

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JOHANNES SJÔSTRAND

## **Asymptotique des résonances pour des obstacles**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1989-1990, exp. n° 724, p. 259-283.

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1989-1990\\_\\_32\\_\\_259\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__259_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Asymptotique des résonances pour des obstacles

Johannes Sjöstrand

### 0. Introduction

Cet exposé est principalement consacré aux travaux de G. LEBEAU sur la diffraction des singularités Gevrey (justifiant de vieilles idées de J. Keller et D. Ludwig) et de l'application de ces résultats à la distribution des pôles de "scattering" (résonances) dans le plan complexe, due à C. BARDOS-G. LEBEAU-J. RAUCH. On donnera quelques indications sur les démonstrations qui sont à la fois techniques et subtiles. Afin d'expliquer vraiment ces démonstrations il aurait fallu, d'abord, un exposé sur la théorie de la transformation FBI, il m'a donc semblé plus raisonnable de ne pas consacrer tout l'exposé à ces démonstrations mais plutôt de placer les résultats dans leur contexte naturel.

Dans la section 1 on rappelle quelques notions de base de la théorie de "scattering" de Lax-Phillips qui s'applique pour des perturbations à support compact en dimension impaire. On décrit aussi quelques développements plus récents : une formule de trace de Bardos-Guillot-Ralston améliorée par Melrose, et une borne globale sur le nombre de résonances dû à ce dernier.

Dans la section 2 on présente les théorèmes de base sur la propagation des singularités près d'un obstacle dans les cas  $C^\infty$ , analytique et Gevrey 3. On tente aussi une vague explication de la démonstration de Lebeau du fait que les singularités mod Gevrey 3 ne sont pas diffractées par un obstacle strictement convexe.

Dans la section 3, on discute quelques résultats sur la distribution des résonances dans le cas des obstacles  $C^\infty$ , d'abord un résultat sur l'absence des résonances dans un voisinage logarithmique de l'axe réel pour des obstacles non captants et ensuite des résultats d'Ikawa et de C. Gérard sur le comportement des résonances pour certains obstacles captants.

Dans la section 4, on décrit les résultats de Bardos-Lebeau-Rauch sur la distribution des résonances des obstacles analytiques non-captants et en particulier pour ceux qui sont strictement convexes. Les résonances se placent alors plus loin dans le plan complexe et l'étude devient plus délicate.

Au départ, je voulais aussi décrire brièvement des résultats analogues pour l'équation de Schrödinger (où la théorie de Lax-Phillips ne s'applique pas en général) et me plonger dans les travaux de Babich et ses collaborateurs pour les décrire. Le temps m'a malheureusement manqué.

## 1. Théorie de Lax-Phillips

On donne ici quelques ingrédients de base de la théorie de scattering de Lax et Phillips [LP1], ainsi que quelques développements plus récents.

Soit  $\Omega$  un ouvert connexe de la forme  $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O}$  ou  $\mathcal{O}$  est un compact de bord  $C^\infty$  et  $n$  un nombre impair. On s'intéresse au comportement quand  $|t| \rightarrow \infty$  des solutions de

$$(1.1) \quad \square v = 0 \text{ dans } \mathbf{R} \times \Omega, \quad v|_{\mathbf{R} \times \partial\Omega} = 0,$$

où  $v$  appartient à un espace convenable de distributions prolongeables à  $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^n$  et  $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$  désigne le d'Alembertien. On veut notamment comparer le comportement asymptotique de ces solutions avec celui des

solutions de l'équation des ondes libre dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ . Posant  $u_0 = v$ ,  $u_1 = \partial_t v$ ,  $u = (u_0, u_1)$  on obtient

$$(1.2) \quad \partial_t u = Au, \quad u|_{\mathbf{R} \times \partial\Omega} = 0,$$

où  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$ . Posons  $\mathcal{H}(\Omega) = H_D(\Omega) \times L^2(\Omega)$ , où  $H_D(\Omega)$  est l'adhérence de  $C_0^\infty(\Omega)$  pour la norme de Dirichlet :

$$\|u\|_{H_D}^2 = \int_{\Omega} \sum_1^n |\partial_{x_j} u(x)|^2 dx.$$

Alors  $\mathcal{H}(\Omega)$  est un espace de Hilbert et on peut considérer  $\frac{1}{i}A$  comme un opérateur auto-adjoint non-borné dans  $\mathcal{H}(\Omega)$  de domaine :  $\{(u_0, u_1) \in \mathcal{H}(\Omega); u_1 \in H_D(\Omega), \Delta u_0 \in L^2(\Omega)\}$ . Si  $U(t) = \exp tA = \exp\left(it\frac{1}{i}A\right)$  est le groupe unitaire associé et si  $u(0) \in \mathcal{H}(\Omega)$  alors  $u(t) = U(t)(u(0))$  nous donne une solution de (1.2) au sens des distributions. Remarquons qu'on a une inclusion naturelle :  $\mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$ , définie en prolongeant les éléments de  $\mathcal{H}(\Omega)$  par 0 dans  $\mathcal{O}$ .

