $r(a) = 1$ d'où une contradiction.

Donc on conclut dans tous les cas que Coker $(\widetilde{u} + s) = \mathcal{M}/(s')$ a de la torsion. Pour terminer, nous aurons besoin d'un autre résultat intermédiaire:

Lemme 3.6. *Soient $\mathcal{A}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module réflexif, $a \in \mathbf{Z}$, $(s_1, \ldots, s_N)$ N sections linéairement indépendantes de $\mathcal{A}(a)$. Si pour toute section s non nulle de l'espace vectoriel engendré par $(s_1, \ldots, s_N)$, $\mathcal{A}/(s)$ a de la torsion, on est*

dans un des cas suivants :
ou bien il existe un polynôme f de degré ≥ 1 tel que

$$\forall i \in [1,N] \quad s_i = f s'_i, \quad s'_i \in H^0\mathcal{A}(a - \deg f),$$

ou bien il existe $b < a$, $s' \in H^0\mathcal{A}(b)$ tels que

$$\forall i \in [1,N] \quad s_i = f_i s', \quad f_i \in R_{a-b}.$$

En d'autres termes, toutes les sections de l'espace vectoriel engendré par $(s_1, \ldots, s_N)$ ont un "diviseur commun", qui est soit un polynôme, soit une section.

Démonstration. Posons $\Lambda = k[\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$, $\mathbf{P}_\Lambda = \mathbf{P}^3 \times \operatorname{Spec} \Lambda$, et soit $\mathcal{A}_\Lambda$ l'image réciproque de $\mathcal{A}$ sur $\mathbf{P}_\Lambda$. La section générique $s = \sum_{i=1}^N \lambda_i s_i$ définit une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\Lambda}$-modules :

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\Lambda}(-a) \to \mathcal{A}_\Lambda \to \mathcal{A}_\Lambda/(s) \to 0$$

qui pour tout $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in k^N - (0, \ldots, 0)$ se spécialise en

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/(s_{\underline{\lambda}}) \to 0.$$

On sait que $\mathcal{A}/(s_{\underline{\lambda}})$ a de la torsion, ce qui signifie que son rang est supérieur ou égal au rang (générique) de $\mathcal{A}$ sur un diviseur de $\mathbf{P}^3$. Donc l'ensemble des points de $\mathbf{P}_\Lambda$ où le rang de $\mathcal{A}_\Lambda/(s)$ est supérieur ou égal au rang (générique) de $\mathcal{A}$ contient un diviseur.

Puisque $\mathcal{A}$ (donc aussi $\mathcal{A}_\Lambda$) est libre en codimension 1, il existe un diviseur de $\mathbf{P}_\Lambda$ sur lequel l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\Lambda}(-a) \to \mathcal{A}_\Lambda$ défini par s est nul, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme F de $\Lambda[X, Y, Z, T]$ homogène de degré ≥ 1 en X, Y, Z, T tel que :

$$\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_N s_N = F s' \quad s' \in H^0\mathcal{A}_\Lambda(b) \quad b < a,$$

en particulier le degré de F par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ est ≤ 1.

Si F est indépendant des λ_i, alors pour tout i, $s_i = F s'_i$.

Si $F = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_N f_N$, alors s' est indépendant des λ_i et pour tout i, $s_i = f_i s'$.

Fin de la démonstration du Lemme 3.5. Soit $\mathcal{M}^{\vee\vee}$ le bidual de $\mathcal{M}$, qui lui est isomorphe en codimension 1 puisque $\mathcal{M}$ est sans torsion. D'après 3.6 appliqué à $\mathcal{M}^{\vee\vee}$, toutes les sections de $\mathcal{M}(a)$ ont un "diviseur commun", qui est soit un polynôme, soit une section de $\mathcal{M}^{\vee\vee}(b)$ avec $b < a$.

— Si c'est un polynôme f de degré ≥ 1 qui définit un diviseur D de $\mathbf{P}^3$, pour toute section s' de $\mathcal{M}(a)$, la flèche composée $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \xrightarrow{s'} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\vee\vee}|_D$ est nulle, donc pour toute section s de $\mathcal{N}(a)$, la flèche composée

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \xrightarrow{s} \mathcal{N} \xrightarrow{p} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\vee\vee}|_D$$

l'est aussi.

Soit alors $a' \leq a$ et $s \in H^0\mathcal{N}(a')$. Choisissons une forme linéaire L qui ne divise pas f. Puisque $L^{a-a'}s \in H^0\mathcal{N}(a)$, la flèche composée

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \xrightarrow{\cdot L^{a-a'}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a') \xrightarrow{s} \mathcal{N} \xrightarrow{p} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\vee\vee}|_D$$

est nulle, donc la flèche composée : $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a') \xrightarrow{s} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}|_D$ est nulle sur un ouvert dense de D (sur lequel $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\mathcal{M}^{\vee\vee}$ et où la multiplication par L est un isomorphisme). On en déduit la nullité de

$$\bigoplus_{n \leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)} \xrightarrow{\widetilde{\sigma_a}} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}|_D$$

sur un ouvert dense de D. Sur cet ouvert l'image de $\widetilde{\sigma_a}|_D$ est contenue dans celle de $\widetilde{u}|_D$ et le rang de $\widetilde{\sigma_a}|_D$ est inférieur ou égal au rang de $\mathcal{L}_1$, ce qui entraîne $\beta_a \leq \sum_{n \leq a-1} q(n) + m_0$.

— Si c'est une section s'' de $\mathcal{M}^{\vee\vee}(b)$, pour toute section s' de $\mathcal{M}(a)$, la flèche composée:

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \xrightarrow{s'} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'')$$

est nulle donc pour toute section s de $\mathcal{N}(a)$, la flèche composée :

$$\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \xrightarrow{s} \mathcal{N} \xrightarrow{p} \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'')$$

l'est aussi. Si $\mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'') \neq 0$, on choisit une forme linéaire L qui ne soit pas diviseur de 0 dans $\mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'')$; on montre comme ci-dessus que pour $a' \leq a$ et $s \in H^0\mathcal{N}(a')$ la flèche composée : $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a') \xrightarrow{s} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'')$ est nulle et on en déduit la nullité de $\bigoplus_{n \leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)} \xrightarrow{\widetilde{\sigma}_a} \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'')$. Si $\mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'') = 0$ c'est bien sûr encore vrai, donc dans tous les cas le rang de $\widetilde{\sigma}_a$ est inférieur ou égal au rang du noyau de $\mathcal{N} \to \mathcal{M}^{\vee\vee}/(s'')$ ce qui entraîne $\alpha_a \leq \sum_{n \leq a-1} q(n) + m_0 + 1$.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les "meilleurs" sous-fibrés maximaux de $\mathcal{N}$ de corang 1.

Théorème 3.7. *Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module sans torsion de rang r non dissocié, $N = H^0_*\mathcal{N}$, $\widetilde{\sigma} : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)} \to \mathcal{N}$ l'homomorphisme correspondant à une présentation graduée minimale de $N = H^0_*\mathcal{N}$. L'ensemble des degrés des sous-fibrés maximaux et dissociés de $\mathcal{N}$ de rang $r-1$ a pour borne supérieure l'entier $d(\mathcal{N}) = -\sum_{n\in\mathbf{Z}} nq(n)$.*
De plus, tout sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$ de rang $r-1$ et de degré $d(\mathcal{N})$, est isomorphe à $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$ et s'obtient comme l'image par $\widetilde{\sigma}$ d'un facteur direct de $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)}$.

Démonstration. Grâce à 3.1, 3.3 et 3.4, il reste à prouver que, si $\widetilde{u} : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \to \mathcal{N}$ est injectif et a pour image un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$, il existe un homomorphisme scindé $\widetilde{v} : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)}$ tel que $\widetilde{u} = \widetilde{\sigma}\widetilde{v}$.

On peut relever $u : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{q(n)} \to N$ en $v : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{q(n)} \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)}$ tel que $u = \sigma v$. Si $\overline{u}$ est injectif, $\overline{v}$ l'est aussi, donc v est scindé.

Si $\overline{u}$ n'est pas injectif, il existe un entier n et un générateur de $R(-n)^{q(n)}$ dont l'image par u est dans $\mathbf{m}N$, donc dans $N_{\leq n-1}$. Par $\widetilde{u}$, on identifie $\bigoplus_{m\leq n-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-m)^{q(m)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)$ à un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$ contenu dans $\mathcal{N}_{\leq n-1}$. Le théorème 3.1 donne alors $q^\sharp(n-1)+1 \leq q^\sharp(n-1)$, d'où une contradiction.

Remarque 3.8. Si $\mathcal{L}$ est un fibré dissocié, on a immédiatement, grâce à 2.9 : $d(\mathcal{N}\oplus\mathcal{L}) = d(\mathcal{N}) + \deg\mathcal{L}$. De plus, si $\widetilde{u} : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \to \mathcal{N}$ correspond à un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$, $\widetilde{u}\oplus id_{\mathcal{L}} : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \oplus \mathcal{L} \to \mathcal{N}\oplus\mathcal{L}$ correspond à un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}\oplus\mathcal{L}$.

Cette propriété admet une réciproque, qui sera utile dans l'étude des courbes minimales.

Proposition 3.9. *Soient $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$-module sans torsion, non dissocié, $\mathcal{L}$ un fibré dissocié et $\widetilde{v} : \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \oplus \mathcal{L} \to \mathcal{N}\oplus\mathcal{L}$ un homomorphisme injectif dont l'image est un sous-fibré maximal de $\mathcal{N}\oplus\mathcal{L}$. Alors quitte à faire un automorphisme de $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \oplus \mathcal{L}$ et de $\mathcal{N}\oplus\mathcal{L}$, on peut supposer que le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \oplus \mathcal{L} & \xrightarrow{\widetilde{v}} & \mathcal{N}\oplus\mathcal{L} \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\
\mathcal{L} & = & \mathcal{L}
\end{array}$$

où p et p' sont les projections canoniques, commute.

Démonstration. Il suffit de la faire pour $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)$, $a \in \mathbf{Z}$, et dans ce cas de montrer que l'homomorphisme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)^{q(a)+1} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)$ induit par $\widetilde{v}$, n'est pas nul.

S'il est nul, la restriction de $\widetilde{v}$ à $\bigoplus_{n \leq a-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a)^{q(a)+1}$ a pour image un sous-fibré maximal et dissocié de $\mathcal{N}$ contenu dans $\mathcal{N}_{\leq a}$ et on conclut à une contradiction comme dans la démonstration de 3.7.

4. Application aux courbes. Existence de courbes minimales non ACM.

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{N}$ un fibré non dissocié. Les notations étant celles de 3.7, soit $\mathcal{E}$ le noyau de $\widetilde{\sigma}$. Il existe une courbe C, un entier h (égal à $\deg \mathcal{N} - d(\mathcal{N})$), et des suites exactes :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \mathcal{N} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)-q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0.$$

Si C' est une courbe dont l'idéal a une résolution de la forme :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)} \xrightarrow{\widetilde{\beta}'} \mathcal{N} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}'} \mathcal{J}_{C'}(h') \longrightarrow 0,$$

on a pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $r^\sharp(n) \leq q^\sharp(n)$, et $h \leq h'$. De plus $h = h'$ entraîne $q = r$ et on passe de C à C' par une déformation à cohomologie et module de Rao constants.

Démonstration. L'existence de C et celle de la première résolution sont des conséquences de II 1.1. et de IV 1.2 et 3.4. Posons $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$, $\mathcal{P}' = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)}$. Alors on a $h' - h = \deg \mathcal{P} - \deg \mathcal{P}'$, d'où les résultats concernant C' en utilisant 3.1, 3.7 et II 1.4.

On sait aussi, toujours d'après 3.7, que la flèche $\widetilde{\beta}$ s'obtient en composant une injection $\mathcal{P} \to \mathcal{L} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)}$(qui fait de $\mathcal{P}$ un facteur direct de $\mathcal{L}$)

et la projection $\widetilde{\sigma}$. On a donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{P} & = & \mathcal{P} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\beta}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} & \mathcal{L} & \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} & \mathcal{N} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\epsilon}} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} & \mathcal{L}/\mathcal{P} & \xrightarrow{\widetilde{\pi}} & \mathcal{J}_C(h) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où $\widetilde{\lambda}$ est l'injection canonique, et ce diagramme donne la deuxième suite exacte de l'énoncé.

Corollaire 4.2. *Avec les notations du 3 et de 4.1, on a :*

$$s_0(C) = a_0 + h.$$

Démonstration. Des suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\widetilde{\lambda}} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)} \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l(n)-q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0$$

on déduit des suites exactes de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0_*\mathcal{E} = E \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)} \xrightarrow{\sigma} H^0_*\mathcal{N} = N \longrightarrow H^1_*\mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow H^0_*\mathcal{E} = E \xrightarrow{\alpha} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)-q(n)} \xrightarrow{\pi} H^0_*\mathcal{J}_C(h) = I_C(h) \longrightarrow H^1_*\mathcal{E} \longrightarrow 0.$$

Puisque σ est une présentation graduée minimale, on sait que σ est surjectif et que l'on a $\overline{\lambda} = 0$. On en déduit d'une part qu'on a $H^1_*\mathcal{E} = 0$, d'autre part que $\overline{\alpha}$ est nul, donc π est une présentation graduée minimale de $I_C(h)$ et

$$s_0(C) = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0\} = h + \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid l(n) - q(n) \neq 0\}$$

or on a vu (cf. 2.7) que $a_0 = \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid l(n) - q(n) > 0\}$ d'où le résultat.

Théorème 4.3. *Dans toute classe de biliaison de courbes non ACM, il existe une courbe minimale (cf. III 5.1), unique à déformation à cohomologie et module de Rao constants près.*

Démonstration. Soient M un R-module gradué de longueur finie non nul, $\sigma_i : L_i \to L_{i-1}$ une résolution graduée libre minimale de M, $N_0 = \operatorname{Ker} \sigma_1$, $E_0 = \operatorname{Ker} \sigma_2$, $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{E}_0$ les faisceaux associés. On a vu au II que toute courbe C' de la classe de biliaison déterminée par M a une résolution de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} \mathcal{J}_{C'}(h') \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)}$ et $\mathcal{L}'$ sont dissociés, et $h' \in \mathbf{Z}$ est tel que $M = M_{C'}(h')$. On peut supposer de plus cette résolution minimale au sens suivant : $\overline{\beta^{\vee}} = 0$.

Soit $q = q_{\mathcal{N}_0}$. On a vu qu'il existe une courbe C, un entier h, et une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\beta_0}} \mathcal{N}_0 \xrightarrow{\widetilde{\epsilon_0}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0.$$

En particulier on a $H^1_* \mathcal{N}_0 = M = H^1_* \mathcal{J}_C(h)$ et C est dans la classe.

Posons $\mathcal{P}_0 = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$. Il découle des résultats du 3 que $\deg \mathcal{P} \leq \deg \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{L}'$ et qu'il y a égalité si et seulement si $\mathcal{P} \simeq \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{L}'$. Donc d'une part, on a $h \leq h'$ et C est minimale; d'autre part si C' est aussi minimale, c'est-à-dire si $h = h'$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{L}'$ sont isomorphes. La minimalité de la résolution, jointe à 3.9, entraîne $\mathcal{L}' = 0$. On sait alors (cf.II 1.4) qu'on passe de C à C' par une déformation à cohomologie et module de Rao constants.

Proposition 4.4. *Notons encore $\sigma_2 : \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{l_2(n)} \to N_0$ la présentation graduée minimale de N_0. Une courbe minimale C a des résolutions de type E et de type N de la forme suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\widetilde{\alpha_0}} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n) - q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\pi_0}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\beta_0}} \mathcal{N}_0 \xrightarrow{\widetilde{\epsilon_0}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. C'est la même que celle de 4.1. On remarque simplement que la seconde résolution de $\mathcal{J}_C(h)$ que l'on obtient ainsi est "la" résolution de type E de $\mathcal{J}_C(h)$.

Il est intéressant de noter que cette propriété admet une réciproque :

Proposition 4.5. *Toute courbe ayant une résolution de type N (resp. de type E) de la forme suivante :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\beta_0}} \mathcal{N}_0 \xrightarrow{\widetilde{\epsilon_0}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\widetilde{\alpha_0}} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)-q(n)} \xrightarrow{\widetilde{\pi_0}} \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0)$$

est minimale.

Démonstration. Pour le type N, la preuve a été faite au cours de la démonstration de 4.3.

Soit une courbe ayant des résolutions de type E et de type N de la forme suivante :

$$0 \to \mathcal{E}_0 \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)-q(n)} \to \mathcal{J}_C(h) \to 0,$$

$$0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \to \mathcal{J}_C(h) \to 0.$$

D'après II 6.1, on a des isomorphismes

$$\mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{L}_2' \oplus \mathcal{L}_2'', \qquad \mathcal{P} \simeq \mathcal{L}_2'', \qquad \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)-q(n)} \simeq \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}_2'.$$

Avec les notations évidentes, on a alors $l_2 = l_2' + l_2''$, $l_2 - q = l' + l_2'$. Donc $l_2'' = q + l'$. Donc si on pose $\mathcal{P}_0 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$, on a $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{L}'$ et on conclut comme à la démonstration de 4.3.

Remarque 4.6. Il existe des courbes non minimales qui ont pourtant des résolutions de type E et de type N avec $\mathcal{L} = \mathcal{L}' = 0$. On a vu en II.7 que c'est le cas des courbes qui sont réunion de deux intersections complètes disjointes. On montrera en 6.10 qu'en général une telle courbe n'est pas minimale.

L'existence de courbes minimales a été prouvée par [LR] dans certains cas. Plus précisément, ils ont montré le résultat suivant, que nous allons retrouver directement :

Proposition 4.7. *Une courbe C vérifiant l'inégalité $s_0 > e + 3$ est minimale .*

Démonstration. Ecrivons les résolutions de type E et de type N de $\mathcal{J}_C$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \oplus \mathcal{L} \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} \mathcal{F} \xrightarrow{\widetilde{\pi}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0.$$

On sait (cf. II 6.1) qu'on a des isomorphismes $\mathcal{L}_2 \simeq \mathcal{L}'_2 \oplus \mathcal{L}''_2$, $\mathcal{P} \simeq \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}''_2$, et $\mathcal{F} \simeq \mathcal{L}' \oplus \mathcal{L}'_2$. De plus

$$\begin{aligned} s_0 &= \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{F}(n) \neq 0\} \leq \inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{L}'(n) \neq 0\} \\ e+4 &= -\inf\{n \in \mathbf{Z} \mid h^0\mathcal{P}^\vee(n) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Alors toute composante de $\mathcal{P}$ a un degré supérieur ou égal à celui de toute composante de $\mathcal{L}'$. Donc l'homomorphisme de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{L}'$ induit par $\widetilde{\beta}$ est nul composante par composante. En effet :

— soit les degrés sont strictement différents,

— soit ils sont égaux, mais alors c'est nul à cause de la minimalité de la résolution.

Donc $\mathcal{L}'$ s'identifie à un facteur direct de $\mathcal{J}_C$, et on a nécessairement $\mathcal{L}' = 0$. En particulier, $\mathcal{N}_0$ n'est pas nul, donc n'est pas dissocié (II 2.4).

De la même manière on montre que $\mathcal{L}$ est nul.

On a donc un isomorphisme $\mathcal{L}_2 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)} \simeq \mathcal{P} \oplus \mathcal{F}$, ce qu'on peut écrire $\mathcal{P} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)}$, $\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)-r(n)}$ avec $0 \leq r(n) \leq l_2(n)$.

L'hypothèse dit que

$$\inf\{n \in \mathbf{Z} \mid l_2(n) > r(n)\} \geq \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid r(n) \neq 0\} = e+4$$

et nous allons montrer que $r = q$, ce qui entraînera le résultat grâce à 4.5.

Pour $n \leq e+3$, on a $l_2(n) = r(n)$, donc $\mathcal{L}_{2\leq n} = \mathcal{P}_{\leq n}$ est un sous-fibré maximal dissocié de $\mathcal{N}_0$, d'où $n \leq a_0$ et $q(n) = l_2(n) = r(n)$.

Pour $n = e+4$, d'après 3.1 on a (car $\mathcal{N}_0$ n'est pas dissocié)

$$r^\sharp(e+4) \leq q^\sharp(e+4) \leq q^\sharp(\infty) = \text{ rang } \mathcal{N}_0 - 1.$$

Mais on a aussi

$$r^\sharp(e+4) = r^\sharp(\infty) = \text{ rang } \mathcal{P} = \text{ rang } \mathcal{N}_0 - 1$$

donc $r^\sharp(e+4) = q^\sharp(e+4) = q^\sharp(\infty)$, et d'une part, $r(e+4) = q(e+4)$, d'autre part $q(n) = 0 = r(n)$ pour $n \geq e+5$.

Remarque 4.8. On a vu en cours de démonstration que $q(n) = 0$ pour $n \geq e+5$ donc si $s_0 > e+4$, d'après 4.2, on a $a_0 = s_0 > e+4$ donc $q(n) = 0$ pour $n \geq a_0$ et q est la restriction de l_2 à l'intervalle $]-\infty, a_0[$.

Remarque 4.9. Si M et M' sont de même type (cf. I 3.6), relativement à un automorphisme σ de R et si C est minimale pour M on vérifie immédiatement que $\sigma^*(C)$ est minimale pour M'. Il suffit donc pour décrire tous les cas d'étudier un module de chaque type.

5. Courbes minimales. Liaison et biliaison.

Les théorèmes 3.1 et 3.4 nous permettent d'obtenir dans le cas général le résultat prouvé par [LR] pour les courbes vérifiant $s_0 > e+3$, qui décrit la structure des classes de biliaison. Nous expliquons ensuite le lien avec la classe "duale", c'est-à-dire celle qui correspond au module dual, ce qui complète la description de la structure des classes de liaison.

Théorème 5.1. *Soit C une courbe minimale dans une classe de biliaison. Pour toute courbe C' de cette classe, il existe un entier $m \geq 1$, une suite de courbes $C = C_1, C_2, \ldots, C_m$ telle que C_{i+1} s'obtienne à partir de C_i par une biliaison élémentaire triviale, et C' à partir de C_m par une déformation à cohomologie et module de Rao constants.*

Démonstration. C'est celle de [LR]. Avec les notations de la démonstration de 4.3, on a des résolutions

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}' \xrightarrow{\widetilde{\beta'}} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\widetilde{\epsilon'}} \mathcal{J}_{C'}(h') \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P}' = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r'(n)}$ et $\mathcal{L}'$ sont dissociés, et

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_0 \xrightarrow{\widetilde{\beta_0}} \mathcal{N}_0 \xrightarrow{\widetilde{\epsilon_0}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P}_0 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)}$. La deuxième résolution peut encore s'écrire, en rajoutant le facteur $\mathcal{L}'$, sous la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{L}' = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)}$ et où l'explicitation des flèches est laissée au lecteur.

Grâce à 3.1 et 2.9, on sait que l'on a pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $r^\sharp(n) \geq r'^\sharp(n)$. Le résultat est alors une conséquence du lemme suivant :

Lemme 5.2. *Soient C et C' deux courbes ayant des résolutions*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)} \xrightarrow{\widetilde{\beta}} \mathcal{N} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r'(n)} \xrightarrow{\widetilde{\beta'}} \mathcal{N} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon'}} \mathcal{J}_{C'}(h) \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{N}$ est un fibré qui vérifie $H^2_*\mathcal{N} = 0$ et où l'on a pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $r^\sharp(n) \geq r'^\sharp(n)$. Alors il existe une suite de courbes comme dans l'énoncé du théorème.

Démonstration. Posons $\mathcal{P} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{r(n)}$ et $\mathcal{P}' = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{r'(n)}$. On a déja vu qu'en intégrant les inégalités $r^\sharp(n) \geq r'^\sharp(n)$, on obtient $h = \deg \mathcal{P} - \deg \mathcal{P}' \geq 0$ et on va faire la démonstration par récurrence sur h.

Dans la démonstration de 4.3, on a montré que si h est nul, on passe de C à C' par une déformation à cohomologie et module de Rao constants. Supposons donc $h > 0$, et posons

$$n_0 = 1 + \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid r^\sharp(n) > r'^\sharp(n)\}$$

qui existe car $r^\sharp(\infty) = r'^\sharp(\infty) = \text{ rang } \mathcal{N} - 1$.

Nous allons montrer que $H^0\mathcal{J}_C(n_0)$ est non nul.

Pour $n > n_0$, on a $r(n) = r'(n)$. On peut donc écrire $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\leq n_0} \oplus \mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}' = \mathcal{P}'_{\leq n_0} \oplus \mathcal{P}_0$, avec $\mathcal{P}_0 = \bigoplus_{n>n_0} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{r(n)}$ et

$$\begin{aligned} \deg \mathcal{P}_{\leq n_0} &= \deg \mathcal{P}'_{\leq n_0} + h \\ \text{rang } \mathcal{P}_{\leq n_0} &= \text{ rang } \mathcal{P}'_{\leq n_0}. \end{aligned}$$

Notons j (resp. j') l'injection canonique de $\mathcal{P}_{\leq n_0}$ dans $\mathcal{P}$ (resp. de $\mathcal{P}'_{\leq n_0}$ dans $\mathcal{P}'$). Les premières composantes de $\widetilde{\beta}'$ induisent un homomorphisme

$$\mathcal{P}'_{\leq n_0} \xrightarrow{\widetilde{\beta}' j'} \mathcal{N} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C.$$

S'il est nul, on obtient une factorisation :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P}'_{\leq n_0} & \xrightarrow{j'} & \mathcal{P}' & \xrightarrow{\widetilde{\beta}'} & \mathcal{N} \\ \big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & & & \| \\ \mathcal{P}_{\leq n_0} & \xrightarrow{j} & \mathcal{P} & \xrightarrow{\widetilde{\beta}} & \mathcal{N} \end{array}$$

car un homomorphisme de $\mathcal{P}'_{\leq n_0}$ dans $\mathcal{P}$ se factorise nécessairement par $\mathcal{P}_{\leq n_0}$. Puisque $\deg \mathcal{P}_{\leq n_0} > \deg \mathcal{P}'_{\leq n_0}$, Coker φ a de la torsion, donc aussi Coker $\widetilde{\beta}' j'$ et Coker $\widetilde{\beta}'$ en vertu des suites exactes :

$$0 \to \text{ Coker } \varphi \to \text{ Coker } \widetilde{\beta}' j' \quad , \quad 0 \to \mathcal{P}_0 \to \text{ Coker } \widetilde{\beta}' j' \to \text{ Coker } \widetilde{\beta}' \to 0.$$

Donc $\widetilde{\epsilon}\widetilde{\beta}' j'$ n'est pas nul, et il existe $n \leq n_0$ tel que $H^0\mathcal{J}_C(n) \neq 0$.

Soit C'' la courbe obtenue à partir de C par une biliaison élémentaire (triviale) $(n_0, n_0 - n_1)$ où $n_1 = \sup\{n < n_0 \mid r(n) \neq 0\}$. On a deux résolutions (cf. III 4.3)

$$0 \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_0) \to \mathcal{N} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_1) \to \mathcal{J}_{C''}(n_0 - n_1) \to 0,$$

$$0 \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r'(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_1) \to \mathcal{N} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_1) \to \mathcal{J}_{C'}(h) \to 0,$$

et il reste à montrer, pour conclure par récurrence, que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on a $r_0^\sharp(n) \geq r_1'^\sharp(n)$, les fonctions r_0 et r_1' étant définies par

$$\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_0) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r_0(n)},$$

$$\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r'(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_1) = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{r_1'(n)}.$$

C'est immédiat pour $n < n_1$ ou $n \geq n_0$.
Pour $n_1 \leq n < n_0$, on a

$$r_0^\sharp(n) = r^\sharp(n) = r^\sharp(n_0 - 1)$$

car r est nulle sur $]n_1, n_0[$. Donc

$$r_1^\sharp(n) = 1 + r'^\sharp(n) \leq 1 + r'^\sharp(n_0 - 1) \leq r^\sharp(n_0 - 1)$$

d'où le résultat.

Puisqu'une biliaison élémentaire triviale augmente le genre et le degré, et qu'une déformation à cohomologie constante les conserve, on a le théorème suivant :

Théorème 5.3. *Une courbe minimale a un genre et un degré minimaux parmi les courbes de sa classe de biliaison.*

Remarque 5.4. Nous ignorons si dans l'énoncé 5.1 la présence de la déformation est indispensable. Ce problème se ramène facilement à la question suivante: soit C une courbe non minimale, existe-t-il toujours une courbe C' biliée à C par une biliaison élémentaire descendante ? On vérifie que c'est vrai si C est intègre en vertu de III 2.7.b et IV 4.7 (mais attention la courbe C' biliée n'a pas de raison d'être intègre).

Nous étudions maintenant la classe duale. Soient M un R-module gradué de longueur finie, M^* son dual, $\sigma_i : L_i \to L_{i-1}$ une résolution graduée libre minimale de M, $N_0 = \text{Ker } \sigma_1$, $E_0 = \text{Ker } \sigma_2$, $\mathcal{N}_0$ et $\mathcal{E}_0$ les faisceaux associés. On a vu au II que la duale de la résolution graduée de M est une résolution graduée (libre minimale) de $M^*(4)$, et que les rôles de E_0 et N_0 sont échangés par dualité.

Notons encore $\sigma : L_2 \to N_0$ la flèche induite sur N_0, qui en est une présentation graduée minimale, et $\tau : E_0 \to L_2$ l'injection canonique, dont la duale $\tau^\vee = \sigma' : L_2^\vee = L_2' \to E_0^\vee$ est aussi une présentation graduée minimale de $E_0^\vee$. Posons $L_2 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l_2(n)}$ et $L_2' = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l_2'(n)}$ de sorte qu'on a : $l_2'(n) = l_2(-n)$. Nous allons établir une relation entre les fonctions $q = q_{\mathcal{N}_0}$ et $q' = q_{\mathcal{E}_0^\vee}$. Elle résultera du lemme suivant :

Lemme 5.5. *Avec les notations de 2.4, on a, pour tout $a \in \mathbf{Z}$:*

$$\alpha'_{-a-1} - \alpha_a = \beta'_{-a-1} - \beta_a = \text{rang } \mathcal{E}_0 - l_2^\sharp(a).$$

Démonstration. Notons $\sigma_a : \bigoplus_{n\leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)} \to \mathcal{N}_0$ la restriction de σ et $\tau_a : \mathcal{E}_0 \to \bigoplus_{n>a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)}$ la flèche induite. Alors les conoyaux de σ_a et τ_a sont isomorphes. On en déduit qu'on a :

$$\begin{aligned}\text{rang } \mathcal{N}_0 - \text{rang } \sigma_a &= \text{rang } \bigoplus_{n>a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)} - \text{rang } \tau_a \\ &= \text{rang } \mathcal{L}_2 - \text{rang } \bigoplus_{n\leq a} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)} - \text{rang } \tau_a.\end{aligned}$$

Mais $\tau_a^\vee$ n'est autre σ'_{-a-1} et par définition, on a : $\alpha_a = \text{rang } \sigma_a$ et $\alpha'_{-a-1} = \text{rang } \sigma'_{-a-1} = \text{rang } \tau_a$, donc on obtient l'égalité $\alpha'_{-a-1} - \alpha_a = \text{rang } \mathcal{E}_0 - l_2^\sharp(a)$.

La suite exacte : $0 \to \mathcal{E}_0 \xrightarrow{\tau} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{N}_0 \to 0$ reste exacte sur tout diviseur de $\mathbf{P}^3$ et le raisonnement précédent s'applique encore sans changement aux restrictions de σ_a et τ_a, ce qui donne la deuxième égalité de l'énoncé.

Corollaire 5.6. *Avec les notations de 2.4, on a $a_0 = -a_1'$ et $a_1 = -a_0'$.*

Démonstration. On rappelle qu'on a :

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 + \sup\{a \in \mathbf{Z} \mid \alpha_a = \beta_a = l_2^\sharp(a)\} \\ a_1' &= \inf\{a \in \mathbf{Z} \mid \alpha_a' = \beta_a' = \text{rang } \mathcal{E}_0\},\end{aligned}$$

et d'après 5.5, on a :

$$\alpha_a = \beta_a = l_2^\sharp(a) \Leftrightarrow \alpha'_{-a-1} = \beta'_{-a-1} = \text{rang } \mathcal{E}_0,$$

ce qui entraîne la première égalité. La deuxième s'en déduit puisque les rôles des fonctions q et q' sont symétriques.

Proposition 5.7. *Avec les notations précédentes on a, pour tout $n \in \mathbf{Z}$:*

$$q(n) + q'(-n) = l_2(n) - \epsilon_0(n) - \epsilon_1(n)$$

où $\epsilon_0(n)$ (resp. $\epsilon_1(n)$) vaut 1 si $n = a_0$ (resp. $n = a_1$) et 0 ailleurs. En particulier, on a $l_2(a_1) \geq 1$ et $l_2(a_1) \geq 2$ si $a_0 = a_1$.

Démonstration. Pour des raisons de symétrie, il suffit de montrer l'égalité pour $n \leq a_1$, et même pour $n < a_1$ si $a_0 < a_1$.

Si $n < a_0$, on a aussi $-n > a'_1 = -a_0$, donc on a $q(n) = l_2(n)$ et $q'(-n) = 0$ (cf. 2.7), et l'égalité est vérifiée.

Si $n = a_0 < a_1$, on a aussi $-n - 1 = a'_1 - 1 \geq a'_0$, donc on a, compte tenu de $q^\sharp(a_0 - 1) = l_2^\sharp(a_0 - 1)$ et de $q'^\sharp(a'_1) = \text{rang } \mathcal{E}_0 - 1$:

$$\begin{aligned}
q(a_0) &= q^\sharp(a_0) - q^\sharp(a_0 - 1) \\
&= \inf(\alpha_{a_0} - 1, \beta_{a_0}) - l_2^\sharp(a_0 - 1) \\
&= \inf(\alpha'_{a'_1-1} - 1, \beta'_{a'_1-1}) - \text{rang } \mathcal{E}_0 + l_2^\sharp(a_0) - l_2^\sharp(a_0 - 1) \\
&= q'^\sharp(a'_1 - 1) - q'^\sharp(a'_1) - 1 + l_2(a_0) \\
&= l_2(a_0) - q'(a'_1) - 1
\end{aligned}$$

et l'égalité est vérifiée.

Si $n = a_0 = a_1$, le calcul est analogue, la seule différence est que, puisque $a'_1 - 1 = a'_0 - 1$ est inférieur à a'_0, $\inf(\alpha'_{a'_1-1} - 1, \beta'_{a'_1-1})$ n'est plus égal à $q'^\sharp(a'_1 - 1)$ mais à $q'^\sharp(a'_1 - 1) - 1$.

Si $a_0 < n < a_1$, on a aussi $-n - 1 \geq a'_0$, et le résultat est une conséquence immédiate des égalités :

$$\begin{aligned}
q^\sharp(n) &= q'^\sharp(-n - 1) - \text{rang } \mathcal{E}_0 + l_2^\sharp(n) \\
q^\sharp(n - 1) &= q'^\sharp(-n) - \text{rang } \mathcal{E}_0 + l_2^\sharp(n - 1).
\end{aligned}$$

Proposition 5.8. *Avec les notations précédentes, soit C (resp. C') une courbe minimale de la classe de biliaison définie par M (resp. M^*). Les résolutions de type E et de type N de C et C' sont de la forme suivante :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n) - q(n)} \longrightarrow \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q(n)} \longrightarrow \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathcal{J}_C(h) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_0^\vee \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_1) \oplus \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)^{q(n)} \longrightarrow \mathcal{J}_{C'}(h + a_0 + a_1) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)^{l_2(n)-q(n)-\epsilon_0(n)-\epsilon_1(n)} \longrightarrow \mathcal{E}_0^\vee \longrightarrow \mathcal{J}_{C'}(h + a_0 + a_1) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. C'est une conséquence de 4.4 et 5.7. Pour les décalages, il suffit de vérifier que les égalités :

$$h = \deg \mathcal{N}_0 + \sum_{n\in\mathbf{Z}} nq(n)$$

$$\text{et} \qquad h + a_0 + a_1 = -\deg \mathcal{E}_0 + \sum_{n\in\mathbf{Z}} nq'(n)$$

sont équivalentes, ce qui découle de 5.7.

Corollaire 5.9. *Avec les notations de 5.8, on a :* $s_0(C) = s_0(C')$.

Démonstration. On a $s_0(C) = a_0 + h$, et il résulte de la résolution de type E de C' que

$$s_0(C') = h + a_0 + a_1 - \sup\{n \in \mathbf{Z} \mid q(n) + \epsilon_0(n) + \epsilon_1(n) > 0\} = h + a_0$$

puisque $q(n)$ est nul pour tout $n > a_1$ (cf. 2.7).

Théorème 5.10. *Soient M un R-module gradué de longueur finie, M^* son dual, $\sigma_i : L_i \to L_{i-1}$ une résolution graduée libre minimale de M, $N_0 = \operatorname{Ker} \sigma_1$, $\mathcal{N}_0$ le faisceau associé, a_0 et a_1 les entiers définis en 2.4. Si h est le décalage d'une courbe minimale de la classe de biliaison définie par M, toute courbe minimale de la classe de biliaison définie par M (resp. M^*) est liée par $(a_0 + h) \times (a_1 + h)$ à une courbe minimale de la classe de biliaison définie par M^* (resp. M).*

Démonstration. Soit C une courbe minimale de la classe de biliaison définie par M. Puisque, par définition, avec les notations de 2.4, $\alpha_{a_1} = \beta_{a_1} = \operatorname{rang} \mathcal{N}_0$, l'homomorphisme $\sigma_{a_1} : \bigoplus_{n\leq a_1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)} \to \mathcal{N}_0$ est surjectif sur un ouvert qui contient les points génériques de tous les diviseurs de $\mathbf{P}^3$. Il en est de même du composé : $\bigoplus_{n\leq a_1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)} \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{J}_C(h)$, donc aussi de l'homomorphisme induit : $\bigoplus_{n\leq a_1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{l_2(n)-q(n)} \to \mathcal{N}_0 \to \mathcal{J}_C(h)$.

Cet homomorphisme définit donc N surfaces contenant C, sans composante commune, dont les degrés varient de $a_0 + h$ à $a_1 + h$. D'après III 1.9, on peut lier C par $(a_0 + h) \times (a_1 + h)$ à une courbe C' dont l'idéal admet la résolution :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)^{l_2(n)-q(n)} \longrightarrow \mathcal{E}_0^\vee \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_1) \longrightarrow \mathcal{J}_{C'}(h + a_0 + a_1) \longrightarrow 0.$$

Mais on a $\bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)^{l_2(n)-q(n)} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{q'(n)} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_0) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_1)$, et on conclut en utilisant 3.9 que la résolution obtenue n'est pas minimale, c'est-à-dire qu'on peut "simplifier" $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_0)$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a_1)$, et d'après 4.5, on sait que C' est minimale.

Par dualité, on a le même résultat en échangeant les rôles de M et M^*.

Remarque 5.11. La liaison $(a_0 + h) \times (a_1 + h)$ est la meilleure que l'on puisse faire à partir d'une courbe minimale de la classe de biliaison définie par M. En effet, si l'on pouvait faire une liaison $s \times t$, avec $s + t < a_0 + a_1 + 2h$, on obtiendrait une courbe de la classe de biliaison définie par M^*, dont le module de Rao serait plus à gauche que celui de la courbe minimale.

6. Méthodes de calcul et exemples.

Nous fournissons ci-dessous un algorithme permettant de déterminer la courbe minimale associée à un module. Nous appliquons cette méthode à trois types d' exemples. Dans le premier, le module est un quotient de R par une suite régulière, on dispose d'une courbe de la classe de liaison (la réunion de deux intersections complètes), mais cette courbe n'est pas minimale en général. Dans le second, le module est de Buchsbaum et on n'a pas, a priori, de courbe de la classe. Dans le troisième enfin, on se donne seulement les valeurs de la fonction de Rao du module ($\rho(0) = 1$, $\rho(1) = 2$, $\rho(2) = 1$) et on donne la liste exhaustive des types de modules possibles et de leurs courbes minimales.

a) Un algorithme pour le calcul de la fonction q.

La situation qui nous occupe est la suivante : on a un R-module gradué M de longueur finie et une résolution libre minimale :

$$0 \to L_4 \to L_3 \to L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \to M \to 0.$$

On pose $N_0 = \mathrm{Ker}\sigma_1 = \mathrm{Im}\sigma_2$, on désigne par j l'injection canonique de N_0 dans L_1 et par σ_2' la projection de L_2 sur N_0. On pose :

$$L_2 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l_2(n)} \quad , \quad L_{2,\leq a} = \bigoplus_{n\leq a} R(-n)^{l_2(n)},$$

$$t_a = \mathrm{rang}\ L_{2,\leq a} = \sum_{n\leq a} l_2(n) = l_2^\sharp(a)\ .$$

Si L est un facteur direct libre de L_2 on écrit $L = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)}$, avec $l(n) \leq l_2(n)$ et on pose $\psi_L = \sigma_2'|_L$, $\varphi_L = j\psi_L = \sigma_2|_L$. Lorsque l'on a $L = L_{2,\leq a}$, on pose $\psi_a = \psi_{L_{2,\leq a}}$, $\varphi_a = \varphi_{L_{2,\leq a}}$. Notre objectif est d'étudier ψ_a et notamment son conoyau et de calculer la fonction q, cf. 2.6. On a déjà :

Proposition 6.1.
1) On a $\mathrm{Ker}\psi_L = \mathrm{Ker}\varphi_L$. *En particulier,* ψ_L *est injective si et seulement si* φ_L *l'est.*
2) $\mathrm{Coker}\psi_L$ *est sans torsion si et seulement si* $\mathrm{Coker}\varphi_L$ *l'est.*

Démonstration. L'assertion 1) est claire car j est injective ; 2) résulte de la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Coker}\psi_L \longrightarrow \mathrm{Coker}\varphi_L \longrightarrow \mathrm{Im}\sigma_1 \to 0$$

puisque $\mathrm{Im}\sigma_1 \subset L_0$ est sans torsion.

Notation 6.2. On note $\mathrm{Irr}(R)$ l'ensemble des polynômes homogènes irréductibles en X, Y, Z, T. Pour $f \in R$ et $\varphi : L \to L'$ un homomorphisme de R-modules gradués, on désigne par φ/f l'homomorphisme obtenu en tensorisant φ par $R/(f)$.

Corollaire 6.3. *Posons* $r = \mathrm{rang}(L)$.
1) Les conditions suivantes sont équivalentes :
i) ψ_L *est injective,*
ii) φ_L *est injective,*
iii) $\overset{r}{\wedge} \varphi_L \neq 0$,
iv) les r*-mineurs de* φ_L *sont non tous nuls.*
2) Supposons φ_L *injective. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
i) $\mathrm{Coker}\psi_L$ *est sans torsion,*
ii) $\mathrm{Coker}\varphi_L$ *est sans torsion,*
iii) $\forall f \in \mathrm{Irr}(R)$ *on a* $\mathrm{rang}(\varphi_L/f) = r$,
iv) les r*-mineurs de* φ_L *n'ont pas de facteur commun non trivial.*

Démonstration. C'est la proposition 6.1, et l'algèbre linéaire élémentaire.

Corollaire 6.4. Calcul de a_0, α_a , β_a. *Avec les notations de 2.4 on a :*
1) L'entier $a_0 - 1$ *est le plus grand entier* $a \in \mathbf{Z}$ *tel que les* t_a*-mineurs de* φ_a *n'aient pas de facteur commun non trivial (en particulier ils sont alors non tous nuls).*
2) L'entier α_a $(= \mathrm{rang}\,\varphi_a)$ *est la dimension d'un plus grand mineur non nul de* φ_a.
3) β_a *est le plus grand entier* β *tel que les* β*-mineurs de* φ_a *n'aient pas de facteur commun non trivial.*

b) Exemple 1 : module associé à une suite régulière.

Soit f_1, f_2, f_3, f_4 une suite régulière d'éléments homogènes de $\mathbf{m}$, (en particulier, les f_i sont deux à deux sans facteur commun). Posons $n_i = \deg f_i$ et supposons les f_i ordonnés de sorte que l'on ait $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4$. Soit $M = R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$. C'est un R-module de longueur finie et on a vu en I

3.5 que c'est le module de Rao de la courbe $C = C_1 \cup C_2$ où C_1 (resp. C_2) est l'intersection complète d'équations (f_1, f_2) (resp. (f_3, f_4)), ou aussi des courbes analogues obtenues en permutant les indices. On a vu en II 2.6 que M admet la résolution minimale ci-dessous (avec $\nu = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$) :

$$0 \to R(-\nu) \to \bigoplus_{i=1}^{4} R(n_i - \nu) \to \bigoplus_{i<j} R(-n_i - n_j) \xrightarrow{\sigma_2} \bigoplus_{i=1}^{4} R(-n_i) \to R \to M \to 0.$$

Si on désigne par e_{ij} (resp. ϵ_i) un vecteur de base de $R(-n_i - n_j)$ (resp. $R(-n_i)$) et si l'on range les e_{ij} (resp. les ϵ_i) dans l'ordre $12, 13, 14, 23, 24, 34$ (resp. 1,2,3,4) la matrice de σ_2 dans ces bases est alors :

$$\begin{pmatrix} f_2 & f_3 & f_4 & 0 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & 0 & f_3 & f_4 & 0 \\ 0 & -f_1 & 0 & -f_2 & 0 & f_4 \\ 0 & 0 & -f_1 & 0 & -f_2 & -f_3 \end{pmatrix}$$

On note qu'on a les inégalités :

$$n_1 + n_2 \leq n_1 + n_3 \leq \begin{matrix} n_1 + n_4 \\ \\ n_2 + n_3 \end{matrix} \leq n_2 + n_4 \leq n_3 + n_4$$

mais qu'il n'y a pas d'inégalité automatique entre $n_1 + n_4$ et $n_2 + n_3$; on pose :

$$\mu = \sup(n_1 + n_4, n_2 + n_3).$$

Lemme 6.5.
Si L est un sous-module de L_2 on pose :
$\alpha_L = \operatorname{rang}(\varphi_L)$; $\beta_L = \inf_{f \in \operatorname{Irr}(R)} \operatorname{rang}(\varphi_L / f)$.
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de α_L et β_L pour les sous-modules L de L_2 engendrés par les e_{ij} dont les indices figurent dans la première ligne :

L	12	12, 13	12, 13, 14	12, 13, 23	12, 13, 14, 23	12, 13, 14, 23, 24	L_2
α_L	1	2	3	2	3	3	3
β_L	1	1	1	2	2	3	3

Démonstration. C'est une vérification sans difficulté sur les mineurs de σ_2, il faut noter essentiellement :

a) que la matrice

$$\begin{pmatrix} f_2 & f_3 & 0 \\ -f_1 & 0 & f_3 \\ 0 & -f_1 & -f_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est de rang 2 et que ses 2-mineurs n'ont pas de facteurs communs (il y a $f_1 f_3$ et f_2^2),

b) que la matrice

$$\begin{pmatrix} f_2 & f_3 & f_4 \\ -f_1 & 0 & 0 \\ 0 & -f_1 & 0 \\ 0 & 0 & -f_1 \end{pmatrix}$$

est de rang 3, mais que ses 2-mineurs sont tous multiples de f_1,

c) enfin, que les 3-mineurs de la matrice 4×4 formée des 4 premières colonnes de σ_2 sont multiples de f_1 mais qu'à partir de la matrice 4×5 les 3-mineurs n'ont plus de facteur commun.