Lax et Phillips introduisent une variante (explicite) de la transformée de Radon,  $\mathcal{R}_0 : \mathcal{H}(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1})$  avec les propriétés suivantes :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} a) & \quad \mathcal{R}_0 \text{ est unitaire,} \\ b) & \quad \text{si } \mathcal{R}_0 u(s, \omega) \text{ s'annule pour } |s| < T, \\ & \quad \text{alors } u \text{ s'annule pour } |s| < T, \\ c) & \quad \mathcal{R}_0 U_0(t) = \tau_t \circ \mathcal{R}_0, \text{ où } (\tau_t f)(s, \omega) = f(s - t, \omega), \\ d) & \quad \text{il y a des formules explicites pour } \mathcal{R}_0 \text{ et } \mathcal{R}_0^{-1}. \end{aligned}$$

Ici  $U_0(t) = \exp tA_0$  est défini comme auparavant avec  $\Omega$  remplacé par  $\mathbf{R}^n$ . On appelle  $\mathcal{R}_0$  une représentation de translation pour le groupe d'évolution libre. Pour  $\rho \geq 0$  on pose

$$\begin{aligned} D_\rho^+ &= \left\{ u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n); U_0(t)u = 0 \text{ si } t \geq 0 \text{ et } |x| \leq \rho + t \right\} \\ D_\rho^- &= \left\{ u \in \mathcal{H}(\mathbf{R}^n); U_0(t)u = 0 \text{ si } t \leq 0 \text{ et } |x| \leq \rho + |t| \right\}, \end{aligned}$$

et on peut montrer que

$$\mathcal{R}_0 D_\rho^\pm = \left\{ f \in L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1}); f(s, \omega) = 0 \text{ si } \pm s \leq \rho \right\}.$$

En particulier  $D_\rho^+$  et  $D_\rho^-$  sont orthogonaux.

Si on choisit  $\rho > 0$  assez grand pour que  $\mathcal{O} \subset B(0, \rho) = \{x \in \mathbf{R}^n; |x| < \rho\}$ , alors  $D_\rho^\pm$  peuvent aussi être considérés comme des sous-espaces de  $\mathcal{H}(\Omega)$ , et pour  $u \in D_\rho^\pm$ , on a  $U(t)u = U_0(t)u$  si  $\pm t \geq 0$ . En utilisant que  $A$  n'a pas de valeurs propres on peut montrer que

$$(1.4) \quad \bigcup_{t \in \mathbf{R}} U(t)D_\rho^\pm \text{ sont denses dans } \mathcal{H}(\Omega) .$$

Grâce à cette propriété on peut définir des représentations de translation sortantes (+) et entrantes (-) par :

$$(1.5) \quad \text{Si } u \in D_\rho^\pm \text{ on pose } \mathcal{R}_\pm U(t)u = R_0 U_0(t)u = \tau_t R_0 u .$$

On obtient alors :

$$(1.6) \quad \begin{array}{l} a) \quad \mathcal{R}_\pm : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1}) \text{ est unitaire,} \\ b) \quad \mathcal{R}_\pm u = R_0 u \text{ si } u \in \mathcal{D}_\rho^\pm \\ c) \quad \mathcal{R}_\pm U(t) = \tau_t \mathcal{R}_\pm . \end{array}$$

La relation avec les opérateurs d'onde  $W_\pm = s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(-t)U_0(t)$  (isométries :  $\mathcal{H}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$ ) est :

$$(1.7) \quad R_+ W_+ = R_- W_- = R_0 .$$

En particulier l'image de  $W_\pm$  est  $\mathcal{H}(\Omega)$  ( $\Rightarrow$  complétude asymptotique) et on peut définir l'opérateur de scattering  $S = W_+^{-1}W_- : \mathcal{H}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbf{R}^n)$  qui est unitaire et qui commute avec  $U_0(t)$ . (1.7) donne