Corollaire 6.6. *1) On a* $a_0 = n_1 + n_3$, $a_1 = n_2 + n_4$.
2) Calcul de q *:*
a) Si $n_1 + n_2 < \mu$ *, on a* $q(n) = 0$ *, sauf* $q(n_1 + n_2) = q(\mu) = 1$.
b) Si $n_1 + n_2 = \mu$ *, on a* $q(n) = 0$ *, sauf* $q(n_1 + n_2) = 2$.

Démonstration. L'assertion 1) vu la définition de a_0 (cf. 2.4), résulte de 6.5 (on notera que les sous-modules $L_{2 \leq a}$ sont nécessairement parmi ceux étudiés en 6.5). Comme le fibré $\mathcal{N}_0$ est de rang 3 et non décomposé on a $\sum_{n \in \mathbf{Z}} q(n) = 2$ et $q(n) \geq 0$ (cf. 2.7). D'autre part, on a $q(n_1 + n_2) \geq 1$ (cf. 3.2). Le plus petit entier n tel que $q^\sharp(n) = 2$ est alors le plus petit entier n tel que $\inf(\alpha_n - 1, \beta_n) = 2$. Vu 6.5, c'est μ.

Les résultats 3.4, 4.3, 4.5 nous permettent alors de préciser la courbe minimale C_0 dans la classe de liaison associée à M.

Corollaire 6.7. *Soit* C_0 *la courbe minimale associée à* M.
1) On a $M_{C_0} = M(n_3 + n_4 - \mu)$.
2) On a les résolutions minimales suivantes de $I_{C_0}(\mu - n_3 - n_4)$ *:*
a) Type N :

$$0 \to P \to N_0 \to I_{C_0}(\mu - n_3 - n_4) \to 0,$$

avec $P = R(-n_1 - n_2) \oplus R(-\mu)$.
b) Type E :

$$0 \to E_0 \to F \to I_{C_0}(\mu - n_3 - n_4) \to 0,$$

avec $E_0 = \mathrm{Ker}\sigma_2$ *et* $F = R(-n_1 - n_3) \oplus R(-\mu') \oplus R(-n_2 - n_4) \oplus R(-n_3 - n_4)$ *où l'on a posé* $\mu' = \inf(n_2 + n_3, n_1 + n_4)$.
3) Le degré de C_0 *est* $d = \mu(n_1 + n_2) - n_1 n_3 - n_2 n_4$.

Remarques 6.8.

1) On constate que, sauf si trois des n_i sont égaux, on a $\mu - n_3 - n_4 < 0$. Ceci signifie que les courbes C réunions d'intersections complètes qui vérifient $M_C = M$ ne sont pas minimales (cf. III 5). C'est d'ailleurs évident a priori puisque les trois courbes obtenues à partir de C par permutation des indices sont de degrés $n_1n_2 + n_3n_4$, $n_1n_3 + n_2n_4$, $n_1n_4 + n_2n_3$ distincts, donc ne sont pas minimales (cf. 4.3, unicité). On notera que l'on a $h^1 \mathcal{J}_C(\mu - n_3 - n_4) \neq 0$ et que donc, si $\mu - n_3 - n_4 < 0$, la courbe minimale n'est pas réduite.

2) On a $s_0(C_0) = \mu + n_1 - n_4$; $e(C_0) = 2\mu - n_3 - n_4 - 4$. On note que la relation $e + 3 < s_0$ n'est vérifiée que si $n_1 = n_2$ et $n_3 = n_4$.

3) Les résultats de 3.4 permettent d'affirmer qu'il existe un facteur direct $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}_2$, isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_1 - n_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-\mu)$ tel que $\sigma_2(\mathcal{L})$ soit un sous faisceau maximal de $\mathcal{N}_0$. Dans le cas présent on peut décrire explicitement un plongement convenable de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}_2$: on choisit des polynômes homogènes f, g de degrés respectifs $\mu - n_1 - n_4$ et $\mu - n_2 - n_3$, non nuls et tels que f, g, et les f_i soient deux à deux sans facteur commun. On envoie alors les vecteurs de base de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_1 - n_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-\mu)$ respectivement sur e_{12} et $fe_{14} + ge_{23}$. La composée φ de σ_2 avec ce plongement admet pour matrice :

$$\begin{pmatrix} f_2 & ff_4 \\ -f_1 & gf_3 \\ 0 & -gf_2 \\ 0 & ff_1 \end{pmatrix}$$

Les 2-mineurs de cette matrice n'ont pas de facteurs communs et définissent l'idéal de C_0 qui est donc engendré par les polynômes f_1f_2, $ff_1f_4 + gf_2f_3$, gf_2^2, ff_1^2. On vérifie aussitôt que C_0 est liée par les surfaces d'équations f_1f_2 et $ff_1f_4 + gf_2f_3$ à la réunion C' des intersections complètes $(f_1, f_3) \cup (f_2, f_4)$. On peut encore lier C' par les surfaces f_1f_2 et f_3f_4 à $C'' = (f_1, f_4) \cup (f_2, f_3)$. En définitive, C'' est donc obtenue à partir de C_0 par une biliaison élémentaire de type $(n_1 + n_2, n_3 + n_4 - \mu)$ ce qui confirme 6.7.1. Cette remarque permet de calculer plus aisément les invariants de C_0 grâce à III 3. et notamment le degré et le genre.

Exemple 6.9. Prenons $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = n_4 = a$ avec $a > 1$. Dans ce cas, on a $M = M_C$ avec C réunion disjointe de deux courbes planes de degré a. Cette courbe n'est pas minimale. La courbe minimale C_0 est de degré 2 et de genre $-a$, il s'agit d'une structure double sur une droite qu'on peut par exemple décrire par les équations XY, X^2, Y^2, $XA + YB$ avec A, B de degré a .

c) Exemple 2 : module de Buchsbaum.

On suppose cette fois que le module M est de Buchsbaum : $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \cdots M_r$ avec $r \geq 0$ et $\dim_k M_i = \rho(i)$. On suppose $\rho(0) > 0$ et $\rho(r) > 0$. La structure de R-module de M est triviale et on a la résolution minimale (cf. II 2.6) :

$$0 \to \bigoplus_{n=0}^{r} R(-4-n)^{\rho(n)} \to \bigoplus_{n=0}^{r} R(-3-n)^{4\rho(n)} \to \bigoplus_{n=0}^{r} R(-2-n)^{6\rho(n)}$$
$$\xrightarrow{\sigma_2} \bigoplus_{n=0}^{r} R(-1-n)^{4\rho(n)} \to \bigoplus_{n=0}^{r} R(-n)^{\rho(n)} \to M \to 0$$

et la matrice de σ_2 dans une base convenablement choisie est une matrice formée de blocs diagonaux 4×6 tous égaux à la matrice :

$$\begin{pmatrix} Y & Z & T & 0 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z & T & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \end{pmatrix}$$

Proposition 6.10.
1) On a $a_0 = 2$, $a_1 = r + 2$.

2) On a, pour tout $n \geq 0$, $\alpha_{n+2} = \beta_{n+2} = 3 \sum_{i=0}^{n} \rho(i)$.

3) On a $q(2) = 3\rho(0) - 1$; $q(n+2) = 3\rho(n)$ pour $n = 1, \ldots, r$ et $q(n) = 0$ sinon.

Démonstration. L'assertion 2) est une conséquence immédiate de 4.6 puisque le rang (resp. le rang sur les diviseurs) d'un bloc 4×6 comme ci-dessus est égal à 3. Le point 1) et le point 3) en résultent aussitôt en vertu de la formule $q^\sharp(n) = \inf(\alpha_n - 1, \beta_n)$ pour $n > 1$.

Corollaire 6.11. *On pose $\alpha = \sum_{i=0}^{r} \rho(i)$ et $h = 2\alpha - 2$. Soit C_0 la courbe minimale associée à M.*

1) On a $M_{C_0} = M(-h)$.
2) Les résolutions minimales de $I_{C_0}(h)$ *sont les suivantes :*
a) Type $N : 0 \to P \to N_0 \to I_{C_0}(h) \to 0$ *avec*

$$P = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-2-i)^{3\rho(i)} \oplus R(-2)^{3\rho(0)-1}.$$

b) Type $E : 0 \to E_0 \to F \to I_{C_0}(h) \to 0$, avec $E_0 = \operatorname{Ker}\sigma_0$ *et*

$$F = \bigoplus_{i=1}^{r} R(-2-i)^{3\rho(i)} \oplus R(-2)^{3\rho(0)+1}.$$

3) Les invariants de C_0 *sont les suivants :* $s_0 = 2\alpha$; $e = 2\alpha + r - 4$.

Remarques 6.12.

1) Les résolutions ci-dessus permettent de calculer les fonctions r_{C_0} et r'_{C_0} (cf. II 5.1), donc aussi les caractères γ_{C_0} et σ_{C_0} ainsi que le degré et le genre de C_0. Par exemple on a :

$$r'_{C_0}(n) = 3\rho(n-h-2) - 4\rho(n-h-1) + \rho(n-h) - \binom{-n+h+1}{-1} + \binom{-n-1}{-1}.$$

On en déduit le degré et le genre par les formules de II 5.2 .

2) Le décalage $h = 2\alpha - 2$ est toujours > 0 sauf si $r = 0$ et $\rho(0) = 1$, c'est-à-dire dans le cas de la classe de liaison de deux droites. On en déduit que, sauf dans ce cas, on a $h^1\mathcal{J}_{C_0} = 0$ de sorte que C_0 est connexe. Il en résulte par liaison (cf. III) que toute courbe de Buchsbaum, sauf la réunion de deux droites, est connexe.

3) On note que la condition de Lazarsfeld-Rao ($e + 3 < s_0$) est satisfaite pour C_0 si et seulement si $r = 0$.

4) La courbe C_0 est de rang maximum si et seulement si on a $r_o = r + 2\alpha - 2 < s_0 = 2\alpha$, i.e., si $r = 0$ ou $r = 1$. Vu 5.1 on en déduit qu'il n'existe pas de courbes de Buchsbaum de rang maximum si $r > 2$ et que pour $r \leq 2$ il en existe pour tout décalage $h \geq 0$ de M_{C_0} (cf. III 3.7).

5) Le cas $r = 0$ (cf. [BM1]).

On suppose $r = 0$, $\rho(0) = a > 0$. On a pour la courbe C_0 : $r_a = r_o = 2a-2$, $s_0 = 2a$, $e = 2a - 4$. Les valeurs non nulles des fonctions r_{C_0} et r'_{C_0} sont les suivantes :

$$r'(0) = 1,\ r'(2a-2) = a,\ r'(2a-1) = -4a,\ r'(2a) = 3a-1,$$

$$r(0) = -1,\ r(2a) = 3a+1,\ r(2a+1) = -4a,\ r(2a+2) = a,$$

d'où les valeurs des caractères γ_{C_0} et σ_{C_0} :

n	0	1	$\cdots$	$2a-3$	$2a-2$	$2a-1$	$2a$	$2a+1$
$\sigma(n)$	1	1	$\cdots$	1	$a+1$	$-3a+1$	0	0
$\gamma(n)$	-1	-1	$\cdots$	-1	-1	-1	$3a$	$-a$

On en déduit $d = 2a^2$, $g = (2a-3)(2a-1)(2a+1)/3$. Si C est une courbe de la classe on a alors par 5.1 et III 3 des minorations des invariants de C. Par exemple, si C n'est pas minimale, on a $d_C \geq 2a^2 + 2a$ et il existe des courbes de tout degré d vérifiant cette inégalité. Comme C_0 est de rang maximum on peut même supposer C de rang maximum (utiliser une biliaison $(s,1)$ avec $s = d_C - 2a^2 \geq 2a$).

6) Le cas $r = 1$ (cf. [BM2]).

Cette fois on a $r = 1$, $\rho(0) = a$, $\rho(1) = b$, $a, b > 0$. Les calculs sont analogues. On a par exemple $d = 2(a+b)^2 + 2b$ pour la courbe minimale et $d \geq 2(a+b)^2 + 2b + a + b$ sinon. Si l'inégalité est stricte il existe une courbe de la classe qui a le degré d et est de rang maximum.

7) Pour les résultats généraux concernant les caractères γ_C et σ_C, cf. V.

d) Etude des modules de dimensions (1,2,1).

Nous étudions maintenant les R-modules gradués de longueur finie dont la fonction de Rao est donnée par : $\rho(0) = 1, \rho(1) = 2, \rho(2) = 1$ et les courbes minimales qui leur correspondent. Ces modules interviendront de façon essentielle aux chapitres IX et XI. L'ensemble des classes d'isomorphisme de ces modules sera noté $E_{1,2,1}$ (cf. VII 4).

Soit $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2$ un élément de $E_{1,2,1}$. On rappelle que R_d désigne le sous-espace de R formé des polynômes homogènes de degré d. La structure de module de M est définie par deux applications linéaires $u_0 : R_1 \to \mathrm{Hom}_k(M_0, M_1)$ et $u_1 : R_1 \to \mathrm{Hom}_k(M_1, M_2)$ qui décrivent l'action de R_1 sur M. La commutativité de R impose 6 relations de la forme $u_1(X)u_0(Y) = u_1(Y)u_0(X)$ et l'on définit ainsi une application linéaire $u_1u_0 : R_2 \to \mathrm{Hom}_k(M_0, M_2)$. Nous allons classifier les modules de $E_{1,2,1}$ selon les rangs des applications linéaires u_0, u_1 et u_1u_0.

Théorème 6.13. *On a la classification suivante des éléments M de $E_{1,2,1}$:*
1) Si $\mathrm{rang}\, u_0 = \mathrm{rang}\, u_1 = 2$, M est monogène ainsi que son dual M^* et M est du type de $R/(X, Y, Z^2, T^2)$ (cf. I 3). (On notera que M^* est du même type).
2) Si $\mathrm{rang}\, u_0 = 2$ et $\mathrm{rang}\, u_1 = 1$, M est monogène (mais pas son dual M^*) et du type de $R/(X, Y, Z^2, ZT, T^3)$.
3) Si $\mathrm{rang}\, u_0 = 2$ et $\mathrm{rang}\, u_1 = 0$, M est du type de la somme directe $R/(X, Y, Z^2, ZT, T^2) \oplus R/(X, Y, Z, T)(-2)$.
4) Si $\mathrm{rang}\, u_0 = 1$ et $\mathrm{rang}\, u_1 = 2$, M est le dual d'un module monogène du type

2 ci-dessus.
5) Si $\operatorname{rang} u_0 = \operatorname{rang} u_1 = 1$ *et* $\operatorname{rang} u_1 u_0 = 1$, *$M$ est du type de la somme directe* $R/(X,Y,Z,T^3) \oplus R/(X,Y,Z,T)(-1)$.
6) Si $\operatorname{rang} u_0 = \operatorname{rang} u_1 = 1$, *si* $\operatorname{rang} u_1 u_0 = 0$, *et si* $\operatorname{Ker} u_1 = \operatorname{Ker} u_0$, *$M$ est du type de la somme directe* $R/(X,Y,Z,T^2) \oplus R/(X,Y,Z,T^2)(-1)$.
7) Si $\operatorname{rang} u_0 = \operatorname{rang} u_1 = 1$, *si* $\operatorname{rang} u_1 u_0 = 0$, *et si* $\operatorname{Ker} u_1 \neq \operatorname{Ker} u_0$, *$M$ est du type de la somme directe* $R/(X,Y,Z,T^2) \oplus R/(X,Y,Z^2,T)(-1)$.
8) Si $\operatorname{rang} u_0 = 1$ *et* $\operatorname{rang} u_1 = 0$, *$M$ est du type de la somme directe* $R/(X,Y,Z,T^2) \oplus R/(X,Y,Z,T)(-1) \oplus R/(X,Y,Z,T)(-2)$.
9) Si $\operatorname{rang} u_0 = 0$ *et* $\operatorname{rang} u_1 = 2$, *$M$ est du type de la somme directe* $R/(X,Y,Z,T) \oplus (R/(X,Y,Z^2,ZT,T^2))^*(-1)$.
10) Si $\operatorname{rang} u_0 = 0$ *et* $\operatorname{rang} u_1 = 1$, *$M$ est du type de la somme directe* $R/(X,Y,Z,T) \oplus R/(X,Y,Z,T)(-1) \oplus R/(X,Y,Z,T^2)(-1)$.
11) Si $\operatorname{rang} u_0 = \operatorname{rang} u_1 = 0$, *$M$ est un module de Buchsbaum.*

Démonstration. Rappelons que deux modules M et M' sont dits de même type s'il existe un automorphisme gradué σ de R (c'est-à-dire un élément de $GL(R_1)$) et un isomorphisme de k-espaces vectoriels gradués $u : M \to M'$ qui soit σ-semi-linéaire. En termes des u_i, cela revient à dire que l'on s'autorise à faire un changement de base dans R_1 avant d'appliquer les u_i. On étudie alors les divers cas.

1) $\operatorname{rang} u_0 = \operatorname{rang} u_1 = 2$. Dans ce cas, $\operatorname{Ker} u_0$ est de dimension 2 et quitte à faire un changement de variables dans R_1, on peut supposer que c'est le sous-espace (X,Y). Soit e une base de M_0 de sorte que $f_1 = Ze$ et $f_2 = Te$ forment une base de M_1. Soit g une base de M_2. On a $Xf_1 = XZe = ZXe = 0$ et de même pour Xf_2, Yf_1 et Yf_2. Posons $Zf_1 = a_1 g$, $Zf_2 = a_2 g = Tf_1$ (car on a $ZT = TZ$) et $Tf_2 = b_2 g$. Comme le rang de u_1 vaut 2, on a $a_2^2 - a_1 b_2 \neq 0$ de sorte qu'il existe deux couples (α, β) non proportionnels tels que l'on ait $(\alpha Z + \beta T)^2 e = 0$. Quitte à faire un changement de variables dans R_1 qui fixe X et Y on peut supposer que l'on a $Z^2 e = T^2 e = 0$ et, quitte à changer g, que ZTe est égal à g. Alors le module M est engendré par e avec les relations $Xe = Ye = Z^2 e = T^2 e = 0$ et il est du type annoncé.

2) $\operatorname{rang} u_0 = 2$, $\operatorname{rang} u_1 = 1$. Le début de la démonstration est identique, mais cette fois on a $a_2^2 - a_1 b_2 = 0$ de sorte qu'il n'existe qu'un carré qui annule e, disons Z^2. On en déduit $ZTe = 0$ et le module est du type annoncé.

Les autres cas se traitent de manière analogue et sont laissés au lecteur.

Nous passons maintenant au calcul des courbes minimales correspondant à chacun des types répertoriés en 6.13. On désignera par h le décalage du module de Rao par rapport au module standard concentré en degrés $0, 1, 2$.

Le cas du type 1 a été étudié en 6.9. La courbe minimale est de degré 2 et genre -2. Elle est liée par (2×3) à la réunion disjointe de deux coniques. Son module de Rao est en degrés $-1, 0, 1$ et on a donc $h = -1$. Ses résolutions sont données par 6.7, avec $n_1 = n_2 = 1$ et $n_3 = n_4 = 2$.

Proposition 6.14. (Le type 2).
La courbe minimale C associée au module $M = R/(X, Y, Z^2, ZT, T^3)$ est, à déformation près, la réunion disjointe de la droite C_1 d'idéal gradué $I_1 = (X, Y)$ et de la courbe C_2 de degré 4 et genre 1, d'idéal gradué $I_2 = (Z^2, ZT, T^3)$ (attention, C_2 est ACM mais n'est pas l'intersection complète de deux quadriques). La courbe C est de degré 5 et genre 0 et on a $h = 0$. On a la résolution de type N de I_C :

$$P = R(-2) \oplus R(-3) \oplus R(-4),$$

$$0 \to N \to R(-1)^2 \oplus R(-2)^2 \oplus R(-3) \to R \to M \to 0,$$

et celle de type E :

$$0 \to R(-5) \oplus R(-6) \to R(-4)^4 \oplus R(-5)^3 \to R(-3)^4 \oplus R(-4)^2 \to I_C \to 0,$$

de sorte que l'on a $s_0 = 3$.

Démonstration. Soit C la réunion des courbes C_1 et C_2. En vertu de I 3.5, le module de Rao de C est égal à M. De plus, on obtient une résolution de M par le procédé décrit en II 7.8 à partir des résolutions des idéaux I_1 et I_2. La résolution de I_1 est évidente et celle de I_2 est la suivante :

$$0 \to R(-3) \oplus R(-4) \xrightarrow{\alpha_2} R(-2)^2 \oplus R(-3) \xrightarrow{\pi_2} I_2 \to 0$$

$$\text{avec} \qquad \pi_2 = (Z^2, ZT, T^3) \qquad \text{et} \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} T & -Z & 0 \\ 0 & -T^2 & Z \end{pmatrix}$$

et on en déduit la résolution de M :

$$\cdots \to R(-2) \oplus R(-3)^5 \oplus R(-4)^3 \xrightarrow{u} R(-1)^2 \oplus R(-2)^2 \oplus R(-3) \to R \to M \to 0.$$

De plus, II 7.8 donne explicitement la matrice de u :

$$u = \begin{pmatrix} Y & Z^2 & ZT & 0 & 0 & 0 & T^3 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z^2 & ZT & 0 & 0 & T^3 & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y & 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z & 0 & 0 & -T^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & -Y & Z \end{pmatrix}$$

Il faut maintenant calculer les invariants associés à cette matrice (cf. 6.4). Il est clair que l'on a $a_0 = 3$, donc $q(2) = 1$. Ensuite, on a $\alpha_3 = \beta_3 = 3$. En effet, dans la matrice précédente on extrait les six premières colonnes qui correspondent aux termes $R(-2)$ ou $R(-3)$. On voit aussitôt qu'il existe deux mineurs 3×3 sans facteurs communs (égaux à $-X^3$ et Y^3 par exemple) puis on vérifie que le rang de cette matrice est 3. Comme les trois premières colonnes sont indépendantes, il suffit de vérifier la nullité des 3 mineurs 4×4 qui les contiennent, ce qui n'offre pas de difficulté.

On en déduit la fonction q : $q(2) = q(3) = q(4) = 1$, qui donne un décalage nul, donc la courbe C est minimale et ses résolutions sont données par II 7 ou par 4.1.

Remarque 6.15. Si C est une courbe minimale associée au module M on a $h^0\mathcal{J}_C(3) = 4$, mais toutes les surfaces cubiques contenant C sont réductibles. En effet, sinon, comme on a $h^1\mathcal{O}_C(0) = 1$, on pourrait bilier C par $(3, -1)$ (cf. III 2.7.b), ce qui contredirait la minimalité de C.

Proposition 6.16. (Le type 4).
La courbe minimale associée au module M^* (avec $M = R/(X, Y, Z^2, ZT, T^3)$) est une courbe Γ de degré 7 et genre 3, liée à une courbe du type précédent par 3×4. Son module de Rao est en degrés $1, 2, 3$ et on a $s_0 = 3$.

Démonstration. Cela résulte de 5.10 et des calculs faits ci-dessus dans la preuve de 6.14 (on vérifie en effet que l'on a $a_1 = 4$).

Nous passons maintenant aux cas des modules décomposés. Le lemme suivant va nous permettre de faire la plupart des calculs.

Lemme 6.17. *Soit $M = M' \oplus M''$ un R-module somme directe de deux R-modules gradués de longueur finie. Avec les notations de 6.4, on a les formules suivantes :*
1) $a_0 = \inf(a'_0, a''_0)$,
2) $\alpha_a = \alpha'_a + \alpha''_a$,
3) $\beta_a \geq \beta'_a + \beta''_a$.

Démonstration. Cela résulte du fait que la matrice φ (notations de 6.a) est somme directe des matrices correspondantes φ' et φ'', donc que ses mineurs sont des produits de mineurs de φ' et φ''. Un produit de mineurs non nuls est alors non nul ce qui donne l'assertion 2. Par ailleurs si les n'-mineurs de φ' (resp. les n''-mineurs de φ'') n'ont pas de facteur commun il en est de même des $n' + n''$-mineurs de φ ce qui prouve 3). Le point 1) en résulte aisément.

Remarques 6.18.
1) L'exemple suivant montre qu'on peut avoir $\beta_a > \beta'_a + \beta''_a$.

Posons $M' = R/(X, Y^2, Z^2, T^2)$, $M'' = R/(X^2, Y, Z^2, T^2)$ et $M = M' \oplus M''$. La matrice φ' est la suivante (cf. 6.b) :

$$\begin{pmatrix} Y^2 & Z^2 & T^2 & 0 & 0 & 0 \\ -X & 0 & 0 & Z^2 & T^2 & 0 \\ 0 & -X & 0 & -Y^2 & 0 & T^2 \\ 0 & 0 & -X & 0 & -Y^2 & -Z^2 \end{pmatrix}$$

et celle de φ'' s'obtient en changeant X en Y. Le calcul des invariants pour M' et M'' a été fait en 6.b (module associé à une suite régulière), on a $a'_0 = a''_0 = 3$, $\alpha'_3 = \alpha''_3 = 3$ et $\beta'_3 = \beta''_3 = 1$, d'où $q'(3) = q''(3) = q'(4) = q''(4) = 1$. La courbe minimale associée à M' ou M'' vérifie $s_0 = 3$ et son décalage est nul.

On a, pour M, $\alpha(3) = 6 = \alpha'(3) + \alpha''(3)$, mais $\beta(3) = 4 > \beta'(3) + \beta''(3)$. En effet, on a deux mineurs 4×4 sans facteurs communs en prenant un mineur 3×3 de φ' (resp. φ'') égal à X^3 (resp. Y^3) et un mineur 1×1 de φ'' (resp. φ') égal à Z^2 (resp. T^2). On en déduit $q(3) = 4$, $q(4) = 1$ et $h = 2$.

2) Etant données deux courbes C' et C'' de modules de Rao M' et M'', on connaît un procédé, dû à Schwartau, pour leur associer une courbe C de module de Rao $M = M'(-t) \oplus M''(-s)$. On prend pour cela deux surfaces $F \in H^0\mathcal{J}_{C'}(s)$ et $G \in H^0\mathcal{J}_{C''}(t)$ et on pose $I_C = GI_{C'} + FI_{C''}$. On a alors la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-s-t) \to \mathcal{J}_{C'}(-t) \oplus \mathcal{J}_{C''}(-s) \to \mathcal{J}_C \to 0$$

qui donne bien le module de Rao prévu. Si on prend $s = t$, on obtient une courbe de module $M' \oplus M''$ à décalage près, mais l'exemple ci-dessus montre que même si C' et C'' sont minimales C ne l'est pas en général. En effet dans le cas présent, le décalage de la minimale est égal à 2 alors qu'il est au moins égal à $s_0 = 3$ pour la courbe de Schwartau. (Cette question nous a été suggérée par G.Bolondi.)

3) Le même exemple montre aussi que si M' est du type de M'_1 et M'' du type de M''_1, $M' \oplus M''$ n'est pas en général du type de $M'_1 \oplus M''_1$. En effet, ici M' et M'' sont de même type, mais la courbe minimale associée à $M' \oplus M'$ est la courbe de Schwartau (car les 4-mineurs de φ ont tous le facteur commun X dans ce cas). De même dans 6.13 les types 6 et 7 sont distincts bien que leurs facteurs soient de mêmes types.

Nous pouvons maintenant, grâce au lemme 6.17, terminer l'énumération des courbes minimales associées aux modules de $E_{1,2,1}$. Pour les besoins des chapitres ultérieurs nous avons surtout en vue la détermination du décalage

h et du nombre s_0, mais le lecteur attentif pourra facilement retrouver tous les invariants et toutes les résolutions des courbes obtenues. Par ailleurs, nous nous contenterons de quelques indications sur les démonstrations qui sont sans difficulté.

Proposition 6.19. *On reprend les notations de 6.13 et notamment les numéros des types. Dans tous les cas, on donne successivement le début de la résolution de M, la fonction q, le décalage h et l'entier s_0.*
Type 3 :

$$R(-2) \oplus R(-3)^8 \oplus R(-4)^6 \to R(-1)^2 \oplus R(-2)^3 \oplus R(-3)^4 \to R \oplus R(-2) \\ \to M \to 0,$$

$q(2) = 1$, $q(3) = 2$, $q(4) = 3$; $h = 2$; $s_0 = 5$.
Types 5, 6 et 7 :

$$R(-2)^3 \oplus R(-3)^6 \oplus R(-4)^3 \to R(-1)^3 \oplus R(-2)^4 \oplus R(-3) \to R \oplus R(-1) \\ \to M \to 0,$$

$q(2) = 1$, $q(3) = 3$, $q(4) = 1$; $h = 2$; $s_0 = 4$.
Type 8 :

$$R(-2)^3 \oplus R(-3)^9 \oplus R(-4)^6 \to R(-1)^3 \oplus R(-2)^5 \oplus R(-3)^4 \\ \to R \oplus R(-1) \oplus R(-2) \to M \to 0,$$

$q(2) = 1$, $q(3) = 4$, $q(4) = 3$; $h = 4$; $s_0 = 6$.
Type 9 :

$$R(-2)^6 \oplus R(-3)^8 \oplus R(-4) \to R(-1)^4 \oplus R(-2)^7 \to R \oplus R(-1)^2 \to M \to 0,$$

$q(2) = 2, q(3) = 5$; $h = 3$; $s_0 = 5$.
Type 10 :

$$R(-2)^6 \oplus R(-3)^9 \oplus R(-4)^3 \to R(-1)^4 \oplus R(-2)^7 \oplus R(-3) \to R \oplus R(-1)^2 \\ \to M \to 0,$$

$q(2) = 2$, $q(3) = 5$, $q(4) = 1$; $h = 4$; $s_0 = 6$.
Type 11 : C'est le module de Buchsbaum, cf. 6.10 , on a $h = 6$; $s_0 = 8$.

Démonstration. Les résolutions de M s'obtiennent à partir des résolutions des facteurs qui sont bien connues. Pour la plupart on les trouve par Koszul, sauf pour le module $M' = R/(X, Y, Z^2, ZT, T^2)$ qui s'obtient par II 7.8 en voyant ce module comme celui de la réunion C' de la droite d'équations $X = Y = 0$ et de la "cubique gauche" $Z^2 = ZT = T^2 = 0$. La résolution de son dual en résulte immédiatement par II 2. Les courbes minimales correspondant aux modules facteurs sont le plus souvent connues par 6.7. Pour le module M' ci-dessus, la courbe minimale est C' (car on a $s_0 > e + 3$, cf. 4.7). Pour son dual, la courbe minimale est la courbe de degré 5 et genre 0 liée à C' par 3×3 (cf. 5.10). On précise alors les fonctions α et β grâce à 6.13 à partir de celles des modules facteurs. Dans de nombreux cas le calcul est facilité par le fait que tous les degrés des facteurs intervenant dans M' et M'' sont distincts. On remarquera l'identité numérique des courbes de types 5,6 et 7.

V L'IMAGE DES INVARIANTS

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre entièrement le problème A de l'introduction pour le couple d'invariants (M, γ) . Rappelons déjà que si M est un R-module gradué de longueur finie on sait par le théorème de Rao (cf. III 1.6.) qu'il existe une courbe C lisse et connexe et un entier h tels que l'on ait $M_C \simeq M(h)$. Tous les modules étant ainsi atteints, nous allons préciser quels sont les décalages h et les caractères γ possibles pour M donné.

1. Le cas des courbes ACM.

Dans ce cas on a $M = 0$ et $\gamma = -\sigma$.

Définition 1.1. *Soit γ un caractère.*
1) On dit que γ est **admissible** *s'il vérifie les conditions suivantes :*
a) $\gamma(n) = 0$ pour $n < 0$.
b) $\gamma(0) = -1$.
c) Si $s_0 = s_0(\gamma) = \inf\{ n \in \mathbf{N} \mid \gamma(n) \neq -1 \}$, on a $\gamma(s_0) \geq 0$.
2) On dit que γ est **positif** *s'il est admissible et si, de plus, on a $\gamma(n) \geq 0$ pour $n \geq s_0$.*

Remarque 1.2. Si C est une courbe, le caractère γ_C est admissible.

Théorème 1.3. *1) Soit C une courbe ACM . Son caractère γ_C est positif.*
2) Réciproquement, soit γ un caractère positif, il existe une courbe ACM, C, telle que $\gamma_C = \gamma$.

Démonstration. Le point 1) a été vu en I 2.11.

Pour 2) on raisonne par récurrence sur $|\gamma| = \sum_{\gamma(n) \geq 0} \gamma(n)$. Si $|\gamma| = 1$, on a $\gamma(0) = -1$; il existe un unique entier s tel que $\gamma(s) = 1$ et les autres termes sont nuls. Le caractère γ est celui d'une courbe plane de degré s. Supposons l'assertion 2) démontrée pour $|\gamma| \leq n$ et soit γ positif tel que $|\gamma| = n + 1$. Soit n_0 tel que $\gamma(n_0) > 0$. On définit un caractère positif γ' par $\gamma'(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma'(n-1) = \gamma(n)$ pour $n \geq 1, n \neq n_0$, et $\gamma'(n_0 - 1) = \gamma(n_0) - 1 \geq 0$. On a alors $|\gamma'| = n$, donc $\gamma' = \gamma_{C'}$ où C' est ACM. De plus, on a $\gamma'(n_0 - 1) \geq 0$, donc $s_0(C') \leq n_0 - 1$. Si C est une courbe biliée à C' par $(n_0, +1)$, on a $\gamma = \gamma_C$ en vertu de III 3.4.

Remarques 1.4.

1) Dans le cas des courbes ACM lisses et connexes (ou simplement intègres) le même théorème est vrai en remplaçant l'hypothèse γ positif par γ connexe (cf. I 2.10), c'est le théorème de Gruson-Peskine ([GP1] 2.2 et 2.5).

2) Le premier théorème d'existence de ce type était essentiellement dans [PS] (6.1 et 6.2). Dans ce cas l'hypothèse faite sur la résolution ($n_j > d_i$) s'exprime sur le caractère en disant qu'il est positif et d'abord croissant, puis décroissant. Cela implique la connexité de γ mais la réciproque est fausse.

3) Toutes les démonstrations d'existence évoquées ci-dessus se font par récurrence ascendante, par liaison pour [PS], par biliaison pour [GP1] et 1.3 ci-dessus. Pour la partie "condition nécessaire" une preuve naturelle par récurrence semble aussi possible, mais on manque d'un théorème de biliaison descendante convenable.

2. Le cas général.

Définition 2.1. *Soient γ, γ' deux caractères admissibles. Posons $s_0 = s_0(\gamma)$ et $s'_0 = s_0(\gamma')$. On dit que γ'* **majore** *γ et on écrit $\gamma' \geq \gamma$ si on a les propriétés suivantes :*
1) $s_0 \leq s'_0$,
2) il existe un entier $h \geq 0$ tel que :
a) $\gamma'(n) \geq \gamma(n-h)$ pour $n \geq s_0 + h$, (et donc $\gamma'(s_0+h) \geq \gamma(s_0) \geq 0$, de sorte que l'on a $s'_0 \leq s_0 + h$),
b) $\gamma'(n) \geq 0$ pour $s'_0 \leq n \leq s_0 + h$.
On dit alors que γ' majore γ de la hauteur h.

Remarques 2.2.
1) Si on a $s'_0 = s_0 + h$ la condition b) est automatique ; sinon, il suffit de la vérifier pour $s'_0 < n < s_0 + h$.

2) Attention, la hauteur de majoration h n'est pas en général unique, par exemple, si les valeurs des caractères γ et γ' pour les entiers positifs ou nuls sont les suivantes : $\gamma = -1, -1, 3, -1, 0, \ldots$, $\gamma' = -1, -1, -1, -1, -1, -1, 3, 3, 0, \ldots$, γ' majore γ des hauteurs $h = 4$ ou $h = 5$.

Proposition 2.3. *La relation $\geq$ est une relation d'ordre sur l'ensemble des caractères admissibles.*

Démonstration. Il est clair que la relation est réflexive. Supposons qu'on ait $\gamma \leq \gamma'$ et $\gamma' \leq \gamma$ avec les hauteurs respectives h, h'. On a déjà $s_0 = s'_0$ (avec les notations de 2.1). Soit n_0 (resp. n'_0) le plus grand entier n tel que $\gamma(n) > 0$ (resp. $\gamma'(n) > 0$). On a $\gamma'(n_0 + h) \geq \gamma(n_0) > 0$ d'où $n'_0 \geq n_0 + h$ (resp. $n_0 \geq n'_0 + h'$). On en déduit $h = h' = 0$ d'où aussitôt $\gamma = \gamma'$ et la relation est antisymétrique.

Supposons maintenant qu'on ait $\gamma \leq \gamma' \leq \gamma''$. On a $s_0 \leq s'_0 \leq s''_0$. D'autre part, on a $s'_0 \leq s_0 + h$. Posons $h'' = h + h'$. Soit $n \geq s_0 + h'' \geq s'_0 + h'$, on a par hypothèse $\gamma''(n) \geq \gamma'(n-h') \geq \gamma(n-h-h') = \gamma(n-h'')$ d'où la condition 2.a. Enfin, si on a $s''_0 \leq n < s_0 + h + h'$, ou bien on a $s''_0 \leq n < s'_0 + h'$ et alors

$\gamma''(n) \geq 0$ (condition $\gamma'' \geq \gamma'$), ou bien on a $s'_0 + h' \leq n < s_0 + h + h'$ et alors $\gamma''(n) \geq \gamma'(n - h') \geq 0$ (condition $\gamma' \geq \gamma$). La relation $\leq$ est donc transitive.

Proposition 2.4. *Soit C' une courbe obtenue à partir de C par une suite de biliaisons élémentaires ascendantes, et soit h l'entier ≥ 0 tel que l'on ait $M_{C'} = M_C(-h)$. Alors $\gamma_{C'}$ majore γ_C de la hauteur h.*

Démonstration. Il suffit de prouver l'assertion pour une biliaison élémentaire et même (cf. III 3.1) pour une biliaison élémentaire de hauteur 1. On a alors par III 3.6 :

$$s'_0 = \begin{cases} s_0, & \text{si } s = s_0 \text{ ;} \\ s_0 + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

d'où la condition 1) de 2.1. On a aussi par III 3.4 :

$$\gamma_{C'}(n) = \begin{cases} \gamma_C(n-1) + 1, & \text{si } n = s \text{ ;} \\ \gamma_C(n-1) - 1, & \text{si } n = 0 \text{ ;} \\ \gamma_C(n-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $s \geq s_0$. Pour la condition 2), on prend donc $h = 1$, la partie a) est claire, la partie b) aussi grâce à 2.2.1.

Théorème 2.5. *Soit M un R-module gradué de longueur finie, $M \neq 0$. Soit C la courbe minimale associée à M et γ son caractère de postulation.*
1) Si C' est une courbe de la classe de biliaison définie par M, on a $\gamma_{C'} \geq \gamma$.
2) Réciproquement, si γ' est un caractère admissible qui majore γ, il existe une courbe C' de la classe de M telle que $\gamma_{C'} = \gamma'$.

Démonstration.

1) C'est immédiat avec IV 5.1 et 2.4.

2) On raisonne par récurrence sur la quantité

$$|\gamma' - \gamma| = \sum_{n=s'_0}^{s_0+h-1} (1 + \gamma'(n)) + \sum_{n \geq s_0+h} (\gamma'(n) - \gamma(n-h)).$$

Il est clair que l'on a $|\gamma' - \gamma| \geq 0$ et, si $|\gamma' - \gamma| = 0$, on a $s'_0 = s_0 + h$ et $\gamma'(n) = \gamma(n - h)$ pour $n \geq s_0 + h$, donc aussi pour $n \geq h$. On a alors :

$$\sum_{n \geq 0} \gamma'(n) = 0 = -h + \sum_{n \geq h} \gamma'(n) = -h + \sum_{n \geq 0} \gamma(n) = -h$$

donc $h = 0$ et $\gamma' = \gamma$ est atteint pour $C' = C$.

Supposons l'assertion prouvée pour $|\gamma' - \gamma| \leq N$ et passons à $N+1$. Deux cas peuvent se produire.

1) Supposons que l'on ait $s'_0 < s_0 + h$. Comme $s_0 \leq s'_0$, ceci impose $h \geq 1$. On définit le caractère γ'' comme suit : $\gamma''(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma''(n-1) = \gamma'(n)$ pour $n \geq 1$, $n \neq s'_0$, $\gamma''(s'_0 - 1) = \gamma'(s'_0) - 1$. On vérifie que γ'' est admissible: on a $\gamma''(n) = 0$ pour $n < 0$ et $\gamma''(0) = \gamma'(1) = -1$ car $s'_0 \geq s_0 > 1$, sinon C serait plane, donc ACM et on aurait $M = 0$. La valeur de $s''_0 = s_0(\gamma'')$ est égale à $s'_0 - 1$ si $\gamma'(s'_0) \geq 1$, à s'_0 si $\gamma'(s'_0) = 0$. On vérifie que $\gamma''(s''_0) \geq 0$ (dans le premier cas c'est clair, dans le second on a $\gamma'(s'_0 + 1) \geq 0$, soit par la condition b) de 2.1, soit par la condition a) si $s'_0 + 1 = s_0 + h$ car $\gamma(s_0) \geq 0$).

On vérifie ensuite que l'on a $\gamma'' \geq \gamma$. Déjà, on a $s''_0 \geq s_0$. C'est clair si $s''_0 = s'_0$. Si $s''_0 = s'_0 - 1$, c'est que $\gamma'(s'_0) \geq 1$. Si on avait alors $s_0 = s'_0$, on aurait :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} \gamma'(n) &= -s_0 + \sum_{n=s_0}^{s_0+h-1} \gamma'(n) + \sum_{n\geq s_0+h} \gamma'(n),\\ &\geq -s_0 + \sum_{n\geq s_0} \gamma(n) + \sum_{n=s_0}^{s_0+h-1} \gamma'(n) = \sum_{n=s_0}^{s_0+h-1} \gamma'(n) \geq \gamma'(s_0) \geq 1,\end{aligned}$$

ce qui contredit $\sum_{n\geq 0} \gamma'(n) = 0$.

On vérifie alors la condition 2) avec $h - 1$.

Pour a) on a, si $n \geq s_0 + h - 1$, $\gamma''(n) = \gamma'(n+1) \geq \gamma(n+1-h)$ (car $n \neq s'_0 - 1$). Pour b), si $s''_0 \leq n < s_0 + h - 1$ on a $\gamma''(n) = \gamma'(n+1) \geq 0$ sauf si $n = s'_0 - 1 = s''_0$, auquel cas on a vu que $\gamma''(s''_0)$ est positif ou nul. On en conclut que γ'' est un caractère admissible qui majore γ et vérifie $|\gamma'' - \gamma| = |\gamma' - \gamma| - 1$. D'après l'hypothèse de récurrence il existe une courbe C'' de la classe de M telle que $\gamma_{C''} = \gamma''$. Si C' est biliée à C'' par $(s'_0, 1)$, on a alors $\gamma_{C'} = \gamma'$.

2) Supposons maintenant que l'on ait $s'_0 = s_0 + h$. Comme $\gamma \neq \gamma'$ on a alors $h > 0$. Comme on a $|\gamma' - \gamma| > 0$, il existe $n_0 \geq s_0 + h$ tel que $\gamma'(n_0) > \gamma(n_0 - h)$. On définit alors le caractère γ'' par les formules : $\gamma''(n) = 0$ pour $n < 0$, $\gamma''(n-1) = \gamma'(n)$ pour $n \geq 1$, $n \neq n_0$, $\gamma''(n_0 - 1) = \gamma'(n_0) - 1$.

On vérifie que γ'' est admissible comme dans le cas 1), et qu'on a $s''_0 = s'_0 - 1$ dans tous les cas (c'est clair si $n_0 > s'_0$, si $n_0 = s'_0$ cela vient de $\gamma'(n_0) > \gamma(n_0 - h) = \gamma(s_0)$).

Montrons la relation $\gamma'' \geq \gamma$.

On a déjà $s''_0 = s'_0 - 1 = s_0 + h - 1 \geq s_0$ car $h \geq 1$. Montrons la condition 2) avec $h - 1$. Si $n \geq s_0 + h - 1$ on a $\gamma''(n) = \gamma'(n+1) \geq \gamma(n+1-h)$ si $n \neq n_0 - 1$. Pour $n = n_0 - 1$ on a $\gamma''(n_0 - 1) = \gamma'(n_0) - 1 \geq \gamma(n_0 - h)$ par hypothèse. Enfin, comme $s''_0 = s_0 + h - 1$, la condition b) est vide.

On a donc un caractère admissible γ'' avec $\gamma'' \geq \gamma$ et $|\gamma'' - \gamma| < |\gamma' - \gamma|$ donc, par l'hypothèse de récurrence, il existe une courbe C'' de la classe de M telle que $\gamma'' = \gamma_{C''}$. Si C' est liée à C'' par $(n_0, 1)$, on a $\gamma' = \gamma_{C'}$.

Remarques 2.6.

a) La démonstration précédente montre plus précisément que si γ' majore γ de la hauteur h on obtient une courbe de la classe de caractère γ' en effectuant à partir de la courbe minimale C h biliaisons élémentaires successives de hauteur 1.

b) Si dans 2.1 on appelle γ_h le caractère translaté de γ ($\gamma_h(n) = \gamma(n+h)$), on constate que la relation $\gamma' \geq \gamma$ implique que $\gamma' - \gamma_{-h}$ est un caractère positif, mais la réciproque est fausse. Ainsi, si γ est le caractère de la réunion de deux droites (cf. 2.2) et si γ' est donné par : $\gamma'(0) = \gamma'(1) = -1, \gamma'(2) = 0, \gamma'(3) = -1, \gamma'(4) = 4, \gamma'(5) = -1$ la différence $\gamma' - \gamma_{-2}$ est positive, mais γ' n'est pas le caractère d'une courbe de la classe.