$$(1.8) \quad S = R_0^{-1} R_+ R_-^{-1} R_0 .$$

Via  $R_0$  on peut donc identifier  $S$  avec l'opérateur unitaire dans  $L^2(\mathbf{R} \times S^{n-1})$ ,  $\tilde{S} : R_- u \mapsto R_+ u$ , qui commute avec les translations. C'est donc un opérateur de convolution,  $\tilde{S}u = k * u$ . En utilisant indirectement que les supports se propagent avec une vitesse  $\leq 1$ , on voit que  $S$  envoie  $D_\rho^-$  dans  $(D_\rho^+)^\perp$  ce qui entraîne que le support de la distribution  $k$  est contenu dans  $]-\infty, 2\rho]$ . La matrice de scattering  $\mathcal{S}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int e^{it\lambda} k(t) dt$  admet donc un prolongement holomorphe dans le demi-plan inférieur.

Un autre objet important est le semi-groupe de Lax-Phillips. On fixe  $\rho > 0$  avec  $\mathcal{O} \subset B(0, \rho)$  et on introduit les projecteurs orthogonaux

$P_+, P_- : \mathcal{H}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}(\Omega)$  sur  $D_+^{\rho\perp}$  et  $D_-^{\rho\perp}$  respectivement. Pour  $t \geq 0$  on pose :

$$(1.9) \quad Z(t) = P_+ U(t) P_- ,$$

et on vérifie que  $Z(t)$  est un semi-groupe de contractions, fortement continu sur  $K \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}(\Omega) \cap (D_+^\rho \oplus D_-^\rho)^\perp$ . (Si  $u$  est à support dans  $B(0, \rho)$ , alors  $Z(t)u = U(t)u$  dans  $B(0, \rho)$ ). Soit  $B$  le générateur du semi-groupe  $\{Z(t)\}$ .

Dans la représentation de translation sortante,  $K$  devient :

$$\begin{aligned} R_+ K &= \left( L^2([ \rho, +\infty[ \times S^{n-1}) \oplus \tilde{S} \left( L^2(]-\infty, -\rho] \times S^{n-1}) \right) \right)^\perp = \\ &= L^2(]-\infty, \rho] \times S^{n-1}) \cap \left( \tilde{S} \left( L^2(]-\infty, -\rho] \times S^{n-1}) \right) \right)^\perp \end{aligned}$$

et l'action de  $R_+ Z(t) R_-$  sur cet espace est  $1_{]-\infty, \rho]} \tau_t$ . Exploitant ce lien entre  $S$  et  $Z(t)$  et un résultat de compacité pour  $Z(t)(1+B)^{-1}$  quand  $t > 2\rho$ , Lax et Phillips [LP1] démontrent :

THÉORÈME 1.1.

- a)  $\mathcal{S}(z)$  se prolonge en une fonction méromorphe dans  $\mathbb{C}$  à valeurs dans  $\mathcal{L}(L^2(S^{n-1}), L^2(S^{n-1}))$  et avec les pôles contenus dans  $\{z \in \mathbb{C} ; \text{Im } z > 0\}$ .
- b) Le spectre de  $B$  est discret et contenu dans  $\{z \in \mathbb{C} ; \text{Re } z < 0\}$ .
- c)  $\lambda$  est un pôle de  $\mathcal{S}$  ssi  $i\lambda \in \sigma(B)$ .

Les pôles de  $\mathcal{S}$  sont appelés pôles de “scattering”, ou résonances. Une autre caractérisation utile des résonances est donnée par :

THÉORÈME 1.2 ([LP1]). Pour  $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$  la fonction  $\lambda \mapsto ((\lambda - A)^{-1} f | g)_{\mathcal{H}(\Omega)}$ , définie pour  $\text{Re } \lambda > 0$ , admet une extension méromorphe à  $\mathbb{C}$  dont les pôles sont contenus dans  $\sigma(B)$ . Si  $\mu \in \sigma(B)$ , on peut trouver  $f \in C_0^\infty(\Omega)$  tel que  $((\lambda - A)^{-1} f | f)$  a un pôle en  $\mu$ .