Le fait que $\gamma' - \gamma_{-h}$ est positif est essentiellement la traduction de IV 3.1 (cf. II 5.2).

c) Même si la courbe minimale C est lisse il n'est pas évident de préciser à quelle condition sur γ' il existe une courbe lisse C' de caractère γ'.

d) On a vu (cf. 2.2) que l'entier h qui intervient dans la définition de la relation d'ordre n'est pas, a priori, unique. On en déduit un exemple de deux courbes C, C' qui ont même caractère de postulation, qui sont dans la même classe de biliaison, mais pas à la même hauteur, donc n'ont pas même cohomologie : on part de la réunion disjointe C_0 de deux droites, de caractère γ_0, de module de Rao M_0 et on considère le caractère γ qui majore γ_0 vu en 2.2. Pour vérifier que γ majore γ_0, on peut prendre $h = 4$ ou $h = 5$. On construit alors facilement par biliaison, en suivant l'algorithme de la démonstration de 2.5, deux courbes C, C' telles que $\gamma_C = \gamma_{C'} = \gamma$, mais, $M_C = M_0(-4)$ et $M_{C'} = M_0(-5)$. On obtient les résolutions :

$$0 \to R(-8) \to R(-8)^4 \oplus R(-7)^4 \to R(-7)^4 \oplus R(-6)^4 \to I_C \to 0,$$

$$0 \to R(-9) \to R(-9) \oplus R(-8)^4 \to R(-8) \oplus R(-6)^4 \to I_{C'} \to 0.$$

e) Bien entendu, la formule $\sigma_C = \partial^3 \rho_C - \gamma_C$ montre que le problème A est aussi résolu, par 2.5, pour le couple (M, σ), mais la traduction de la relation d'ordre 2.1 en termes du caractère σ_C n'est pas très agréable.

2.7 Application aux courbes de rang maximum.

On a vu en III 3.7 que pour que la classe de biliaison associée à M contienne des courbes de rang maximum il faut que la courbe minimale soit elle-même de rang maximum, i.e., qu'on ait $r_o(C) < s_0(C)$. On a alors forcément $r_o(C) = s_0(C) - 1$ ou $s_0(C) - 2$ (regarder la résolution de type (E) par exemple). La proposition suivante décrit les caractères des courbes de rang maximum dans la classe de M :

Proposition 2.8. *Soit C une courbe minimale vérifiant $r_o = s_0 - 1$ (resp. $r_o = s_0 - 2$), γ son caractère et soit γ' majorant γ de la hauteur $h > 0$. Alors γ' est le caractère d'une courbe de rang maximum de la classe si et seulement si on a $s'_0 = s_0 + h$ (resp. $s'_0 = s_0 + h$ ou $s_0 + h - 1$).*

Remarque 2.9. On vérifie facilement que si le module M a au plus deux composantes M_0 et M_1 non nulles, la courbe minimale associée est de rang maximum. On retrouve ainsi certaines courbes de [EH].

VI STRATIFICATION DU SCHÉMA DE HILBERT.

Dans ce paragraphe, nous allons construire des sous-schémas du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes de $\mathbf{P}^3$, localement de Cohen-Macaulay, de degré d et genre g : le schéma de Hilbert H_γ (resp. H_ρ, resp. H_σ) des courbes de caractère de postulation γ (resp. de fonction de Rao ρ, resp. de caractère de spécialité σ), puis le schéma de Hilbert $H_{\gamma,\rho}$ des courbes à cohomologie constante (donnée par γ et ρ) et le schéma de Hilbert $H_{\gamma,M}$ des courbes à postulation constante (donnée par γ) et module de Rao localement isomorphe à M. Nous verrons en effet que le foncteur des courbes à cohomologie constante et dont le module de Rao est isomorphe à un R-module gradué fixé M n'est pas en général représentable. Au préalable, nous ferons quelques rappels sur "cohomologie et changement de base", ainsi que sur le passage au quotient par l'action d'un groupe algébrique sur un schéma.

1. Rappels. Cohomologie et changement de base.

Proposition 1.1. *Soient S un schéma de type fini sur k, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur S, et e un entier. Le sous-foncteur F_e de* $\mathrm{Hom}_k(.,S)$ *défini pour tout k-schéma T par :*

$$F_e(T) = \{g \in \mathrm{Hom}_k(T,S) \mid g^*\mathcal{F} \textit{ est localement libre de rang } e\}$$

est représentable par un sous-schéma S_e de S. En particulier si $e = 0$, S_e est un sous-schéma ouvert de S ; si pour tout point s de S, $\mathcal{F}(s) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_S} k(s)$ est de dimension e sur $k(s)$, S_e est un sous-schéma fermé de S qui a même espace sous-jacent.
De plus, les S_e forment une partition de S et un nombre fini seulement de ces schémas sont non vides. (cf. [M2] Lecture 8)

1.2. Soient $f : X \to Y$ un morphisme de schémas, $\mathcal{F}$ un faisceau sur X et $i \in \mathbf{N}$. Pour tout morphisme de schémas $g : Y' \to Y$, on note X' le produit fibré de X et Y' sur Y, $\mathcal{F}'$ l'image réciproque de $\mathcal{F}$ sur X' et $f' : X' \to Y'$ le morphisme correspondant. On dit que le faisceau $R^if_*\mathcal{F}$ commute au changement de base si pour tout morphisme de schémas $g : Y' \to Y$, l'homomorphisme naturel $g^*R^if_*\mathcal{F} \to R^if'_*\mathcal{F}'$ est un isomorphisme. Le problème étant local sur Y, on supposera pour simplifier que Y est affine. On a alors les résultats suivants :

Proposition 1.3. *(Grothendieck, cf. [rH2] III 12) Soient A un anneau noethérien, $f : X \to Y =$ Spec$A$ un morphisme projectif et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et plat sur A. On définit pour tout entier $i \geq 0$ un foncteur de la catégorie des A-modules dans elle-même par $T^i(M) = H^i(X, \mathcal{F} \otimes_A M)$. On*

a alors les propriétés suivantes :
1) Il existe un complexe $L^{\cdot}$ de A-modules libres de type fini, borné supérieurement, tel que l'on ait $T^i(M) = H^i(L^{\cdot} \otimes_A M)$. De plus, si on pose $W^i = \mathrm{Coker}(d^{i-1} : L^{i-1} \to L^i)$, on a les équivalences :
i) T^i est exact,
ii) $R^i f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base et $T^i(A) = H^i(X, \mathcal{F})$ est localement libre sur Y,
iii) W^i et W^{i+1} sont des A-modules localement libres.
Pour $i = 0$, c'est encore équivalent à :
iv) $f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base.
2) Si $R^i f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base, on a l'équivalence :
$R^{i-1} f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base $\Leftrightarrow$ $H^i(X, \mathcal{F})$ est localement libre sur A.
3) Soit y un point de Y. Si l'homomorphisme naturel $H^i(X, \mathcal{F}) \otimes k(y) \to H^i(X_y, \mathcal{F}(y))$ est surjectif, c'est un isomorphisme et $R^i f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base dans un voisinage de y.

Corollaire 1.4. *Si $H^i(X_y, \mathcal{F}(y)) = 0$, $R^i f_* \mathcal{F}$ est nul et commute au changement de base dans un voisinage de y, et dans ce voisinage, $R^{i-1} f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base. C'est vrai en particulier si le support de $\mathcal{F}(y)$ est de dimension inférieure à i.*

Corollaire 1.5. *On a les équivalences :*
i) $R^i f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base et $T^i(A) = H^i(X, \mathcal{F})$ est localement libre de rang e,
ii) $W^i \oplus W^{i+1}$ est localement libre de rang $e + \mathrm{rang}\, L^{i+1}$.

Démonstration. On a une suite exacte (cf. [rH2] III 12) :

$$0 \to T^i(A) \to W^i \to L^{i+1} \to W^{i+1} \to 0$$

donc on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}\, T^i(A) &= \mathrm{rang}\, W^i + \mathrm{rang}\, W^{i+1} - \mathrm{rang}\, L^{i+1} \\ &= \mathrm{rang}\, (W^i \oplus W^{i+1}) - \mathrm{rang}\, L^{i+1}. \end{aligned}$$

D'après 1.3, les deux propriétés sont équivalentes puisque $W^i \oplus W^{i+1}$ est localement libre si et seulement si W^i et W^{i+1} le sont.

Remarque 1.6. Pour tout point y de Y, on a également une suite exacte (cf. [rH2] III 12) :

$$0 \to H^i(\mathcal{F}(y)) \to W^i \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to L^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to W^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to 0$$

donc on a :

$$\text{rang } (W^i \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)) \oplus (W^{i+1} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y)) = \text{rang } L^{i+1} + h^i\mathcal{F}(y).$$

Corollaire 1.7. *On a les équivalences :*
i) pour tout $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ est localement libre,
i') pour tout $i \geq 1$, $H^i(X, \mathcal{F})$ est localement libre,
ii) pour tout $i \geq 0$, $R^i f_* \mathcal{F}$ commute au changement de base.

Remarque 1.8. Soient B une A-algèbre, $Y' = \text{Spec}B$, $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \otimes_A B$ et X' le produit fibré de X et Y' sur Y. Si M' est un B-module, $H^i(X, \mathcal{F} \otimes_A M') = H^i(X', \mathcal{F}' \otimes_B M')$ est aussi muni d'une structure de B-module, donc le foncteur T^i se prolonge en un foncteur T'^i des B-modules dans les B-modules défini par $T'^i(M') = T^i(M')$ qui n'est autre que le foncteur associé à $\mathcal{F}'$. On a donc $T'^i(M') = H^i(L^\cdot \otimes_A M') = H^i((L^\cdot \otimes_A B) \otimes_B M')$ et $L^\cdot \otimes_A B$ est le complexe associé à $\mathcal{F}'$. En particulier on a $W'^i = W^i \otimes_A B$.

Proposition 1.9. *Soient Y un schéma noethérien, $f : X \to Y$ un morphisme projectif, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X et plat sur Y, e et i deux entiers ≥ 0. Le sous-foncteur $F_{e,i}$ de $\text{Hom}_k(., Y)$ défini par*

$$F_{e,i}(T) = \{g \in \text{Hom}_k(T, Y) \mid R^i f_{T*}\mathcal{F}_T \textit{ est localement libre de rang } e \\ \textit{et commute au changement de base } \}$$

(où T est un k-schéma, et où f_T et $\mathcal{F}_T$ sont définis par changement de base) est représen-table par un sous-schéma $Y_{e,i}$ de Y. Si de plus, pour tout point y de Y, on a $h^i\mathcal{F}(y) = e$, $Y_{e,i}$ est un sous-schéma fermé de Y qui a même espace sous-jacent. Enfin, si $e = 0$, $Y_{e,i}$ est un sous-schéma ouvert de Y.

Démonstration. C'est une conséquence de 1.1, 1.4, 1.5, et 1.8.

Dans la suite, nous dirons pour simplifier que **la propriété "$R^i f_* \mathcal{F}$ est localement libre de rang e et commute au changement de base" est représentable par le sous-schéma $Y_{e,i}$ de Y.**

Corollaire 1.10. *Soient Y un schéma noethérien, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathbf{P}^3 \times Y$ et plat sur Y, i un entier ≥ 0, $\underline{e} = (e_n)$ une suite d'entiers ≥ 0. Supposons que pour tout n sauf un nombre fini et pour tout point y de Y, on ait $h^i\mathcal{F}(y)(n) = e_n$. La propriété "pour tout n, $R^i f_* \mathcal{F}(n)$ est localement libre de rang e_n et commute au changement de base" est représentable par un sous-schéma $Y_{\underline{e},i}$ de Y.*

Démonstration. Le sous-schéma cherché est l'intersection d'un nombre fini de sous-schémas et d'une famille dénombrable de sous-schémas fermés ayant même espace sous-jacent.

2. Rappels. Action d'un groupe algébrique sur un schéma.

Proposition 2.1. *Soient G un groupe algébrique de type fini sur k, X' un fibré principal homogène localement trivial sous G, X le quotient. Si Y' est un sous-schéma de X' stable par G, c'est aussi un fibré principal homogène localement trivial et le quotient Y est un sous-schéma de X.*

Démonstration. Puisque les propriétés sont locales sur X, on peut supposer que $X' = G \times X$ et que l'action de G est triviale. Soient $e_X : X \to G \times X$ la section unité et $Y = e_X^{-1}(Y')$. Montrons que le plongement de $G \times Y$ dans $G \times X$ est un G-isomorphisme de $G \times Y$ avec Y'. Soient S un schéma, $g \in G(S) = \mathrm{Hom}(S, G)$, $u \in X(S) = \mathrm{Hom}(S, X)$. On a : $g \cdot (e_X u) = (g, u)$. On a donc les équivalences :

$$(g,u) \in Y'(S) \Leftrightarrow g \cdot (e_X u) \in Y'(S) \Leftrightarrow e_X u \in Y'(S) \Leftrightarrow u \in Y(s),$$

d'où le résultat.

Proposition 2.2. *Soient G un groupe algébrique de type fini sur k, lisse, opérant sur un schéma X, x un point fermé de X. On munit l'orbite V_x (qui est localement fermée dans X) de sa structure de sous-schéma réduit. Si le stabilisateur G_x de x est lisse, l'action de G sur X définit un isomorphisme du quotient G/G_x sur V_x et le morphisme canonique $p : G \to G/G_x$ est lisse et est un fibré principal homogène.*

Démonstration. Soit $\varphi : G \to X$ défini par $\varphi(g) = g \cdot x$. Son image schématique est intègre puisque G l'est, donc n'est autre que V_x. Notons encore $\varphi : G \to V_x$ le morphisme induit. Le quotient G/G_x existe et on peut factoriser φ : il existe un morphisme $u : G/G_x \to V_x$ tel que $\varphi = up$. Les fibres de φ et de p étant égales, les fibres de u sont toutes formées (ensemblistement) d'un seul point. Donc pour tout point fermé x' de V_x, $u^{-1}(x')$ est le spectre d'un anneau artinien local.

D'autre part φ et p sont des morphismes génériquement plats donc plats grâce à l'action de G, dont toutes les fibres géométriques sont isomorphes à G_x donc ils sont lisses. Pour tout point fermé x' de V_x, le morphisme induit par p sur les fibres : $p^{-1}(x') \simeq G_x \to u^{-1}(x')$ est lisse et G_x est réduit, il en est donc de même de $u^{-1}(x')$ qui est le spectre d'un corps. Le morphisme u, quasi-fini, non ramifié et bijectif est alors un isomorphisme d'après le Main-Theorem de Zariski.

3. Construction des schémas de Hilbert à cohomologie constante.

Soient $H_{d,g}$ le schéma de Hilbert des courbes de $\mathbf{P}^3$, localement de Cohen-Macaulay, de degré d et genre g, $\mathcal{J}_C$ le faisceau d'idéaux qui définit la courbe universelle C de $\mathbf{P}^3 \times H_{d,g}$ et π la projection de $\mathbf{P}^3 \times H_{d,g}$ sur $H_{d,g}$. D'après l'étude faite en 1, nous savons que, pour n fixé, la propriété "$R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ est localement libre de rang donné et commute au changement de base" est représentable par un sous-schéma de $H_{d,g}$. Il nous reste à montrer que si on fixe le rang de $R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ pour un nombre fini (suffisamment grand) de valeurs de n, les autres rangs sont déterminés et nous pourrons alors appliquer 1.10.

Remarque 3.1. Puisque les fibres de π sont de dimension 3, $R^3\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ commute au changement de base pour tout n (cf. 1.4). De plus il est localement libre car on a un isomorphisme canonique : $R^3\pi_*\mathcal{J}_C(n) \simeq R^3\pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$. Donc $R^2\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ commute aussi au changement de base.

Remarque 3.2. Soit $u : Y \to H_{d,g}$ un morphisme et $\mathcal{C}_Y$ l'image réciproque de la courbe universelle. Notons f la projection de $\mathbf{P}^3 \times Y$ sur Y. D'après 1.7, on a les équivalences :
i) pour $i = 0, 1, 2$, $R^i f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$ est localement libre,
i') pour $i = 1, 2$, $R^i f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$ est localement libre,
ii) pour $i = 0, 1$, $R^i f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$ commute au changement de base,
iii) $R^1 f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$ commute au changement de base et est localement libre.

Définition 3.3. *Soient γ et σ des caractères, c'est-à-dire des fonctions à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}$ vérifiant $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\gamma(k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\sigma(k) = 0$ (cf. I 1.10) et soit ρ une fonction à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. Soit Y un schéma. Une* **famille de courbes de caractère de postulation** *γ (resp.* **de fonction de Rao** *ρ, resp.* **de caractère de spécialité** *σ) paramétrée par Y est une famille de courbes $\mathcal{C}_Y$ contenue dans $\mathbf{P}^3 \times Y$, plate sur Y, définie par un idéal $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}$ et qui vérifie la condition suivante :*
si f est la projection de $\mathbf{P}^3\times Y$ sur Y, pour tout n, $f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$ (resp. $R^1 f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$, resp. $R^2 f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$) est localement libre de rang $\binom{n+3}{3} + \sum_{k\in\mathbf{Z}}\binom{n-k+2}{2}\gamma(k)$ (resp. $\rho(n)$, resp. $-\sum_{k\in\mathbf{Z}}\binom{k-n-1}{2}\sigma(k)$) et commute au changement de base. Nous dirons aussi que $f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$ (resp. $R^2 f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$) est localement libre de rang donné par γ (resp. σ).

Définition et Proposition 3.4. *On définit ainsi le foncteur H_γ (resp. H_ρ, resp. H_σ) des courbes de caractère de postulation γ (resp. de fonction de Rao ρ, resp. de caractère de spécialité σ), qui sont des sous-foncteurs du schéma de Hilbert H des courbes de $\mathbf{P}^3$, localement de Cohen-Macaulay. De plus, H_ρ est contenu dans la réunion disjointe des H_γ (resp. des H_σ) lorsque γ (resp. σ) varie.*

Démonstration. C'est immédiat vu les équivalences de 3.2.

Remarque 3.5. La condition :"il existe des courbes de $H_{d,g}$ de caractère de postulation γ (resp. de spécialité σ)" détermine au plus un couple d'entiers d, g, puisqu'on a les égalités (cf. I) :

$$d = \sum_{k \in \mathbf{Z}} k\gamma(k) = -\sum_{k \in \mathbf{Z}} k\sigma(k)$$

$$g - 1 = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{(k-1)(k-2)}{2}\gamma(k) = -\sum_{k \in \mathbf{Z}} \frac{(k-1)(k-2)}{2}\sigma(k).$$

Si H_γ (resp. H_σ) est non vide, son image dans H est donc contenue dans un unique $H_{d,g}$. Nous dirons alors que γ (resp. σ) est un caractère de postulation (resp. de spécialité) **effectif** de degré d et genre g.

Lemme 3.6. *Soit $(d, g) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$. Il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que pour toute courbe C correspondant à un point rationnel de $H_{d,g}$, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $i > 0$, on ait $H^i\mathcal{J}_C(n) = 0$.*

Démonstration. Il existe $n_0 \in \mathbf{Z}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pout tout $i > 0$, on ait $R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n) = 0$. (cf. [rH2] III 8.8.) Le résultat est alors une conséquence de 1.3.

Lemme 3.7. *Soient γ un caractère de postulation effectif de degré d et genre g, C une courbe de $H_{d,g}$, et n_0 l'entier défini en 3.6. Si l'égalité :*

$$h^0\mathcal{J}_C(n) = \binom{n+3}{3} + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \binom{n-k+2}{2}\gamma(k)$$

est vraie pour $0 \leq n \leq \sup(n_0, \sup\{k \in \mathbf{Z} \mid \gamma(k) \neq 0\})$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Démonstration. Posons $n_1 = \sup\{k \in \mathbf{Z} \mid \gamma(k) \neq 0\}$. Pour $n \geq n_1$, on a :

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}} \binom{n-k+2}{2}\gamma(k) = -nd - 1 + g = h^1\mathcal{O}_C(n) - h^0\mathcal{O}_C(n)$$

et pour $n \geq n_0$, on a $h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$ et $h^2\mathcal{J}_C(n) = h^1\mathcal{O}_C(n) = 0$, donc on a :

$$h^0\mathcal{J}_C(n) = h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) - h^0\mathcal{O}_C(n).$$

Pour $n \geq \sup(n_0, n_1)$, on a donc l'égalité cherchée.

Pour $n < 0$, les deux membres de l'égalité sont nuls puisque γ est un caractère de postulation effectif.

Lemme 3.8. *Soient σ un caractère de spécialité effectif de degré d et genre g, C une courbe de $H_{d,g}$ et n_0 l'entier défini en 3.6. Si l'égalité*

$$h^2\mathcal{J}_C(n) = -\sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{k-n-1}{2}\sigma(k)$$

est vraie pour $\inf\{k \in \mathbf{Z} \mid \sigma(k) \neq 0\} \leq n \leq n_0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Démonstration.
Elle est analogue à celle de 3.7. On pose $n_2 = \inf\{k \in \mathbf{Z} \mid \sigma(k) \neq 0\}$ et on remarque que pour $n \leq n_2$, on a :

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{k-n-1}{2}\sigma(k) = nd+1-g = h^0\mathcal{O}_C(n) - h^2\mathcal{J}_C(n),$$

donc dans ce cas l'égalité à vérifier est équivalente à $h^0\mathcal{O}_C(n) = 0$. Or la suite des $h^0\mathcal{O}_C(n)$ est croissante et nulle par hypothèse pour $n = n_2$.

D'autre part, puisque σ est un caractère de spécialité effectif, $\sigma(n)$ est nul pour $n \geq n_0+3$, donc les deux membres de l'égalité sont nuls pour $n \geq n_0$.

Proposition 3.9. *Soient γ (resp. σ) un caractère de postulation (resp. de spécialité) effectif de degré d et genre g. Le foncteur H_γ (resp. H_σ) est représentable par un sous-schéma de $H_{d,g}$ appelé* **schéma de Hilbert des courbes de caractère de postulation** *γ (resp.* **de caractère de spécialité** *σ) et noté encore H_γ (resp. H_σ).*

Démonstration. On commence par représenter par un sous-schéma H'_γ de $H_{d,g}$ la propriété : pour $0 \leq n \leq \sup(n_0, \sup\{k \in \mathbf{Z} \mid \gamma(k) \neq 0\})$, $\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ est localement libre de rang $\binom{n+3}{3} + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \binom{n-k+2}{2}\gamma(k)$ et commute au changement de base. D'après 3.7, pour tout point de H'_γ correspondant à une courbe C, les autres valeurs de $h^0\mathcal{J}_C(n)$ sont alors fixées, et on peut appliquer 1.10. La démonstration pour $R^2\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ est analogue.

Proposition 3.10. *Dans H_σ, $R^1\pi_*\mathcal{O}_C(n)$ et $\pi_*\mathcal{O}_C(n)$ commutent au changement de base et sont localement libres.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}$ est de dimension relative 1 au-dessus de $H_{d,g}$, $R^1\pi_*\mathcal{O}_\mathcal{C}(n)$ commute au changement de base pour tout n. De plus il est localement libre car on a un isomorphisme canonique : $R^1\pi_*\mathcal{O}_\mathcal{C}(n) \simeq R^2\pi_*\mathcal{J}_C(n)$. Donc $\pi_*\mathcal{O}_\mathcal{C}(n)$ commute aussi au changement de base, et est localement libre d'après 1.3.

Lemme 3.11. *Soient $(d,g) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{Z}$, C une courbe de $H_{d,g}$ et n_0 l'entier défini en 3.6. Soit ρ une fonction à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. Posons $r_a = \inf\{n \mid \rho(n) \neq 0\}$, $r_o = \sup\{n \mid \rho(n) \neq 0\}$ et supposons qu'on ait $r_o \leq n_0$. Si l'égalité $h^1\mathcal{J}_C(n) = \rho(n)$ est vraie pour $-1 + \inf(r_a, 0) \leq n \leq n_0$, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. Par hypothèse on a les égalités :

$$h^1\mathcal{J}_C(r_a - 1) = \rho(r_a - 1) = 0 \quad \text{et} \quad h^1\mathcal{J}_C(-1) = \rho(-1).$$

Pour $n \leq -1 + \inf(r_a, 0)$, la suite des $h^1\mathcal{J}_C(n) = h^0\mathcal{O}_C(n)$ est croissante. Si elle prend une valeur non nulle, $h^0\mathcal{O}_C(r_a - 1)$ et $h^0\mathcal{O}_C(-1) = h^1\mathcal{J}_C(-1) = \rho(-1)$ sont non nuls. On en déduit que r_a est ≤ -1, mais dans ce cas on a $h^0\mathcal{O}_C(r_a - 1) = h^1\mathcal{J}_C(r_a - 1) = 0$, d'où une contradiction.

Proposition 3.12. *Soit ρ une fonction à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. La propriété "Pour tout n, $R^1\pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(n)$ est localement libre de rang $\rho(n)$ et commute au changement de base" est représentable par un sous-schéma $H_{\rho,d,g}$ de $H_{d,g}$, appelé* **schéma de Hilbert des courbes de fonction de Rao** *ρ,* **de degré** *d* **et genre** *g. Le foncteur H_ρ est représentable par la réunion des $H_{\rho,d,g}$.*

Démonstration. Si cette propriété n'est pas vide, il existe une courbe de $H_{d,g}$ de fonction de Rao ρ, donc on a $r_o \leq n_0$. On termine alors la démonstration comme en 3.9 en utilisant 3.11.

Corollaire 3.13. *Pour tout couple d'entiers d, g, il n'existe qu'un nombre fini de caractères de postulation (resp. de spécialité) effectifs de degré d et de genre g. Il n'existe qu'un nombre fini de fonctions ρ telles que $H_{\rho,d,g}$ soit non vide.*

Démonstration. Par construction, tout point de $H_{d,g}$ (fermé ou non) est dans un et un seul sous-schéma H_γ (resp. H_σ, resp. $H_{\rho,d,g}$) donc il n'y en a qu'un nombre fini et ils forment une stratification de $H_{d,g}$.

Définition 3.14. *Si γ est un caractère de postulation effectif de degré d et de genre g et ρ une fonction à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, on désigne par $H_{\gamma,\rho}$ l'intersection schématique de H_γ et $H_{\rho,d,g}$. Si σ est le caractère de spécialité défini par $\sigma = \partial^3\rho - \gamma$, $H_{\gamma,\rho}$ est aussi l'intersection schématique de H_σ et $H_{\rho,d,g}$, et l'intersection schématique de H_γ et H_σ.*

Remarques 3.15.

a) Dans $H_{\gamma,\rho}$, comme dans H_σ, $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n)$ et $\pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(n)$ commutent au changement de base et sont localement libres.

b) On déduit de 3.4 que $H_{\gamma,\rho}$ est ouvert dans $H_{\rho,d,g}$ et que la famille des $H_{\gamma,\rho}$ forme un recouvrement de $H_{\rho,d,g}$ par des ouverts disjoints.

c) Dans $H_{\gamma,\rho}$, $R^2\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ et $R^1\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ commutent au changement de base, donc $R^2\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ est localement libre (et de rang constant). Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ représente donc la propriété "Pour pour tout $i \in [0,3]$ et pour tout n, $R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ est localement libre de rang donné par γ et ρ". C'est pourquoi on l'appelle **schéma de Hilbert des courbes à cohomologie constante donnée par γ et ρ (ou par $\sigma = \partial^3\rho - \gamma$ et ρ).**

d) Dans le cas où ρ est la fonction nulle, H_ρ est le schéma de Hilbert des courbes ACM et la démonstration de la représentabilité de $H_{\rho,d,g}$ montre en même temps que c'est un ouvert de $H_{d,g}$.

Définition 3.16. *Soit Y un schéma, $\mathcal{C}_Y$ une famille de courbes sur Y à cohomologie constante donnée par γ et ρ, définie dans $\mathbf{P}^3 \times Y$ par un idéal $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}$. Le $R \otimes \mathcal{O}_Y$-module gradué $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_Y} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R^1\pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_Y}(n)$, où π est la projection de $\mathbf{P}^3 \times Y$ sur Y, est appelé* **module de Rao relatif** *de $\mathcal{C}_Y$.*

4. Construction des schémas de Hilbert à cohomologie et module de Rao constants.

Nous nous proposons de construire maintenant un sous-schéma de $H_{\gamma,\rho}$ paramétrant les courbes C dont le module de Rao M_C est isomorphe à un module M donné. Le problème va venir du fait qu'on ne peut pas mettre de bonne structure de k-schéma sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de $R(= k[X,Y,Z,T])$-modules gradués de fonction ρ.

a) Le schéma des structures de module gradué.

Soient ρ une fonction à support fini de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$, r_a et r_o définis comme en 3.11. Pour tout n, on fixe un k-espace vectoriel V_n de dimension $\rho(n)$ et on pose $V_\rho = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} V_n$. On veut classifier les structures de R-module gradué sur V_ρ. Plus précisément, pour tout k-schéma Y, on désigne par $\widehat{E}_\rho(Y)$ l'ensemble des structures de $R \otimes \mathcal{O}_Y$-module gradué sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y$, et par $E_\rho(Y)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de $R \otimes \mathcal{O}_Y$-modules gradués $\mathcal{M} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}_n$ où $\mathcal{M}_n$ est un $\mathcal{O}_Y$-module localement libre de rang $\rho(n)$.

On définit ainsi deux foncteurs E_ρ et $\widehat{E}_\rho$ de la catégorie des k-schémas dans la catégorie des ensembles, et on a évidemment un morphisme fonctoriel $q_E : \widehat{E}_\rho \to E_\rho$. On adoptera aussi parfois la notation $E_{\rho(r_a),\rho(r_a+1),\dots,\rho(r_o)}$ (resp. $\widehat{E}_{\rho(r_a),\rho(r_a+1),\dots,\rho(r_o)}$) à la place de E_ρ (resp. $\widehat{E}_\rho$).

Proposition 4.1. *Le foncteur $\widehat{E}_\rho$ est représentable par un k-schéma de type fini sur lequel opère le groupe $G = \prod_{i\in[r_a,r_o]} GL(V_n)$. Les fibres de q_E sont les orbites des points de $\widehat{E}_\rho$ sous l'action de G.*

Démonstration. Soit R_1 le sous-espace vectoriel des éléments de degré 1 de

R. Se donner une structure de module gradué sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y$ revient à se donner des homomorphismes de $\mathcal{O}_Y$-modules $u_i : R_1 \otimes V_i \otimes \mathcal{O}_Y \to V_{i+1} \otimes \mathcal{O}_Y$ pour $i \in [r_a, r_o - 1]$ avec les conditions de compatibilité :

$$\forall (f, g, \alpha) \in R_1^2 \times V_i, \quad u_{i+1}(g \otimes u_i(f \otimes \alpha)) = u_{i+1}(f \otimes u_i(g \otimes \alpha)).$$

Il revient encore au même de se donner pour tout $i \in [r_a, r_o - 1]$ quatre homomorphismes de $\mathcal{O}_Y$-modules u_i^j ($j \in [1,4]$) : $V_i \otimes \mathcal{O}_Y \to V_{i+1} \otimes \mathcal{O}_Y$ vérifiant les 6 relations : $u_{i+1}^j u_i^{j'} = u_{i+1}^{j'} u_i^j$ (pour $j \neq j'$). Il est immédiat que $\widehat{E}_\rho$ est représentable par le sous-schéma fermé de $\prod_{i \in [r_a, r_o - 1]} \mathrm{Hom}(R_1 \otimes V_i, V_{i+1})$ défini par les conditions de compatibilité.

Le groupe $G = \prod_{i \in [r_a, r_o]} GL(V_i)$ agit sur $\prod_{i \in [r_a, r_o - 1]} \mathrm{Hom}(R_1 \otimes V_i, V_{i+1})$ de la manière suivante : soient

$$(\theta_i)_{i \in [r_a, r_o]} \in G(Y) = \prod_{i \in [r_a, r_o]} \mathrm{Aut} V_i \otimes \mathcal{O}_Y$$

$$\text{et} \qquad (u_i)_{i \in [r_a, r_o - 1]} \in \prod_{i \in [r_a, r_o - 1]} \mathrm{Hom}(R_1 \otimes V_i \otimes \mathcal{O}_Y, V_{i+1} \otimes \mathcal{O}_Y);$$

alors $(\theta_i).(u_i) = (\theta_{i+1} u_i (id_{R_1} \otimes \theta_i)^{-1})$.

Cette action se restreint en une action de G sur $\widehat{E}_\rho$ et il est immédiat que deux structures de module gradué sont isomorphes si et seulement si elles sont conjuguées sous l'action de G.

Soient x un point fermé de $\widehat{E}_\rho$ et M le R-module gradué correspondant. La fibre $q_E^{-1} q_E(x)$ est le sous-foncteur de $\widehat{E}_\rho$ défini par :

$$q_E^{-1} q_E(x)(Y) = \{\text{structures de } R \otimes \mathcal{O}_Y\text{-module gradué sur } V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y, \\ \text{isomorphes à } M \otimes \mathcal{O}_Y\}.$$

D'après ce qui précède, c'est exactement l'orbite de x.

Remarques 4.2.

a) Le schéma en groupes GL_4 opère aussi de manière évidente sur les foncteurs $\widehat{E}_\rho$ et E_ρ, et cette action est compatible avec q_E. Rappelons (cf. I 3.6) que deux modules sont dits de même type si les points correspondants de E_ρ sont conjugués sous $GL_4(k) = GL(R_1) = \mathrm{Aut} R$. Nous dirons que deux structures de module sont de même type si les modules correspondants sont de même type, ou, ce qui revient au même si les points correspondants de $\widehat{E}_\rho$ sont conjugués sous $G \times GL_4(k)$.

b) L'origine (i.e. $u_i^j = 0$ pour tout (i,j)) correspond au module trivial, ou module de Buchsbaum.

c) Le foncteur E_ρ n'est pas un faisceau pour la topologie de Zariski, donc il n'est pas représentable.

d) Ensemblistement, E_ρ est le quotient de $\widehat{E}_\rho$ sous l'action de G. Les exemples suivants montrent qu'en général, ce quotient n'est pas un schéma.

Exemples 4.3.

a) Le cas le plus simple non trivial est celui où l'on a $\rho(0) = \rho(1) = 1$ et $\rho = 0$ ailleurs. Dans ce cas le schéma $\widehat{E}_\rho = \widehat{E}_{1,1}$ n'est autre que $\underline{\mathrm{Hom}}(R_1, k) \simeq \mathbf{A}_k^4$. L'action de GL_4 est l'action habituelle, et il y a deux orbites, l'origine et l'ouvert complémentaire. Il y a donc seulement deux types de modules gradués, celui du module de Buchsbaum et celui du module monogène $k[X,Y,Z,T]/(X^2,Y,Z,T)$. Le groupe $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_m$ agit par homothéties, à droite et à gauche. Les orbites sont des droites épointées sauf celle de l'origine qui est réduite à un point. Sur le complémentaire de l'origine le quotient existe, c'est l'espace projectif $\mathbf{P}^3$, mais il n'y a pas de quotient global.

b) Le premier cas où il y a des relations de compatibilité est celui où l'on a $\rho(0) = \rho(1) = \rho(2) = 1$ et $\rho = 0$ ailleurs. Le schéma $\widehat{E}_\rho = \widehat{E}_{1,1,1}$ est le sous-schéma fermé du schéma $\underline{\mathrm{Hom}}(R_1, k) \times \underline{\mathrm{Hom}}(R_1, k)$ formé des (u_0, u_1) tels que

$$\forall (f,g) \in R_1^2, \quad u_1(g)u_0(f) = u_1(f)u_0(g).$$

Si u_i est défini par une matrice (a_i, b_i, c_i, d_i) (pour $i = 0, 1$), ces relations s'expriment encore par la nullité des 2-mineurs de : $\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{pmatrix}$. On obtient donc une variété déterminantielle, intersection de 6 quadriques dans $\mathbf{A}_k^8$. On vérifie immédiatement que $\widehat{E}_{1,1,1}$ est irréductible, de dimension 5 et lisse en-dehors de l'origine. D'autre part, il y a quatre orbites pour l'action de $G \times GL_4$, donc quatre types :

– les modules monogènes, du type de $k[X,Y,Z,T]/(X^3,Y,Z,T)$, qui forment une orbite ouverte ;

– les modules scindés, du type $k[X,Y,Z,T]/(X^2,Y,Z,T) \oplus k(-2)$, qui forment une orbite de dimension 4 ;

– les modules scindés, du type $k \oplus k[X,Y,Z,T]/(X^2,Y,Z,T)(-1)$, qui forment une orbite de dimension 4, duale de la précédente ;

– le module de Buchsbaum.

c) Le schéma $\widehat{E}_\rho$ n'est pas toujours irréductible (cf. [BB]). Dans le cas où l'on a $\rho(0) = \rho(1) = 1$, $\rho(2) = 2$ et $\rho = 0$ ailleurs, $\widehat{E}_{1,1,2}$ est formé des couples $(u_0 : R_1 \to k, u_1 : R_1 \to \mathrm{Hom}(k^2, k))$ qui vérifient les 6 conditions de compatibilité décrites plus haut. Si on note

$$u_0 = (a,b,c,d) \quad u_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

$\widehat{E}_{1,1,2}$ est défini dans $\mathbf{A}_k^{12} = \operatorname{Spec} k[a, \dots, \delta']$ par l'idéal I engendré par les 2-mineurs de la matrice formée par la première et la deuxième ligne de A et ceux de la matrice formée par la première et la troisième ligne de A. De l'égalité $I = (a, b, c, d) \cap \Delta_2$, où Δ_2 est l'idéal des 2-mineurs de A, on déduit que $\widehat{E}_{1,1,2}$ a deux composantes irréductibles, toutes deux formées de modules décomposés en somme directe $M = M_1 \oplus M_2$:

– la première, définie par l'idéal Δ_2, correspond au cas où M_1 est un module de $\widehat{E}_{1,1,1}$ et M_2 un module de Buchsbaum concentré en degré 2 ; c'est une composante irréductible de dimension 6 ;

– la deuxième, définie par l'idéal (a, b, c, d), correspond au cas où M_1 est un module de Buchsbaum concentré en degré 0 et M_2 un module de $\widehat{E}_{1,2}$ translaté d'un pas vers la droite; c'est une composante irréductible isomorphe à $\widehat{E}_{1,2} \simeq \underline{\operatorname{Hom}}(R_1, k^2) \simeq \mathbf{A}_k^8$ et de dimension 8 ;

– l'intersection des deux composantes est formée de modules décomposés en somme directe $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$, où M_1 (resp. M_3) est un module de Buchsbaum concentré en degré 0 (resp. 2) et où M_3 est un module de $\widehat{E}_{1,1}$ translaté d'un pas vers la droite ; elle est définie par l'idéal des 2-mineurs de u_1, donc est irréductible de dimension 5.

d) Etude de $\widehat{E}_{1,2,1}$.

Il est formé des couples $(u_0 : R_1 \to \operatorname{Hom}(k, k^2), u_1 : R_1 \to \operatorname{Hom}(k^2, k))$ qui vérifient les 6 conditions de compatibilité. Si on note $u_0 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{pmatrix}$, $\widehat{E}_{1,2,1}$ est l'intersection dans $\mathbf{A}_k^{16} = \operatorname{Spec} k[a_1, \dots, \delta_2]$ de 6 quadriques. Il en résulte que toute composante irréductible est de dimension au moins 10.

Considérons la projection $p_0 : \widehat{E}_{1,2,1} \to X_0 = \operatorname{Spec} k[a_1, \dots, d_2]$ qui à (u_0, u_1) associe u_0. Elle est compatible avec l'action de GL_4 sur $\widehat{E}_{1,2,1}$ et X_0. Les conditions de compatibilité s'expriment par 6 relations linéaires en $\alpha_1, \dots, \delta_2$, c'est-à-dire une matrice (6,8) à coefficients dans $\mathcal{O}_{X_0}$. On lui associe une suite exacte de $\mathcal{O}_{X_0}$-modules :

$$\mathcal{O}_{X_0}^6 \to \mathcal{O}_{X_0}^8 \to \mathcal{F} \to 0$$

et $\widehat{E}_{1,2,1}$ est le schéma $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ sur X_0.

Soit U_0 l'ouvert de X_0 formé des u_0 de rang 2, qui est stable sous GL_4. Nous allons montrer que pour tout point fermé u_0 de U, la fibre $p_0^{-1}(u_0)$ est de dimension 3. Il en résultera que $\mathcal{F}(u_0) = \mathcal{F} \otimes k(u_0)$ est de rang 3, donc que $\mathcal{F}|_{U_0}$ est localement libre, et que $V_0 = \mathbf{V}(\mathcal{F}|_{U_0})$ est un fibré vectoriel de dimension 11, irréductible et lisse sur U_0.

Quitte à faire agir $GL_4(k)$, on peut supposer qu'on a $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. La fibre $p_0^{-1}(u_0)$ est alors définie par les équations : $\beta_1 = \alpha_2, \gamma_1 = \gamma_2 = \delta_1 = \delta_2 = 0$, donc est de dimension 3.

Pour des raisons de symétrie, si on désigne par V_1 l'ouvert de $\widehat{E}_{1,2,1}$ formé des (u_0, u_1) tels que u_1 soit de rang 2, V_1 est aussi lisse. L'ouvert $V_0 \cup V_1$ est donc irréductible et lisse, de dimension 11.

Soit maintenant un point u_0 de rang ≤ 1 de X_0, donc contenu dans le complémentaire de U_0, qui est un fermé de dimension 5. Quitte à faire agir $GL_4(k)$, on peut supposer qu'on a $u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ou $u_0 = 0$. Dans le premier cas, la fibre $p_0^{-1}(u_0)$ est définie par les équations : $\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 0$, donc est irréductible et de dimension 5. Elle rencontre V_1 en un ouvert non vide, donc la fibre en u_0 du complémentaire de V_1 est de dimension au plus 4. Dans le deuxième cas, la fibre en u_0 du complémentaire de V_1 est de dimension 5. Ceci montre que le complémentaire de $V_0 \cup V_1$ est de dimension au plus 9, et ne peut pas être une composante irréductible de $\widehat{E}_{1,2,1}$, qui est donc irréductible de dimension 11.

Les types ont été décrits en détail en IV 6.13. On a vu qu'il y en a 11 et on a donné un représentant de chaque type. En étudiant les espaces tangents, on montre facilement les résultats suivants :

– l'ouvert de lissité de $\widehat{E}_{1,2,1}$ est formé des points de type 1, 2, 3, 4, 7 ou 9; il est donc plus grand que $V_0 \cup V_1$;

– l'orbite des points de type 5 (resp. 6) est irréductible de dimension 5, et les adhérences de ces orbites sont les deux composantes irréductibles du lieu singulier de $\widehat{E}_{1,2,1}$; leur intersection a aussi deux composantes irréductibles, de dimension 4, qui sont les adhérences des orbites des points de type 8 et 10, et se coupent en l'origine.

b) Le schéma de Hilbert $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$.

Notons encore $\mathcal{C}$ la courbe universelle de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,\rho}$, π la projection de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,\rho}$ sur $H_{\gamma,\rho}$ et $\mathcal{J}_\mathcal{C}$ le faisceau d'idéaux qui définit la courbe $\mathcal{C}$. Par construction, le module de Rao relatif

$$\mathcal{M}_\mathcal{C} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}_n = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R^1 \pi_* \mathcal{J}_\mathcal{C}(n)$$

est un $\mathcal{O}_{H_{\gamma,\rho}}$-module gradué dont la composante de degré n, $\mathcal{M}_n$, est localement libre de rang $\rho(n)$, donc il définit un morphisme de foncteurs Φ de $H_{\gamma,\rho}$ dans E_ρ. Soit M un point (rationnel) de E_ρ. On peut définir le sous-foncteur de

$H_{\gamma,\rho}$ des courbes de module de Rao isomorphe à M comme la fibre $\Phi^{-1}(M)$. Soit Y un schéma. Un élément de $\Phi^{-1}(M)(Y)$ est une famille de courbes $\mathcal{C}_Y$ sur Y à cohomologie constante donnée par γ et ρ, dont le module de Rao relatif est isomorphe à $M \otimes \mathcal{O}_Y$. A priori ce foncteur n'est pas un faisceau pour la topologie de Zariski, donc il n'est pas représentable.

Pour contourner cette difficulté, on va travailler sur un revêtement de $H_{\gamma,\rho}$, puis on "redescendra". On considère le schéma

$$\widehat{H}_{\gamma,\rho} = \prod_{n\in[r_a,r_o]} \underline{\mathrm{Isom}}(V_n \otimes \mathcal{O}_{H_{\gamma,\rho}}, \mathcal{M}_n)$$

le produit étant le produit fibré au-dessus de $H_{\gamma,\rho}$, et on désigne par q_H sa projection canonique sur $H_{\gamma,\rho}$.

Soit Y un schéma. Un élément de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}(Y)$ est une famille de courbes $\mathcal{C}_Y$ sur Y à postulation constante donnée par γ, munie d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules, qui respecte les degrés, de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_Y}$ sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y$. Cet isomorphisme définit une structure de module gradué sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y$.

En particulier sur $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ on a un isomorphisme universel de $q_H^*\mathcal{M}_C$ avec $V_\rho \otimes \mathcal{O}_{\widehat{H}_{\gamma,\rho}}$, donc une structure de module gradué induite sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_{\widehat{H}_{\gamma,\rho}}$ qui correspond à un morphisme $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}_\rho$, et il est immédiat qu'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \widehat{H}_{\gamma,\rho} \arrow[r, "\widehat{\Phi}"] \arrow[d, "q_H"] & \widehat{E}_\rho \arrow[d, "q_E"] \\ H_{\gamma,\rho} \arrow[r, "\Phi"] & E_\rho \end{tikzcd}$$

Le groupe G défini en 4.1 et le groupe GL_4 opèrent de façon évidente sur $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ et $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ est un fibré principal homogène localement trivial sous G au-dessus de $H_{\gamma,\rho}$. Le morphisme $\widehat{\Phi}$ est évidemment compatible avec l'action de G et de GL_4.

c) Le schéma de Hilbert $H_{\gamma,M}$.

Soient x un point fermé de $\widehat{E}_\rho$ et $M = q_E(x)$ le R-module gradué correspondant. On désigne par $\widehat{E}_x$ l'orbite de x sous G, qui est un sous-schéma intègre de $\widehat{E}_\rho$ (cf. la démonstration de 2.2), par $\widehat{H}_{\gamma,M}$ (resp. $\widehat{H}_x$) l'image réciproque par $\widehat{\Phi}$ de x (resp. de $\widehat{E}_x$).