Surtout après l'apparition des résultats suffisamment précis sur la propagation des singularités il est devenu intéressant d'avoir des formules de

trace reliant la groupe  $U(t)$  avec la matrice de scattering et les résonances. Dans cet exposé on ne discutera que la formule qui s'applique aux résonances. Bardos-Guillot-Ralston [BGR] ont montré que si  $f \in H^{n+1}(\mathbf{R})$  est à support compact contenu dans  $]2\rho, +\infty[$ , alors  $\int f(t)Z(t)dt$  est nucléaire et

$$(1.10) \quad \text{tr} \int f(t)U(t)dt = \text{tr} \int f(t)Z(t)dt = \sum_j \widehat{f}(\lambda_j) ,$$

où la somme à droite converge absolument et les  $\lambda_j$  parcourent  $\frac{1}{i}\sigma(B)$ , (répétés selon la multiplicité algébrique de chaque valeur propre). L'opérateur  $\int f(t)U(t)dt$  n'est pas nucléaire, mais son noyau s'annule pour  $|x - y| \leq 1$ ,  $|x|$  assez grand et on arrive à définir sa trace. En considérant  $\int f(t)Z(t)dt$  dans un espace convenablement modifié, Melrose [M1] a étendu la validité de (1.10) au cas où  $\text{supp } f \subset\subset ]0, +\infty[$ . Dans le même travail il a aussi obtenu une majoration du type de Weyl :

$$(1.11) \quad \# \{ \lambda_j ; |\lambda_j| \leq R \} \leq C(1 + R)^n , \quad R \geq 0 .$$

Grâce à ces améliorations (1.10) prend la forme

$$(1.12) \quad \text{tr } U(t) = \text{tr } Z(t) = \sum_j e^{it\lambda_j} , \quad t > 0$$

au sens des distributions, et où la série converge au sens des distributions. Pour d'autres résultats concernant le membre de gauche de (1.11) voir Zworski [Z], Intissar [In].

## 2. Propagation des singularités pour le problème de Dirichlet

Il est commode d'utiliser le formalisme des transformations de Fourier-Bros-Iagolnitzer pour décrire de façon uniforme les résultats. (Voir [S1] pour plus de détails). Soit  $Y \subset \mathbf{R}^n$  un ouvert,  $(y_0, \eta_0) \in T^*Y \setminus 0 = Y \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ .

Soit  $\varphi(x, y)$  une fonction holomorphe définie dans un voisinage de  $(x_0, y_0) \in \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$  avec les propriétés :

$$(2.1) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = -\eta_0, \quad \text{Im} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0, \quad \det \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Pour  $x \in \text{Vois}(x_0)$ , la fonction  $\mathbf{R}^n \cap \text{Vois}(y_0) \ni y \mapsto \text{Im } \varphi(x, y)$  a un minimum non-dégénéré en un point  $y(x)$ . Si on pose  $\eta(x) = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y(x))$ , l'application  $x \mapsto (y(x), \eta(x))$  est un difféomorphisme analytique d'un voisinage (complexe) de  $x_0$  sur un voisinage réel de  $(y_0, \eta_0)$ . La fonction  $\Phi(x) = -\text{Im } \varphi(x, y(x))$  est bien définie et strictement plurisousharmonique dans un voisinage de  $x_0$ . Le difféomorphisme symplectique  $\mathcal{H}_T : \left( y, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) \mapsto \left( x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right)$  d'un voisinage complexe de  $(y_0, \eta_0)$  sur un voisinage complexe de  $(x_0, \xi_0)$  envoie les points réels sur un voisinage de  $(x_0, \xi_0)$  dans

$$\Lambda_\Phi = \left\{ \left( x, \frac{2}{i} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) : x \in \text{Vois}(x_0) \right\}.$$

Si  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$  est à support dans un petit voisinage de  $y_0$  et vaut 1 près de ce point, alors pour tout  $u \in \mathcal{D}'(Y)$ , la fonction (= transformée FBI de  $u$ )

$$(2.2) \quad T_\chi u(x, \lambda) = \int e^{i\lambda\varphi(x, y)} \chi(y) u(y) dy$$

est bien définie pour  $x \in \text{Vois}(x_0)$ ,  $\lambda \geq 1$  et vérifie

$$(2.3) \quad |T_\chi u(x, \lambda)| \leq C_0 \lambda^{N_0} e^{\lambda\Phi(x)},$$

(où  $C_0, N_0$  dépendent de  $u$ ).

**DÉFINITION 2.1.** On dit respectivement que  $(y_0, \eta_0) \notin WF_{C^\infty}(u)$ ,  $(y_0, \eta_0) \notin WF_a(u)$ ,  $(y_0, \eta_0) \notin WF_{G^3}(u)$ , s'il existe un voisinage complexe  $V$  de  $x_0$  tel que respectivement :

- $\forall N \geq 0, \exists C > 0$ , t.q.  $|T_\chi u(x, \lambda)| \leq C \lambda^{-N} e^{\lambda\Phi(x)}$ ,  $x \in W$ ,  $\lambda \geq 1$ ,
- $\exists C > 0$ , t.q.  $|T_\chi u(x, \lambda)| \leq C e^{\lambda(\Phi(x)-1/C)}$ ,  $x \in V$ ,  $\lambda \geq 1$ ,
- $\exists C > 0$ , t.q.  $|T_\chi u(x, \lambda)| \leq C e^{\lambda\Phi(x)-\lambda^{1/3}/C}$ ,  $x \in V$ ,  $\lambda \geq 1$ .

(Pour l'équivalence entre ces définitions et les définitions plus classiques d'Hörmander et de Sato, voir [S1] (et aussi [Bo]) dans le cas analytique, [LasS] dans le cas  $C^\infty$ , [Le2] dans le cas Gevrey 5). Les ensembles  $WF_{C^\infty}(u) \subset WF_{G^3}(u) \subset WF_a(u)$  sont fermés et coniques dans  $T^*Y \setminus 0$  et leurs projections dans  $Y$  sont les supports singuliers de  $u$  modulo  $C^\infty(Y)$ ,

$G^3(Y)$ ,  $\mathcal{A}(Y)$  respectivement. (Le support singulier modulo  $\mathcal{K}$  est le plus petit fermé de  $Y$  en dehors duquel  $u$  est de classe  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{K} = C^\infty, G^3, \mathcal{A}$ ). Ici

$$G^3(Y) = \left\{ u \in C^\infty(Y); \forall K \subset\subset Y, \exists C > 0 \text{ t.q. } \forall \alpha \in \mathbf{N}^n, y \in K : \right. \\ \left. |\partial_y^\alpha u(y)| \leq (\alpha!)^3 C^{|\alpha|+1} \right\},$$

avec les notations :

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \partial_y^\alpha = \partial_{y_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{y_n}^{\alpha_n}, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

$\mathcal{A}(Y) = G^1$  est l'espace des fonctions analytiques réelles sur  $Y$ .

Soit  $\Omega$  comme dans la section 1, et écrivons  $x_0$  à la place de  $t$ . Si  $x^0 \in \partial\Omega$ , on peut introduire de nouvelles coordonnées  $y_1, \dots, y_n$  centrées en  $x^0$ , telles que  $\Omega$  soit donné par  $y_n > 0$  et telles qu'aux facteurs négligeables  $> 0$  près,  $\square = D_{y_n}^2 + R(y, D_{y'})$ , où  $y_0 = x_0, y = (y_0, y_1, \dots, y_n), y' = (y_0, \dots, y_{n-1})$ . (Si  $\partial\Omega$  est analytique on peut choisir les nouvelles coordonnées analytiques).  $R$  est un opérateur différentiel d'ordre 2 dont le symbole principal  $r(y, \eta')$  vérifie :  $r(y, \eta') = 0, \eta' \neq 0 \Rightarrow \partial_{\eta'} r(y, \eta') \neq 0$ . Soit  $p$  le symbole principal de  $\square$  ( $= \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 - \xi_0^2$  dans les coordonnées initiales et  $= \eta_n^2 + r(y, \eta')$  dans les nouvelles coordonnées définies sur  $T^*\Omega \setminus 0$ ). Dans  $T^*\partial\Omega \setminus 0$  on introduit les trois zones :  $\mathcal{E}$  = région elliptique :  $r(0, y', \eta') > 0$ ,  $\mathcal{H}$  = région hyperbolique :  $r(0, y', \eta') < 0$ ,  $\mathcal{G}$  = région de "glancing" :  $r(0, y', \eta') = 0$ . Soit  $\Sigma_b = p^{-1}(0) \big|_{\mathbf{R} \times \Omega} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$  avec sa topologie naturelle avec la propriété que  $(y_\nu, \eta_\nu) \in p^{-1}(0) \big|_{\mathbf{R} \times \Omega}$  tend vers  $(y', \eta') \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}, \nu \rightarrow \infty$ , si  $(y_\nu)_n \searrow 0, (y'_\nu, \eta'_\nu) \rightarrow (y', \eta')$ .