Remarque 4.4. Soit Y un schéma et $\mathcal{C}_Y$ une famille de courbes sur Y, à postulation constante donnée par γ, munie d'un isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-modules respectant les degrés de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_Y}$ sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y$. La structure de module gradué induite sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_Y$ est la structure constante donnée par M si et seulement si l'isomorphisme ci-dessus est un isomorphisme de modules gradués de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_Y}$ sur $M \otimes \mathcal{O}_Y$. Un élément de $\widehat{H}_{\gamma,M}(Y)$ est donc une famille de courbes $\mathcal{C}_Y$ sur Y à postulation constante donnée par γ munie d'un isomorphisme de modules gradués de $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_Y}$ sur $M \otimes \mathcal{O}_Y$. En particulier on a sur $\widehat{H}_{\gamma,M}$ un isomorphisme universel de modules gradués de $q^*\mathcal{M}_\mathcal{C}$ avec $M \otimes \mathcal{O}_{\widehat{H}_{\gamma,M}}$.

Lemme 4.5. *Le sous-schéma $\widehat{H}_x$ de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ est un fibré principal homogène localement trivial sous G, et le quotient est un sous-schéma $H_{\gamma,M}$ de $H_{\gamma,\rho}$.*

Démonstration. Par construction, $\widehat{H}_x$ est stable sous G. On applique alors 2.1 pour l'existence de $H_{\gamma,M}$.

Proposition 4.6. *Le morphisme $q : \widehat{H}_{\gamma,M} \to H_{\gamma,M}$ induit par q_H est lisse et irréductible et toutes ses fibres géométriques sont isomorphes au stabilisateur G_x de x.*

Démonstration. Notons φ le morphisme $G \to \widehat{E}_x$ défini par $\varphi(g) = gx$. On sait qu'on a un isomorphisme : $\widehat{H}_{\gamma,\rho} \times G \simeq \widehat{H}_{\gamma,\rho} \times_{H_{\gamma,\rho}} \widehat{H}_{\gamma,\rho}$ défini par $(\alpha, g) \mapsto (g\alpha, \alpha)$. On vérifie qu'il définit par restriction un isomorphisme de $\widehat{H}_{\gamma,M} \times G$ avec $\widehat{H}_x \times_{H_{\gamma,\rho}} \widehat{H}_{\gamma,M}$.

D'autre part l'homomorphisme : $\widehat{H}_{\gamma,M} \times G \to \widehat{H}_x \times G$ défini par $(\alpha, g) \mapsto (g\alpha, g)$ est un isomorphisme sur $\widehat{H}_x \times_{\widehat{E}_x} G$.

Puisque les images par q_H de $\widehat{H}_x$ et $\widehat{H}_{\gamma,M}$ sont contenues dans $H_{\gamma,M}$, on a l'égalité $\widehat{H}_x \times_{H_{\gamma,\rho}} \widehat{H}_{\gamma,M} = \widehat{H}_x \times_{H_{\gamma,M}} \widehat{H}_{\gamma,M}$ et on obtient finalement un isomorphisme de schémas $\widehat{H}_x \times_{H_{\gamma,M}} \widehat{H}_{\gamma,M} \simeq \widehat{H}_x \times_{\widehat{E}_x} G$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{H}_{\gamma,M} & \leftarrow & \widehat{H}_x \times_{H_{\gamma,M}} \widehat{H}_{\gamma,M} & \simeq & \widehat{H}_x \times_{\widehat{E}_x} G & \to & G \\
\downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\
H_{\gamma,M} & \leftarrow & \widehat{H}_x & = & \widehat{H}_x & \to & \widehat{E}_x
\end{array}$$

où les carrés sont cartésiens et où les deux flèches verticales centrales sont les projections canoniques.

Si φ est lisse et si toutes ses fibres géométriques sont isomorphes au stabilisateur G_x de x, il en est de même par changement de base de la projection de $\widehat{H}_x \times_{H_{\gamma,M}} \widehat{H}_{\gamma,M}$ sur $\widehat{H}_x$, et aussi de q puisque $q_H : \widehat{H}_x \to H_{\gamma,M}$ a localement une section. En vertu de 1.12, il suffit donc de montrer le lemme suivant :

Lemme 4.7. *Le stabilisateur G_x de tout point x est lisse et connexe. C'est le groupe (multiplicatif) des automorphismes de M, et son algèbre de Lie est l'algèbre des endomorphismes de M.*

Démonstration. L'action de $G = \prod_{i\in[r_a,r_o]} GL(V_n)$ sur $\widehat{E}_\rho$ est induite par l'action de G sur $\prod_{i\in[r_a,r_o-1]} \mathrm{Hom}(R_1 \otimes V_i, V_{i+1})$ donc il suffit de montrer que les stabilisateurs pour cette action sont lisses et connexes.

Soient $u_i : R_1 \otimes V_i \to V_{i+1}$ des homomorphismes. Le stabilisateur est le sous-groupe de G formé des $\theta_i : V_i \simeq V_i$ tels que pour tout $i \in [r_a, r_o - 1]$, on ait $\theta_{i+1}u_i = u_{i+1}(id_{R_1} \otimes \theta_i)$. C'est une sous-variété linéaire de G donc c'est évidemment lisse et connexe.

Son algèbre de Lie est la sous-algèbre de $\prod_{i\in[r_a,r_o]} \mathrm{End}(V_n)$ formé des $\alpha_i : V_i \to V_i$ tels que pour tout $i \in [r_a, r_o - 1]$, on ait $\alpha_{i+1}u_i = u_{i+1}(id_{R_1} \otimes \alpha_i)$.

Définition 4.8. *Nous appellerons le schéma $H_{\gamma,M}$* **schéma de Hilbert des courbes à cohomologie et module de Rao constants donnés par γ et M.**

Proposition 4.9. *Le schéma $H_{\gamma,M}$ représente le faisceau pour la topologie de Zariski associé au préfaisceau $\Phi^{-1}(M)$.*

Démonstration. On a vu que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\widehat{\Phi}} & \widehat{E}_\rho \\ \Big\downarrow{\scriptstyle q_H} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q_E} \\ H_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\Phi} & E_\rho \end{array}$$

On en déduit les égalités :

$$q_H^{-1}\Phi^{-1}(M) = \widehat{\Phi}^{-1}q_E^{-1}(M) = \widehat{\Phi}^{-1}\widehat{E}_x = \widehat{H}_x;$$

mais d'autre part on a évidemment $q_H^{-1}H_{\gamma,M} = \widehat{H}_x$. Donc les images réciproques par q_H de $H_{\gamma,M}$ et de $\Phi^{-1}(M)$ sont égales. On en déduit le résultat, compte-tenu du fait que le morphisme q_H admet localement une section, et que $H_{\gamma,M}$ est évidemment un faisceau pour la topologie de Zariski puisqu'il est représentable.

Corollaire 4.10. *Soit Y un schéma. Un élément de $H_{\gamma,M}(Y)$ est une famille de courbes $\mathcal{C}_Y$ sur Y à postulation constante donnée par γ, et dont le module de Rao est, localement sur Y, isomorphe à $M \otimes \mathcal{O}_Y$.*

Remarque 4.11. Dans le cas où la fonction ρ prend une seule valeur non nulle, la seule structure de module gradué possible est un module M de Buchsbaum à un seul terme, le schéma $\widehat{E}_\rho$ est réduit à un point, les schémas $\widehat{H}_{\gamma,M}$ et $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ (resp. $H_{\gamma,M}$ et $H_{\gamma,\rho}$) sont évidemment égaux.

VII PROPRIÉTÉS DU SCHÉMA DE HILBERT DES COURBES A COHOMOLOGIE CONSTANTE

Dans ce paragraphe on fixe un caractère de postulation effectif γ et une fonction à support fini ρ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{N}$. On s'intéresse d'abord aux propriétes d'irréductibilité et de lissité du morphisme $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}_\rho$ défini en VI, ensuite, si M est un point de E_ρ, à l'existence locale, sur $H_{\gamma,\rho}$ ou sur $H_{\gamma,M}$, de résolutions de l'idéal de la famille de courbes universelle. Enfin, on construit des schémas de liaison (resp. biliaison) universelle qui permettent d'étudier les schémas de Hilbert $H_{\gamma,\rho}$ ou $H_{\gamma,M}$ d'une courbe à partir de celui de sa liée (resp. biliée).

1. Etude du morphisme $\widehat{\Phi}$.

Théorème 1.1. *Le morphisme $\widehat{\Phi}$ est irréductible (cf. [B]).*

Démonstration. Soit M un module de fonction ρ. Il faut montrer que le schéma $\widehat{H}_{\gamma,M}$ est irréductible, ou encore, puisque $q : \widehat{H}_{\gamma,M} \to H_{\gamma,M}$ est irréductible, que $H_{\gamma,M}$ l'est.

Le résultat est essentiellement contenu dans [LR]. Soient C et C' deux courbes de $H_{\gamma,M}$, elles ont respectivement les résolutions de type N suivantes :

$$0 \to \mathcal{P} \xrightarrow{\sigma} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L} \to \mathcal{J}_C \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{P}' \xrightarrow{\sigma'} \mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}' \to \mathcal{J}_{C'} \to 0$$

où $\mathcal{N}_0$ est un fibré sur $\mathbf{P}^3$, défini par M, muni d'un isomorphisme : $H^1_*\mathcal{N}_0 \simeq M$, et où $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{P}'$, $\mathcal{L}'$ sont dissociés, cf. [LR] ou II 4.1. Quitte à rajouter des faisceaux inversibles on peut supposer $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$. Comme C et C' ont même postulation, on en déduit $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

Soient $S_0 = \mathrm{Spec}k[t]$ et $\Sigma = (1-t)\sigma + t\sigma'$. On a vu en II 1.3 qu'il existe un ouvert S de S_0 contenant les points $t = 0$ et $t = 1$, qui paramètre une famille irréductible et plate de courbes $\mathcal{C}_S$, contenue dans $\mathbf{P}^3 \times S$, reliant C et C'. Soit $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_S}$ l'idéal qui la définit. On a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{P} \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\Sigma} (\mathcal{N}_0 \oplus \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_S \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}_S} \to 0.$$

Soit f la projection de $\mathbf{P}^3 \times S$ sur S; puisque pour tout n, $R^if_*\mathcal{P} \otimes \mathcal{O}_S(n)$ est nul pour $i = 1, 2$, on en déduit, en prenant la suite exacte de cohomologie associée, que $R^1f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_S}(n)$ est localement libre et commute au changement de base pour tout n dans un voisinage ouvert des points $t = 0$ et $t = 1$. D'après VI 3.2, la restriction de $\mathcal{C}_S$ à cet ouvert définit donc un morphisme de S dans $H_{\gamma,\rho}$; d'autre part, puisqu'on a un isomorphisme de $M \otimes \mathcal{O}_S$ avec le module de Rao relatif de $\mathcal{C}_S$, c'est un morphisme de S dans $H_{\gamma,M}$ donc C et C' sont dans la même composante irréductible de $H_{\gamma,M}$.

Corollaire 1.2. *Les schémas $\widehat{H}_{\gamma,M}$ et $H_{\gamma,M}$ sont irréductibles.*

La démonstration de la lissité du morphisme $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}_\rho$ s'inspire de celle qu'a donnée Ellingsrud dans le cas où $\rho = 0$ (courbes ACM), cf. [E], mais elle nécessite quelques préliminaires.

Lemme 1.3. (une variante de Nakayama). *Soient B un anneau local noethérien de corps résiduel k, $R = k[X,Y,Z,T]$, $R_B = B[X,Y,Z,T]$, M un R_B-module gradué de type fini, $\overline{M} = M \otimes_B k$ la réduction de M sur k. Alors $\overline{M} = 0$ implique $M = 0$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme de Nakayama ordinaire aux composantes homogènes de M qui sont des B-modules de type fini.

Lemme 1.4. *Soient A une k-algèbre noethérienne, $\mathfrak{R}$ un idéal maximal de A de corps résiduel k, $R = k[X,Y,Z,T]$, $R_A = A[X,Y,Z,T]$, M un R_A-module gradué de type fini, plat sur A, $\overline{M} = M \otimes_A k$ la réduction de M modulo $\mathfrak{R}$. On considère une résolution libre graduée de $\overline{M}$:*

$$0 \to \overline{L_n} \xrightarrow{\overline{\sigma_n}} \overline{L_{n-1}} \to \cdots \to \overline{L_1} \xrightarrow{\overline{\sigma_1}} \overline{L_0} \xrightarrow{\overline{\sigma_0}} \overline{M} \to 0$$

où $\overline{L_i}$ est un R-module libre gradué de type fini et où $\overline{\sigma_i}$ est homogène de degré zéro. Alors, il existe un voisinage ouvert affine SpecA' *de $\mathfrak{R}$ dans* Spec$A$, *et une résolution libre graduée :*

$$0 \to L_n \xrightarrow{\sigma_n} L_{n-1} \to \cdots \to L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \otimes_A A' \to 0,$$

qui relève la précédente, avec $L_i = \overline{L_i} \otimes_k A'$ et $\sigma_i \otimes_{A'} k = \overline{\sigma}_i$. De plus, on peut choisir pour σ_0 n'importe quel relèvement de $\overline{\sigma_0}$.

Démonstration. Soit B le localisé de A en $\mathfrak{R}$. La flèche $\overline{\sigma_0}$ est donnée par un nombre fini de générateurs homogènes de $\overline{M}$, qu'on peut relever dans M et qui donnent un homomorphisme $\sigma_0 : \overline{L_0} \otimes_k A \to M$. Il résulte de 1.3 appliqué à Cokerσ_0 que $\sigma_0 \otimes_A B$ est surjectif et, quitte à remplacer Spec$A$ par un voisinage SpecA' de $\mathfrak{R}$, on peut donc supposer que σ_0 est surjectif. D'autre part, vu la platitude de M sur A, on a Ker$\sigma_0 \otimes_A k =$ Ker$\overline{\sigma_0}$.

1) Le cas $n = 0$. Il résulte de 1.3 appliqué à Kerσ_0 que $\sigma_0 \otimes_{A'} B$ est injectif. Alors, quitte à changer de voisinage de $\mathfrak{R}$, on peut supposer que σ_0 est injectif.

2) Le cas général s'en déduit par récurrence en appliquant le cas $n-1$ à Kerσ_0.

On peut alors prouver le théorème principal de ce numéro :

Théorème 1.5. *Le morphisme $\widehat{\Phi}$ est lisse.*

Démonstration. Comme $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ est de type fini sur k, il suffit de montrer que pour toute surjection $f : B' \to B$ de k-algèbres artiniennes locales de corps résiduel k, et pour tout carré commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}B & \xrightarrow{u} & \widehat{H}_{\gamma,\rho} \\ \downarrow & & \downarrow \widehat{\Phi} \\ \mathrm{Spec}B' & \xrightarrow{v} & \widehat{E}_\rho \end{array}$$

où la première flèche verticale provient de f, il existe $u' : \mathrm{Spec}B' \to \widehat{H}_{\gamma,\rho}$ qui relève u et tel que $\widehat{\Phi}u' = v$.

On désigne par $\mathfrak{R}$ (resp. $\mathfrak{R}'$) l'idéal maximal de B (resp. B'), par J le noyau de f. C'est un idéal de B' que l'on peut supposer de carré nul.

Pour tout n, on a fixé un k-espace vectoriel V_n de dimension $\rho(n)$ et on a posé $V_\rho = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} V_n$ (cf. VI). Le morphisme u correspond à une courbe C_B de $\mathbf{P}^3_B$, plate sur B, définie par un idéal $\mathcal{J}_{C_B}$ de cohomologie constante donnée par γ et ρ, et à un isomorphisme de B-modules $\theta = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \theta_n : M_{C_B} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1(\mathbf{P}_B, \mathcal{J}_{C_B}(n)) = H^1_* \mathcal{J}_{C_B} \simeq V_\rho \otimes_k B$.

On désigne par C la réduction de C_B modulo $\mathfrak{R}$, et on pose $R_B = R \otimes_k B$ (resp. $R_{B'} = R \otimes_k B'$), $A_{C_B} = H^0_* \mathcal{O}_{C_B}$ et $I_{C_B} = H^0_* \mathcal{J}_{C_B}$.

Le morphisme v correspond à une structure de $R_{B'}$-module gradué sur $V_\rho \otimes_k B'$ qu'on note M'.

Dire que le diagramme commute signifie que θ est un isomorphisme de R_B-modules gradués de M_{C_B} sur $M' \otimes_{B'} B$. Il nous faut alors construire une courbe $C_{B'}$ qui relève C_B et un isomorphisme de $R_{B'}$-modules gradués $\theta' : M_{C_{B'}} \simeq M'$ qui relève θ.

Lemme 1.6. *L'idéal I_{C_B} (resp. le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_{C_B}$) a une résolution (de type N) de la forme :*

$$0 \to P \otimes_k B \to N' \otimes_{B'} B \to I_{C_B} \to 0$$

$$(\text{resp.} \quad 0 \to \mathcal{P} \otimes_k B \to \mathcal{N}' \otimes_{B'} B \to \mathcal{J}_{C_B} \to 0)$$

où P (resp. $\mathcal{P}$) est un R-module libre gradué (resp. un $\mathcal{O}_\mathbf{P}$-module dissocié de degré d) de rang r, où $\mathcal{N}' = \widetilde{N}'$ est un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}$-module localement libre de rang $r+1$ vérifiant les propriétés suivantes :
i) il existe un isomorphisme $\wedge^{r+1}\mathcal{N}' \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}(d)$;
ii) il existe un isomorphisme $\lambda_0 : M' \simeq H^1_* \mathcal{N}'$;
iii) pour tout n et pour tout i, $H^i\mathcal{N}'(n)$ est libre sur B' et commute au changement de base ; $H^2\mathcal{N}'(n)$ est nul ;

iv) si on identifie M' et $H^1_*\mathcal{N}'$ par λ_0, $(H^1_*\mathcal{N}')\otimes_{B'} B$ et $H^1_*(\mathcal{N}'\otimes_{B'} B)$ par l'isomorphisme naturel de changement de base, la résolution de $\mathcal{J}_{C_B}$ donne, en prenant la cohomologie, un isomorphisme de $M'\otimes_{B'} B$ avec M_{C_B} qui n'est autre que θ^{-1}.

Démonstration. Puisque $H^1\mathcal{J}_{C_B}(n)$ commute au changement de base pour tout n, on a un isomorphisme canonique de R-modules $\lambda : M_{C_B}\otimes_B k \simeq M_C$. Une résolution graduée minimale de M_C :

$$\cdots \to L_1 \xrightarrow{\overline{\sigma_1}} L_0 \xrightarrow{\overline{\sigma_0}} M_C \to 0, \tag{1}$$

donc de $M'\otimes_{B'} k$ via l'isomorphisme $(\theta\otimes_B k)\lambda^{-1}$, se relève, d'après 1.4, en une résolution de M' par des $R_{B'}$-modules libres gradués. En prenant le début de cette résolution, on obtient une suite exacte :

$$0 \to N'_0 \to L_1\otimes_k B' \xrightarrow{\sigma_1} L_0\otimes_k B' \xrightarrow{\mu_0} M' \to 0, \tag{2}$$

où μ_0 relève $(\theta\otimes_B k)\lambda^{-1}\overline{\sigma_0}$. De plus, chaque composante graduée de N'_0 est libre sur B'.

De la résolution (2), on déduit la suite exacte des faisceaux associés sur $\mathbf{P}_{B'}$:

$$0 \to \mathcal{N}'_0 \to \mathcal{L}_1\otimes_k B' \xrightarrow{\tilde{\sigma}_1} \mathcal{L}_0\otimes_k B' \to 0, \tag{3}$$

et donc $\mathcal{N}'_0$ est un $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}$-module localement libre dont le rang sera noté r_0+1. Son déterminant $\wedge^{r_0+1}\mathcal{N}'_0$ est de la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}(d_0)$ comme produit tensoriel des déterminants de $\mathcal{L}_1\otimes_k B'$ et $\mathcal{L}_0^{-1}\otimes_k B'$. De plus on obtient en prenant la cohomologie un isomorphisme de N'_0 avec $H^0_*\mathcal{N}'_0$ (resp. de M' avec $H^1_*\mathcal{N}'_0$). Le deuxième, noté λ_0, fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} L_0\otimes_k B' & \xrightarrow{\mu_0} & M' \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \lambda_0 \\ H^0_*(\mathcal{L}_0\otimes_k B') & \xrightarrow{\partial'} & H^1_*\mathcal{N}'_0 \end{array}$$

où ∂' est le cobord associé à la suite exacte (3), et où la première flèche verticale est l'isomorphisme naturel. On obtient également la nullité de $H^2_*\mathcal{N}'_0$, et le fait que $H^3_*\mathcal{N}'_0$ est libre sur B', comme noyau d'un homomorphisme de modules libres. On en déduit (cf. VI 1.7) que pour tout i et pour tout n, $H^i\mathcal{N}'_0(n)$ est libre sur B' et commute au changement de base.

Tensorisant (2) par B, puis par $B/\mathfrak{R} = k$, on obtient encore deux suites exactes, puisque M' est plat sur B' :

$$0 \to N'_0\otimes_{B'} B \to L_1\otimes_k B \xrightarrow{\sigma_1\otimes_{B'} B} L_0\otimes_k B \xrightarrow{\nu_0} M_{C_B} \to 0, \tag{4}$$

où l'on a posé $\nu_0 = \theta^{-1}(\mu_0 \otimes_{B'} B)$, et :

$$(1') \qquad 0 \to N_0' \otimes_{B'} k \to L_1 \xrightarrow{\overline{\sigma_1}} L_0 \xrightarrow{\lambda^{-1}\overline{\sigma_0}} M_{C_B} \otimes_B k \to 0,$$

qui n'est autre que le début de (1) (modulo λ).

On a aussi, liée à (1), une résolution libre minimale de A_C de la forme :

$$0 \to P \to L_1' \to L_0 \oplus R \to A_C \to 0,$$

où l'homomorphisme de L_0 dans A_C induit $\overline{\sigma_0}$ sur M_C, cf. [LR] ou II 4. Comme A_{C_B} est plat sur B et la flèche canonique $A_{C_B} \otimes_B k \simeq A_C$ est un isomorphisme (cf. VI 3.15), on peut, en vertu de 1.4, relever cette résolution en une résolution de A_{C_B} de la forme :

$$0 \to P \otimes_k B \to L_1' \otimes_k B \to (L_0 \otimes_k B) \oplus R_B \to A_{C_B} \to 0$$

et, comme on a le choix du premier relèvement, on peut supposer que la flèche de R_B dans A_{C_B} est la flèche naturelle et que celle de $L_0 \otimes_k B$ dans A_{C_B} induit ν_0 sur M_{C_B}. En effet, puisqu'on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(L_0 \otimes_k B, R_B/I_{C_B}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(L_0 \otimes_k B, A_{C_B}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(L_0 \otimes_k B, M_{C_B}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\mathrm{Hom}(L_0, R/I_C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L_0, A_C) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(L_0, M_C) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont toutes les flèches verticales sont surjectives, il existe un élément de $\mathrm{Hom}(L_0 \otimes_k B, A_{C_B})$ qui relèveà la fois ν_0 et l'homomorphisme donné de L_0 dans A_C.

On a alors un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & & & R_B \arrow[r, equal] \arrow[d] & R_B \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P \otimes_k B \arrow[r] \arrow[d] & L_1' \otimes_k B \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[d, equal] & (L_0 \otimes_k B) \oplus R_B \arrow[r] \arrow[d, "p"] & A_{C_B} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_B \arrow[r] & L_1' \otimes_k B \arrow[r, "p\tau_1"] & L_0 \otimes_k B \arrow[r, "\nu_0"] & M_{C_B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où l'on a posé $N_B = \mathrm{Ker}\, p\tau_1$. La suite exacte inférieure de ce diagramme s'envoie dans (4), et en particulier, puisque L_1' est libre, il existe une flèche $\mu_1 : L_1' \otimes_k B \to L_1 \otimes_k B$ telle que $p\tau_1 = (\sigma_1 \otimes_{B'} B)\mu_1$.

Mais comme (4) relève une résolution minimale de $M_{C_B} \otimes_B k$, $\mu_1 \otimes_B k$ est surjective (cf. 0 1.5), et donc aussi μ_1 d'après 1.3. Comme $L_1 \otimes_k B$ est libre, on a une section s de μ_1 et donc une décomposition $L'_1 \otimes_k B = \mathrm{Im} s \oplus \mathrm{Ker}\mu_1$. D'après 0 1.3, $\mathrm{Ker}\mu_1$ est libre comme facteur direct d'un libre, donc il existe un R-module gradué libre L' tel que $L'_1 \otimes_k B \simeq (L_1 \otimes_k B) \oplus (L' \otimes_k B)$ et $N_B \simeq (N'_0 \otimes_{B'} B) \oplus (L' \otimes_k B) = N' \otimes_{B'} B$, avec $N' = N'_0 \oplus (L' \otimes_k B')$. Le lemme du serpent fournit alors la suite exacte :

$$0 \to P \otimes_k B \to N' \otimes_{B'} B \xrightarrow{\tau'_1} I_{C_B} \to 0$$

et τ'_1 n'est autre que la restriction à N_B de la flèche de $L'_1 \otimes_k B$ dans R_B obtenue en composant τ_1 à gauche avec la projection canonique de $(L_0 \otimes_k B) \oplus R_B$ sur R_B.

La résolution de $\mathcal{J}_{C_B}$ s'en déduit en prenant les faisceaux associés :

$$0 \to \mathcal{P} \otimes_k B \xrightarrow{\varphi_B} \mathcal{N}' \otimes_{B'} B \xrightarrow{\widetilde{\tau}'_1} \mathcal{J}_{C_B} \to 0.$$

Si $r+1$ désigne le rang de $\mathcal{N}'$, on a évidemment un isomorphisme $\wedge^{r+1}\mathcal{N}' \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}(d)$ et il est alors immédiat que d est le degré de $\mathcal{P}$.

On vérifie que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
H^0_*(\mathcal{L}_0 \otimes_k B) \arrow[d, "\partial"] & L_0 \otimes_k B \arrow[l] \arrow[d, "\nu_0"] \\
H^1_*(\mathcal{N}' \otimes_{B'} B) \arrow[r, "H^1_*\widetilde{\tau}'_1"] & M_{C_B} = H^1_*\mathcal{J}_{C_B}
\end{tikzcd}$$

où ∂ est le cobord associé à la suite exacte (3) tensorisée par B, compte-tenu de l'égalité $H^1_*(\mathcal{N}' \otimes_{B'} B) = H^1_*(\mathcal{N}'_0 \otimes_{B'} B)$, et où la première flèche horizontale est l'isomorphisme naturel. Si on identifie $L_0 \otimes_k B$ et $H^0_*(\mathcal{L}_0 \otimes_k B)$, $(H^1_*\mathcal{N}') \otimes_{B'} B$ et $H^1_*(\mathcal{N}' \otimes_{B'} B)$ par l'isomorphisme naturel de changement de base, on a donc les égalités : $\partial = (\lambda_0\mu_0) \otimes_{B'} B$ et $\nu_0 = H^1_*\widetilde{\tau}'_1\partial$, donc on a $\nu_0 = \theta^{-1}(\mu_0 \otimes_{B'} B) = H^1_*\widetilde{\tau}'_1((\lambda_0\mu_0) \otimes_{B'} B)$ et $\theta^{-1} = H^1_*\widetilde{\tau}'_1(\lambda_0 \otimes_{B'} B)$.

Autrement dit, si on identifie aussi M' et $H^1_*\mathcal{N}'$ par λ_0, la résolution de $\mathcal{J}_{C_B}$ que l'on vient de construire donne, en prenant la cohomologie, un isomorphisme de $M' \otimes_{B'} B$ avec M_{C_B} qui n'est autre que θ^{-1}.

Fin de la démonstration du théorème. D'après 1.6, il existe une suite exacte qu'on note $\mathcal{R}_B$:

$$0 \to \mathcal{P} \otimes_k B \xrightarrow{\varphi_B} \mathcal{N}' \otimes_{B'} B \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}_B}.$$

La flèche φ_B est définie par un nombre fini d'éléments homogènes de $N' \otimes_{B'} B$ que l'on relève dans N'; on obtient ainsi un morphisme $\varphi_{B'} : \mathcal{P} \otimes_k B' \to \mathcal{N}'$.

La flèche $\wedge^r\varphi_{B'}^\vee(d) : (\wedge^r\mathcal{N}'^\vee)\otimes\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}(d)\simeq\mathcal{N}'\to\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}$ définit un complexe $\mathcal{R}_{B'}$:

$$0\to\mathcal{P}\otimes_k B'\xrightarrow{\varphi_{B'}}\mathcal{N}'\xrightarrow{\wedge^r\varphi_{B'}^\vee(d)}\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}.$$

Soit $\mathcal{J}_{C_{B'}}$ l'image de $\wedge^r\varphi_{B'}^\vee(d)$, qui est un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}$ et $\mathcal{O}_{C_{B'}}$ le conoyau. On vérifie aussitôt que l'on a $\mathcal{R}_{B'}\otimes_{B'}B=\mathcal{R}_{B'}/J\mathcal{R}_{B'}=\mathcal{R}_B$ (c'est clair pour $\varphi_{B'}$ par construction et pour l'autre flèche cela résulte de la commutation de l'algèbre extérieure à l'extension des scalaires). Donc en particulier $C_{B'}$ est une courbe dans $\mathbf{P}_{B'}$ qui relève C_B. Comme les B'-modules $\mathcal{P}\otimes_k B'$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_{B'}}$ sont plats, et J de carré nul, on a des isomorphismes de B'-modules : $J\mathcal{R}_{B'}\simeq J\otimes_{B'}\mathcal{R}_{B'}\simeq J\otimes_B\mathcal{R}_B$ et on en déduit la suite exacte de complexes :

$$0\to J\otimes_B\mathcal{R}_B\to\mathcal{R}_{B'}\to\mathcal{R}_B\to 0.$$

Puisque C_B est un point de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$, $\mathcal{O}_{C_B}$ est plat sur B et le complexe $J\otimes_B\mathcal{R}_B$ est exact. Il en résulte que le complexe $\mathcal{R}_{B'}$ est lui aussi exact, donc qu'il fournit une résolution de l'idéal $\mathcal{J}_{C_{B'}}$.

On montre alors que $\mathcal{O}_{C_{B'}}$ est plat sur B' en utilisant le critère supérieur de platitude ([Bbki] A.C.III 5.Th.1). Déjà on a $\mathcal{O}_{C_{B'}}\otimes_{B'}B\simeq\mathcal{O}_{C_B}$, donc ce module est plat sur B. Ensuite, il faut voir que $\mathrm{Tor}^1_{B'}(B,\mathcal{O}_{C_{B'}})$ est nul, mais cela résulte du fait que $\mathcal{J}_{C_{B'}}\otimes_{B'}B\simeq\mathcal{J}_{C_B}$ s'injecte dans $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_B}$.

Enfin, la flèche $\mathcal{R}_{B'}\to\mathcal{R}_B$ donne en passant à la cohomologie le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1_*\mathcal{N}' & \longrightarrow & H^1_*\mathcal{J}_{C_{B'}} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^1_*(\mathcal{N}'\otimes_{B'}B) & \longrightarrow & H^1_*\mathcal{J}_{C_B} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On en déduit la surjectivité de la flèche de restriction : $H^1_*\mathcal{J}_{C_{B'}}\to H^1_*\mathcal{J}_{C_B}$, donc aussi de la flèche de restriction : $H^1_*\mathcal{J}_{C_{B'}}\to H^1_*\mathcal{J}_C$, ce qui signifie que $H^1\mathcal{J}_{C_{B'}}(n)$ est localement libre sur B' et commute au changement de base pour tout n. D'après VI 3.2, l'idéal $\mathcal{J}_{C_{B'}}$ est à cohomologie constante, évidemment donnée par γ et ρ. Enfin la première flèche horizontale de ce diagramme, composée avec $\lambda_0 : M'\simeq H^1_*\mathcal{N}'$ est d'après 1.6 un isomorphisme qui relève θ^{-1}, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1.7. *Les schémas $\widehat{H}_{\gamma,M}$ et $H_{\gamma,M}$ sont lisses.*

Démonstration. Soit x un point fermé de $\widehat{E}_\rho$ dont l'image par q_E est égale à M. Puisque $\widehat{H}_{\gamma,M}$ est la fibre de $\widehat{\Phi}$ en x, il est donc lisse. D'autre part, le morphisme $q:\widehat{H}_{\gamma,M}\to H_{\gamma,M}$ est lisse (cf. VI 4.6) donc il en est de même de $H_{\gamma,M}$.

Remarque 1.8. Dans le cas où la fonction ρ est nulle, on retrouve le résultat d'Ellingsrud.

Remarque 1.9. Dans des cas simples, 1.5 permet de montrer que le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est lisse, soit en montrant la lissité de $\widehat{E}_\rho$, soit en montrant que l'image de $\widehat{\Phi}$, qui est ouverte dans $\widehat{E}_\rho$, est contenue dans l'ouvert de lissité. L'exemple suivant montre que $\widehat{\Phi}$ n'est en général pas surjectif.

Exemple 1.10. Plaçons-nous dans le cas de l'exemple 4.3 a de VI. On a $\rho(0) = \rho(1) = 1$ et $\rho = 0$ ailleurs. On a vu qu'il y a deux types de modules gradués, celui du module de Buchsbaum M_0 et celui du module monogène $M_1 = k[X,Y,Z,T]/(X^2,Y,Z,T)$. Les calculs de IV 6 montrent qu'une courbe ayant un module de Rao M isomorphe à M_1 (donc aussi une courbe ayant un module de Rao du même type) est minimale, et son caractère γ_1 se calcule à partir de ses résolutions. Dans ce cas, $H_{\gamma_1,M}$ n'est pas vide, et $H_{\gamma,M}$ est vide pour $\gamma \neq \gamma_1$.

Les calculs de IV 6 montrent aussi que dans la classe de biliaison définie par M_2, la courbe minimale a un module de Rao M isomorphe à $M_2(-2)$, donc il n'existe pas de courbe ayant un module de Rao isomorphe à M_2.

L'image de $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma_1,\rho} \to \widehat{E}_\rho$ est donc le complémentaire de l'origine dans $\widehat{E}_\rho = \mathbf{A}^4_k$.

2. Prolongement des résolutions.

Les courbes de H_γ ont toutes le même caractère de postulation, il est donc normal que la résolution longue (de longueur 3) de leur idéal soit localement constante, puisque cette résolution détermine le caractère. C'est ce que montre 2.1. On a un résultat analogue (2.6) dans H_σ et $H_{\gamma,\rho}$.

Les courbes de $H_{\gamma,M}$ ont toutes même postulation et même module de Rao, il est donc normal que les résolutions de type N ou E de leur idéal soient localement constantes, puisque ces résolutions sont directement liées au module de Rao. C'est ce que montrent 2.7. et 2.8.

Proposition 2.1. *Soient $\mathcal{C}$ la courbe universelle de $\mathbf{P}^3 \times H_\gamma$, π la projection de $\mathbf{P}^3 \times H_\gamma$ sur H_γ et $\mathcal{J}_\mathcal{C}$ le faisceau d'idéaux qui définit la courbe $\mathcal{C}$. Soit x un point rationnel de H_γ correspondant à une courbe C, et*

$$0 \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{a(n)} \longrightarrow \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{c(n)} \longrightarrow I_C \to 0$$

une résolution graduée minimale de I_C. Il existe un ouvert affine $U = \operatorname{Spec} A$ contenant x, et une suite exacte de $R_A(= R \otimes_k A)$-modules gradués :

$$0 \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R_A(-n)^{a(n)} \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R_A(-n)^{b(n)} \xrightarrow{\psi_U} \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R_A(-n)^{c(n)} \to \bigoplus_{m\in\mathbf{Z}} H^0 \mathcal{J}_\mathcal{C}(m)|_U \to 0$$

qui relève la résolution précédente.

Démonstration. Puisque $\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}\pi_*\mathcal{J}_C(m)$ est plat sur H_γ et que sa fibre au point x est égale à I_C, c'est une conséquence immédiate de 1.4.

Proposition 2.2. *Notons encore $\mathcal{C}$ la courbe universelle de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,\rho}$, π la projection de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,\rho}$ sur $H_{\gamma,\rho}$ et $\mathcal{J}_C$ le faisceau d'idéaux qui définit la courbe $\mathcal{C}$. Soient U (resp. ψ_U) l'ouvert (resp. le morphisme) introduit en 2.1, V un ouvert affine contenu dans $U \cap H_{\gamma,\rho}$ (resp. ψ_V la restriction de ψ_U à V) ; désignons par E le noyau de ψ_V, par $\mathcal{E}$ le faisceau localement libre associé sur $\mathbf{P}^3 \times V$. Alors pour tout i et pour tout n, les faisceaux $R^i\pi_*\mathcal{E}(n)$ et $R^i\pi_*\mathcal{E}^\vee(n)$ sont localement libres sur V et commutent au changement de base.*

Démonstration. On a trois suites exactes :

$$(1) \qquad 0 \to \mathcal{L}_4 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times V}(-n)^{a(n)} \xrightarrow{\sigma_4} \mathcal{L}_3 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times V}(-n)^{b(n)} \longrightarrow \mathcal{E} \to 0$$

$$(1') \qquad 0 \to \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{L}_3^\vee \xrightarrow{\sigma_4^\vee} \mathcal{L}_4^\vee \to 0$$

$$(2). \qquad \text{et} \quad 0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times V}(-n)^{c(n)} \to \mathcal{J}_C|_V \to 0$$

On déduit de (1) et de (1') que l'on a, pour tout n, $R^1\pi_*\mathcal{E}(n) = R^2\pi_*\mathcal{E}^\vee(n) = 0$ et que $R^3\pi_*\mathcal{E}^\vee(n)$ est localement libre.

On déduit de (2) un isomorphisme $R^1\pi_*\mathcal{J}_C(n)|_V \simeq R^2\pi_*\mathcal{E}(n)$ et une suite exacte :

$$0 \to R^2\pi_*\mathcal{J}_C(n)|_V \to R^3\pi_*\mathcal{E}(n) \to R^3\pi_*\mathcal{F}(n) \to R^3\pi_*\mathcal{J}_C(n)|_V \to 0$$

d'où le résultat pour $\mathcal{E}$ puisque $R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ est localement libre sur V.

La suite exacte de cohomologie associée à (1) :

$$0 \to R^2\pi_*\mathcal{E}(n) \to R^3\pi_*\mathcal{L}_4(n) \xrightarrow{\sigma_4'(n)} R^3\pi_*\mathcal{L}_3(n) \to R^3\pi_*\mathcal{E}(n) \to 0$$

est donc une suite de faisceaux localement libres sur V, et reste exacte par dualité :

$$0 \to (R^3\pi_*\mathcal{E}(n))^\vee \to (R^3\pi_*\mathcal{L}_3(n))^\vee \xrightarrow{\sigma_4'^\vee(n)} (R^3\pi_*\mathcal{L}_4(n))^\vee \to (R^2\pi_*\mathcal{E}(n))^\vee \to 0.$$

D'autre part, on a une suite exacte de cohomologie associée à (1') :

$$0 \to \pi_*\mathcal{E}^\vee(n)) \to \pi_*\mathcal{L}_3^\vee(n) \xrightarrow{\sigma_4''(n)} \pi_*\mathcal{L}_4^\vee(n) \to R^1\pi_*\mathcal{E}^\vee(n) \to 0.$$

Si par dualité relative sur $\mathbf{P}^3 \times V$, on identifie $(R^i\pi_*\mathcal{L}_3(n))^\vee$ à $\pi_*\mathcal{L}_i^\vee(n-4)$ (cf. [rH3]), alors $\sigma_4'^\vee(n)$ s'identifie à $\sigma_4''(n-4)$, et on obtient des isomorphismes de $\mathcal{O}_V$-modules : $R^i\pi_*\mathcal{E}^\vee(n) \simeq R^{3-i}\pi_*\mathcal{E}(-n-4))$ d'où le résultat pour $\mathcal{E}^\vee$.

Le corollaire suivant nous sera utile dans les paragraphes 3 et 4 suivants :

Corollaire 2.3. *Soient Y un schéma et $\mathcal{C}$ une famille de courbes de $H_{\gamma,\rho}(Y)$. Le faisceau $\omega_{\mathcal{C}} = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-4))$ est plat sur Y et commute au changement de base au sens suivant : si $w : Y' \to Y$ est un morphisme, $v : \mathbf{P}^3 \times Y' \to \mathbf{P}^3 \times Y$ le morphisme induit, et $\mathcal{C}'$ l'image réciproque de $\mathcal{C}$ par v, l'homomorphisme canonique :*

$$v^*\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-4)) \to \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y'}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}'}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y'}(-4))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il suffit bien sûr de la faire lorsque $Y = H_{\gamma,\rho}$, ou même, puisque c'est une propriété locale, lorsque Y est un ouvert V de $H_{\gamma,\rho}$. Quitte à remplacer $H_{\gamma,\rho} = H$ par V, on peut donc supposer (cf. 2.1) qu'il existe une résolution

$$(1) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}(-n)^{c(n)} \xrightarrow{\theta} \mathcal{J}_{\mathcal{C}}|H \longrightarrow 0.$$

L'isomorphisme canonique : $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}) \simeq \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H})$ est fonctoriel en H. Il suffit donc de montrer que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H})$ est plat sur H et commute au changement de base.

On déduit de (1) par changement de base une résolution

$$(2) \qquad 0 \longrightarrow v^*\mathcal{E} \xrightarrow{v^*\psi} v^*\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y'}(-n)^{c(n)} \xrightarrow{v^*\theta} v^*\mathcal{J}_{\mathcal{C}}|H \simeq \mathcal{J}_{\mathcal{C}'} \longrightarrow 0.$$

En dualisant (1) et (2), on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H} \xrightarrow{\theta^\vee} \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\psi^\vee} \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}) \longrightarrow 0$$

et un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y'} & \xrightarrow{v^*(\theta^\vee)} & v^*(\mathcal{F}^\vee) & \xrightarrow{v^*(\psi^\vee)} & v^*(\mathcal{E}^\vee) & \longrightarrow & v^*\mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}) & \to 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y'} & \xrightarrow{(v^*\theta)^\vee} & (v^*\mathcal{F})^\vee & \xrightarrow{(v^*\psi)^\vee} & (v^*\mathcal{E})^\vee & \longrightarrow & \mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_{\mathcal{C}'}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y'}) & \to 0
\end{array}$$

dont la première ligne est un complexe, la deuxième une suite exacte, et dont les trois premières flèches verticales sont des isomorphismes.

On en déduit que la première ligne est une suite exacte, donc que le faisceau $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H})$ est plat sur H, et que toutes les flèches verticales sont des isomorphismes, donc que $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H})$ commute au changement de base.

Remarque 2.4. On pourrait montrer, en utilisant les théorèmes généraux sur les catégories dérivées et la dualité, que ce résultat est vrai aussi pour $H_{d,g}$. Il faut montrer que le complexe dualisant relatif de $\mathcal{C}$ sur $H_{d,g}$ a un seul terme non nul, égal au faisceau dualisant relatif $\omega_{\mathcal{C}}$, et qu'il commute au changement de base. Nous avons préféré faire une démonstration plus directe, et plus simple.

Corollaire 2.5. *Avec les notations de 2.3, le faisceau $R^i\pi_*\omega_{\mathcal{C}}(n)$ est localement libre sur $H_{\gamma,\rho}$ et commute au changement de base pour tout i et pour tout n.*

Démonstration. Puisque c'est local, on peut supposer comme en 2.3 qu'il existe une résolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H} \xrightarrow{\theta^\vee} \mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\psi^\vee} \mathcal{E}^\vee \longrightarrow \mathcal{E}xt^1(\mathcal{J}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}) \simeq \omega_{\mathcal{C}}(4) \longrightarrow 0$$

où l'on a posé $\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}(-n)^{c(n)}$. Soit $\mathcal{K}$ le conoyau de $\theta^\vee$. On en déduit la nullité de $R^1\pi_*\mathcal{K}(n)$, un isomorphisme : $R^3\pi_*\mathcal{K}(n) \simeq R^3\pi_*\mathcal{E}^\vee(n)$ et des suites exactes :

$$0 \to R^2\pi_*\mathcal{K}(n) \to R^3\pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H}(n) \to R^3\pi_*\mathcal{F}^\vee(n) \to R^3\pi_*\mathcal{K}(n) \to 0$$

$$0 \to R^1\pi_*\mathcal{E}^\vee(n) \to R^1\pi_*\omega_{\mathcal{C}}(4+n) \to R^2\pi_*\mathcal{K}(n) \to 0.$$

Puisque $R^3\pi_*\mathcal{K}(n)$ commute au changement de base et est localement libre, il en est de même de $R^2\pi_*\mathcal{K}(n)$. C'est vrai aussi pour $R^1\pi_*\mathcal{E}^\vee(n)$ d'après 2.2, donc aussi pour $R^1\pi_*\omega_{\mathcal{C}}(4+n)$, ce qui implique le résultat.

La proposition suivante est l'analogue de 2.1 pour la spécialité et sa démonstration se fait de la même manière en utilisant la résolution de A_C (cf. II 4.1 ou [LR]).

Proposition 2.6. *Soient $\mathcal{C}$ la courbe universelle de $\mathbf{P}^3 \times H_\sigma$, π la projection de $\mathbf{P}^3 \times H_\sigma$ sur H_σ et $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ le faisceau d'idéaux qui définit la courbe $\mathcal{C}$. Soit x un point rationnel de H_γ correspondant à une courbe C, et $0 \to P \to N \to I_C \to 0$ sa résolution de type N. On pose*

$$P = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{c'(n)}$$

et on a la suite exacte $0 \to N \to L_1 \to L_0 \to M_C \to 0$, avec :

$$L_1 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{b'(n)} \quad L_0 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{a'(n)}.$$

Cette résolution définit donc deux homomorphismes $\phi : P \to L_1$ et $\psi : L_1 \to L_0$ dont le composé est nul. Il existe alors un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}A$ contenant

x, et deux homomorphismes $\phi_A : P \otimes_k A \to L_1 \otimes_k A$ et $\psi_A : L_1 \otimes_k A \to L_0 \otimes_k A$ de $R_A(= R \otimes_k A)$-modules gradués, relevant ϕ et ψ, dont le composé est nul, et tels que si l'on pose $I_{C_A} = \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} H^0(\pi_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(m)|_U)$, on ait la suite exacte :

$$0 \to P \otimes_k A \xrightarrow{\phi_A} \mathrm{Ker}\psi_A \to I_{C_A} \to 0.$$

Lorsque l'on travaille sur $H_{\gamma,\rho}$ on a à la fois les conclusions de 2.1 et 2.6.