Soit  $W$  un ouvert de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  et  $u \in \mathcal{D}'(W \cap (\mathbf{R} \times \Omega))$  une distribution prolongeable telle que  $\square u \in C^\infty(W \cap (\mathbf{R} \times \bar{\Omega}))$ . On définit alors  $WF_{C^\infty}^b(u) \subset ((T^*(\mathbf{R} \times \partial\Omega) \setminus 0) \cup (T^*(\mathbf{R} \times \Omega) \setminus 0)) \big|_W$  par :

$$-WF_{C^\infty}^b(u) \big|_{W \cap (\mathbf{R} \times \Omega)} = WF_{C^\infty}(u).$$

– Un point  $(y'_0, \eta'_0) \in T^*(\mathbf{R} \times \partial\Omega) \big|_W$  n'appartient pas à  $WF_{C^\infty}^b(u)$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $(y'_0, \eta'_0)$  n'appartient pas à  $WF_{C^\infty}(u(\cdot, y_n))$  de façon uniforme au sens de la Définition 2.1 ( $\exists$  choix de  $V$  et  $C = C_N$  indépendant de  $y_n$ ), quand  $0 \leq y_n \leq \varepsilon$ .

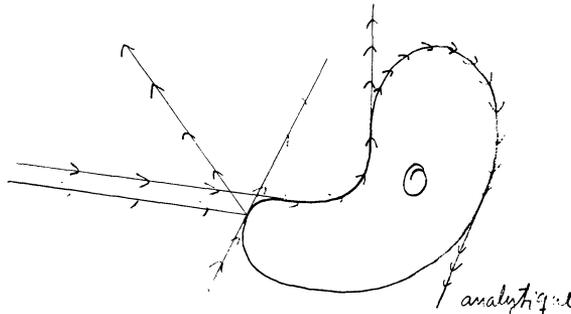
De même, si  $\partial\Omega$  est analytique et  $\square u$  est analytique sur  $W \times (\mathbf{R} \times \bar{\Omega})$ , on définit  $WF_a^b(u)$  et  $WF_{G^3}^b(u)$ . On sait dans les trois cas que  $WF^b(u)$  est un ensemble fermé conique dont la projection sur l'espace des  $x$  est respectivement le support singulier de  $u$  modulo  $C^\infty(W \cap (\mathbf{R} \times \bar{\Omega}))$ ,  $\mathcal{A}(W \cap (\mathbf{R} \times \bar{\Omega}))$ ,  $G^3(W \cap (\mathbf{R} \times \bar{\Omega}))$ . Si on suppose en plus que  $u|_{(\mathbf{R} \times \partial\Omega) \cap W} \in C^\infty$  et  $\in \mathcal{A}$  respectivement, alors la régularité microlocale pour des problèmes aux limites elliptiques entraîne que  $WF^b(u) \subset \Sigma_b|_W$ . Le problème de propagation des singularités est alors d'analyser  $WF^b(u)$  de plus près. Pour cela on introduit les notions de rayon  $C^\infty$  ([MS,II]) et de rayon analytique [S2].

**DÉFINITION 2.2.** Un rayon analytique est une courbe (continue)  $\gamma : I \rightarrow \Sigma_b$  (où  $I$  est un intervalle) tel que :

1. si  $\gamma(t) \in p^{-1}(0)|_{\mathbf{R} \times \Omega}$  alors  $\frac{d\gamma}{dt}(t)$  existe et vaut  $\left( \frac{\partial p}{\partial \xi}(\gamma(t)), -\frac{\partial p}{\partial x}(\gamma(t)) \right)$ ,
2. si  $\gamma(t) \in \mathcal{H}$  alors  $\exists \varepsilon > 0$ , t.q.  $\gamma(s) \in p^{-1}(0)|_{\mathbf{R} \times \Omega}$  pour  $0 < |s - t| < \varepsilon$ ,
3. si  $\gamma(t) \in \mathcal{G}$ , et si en utilisant les coordonnées  $y$  on écrit  $\gamma(s) = (y(s), \eta(s))$  pour  $\gamma(s) \in p^{-1}(0)|_{\mathbf{R} \times \Omega}$ ,  $\gamma(s) = (y'(s), \eta'(s))$  pour  $\gamma(s) \in \mathcal{H} \cup \mathcal{G}$ , alors  $(y'(s), \eta'(s))$  est dérivable en  $s = t$  et la dérivée vaut  $\left( \frac{\partial r}{\partial \eta'}, -\frac{\partial r}{\partial y'} \right) (y'(t), 0; \eta'(t))$ .

La définition d'un rayon  $C^\infty$  est la même à ceci près qu'on remplace  $\mathcal{H}$  par  $\mathcal{H} \cup \mathcal{G}_+$  dans 2., où  $\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}$  est la région diffractive définie par  $\frac{\partial r}{\partial y_n}(y', 0, \eta') < 0$ . Tout rayon  $C^\infty$  est analytique!

Voici le tracé de la projection dans  $\bar{\Omega}$  de quelques rayons :



Tout rayon  $C^\infty$  ou analytique peut se prolonger en un rayon avec  $\mathbf{R}$  comme intervalle de définition. En ce qui concerne les rayons  $C^\infty$ , le prolongement est unique sauf dans des cas pathologiques, qui ne se produisent pas quand  $\partial\Omega$  est analytique.

Soit  $u \in \mathcal{D}'((\mathbf{R} \times \Omega) \cap W)$  une distribution prolongeable vérifiant

$$(2.4)_{C^\infty} \quad \square u \in C^\infty((\mathbf{R} \times \bar{\Omega}) \cap W), \quad u|_{(\mathbf{R} \times \partial\Omega) \cap W} \in C^\infty$$

ou bien dans le cas où  $\partial\Omega$  est analytique :

$$(2.4)_{\mathcal{A}} \quad \square u \in \mathcal{A}((\mathbf{R} \times \bar{\Omega}) \cap W), \quad u|_{(\mathbf{R} \times \partial\Omega) \cap W} \in \mathcal{A}.$$

**THÉORÈME 2.3** (Melrose-Sjöstrand [MS]). *Si  $u$  vérifie  $(2.4)_{C^\infty}$  et  $\rho_0 \in WF_{C^\infty}^b(u)$  alors il existe un rayon  $C^\infty$  maximal  $\gamma$  dans  $\Sigma_b|_W$  (c.à.d. non prolongeable en tant que rayon  $C^\infty$  dans  $\Sigma_b|_W$ ) contenu dans  $WF_{C^\infty}^b(u)$ .*

Ivrii [Iv] a obtenu presque le même résultat. Son analyse près de  $\mathcal{G}_+$  est basée sur des inégalités d'énergie, évitant ainsi (contrairement à [MS]) tout appel aux constructions de paramétrixes assez lourdes dans cette région (obtenues antérieurement par M. Taylor et Melrose). Voir aussi [Hö].

Dans la suite de cette section on suppose que  $\partial\Omega$  est analytique. Nous avons le :

**THÉORÈME 2.4** (Sjöstrand [S2]). *Si  $u$  vérifie  $(2.4)_{\mathcal{A}}$  et  $\rho_0 \in WF_a^b(u)$ , alors il existe un rayon analytique maximal  $\gamma$  dans  $\Sigma_b|_W$  qui est contenu dans  $WF_a^b(u)$ .*

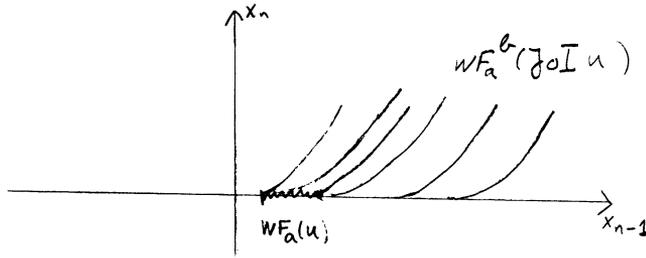
Comme l'ont remarqué Friedlander-Melrose [FM] dans le cas d'un opérateur modèle explicitement traitable, on peut avoir une propagation des singularités analytiques (et même Gevrey d'indice  $< 3$ ) le long des rayons analytiques non  $C^\infty$ . Un tableau assez vaste de ces phénomènes de diffraction se trouve dans Sjöstrand [S2-4], Kataoka [K], Lebeau [Le3], Laubin [La1,2].

Lebeau a montré qu'on a le même type de propagation pour les singularités mod  $G^3$  que pour les singularités mod  $C^\infty$ , c.à.d. qu'on n'a pas de diffraction :

**THÉORÈME 2.5** (Lebeau [Le1,2]). *Si  $u$  vérifie (2.4)<sub>A</sub>, et  $\rho_0 \in WF_{G^3}^b(u)$  alors le rayon  $C^\infty$  maximal  $\gamma$  dans  $\Sigma_b \big|_W$  passant par  $\rho_0$  est contenu dans  $WF_{G^3}^b(u)$ .*

Comme  $\partial\Omega$  est analytique il y a un rayon  $C^\infty$  maximal unique passant par  $\rho_0$ . B. et R. Lascar [Las] ont récemment amélioré ce résultat en traitant aussi les cas où le bord est seulement Gevrey (on perd alors dans les indices Gevrey de la conclusion). Leur méthode, partiellement inspirée de celle d'Ivrii mentionnée auparavant, est entièrement basée sur des inégalités. La démonstration de Lebeau utilise un mélange subtil de constructions directes et d'inégalités dont nous ne pouvons ici donner qu'une très vague idée :