Proposition 2.7. *Notons encore $\mathcal{C}$ la courbe universelle de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,M}$, π la projection de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,M}$ sur $H_{\gamma,M}$ et $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ le faisceau d'idéaux qui définit la courbe $\mathcal{C}$. Soit x un point rationnel de $H_{\gamma,M}$ correspondant à une courbe C, et*

$$0 \to P \xrightarrow{\varphi} N \to I_C \to 0$$
$$(\text{resp.} \quad 0 \to \mathcal{P} \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0)$$

la résolution de type N (unique à isomorphisme près) de l'idéal I_C (resp. du faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_C$). Il existe un ouvert affine $U = \mathrm{Spec}A$ contenant x, et une suite exacte de $R_A(= R \otimes_k A)$-modules gradués (resp. de faisceaux sur $\mathbf{P}^3 \times U$):

$$0 \to P \otimes_k A \xrightarrow{\varphi_A} N \otimes_k A \to \bigoplus_{m \in \mathbf{Z}} H^0 \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(m)|_U \to 0$$
$$(\text{resp.} \quad 0 \to \mathcal{P} \otimes_k \mathcal{O}_U \xrightarrow{\tilde{\varphi}_A} \mathcal{N} \otimes_k \mathcal{O}_U \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}}|_U \to 0)$$

qui relève la résolution précédente.

Démonstration. Soit B l'anneau local du point x. Une démonstration analogue à celle de 1.6 montre le résultat suivant : si on note C_B la courbe obtenue en localisant au point x, l'idéal I_{C_B} (resp. le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_{C_B}$) a une résolution de la forme: $0 \to P \otimes_k B \xrightarrow{\varphi_B} N \otimes_k B \to I_{C_B} \to 0$ (resp. $0 \to \mathcal{P} \otimes_k B \xrightarrow{\tilde{\varphi}_B} \mathcal{N} \otimes_k B \to \mathcal{J}_{C_B} \to 0$) avec $\varphi_B \otimes_B k = \varphi$ (resp. $\tilde{\varphi}_B \otimes_B k = \tilde{\varphi}$). On montre alors comme dans la démonstration de 1.4 qu'on peut prolonger ces résolutions dans un voisinage de x.

Remarque 2.8. On laisse au lecteur le soin de prouver le résultat analogue pour les résolutions de type E.

3. Schémas de drapeaux et liaison universelle.

Les schémas de drapeaux associés à la liaison ont été étudiés par Kleppe [K]. Le principe est d'étudier le schéma de Hilbert d'une courbe à partir de celui de sa liée en construisant un schéma $\mathcal{D}$ (de drapeaux), muni de deux projections sur les schémas de Hilbert.

Nous allons voir que cette construction est encore possible si on se restreint aux schémas de courbes à cohomologie constante, et qu'alors les projections sont irréductibles et lisses. Ceci permettra, en particulier, de conclure à l'irréductibilité (resp. à la lissité) d'un des schémas à partir de celle de l'autre et d'établir une relation entre leurs dimensions.

Définitions 3.1. *Soit s un entier et Y un schéma. Un drapeau de type $(\gamma, \rho; s)$ sur Y est un couple $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ où $\mathcal{C}$ est un élément de $H_{\gamma,\rho}(Y)$ et $\mathcal{Q}$ une famille de surfaces contenue dans $\mathbf{P}^3 \times Y$, contenant $\mathcal{C}$, plate sur Y et de degré s dans les fibres.*
On définit ainsi un foncteur $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ des drapeaux de type $(\gamma, \rho; s)$, canoniquement muni d'une projection sur $H_{\gamma,\rho}$.
Si M est un module de E_ρ, on appelle $\mathcal{D}_{\gamma,M;s}$ l'image réciproque dans $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ de $H_{\gamma,M}$; c'est le foncteur des drapeaux de type $(\gamma, M; s)$.

Proposition 3.2. *Le foncteur $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ (resp. $\mathcal{D}_{\gamma,M;s}$) est représentable par un schéma, noté encore $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ (resp. $\mathcal{D}_{\gamma,M;s}$) lisse et projectif sur $H_{\gamma,\rho}$ (resp. $H_{\gamma,M}$).*

Démonstration. Le foncteur des familles de surfaces de degré s est représenté par l'espace projectif $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^*)$ associé au dual du k-espace vectoriel $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))$. Soient $\mathcal{C}$ la courbe universelle de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,\rho}$, π la projection de $\mathbf{P}^3 \times H_{\gamma,\rho}$ sur $H_{\gamma,\rho}$ et $\mathcal{J}_{\mathcal{C}}$ le faisceau d'idéaux qui définit la courbe $\mathcal{C}$. On a une suite exacte de $\mathcal{O}_{H_{\gamma,\rho}}$-modules localement libres:

$$0 \to \pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(s) \to \pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H_{\gamma,\rho}}(s) \to \pi_*\mathcal{O}_{\mathcal{C}}(s) \to R^1\pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(s) \to 0,$$

donc $\pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(s)^\vee$ est un quotient du faisceau $\pi_*\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times H_{\gamma,\rho}}(s)^\vee$ qui est canoniquement isomorphe à $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^* \otimes \mathcal{O}_{H_{\gamma,\rho}}$.

Le foncteur $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ est représenté par $\mathbf{P}_{H_{\gamma,\rho}}(\pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(s)^\vee)$ qui est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^*)\times H_{\gamma,\rho}$ et qui est lisse sur $H_{\gamma,\rho}$, puisque $\pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}}(s)$ est localement libre.

Remarque 3.3. Soit C une courbe de $H_{\gamma,\rho}$. La fibre de $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ au-dessus de C est lisse et irréductible de dimension $h^0\mathcal{J}_C(s) - 1$.

Définition 3.4. *Soient s et t deux entiers et Y un schéma. Un drapeau de type $(\gamma, \rho; s, t)$ sur Y est un triplet $(\mathcal{C}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ où $\mathcal{C}$ est un élément de $H_{\gamma,\rho}(Y)$, $\mathcal{Q}$ une famille de surfaces de degré s, $\mathcal{Q}'$ une famille de surfaces de degré t, toutes trois contenues dans $\mathbf{P}^3 \times Y$, plates sur Y, et telles que l'intersection $\mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}'$ soit une famille de courbes sur Y, contenant $\mathcal{C}$.*
On définit ainsi un foncteur $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s,t}$ des drapeaux de type $(\gamma, \rho; s, t)$, canoniquement muni d'une projection sur $H_{\gamma,\rho}$.
Comme en 3.1, on définit aussi de manière analogue un foncteur $\mathcal{D}_{\gamma,M;s,t}$ des drapeaux de type $(\gamma, M; s, t)$.

Lemme 3.5. *Soient Y un schéma et $(\mathcal{C}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}')$ un drapeau de type $(\gamma, \rho; s, t)$ sur Y. Notons $\mathcal{X} = \mathcal{Q}\cap\mathcal{Q}'$. Soit f la projection de $\mathbf{P}^3\times Y$ sur Y. Alors pour tout n et pour $i = 0, 1$, les faisceaux $R^i f_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})(n)$ et $R^i f_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{X}}(n)$ sont localement libres sur Y et commutent au changement de base.*

Démonstration. On peut supposer qu'il existe une résolution de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}$-modules :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s-t) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-t) \to \mathcal{J}_{\mathcal{X}} \to 0.$$

En effet c'est vrai localement sur Y (globalement, il faut faire intervenir les images récipro-ques sur Y des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$ sur $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^*)$ et $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(t))^*)$), et le résultat annoncé est local sur Y.

On en déduit une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}$-modules :

$$\begin{aligned} 0 = &\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-t)) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{J}_{\mathcal{X}}) \\ &\to \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s-t)) \to \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-t)) \end{aligned}$$

dont la dernière flèche est nulle, car $\mathcal{C}$ est contenue dans $\mathcal{X}$. On obtient donc des isomorphismes :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \simeq \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{J}_{\mathcal{X}}) &\simeq \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s-t)) \\ &\simeq \omega_{\mathcal{C}}(4-s-t) \end{aligned}$$

(où $\omega_{\mathcal{C}} = \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-4))$) et on en déduit immédiatement le résultat pour $R^i f_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})(n)$ d'après 2.5.

Pour $R^i f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{X}}(n)$, on utilise la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{J}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{X}} \to 0$$

d'où on déduit la suite exacte :

$$0 \to R^1 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(n) \to R^1 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{X}}(n) \to R^2 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{X}}(n) \to R^2 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(n) \to 0.$$

Puisque $\mathcal{C}$ est une famille de courbes de $H_{\gamma,\rho}$, $R^1 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(n)$ et $R^2 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}}(n)$ sont localement libres. Puisque $\mathcal{X}$ est une famille de courbes ACM, c'est-à-dire du schéma de Hilbert des courbes à fonction de Rao constante égale à 0, $R^2 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{X}}(n)$ est localement libre, et il en est de même de $R^1 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{X}}(n)$, d'où le résultat d'après VI 1.7.

Théorème 3.6. *Le foncteur $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s,t}$ est représentable par un schéma lisse sur $H_{\gamma,\rho}$. De plus, si γ' (resp. ρ') est le caractère (resp. la fonction de Rao) d'une courbe liée par $s \times t$ à une courbe de $H_{\gamma,\rho}$, on a un isomorphisme : $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s,t} \simeq \mathcal{D}_{\gamma',\rho';s,t}$, qui à un triplet (C, Q, Q'), associe le triplet (C', Q, Q'), où C' est liée à C par $Q \cap Q'$.*

Démonstration. Notons pour simplifier $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\gamma,\rho;s,t}$. On désigne par $U_{s,t}$ l'ouvert de $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^*) \times \mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(t))^*)$ formé des couples de surfaces qui se coupent proprement. Il est immédiat que l'image réciproque de l'ouvert $U_{s,t}$ dans $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s} \times_{H_{\gamma,\rho}} \mathcal{D}_{\gamma,\rho;t}$ (qui est un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^*) \times \mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(t))^*) \times H_{\gamma,\rho}$) représente le foncteur $\mathcal{D}$. Il est lisse sur $H_{\gamma,\rho}$, comme ouvert du produit fibré (sur $H_{\gamma,\rho}$) des deux schémas $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ et $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;t}$, lisses sur $H_{\gamma,\rho}$.

Dans $\mathbf{P}^3 \times \mathcal{D}$ on a deux surfaces universelles, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q}'$, images réciproques des surfaces universelles au-dessus de $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^*)$ et $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(t))^*)$, dont l'intersection $\mathcal{X}$ est une famille d'intersections complètes qui contient la courbe universelle $\mathcal{C}$, image réciproque de la courbe universelle au-dessus de $H_{\gamma,\rho}$.

L'image canonique de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un idéal $\mathcal{J}_{\mathcal{C}'/\mathcal{X}}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ qui définit un sous-schéma fermé $\mathcal{C}'$ de $\mathbf{P} \times \mathcal{D}$ contenu dans $\mathcal{X}$.

Soit $w : Y \to \mathcal{D}$ un morphisme, $v : \mathbf{P}^3 \times Y \to \mathbf{P}^3 \times \mathcal{D}$ le morphisme induit, et $C_1, C_1', X_1, Q_1, Q_1'$ les images réciproques de $\mathcal{C}, \mathcal{C}', \mathcal{X}, \mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ par v. On a aussi une injection canonique du faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{C_1}, \mathcal{O}_{X_1})$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}, \mathcal{O}_{X_1}) \simeq \mathcal{O}_{X_1}$ et l'image est un idéal $\mathcal{J}_{C_2'/X_1}$ de $\mathcal{O}_{X_1}$ qui définit un sous-schéma fermé C_2' de $\mathbf{P} \times Y$ contenu dans X_1. On a un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathcal{T}or^1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}'}, \mathcal{O}_Y) & \to & \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes \mathcal{O}_Y & \to & \mathcal{O}_{X_1} & \to & \mathcal{O}_{C_1'} & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & \to & \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{C_1}, \mathcal{O}_{X_1}) & \to & \mathcal{O}_{X_1} & to & \mathcal{O}_{C_2'} & \to 0
\end{array}$$

Comme dans la démonstration de 3.5, on montre qu'il existe un recouvrement ouvert de $\mathcal{D}$ par des ouverts $\mathcal{D}_i$ et des isomorphismes (fonctoriels en $\mathcal{D}_i$):

$$\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})|_{\mathcal{D}_i} \simeq \mathcal{E}xt^2(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}(-s-t))|_{\mathcal{D}_i} \simeq \omega_{\mathcal{C}}(4-s-t)|_{\mathcal{D}_i}.$$

Il en résulte alors que la première flèche verticale est localement, donc globalement, un isomorphisme. On en déduit $C_2' = C_1'$, c'est-à-dire que la liaison "commute au changement de base", et que $\mathcal{T}or^1(\mathcal{O}_{\mathcal{C}'}, \mathcal{O}_Y)$ est nul. Ceci étant vrai pour tout Y, $\mathcal{C}'$ est une famille de courbes plate sur $\mathcal{D}$.

L'image canonique de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}'}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ dans $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est un idéal $\mathcal{J}_{\mathcal{C}''/\mathcal{X}}$, qui contient $\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{X}}$. Nous allons montrer qu'ils sont égaux, donc qu'il y a réciprocité entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Pour cela, on considère un point y de $\mathcal{D}$, on pose $Y = \mathrm{Spec}k(y)$, et on conserve les notations déjà utilisées. On sait que l'image canonique du faisceau $\mathcal{H}om(\mathcal{O}_{C_1'}, \mathcal{O}_{X_1})$ dans $\mathcal{O}_{X_1}$ est l'idéal

$\mathcal{J}_{C_1/X_1}$. On a donc un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{C'}, \mathcal{O}_X) \otimes k(y) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{C''} \otimes k(y) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{H}om(\mathcal{O}_{C'_1}, \mathcal{O}_{X_1}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_1} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \to & 0 \end{array}$$

qui prouve que la fibre de $\mathcal{C}''$ est égale à la fibre de $\mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}''$ est contenue dans $\mathcal{C}$, on conclut grâce à Nakayama.

Pour prouver l'existence de la flèche annoncée de $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s,t}$ dans $\mathcal{D}_{\gamma',\rho';s,t}$, il reste à montrer que $\mathcal{J}_{\mathcal{C}'}$ est à cohomologie constante. Le fait que cette flèche soit un isomorphisme résultera de la réciprocité. On peut donc supposer (cf. 2.1) qu'il existe un recouvrement de $\mathcal{D}$ par des ouverts $\mathcal{D}_i$ sur lesquels on a une résolution :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathcal{D}_i}(-n)^{c(n)} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{D}_i} \longrightarrow 0$$

et la résolution de $\mathcal{J}_{\mathcal{C}'}$ s'en déduit par mapping cone (cf. III 1.4) :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee}(-s-t) \longrightarrow \mathcal{E}^{\vee}(-s-t) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}_i}(-s) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}_i}(-t) \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}|_{\mathcal{D}_i} \longrightarrow 0$$

On en déduit sur $\mathcal{D}_i$, en notant f la projection de $\mathbf{P}^3 \times \mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$, un isomorphisme $R^1 f_* \mathcal{E}^{\vee}(n-s-t) \simeq R^1 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}(n)$ et une suite exacte :

$$\begin{aligned} &0 \to R^2 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}(n) \to R^3 f_* \mathcal{F}^{\vee}(n-s-t) \\ &\quad \to R^3 f_* \mathcal{E}^{\vee}(n-s-t) \oplus R^3 f_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}(-s) \oplus R^3 f_* \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times\mathcal{D}}(-t) \to R^3 f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}(n) \to 0. \end{aligned}$$

On conclut, en utilisant 2.2, que $R^i f_* \mathcal{J}_{\mathcal{C}'}(n)$ est localement libre pour tout $i = 1, 2$ et pour tout n.

On a un résultat analogue pour les drapeaux de type $(\gamma, M; s, t)$:

Théorème 3.7. *Le foncteur $\mathcal{D}_{\gamma,M;s,t}$ est représentable par un schéma lisse sur $H_{\gamma,M}$. De plus, si γ' est le caractère d'une courbe liée par $s \times t$ à une courbe de $H_{\gamma,M}$, et si $M' = M^*(4-s-t)$, on a un isomorphisme : $\mathcal{D}_{\gamma,M;s,t} \simeq \mathcal{D}_{\gamma',M';s,t}$, qui à un triplet (C, Q, Q'), associe le triplet (C', Q, Q'), où C' est liée à C par $Q \cap Q'$.*

Démonstration. Gardons les notations de la démonstration de 3.6. Il suffit de montrer que si $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ est localement isomorphe à $M \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{M}_{\mathcal{C}'}$ est localement isomorphe à $M' \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$. On peut donc supposer qu'il existe un recouvrement de $\mathcal{D}$ par des ouverts $\mathcal{D}_i$ sur lesquels on a une résolution :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{P} \times \mathcal{D}_i}(-n)^{c(n)} \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}}|_{\mathcal{D}_i} \longrightarrow 0$$

et un isomorphisme : $\mathcal{M}_{\mathcal{C}} \simeq M \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}_i}$.

On en déduit des isomorphismes :

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R^2 f_* \mathcal{E}(n) \simeq M \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}_i}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{C}'}(s+t-4) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R^1 f_* \mathcal{E}^{\vee}(n-4) &\simeq \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R^2 f_* \mathcal{E}(-n)^* \\ &= (\bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R^2 f_* \mathcal{E}(n))^* \simeq M^* \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{D}_i}. \end{aligned}$$

Corollaire 3.8. *L'image de $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s,t}$ (resp. $\mathcal{D}_{\gamma,M;s,t}$) par la projection canonique est un ouvert de $H_{\gamma,\rho}$ (resp. $H_{\gamma,M}$). Soit C une courbe de cet ouvert. La fibre de $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s,t}$ (resp. $\mathcal{D}_{\gamma,M;s,t}$) au-dessus de C est lisse et irréductible de dimension $h^0 \mathcal{J}_C(s) + h^0 \mathcal{J}_C(t) - 2$.*

4. Biliaison universelle. La construction précédente globalise la liaison. Nous allons introduire un nouveau schéma qui globalise la biliaison.

Définition 4.1. *Soient s et h deux entiers et Y un schéma. Une donnée de biliaison de type $(\gamma, \rho; s, h)$ sur Y est un triplet $(\mathcal{C}, \mathcal{Q}, u)$ où $(\mathcal{C}, \mathcal{Q})$ est un drapeau de type $(\gamma, \rho; s)$ sur Y, où $\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}$ est le faisceau d'idéaux qui définit $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{Q}$ et où $u : \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}(-h) \to \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$-modules qui est injectif et non surjectif dans les fibres géométriques.*

Lemme 4.2. *Soient s un entier, Y un schéma et $\mathcal{Q}$ une famille de surfaces de degré s contenue dans $\mathbf{P}^3 \times Y$, plate sur Y. Soit f la projection de $\mathbf{P}^3 \times Y$ sur Y. Alors pour tout $i \geq 0$ et pour tout n, $R^i f_* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(n)$ est localement libre sur Y et commute au changement de base.*

Démonstration. D'après VI 1.7, il suffit de montrer que pour tout $i \geq 1$ et pour tout n, $R^i f_* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(n)$ est localement libre sur Y. Puisque pour toute fibre Q de $\mathcal{Q}$ en un point de Y, $H^3 \mathcal{O}_Q(n)$ et $H^1 \mathcal{O}_Q(n)$ sont nuls, on a $R^3 f_* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(n) = R^1 f_* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(n) = 0$. On en déduit que $R^2 f_* \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(n)$ commute au changement de base et est localement libre sur Y.

Lemme 4.3. *Soient h et s des entiers, Y un schéma, $(\mathcal{C},\mathcal{Q})$ un drapeau de type $(\gamma,\rho;s)$ sur Y, $\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}$ le faisceau d' idéaux qui définit $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{Q}$. Pour tout morphisme $w : Y_1 \to Y$, si $v : \mathbf{P}^3 \times Y_1 \to \mathbf{P}^3 \times Y$ est le morphisme induit, si $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{Q}_1$) est l'image réciproque de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{Q}$) par v, et $\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1/\mathcal{Q}_1}$ le faisceau d' idéaux qui définit $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{Q}_1$, l'homomorphisme canonique :*

$$v^*\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1/\mathcal{Q}_1}$$

est un isomorphisme. On en déduit un homomorphisme canonique :

$$v^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\mathcal{Q}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}(-h),\mathcal{O}_\mathcal{Q}) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_1}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1/\mathcal{Q}_1}(-h),\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_1})$$

qui est un isomorphisme. De plus, si f (resp. f_1) est la projection de $\mathbf{P}^3 \times Y$ sur Y (resp. $\mathbf{P}^3 \times Y_1$ sur Y_1), $f_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\mathcal{Q}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}(-h),\mathcal{O}_\mathcal{Q})$ est localement libre sur Y et commute au changement de base. En particulier, l'homomorphisme canonique :

$$u^*f_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\mathcal{Q}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}(-h),\mathcal{O}_\mathcal{Q}) \to f_{1*}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_1}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}_1/\mathcal{Q}_1}(-h),\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_1})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Puisque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{Q}$ sont plats sur Y, l'homomorphisme canonique $v^*\mathcal{J}_\mathcal{C} \to \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1}$ (resp. $v^*\mathcal{J}_\mathcal{Q} \to \mathcal{J}_{\mathcal{Q}_1}$) est un isomorphisme et on a donc le même résultat pour $\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}$.

On peut supposer qu'il existe une résolution de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}$ -modules :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y} \to \mathcal{O}_\mathcal{Q} \to 0.$$

En effet c'est vrai localement sur Y (globalement, il faut faire intervenir le faisceau inversible sur Y, image réciproque du faisceau $\mathcal{O}_\mathbf{P}(1)$ sur $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_\mathbf{P}(s))^*)$), et le résultat annoncé est local sur Y.

En utilisant le fait que $\mathcal{C}$ est contenue dans $\mathcal{Q}$, on en déduit, comme dans la démonstration de 3.5, un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\mathcal{Q}}(\mathcal{O}_\mathcal{C}(-h),\mathcal{O}_\mathcal{Q}) \simeq \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_\mathcal{C}(-h),\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s)) \simeq \omega_\mathcal{C}(h+4-s).$$

D'après 2.3, dans le diagramme commutatif suivant, dont les flèches verticales sont les flèches canoniques :

$$\begin{array}{ccc}
v^*\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_\mathcal{Q}}(\mathcal{O}_\mathcal{C}(-h),\mathcal{O}_\mathcal{Q}) & \simeq & v^*\mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}}(\mathcal{O}_\mathcal{C}(-h),\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}(-s)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_1}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1}(-h),\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_1}) & \simeq & \mathcal{E}xt^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y_1}}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}_1}(-h),\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y_1}(-s))
\end{array}$$

la deuxième est un isomorphisme, donc aussi la première.

D'autre part, on a une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}\times Y}$-modules :

$$0 \to \mathcal{J}_{C/Q} \to \mathcal{O}_Q \to \mathcal{O}_C \to 0$$

d'où l'on déduit une autre suite exacte :

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{O}_Q(h) \to \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) \to \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C(-h), \mathcal{O}_Q) \to 0.$$

Par changement de base, on obtient un diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} & v^*\mathcal{O}_Q(-h) \to & v^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) & \to & v^*\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{O}_C(-h), \mathcal{O}_Q) & \to 0 \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \mathcal{O}_{Q_1}(-h) \to & \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Q_1}}(\mathcal{J}_{C_1/Q_1}(-h), \mathcal{O}_{Q_1}) & \to & \mathcal{E}xt^1_{\mathcal{O}_{Q_1}}(\mathcal{O}_{C_1}(-h), \mathcal{O}_{Q_1}) & \to 0 \end{array}$$

dont les flèches verticales sont les flèches canoniques, la première étant évidemment un isomorphisme.

On en déduit donc l'isomorphisme annoncé.

De $(*)$, on déduit, en prenant les images directes, une suite exacte de $\mathcal{O}_Y$-modules :

$$0 \to f_*\mathcal{O}_Q(h) \to f_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) \to f_*\omega_C(h+4-s) \to R^1 f_*\mathcal{O}_Q(h)$$

Or d'après 4.2, $R^1 f_*\mathcal{O}_Q(-h)$ est nul et $f_*\mathcal{O}_Q(h)$ est localement libre et commute au changement de base. Il en est de même pour $f_*\omega_C(h+4-s)$ d'après 2.5, donc aussi pour $f_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q)$.

On obtient donc un isomorphisme composé :

$$\begin{aligned} w^* f_*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) &\simeq f_{1*}v^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h), \mathcal{O}_Q) \\ &\simeq f_{1*}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{Q_1}}(\mathcal{J}_{C_1/Q_1}(-h), \mathcal{O}_{Q_1}). \end{aligned}$$

Corollaire 4.4. *La définition 4.1 est fonctorielle en Y. On définit ainsi un foncteur $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ des données de biliaison de type $(\gamma,\rho;s,h)$, canoniquement muni d'une projection sur $H_{\gamma,\rho}$. Si M est un module de E_ρ, on définit de manière analogue un foncteur $\mathcal{B}_{\gamma,M;s,h}$ des données de biliaison de type $(\gamma, M; s, h)$.*

Lemme 4.5. *Avec les mêmes notations qu'en 4.3, supposons de plus que Y soit de type fini sur k et soit $u : \mathcal{J}_{C/Q}(-h) \to \mathcal{O}_Q$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_Q$-modules. Soit $\mathcal{O}_{C'}$ le conoyau de u. L'ensemble des points de Y où la fibre de u est injective est réunion de deux ouverts disjoints, le premier est l'ensemble* *des points où la fibre de $\mathcal{C}'$ est vide, le deuxième est l'ensemble des points où la fibre de $\mathcal{C}'$ est une courbe et la restriction de $\mathcal{C}'$ à cet ouvert est une famille de courbes plate sur Y.*

Démonstration. D'après III 2.6, l'ensemble des points de Y où la fibre de u n'est pas injective est l'ensemble des points de Y où la fibre de $\mathcal{C}'$ est de dimension 2. Puisque $\mathcal{C}'$ est propre sur Y, la dimension des fibres croît par spécialisation, donc cet ensemble est un fermé de Y. Soit Y_1 l'ouvert complémentaire, et notons $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{Q}_1$, resp. $\mathcal{C}'_1$, resp. u_1) la restriction de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{Q}$, resp. $\mathcal{C}'$, resp. u) à cet ouvert. On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}_{\mathcal{C}_1/\mathcal{Q}_1}(-h) \xrightarrow{u_1} \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{C}'_1} \longrightarrow 0.$$

qui reste exacte dans les fibres géométriques, puisque la fibre de u est injective. Donc pour tout point y de Y_1, on a $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_{\mathcal{C}'}, k(y)) = 0$ et $\mathcal{C}'_1$ est plat sur Y_1 d'après le critère supérieur de platitude. En particulier l'ensemble des points de Y_1 où la fibre de $\mathcal{C}'_1$ est une courbe (resp. est vide) est un ouvert (et un fermé) de Y_1, donc un ouvert de Y.

Théorème 4.6. *Le foncteur $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ est représentable par un schéma lisse sur $H_{\gamma,\rho}$. De plus, si γ' (resp. ρ') est le caractère (resp. la fonction de Rao) d'une courbe biliée à une courbe de $H_{\gamma,\rho}$ par une biliaison élémentaire (s,h), on a un isomorphisme : $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h} \simeq \mathcal{B}_{\gamma',\rho';s,-h}$, qui à un triplet (C,Q,u), associe le triplet (C',Q,u'), où C' est obtenue à partir de C par la biliaison élémentaire correspondant à u et où l'on a $u' = u^{-1}(-h)$.*

Démonstration. Notons encore pour simplifier $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$. Dans $\mathbf{P}^3 \times \mathcal{D}$ on a une courbe $\mathcal{C}$ (resp. une surface $\mathcal{Q}$) universelle, image réciproque de la courbe (resp. de la surface) universelle au-dessus de $H_{\gamma,\rho}$ (resp. $\mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(s))^*)$). Si φ est la projection de $\mathbf{P}^3 \times \mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$, le faisceau $\mathcal{F} = \varphi_* \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}(-h), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}})$ est localement libre sur $\mathcal{D}$ et commute au changement de base (cf. 4.3).

Posons $\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}^\vee)$, c'est un fibré vectoriel lisse sur $\mathcal{D}$. Soient $\mathcal{F}_0$ (resp. $\mathcal{C}_0$, resp. $\mathcal{Q}_0$) l'image réciproque de $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{C}$, resp. $\mathcal{Q}$) sur $\mathbf{V}_0$ (resp. $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{V}_0$), et φ_0 la projection de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{V}_0$ sur $\mathbf{V}_0$.

Sur $\mathbf{V}_0$ on a une section universelle du faisceau $\mathcal{F}_0$. Mais, d'après 4.3, on a un isomorphisme canonique : $\mathcal{F}_0 \simeq \varphi_{0*}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_0}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}_0/\mathcal{Q}_0}(-h), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_0})$. Par adjonction on en déduit une section universelle de $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_0}}(\mathcal{J}_{\mathcal{C}_0/\mathcal{Q}_0}(-h), \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_0})$ donc un homomorphisme universel $u_0 : \mathcal{J}_{\mathcal{C}_0/\mathcal{Q}_0}(-h) \to \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_0}$. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{C}'}$ le conoyau. On note qu'on a $\mathcal{J}_{\mathcal{C}'/\mathcal{Q}} \simeq \mathcal{J}_{\mathcal{C}/\mathcal{Q}}(-h)$. D'après 4.5, il existe un ouvert $\mathbf{V}_1$ de $\mathbf{V}_0$ qui représente le foncteur $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ et la restriction de $\mathcal{C}'$ à cet ouvert est une famille de courbes plate sur $\mathbf{V}_1$.

Pour prouver l'existence de la flèche annoncée de $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ dans $\mathcal{B}_{\gamma',\rho';s,-h}$, il reste à montrer que $\mathcal{J}_{\mathcal{C}'}$ est à cohomologie constante. Désignons par π la projection de $\mathbf{P}^3 \times \mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ sur $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$, on a une suite d'isomorphismes :

$$R^1\pi_*\mathcal{J}_C \simeq R^1\pi_*\mathcal{J}_{C/Q} \simeq R^1\pi_*\mathcal{J}_{C'/Q}(h) \simeq R^1\pi_*\mathcal{J}_{C'}(h)$$

donc pour tout n, $R^1\pi_*\mathcal{J}_{C'}(n)$ est localement libre et commute au changement de base.

On a évidemment aussi une flèche de $\mathcal{B}_{\gamma',\rho';s,-h}$ dans $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ et il est immédiat que c'est la réciproque de la précédente.

Théorème 4.7. *Le foncteur $\mathcal{B}_{\gamma,M;s,h}$ est représentable par un schéma lisse sur $H_{\gamma,M}$. De plus, si γ' est le caractère d'une courbe biliée à une courbe de $H_{\gamma,M}$ par une biliaison élémentaire (s,h), et $M' = M(-h)$, on a un isomorphisme : $\mathcal{B}_{\gamma,M;s,h} \simeq \mathcal{B}_{\gamma',M';s,-h}$, qui à un triplet (C,Q,u), associe le triplet (C',Q,u'), où C' est obtenue à partir de C par la biliaison élémentaire correspondant à u et où l'on a $u' = u^{-1}(-h)$.*

Démonstration. Elle est immédiate puisqu'on a mis en évidence en montrant 4.6 des isomorphismes $R^1\pi_*\mathcal{J}_C(n) \simeq R^1\pi_*\mathcal{J}_{C'}(n+h)$.

Corollaire 4.8. *L'image de $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ (resp. $\mathcal{B}_{\gamma,M;s,h}$) par la projection canonique est un ouvert de $H_{\gamma,\rho}$ (resp. $H_{\gamma,M}$). Soit C une courbe de cet ouvert. La fibre de $\mathcal{B}_{\gamma,\rho;s,h}$ (resp. $\mathcal{B}_{\gamma,M;s,h}$) au-dessus de C est de dimension $h^0\mathcal{J}_C(s) + h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(h) - h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(h-s) + h^1\mathcal{O}_C(s-h-4) - 1$.*

Démonstration. Soit Q une surface de degré s contenant C. On montre comme dans la démonstration de 4.3 qu'on a une suite exacte :

$$0 \to H^0\mathcal{O}_Q(h) \to H^0\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Q}(\mathcal{J}_{C/Q}(-h),\mathcal{O}_Q) \to H^0\omega_C(h+4-s) \to 0.$$

Donc la dimension relative de $\mathbf{V}_0$ sur $\mathcal{D}_{\gamma,\rho;s}$ est égale à :

$$h^0\mathcal{O}_Q(h) + h^0\omega_C(h+4-s) = h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(h) - h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(h-s) + h^1\mathcal{O}_C(s-h-4)$$

d'où le résultat.

Remarque 4.9. En utilisant III 2.7, on peut préciser deux cas où cette fibre n'est pas vide :
- si on a $h > 0$, et $s \geq s_0$;
- si C est intègre, et si on a $h < 0$ et $s = s_0$.

VIII ESPACES TANGENTS

Dans ce numéro nous déterminons les espaces tangents aux divers schémas qui stratifient le schéma de Hilbert $H_{d,g}$, (c'est-à-dire H_γ, H_σ, $H_{\gamma,\rho}$, $H_{\gamma,M}$). Ces espaces tangents s'expriment en général en termes de certains des groupes Ext associés aux faisceaux (ou aux R-modules) qui interviennent dans les résolutions de types E et N des courbes.

1. Rappels.

a. Espace tangent à un foncteur.

Soit $H : \underline{Sch}/k \to \underline{Ens}$ un foncteur contravariant. Si $k[\epsilon]$ est l'algèbre des nombres duaux (c'est-à-dire si on a $\epsilon^2 = 0$), et si $p : k[\epsilon] \to k$ est la réduction modulo ϵ, il lui est associé une flèche $H(p) : H(\mathrm{Spec}k[\epsilon]) \to H(\mathrm{Spec}k)$.

Définition 1.1. *Soit x un point rationnel de H (c'est-à-dire un élément de $H(\mathrm{Spec}k)$). L'espace tangent à H en x est défini par :*

$$T_{H,x} = \{\xi \in H(\mathrm{Spec}k[\epsilon]) \mid H(p)(\xi) = x\}.$$

b. Modules plats sur $k[\epsilon]$.

Soit M_ϵ un $k[\epsilon]$-module. On note encore p la réduction modulo ϵ sur M_ϵ; la flèche $p : M_\epsilon \to M = M_\epsilon \otimes_{k[\epsilon]} k = M_\epsilon/\epsilon M_\epsilon$ est surjective. Soit d'autre part u l'homomorphisme de $k[\epsilon]$-modules de M dans M_ϵ défini par $u(p(x)) = \epsilon x$. On a alors la proposition suivante:

Proposition 1.2. *Avec les notations précédentes, M_ϵ est plat sur $k[\epsilon]$ si et seulement si la suite $0 \to M \xrightarrow{u} M_\epsilon \xrightarrow{p} M \to 0$ est exacte, ou, ce qui revient au même, si u est injectif.*

Corollaire 1.3.
a) Soit R une k-algèbre, M un R-module, $R_\epsilon = R \otimes_k k[\epsilon]$. On a une bijection entre le groupe $\mathrm{Ext}^1_R(M, M)$ et l'ensemble des R_ϵ-modules M_ϵ se réduisant sur M modulo ϵ et plats sur $k[\epsilon]$, à isomorphisme près sur $k[\epsilon]$. L'extension triviale correspond au module $M \otimes_k k[\epsilon]$.
b) Soit X un k-schéma, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module, $X_\epsilon = X \otimes_k k[\epsilon]$. On a une bijection entre le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$ et l'ensemble des $\mathcal{O}_{X_\epsilon}$-modules $\mathcal{M}_\epsilon$ se réduisant sur $\mathcal{M}$ modulo ϵ et plats sur $k[\epsilon]$, à isomorphisme près sur $k[\epsilon]$.

c. Espace tangent à $H_{d,g}$.

Soit C un point rationnel de $H_{d,g}$. Un point de l'espace tangent $T_{d,g} = T_{d,g;C}$ en C est une courbe C_ϵ, plate sur $k[\epsilon]$ et dont la réduction modulo ϵ est C. Il lui correspond un idéal $\mathcal{J}_{C_\epsilon}$ de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\epsilon}$, avec la suite exacte fournie par 1.2 :

$$(*) \qquad 0 \to \mathcal{J}_C \xrightarrow{u} \mathcal{J}_{C_\epsilon} \xrightarrow{p} \mathcal{J}_C \to 0,$$

qui donne en particulier un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Proposition 1.4. *L'espace tangent $T_{d,g;C}$ est isomorphe à* $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$.

Démonstration. On a vu ci-dessus comment un point C_ϵ de $T_{d,g;C}$ fournit une extension de $\mathcal{J}_C$ par lui-même. Réciproquement, considérons le faisceau normal à C dans $\mathbf{P}^3$:

$$N_C = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{J}_C/\mathcal{J}_C^2, \mathcal{O}_C) \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C).$$

On a $H^0(C, N_C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C)$ et on a un homomorphisme canonique :

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C).$$

Lemme 1.5. *L'homomorphisme θ est un isomorphisme.*

Démonstration. Cela résulte aussitôt de 0 3.2.

Soit alors un élément ξ de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$, que l'on peut écrire $\xi = \theta(\varphi)$ avec φ dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C)$ (ou dans $H^0(C, N_C)$). On lui associe une extension $\mathcal{G}_\xi$ qui s'obtient comme le produit fibré $\mathcal{J}_C \times_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_\mathbf{P}$, avec le diagramme commutatif de suites exactes :

$$(**) \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_C & \longrightarrow & \mathcal{G}_\xi & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{J}_C & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_C & \longrightarrow & \mathcal{O}_\mathbf{P} & \longrightarrow & \mathcal{O}_C & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

De plus, $\mathcal{G}_\xi$ est isomorphe à un idéal de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\epsilon}$. En effet, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\epsilon}$ est une extension triviale de $\mathcal{O}_\mathbf{P}$ par lui-même, donc est isomorphe à $\mathcal{O}_\mathbf{P} \oplus \mathcal{O}_\mathbf{P}$, et on réalise le plongement par la flèche (φ', π). Alors, vu 1.3, $\mathcal{G}_\xi$ définit une courbe C_ϵ plate sur $k[\epsilon]$, donc un point de $T_{d,g;C}$ et il est clair que les deux applications ainsi définies sont réciproques l'une de l'autre.

Soit ξ un élément de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$. Il définit une suite exacte $(*)$ comme ci-dessus, dont on déduit une suite exacte de cohomologie. On note $\delta_{\xi,i}(n)$

l'homomorphisme de connexion de $H^i\mathcal{J}_C(n)$ dans $H^{i+1}\mathcal{J}_C(n)$. Par ailleurs, si on a $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C)$, on a les flèches $H^i\varphi(n) : H^i\mathcal{J}_C(n) \to H^i\mathcal{O}_C(n)$, et, vu la suite exacte $0 \to \mathcal{J}_C \to \mathcal{O}_\mathbf{P} \to \mathcal{O}_C \to 0$, on a également des homomorphismes de connexion : $\Delta_i(n) : H^i\mathcal{O}_C(n) \to H^{i+1}\mathcal{J}_C(n)$. On note que Δ_0 est surjective, que Δ_1 est un isomorphisme et que Δ_i est nul pour $i \geq 2$. On a alors le résultat suivant :

Lemme 1.6. *Avec les notations précédentes, si $\xi = \theta(\varphi)$, on a $\delta_{\xi,i}(n) = \Delta_i(n) \circ H^i\varphi(n)$ pour tous les entiers i et n.*

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration de 1.4 et notamment le diagramme (**). On en déduit en écrivant les suites exactes longues que l'on a un carré commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^i\mathcal{J}_C(n) \arrow[r, "\delta_{\xi,i}(n)"] \arrow[d, "H^i\varphi(n)"] & H^{i+1}\mathcal{J}_C(n) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^i\mathcal{O}_C(n) \arrow[r, "\Delta_i(n)"] & H^{i+1}\mathcal{J}_C(n) \arrow[r] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

et le lemme s'en déduit clairement.

2. Espaces tangents à H_γ, H_σ, $H_{\gamma,\rho}$, $H_{\gamma,M}$.

a. Description en termes d'Ext.

On a la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Soient γ, σ, ρ des caractères vérifiant $\gamma + \sigma = \partial^3\rho$, C un point rationnel de $H_{\gamma,\rho}$, et T_γ, T_σ, $T_{\gamma,\rho}$, les espaces tangents en C aux schémas H_γ, H_σ, $H_{\gamma,\rho}$. On a les formules :*

$$T_\gamma = \{\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \mid \forall n \in \mathbf{N} \quad \delta_{\xi,0}(n) = 0\},$$

$$T_\sigma = \{\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \mid \forall n \in \mathbf{N} \quad \delta_{\xi,1}(n) = 0\},$$

$$T_{\gamma,\rho} = \{\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \mid \forall n \in \mathbf{N}, \forall i = 0,1 \quad \delta_{\xi,i}(n) = 0\}.$$

On vérifie en particulier que l'on a : $T_\gamma \cap T_\sigma = T_{\gamma,\rho}$ (cf. VI 3.14).

Démonstration. Comme les schémas en question sont des sous-foncteurs de $H_{d,g}$, leurs espaces tangents sont inclus dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$. Si ξ est un élément de cet espace il définit une extension $\mathcal{J}_{C_\epsilon}$ avec une suite exacte (*) comme en 1.c. Dire que ξ est dans T_γ (resp. T_σ, resp. $T_{\gamma,\rho}$) signifie que $R^i\pi_*\mathcal{J}_{C_\epsilon}(n) = H^i(\mathbf{P}_\epsilon, \mathcal{J}_{C_\epsilon}(n))$ est localement libre (ou simplement plat) sur $k[\epsilon]$ du rang défini par γ (resp. σ, resp. γ et ρ) et commute au changement de base et ce pour $i = 0$ (resp. $i = 2$, resp. $i = 0, 1, 2$). Les conditions précédentes, au cran i, signifient encore :

1) que la flèche $H^i(p) : H^i\mathcal{J}_{C_\epsilon}(n) \to H^i\mathcal{J}_C(n)$ est surjective (commutation au changement de base, cf. [H] III 12.11).

2) que la flèche $H^i(f) : H^i\mathcal{J}_C(n) \to H^i\mathcal{J}_{C_\epsilon}(n)$ est injective (platitude, cf. 1.2).

Elles s'expriment donc par la nullité des homomorphismes de connexion, comme indiqué dans l'énoncé, en tenant compte du fait que $\delta_{\xi,2}(n)$ est nul pour tout n (car $H^3\mathcal{J}_C(n)$ est isomorphe à $H^3\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$).

b. Description de T_γ.

Soit C un point de H_γ, T_γ l'espace tangent en ce point et considérons la résolution de type E de $\mathcal{J}_C$:

$$0 \to \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathcal{J}_C \to 0,$$

avec $\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n_i)$. Soit $\tau : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{F}, \mathcal{J}_C)$ la flèche naturelle associée à cette suite exacte.

Théorème 2.2.
1) On a $T_\gamma \simeq \mathrm{Ext}^1_R(I_C, I_C)^0$.
2) On $T_\gamma = \mathrm{Ker}\tau$.

Démonstration. Soit $\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$, soit $\mathcal{G}_\epsilon$ l'extension associée et posons $G_\epsilon = H^0_*\mathcal{G}_\epsilon$. En passant à la cohomologie on obtient la suite exacte:

$$0 \to I_C \longrightarrow G_\epsilon \longrightarrow I_C \xrightarrow{\delta_{\xi,0}} M_C \to \cdots$$

où $\delta_{\xi,0}$ est la somme directe des $\delta_{\xi,0}(n)$. On retrouve ainsi la suite exacte de comparaison (cf. 0 2.1):

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(I_C, I_C)^0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_R(I_C, M_C)^0 \to \cdots$$

dans laquelle α associe à ξ l'homomorphisme $\delta_{\xi,0}$. Il en résulte que l'espace tangent T_γ s'identifie à $\mathrm{Ker}\alpha = \mathrm{Ext}^1_R(I_C, I_C)^0$ d'où la première assertion.

Posons maintenant $F = H^0_*\mathcal{F}$. Par fonctorialité de la suite exacte de comparaison (appliquée aux flèches π et $\tilde{\pi}$), on a le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Hom}_R(I_C, M_C)^0 \\
\downarrow{\scriptstyle \tau} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_1} \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{F}, \mathcal{J}_C) & \xrightarrow{\alpha_1} & \mathrm{Hom}_R(F, M_C)^0.
\end{array}$$

Comme F est libre, α_1 est un isomorphisme. De plus, τ_1 est injectif donc on a $\mathrm{Ker}\alpha = \mathrm{Ker}\tau$, d'où le second résultat.

c. Description de T_σ.

Soit C un point de H_σ, T_σ l'espace tangent en ce point et considérons la résolution de type N de $\mathcal{J}_C$:

$$0 \to \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}} \mathcal{J}_C \to 0,$$

avec $\mathcal{P} = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d_i)$. Soit $\tau' : \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C) \to \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{P})$ la flèche naturelle associée à cette suite exacte. On rappelle que A_C désigne l'anneau $H^0_*\mathcal{O}_C$.

Théorème 2.3.
1) On a $T_\sigma \simeq \mathrm{Ext}^1_R(A_C, A_C)^0$.
2) On a $T_\sigma = \mathrm{Ker}\tau'$.

Démonstration. 1) Soit $\xi \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{J}_C)$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C)$ tel que l'on ait $\xi = \theta(\varphi)$ (cf. 1.5). On considère l'homomorphisme gradué :

$$H^1_*\varphi : M_C = H^1_*\mathcal{J}_C \to H^1_*\mathcal{O}_C \simeq H^2_*\mathcal{J}_C.$$

La condition $\delta_{\xi,1}(n) = 0$ pour tout n, qui définit l'espace tangent T_σ, signifie simplement que $H^1_*\varphi$ est nul, autrement dit, si l'on pose $B_C = H^1_*\mathcal{O}_C$, T_σ est le noyau de $H^1_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) \to \mathrm{Hom}_R(M_C, B_C)^0$. La fonctorialité de la suite exacte de comparaison (cf. 0 2.1) montre alors qu'on a le diagramme commutatif de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & T_\sigma & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{O}_C) & \xrightarrow{H^1_*} & \mathrm{Hom}_R(M_C, B_C)^0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Ext}^1_R(A_C, A_C)^0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(A_C, B_C)^0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}, \mathcal{O}_C) & \simeq & \mathrm{Hom}_R(R, B_C)^0
\end{array}$$

On en déduit aussitôt l'isomorphisme cherché.

2) Posons $P = H^0_*\mathcal{P}$. Comme on a $H^2_*\mathcal{N} = 0$, la flèche $i : H^2_*\mathcal{J}_C \to H^3_*\mathcal{P}$ est injective de sorte que la condition $H^1_*\varphi = 0$ est encore équivalente à $\alpha = i \circ H^1_*\varphi = 0$. La dualité sur $\mathbf{P}^3$ montre que l'on a $H^3_*\mathcal{P} = \check{P}(-4)^*$ donc $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(M_C, \check{P}(-4)^*)$.

Considérons maintenant $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{J}_C, \mathcal{P})$. Par dualité de Serre cet espace est isomorphe à $H^1(\mathcal{J}_C \otimes \check{\mathcal{P}}(-4))^*$, ou encore à $\mathrm{Hom}_R(P(4), M_C)^*$. D'après 0 1.10 on a un isomorphisme naturel $\chi : (\mathrm{Hom}_R(P(4), M_C)^0)^* \to \mathrm{Hom}_R(M_C, \check{P}(-4)^*)^0$ et on vérifie la formule $\chi(\tau'(\xi)) = \alpha$, ce qui achève la démonstration.

d. Description de $T_{\gamma,\rho}$ avec la résolution de type E.

La suite exacte $(*)$: $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0$ permet de définir deux flèches f et g, avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{J}_C) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{J}_C) \\
\downarrow & & \downarrow g & & & & \\
0 = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{E}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}), & & & &
\end{array}$$

en particulier on a $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker}\tau = T_\gamma$. De plus, comme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{F},\mathcal{E})$ est nul, la flèche g est nulle sur $\mathrm{Ker} f$ donc induit un homomorphisme $\overline{g} : \mathrm{Im} f = T_\gamma \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{E},\mathcal{E})$. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{E},\mathcal{J}_C)$. On pose $\xi = f(\varphi)$, $\zeta = g(\varphi)$; ξ (resp. ζ) définit une extension de $\mathcal{J}_C$ par $\mathcal{J}_C$ (resp. de $\mathcal{E}$ par $\mathcal{E}$) et on a des morphismes de connexion : $\delta_{\xi,1} : H^1_*\mathcal{J}_C \to H^2_*\mathcal{J}_C$ et $\delta_\zeta : H^2_*\mathcal{E} \to H^3_*\mathcal{E}$. L'espace tangent $T_{\gamma,\rho}$ est formé des $\xi = f(\varphi)$ tels que $\delta_{\xi,1} = 0$ et on en a la description suivante :

Proposition 2.4. *Posons $A = \{\zeta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{E},\mathcal{E}) \mid \delta_\zeta = 0\}$. On a : $T_{\gamma,\rho} = \overline{g}^{-1}(A)$.*

Démonstration. La suite exacte $(*)$ donne lieu à deux morphismes d_1 : $H^1_*\mathcal{J}_C \simeq H^2_*\mathcal{E}$ et $d_2 : H^2_*\mathcal{J}_C \to H^3_*\mathcal{E}$, qui est injectif. La proposition résulte aussitôt du lemme suivant :

Lemme 2.5. *On a $\delta_{\xi,1} = H^2_*\varphi \circ d_1$ et $\delta_\zeta = d_2 \circ H^2_*\varphi$. En particulier, on a $\delta_{\xi,1} = 0$ si et seulement si $\delta_\zeta = 0$.*

Démonstration. Le fait que $\xi = f(\varphi)$ se traduit par le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{J}_C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \varphi & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_C & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{J}_C & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

En passant à la cohomologie on obtient :

$$\begin{array}{ccc}
H^1_*\mathcal{J}_C & \xrightarrow{d_1} & H^2_*\mathcal{E} \\
\| & & \downarrow H^2_*\varphi \\
H^1_*\mathcal{J}_C & \xrightarrow{\delta_{\xi,1}} & H^2_*\mathcal{J}_C
\end{array}$$

d'où la première égalité. La deuxième se montre de la même manière. Alors, puisque d_1 est un isomorphisme et d_2 injectif, on a $\delta_{\xi,1} = 0 \Leftrightarrow \delta_\zeta = 0$.

e. Description de $T_{\gamma,\rho}$ avec la résolution de type N.

La suite exacte (**) : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0$ permet de définir deux flèches f' et g', avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{P}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{N}) & \xrightarrow{f'} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) & \xrightarrow{\tau'} & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{P}) \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g'} & & & & \\
0=\mathrm{Ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{P}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N}), & & & &
\end{array}$$

en particulier on a $\mathrm{Im} f' = \mathrm{Ker}\tau' = T_\sigma$. De plus, comme $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{N},\mathcal{P})$ est nul, la flèche g' est nulle sur $\mathrm{Ker} f'$ donc induit une flèche $\overline{g}' : \mathrm{Im} f' = T_\sigma \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$. Si η est dans $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$, on appelle δ_η l'homomorphisme de connexion : $H^0_*\mathcal{N} \to H^1_*\mathcal{N}$ associé et on a le résultat suivant :

Proposition 2.6. *Posons $A' = \{\eta \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{N},\mathcal{N}) \mid \delta_\eta = 0\}$, on a : $T_{\gamma,\rho} = \overline{g}'^{-1}(A')$.*

Démonstration. Soit $\xi_0 \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{J}_C,\mathcal{N})$ et posons $\xi = f'(\xi_0)$ et $\eta = g'(\xi_0)$. Ces trois éléments correspondent respectivement à des extensions $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}''$ avec le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes et où $\tilde{\epsilon}$ est l'homomorphisme canonique, (cf. II 4) :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{G}'' & \longrightarrow & \mathcal{N} & \to & 0 \\
& & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\epsilon}} & & \\
0 & \to & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{J}_C & \to & 0 \\
& & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\epsilon}} & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & \mathcal{J}_C & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{J}_C & \to & 0.
\end{array}$$

En écrivant les suites exactes de cohomologie on voit que l'homomorphisme de connexion $\delta_{\xi,1} : H^0_*\mathcal{J}_C \to H^1_*\mathcal{J}_C$ est nul si et seulement si δ_η l'est, ce qui démontre la proposition.

Remarque 2.7. Avec les notations de la démonstration précédente, si ξ est un élément de $T_{\gamma,\rho}$ il définit deux extensions de M_C par lui-même, l'une $H^1_*\mathcal{G}'$ obtenue à partir de l'extension de $\mathcal{J}_C$, l'autre $H^1_*\mathcal{G}''$ obtenue à partir de celle de $\mathcal{N}$. La méthode ci-dessus montre aussitôt qu'elles sont isomorphes.

Remarque 2.8. On a une suite exacte $0 \to \mathcal{N} \xrightarrow{i} \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \to 0$ qui induit des homomorphismes surjectifs $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_0) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{L}_1,\mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{N},\mathcal{N})$. Si α' est la flèche composée, A' est l'image par α' de l'espace :

$$\widehat{A}' = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_\mathbf{P}}(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_0) \mid d\,H^0_*\varphi\, H^0_* i = 0\}$$

où $d : H^0_*\mathcal{L}_0 \to H^1_*\mathcal{N}$ est le morphisme de connexion associé à la suite exacte. Si on pose $N = H^0_*\mathcal{N}$, $L_i = H^0_*\mathcal{L}_i$ et $M = M_C = H^1_*\mathcal{N}$, comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0)$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_R(L_1, L_0)^0$, on peut encore décrire $\widehat{A}'$ comme l'ensemble des $\varphi : L_1 \to L_0$ tels que le composé $N \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\varphi} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M$ soit nul, σ_2 et σ_0 désignant les morphismes canoniques.

f. Description des sous-espaces A et A'.

Nous conservons les notations de d. et e. On a une première description de A et A' à l'aide des R-modules N et $\check{E}$:

Proposition 2.9. *On a* $A \simeq \mathrm{Ext}^1_R(\check{E}, \check{E})^0$ *et* $A' \simeq \mathrm{Ext}^1_R(N, N)^0$.

Démonstration. Le second isomorphisme est issu de la suite exacte de comparaison (cf. 0 2.1), l'autre se montre de manière identique, à dualité près.

Nous allons maintenant prouver que A et A' sont tous deux isomorphes à $\mathrm{Ext}^1_R(M_C, M_C)^0$. Remarquons tout d'abord que si ζ (resp. η) est un élément de A (resp. A') il définit une extension de $H^2_*\mathcal{E}$ (resp. $H^1_*\mathcal{N}$) par lui-même, donc, dans les deux cas une extension de M_C par M_C. On a ainsi des homomorphismes naturels $\lambda : A \to \mathrm{Ext}^1_R(M_C, M_C)^0$ et $\lambda' : A' \to \mathrm{Ext}^1_R(M_C, M_C)^0$.

Proposition 2.10. *Les homomorphismes λ et λ' sont des isomorphismes.*

Démonstration. Posons $M = M_C$. Nous faisons la démonstration pour λ', l'autre est analogue par dualité. On a les suites exactes habituelles :

$$0 \to \mathcal{N} \xrightarrow{\tilde{\imath}_2} \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\tilde{\sigma}_1} \mathcal{L}_0 \to 0,$$

$$0 \to N \xrightarrow{i_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \to 0.$$

On pose $K = \mathrm{Ker}\sigma_0$. On commence par remarquer que les espaces considérés sont isomorphes. En effet, on a :

$$\mathrm{Ext}^1_R(M, M)^0 \simeq \mathrm{Ext}^2_R(M, K)^0 \simeq \mathrm{Ext}^3_R(M, N)^0$$

$$\mathrm{Ext}^1_R(N, N)^0 \simeq \mathrm{Ext}^2_R(K, N)^0 \simeq \mathrm{Ext}^3_R(M, N)^0$$

et on conclut par 2.9.

Le problème est de prouver que la flèche λ' est un isomorphisme. Il suffit de voir qu'elle est injective. Soit $\eta \in A'$. On a vu en 2.8 qu'il provient d'un élément η_0 de $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{L}_1, \mathcal{N})$. Ces éléments correspondent à des extensions $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}_0$ et on voit aisément qu'on a le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\imath}_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] & \mathcal{G}_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\sigma}_1"] & 0 \\
 & & \mathcal{L}_0 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathcal{L}_0 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En passant à la cohomologie on obtient :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r] \arrow[d, equal] & G \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r, "d"] \arrow[d, "i_2"] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & H^1_*\mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & G_0 \arrow[r] \arrow[d] & L_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, "\sigma_1"] & M \arrow[r] \arrow[d] & H^1_*\mathcal{G}_0 \arrow[r] & 0 & \\
 & & L_0 \arrow[r, equal] \arrow[d, "u"] & L_0 \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_0"] & 0 & & & \\
 & & H^1_*\mathcal{G} \arrow[r] & M & & & &
\end{tikzcd}$$

Dire que η est dans A' c'est dire que l'on a $d = 0$ et l'extension associée à $\lambda'(\eta)$ n'est autre que $H^1_*\mathcal{G}$. On montre ensuite qu'on a l'égalité : $id_0 = u\sigma_1$. Pour cela, on revient au diagramme sur les faisceaux et l'assertion se voit facilement en utilisant par exemple la cohomologie de Čech. Si $\lambda'(\eta)$ est nul, la flèche i admet une rétraction s. Posons $t = su$. On a alors $sid_0 = su\sigma_1 = t\sigma_1$, d'où $d_0 = t\sigma_1$, autrement dit, la flèche $d_0 \in \mathrm{Hom}_R(L_1, M)^0$ se factorise par L_0, donc provient de $\mathrm{Hom}_R(L_0, M)^0$. La conclusion se voit alors en consultant le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{L}_0,\mathcal{N}) & \simeq & \mathrm{Hom}_R(L_0,M)^0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{L}_1,\mathcal{N}) & \simeq & \mathrm{Hom}_R(L_1,M)^0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & \mathrm{Ext}^1_R(N,N)^0 & \to & \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{N},\mathcal{N}) & \to & \mathrm{Hom}_R(N,M)^0 \end{array}$$

puisque l'image de l'élément η_0 dans $\mathrm{Hom}_R(L_1,M)^0$ n'est autre que d_0.

Si ξ est un élément de $T_{\gamma,\rho}$, il définit trois extensions de M_C par lui-même: celle (notée ξ') obtenue en le voyant comme une extension de $\mathcal{J}_C$ par lui-même dont les homomorphismes de connexion sont nuls et les extensions $\lambda\overline{g}(\xi)$ et $\lambda'\overline{g}'(\xi)$. On a alors :

Proposition 2.11. *Les trois extensions définies ci-dessus sont égales.*

Démonstration. Nous avons déjà noté en 2.7 l'égalité $\xi' = \lambda'\overline{g}'(\xi)$. L'autre se montre de manière un peu différente. Notons $\mathcal{G}'$ et $\mathcal{G}''$ les extensions correspondant à ξ et $\overline{g}(\xi)$. Ces extensions proviennent toutes deux d'un élément $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{E},\mathcal{J}_C)$, avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{E} & \xrightarrow{\alpha''} & \mathcal{G}'' & \xrightarrow{\beta''} & \mathcal{E} & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\ 0 & \to & \mathcal{E} & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & \mathcal{F} & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \mathcal{J}_C & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \| & & \\ 0 & \to & \mathcal{J}_C & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{G}' & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{J}_C & \to & 0 \end{array}$$

où la suite horizontale centrale est la résolution de type E de $\mathcal{J}_C$. On vérifie alors sans difficulté qu'on a le diagramme commutatif de suites exactes horizontales et verticales ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{E} & \xrightarrow{\alpha''} & \mathcal{G}'' & \xrightarrow{\beta''} & \mathcal{E} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\alpha}} & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\alpha}} & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\beta}} & & \downarrow{\scriptstyle v} & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\beta}} & & \\
0 & \rightarrow & \mathcal{J}_C & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{G}' & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{J}_C & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où l'on a posé $u = q \oplus -\alpha\beta''$ et $v = \alpha'\beta + p$. En écrivant les suites exactes de cohomologie pour les suites verticales, on voit que les extensions $H^1_*\mathcal{G}'$ et $H^2_*\mathcal{G}''$ qui correspondent respectivement à ξ' et à $\lambda\overline{g}(\xi)$ sont isomorphes ce qui achève de prouver la proposition.

f. Description de $T_{\gamma,M}$.

Soient M un R-module gradué de longueur finie et γ un caractère de postulation. Soit C un point de $H_{\gamma,M}$. Nous passons maintenant au calcul de $T_{\gamma,M}$, espace tangent à $H_{\gamma,M}$ en C.

Théorème 2.12. *On a :*

$$\begin{aligned} T_{\gamma,M} &= \mathrm{Ker}\overline{g} = f(\mathrm{Ker}g) \simeq \mathrm{Ker}g/\mathrm{Ker}f, \\ &= \mathrm{Ker}\overline{g}' = f'(\mathrm{Ker}g') \simeq \mathrm{Ker}g'/\mathrm{Ker}f'. \end{aligned}$$

Démonstration. On reprend les notations de VI 4.b et 4.c. La flèche naturelle $\widehat{\Phi} : \widehat{H}_{\gamma,\rho} \to \widehat{E}_\rho$, est lisse par VII 2.4. Rappelons qu'un point de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ à valeurs dans S est une courbe $\mathcal{C}_S$ plate sur S, à cohomologie constante, donnée par γ et ρ, et munie d'un isomorphisme de $\oplus_{n\in\mathbf{Z}} R^1\pi_*\mathcal{J}_{\mathcal{C}_S}(n)$ sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_S$. L'image par $\widehat{\Phi}$ de ce point n'est autre que la structure de module gradué induite sur $V_\rho \otimes \mathcal{O}_S$ par cet isomorphisme. Le schéma $\widehat{H}_{\gamma,M}$ est la fibre en $M \otimes \mathcal{O}_S$ de ce morphisme. Par ailleurs, $H_{\gamma,\rho}$ (resp. $H_{\gamma,M}$) est le quotient de $\widehat{H}_{\gamma,\rho}$ (resp. $\widehat{H}_{\gamma,M}$) sous l'action du groupe G (cf. VI 4.1) (resp. du groupe Aut$M$). En passant aux espaces tangents on obtient le diagramme commutatif de suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{End}M & \xrightarrow{j} & \mathrm{Lie}G & \longrightarrow & \mathrm{Coker}j & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \widehat{T}_{\gamma,M} & \longrightarrow & \widehat{T}_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{T_{\widehat{\Phi}}} & T_{\widehat{E}_\rho} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow u & & \\
0 & \to & T_{\gamma,M} & \longrightarrow & T_{\gamma,\rho} & \xrightarrow{\lambda\overline{g}} & \mathrm{Ext}^1_R(M,M)^0 & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Seul le carré en bas à droite mérite explication. Déjà, comme $\widehat{\Phi}$ est lisse, $T_{\widehat{\Phi}}$ est surjective. Par ailleurs, un point de $T_{\widehat{E}_\rho}$ est une extension M_ϵ de M par M, munie de plus d'un $k[\epsilon]$-isomorphisme α de M_ϵ sur $M \otimes_k k[\epsilon]$. La flèche u consiste à oublier α. Elle est clairement surjective. La commutativité du carré résulte de 2.11 et la surjectivité de $\lambda\overline{g} = \lambda'\overline{g}'$ en découle. Comme λ et λ' sont des isomorphismes, le théorème est démontré.

Remarques 2.13.

1) On a vu en VI 4.3 que le schéma $H_{\gamma,M}$ est le faisceau (pour la topologie de Zariski) associé à la fibre $\Phi^{-1}(M)$ du morphisme $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$. L'espace tangent à $\Phi^{-1}(M)$ est donc aussi égal à $T_{\gamma,M}$. Comme l'espace tangent à E_ρ en M n'est autre que $\mathrm{Ext}^1_R(M,M)^0$ (les déformations de M, cf. 1.3), la dernière suite exacte horizontale ci-dessus est la suite des espaces tangents associée à Φ et on a $T_\Phi = \lambda\overline{g}$.

2) On notera que dans tous les calculs d'espaces tangents de ce chapitre nous n'avons jamais utilisé le fait que les résolutions de types E ou N sont minimales.

IX CALCULS DE DIMENSIONS

Dans ce paragraphe nous calculons les dimensions des divers espaces tangents rencontrés dans le chapitre précédent. Dans le cas de $H_{\gamma,M}$, vu la lissité (cf. VII) nous en déduisons la dimension du schéma de Hilbert. Dans les autres cas (H_γ, $H_{d,g}$,...) on a seulement a priori une majoration de la dimension du schéma de Hilbert par celle de son espace tangent. Nous examinerons ce problème en détail, dans un cas particulier, au chapitre suivant. Nous donnons aussi des méthodes de calcul explicites et un certain nombre d'exemples qui les illustrent.

Nous utiliserons les conventions d'écriture suivantes :
1) Les dimensions des epaces de cohomologie $H^i(\mathcal{F})$ sont notées, comme d'habitude, $h^i(\mathcal{F})$.
2) Pour les espaces du type $\mathrm{Ker} f, \mathrm{Ext}, \ldots$ la dimension est notée par le même mot en minuscules : $\mathrm{ker} f, \mathrm{ext}, \ldots$
3) Les dimensions des espaces tangents $T_{d,g}, T_\gamma, \ldots$ sont notées respectivement $t_{d,g}, t_\gamma, \ldots$

1. Notations.

On reprend les notations de VIII 2. Soit C une courbe munie d'une résolution de type E : $0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}_C \to 0$,
et d'une résolution de type N : $0 \to \mathcal{P} \to \mathcal{N} \to \mathcal{J}_C \to 0$.
On pose, (cf. II 5.1) : $\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{c(n)} = \bigoplus_{n>0} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{c(n)}$. On suppose que $\mathcal{E}$ admet une résolution $(*)$ de la forme : $0 \to \mathcal{L}_4 \to \mathcal{L}_3 \to \mathcal{E} \to 0$, où l'on a posé :
$\mathcal{L}_4 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{a(n)} = \bigoplus_{n>0} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{a(n)}$,
$\mathcal{L}_3 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{b(n)} = \bigoplus_{n>0} \mathcal{O}_\mathbf{P}(-n)^{b(n)}$.
On explicite de même les faisceaux analogues pour la résolution de type N (cf. II 5.1).
On notera (cf. VIII 2.13), que les calculs de ce chapitre sont encore valables même si les résolutions ci-dessus ne sont pas minimales.

2. Les grands diagrammes.

Les diagrammes suivants (où les groupes d'homomorphismes sont pris sur $\mathcal{O}_\mathbf{P}$), résument la situation mutuelle des divers espaces qui vont intervenir dans les calculs :

a. Résolution de type E.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C,\mathcal{E}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{E}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C,\mathcal{F}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{F}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{F}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{J}_C) & \xrightarrow{f} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) & \xrightarrow{\tau} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{J}_C) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow & & \| \\
 & & & & 0 & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) & \to & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{E}) & \to & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{E}) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) & \simeq & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{F}) & \to & 0
\end{array}
$$

b. Résolution de type N.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C,\mathcal{P}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{N},\mathcal{P}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{P},\mathcal{P}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{P}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C,\mathcal{N}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{N},\mathcal{N}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{P},\mathcal{N}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{N}) & \xrightarrow{g'} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} & & \downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{N},\mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{P},\mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{J}_C) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tau'} & & \downarrow \\
 & & & & 0 & \to & 0 & \to & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{P}) & \to & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{N},\mathcal{P}) \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{N}) & \simeq & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{N}) & \to & \mathrm{Ext}^2(\mathcal{N},\mathcal{N})
\end{array}
$$

3. Calcul de $t_{\gamma,M}$.

Soit M un module gradué de longueur finie, ρ sa fonction de Rao, γ un caractère admissible compatible avec M (c'est-à-dire tel que $H_{\gamma,M}$ soit non vide), C un point de $H_{\gamma,M}$, de sorte que l'on a $M_C = M$, et $T_{\gamma,M}$ l'espace tangent en ce point. Nous allons calculer sa dimension $t_{\gamma,M}$.

Notations 3.1. *On pose :*

$$\delta_\gamma = 1 + \sum_{k\in\mathbf{Z}} \gamma(k)\binom{k+3}{2} + \sum_{k,l\in\mathbf{Z}} \gamma(k)\gamma(l)\binom{k-l+2}{1},$$

$$\epsilon_{\gamma,\rho} = \sum_{k>0} \rho(k-4)\partial\gamma(k),$$

$$h_M = \hom_R(M,M)^0$$

(on rappelle que l'exposant 0 *signifie qu'on se limite aux homomorphismes gradués de degré zéro).*

Proposition 3.2. *On pose $r(n) = \partial\gamma(n)$. On a les formules suivantes :*

$$1)\quad \delta_\gamma = \sum_{k\geq 1} \gamma(k)\binom{k+2}{2} + \sum_{k,l\geq 1} \gamma(k)\gamma(l)\binom{k-l+2}{1} - \gamma(1),$$

$$2)\quad \delta_\gamma = 1 - \sum_{k,l>0} r(k)r(l)\binom{k-l+3}{3},$$

$$3)\quad \epsilon_{\gamma,\rho} = \sum_{k>0} \rho(k-4)r(k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \rho(k-4)r(k) + \rho(-4) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \rho(k)r(k+4) + \rho(-4).$$

Démonstration. C'est une vérification élémentaire avec la formule du triangle de Pascal.

Remarques 3.3.

1) On notera la petite modification de la formule 3) par rapport à celle annoncée dans [MD-P1] et [MD-P2].

2) Soit C une courbe ACM de caractère de postulation γ. Avec les notations de 1 on a $r(n) = a(n) - b(n) + c(n)$ pour $n > 0$. On reconnait dans la variante 2) de la formule donnant δ_γ la dimension du schéma de Hilbert telle que la calcule Ellingsrud ([E]).

3) Le terme δ_γ ne dépend que de γ i.e. de la postulation, $\epsilon_{\gamma,\rho}$ dépend de γ et ρ. Le nombre h_M, lui, dépend non seulement de la fonction ρ mais aussi de la structure de module de M. Par exemple, si on a $\rho(0) = \rho(1) = 1$ et si les autres termes sont nuls, h_M vaut 1 si le module M est monogène et 2 si le module est de Buchsbaum.

Proposition 3.4. *On a :*

$$t_{\gamma,M} = \hom(\mathcal{E},\mathcal{F}) - \hom(\mathcal{E},\mathcal{E}) - \hom(\mathcal{F},\mathcal{F}) + \hom(\mathcal{F},\mathcal{E}) + 1.$$

Démonstration. On a vu en VIII 2.12 que $T_{\gamma,M}$ est isomorphe à $\mathrm{Ker}g/\mathrm{Ker}f$. On a donc $t_{\gamma,M} = \ker g - \ker f$. En regardant le grand diagramme, on a aussitôt: $\ker g = \hom(\mathcal{E},\mathcal{F}) - \hom(\mathcal{E},\mathcal{E})$ et $\ker f = \hom(\mathcal{F},\mathcal{F}) - \hom(\mathcal{F},\mathcal{E}) - 1$, car $\hom(\mathcal{J}_C,\mathcal{J}_C)$ vaut 1, d'où le résultat.

Le résultat suivant explicite les calculs des diverses dimensions :

Proposition 3.5. *On a, avec les notations introduites en 1. ci-dessus :*

$$1)\quad \hom(\mathcal{F},\mathcal{F}) = \sum_{k,l>0} c(k)c(l)\binom{k-l+3}{3},$$

$$2)\quad \hom(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \sum_{k,l>0} (b(k)-a(k))c(l)\binom{k-l+3}{3} + \mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}),$$

$$\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \sum_{k>0} c(k)\rho(k-4),$$

$$3)\quad \hom(\mathcal{F},\mathcal{E}) = \sum_{k,l>0} c(k)(b(l)-a(l))\binom{k-l+3}{3},$$

$$4)\quad \hom(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \sum_{k,l>0} (b(k)b(l) - b(k)a(l) - a(k)b(l) + a(k)a(l))\binom{k-l+3}{3} + \mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}).$$

Démonstration. Le point 1) est clair. Pour les autres, il suffit d'appliquer le foncteur Hom convenable à la résolution $(*)$ de $\mathcal{E}$ (pour le point 4 il s'agit du foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot,\mathcal{E})$) et d'utiliser les faits suivants :

1) $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_3,\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{L}_4) = 0$,

2) $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_3,\mathcal{E}) = 0$ (car $\mathcal{E}$ n'a pas de H^1),

3) $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) \simeq H^2(\mathcal{E}\otimes\check{\mathcal{F}}(-4))^* \simeq H^1(\mathcal{J}_C\otimes\check{\mathcal{F}}(-4))^*$ par dualité de Serre.

Il reste à calculer le terme $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$.

Proposition 3.6. *On a :*

$$\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) = \sum_{k>0}((b(k) - a(k))\rho(k-4) + h_M.$$

Démonstration. On considère la suite exacte :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{L}_3)\xrightarrow{w}\mathrm{Hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\xrightarrow{v}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_4)\xrightarrow{u}\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_3) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to 0.$$

La proposition résulte alors des formules :

$$\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_4) = \sum_{k>0} a(k)\rho(k-4),\ \mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_3) = \sum_{k>0} b(k)\rho(k-4),$$

et du lemme suivant :

Lemme 3.7. *On a un isomorphisme :* $\mathrm{Coker} w \simeq \mathrm{Hom}_R(M,M)^0$.

Démonstration. Par dualité et passage aux sections globales, w s'insère dans la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(\check{L}_4,\check{E})^0 \to \mathrm{Hom}_R(\check{L}_3,\check{E})^0\xrightarrow{w}\mathrm{Hom}_R(\check{E},\check{E})^0.$$

Par ailleurs, on a la suite exacte (cf. II 2) :

$$0 \to \check{E}\xrightarrow{\alpha}\check{L}_3 \to \check{L}_4 \to M^*(4) \to 0.$$

Posons $K = \mathrm{Im}\alpha$. Comme M^* est de longueur finie, on a $\widetilde{K} \simeq \check{\mathcal{L}}_4$, donc $\mathrm{Hom}_R(\check{L}_4,\check{E})^0 \simeq \mathrm{Hom}_R(K,\check{E})^0$. On en déduit immédiatement que $\mathrm{Coker} w$ est isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_R(K,\check{E})^0$. Mais on a les isomorphismes (cf. 0 1.1) :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_R(K,\check{E})^0 &\simeq \mathrm{Ext}^2_R(M^*(4),\check{E})^0 \simeq \mathrm{Ext}^1_R(M^*(4),K)^0\\ &\simeq \mathrm{Hom}_R(M^*(4),M^*(4))^0 \simeq \mathrm{Hom}_R(M,M)^0\end{aligned}$$

d'où le résultat.

La conjonction des calculs 3.2, 3.4, 3.5, 3.6 et de 3.3 donne aussitôt le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3.8. *On a :*

$$t_{\gamma,M} = \delta_\gamma + \epsilon_{\gamma,\rho} - h_M.$$

En combinant ce résultat avec VII 2.4, on obtient la solution du problème B posé dans l'introduction lorsque les invariants sont la postulation et le module de Rao :

Corollaire 3.9. *Le schéma $H_{\gamma,M}$ est irréductible, lisse et on a :*

$$\dim H_{\gamma,M} = \delta_\gamma + \epsilon_{\gamma,\rho} - h_M.$$

Remarque 3.10. Les calculs ci-dessus donnent aussi la formule :

$$t_{\gamma,M} = \delta_\gamma + \operatorname{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) - \operatorname{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}).$$

Soit $\sigma = \partial^3\rho - \gamma$. Le schéma $H_{\gamma,M}$ est aussi égal au schéma des courbes dont la spécialité est donnée par σ et dont le module de Rao est égal à M (cf.VI). Nous le noterons parfois $H_{\sigma,M}$ lorsque nous adopterons ce point de vue. Nous donnons les analogues des résultats précédents dans ce cadre, en utilisant bien entendu la résolution de type N. La démonstration en est essentiellement identique.

Théorème 3.11. *On pose, si $r' = \partial\sigma$:*

$$\delta_\sigma = 1 - \sum_{k,l>0} r'(k)r'(l)\binom{k-l+3}{3},$$

$$\epsilon_{\sigma,\rho} = \sum_{k>0} r'(k)\rho(k).$$

On a alors les formules suivantes :

$$t_{\sigma,M} = \hom(\mathcal{P},\mathcal{N}) + \hom(\mathcal{N},\mathcal{P}) - \hom(\mathcal{N},\mathcal{N}) - \hom(\mathcal{P},\mathcal{P}) + 1,$$

$$t_{\sigma,M} = \delta_\sigma + \epsilon_{\sigma,\rho} - h_M,$$

$$t_{\sigma,M} = \delta_\sigma + \operatorname{ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{N}) - \operatorname{ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N}).$$

4. Calcul de $t_{\gamma,\rho}$.

L'espace tangent $T_{\gamma,\rho}$ se décrit immédiatement à partir de $T_{\gamma,M}$ grâce au lemme suivant :

Lemme 4.1. *On a la suite exacte :*

$$0 \to T_{\gamma,M} \to T_{\gamma,\rho} \xrightarrow{\lambda\overline{g}} \operatorname{Ext}^1_R(M,M)^0 \to 0.$$

Démonstration. Cela a été vu au cours de la démonstration de VIII 2.12.

On en déduit aussitôt :

Théorème 4.2.
On a $t_{\gamma,\rho} = t_{\gamma,M} + \mathrm{ext}^1(M,M)^0 = \delta_\gamma + \epsilon_{\gamma,\rho} - h_M + \mathrm{ext}^1(M,M)^0$.

Remarque 4.3. Si on interprète $\mathrm{Ext}^1(M,M)^0$ comme l'espace tangent au foncteur E_ρ (cf.VIII 2.13), et si on considère le morphisme de foncteurs $\Phi : H_{\gamma,\rho} \to E_\rho$, qui associe à une courbe son module de Rao, cette formule exprime que la dimension de l'espace tangent à l'espace total est égale à la somme des dimensions des espaces tangents à la base et à la fibre.

5. Calculs de t_γ, t_σ, $t_{d,g}$.

On désigne par h (resp. h') la flèche naturelle qui va de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F})$, (resp. de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N})$ dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{N})$) (voir les grands diagrammes). On a donc $\mathrm{Ker}h = \mathrm{Im}g = \mathrm{Im}\overline{g}$ et $\mathrm{Ker}h' = \mathrm{Im}g' = \mathrm{Im}\overline{g}'$.

Théorème 5.1. *On a les formules suivantes :*
1) $t_\gamma = \mathrm{img} + t_{\gamma,M} = \mathrm{ker}h + t_{\gamma,M} = \delta_\gamma + \mathrm{coker}h$.
2) $t_\sigma = \mathrm{img}' + t_{\sigma,M} = \mathrm{ker}h' + t_{\sigma,M} = \delta_\sigma + \mathrm{coker}h'$.
3) $t_{d,g} = t_\gamma + \mathrm{im}\tau = t_\sigma + \mathrm{im}\tau'$.

Démonstration. C'est clair avec les résultats précédents et ceux du chapitre VIII (notamment VIII 2.12).

Remarques 5.2.

1) On notera que dans ces formules interviennent des flèches (h, τ,...) qui ne sont, en général, pas entièrement déterminées par les valeurs numériques des invariants. C'est pour préciser ces flèches que l'hypothèse de minimalité des résolutions sera essentielle (cf. X 2.2 par exemple).

2) Vu la suite exacte de 4.1, il est clair que l'espace A (resp. A') est inclus dans $\mathrm{Ker}h$ (resp. $\mathrm{Ker}h'$). Il est d'ailleurs facile de vérifier directement ces inclusions. La différence entre les dimensions de T_γ et $T_{\gamma,\rho}$ (resp. T_σ et $T_{\gamma,\rho}$) est alors égale à la codimension de A dans $\mathrm{Ker}h$ (resp. de A' dans $\mathrm{Ker}h'$).

3) Dans le cas des courbes ACM, les résultats précédents sont encore valables, on a $t_{\gamma,M} = \delta_\gamma = t_{d,g}$. Le schéma H_γ est irréductible, lisse (cf. VII 1) et c'est donc un sous-schéma ouvert de $H_{d,g}$. On retrouve ainsi les résultats d'Ellingsrud [E].

6. Quelques méthodes de calcul.

a) Calcul de $\mathrm{hom}(M,M)^0$ et de $\mathrm{ext}^1(M,M)^0$.

Ces nombres se calculent grâce à la résolution de M:

$$0 \to L_4 \xrightarrow{\sigma_4} L_3 \xrightarrow{\sigma_3} L_2 \xrightarrow{\sigma_2} L_1 \xrightarrow{\sigma_1} L_0 \xrightarrow{\sigma_0} M \to 0$$

qui donne le complexe :

$$0 \to \mathrm{Hom}(L_0, M)^0 \xrightarrow{d_0} \mathrm{Hom}(L_1, M)^0 \xrightarrow{d_1} \mathrm{Hom}(L_2, M)^0$$

et on a $\mathrm{Hom}(M,M)^0 = \mathrm{Ker} d_0$ et $\mathrm{Ext}^1(M,M)^0 = \mathrm{Ker} d_1/\mathrm{Im} d_0$. Notons que si l'on pose $L = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{l(n)}$, on a $\mathrm{Hom}(L,M)^0 = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} M_n^{l(n)}$. (Attention, ce n'est pas un R-module). Dans certains cas particuliers le calcul est facile.

Exemple 6.1. Module associé à une suite régulière.

On renvoie à II 7.8 et IV 6.b pour la description du module de Rao et de sa résolution. On pose $M = R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$. On rappelle que ce module correspond par exemple à la réunion des deux intersections complètes disjointes d'équations (f_1, f_2) et (f_3, f_4). Comme le module de Rao est monogène il est clair que $\hom(M,M)^0$ vaut 1. D'autre part, les flèches σ_1 et σ_2 sont à coefficients dans l'idéal (f_1, f_2, f_3, f_4) (cf. IV 6.b). Il en résulte que les flèches d_0 et d_1 sont nulles, de sorte qu'on a $\mathrm{Ext}^1(M,M)^0 = \mathrm{Hom}(L_1, M)^0$. Si on pose $n_i = \deg f_i$, on a donc $\mathrm{ext}^1(M,M)^0 = \sum_{i=1}^4 \rho(n_i)$.

Exemple 6.2. Le cas des modules de Buchsbaum.

Là encore, il est clair que les flèches d_0 et d_1 sont nulles car elles sont à coefficients dans $\mathbf{m}$ qui annule M et on en déduit, avec les notations de IV 6 : $\hom(M,M)^0 = \sum_{i=0}^r \rho(i)^2$ et $\mathrm{ext}^1(M,M)^0 = 4\sum_{i=0}^{r-1} \rho(i)\rho(i+1)$.

Remarque 6.3.

Dans les deux cas qui précèdent les flèches d_0 et d_1 sont nulles. Bien entendu cela n'est pas vrai en général, par exemple si on prend

$$M = R/(X, Y, Z, T^2) \oplus R/(X, Y, Z^2, T),$$

on a $\hom(M,M)^0 = 2$ mais $\hom(L_0, M)^0 = 4$ donc d_0 n'est pas nulle. Si M correspond à la réunion disjointe de deux courbes ACM, M est monogène donc d_0 est nulle, mais pas forcément d_1 comme on le voit sur l'exemple du module $R/(X^2, XY, Y^2, Z^3, Z^2T, ZT^2, T^3)$.

Exemples 6.4.

1) Si C est réunion de trois droites disjointes D_1, D_2, D_3, la résolution du module de Rao est donnée par II 7.2 et III 1.7 :

$$0 \to R(-5)^2 \to R(-4)^6 \to R(-3)^4 \oplus R(-2)^4 \to R(-1)^6 \xrightarrow{\sigma_1} R^2 \to M \to 0.$$

Le module de Rao est concentré en degrés 0 et 1, avec $\rho(0) = \rho(1) = 2$. On en déduit que $\hom(L_2, M)^0$ est nul, donc aussi d_1 et que l'on a $\hom(L_1, M)^0 = 12$ et $\hom(L_0, M)^0 = 4$. Pour calculer $\mathrm{Hom}_R(M,M)^0$, il faut préciser la flèche σ_1.

On vérifie que si les équations de la droite D_i sont $A_i = B_i = 0$, σ_1 a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & -A_2 & -B_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & B_2 & A_3 & B_3 \end{pmatrix}$$

Comme le groupe $PGL(4,k)$ opère transitivement sur les réunions de trois droites disjointes, on peut supposer que les équations sont respectivement $X = Y = 0$, $X + Z = Y + T = 0$, $Z = T = 0$. Le module de Rao est alors engendré par deux éléments α et β de degré 0, avec les relations $X\alpha = Y\alpha = 0$, $Z\beta = T\beta = 0$, $X\beta = Z\alpha$, $Y\beta = T\alpha$. Un calcul facile montre que $\mathrm{Hom}_R(M,M)^0$ est réduit aux homothéties, on a donc dans ce cas $h_M = 1$ et $\mathrm{ext}^1(M,M) = 9$. Cet exemple illustre bien la nécessité de connaître non seulement les groupes L_i mais aussi les flèches σ_i pour faire les calculs.

2) Dans le cas précédent, on note qu'on a $\mathrm{hom}(L_2,M)^0 = 0$. Lorsque cette condition est réalisée, le terme $\mathrm{hom}(M,M)^0 - \mathrm{ext}^1(M,M)^0$ qui intervient dans le calcul de $t_{\gamma,\rho}$ est connu (et ceci, même si l'on ne sait pas calculer séparément $\mathrm{hom}(M,M)^0$ et $\mathrm{ext}^1(M,M)^0$) et il est égal à $\sum \rho(k)(a'(k) - b'(k)) = \mathrm{hom}(L_0,M)^0 - \mathrm{hom}(L_1,M)^0$. De plus, comme on a $\mathrm{hom}(P,M) = \sum \rho(k)c'(k) = 0$ ce terme est aussi égal à $\epsilon_{\sigma,\rho}$, de sorte que la formule 4.2 donnant $t_{\gamma,\rho}$ se réduit à $t_{\gamma,\rho} = \delta_\sigma$. On notera que la condition précédente est vérifiée en particulier si (et seulement si lorsque C est minimale ainsi que la résolution) $\mathrm{ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{J}_C)$ et $\mathrm{ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{J}_C)$ sont nuls.
On a aussi, par dualité, le même résultat avec la postulation : si $\mathrm{hom}(\check{L}_2, M^*(4))$ est nul (par exemple, si $\mathrm{ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{F})$ et $\mathrm{ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{P})$ sont nuls), on a

$$\mathrm{hom}(M,M)^0 - \mathrm{ext}^1(M,M)^0 = \epsilon_{\gamma,\rho}$$

d'où $t_{\gamma,\rho} = \delta_\gamma$. Pour les courbes de petit degré, l'expérience montre que ces conditions sont souvent réalisées.

3) Dans de nombreux cas, lorsque $\mathrm{hom}(L_2,M)$ n'est pas nul, on peut obtenir une majoration ou une minoration de $\mathrm{ext}^1(M,M)^0 - \mathrm{hom}(M,M)^0$. Soit, par exemple, C une courbe réunion disjointe de 4 droites tracées sur une quadrique. La spécialité de C étant évidente, on trouve $\rho(0) = 3$, $\rho(1) = 4$, $\rho(2) = 3$ d'où, en regardant les résolutions (cf. II 7.2 et III 1.7), $\mathrm{hom}(L_0,M)^0 = 9$, $\mathrm{hom}(L_1,M)^0 = 32$, $\mathrm{hom}(L_2,M)^0 = 15$, les autres termes étant nuls. On en déduit aussitôt $\mathrm{ext}^1(M,M)^0 - \mathrm{hom}(M,M)^0 \geq 32-9-15 = 8$. En fait, dans ce cas, il y a égalité. En effet, soit γ le caractère de postulation de C et considérons l'ouvert U du schéma $H_{\gamma,\rho}$ formé des courbes lisses (qui sont nécessairement réunion de quatre droites). Considérons le morphisme surjectif de U dans l'ouvert de $\mathbf{P}^9$ formé des quadriques lisses qui associe à une courbe l'unique quadrique lisse qui la contient. La fibre est un ouvert de $(\mathbf{P}^1)^4$ donc U est de dimension 13. Les formules donnent pour l'espace tangent $T_{\gamma,\rho}$ une

dimension ≤ 13, (on a $\delta_\gamma = 13$ et $\epsilon_{\gamma,\rho} = -8$) donc il y a égalité et, de plus, le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est lisse en tout point $C \in U$.

b) Calculs par liaison et biliaison.

Soient C une courbe, γ son caractère de postulation, M son module de Rao, s et t des entiers. Si Γ est liée à C par $s \times t$, on sait (cf. III 1), que l'on a $M' = M_\Gamma = M^*(s+t-4)$ et que $\sigma' = \sigma_\Gamma$ est déterminé par γ. Considérons alors les deux schémas de Hilbert $H_{\gamma,M}$ et $H_{\sigma',M'}$, on a la proposition suivante:

Proposition 6.5. *On a la formule :*

$$\dim H_{\gamma,M} + h^0\mathcal{J}_C(s) + h^0\mathcal{J}_C(t) = \dim H_{\sigma',M'} + h^0\mathcal{J}_\Gamma(s) + h^0\mathcal{J}_\Gamma(t).$$

Démonstration. La formule résulte aussitôt de VII 3.8.

Exemple 6.6. Dans le cas des courbes ACM, cette méthode est très efficace et permet de se ramener au cas des intersections complètes. Par exemple, les courbes lisses C de degré 8 et genre 7 qui sont liées à des droites D par 3×3 ont pour caractère γ, avec $\gamma(0) = \gamma(1) = \gamma(2) = -1$, $\gamma(3) = 1$, $\gamma(4) = 2$. Ces courbes forment un ouvert de $H_{\gamma,M}$ (ici on a $M = 0$) et on calcule $t_{\gamma,M}$ par la formule 6.5 (on a $h^0\mathcal{J}_C(3) = 2$ et $h^0\mathcal{J}_D(3) = 16$) d'où $t_{\gamma,M} = 32$.

Remarques 6.7.

1) On a évidemment des variantes de la méthode en utilisant la spécialité au lieu de la postulation.

2) La même formule vaut en remplaçant les schémas $H_{\gamma,M}$ par les schémas $H_{\gamma,\rho}$.

On a aussi des formules qui comparent les dimensions des schémas de Hilbert après biliaison. Nous donnons seulement ici la plus simple :

Proposition 6.8. *Soit M un module, ρ sa fonction de Rao et γ un caractère compatible, $M' = M(-h)$ et γ' le module et le caractère obtenus après une biliaison élémentaire (s,h) (cf. III 3). On a la formule suivante :*

$$t_{\gamma',M'} - t_{\gamma,M} = \delta_{\gamma'} - \delta_\gamma + \rho(s-4-h) - \rho(s-4).$$

Démonstration. On peut soit le vérifier directement sur les formules, soit utiliser VII 4.8.

c) La formule des pas

Il s'agit d'une formule purement arithmétique qui permet de calculer le terme compliqué δ_γ de proche en proche, mais sans rester dans la même classe de liaison.

Définition 6.9. *Soit γ un caractère vérifiant $\gamma(0) = -1$, p, q des entiers, avec $p \geq q \geq 2$. On appelle* **pas élémentaire** (p, q) *l'opération qui associe à γ le caractère γ' donné par :*
1) Si $p > q$, $\gamma'(p+1) = \gamma(p+1) + 1$; $\gamma'(p) = \gamma(p) - 1$; $\gamma'(q) = \gamma(q) - 1$; $\gamma'(q-1) = \gamma(q-1) + 1$ et $\gamma'(n) = \gamma(n)$ dans tous les autres cas.
2) Si $p = q$, $\gamma'(p+1) = \gamma(p+1) + 1$; $\gamma'(p) = \gamma(p) - 2$; $\gamma'(q-1) = \gamma(q-1) + 1$ et $\gamma'(n) = \gamma(n)$ dans tous les autres cas.

Remarque 6.10. On note que le degré (au sens de I 2.6 c) du caractère ne change pas dans une telle opération, mais que son genre augmente de $p - q + 1$.

Proposition 6.11. *Si γ' est obtenu à partir de γ par un pas (p, q), avec $p \geq q \geq 2$, on a la formule (dite formule des pas) :*

$$\delta_{\gamma'} - \delta_\gamma = \sum_{l=q-2}^{p-2} \gamma(l) + \sum_{k=q+2}^{p+2} \gamma(k) + p - q + 1 + \epsilon$$

avec $\epsilon = 1$ si $p = q + 1$ et 0 sinon. En particulier, si $p = q$ on a :

$$\delta_{\gamma'} - \delta_\gamma = \gamma(p-2) + \gamma(p+2) + 1.$$

Démonstration. C'est un calcul sans difficulté.

Etant donné un caractère γ, une méthode pour calculer δ_γ est alors la suivante :

1) On utilise un certain nombre de pas élémentaires (p, q) comme ci-dessus pour transformer γ en un caractère positif γ' (cf. V 1.1). L'algorithme consiste à prendre pour $p + 1$ le plus grand entier n tel que $\gamma(n)$ soit négatif et à recommencer. Dans cette opération on contrôle la variation de δ par 6.11.

2) On a maintenant γ' positif qui est le caractère d'une courbe ACM, donc liée, par étapes, à une intersection complète et on applique 6.5.

Exemple 6.12. Prenons par exemple une courbe de degré 8 et genre 5 avec le caractère $\gamma(0) = \gamma(1) = \gamma(2) = -1$, $\gamma(3) = 0$, $\gamma(4) = 3$, $\gamma(5) = 1$, $\gamma(6) = -1$ (nous retrouverons cette courbe au numéro suivant). Le tableau suivant montre l'effet sur γ d'un pas $(5, 5)$ suivi d'un pas $(4, 4)$:

0	1	2	3	4	5	6	g
-1	-1	-1	0	3	1	-1	5
-1	-1	-1	0	4	-1	0	6
-1	-1	-1	1	2	0	0	7

Le premier pas augmente δ de 1, le second le laisse fixe. A l'arrivée on reconnait le caractère de la courbe de degré 8 et genre 7 de l'exemple 6.6, dont le δ vaut 32. Le δ initial vaut donc 31.

Remarque 6.13. Il est facile de montrer avec la formule des pas que dans le cas des courbes ACM lisses, non tracées sur une surface de degré $< s$, le maximum de la dimension du schéma de Hilbert est atteint pour les courbes de genre maximum ce qui répond partiellement à [P] Conjecture C.

7. Un exemple : les courbes de degré 8 et genre 5.

Dans leur article [GP1], Gruson et Peskine classent toutes les courbes lisses et connexes de degré 8 et genre 5 en cinq familles qu'ils notent A,B,C,D,E. Nous allons interpréter ces familles en termes de sous-schémas du type $H_{\gamma,\rho}$ de $H_{8,5}$ et montrer comment les calculs de dimensions s'appliquent dans ce cas. Nous examinerons aussi une autre famille, notée A', qui ne contient pas de courbes lisses mais apparaît naturellement comme duale de la famille C. Nous n'étudierons pas ici les autres courbes (localement de Cohen-Macaulay) de $H_{8,5}$. Signalons seulement les courbes lisses non connexes : il y a les réunions disjointes de deux quartiques planes, (resp. d'une quintique plane et d'une cubique gauche, resp. d'une droite et d'une courbe de degré 7 et genre 6 tracée sur une quadrique) qui forment une famille de dimension 34 (resp. 35, resp. 32). Faute d'un résultat aussi précis que le théorème de D'Almeida (cf. 7.1 ci-dessous), la solution du cas général (qui consiste à préciser quelles sont toutes les cohomologies et les modules de Rao possibles) semble notablement plus compliquée.

On note d'abord qu'une courbe de degré 8 et genre 5 n'est pas plane. Le lemme suivant va permettre de déterminer les cohomologies possibles pour les courbes lisses.

Lemme 7.1. *(cf. [D'A]). Soit C une courbe lisse et connexe de degré 8 et genre 5. On suppose que C n'est pas tracée sur une quadrique. On a alors $h^1\mathcal{J}_C(4) = 0$.*

Démonstration. On sait d'après [D'A] que si $h^1\mathcal{J}_C(4)$ est non nul la courbe admet une droite 6-sécante D. On considère la réunion $C' = C \cup D$ qui est de degré 9 et genre 10. Désignons par Z le diviseur $C \cap D$ sur C. On vérifie, à l'aide de la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_C(-Z) \to \mathcal{O}_{C'} \to \mathcal{O}_D \to 0$, que l'on a $h^0\mathcal{O}_{C'}(2) = 9$, donc C' est tracée sur une quadrique et a fortiori C.

Lemme 7.2. *Soit C une courbe lisse et connexe de degré 8 et genre 5. On suppose que C n'est pas tracée sur une quadrique. On a les résultats suivants:*
1) $h^1\mathcal{J}_C(n)$ est nul pour $n \leq 0$ et $n \geq 4$.

2) $h^1\mathcal{O}_C(n)$ *est nul pour* $n \geq 2$.
3) $h^0\mathcal{J}_C(n)$ *est nul pour* $n \leq 2$.
Les valeurs non nulles de la fonction de Rao ρ *de* C *sont nécessairement parmi celles indiquées ci-dessous. Elles déterminent toute la cohomologie.*
A) $\rho(2) = 2$ *; on a alors* $h^1\mathcal{O}_C(1) = h^0\mathcal{J}_C(3) = 0$.
A') $\rho(1) = 1$, $\rho(2) = 2$ *; on a alors* $h^1\mathcal{O}_C(1) = 1$ *et* $h^0\mathcal{J}_C(3) = 0$.
C) $\rho(2) = 2$, $\rho(3) = 1$ *; on a alors* $h^1\mathcal{O}_C(1) = 0$ *et* $h^0\mathcal{J}_C(3) = 1$.
B) $\rho(1) = \rho(3) = 1$, $\rho(2) = 2$ *; on a alors* $h^1\mathcal{O}_C(1) = h^0\mathcal{J}_C(3) = 1$.

Démonstration. La deuxième assertion vient du fait que $\mathcal{O}_C(2)$ est non spécial. La première en résulte via 7.1 et le critère de Castelnuovo-Mumford (le faisceau $\mathcal{J}_C$ est 5-régulier). La troisième assertion est évidente. Comme le degré de $\mathcal{O}_C(1)$ est égal à $8 = 2g-2$, $h^1\mathcal{O}_C(1)$ vaut 0 ou 1 selon que C est ou non une courbe canonique et $h^1\mathcal{J}_C(1)$ lui est égal. Comme on a $h^0\mathcal{J}_C(2) = h^1\mathcal{O}_C(2) = 0$, on a $h^1\mathcal{J}_C(2) = 2$ dans tous les cas. Enfin, il est clair que C est au plus sur une surface de degré 3 (sinon elle serait liée à une droite par 3×3 et son genre serait égal à 7). On a donc $h^1\mathcal{J}_C(3) = h^0\mathcal{J}_C(3) \leq 1$, d'où l'énumération des cohomologies possibles.

Lemme 7.3. *(Modules de Rao et courbes minimales).*
Les modules de Rao correspondant aux cohomologies répertoriées en 7.2 sont des types suivants :
A) Le module est de Buchsbaum. La courbe minimale est de degré 8 *et genre* 5.
A') Le module est monogène et, à décalage près, du type $R/(X, Y, Z^2, ZT, T^2)$. *La courbe minimale est de degré* 4 *et genre* -1, *réunion d'une droite et d'une cubique gauche.*
C) Le module est dual d'un module monogène du type précédent. La courbe minimale est de degré 5 *et genre* 0, *liée par* 3×3 *à une courbe de degré* 4 *et genre* -1 *comme en* A'.
B) Le module est, à décalage près, du type $R/(X, Y, Z^2, T^2)$. *La courbe minimale est de degré* 2 *et genre* -2.

Démonstration. Dans le cas A, il est clair que le module est de Buchsbaum puisque concentré en un seul degré. Le calcul de la courbe minimale a été fait en IV 6.c.

Pour A′ il y a a priori trois types de modules possibles : monogène, somme directe de deux modules monogènes du type $R/(X, Y, Z, T^2)$ et $R/(X, Y, Z, T)$ et module de Buchsbaum. On vérifie avec IV 6 que les deux derniers ont des courbes minimales dont le décalage est égal à 2 (resp. 4) donc ne correspondent pas aux courbes de type A′. Le module monogène est du type annoncé. D'après I 3.5, c'est le module de Rao de la réunion C de la droite d'équations $X = Y = 0$ et de la courbe d'équations $Z^2 = ZT = T^2 = 0$. Cette dernière courbe est une cubique gauche (i.e. est liée à une droite par deux quadriques). La réunion vérifie $s_0 > e + 3$ donc est minimale (cf. IV 4.7).

Le résultat pour le cas C en découle car les deux cas sont échangés par une liaison 4×4 et la quintique rationnelle liée à C par 3×3 est minimale par le même argument que ci-dessus.

Le cas B qui correspond à un module M élément de $\widehat{E}_{(1,2,1)}$ a été étudié en détail en IV 6.d. On voit aussitôt, en regardant le décalage que seuls les types 1,2,4 de IV 6.13 sont a priori possibles. Le type 4 est exclu car la courbe serait minimale, or la minimale est de degré 7 (cf. IV 6.16). Le type 2 est exclu car si C est lisse connexe de type B, C est sur une surface cubique irréductible, donc est biliée par $(3, -1)$ à une courbe de degré 5 et genre 0 (cf. III 2.c). Si le module de Rao de C était de type 2, cette courbe serait la courbe minimale (cf. IV 6.14), mais on a vu que cette courbe n'est pas sur une surface cubique irréductible (cf. IV 6.15).

Définition 7.4. *On désigne par H_A, $H_{A'}$, H_B, H_C les schémas $H_{\gamma,\rho}$ correspondant aux cohomologies énumérées en 7.2.*

Proposition 7.5. *Les schémas H_A, $H_{A'}$, H_B, H_C sont irréductibles et lisses.*

Démonstration. D'après VII 1.5 il suffit de vérifier que le schéma $\widehat{E}_\rho$ correspondant est irréductible et lisse ou au moins que l'image de $\widehat{\Phi}$ est irréductible et contenue dans l'ouvert de lissité de $\widehat{E}_\rho$. C'est clair pour les cas A, A$'$, C car $\widehat{E}_\rho$ est alors un point ou un espace affine. Dans le cas B on a vu en VI 4.3 que l'ensemble des modules de type 1 est un ouvert lisse et irréductible de $\widehat{E}_{1,2,1}$.

Nous pouvons maintenant étudier les familles A,B,C,D,E de Gruson-Peskine. Rappelons que d'après [FGA] Exposé 21 toutes les composantes irréductibles de $H_{8,5}$ sont de dimension au moins $4 \times 8 = 32$.

7.6. La famille A.

La famille A de Gruson et Peskine est l'ouvert de H_A formé des courbes lisses. Il est bien connu que cet ouvert est non vide, mais on peut aussi le vérifier par un petit calcul de dimensions. En effet, les composantes irréductibles de $H_{8,5}$ sont de dimension ≥ 32 et comme il y a des courbes lisses connexes (par exemple sur une quadrique), celles-ci forment un ouvert de dimension ≥ 32. Mais les courbes lisses de types B,C,D,E forment des familles de dimensions ≤ 31 (cf. ci-dessous) donc il y a nécessairement des courbes lisses de type A. Cet argument montre de plus que toutes les courbes lisses connexes sont dans la même composante irréductible de $H_{8,5}$, l'adhérence de H_A.

Les courbes de H_A sont minimales associées à un module de Buchsbaum, donc on a leurs résolutions par IV 6. On trouve pour le type E :

$$0 \to R(-6)^2 \to R(-5)^8 \to R(-4)^7 \to I_C \to 0,$$

et pour le type N :

$$P = R(-4)^5 \ ; \ 0 \to N \to R(-3)^8 \to R(-2)^2.$$

On en déduit le caractère de postulation de C, les seuls termes significatifs sont $\gamma(5) = -2$, $\gamma(4) = 6$. La famille A est un ouvert du schéma $H_A = H_{\gamma,M}$ (l'espace des modules est réduit à un point). L'application de la formule des pas avec deux pas $(4,4)$ montre que l'on a $\delta_\gamma = 32$. On a vu en 6.2 que h_M vaut $\rho(2)^2 = 4$ et on a $\epsilon_{\gamma,\rho} = \rho(2)r(6) = 2.2 = 4$. On en déduit $t_{\gamma,M} = 32$. Comme on a aussi $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 7h^1\mathcal{J}_C = 0$ et $\mathrm{ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{J}_C) = 7h^1\mathcal{J}_C(4) = 0$, on voit que $t_{\gamma,M}$ est encore égal à $t_{8,5}$. Ceci montre que le schéma H_A est un sous-schéma ouvert (lisse) de $H_{8,5}$, de dimension 32 et la famille A en est un sous-schéma ouvert.

7.7. La famille A′.

On note que les courbes de $H_{A'}$ ont même postulation que les précédentes. Les courbes de type A′ sont toutes réductibles. En effet, soit C la courbe générique de type A′. D'après VII 3 elle est liée par 4×4 à une courbe Γ de degré 8 et genre 5 de type C, elle même liée par 4×3 à une courbe C' de degré 4 et genre -1, réunion disjointe d'une cubique gauche γ et d'une droite D. La réunion $\Gamma \cup D$, qui est liée à γ par 3×4 est de degré 9 et genre 9, ce qui prouve que D est une 5-sécante de Γ. Mais alors, D est contenue dans toute surface de degré 4 qui contient Γ, donc est une composante de C. On peut d'ailleurs montrer facilement que les courbes de type A′ sont réunions d'une courbe ACM de degré 7 et genre 5 et d'une droite sécante.

Les calculs de résolutions de II 7.6 et la proposition III 4.3 fournissent la résolution minimale (de type E) qui est identique à celle du type A. On calcule, grâce à 6.1, $h_M = 1$ et $\mathrm{ext}^1(M,M)^0 = 4$. On en déduit $t_{\gamma,M} = 32 - 4 - 1 = 27$ et $t_{\gamma,\rho} = 31$. La famille A′ est donc lisse de dimension 31. On note que les familles A et A′ sont dans le même schéma H_γ : la postulation des courbes de A′ est générale. Plus précisément, on a $t_\gamma = t_{d,g} = 32$. On détermine aussi la résolution de type N de C, à partir de celle de sa biliée au moyen de II 7.1 et III 4.3 :

$$P = R(-3) \oplus R(-4)^2 \oplus R(-5) \ ; \ 0 \to N \to R(-4) \oplus R(-3)^3 \oplus R(-2)^2 \to R(-1).$$

On montre alors que l'on a $t_\sigma = \delta_\sigma = 31$ (car h' est nul). On en déduit que H_σ est lisse de dimension 31.

7.8. La famille C.

La famille C est l'ouvert de H_C formé des courbes lisses. Elle est duale de la famille A' et les deux familles s'échangent par une liaison 4×4. On obtient les courbes de la famille C par biliaison $(3, +1)$ à partir des quintiques de genre 0, elles-mêmes liées par 3×3 aux courbes Γ de degré 4 et genre -1 réunions d'une cubique gauche et d'une droite. On peut aussi obtenir des courbes de type C par liaison 3×4 à partir de Γ, ce qui assure qu'il en existe des lisses puisque $\mathcal{J}_\Gamma(3)$ est engendré par ses sections, (cf. [PS]).

Le module de Rao est le dual du précédent, ce qui ne change ni h_M ni $\mathrm{ext}^1(M,M)^0$. On obtient une résolution de type E par biliaison :

$$0 \to R(-7) \to R(-6)^2 \oplus R(-5)^3 \to R(-5) \oplus R(-4)^3 \oplus R(-3) \to I_C \to 0.$$

On en déduit le caractère γ : $\gamma(3) = 0$, $\gamma(4) = 3$, $\gamma(5) = 1$ et $\gamma(6) = -1$. La valeur de δ_γ a été calculée en 6.12 par la formule des pas : $\delta_\gamma = 31$. On en déduit $t_{\gamma,\rho} = 31$ de sorte que H_C est lisse de dimension 31. Par ailleurs, on voit aussitôt avec la résolution que l'on a $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 0$, donc $h = 0$ et $t_\gamma = 31$, de sorte que H_γ est lisse de dimension 31. De plus, on a aussi $\mathrm{ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 0$ donc $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{J}_C) = 0$ et donc τ est surjective sur $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{J}_C)$ qui est de dimension 1. On en déduit $t_{d,g} = 32$. Comme les courbes de type C sont dans la composante $\overline{H_A}$ qui est de dimension 32, elles en sont des points lisses. Enfin, on détermine la résolution de type N par liaison à partir de celle de type E des courbes de type A', on a

$$P = R(-4)^5 \ ; \ 0 \to N \to R(-3)^8 \to R(-2)^2.$$

On en déduit $\tau' = 0$ et donc $t_\sigma = 32$: la spécialité est la même que celle des courbes de type A et le schéma H_σ qui contient H_A, donc est de dimension ≥ 32, est lisse de dimension 32 en une courbe de type C.

7.9. Les familles B et D.

Les deux familles B et D de Gruson-Peskine sont, de notre point de vue, essentiellement identiques : il s'agit des courbes lisses de H_B. On obtient les courbes de ces familles par biliaison $(3, +2)$ à partir des courbes C_0 de degré 2 et genre -2 qui sont les courbes minimales de leur classe de biliaison. Elles sont aussi biliées par $(4, +1)$, ou liées par 3×4 à la réunion disjointe de deux coniques. Il est facile de voir qu'il y a des courbes lisses de type B sur une surface cubique lisse et on renvoie à [GP1] pour l'existence de courbes lisses de type D.

La différence entre les deux types B et D est au niveau de leurs résolutions de type E. Ces résolutions se calculent par III 4, et il y a deux cas selon que la surface de degré 3 qui bilie est ou non un générateur minimal de l'idéal de C_0, on obtient alors:

$$0 \to R(-7) \to R(-6)^2 \oplus R(-5)^2 \to R(-4)^3 \oplus R(-3) \to I_C \to 0$$

(type B) sinon, la résolution est identique à celle du type C (type D). Dans le cas du type D, on constate que la surface cubique qui contient C admet C_0 comme droite double (elle est dans l'idéal engendré par Z^2, ZT, T^2). On a le même caractère de postulation que pour le type C, d'où $\delta_\gamma = 31$ et on en déduit encore $t_{\gamma,\rho} = 31$. On note que la spécialité est la même que pour le type A'. Dans le cas du type B, on voit tout de suite que l'on a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 0$ et $\mathrm{ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{J}_C) = 1$ donc que h est nul, ce qui donne $t_\gamma = 31$ et que τ est surjective et donc $t_{d,g} = 32$. On en déduit que C est un point lisse de H_γ et de $H_{d,g}$, de dimensions respectives 31 et 32 en ce point.

Dans le cas du type D, la situation est plus complexe. On a encore $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) = 0$ et $\mathrm{ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{J}_C) = 1$. Mais, cette fois, on a $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 1$. La flèche h est nulle. En effet, il suffit de le voir pour la flèche composée $hq : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_3) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F})$. Mais celle-ci, par dualité, correspond à une flèche $H^1\mathcal{J}_C(1) \to H^1\mathcal{J}_C(1)^3$ associée à $\varphi : \mathcal{L}_3 \to \mathcal{F}$. Comme la résolution est minimale φ est nulle entre termes de même degrés, donc aussi h. On en déduit $\mathrm{coker} h = 1$, donc $t_\gamma = 32$. Mais comme H_γ est de dimension 31, cela signifie que C en est un point singulier.

La résolution de type N est la même dans les deux cas B et D et s'obtient à partir de celle des deux coniques. On a

$$P = R(-4)^2 \oplus R(-5)\ ;\ 0 \to N \to R(-2)^2 \oplus R(-3)^2 \oplus R(-4) \to R(-1).$$

On voit alors que $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{N},\mathcal{N})$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{N})$ sont nuls et que $\mathrm{ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{P})$ vaut 1. Il en résulte que l'on a $t_\sigma = \delta_\sigma = 31$ (la spécialité est la même que dans le cas A') et $t_{d,g} = 32$. Les points de type B et D sont donc des points lisses des schémas correspondants.

7.10. La famille E.

Il s'agit des courbes lisses de degré 8 et genre 5 tracées sur une quadrique (lisse), de bidegré $(6,2)$ et donc biliées à 4 droites d'une même famille de cette quadrique par une biliaison $(2,+2)$. Le module de Rao est en degrés 2, 3 et 4, avec $\rho(2) = \rho(4) = 3$ et $\rho(3) = 4$. On déduit de 6.4.3 que l'on a $\mathrm{ext}^1(M,M)^0 - \mathrm{hom}(M,M)^0 = 8$. D'autre part on a $\delta_\gamma = 29$ (trois pas $(6,6)$ et un pas $(5,5)$ font passer à une courbe de degré 8 et genre 9, intersection complète de deux surfaces de degrés 2 et 4 pour laquelle δ vaut 33) et $\epsilon_{\gamma,\rho} = -8$, de sorte que l'on a $t_{\gamma,\rho} = 29$. Par liaison (cf. VII 3) on voit que c'est aussi la dimension de $H_E = H_{\gamma,\rho}$ qui est donc lisse.

8. Annexe : une variante pour le calcul des dimensions.

Nous donnons ici brièvement l'idée d'une démonstration directe de la formule 3.9 qui donne la dimension de $H_{\gamma,M}$ par une méthode inspirée de celle d'Ellingsrud ([E]). A l'inverse de la démarche adoptée plus haut, on peut en déduire, avec le calcul de la dimension de l'espace tangent (cf. 3.8) la lissité de $H_{\gamma,M}$.

Soient M un R-module, ρ sa fonction de Rao, C_0 un élément de $H_{\gamma,M}$. Soit

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{F} \to \mathcal{J}_{C_0} \to 0$$

une résolution de type E de C_0.

1) On considère le schéma $X = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. C'est un espace affine de dimension $\mathrm{hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ dont les points rationnels sont les homomorphismes de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$. Soit $U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ le sous-schéma de X dont les points rationnels sont les homomorphismes φ injectifs et dont le conoyau est l'idéal d'une courbe. C'est un ouvert d'après II 1.2, il est non vide car il contient φ_0.

2) On a un morphisme naturel $\theta : U_{\mathcal{E},\mathcal{F}} \to H_{\gamma,M}$ qui à φ associe la courbe $C = C_\varphi$ d'idéal $\mathrm{Coker}\varphi$. On vérifie en effet aisément que les $R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ sont localement libres et commutent au changement de base (X est réduit) et que $\bigoplus_n R^i\pi_*\mathcal{J}_C(n)$ est isomorphe à $M \otimes \mathcal{O}_X$ (car il est défini par $\mathcal{E}$ qui est constant).

3) L'image de θ est ouverte dans $H_{\gamma,M}$. Cela résulte de II 1.2 et d'une variante du lemme de relèvement VII 2.4 dans le cas de la résolution de type E.

4) Le schéma en groupes $G = \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{E}) \times \underline{\mathrm{Aut}}(\mathcal{F})$ opère sur $U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$ par $(u, v) \cdot \varphi = v\varphi u^{-1}$ et cette action est compatible avec θ et est transitive sur les fibres de θ.

5) On déduit de 4) un isomorphisme $U_{\mathcal{E},\mathcal{F}}/G \simeq \mathrm{Im}\theta$.

6) Le fixateur de φ est isomorphe à un ouvert non vide de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) \times \mathbf{A}^1$ (où $\mathbf{A}^1$ est l'espace affine de dimension 1 sur k) : si $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ et $\lambda \in k^*$ sont assez généraux, on obtient un couple (u, v) qui stabilise φ en posant $v = \lambda\mathrm{Id} + \varphi\psi$ et $u = (\lambda\mathrm{Id} + \psi\varphi)^{-1}$.

7) On en déduit alors la formule $\dim H_{\gamma,M} = \dim \mathrm{Im}\theta = \mathrm{hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) - \mathrm{hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}) - \mathrm{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) + \mathrm{hom}(\mathcal{F}, \mathcal{E}) + 1$ et on retrouve le résultat de 3.4.

X UN EXEMPLE : LA CLASSE DE DEUX DROITES

Dans ce numéro nous nous intéressons aux courbes qui sont dans la classe de liaison de la réunion disjointe de deux droites. Il s'agit de la classe la plus simple, hormis celle des courbes ACM, puisque le module de Rao de ces courbes, isomorphe à décalage près au R-module $k = R/\mathbf{m}$, est concentré en un seul degré et de longueur 1.

Si C est une courbe on note comme d'habitude γ, σ et ρ ses caractères de postulation, de spécialité et sa fonction de Rao. On a : $\gamma = \partial^3 \rho - \sigma$.

Nous allons étudier ci-dessous les schémas $H_{\gamma,\rho}$ qui correspondent aux courbes de la classe de deux droites, i.e. ceux pour lesquels la fonction ρ est la fonction de Dirac en un point l. Nous étudierons ensuite les schémas H_γ, H_σ et $H_{d,g}$ qui contiennent $H_{\gamma,\rho}$ afin d'en comprendre la structure et en particulier les singularités, et ce notamment à l'aide de leurs espaces tangents. Les méthodes utilisées permettent de mettre en évidence les générisations possibles des courbes de la classe (qui, par semi-continuité, sont soit dans la même classe, soit ACM), mais pas les éventuelles spécialisations. Elles reposent sur l'étude systématique et conjointe des deux types de résolutions des courbes. Un phénomène essentiel à cet égard, lié à la fois à l'existence de générisations et aux singularités est la présence de répétitions dans les résolutions. Le lemme crucial que nous utilisons en ce domaine (lemme de générisation simplifiante) est sans doute de portée beaucoup plus générale.

Le résultat le plus spectaculaire de l'étude est qu'une courbe de la classe de deux droites, si elle est générale dans le schéma $H_{\gamma,\rho}$, est un point lisse à la fois dans $H_{\gamma,\rho}$, H_γ et H_σ. De plus, elle n'est singulière dans $H_{d,g}$ que si les schémas H_γ et H_σ sont distincts et qu'elle en est un point d'intersection. Les singularités "génériques" sont donc dans ce cas de nature assez bénigne : elles apparaissent à l'intersection de deux familles lisses.

1. Description des résolutions.

Soit C une courbe de la classe de liaison de deux droites. On sait qu'il existe un entier $l \geq 0$ tel que l'on ait : $h^1 \mathcal{J}_C(l) = 1$, $h^1 \mathcal{J}_C(n) = 0$ pour $n \neq l$.

Proposition 1.1.

1) La résolution minimale de type E de I_C est du type suivant :

$$0 \to E \xrightarrow{\psi} F \to I_C \to 0,$$

où E est donné par la suite exacte :

$$0 \to R(-l-4) \xrightarrow{\varphi} \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{b(n)} \to E \to 0$$

et où l'on a posé :

$$F = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{c(n)}.$$

De plus, on a $b(l+3) \geq 4$ et φ contient une sous-matrice de la forme (P_1, P_2, P_3, P_4), avec les P_i de degré 1 *engendrant l'idéal maximal* $\mathbf{m}$.
2) La résolution minimale de type N de I_C est du type suivant :

$$0 \to P \xrightarrow{\psi'} N \to I_C \to 0,$$

où N est donné par la suite exacte :

$$0 \to N \to \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{b'(n)} \xrightarrow{\varphi'} R(-l) \to M_C \to 0$$

et où l'on a posé :

$$P = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} R(-n)^{c'(n)}.$$

De plus, on a $b'(l+1) \geq 4$ et ${}^t\varphi'$ contient une sous-matrice de la même forme que pour φ ci-dessus.

Démonstration. Cela résulte du calcul des résolutions pour la courbe minimale de la classe (i.e. les deux droites) (cf. par exemple II 7.2 et 7.7 ou IV 6.7) et de la variation des résolutions par biliaison (cf. III 4.3), ou encore de la description des faisceaux $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}$ à partir de $\mathcal{E}_0$ et $\mathcal{N}_0$ (cf. II 3.1 et 4.1).

Le conoyau (resp. le noyau) de la sous-matrice linéaire décrite dans l'énoncé n'est autre que le module E_0 (resp. N_0) (cf. II 2), à décalage près.

Proposition 1.2. *Pour $n \neq l+1,\ l+2,\ l+3$ on a : $c(n) = b'(n)$, $b(n) = c'(n)$.*

Démonstration. Cela résulte de II 6.1.

2. Calcul de certains groupes Ext.

On reprend les notations de 1.1, et on désigne par $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{F}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{N}$) le faisceau associé à E (resp. F, P, N) et on conserve les conventions d'écriture des dimensions de IX.

Proposition 2.1. *On a les formules suivantes :*
1) a) $\mathrm{ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{J}_C) = c(l)$, *b)* $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = c(l+4)$, *c)* $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = b(l+4)$,
d) $\mathrm{ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = b(l)$, *e)* $\mathrm{ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{J}_C) = b(l) + c(l+4)$.
2) a) $\mathrm{ext}^2(\mathcal{J}_C, \mathcal{P}) = c'(l+4)$, *b)* $\mathrm{ext}^1(\mathcal{P}, \mathcal{N}) = c'(l)$,

c) $\mathrm{ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N}) = b'(l)$, *d)* $\mathrm{ext}^2(\mathcal{N},\mathcal{N}) = b'(l+4)$,
e) $\mathrm{ext}^2(\mathcal{J}_C,\mathcal{N}) = c'(l) + b'(l+4)$.

Démonstration. Les formules 1.a,b et 2.a,b sont évidentes ; 1.c résulte de IX 3.6 et 2.c de IX 3.11, 1.d et 2.d s'obtiennent en utilisant les résolutions libres de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{N}$. La formule 1.e résulte de la considération de la suite exacte :

$$\to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \xrightarrow{h} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{J}_C) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to 0$$

de 1.b et 1.d et du lemme suivant :

Lemme 2.2. *La flèche* $h : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F})$ *est nulle.*

Démonstration. Posons $\mathcal{L}_3 = \oplus_{n\in\mathbf{Z}}\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-n)^{b(n)}$. Soit $\tilde{\sigma}_3$ la flèche naturelle de $\mathcal{L}_3$ dans $\mathcal{F}$ et $h_1 : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_3) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F})$ la flèche qui lui est associée. Comme la flèche naturelle $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_3) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{E})$ est surjective, il suffit de prouver que h_1 est nulle. Mais, d'après la dualité de Serre, on a les isomorphismes : $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{L}_3) \simeq (H^1\mathcal{J}_C\otimes\check{\mathcal{L}}_3(-4))^*$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E},\mathcal{F}) \simeq (H^1\mathcal{J}_C\otimes\check{\mathcal{F}}(-4))^*$, donc les seuls termes de $\mathcal{L}_3$ et $\mathcal{F}$ qui apportent une contribution non nulle sont les $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-l-4)$. Mais, par minimalité de la résolution, le morphisme $\tilde{\sigma}_3$ est nul entre ces termes, donc aussi h_1 par fonctorialité de la dualité. On notera que cette démonstration vaut plus généralement lorsque le module de Rao est concentré en un seul degré.

La démonstration de 2.e est analogue, on montre cette fois que l'homomorphisme $h' : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{N},\mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P},\mathcal{N})$ est nul.

3. Calculs des dimensions des espaces tangents. Soit C une courbe de la classe de liaison de deux droites. Son module de Rao est isomorphe à k, de sorte que l'espace des modules E_ρ existe et est réduit à un point. Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ (que nous noterons aussi quelquefois $H_{\sigma,\rho}$) est donc isomorphe à $H_{\gamma,M}$ et, d'après VII, ce schéma est irréductible et lisse. Nous calculons ci-dessous les dimensions des espaces tangents en C aux divers schémas de Hilbert.

Proposition 3.1. *On a :*

$$\begin{aligned} t_{\gamma,M} &= t_{\gamma,\rho} = \dim H_{\gamma,\rho} = \delta_\gamma - b(l+4) + c(l+4), \\ &= t_{\sigma,\rho} = \dim H_{\sigma,\rho} = \delta_\sigma - b'(l) + c'(l). \end{aligned}$$

Démonstration. Cela résulte de IX 3.8. et 3.11. On notera que le terme complémentaire ne dépend en fait que de la cohomologie de C et pas de sa résolution. Ainsi on a $c(l+4) - b(l+4) = \gamma(l+4) - \gamma(l+3) - 1$ et $c'(l) - b'(l) = \sigma(l) - \sigma(l-1) - 1$.

Proposition 3.2.
1) On a : $t_\gamma = \delta_\gamma + c(l+4) = t_{\gamma,\rho} + b(l+4)$.
2) On a : $t_\sigma = \delta_\sigma + c'(l) = t_{\sigma,\rho} + b'(l)$.

Démonstration. Vu 2.2 et son analogue pour h', cela résulte de IX 5.1 et de 2.1 ci-dessus.

Corollaire 3.3.
1) Si $b(l+4)$ est nul, on a $t_\gamma = t_{\gamma,\rho}$, donc H_γ est lisse en C et H_γ et $H_{\gamma,\rho}$ sont égaux au voisinage de C.
2) Si $b'(l)(= c(l))$ est nul, on a $t_\sigma = t_{\sigma,\rho}$, donc H_σ est lisse en C et H_σ et $H_{\sigma,\rho}$ sont égaux au voisinage de C.

Remarque 3.4. On notera que si les conditions ci-dessus ($b(l+4) = 0$, resp. $b'(l) = 0$) sont en défaut, la résolution de type E (resp. N) présente une répétition d'un facteur $R(-l-4)$ (resp. $R(-l)$).

Proposition 3.5. *On a :* $t_{d,g} = t_{\gamma,\rho} + b(l+4) + b'(l) = t_\gamma + c(l) = t_\sigma + c'(l+4)$.

Démonstration. L'espace tangent $T_{d,g}$ contient les sous-espaces T_γ et T_σ dont l'intersection est $T_{\gamma,\rho}$. On a donc : $t_{d,g} \geq t_\gamma + t_\sigma - t_{\gamma,\rho} = t_\gamma + b'(l) = t_\sigma + b(l+4)$. Par ailleurs, on a $t_{d,g} = t_\gamma + \operatorname{im}\tau = t_\sigma + \operatorname{im}\tau'$ (cf. VIII 2 et IX 5.1) donc, par 2.1, $t_{d,g} \leq t_\gamma + c(l)$ et $t_{d,g} \leq t_\sigma + c'(l+4)$ d'où la conclusion en vertu de 1.2.

Remarque 3.6. Ceci montre que les flèches τ et τ' sont surjectives, ce qui n'est pas évident a priori.

4. Les lemmes de générisation simplifiante.

Nous allons montrer que lorsque la résolution minimale de type E (resp. N) d'une courbe C de la classe de deux droites admet une répétition au niveau $l+4$ (resp. l), la courbe possède une générisation dont la résolution minimale ne comporte plus la répétition en question.

Proposition 4.1. *Soit C_0 une courbe de la classe de deux droites dont la résolution minimale de type E est de la forme suivante :*

$$0 \to R(-l-4) \xrightarrow{\varphi_0} R(-l-3)^4 \oplus \cdots \oplus R(-l-4) \xrightarrow{\psi_0} F \to I_{C_0} \to 0.$$

(Autrement dit, on suppose $b(l+4)$ non nul). Il existe une famille plate C_λ de courbes, paramétrée par un ouvert de Spec$k[\lambda]$*, qui vaut C_0 au point $\lambda = 0$, telle que I_{C_λ} admette une résolution de la même forme (donc que C_λ ait même postulation que C_0) mais où le dernier coefficient de φ_λ soit égal à λ. En*

particulier, pour $\lambda \neq 0$, la résolution n'est pas minimale, on peut simplifier les termes $R(-l-4)$ et C_λ est une courbe ACM.

Démonstration. Quitte à faire un changement de variables, on peut supposer que φ_0 a pour matrice (à transposition près) $(X, Y, Z, T, \dots, 0) = (x_0, 0)$. Soit (A_0, y_0) la matrice de ψ_0, y_0 étant l'image du terme $R(-l-4)$. Comme la résolution est minimale, les coefficients de y_0 sont dans l'idéal $\mathbf{m} = (X, Y, Z, T)$. Il existe donc une matrice A_1 qui vérifie $A_1 x_0 = -y_0$. On pose alors ${}^t\varphi_\lambda = (x_0, \lambda)$ et $\psi_\lambda = (A_0 + \lambda A_1, y_0)$. On a $\psi_\lambda \circ \varphi_\lambda = 0$. On vérifie que $\mathrm{Coker}\varphi_\lambda$ est un fibré sur $\mathbf{P}^3 \times \mathrm{Spec}k[\lambda]$. En vertu de II 1.2, il existe alors un ouvert de $\mathrm{Spec}k[\lambda]$, contenant 0 sur lequel $\mathrm{Coker}\psi_\lambda$ est l'idéal d'une courbe C_λ plate sur $k[\lambda]$, cqfd.

Proposition 4.2. *Soit C_0 une courbe de la classe de deux droites dont la résolution minimale de type E est de la forme suivante :*

$$0 \to R(-l-4) \xrightarrow{\varphi_0} \cdots \oplus R(-l-4) \xrightarrow{\psi_0} \cdots \oplus R(-l-4) \to I_{C_0} \to 0.$$

(On suppose $b(l+4)$ et $c(l+4)$ non nuls). Posons $m = \sup(b(l+4), c(l+4))$. Il existe une famille plate $C_{\underline{\lambda}}$ de courbes, paramétrée par un ouvert de $\mathrm{Spec}k[\underline{\lambda}] = \mathrm{Spec}k[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$, qui vaut C_0 au point $\underline{\lambda} = \underline{0}$, telle que $I_{C_{\underline{\lambda}}}$ admette une résolution de la même forme mais où la sous-matrice de $\psi_{\underline{\lambda}}$ qui correspond aux termes $R(-l-4)$ a pour coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ et est nulle par ailleurs. En particulier, si les λ_i sont non tous nuls, la résolution n'est pas minimale, on peut simplifier les termes $R(-l-4)$ correspondant aux $\lambda_i \neq 0$ entre $L_3 = \oplus R(-n)^{b(n)}$ et F. La courbe C_λ est encore une courbe de la classe de deux droites.

Démonstration. La démonstration est identique en prenant cette fois $\varphi_{\underline{\lambda}} = \varphi_0 = (x_0, 0)$ et en remplaçant dans ψ_0 la sous-matrice nulle qui correspond aux termes $R(-l-4)$ par la matrice indiquée dans l'énoncé.

La proposition suivante est l'analogue de 4.1 et 4.2 pour la résolution de type N et sa démonstration est similaire :

Proposition 4.3. *Soit C_0 une courbe de la classe de deux droites. On suppose $b'(l) \neq 0$ (resp. $b'(l)$ et $c'(l) \neq 0$). Il existe une famille plate C_λ (resp. $C_{\underline{\lambda}}$) de courbes, paramétrée par un ouvert de $\mathrm{Spec}k[\lambda]$ (resp. $\mathrm{Spec}k[\underline{\lambda}]$ comme en 4.2) qui vaut C_0 au point $\lambda = 0$ (resp. $\underline{\lambda} = \underline{0}$), telle que I_{C_λ} (resp. $I_{C_{\underline{\lambda}}}$) admette une résolution de type N de la même forme que I_{C_0} (donc que C_λ et $C_{\underline{\lambda}}$ aient même spécialité que C_0), mais avec un coefficient de φ'_λ (resp. une sous-matrice de $\psi'_{\underline{\lambda}}$) égal à λ (resp. avec $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sur la diagonale). En particulier, pour $\lambda \neq 0$ (resp. $\underline{\lambda} \neq \underline{0}$), la résolution n'est pas minimale, on peut simplifier les termes $R(-l-4)$ entre $L_1 = \oplus R(-n)^{b'(n)}$ et L_0 (resp. des termes*

$R(-l-4)$ entre L_1 et P). La courbe C_λ est une courbe ACM (resp. $C_{\underline{\lambda}}$ est encore une courbe de la classe de deux droites).

Exemple 4.4. Si la résolution, disons de type E, de C admet une répétition d'un terme $R(-n)$ avec $n \neq l+4$, il n'existe pas en général de générisation simplifiante.

1) Considérons par exemple une courbe C obtenue à partir de deux droites par une biliaison élémentaire $(4,+1)$ (nécessairement triviale, cf. III 2.4.c). On obtient une courbe de degré 6 et genre 3, réunion d'une quartique plane et de deux droites non coplanaires, avec la résolution minimale :

$$0 \to R(-5) \to R(-5) \oplus R(-4)^4 \to R(-3)^4 \oplus R(-4) \to I_C \to 0.$$

Cette courbe admet une générisation ACM de même postulation, obtenue par simplification du terme $R(-5)$ (on notera que le facteur $R(-4)$ se simplifie aussi automatiquement). Mais elle n'admet pas de générisation dans la classe de deux droites obtenue en simplifiant seulement le terme $R(-4)$. En effet, le facteur L_3 n'aurait plus alors que trois termes $R(-4)$, en contradiction avec 1.1.

2) En revanche l'exemple suivant montre qu'il peut y avoir à l'intérieur de la classe de deux droites des générisations simplifiantes par d'autres termes que $R(-l-4)$. On part de deux droites et on effectue deux biliaisons élémentaires $(3,+1)$ et $(5,+1)$, la seconde étant triviale. On obtient une courbe de degré 10 et genre 11 avec la résolution minimale :

$$0 \to R(-6) \to R(-6) \oplus R(-5)^5 \to R(-5) \oplus R(-4)^5 \to I_C \to 0.$$

Cette résolution n'est pas générique dans $H_{\gamma,\rho}$. En effet, par une biliaison $(4,+2)$ à partir des deux droites on obtient une courbe de la même famille mais où le terme $R(-5)$ répété a été simplifié.

5. Description des schémas de Hilbert.

Le schéma $H_{\gamma,\rho} = H_{\sigma,\rho}$ étant lisse, nous étudions pour commencer les schémas H_γ et H_σ au voisinage d'une courbe C de la classe de deux droites. Vu le corollaire 3.3 il reste seulement à préciser ce qui se passe lorsque l'on a $t_{\gamma,\rho} < t_\gamma$ (resp. $t_{\sigma,\rho} < t_\sigma$).

5.1. Etude de H_γ dans le cas $t_{\gamma,\rho} < t_\gamma$ i.e. $b(l+4) \neq 0$.

On sait d'après 4.1 que la courbe C admet une générisation ACM de même postulation. Le schéma $H_{\gamma,0}$ des courbes ACM de caractère de postulation γ est irréductible, lisse, de dimension δ_γ (cf. [E]). C'est un ouvert du schéma de Hilbert $H_{d,g}$. Par semi-continuité, toute générisation de C dans H_γ est soit dans $H_{\gamma,0}$, soit dans $H_{\gamma,\rho}$, ce qui montre que l'on a

$\dim_C H_\gamma = \sup(\dim H_{\gamma,0}, \dim H_{\gamma,\rho}) = \sup(\delta_\gamma, \delta_\gamma - b(l+4) + c(l+4))$. Comme par ailleurs t_γ est de dimension $\delta_\gamma + c(l+4)$, nous distinguons plusieurs cas selon les valeurs de $c(l+4)$.

a) $c(l+4) = 0$.

Dans ce cas, H_γ est lisse en C, de dimension δ_γ et C est dans l'adhérence de $H_{\gamma,0}$. C'est le cas des courbes de l'exemple 4.4.

b) $c(l+4) > 0$.

Dans ce cas, C est un point singulier de H_γ puisque l'on a $t_\gamma > \dim H_\gamma$. D'autre part, d'après 4.2, C admet aussi une générisation C' dans $H_{\gamma,\rho}$ obtenue à partir de C en simplifiant dans la résolution de C les modules L_3 et F par $R(-l-4)^r$, avec $r = |b(l+4) - c(l+4)|$. Cette courbe est un point lisse de H_γ, donc aussi a fortiori la courbe générique de $H_{\gamma,\rho}$.

b1) $b(l+4) = c(l+4)$. Les deux schémas $H_1 = H_{\gamma,\rho}$ et $H_0 = H_{\gamma,0}$ sont lisses de dimension δ_γ et C est à l'intersection de H_1 et de l'adhérence de H_0 ce qui explique la singularité : H_γ n'est pas irréductible en C.

Exemple 5.2. Si on bilie une des courbes de l'exemple 4.4 par $(6,+1)$, on obtient une courbe de degré 12 et genre 18 avec la résolution :

$$0 \to R(-6) \to R(-5)^4 \oplus R(-6) \oplus R(-7) \to R(-4)^4 \oplus R(-5) \oplus R(-6) \to I_C \to 0,$$

donc avec $c(6) = b(6) = 1$. On notera que la courbe ci-dessus est de rang maximum, et cependant un point singulier du schéma de Hilbert, ce qui contredit une conjecture de Sernesi, cf. [BKM] ou [W]. Il n'y a pas de courbes lisses de ce type, car on a $h^1\mathcal{O}_C(3) = 1$, bien que 3×12 soit plus grand que $2g - 2 = 34$, mais on peut trouver des courbes lisses en allant un peu plus loin. Par exemple, utilisant les résultats de Chang [C], on en trouve de degré 33 et genre 117 avec la résolution :

$$0 \to R(-9) \to R(-8)^4 \oplus R(-9) \oplus R(-10)^2 \to R(-7)^2 \oplus R(-8) \oplus R(-9) \to I_C \to 0.$$

b2) $b(l+4) < c(l+4)$. La situation est identique, mais cette fois, le schéma H_0 des courbes ACM est de dimension inférieure.

Exemple 5.3. Si on bilie une des courbes de l'exemple 5.2 par $(7,+1)$, on obtient une courbe de degré 19 et genre 44 avec la résolution :

$$0 \to R(-7) \to R(-6)^4 \oplus R(-7) \oplus R(-8)^2 \to R(-5)^4 \oplus R(-6) \oplus R(-7)^2 \to I_C \to 0,$$

donc avec $0 < b(7) < c(7)$.

b3) $b(l+4) > c(l+4)$. Ici c'est H_1 qui est de plus petite dimension, la courbe générale de H_1 est un point lisse de H_γ, mais C en est un point singulier (et pas de la manière essentiellement triviale des cas b1 et b2 car H_1 est ici dans l'adhérence de H_0, donc H_γ est irréductible en C).

Exemple 5.4. Si on bilie une des courbes de l'exemple 5.2 par $(6,+1)$, avec une surface de degré 6 qui n'est pas un générateur minimal, on obtient une courbe de degré 18 et genre 39 avec la résolution :

$$0 \to R(-7) \to R(-6)^4 \oplus R(-7)^2 \oplus R(-8) \to R(-5)^4 \oplus R(-6)^2 \oplus R(-7) \to I_C \to 0,$$

donc avec $0 < c(7) < b(7)$.

5.5 Etude de H_σ dans le cas $t_{\sigma,\rho} < t_\sigma$ i.e. $b'(l) \neq 0$.

La situation est exactement duale de la précédente, la courbe C a une générisation ACM de même spécialité et le schéma $H_{\sigma,0}$ des courbes ACM de caractère de spécialité σ est irréductible , lisse de dimension δ_σ d'après [E]. L'examen des cas selon les valeurs de $c'(l)$ se fait exactement de la même manière et est laissé au lecteur. En particulier, la courbe générique de $H_{\sigma,\rho}$ est un point lisse de H_σ.

Exemple 5.6. Une courbe C de bidegré $(4,2)$ sur une quadrique lisse est de degré 6 et genre 3 et sa résolution de type N est donnée par : $P = R(-4)^3$; $0 \to N \to R(-3)^4 \oplus R(-2) \to R(-2)$. Par simplification par $R(-2)$ on voit que C est dans l'adhérence des courbes ACM de degré 6 et genre 3, les mêmes que dans l'exemple 4.4, mais ici c'est la spécialité qui est constante et non la postulation. On a $\dim H_{\sigma,\rho} = 23$ et $\dim H_{\sigma,0} = 24$.

5.7. Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$.

On se contente d'étudier comment une courbe générique de $H_{\gamma,\rho}$ se comporte dans $H_{d,g}$. On a déjà vu que c'est un point lisse de chacun des schémas $H_{\gamma,\rho}$, H_γ et H_σ. L'hypothèse de généricité implique que l'on n'a pas à la fois $b(l+4)$ et $c(l+4)$ (resp. $b'(l)$ et $c'(l)$) non nuls. On a vu en 3.5 la formule $t_{d,g} = t_{\gamma,\rho} + b(l+4) + b'(l) = t_\gamma + b'(l) = t_\sigma + b(l+4)$. Il en résulte que si l'on a $b'(l) = c(l) = 0$ (resp. $b(l+4) = c'(l+4) = 0$), le schéma $H_{d,g}$ est égal à H_γ (resp. à H_σ) au voisinage de C, en particulier il est lisse en ce point.

Le seul cas intéressant est ainsi celui où $b'(l)$ et $b(l+4)$ sont tous deux non nuls. La courbe C admet alors deux générisations C' et C'', toutes deux ACM, mais de caractères de postulation distincts. En effet si C' est la générisation à postulation constante son caractère est γ, tandis que C'' a pour caractère de spécialité σ donc pour caractère de postulation $-\sigma$ (qui diffère de γ de $\partial^3\rho$). Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est alors à l'intersection de H_γ et H_σ, qui sont lisses de dimensions respectives $t_{\gamma,\rho} + b(l+4)$ et $t_{\gamma,\rho} + b'(l)$.

Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ en C est alors réductible (réunion de H_γ et H_σ). En effet, comme C est générale dans $H_{\gamma,\rho}$, si C' en est une générisation, elle est nécessairement ACM par semi-continuité. De plus, toujours par semi-continuité, pour $n \neq l$, comme $h^0\mathcal{J}_C(n)$ et $h^2\mathcal{J}_C(n)$ ne peuvent que décroître et que leur somme est constante, ils sont constants. Enfin, pour $n = l$, on a $h^1\mathcal{J}_C(l) = 1$, de sorte que la seule possibilité pour $h^0\mathcal{J}_C(l)$ et $h^2\mathcal{J}_C(l)$ en passant à C' est que l'un soit constant et que l'autre diminue de 1. La courbe C' est donc bien une générisation à postulation ou à spécialité constante. La dimension de $H_{d,g}$ en C est alors le sup des dimensions de ces deux composantes et C en est un point singulier.

Exemple 5.8. Un exemple de cette situation est le cas des courbes de degré 18 et genre 39 étudiées par Sernesi ([S]). Il s'agit des courbes (lisses) C biliées à deux droites par $(4, +4)$, dont les résolutions sont données par :

$F = R(-6)^4 \oplus R(-4)$; $0 \to R(-8) \to R(-8) \oplus R(-7)^4 \to E \to 0$,

$P = R(-6)^2 \oplus R(-8)$; $0 \to N \to R(-5)^4 \oplus R(-4) \to R(-4)$.

Les générisations C' (resp. C'') s'obtiennent en simplifiant les termes $R(-8)$ (resp. $R(-4)$) dans la résolution de type E (resp. N). On obtient :

$$0 \to R(-7)^4 \to R(-4) \oplus R(-6)^4 \to I_{C'} \to 0,$$

$$0 \to R(-6)^2 \oplus R(-8) \to R(-5)^4 \to I_{C''} \to 0.$$

Les caractères de ces courbes sont respectivement donnés par $\gamma'(6) = 4, \gamma'(5) = \gamma'(4) = 0$ et $\gamma''(7) = \gamma''(6) = 1, \gamma''(5) = 3$. Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est de dimension 71, il est intersection des schémas H_γ et H_σ tous deux de dimension 72. Ses points sont évidemment singuliers dans $H_{18,39}$. On notera qu'on a rencontré à l'exemple 5.4 d'autres courbes de degré 18 et genre 39, beaucoup plus spéciales.

La proposition suivante résume l'essentiel des résultats obtenus :

Proposition 5.9. *Soient respectivement ρ, γ, σ une fonction de Rao, un caractère de postulation et un caractère de spécialité correspondant à une courbe C de la classe de deux droites. Soit l l'unique entier tel que $\rho(l) = 1$.*

1) Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est irréductible et lisse de dimension $\delta_\gamma + \gamma(l+4) - \gamma(l+3) - 1 = \delta_\sigma + \sigma(l) - \sigma(l-1) - 1$.

2) Le schéma $H_{\gamma,\rho}$ contient un ouvert dense U qui est lisse à la fois dans H_γ et dans H_σ. (Autrement dit la courbe générique de $H_{\gamma,\rho}$ est un point lisse de ces deux schémas).

3) L'ouvert U est dans le lieu singulier de $H_{d,g}$ si et seulement si on a $\gamma(l+4) - \gamma(l+3) - 1 < 0$ et $\sigma(l) - \sigma(l-1) - 1 < 0$ ou encore $\dim H_{\gamma,\rho} < \delta_\gamma$ et $\dim H_{\gamma,\rho} < \delta_\sigma$. Dans ce cas, les schémas H_γ et H_σ (dont les points génériques sont alors des courbes ACM de postulations distinctes) sont distincts, de dimensions respectives δ_γ et δ_σ et U est contenu dans leur intersection (et donc singulier dans leur réunion).

XI ANALYSE D'UNE PATHOLOGIE : LES COURBES DE DEGRÉ 14 ET GENRE 24.

Dans ce paragraphe nous étudions le schéma de Hilbert $H_{14,24}$, qui est connu depuis l'article de Mumford [M1] pour avoir une composante irréductible non réduite. Nous analysons la structure de ce schéma en termes de sa stratification par les sous-schémas $H_{\gamma,\rho}$, H_γ, H_σ, en calculant en particulier les espaces tangents. Le phénomène essentiel que nous mettons en évidence est qu'une fois de plus, pour la courbe générale de la composante incriminée, les schémas $H_{\gamma,\rho}$, H_γ, H_σ sont lisses. La singularité se situe donc au passage de ces schémas au schéma total $H_{d,g}$. Malheureusement, dans ce cas, l'explication de la singularité n'est pas aussi claire que pour celles rencontrées au Chapitre X : elle apparaît bien à l'intersection des deux schémas H_γ et H_σ, qui sont distincts, mais elle a lieu cette fois sur toute une composante qui leur est commune et conserve encore une bonne partie de son mystère.

Dans toute la suite nous nous intéresserons essentiellement aux courbes les plus générales de $H_{14,24}$ et notamment aux courbes lisses ou lissifiables (i.e. qui admettent une générisation lisse).

1. Les trois familles principales de $H_{14,24}$.

Nous analysons ci-dessous la nature des courbes lisses et connexes de $H_{14,24}$. Nous mettons ainsi en évidence trois familles U_1, U_2, U_3 qui contiennent toutes des courbes lisses.

Soit C une courbe lisse et connexe de degré 14 et genre 24. Il est clair qu'une telle courbe n'est ni plane, ni tracée sur une quadrique. De plus, comme on a $4.14 > 2.24 - 2$, le faisceau $\mathcal{O}_C(4)$ est non spécial et on a : $h^0\mathcal{O}_C(4) = 33$, de sorte que C est sur deux surfaces de degré 4 au moins. Distinguons deux cas selon que C est ou non sur une surface cubique :

a. Premier cas : $h^0\mathcal{J}_C(3) = 0$.

La courbe C est sur deux surfaces irréductibles de degré 4. Elle est liée par ces surfaces à une courbe Γ qui est plane (car $h^1\mathcal{O}_C(3)$ est nécessairement non nul, donc aussi $h^0\mathcal{J}_\Gamma(1)$) de degré 2 et genre 0, i.e. une conique, propre ou non. Il en résulte que C est ACM et on peut calculer sa résolution (de type E ou N) par liaison :

$$0 \to R(-7) \oplus R(-6) \to R(-5) \oplus R(-4)^2 \to I_C \to 0.$$

Les courbes de degré 14 et genre 24 (lisses ou non) qui sont liées à une conique par deux surfaces de degré 4 seront dites de type 1 et leur famille sera notée U_1. La famille des courbes lisses de U_1 sera notée U_1'.

Les invariants de $C \in U_1$ sont les suivants : pour la postulation on a $\gamma(6) = 1$, $\gamma(5) = 2$, $\gamma(4) = 1$, $\gamma(3) = \ldots = \gamma(0) = -1$; la fonction de Rao est nulle et on en déduit $\sigma = -\gamma$.

b. Deuxième cas : $h^0\mathcal{J}_C(3) \neq 0$.

Nous supposons toujours C lisse. Soit Q la surface cubique irréductible contenant C (unique pour une raison de degré). On a alors $h^0\mathcal{J}_C(4) \geq 4$ et $h^0\mathcal{J}_C(5) \geq 10$ (les multiples de Q) et ceci impose, vu la non spécialité de $\mathcal{O}_C(n)$ pour $n \geq 4$, $h^1\mathcal{J}_C(4) \geq 2$ et $h^1\mathcal{J}_C(5) \geq 1$, de sorte que C n'est pas ACM. La courbe C n'est pas sur des surfaces de degrés 4 ou 5 non banales (i.e. non multiples de Q). Pour 4 c'est une raison de degré évidente, pour 5 cela impliquerait que C est liée à une droite par 3×5 donc C serait ACM. En revanche, comme on a $h^0\mathcal{J}_C(6) \geq 23$, C est sur une surface de degré 6 non multiple de Q. Elle est donc liée par 3×6 à une courbe Γ de degré 4 et genre -1 et on a en particulier les deux cas suivants qui vont fournir des ouverts du schéma de Hilbert (si Γ est réduite ce sont les seuls possibles, mais nous ignorons si Γ peut être non réduite) :

b.1. Γ est réunion disjointe d'une droite et d'une cubique gauche.

On appelle ici cubique gauche une courbe, lisse ou non, de degré 3 et genre 0, liée à une droite par deux quadriques, donc ACM. On peut utiliser les techniques de II 7. Le module de Rao de Γ est monogène, concentré en degrés 0 et 1, avec $\rho(0) = 1$ et $\rho(1) = 2$, il est donc du type de $M = R/(X, Y, Z^2, ZT, T^2)$. La courbe Γ est liée par 3×3 à une quintique rationnelle C_0 qui est la courbe minimale correspondant au module de Rao dual M^*. La courbe C est biliée à C_0 par $3, +3$. Son module est donc aussi M^*, à décalage près. Une courbe, lisse ou non, de degré 14 et genre 24, biliée par $3, +3$ à une quintique rationnelle dont le module de Rao est du type précédent sera dite de type 2 et la famille de ces courbes sera notée U_2. Comme $\mathcal{J}_\Gamma(3)$ est engendré par ses sections il résulte de [PS] qu'il existe de telles courbes lisses. La famille des courbes lisses de U_2 sera notée U_2'.

Les résolutions de M et des courbes de type 2 se calculent avec les techniques de II 7.6, 7.8 et III 1.4. On trouve pour C_0 la résolution de type E:

$$0 \to R(-6) \to R(-5)^2 \oplus R(-4)^3 \to E_0 \to 0; F_0 = R(-4) \oplus R(-3)^4,$$

et la résolution de type N :

$$0 \to N_0 \to R(-2)^7 \to R(-1)^2; P_0 = R(-3)^4.$$

On en déduit aussitôt par biliaison les résolutions correspondantes de C :

$$0 \to R(-9) \to R(-8)^2 \oplus R(-7)^3 \to E \to 0;$$

$$F = R(-7) \oplus R(-6)^3 \oplus R(-3);$$

$$0 \to N \to R(-5)^7 \oplus R(-3) \to R(-4)^2; P = R(-6)^5.$$

Les invariants numériques d'une courbe de U_2 se calculent aussitôt à partir des résolutions : on a $\gamma(8) = -1$, $\gamma(7) = 1$, $\gamma(6) = 3$, $\gamma(5) = \gamma(4) = \gamma(3) = 0$, $\gamma(2) = \gamma(1) = \gamma(0) = -1$ et les autres sont nuls ; on a $\rho(4) = 2$, $\rho(5) = 1$ et $\rho = 0$ ailleurs. Pour σ on note que l'on a $h^1\mathcal{O}_C(3) = 0$, d'où $\sigma(0) = \sigma(1) = \sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 0$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = -5$.

b.2. Γ est réunion disjointe de deux coniques.

Les coniques en question ne sont pas supposées propres. Cette fois, le module de Rao est du type de $M = k[X,Y,Z,T]/(X,Y,Z^2,T^2)$. Ce module est autodual et la courbe C est biliée à une courbe minimale C_0 de la classe de Γ (c'est-à-dire à une courbe de degré 2 et genre -2, cf. IV 6.9) par $3, +4$. Une courbe, lisse ou non, de degré 14 et genre 24, biliée à une courbe de degré 2 et genre -2 dont le module de Rao est du type précédent sera dite de type 3 et la famille de ces courbes sera notée U_3.

Les résolutions de la courbe minimale C_0 sont données en IV 6.7 (avec $n_1 = n_2 = 1$, $n_3 = n_4 = 2$) et on obtient par biliaison la résolution de type N d'une courbe C de type 3 :

$$0 \to N \to R(-5)^2 \oplus R(-4)^2 \oplus R(-3) \to R(-3);$$
$$P = R(-7) \oplus R(-6) \oplus R(-5).$$

Pour la résolution de type E, les deux cas suivants sont possibles selon que la surface liante Q est, ou non, un générateur minimal de $\mathcal{J}_{C_0}$:

$$0 \to R(-9) \to R(-8)^2 \oplus R(-7)^2 \to E \to 0\ ;\ F = R(-6)^3 \oplus R(-3),$$

$$0 \to R(-9) \to R(-8)^2 \oplus R(-7)^3 \to E \to 0;$$
$$F = R(-7) \oplus R(-6)^3 \oplus R(-3).$$

On notera que dans le second cas la surface Q n'est pas intègre. Ce cas ne peut donc se produire si la courbe C est lisse. On notera $U_{3,2}$ l'ensemble des courbes qui ont cette résolution. Le complémentaire $U_3 - U_{3,2}$ est ouvert dans U_3 d'après VII 2.1.

On obtient des courbes lisses de type 3 sur une surface cubique lisse en prenant par exemple, avec les notations de [rH2] V 4.8, un diviseur très ample de type $(18; 6, 6, 6, 6, 6, 5)$. Leur famille est notée U'_3.

On note que la fonction de Rao d'une courbe de type 3 vaut : $\rho(3) = 1$, $\rho(4) = 2$, $\rho(5) = 1$ et 0 ailleurs. La postulation est la même que celle des courbes de type 2, la spécialité est la même que celle des courbes de type 1.

2. La stratification de $H_{14,24}$, les schémas $H_{\gamma,\rho}$.

On désigne par γ_i, (resp. ρ_i, resp. σ_i) le caractère de postulation (resp. la fonction de Rao, resp. le caractère de spécialité) des courbes de U_i. On pose $H_i = H_{\gamma_i,\rho_i}$. On a donc $U_i \subset H_i$. Nous calculons pour commencer les dimensions des espaces tangents aux H_i. Si C_i est une courbe de U_i nous posons $M_i = M_{C_i}$.

Proposition 2.1. *On a les formules suivantes :*
1) $\delta_{\gamma_1} = \delta_{\gamma_2} = \delta_{\gamma_3} = 56$.
2) $\epsilon_{\gamma_2,\rho_2} = -3$; $\epsilon_{\gamma_3,\rho_3} = -5$.
3) $h_{M_2} = h_{M_3} = 1$.
4) $\mathrm{ext}^1(M_2, M_2)^0 = 4$; $\mathrm{ext}^1(M_3, M_3)^0 = 6$.

Démonstration. 1) Le plus simple pour calculer δ_{γ_1} est d'utiliser la formule de liaison IX 6.5. Soit en effet $C \in U_1$ et Γ une conique qui lui est liée par 4×4. Le schéma de Hilbert des coniques est de dimension 8, on a $h^0\mathcal{J}_C(4) = 2$ et $h^0\mathcal{J}_\Gamma(4) = 26$. Comme δ_{γ_1} est égal à la dimension de H_1 (donc de U_1, cf. VII 3.9) d'après [E] ou IX 5.2, on a le résultat annoncé.

Pour les autres caractères (qui sont égaux, cf. ci-dessus), le mieux à faire et le plus court est d'utiliser la formule des pas IX 6.11. Un pas $(7, 7)$ suivi d'un pas $(6, 6)$ qui augmentent chacun δ de 1 mènent au caractère $\gamma(3) = \gamma(4) = 0$, $\gamma(5) = 1$, $\gamma(6) = 2$. Là, on peut soit identifier ce caractère comme celui d'une courbe ACM liée à une droite par 3×5 et calculer la dimension par liaison (on trouve 58), soit remarquer que ce caractère s'obtient à partir de γ_1 par un pas $(5, 4)$ qui augmente δ de 2. Dans les deux cas on trouve bien $\delta_{\gamma_2} = 56$.

2) Les formules sont immédiates avec les calculs des invariants fournis en 1.b.

3) Les modules de Rao M_3 et M_2^* sont monogènes, donc leurs seuls endomorphismes de degré 0 sont les homothéties.

4) Les formules s'obtiennent avec IX 6.1 en se ramenant au cas de la réunion de deux intersections complètes (là encore on notera que le nombre cherché est le même pour M et pour M^*).

Théorème 2.2.
1) Le schéma H_1 est irréductible et lisse de dimension 56 ; c'est un sous-schéma ouvert de $H_{14,24}$ et U_1 est ouvert dans H_1. L'adhérence de H_1 est une composante irréductible de $H_{14,24}$.
2) Le schéma H_2 est irréductible et lisse de dimension 56 et U_2 est ouvert dans H_2.
3) Le schéma H_3 est irréductible et lisse de dimension 56 et U_3 est ouvert dans H_3.

Démonstration. 1) C'est le théorème d'Ellingsrud [E] (cf. IX 5.2). Il est clair que U_1 est un sous-schéma ouvert par 2.4 ou VII 3.9.

2) Dans ce cas, on note que le schéma $\widehat{E}_{\rho_2}$ correspondant (avec $\rho_2(4) = 2$ et $\rho_2(5) = 1$) est irréductible et lisse. En effet, c'est un espace affine de dimension 8 (cf. VI 4.3 pour un exemple analogue). Il en résulte, en vertu de VII 2.4, que $\widehat{H}_{\gamma_2,\rho_2}$ est lui aussi irréductible et lisse, donc également $H_{\gamma_2,\rho_2} = H_2$. La dimension de l'espace tangent en un point de U_2 est donnée par IX 4.2 : $t_{\gamma,\rho} = \delta_\gamma + \epsilon_{\gamma,\rho} - h_M + \mathrm{ext}^1(M,M)^0$, on trouve 56 et c'est donc aussi la dimension de H_2. Le fait que U_2 est un ouvert dense de H_2 résulte de VII 4.8.

3) Cette fois le schéma $\widehat{E}_{\rho_3} = \widehat{E}_{(1,2,1)}$ n'est plus lisse (cf. VI 4.3). Cependant, l'analyse des courbes minimales correspondant aux modules de $\widehat{E}_{(1,2,1)}$ que nous avons effectuée en IV 6.19 montre que les seuls types qui peuvent a priori donner des courbes de H_3 sont les types 1,2,4 (par exemple parce qu'une courbe de H_3 a $s_0 = 3$). Or ces types correspondent à des points lisses de $\widehat{E}_{(1,2,1)}$ (cf. VI 4.3). Donc l'image de $\widehat{\Phi}$ est contenue dans l'ouvert de lissité de $\widehat{E}_{(1,2,1)}$ (qui est irréductible de dimension 11) et il en résulte que $\widehat{H}_{\gamma_3,\rho_3}$ et H_{γ_3,ρ_3} sont irréductibles et lisses. Comme l'espace tangent à H_3 en un point de U_3 est de dimension 56 par 2.1, H_3 est de dimension 56. Comme les modules de type 1 forment un ouvert de $\widehat{E}_{(1,2,1)}$ (cf. VI 4.3), leurs courbes minimales (de degré 2 et genre -2) forment donc un ouvert du schéma $H_{\gamma,\rho}$ correspondant (cf. VII 1.5) et il en résulte que U_3 est ouvert dans H_3 par VII 4.8.

Remarques 2.3.

1) Attention, U_1 n'est pas égal à H_1. On peut en effet construire des courbes, non lisses bien entendu, qui ont une résolution de type E de la forme :

$$0 \to R(-7) \oplus R(-6) \oplus R(-5) \to R(-5)^2 \oplus R(-4)^2 \to I_C \to 0,$$

dans laquelle le $R(-5)$ répété n'est pas simplifiable, donc qui ne sont pas dans U_1. Il suffit par exemple de prendre la courbe définie par les équations $X^2Z^3 = Y^3T^2 = X^2T^2 = X^2ZT = 0$.

2) Le module de Rao d'une courbe de H_2 est nécessairement du type de M^* avec $M = R/(X,Y,Z^2,ZT,T^2)$ (on vérifiera à l'aide de IV 6 que les autres

modules de $\widehat{E}_{(2,1)}$ donnent des courbes dont les invariants s_0 sont > 3). On peut donc affirmer que toute courbe de H_2 est déformation d'une courbe de U_2 (cf. IV 5.1 et VII 4.8) mais nous ignorons si l'on a $H_2 = U_2$. Toutefois il est clair que les courbes lisses de H_2 sont dans U_2 par III 2.7 b.

3) On voit aussitôt qu'il existe dans H_3 des courbes (non lisses, cf. IV 6.15) dont le module de Rao est du type 2 de IV 6.13 (i.e. $R/(X,Y,Z^2,ZT,T^3)$), donc qui ne sont pas dans U_3. En effet il suffit de bilier une courbe minimale associée à ce module (de degré 5 et genre 0, cf. IV 6.14) par $(3,+3)$. En revanche il n'y a pas de courbes dont le module est de type 4 (cf. IV 6.16).

3. La stratification de $H_{14,24}$, suite, les schémas H_γ et H_σ.

Nous passons maintenant à l'étude des schémas H_γ, H_σ et $H_{14,24}$ au voisinage des courbes considérées. Comme on a $\gamma_2 = \gamma_3$ et $\sigma_1 = \sigma_3$ il est clair que l'on a les inclusions schématiques $H_{\gamma_1} \supset H_1$, $H_{\sigma_2} \supset H_2$, $H_{\gamma_2} \supset H_2, H_3$ et $H_{\sigma_1} \supset H_1, H_3$. Nous avons déjà vu en 2.2 que H_1 est un sous-schéma ouvert de $H_{14,24}$. Nous allons montrer qu'il en est de même pour H_2, mais pas pour H_3 qui rencontre les adhérences des deux autres. Les résultats vont essentiellement provenir du calcul des espaces tangents T_γ et T_σ sur U_2 et U_3.

Lemme 3.1.
1) Soit C' un point de $H_{14,24}$, non nécessairement fermé. On suppose que C' a une spécialisation C dans H_2. Alors C' est un point de H_2, autrement dit H_2 est (ensemblistement) ouvert dans $H_{14,24}$ et son adhérence est (ensemblistement) une composante irréductible de dimension 56 de $H_{14,24}$. La même assertion vaut pour les plongements de H_2 dans H_{σ_2} et H_{γ_2}.
2) Soit C' un point générique de $H_{14,24}$ dont l'adhérence contient H_3. Alors C' est un point de H_3, autrement dit l'adhérence de H_3 est (ensemblistement) une composante irréductible de dimension 56 de $H_{14,24}$. La même assertion vaut pour les plongements de H_2 dans H_{σ_1} et H_{γ_2}.

Démonstration. 1) Par semi-continuité on a $h^0\mathcal{O}_{C'}(3) \leq h^0\mathcal{O}_C(3) = 19$, donc C' est sur une surface de degré 3. Il en résulte que l'on a $h^0\mathcal{J}_{C'}(4) \geq 4$ et $h^0\mathcal{J}_{C'}(5) \geq 10$, (C' est sur les multiples de la surface cubique), donc ces nombres sont égaux à 4 et 10, toujours par semi-continuité. Comme pour $n \geq 6$ on a $h^1\mathcal{O}_C(n) = h^1\mathcal{J}_C(n) = 0$, on en déduit $\gamma' = \gamma_2$ et $\rho' = \rho_2$ donc C' est dans H_2.

2) Comme H_3 contient des courbes lisses, la courbe générique C' est lisse. On a, par semi-continuité, $h^0\mathcal{J}_{C'}(3) \leq 1$ et $h^1\mathcal{O}_{C'}(3) \leq 1$. Si C' est sur une surface cubique, on voit en raisonnant comme ci-dessus que C' est dans H_2 ou H_3. Si C' n'est pas sur une surface cubique, comme C' est lisse, l'analyse de 1.a montre que C' est dans H_1. Mais si C' était dans H_1 ou H_2, comme les adhérences V_1 et V_2 de ces schémas sont des composantes irréductibles de

$H_{14,24}$, H_3 serait inclus dans V_1 ou V_2 ce qui est absurde pour une raison de dimension.

Proposition 3.2. *Soit C une courbe de U_2. Les espaces tangents en C à H_{γ_2}, H_{σ_2}, $H_{14,24}$ sont tous de dimension 56, de sorte que ces trois schémas sont lisses en C. Le schéma H_2 est un sous-schéma ouvert de $H_{14,24}$ et son adhérence en est une composante irréductible.*

Démonstration. En considérant les résolutions de C, on voit que les groupes $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{J}_C)$ et $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ sont nuls : pour le premier (resp. le second) c'est la nullité de $\rho(n)$ pour $n = 3, 6, 7$, (resp. $n = 3, 2, -1$). Les flèches τ et h sont alors nulles (cf. VIII). Par IX 5.1 il en résulte que l'on a $t_{d,g} = t_\gamma = \delta_\gamma = t_{\gamma,\rho} = 56$ et comme t_σ est compris entre $t_{d,g}$ et $t_{\gamma,\rho}$ il est aussi égal à 56. Les assertions de lissité sont alors claires ainsi que le fait que U_2 est un sous-schéma ouvert de $H_{14,24}$. D'après 3.1, H_2 est ensemblistement ouvert, mais H_2 est irréductible et son ouvert dense U_2 est un sous-schéma ouvert de $H_{14,24}$, donc H_2 est aussi un sous-schéma ouvert de $H_{14,24}$.

Proposition 3.3. *Soit C une courbe de l'ouvert $U_3 - U_{3,2}$ de U_3 (i.e. dont la résolution de type E n'a pas de répétition, cf. 1.b 2). L' espace tangent à H_{γ_2} en C est de dimension 56, de sorte que ce schéma est lisse en C et $U_3 - U_{3,2}$ en est un sous-schéma ouvert.*
L'espace tangent à $H_{14,24}$ en C est de dimension 57. Le schéma $H_{14,24}$ est singulier sur $U_3 - U_{3,2}$, donc sur tout H_3 : la composante $\overline{H}_3$ de $H_{14,24}$ est non réduite.

Démonstration. On voit aussitôt en consultant la résolution de type E de C que l'on a $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$, donc $h = 0$ donc $t_\gamma = \delta_\gamma = 56$.

D'autre part, on a $\mathrm{ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{J}_C) = 1$ (car $h^1\mathcal{J}_C(3) = 1$). Si τ est surjective, on aura donc bien $t_{d,g} = 57$ d'après IX 5.1. Pour cela il suffit de prouver $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{J}_C) = 0$, ou encore, puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est nul, $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) = 0$. Cela résulte de la suite exacte suivante, avec les notations usuelles de IX 1 :

$$\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_4, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{E}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Ext}^2(\mathcal{L}_3, \mathcal{E}),$$

puisque les groupes extrêmes sont clairement nuls. Les assertions sur $H_{14,24}$ en résultent, vu 3.1.

Remarque 3.4. Si C est dans $U_{3,2}$, on a la résolution :

$$0 \to R(-9) \xrightarrow{\varphi_0} R(-8)^2 \oplus R(-7)^2 \oplus R(-7) \xrightarrow{\psi_0} R(-7) \oplus R(-6)^3 \oplus R(-3) \to I_C \to 0$$

et φ_0 est de la forme $(X, Y, Z^2, T^2, 0)$ (cf. III 4.3). Il existe alors une famille plate C_λ de courbes, paramétrée par un ouvert de la droite affine, admettant la même résolution que C, donc à postulation constante, telle que C_0 soit égal à C et que la courbe C_λ générique soit dans H_2. Autrement dit, les courbes de $U_{3,2}$ sont dans l'adhérence de H_2 (donc H_3 n'est pas un ouvert) et, comme elles sont à l'intersection de deux composantes de H_{γ_2}, (resp. de $H_{14,24}$) elles en sont des points singuliers.

Pour construire la famille C_λ on prend $\varphi_\lambda = (X, Y, Z^2, T^2, \lambda ZT)$ et on calcule ψ_λ pour que la composée soit nulle (cf. X 4). La vérification est laissée au lecteur, la remarque essentielle est que si P est un polynôme homogène de degré ≥ 1, ZTP est dans l'idéal engendré par X, Y, Z^2, T^2.

Proposition 3.5. *Soit C une courbe de U_3. Si C est assez générale, l'espace tangent à H_{σ_1} en C est de dimension* 56, *de sorte que ce schéma est lisse.*

Démonstration. Le calcul de t_σ n'est pas tout à fait immédiat. Il suffit, bien entendu, de trouver un point de U_3 où t_σ vaut 56. Vu IX 5.1 cela revient à dire que $h' : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{N}, \mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}, \mathcal{N})$ est surjectif, ce dernier groupe étant de dimension 1 d'après le calcul de la résolution de type N de C. Vu la suite exacte $0 \to \mathcal{N} \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_0 \to 0$, il revient au même de voir que $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_1, \mathcal{N}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{P}, \mathcal{N})$ est surjectif. Comme L_1 et P sont libres, la suite exacte de comparaison ramène le problème à l'étude de la surjectivité de la flèche $\mathrm{Hom}_R(L_1, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, M)$, ou encore de $\alpha : M_5^2 \oplus M_4^2 \oplus M_3 \to M_5$ (car $M_6 = M_7 = 0$), cette flèche étant induite par la flèche $\psi' : P \to L_1$ qui figure dans la résolution de type N de C. Comme M_5 est de dimension 1, tout revient à montrer qu'en général, cette application α n'est pas nulle.

Il faut pour cela préciser soigneusement la résolution de type N d'une courbe C. On part de la courbe Γ réunion disjointe des deux coniques d'équations (X, Z^2) et (Y, T^2). Le module de Rao de Γ est $R/(X, Y, Z^2, T^2)$ et l'idéal I_Γ est engendré par les polynômes XY, XT^2, YZ^2, Z^2T^2 que nous noterons F_1, F_2, F_3, F_4. La résolution de type E de Γ est la suivante :

$$0 \to R(-6) \xrightarrow{\varphi} R(-5)^2 \oplus R(-4)^2 \xrightarrow{\psi} R(-2) \oplus R(-3)^2 \oplus R(-4) \to I_\Gamma \to 0,$$

avec ψ donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -T^2 & -Z^2 \\ 0 & Z^2 & Y & 0 \\ -T^2 & 0 & 0 & -X \\ -Y & -X & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On lie alors Γ par deux surfaces A et B de degrés respectifs 3 et 6 à une courbe C qui est dans U_3. Nous supposerons la surface A irréductible, donc un générateur minimal (de sorte que C n'est pas dans $U_{3,2}$). La résolution de type N de C se calcule par mapping cone et on trouve :

$$0 \to \check{F}(-9) \to \check{E}(-9) \oplus R(-6) \oplus R(-3) \to I_C \to 0.$$

La flèche entre $\check{F}(-9)$ et $R(-6) \oplus R(-3)$ est la duale de $R(-3) \oplus R(-6) \to F$ définie par A et B, i.e. si on a $A = \sum A_i F_i$, $B = \sum B_i F_i$, la flèche définie par les A_i et les B_i. On note que l'on a $\deg A_1 = 1$, $\deg A_2 = \deg A_3 = 0$, $A_4 = 0$ et $\deg B_1 = 4$, $\deg B_2 = \deg B_3 = 3$ et $\deg B_4 = 2$. Comme la surface A est irréductible, A_2 ou A_3 est non nul (disons A_2) et on peut simplifier un terme $R(-6)$ dans la résolution de C (attention à l'échange entre 3 et 6). On obtient alors la résolution attendue pour I_C (cf. 1.b 2) :

$$P = R(-7) \oplus R(-6) \oplus R(-5)\ ,\ 0 \to N \to R(-5)^2 \oplus R(-4)^2 \oplus R(-3) \to R(-3)$$

et la flèche ψ' de P dans L_1 est donnée par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -Z^2 & -X & 0 \\ -T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X \\ 0 & -T^2 & -Y \\ B_1 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

La flèche α cherchée est alors fournie par la dernière colonne de cette matrice. En fait, comme X et Y sont nuls sur le module de Rao, il reste seulement l'homomorphisme de M_3 dans M_5 donné par la multiplication par B_4. Si B_4 a un terme non nul en ZT (ce qui est le cas général), cet homorphisme est non nul, car ZT n'est pas nul dans $R/(X, Y, Z^2, T^2)$. Ceci achève de prouver que T_σ est, en général, de dimension 56.

Remarque 3.6. Soit C une courbe de $U_3 - U_{3,2}$, son module de Rao est monogène : $M_C = R/J$. Considérons la résolution de type N de I_C. La flèche de P dans N induit une flèche ψ' de P dans L_1 qui fournit en particulier une flèche de $R(-5)$ dans $R(-3)$ définie par un polynôme B_4 de degré 2. Désignons par $U_{3,1}$ l'ensemble des courbes tels que le polynôme B_4 soit dans l'idéal J. A changement de variables près dans R, cette condition n'est autre que la nullité du terme en ZT de B_4 (cf. ci-dessus), de sorte que $U_{3,1}$ est un fermé de U_3. L'analyse précédente montre que les points de $U_{3,1}$ sont exactement ceux où l'espace tangent T_σ est de dimension 57. Si C est une courbe de $U_{3,1}$ on montre comme en 3.4 qu'il existe une famille plate C_λ de courbes, à spécialité constante, telle que l'on ait $C_0 = C$ et que la courbe générique C_λ soit dans H_1 (donc ACM). La résolution de C_λ s'obtient en simplifiant le terme $R(-3)$ entre L_1 et L_0. Le fermé $U_{3,1}$ de U_3 est dans l'adhérence de H_1 et il est à l'intersection de deux composantes du schéma H_{σ_1} donc en est un point singulier.

En conclusion, on voit que U_3 contient deux fermés $U_{3,1}$ et $U_{3,2}$ qui sont respectivement dans l'adhérence de H_1 et H_2. Ces fermés sont singuliers dans H_{σ_1} (resp. H_{γ_2}), mais sur U_3, en dehors de ces fermés, les schémas considérés sont lisses. Ces propriétés sont encore évidemment vraies pour H_3. En revanche le schéma total $H_{14,24}$ est singulier (non réduit) sur tout H_3. L'explication de ce phénomène n'est pas encore absolument claire.

4. Une composante exotique.

Nous exhibons pour terminer une composante de $H_{14,24}$ formée de courbes réductibles et dont la dimension est 59. On part d'une courbe C_0 de degré 4 et genre -1, réunion disjointe d'une cubique gauche et d'une droite et on effectue une biliaison élémentaire $3, +1$ qui donne une courbe C_1 de degré 7 et genre 3, puis une biliaison $7, +1$ (nécessairement triviale) qui fournit une courbe C de degré 14 et genre 24. La courbe C est réunion (non disjointe) de C_1 et d'une courbe plane de degré 7. Il est facile d'en calculer les résolutions:

$$0 \to R(-7)^2 \to R(-8) \oplus R(-6)^7 \to E \to 0;$$
$$F = R(-5)^5 \oplus R(-4) \oplus R(-7);$$

$$0 \to N \to R(-4)^4 \oplus R(-3)^2 \oplus R(-7) \to R(-2);$$
$$P = R(-5)^3 \oplus R(-4) \oplus R(-8).$$

On en déduit aussitôt les dimensions : $\delta_\gamma = 57$, $\epsilon_{\gamma,\rho} = -1$; $h_M = 1$; $\mathrm{ext}^1(M,M)^0 = 4$ d'où :

Proposition 4.1. *On a* $t_{\gamma,\rho} = 59$.

Cet exemple montre bien quels types de phénomènes s'introduisent lorsque l'on travaille avec des courbes de Cohen-Macaulay non nécessairement lisses.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[B] G. Bolondi, Irreducible families of curves with fixed cohomology, Arch. der Math., 53, 1989, 300–305.

[BB] E. Ballico et G. Bolondi, The variety of module structures, Arch. der Math. 54, 1990, 397–408.

[BBM] E. Ballico, G. Bolondi et J. Migliore, The Lazarsfeld-Rao problem for liaison classes of two-codimensional subschemes of $\mathbf{P}^n$, à paraître in Amer. J. of Maths.

[BKM] G. Bolondi, J.O. Kleppe, R.M. Mirò-Roig, Maximal rank curves and singular points of the Hilbert scheme, preprint (1989).

[BM1] G. Bolondi et J. Migliore, Classification of maximal rank curves in the liaison class L_n, Math. Ann., 277, 1987, 585–603.

[BM2] G. Bolondi et J. Migliore, Buchsbaum Liaison classes, J. of Algebra, 123, 1989, 2, 426–456.

[BM3] G. Bolondi et J. Migliore, The Lazarsfeld-Rao and Zeuthen problems for Buchsbaum curves, preprint.

[Bbki] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Hermann, Paris.

[C] M.-C. Chang, A filtered Bertini-type theorem, J. Reine Angew. Math. 397 (1989), 214–219.

[D'A] J. D'Almeida, Courbes de l'espace projectif : Séries linéaires incomplètes et multisécantes, J. für Reine und Angew. Math. 370, 1986, 30–51.

[Ein] L. Ein, Hilbert scheme of smooth space curves, Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 4, 1986, 469–478.

[E] G. Ellingsrud, Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay, Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 8, 1975, 423–432.

[EH] P. Ellia et A. Hirschowitz, Voie Ouest 1, courbes gauches génériques à résolution linéaire dominante, Preprint n° 197, Nice, 1988.

[FGA] A. Grothendieck, Fondements de la géométrie algébrique, Sém. Bourbaki, 1957-1962.

[G] A. Grothendieck, Local Cohomology, Lecture Notes 41, Springer Verlag, 1967.

[GP1] L. Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif, Lecture Notes 687, Springer Verlag, 1977, 31–59.

[GP2] L. Gruson et C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 15, 1982, 401–418.

[H] G. Halphen, Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques, Oeuvres complètes, t.3, 261–455.

[jH] J. Harris, Curves in projective space, Presses de l'Université de Montréal, 1982.

[rH1] R. Hartshorne, On the classification of algebraic space curves, in Vector bundles and differential equations, Proceedings, Nice, France, 1979, Progress in Math.7, Birkhäuser.

[rH2] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, 1977, Springer Verlag.

[rH3] R. Hartshorne, Residues and duality, Lecture Notes 20, 1966, Springer Verlag .

[K] J.O.Kleppe, Liaison of families of subschemes in $\mathbf{P}^n$ in Algebraic Curves and Projective Geometry, Proceedings Trento 1988, Lecture Notes 1389, Springer Verlag, 1989, 128–173.

[LR] R. Lazarsfeld et A. P. Rao, Linkage of general curves of large degree, Lecture Notes 997, Springer Verlag, 1983, 267–289.

[MD-P1] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur la classification des courbes gauches I, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, p. 345–350, 1989.

[MD-P2] M. Martin-Deschamps et D. Perrin, Sur la classification des courbes gauches I, Rapport de recherche du LMENS, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 PARIS Cedex 05, mai 1989.

[Mi] J. Migliore, Geometric Invariants of Liaison, J. of Algebra, 99, (1986), 548–572.

[M1] D. Mumford, Further pathologies in algebraic geometry, Amer. J. of Maths, 84, 1962, 642–648.

[M2] D. Mumford, Lectures on curves on an algebraic surface, Annals of Math. Studies, 59, Princeton University Press, 1966.

[P] D. Perrin, Courbes passant par m points généraux de $\mathbf{P}^3$, Mémoire n° 28/29 de la S.M.F., 1987.

[PS] C. Peskine et L. Szpiro, Liaison des variétés algébriques, Invent. Math., 26, 1974, 271–302.

[R] A. P. Rao, Liaison among curves in $\mathbf{P}^3$, Invent. Math., 50, 1979, 205–217.

[S] E. Sernesi, Seminario di variabili complesse 1981, Bologna, 1982.

[W] C. Walter, Communication at the Trieste Conference on Projective Varieties (1989).

Mireille MARTIN-DESCHAMPS

U.R.A. 212 du C.N.R.S., Université Paris VII, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.

Daniel PERRIN

Labo. Math., Ecole Normale Supérieure, Unité associée au C.N.R.S., 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05.

On désigne par k un corps algébriquement clos et par R l'anneau de polynômes $k[X, Y, Z, T]$.

La voie usuelle pour aborder la classification des courbes gauches consiste à se donner un certain nombre d'invariants $\lambda_1(C), \ldots, \lambda_n(C)$ — en général numériques — attachés à la courbe C. On a alors à résoudre les deux problèmes fondamentaux suivants :

Problème A: Quelle est l'image de l'application $C \mapsto \lambda(C)$, i.e., quels sont les invariants possibles?

Problème B: Décrire les fibres de cette application, i.e., la famille $H_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ des courbes d'invariants donnés . Plus précisément on souhaite munir cette famille d'une structure de schéma (qu'on dira généralement "de Hilbert") et on se demande alors en particulier s'il est irréductible, lisse, et quelle est sa dimension.

Les invariants pertinents dans cette situation sont d'une part la postulation de la courbe C (ou plutôt son "caractère de postulation" γ_C, qui a l'avantage de ne prendre qu'un nombre fini de valeurs non nulles, et qui généralise aux courbes quelconques le caractère défini par Gruson et Peskine pour les courbes ACM), d'autre part le module d'Hartshorne-Rao : $M_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$ qui est un R-module gradué de longueur finie. Ce module, à décalage de la graduation près, caractérise la classe de biliaison de la courbe.

Dans ce travail, on construit explicitement (en fournissant un algorithme de calcul) la courbe minimale (unique à déformation près) associée à un module M dont on connait une résolution graduée libre minimale. On précise ensuite les décalages et les postulations de toutes les courbes de la classe, ce qui achève de résoudre le problème A.

On étudie ensuite la stratification du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes de degré d et genre g par les sous-schémas à cohomologie constante, ou à cohomologie et module de Rao constants. De façon précise, si γ est un caractère de postulation et M un R-module gradué de longueur finie, on montre par relèvement infinitésimal que le schéma $H_{\gamma,M}$ est irréductible et lisse. On calcule sa dimension en décrivant les espaces tangents à tous les schémas de la stratification, et on montre comment les déterminer à partir de certaines résolutions de l'idéal de la courbe.

Le reste du travail est consacré à l'étude détaillée d'un certain nombre d'exemples : courbes de degré 8 et genre 5, courbes de la classe de liaison de deux droites disjointes, courbes de degré 14 et genre 24. Cette étude montre comment calculer avec les invariants introduits, et comment les résultats sur la stratification permettent dans certains cas d'élucider des singularités de $H_{d,g}$.

Let k be an algebraically closed field and let R denote the polynomial ring $k[X,Y,Z,T]$.

The usual way to address the classification of space curves consists in choosing a given number of invariants $\lambda_1(C),\ldots,\lambda_n(C)$ (generally numerical) associated to the curve C. We then have to solve the two following fundamental problems :

Problem A: What is the image of the mapping $C \mapsto \lambda(C)$, i.e., what are the possible invariants.

Problem B: How to describe the fibers of this mapping, i.e., the family $H_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$ of curves with given invariants. More precisely, we want to provide this family with a scheme structure (an "Hilbert" scheme structure) and we specifically raise the issue of its smoothness and its irreducibility and of its dimension ?

In this work, the choosen invariants are first the postulation of the curve C (or rather its "postulation character", which is a function from $\mathbf{Z}$ to $\mathbf{Z}$ with finite support, and which generalizes for arbitrary curves the Gruson-Peskine character for ACM curves) and on the other hand the Hartshorne-Rao module $M_C = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} H^1\mathcal{J}_C(n)$ which is a graduated R-module of finite length. This module, up to a shift in degrees, characterizes the biliaison class of the curve.

Then we explicitely construct (and provide an algorithm) the minimal curve (unique up to a deformation) asociated to an R-module M, starting from a minimal free graduated resolution of M. We describe the shifts and the postulations of all the curves in the class, and this solves the problem A.

We then study a stratification of the Hilbert scheme $H_{d,g}$ of curves of degree d and genus g, given by the cohomology, or by the cohomology and the Rao-module. More precisely, if γ is a postulation character and M is a graduated R-module of finite length, we show, by using infinitesimal technics, that the scheme $H_{\gamma,M}$ is smooth and irreducible. We calculate the dimension of $H_{\gamma,M}$ through the description of the tangent spaces of the subschemes of the statification, and we explain how they are determined from some resolution of the ideal of the curve.

The end of the paper is devoted to the detailed study of some examples : curves of degree 8 and genus 5, curves of the liaison class of two skew lines, curves of degree 14 and genus 24. This shows how the previously described invariants help in calculation and how the results on the statification can explain, in some cases, the singularities of $H_{d,g}$.