**ESQUISSE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5** : En dehors de  $G_+$  l'étude de la propagation Gevrey se fait essentiellement comme dans la démonstration du Théorème 2.4. On se restreint donc à un voisinage d'un point de  $G_+$ , et on choisit de nouvelles coordonnées  $x = (x_0, \dots, x_n) = (x', x_n)$  telles que  $\square = R(x, D_{x'}) + D_{x_n}^2$ . La première étape est de construire certaines solutions oscillantes de l'équation homogène et une idée essentielle est alors de faire une transformation de Fourier formelle en  $x_n$  et de considérer  $R(x', -D_{\xi_n}, D_{x'}) + \xi_n^2$  pour lequel on peut facilement donner des solutions oscillantes, et il s'agit ensuite de donner un sens à la transformation de Fourier inverse de ces solutions en choisissant convenablement un contour d'intégration. (Voir aussi [S4], [La2]). A cette étape la fonction d'Airy apparaît naturellement. Lebeau construit ainsi un opérateur microlocal  $\mathcal{J} \circ I : \left\{ \text{distributions sur } x_n = 0 \right\} \rightarrow \left\{ \text{distributions prolongeables} \right\}$  avec la propriété que  $\square(\mathcal{J} \circ Iu)$  est analytique jusqu'au bord pour tout  $u$  et tel que  $WF_a^b(\mathcal{J} \circ Iu) \subset WF_a(u) \cup \left\{ \gamma(t); t \geq 0 \text{ et } \gamma \text{ est un rayon analytique avec } \gamma(0) \in WF_a(u) \right\}$ . (En réalité toutes ces constructions sont faites après une transformation de FBI). On a donc déjà ici un phénomène de diffraction :



Pour aller plus loin, il faut étudier les opérateurs trace :

$$K^{(0)} u(x') = (\mathcal{J} \circ Iu) |_{x_n=0}, \quad K^{(1)} u(x') = (\partial_{x_n} \mathcal{J} \circ Iu) |_{x_n=0},$$

et pour résoudre le problème de Dirichlet avec inhomogénéité sur le bord, il faut inverser  $K^{(0)}$ . On montre que (dans une représentation FBI convenable)  $K^{(0)}$  est une sorte d'opérateur pseudodifférentiel de symbole dans la classe  $\mathcal{E}_\gamma^+$  :  $p = \sum_{k \geq 0} p_k(x, \xi, \lambda) (iT)^{-k}$  (où  $\lambda \geq 1$  est le grand paramètre FBI et  $T$  est un paramètre formel qui moralement vaut  $\lambda$ ) avec  $p_k$  holomorphe dans  $\Omega_{\lambda, r, \delta, \gamma} : |x' - x'_0| < r, |\xi'' - \xi''_0| < r, |\xi_{n-1}| < r, \text{Im } \xi_{n-1} < \gamma \lambda^{-2/3} + \delta |\text{Re } \xi_{n-1}|$  et :

$$\sup_{\Omega_{\lambda, r, \delta, \gamma}} \left| \left( \xi_{n-1} - i\gamma \lambda^{-2/3} \right)^k p_k \right| \leq AB^k k! .$$

Ici  $\delta > 0$ , et on a choisit la transformation de FBI de telle façon que  $G_+$  corresponde à  $\xi_{n-1} = 0$ .  $(x'_0, \xi''_0, 0)$  est fixé ainsi que  $r > 0$ .

Pour l'opérateur  $K^{(0)}$ , on peut choisir  $\gamma > 0$  arbitrairement grand et on trouve aussi que  $p_0$  a un zéro simple en

$$\xi_{n-1} = \lambda^{-2/3} e^{2\pi i/3} \left( \omega \rho^{-1} + \mathcal{O}(\lambda^{-1/3}) \right),$$

où  $-\omega$  est le premier zéro de la fonction d'Airy (sur l'axe  $]-\infty, 0[$  compté à partir de 0) et  $\rho$  est essentiellement la courbure de la géodésique du bord. De plus  $p_0$  est elliptique en dehors de ce point dans une bande  $\text{Im } \xi_{n-1} < \lambda^{-2/3} (\text{Im}(e^{2\pi i/3}) + \varepsilon_0)$  pour un  $\varepsilon_0 > 0$  convenable.

Pour ces symboles, Lebeau donne une recette de quantification pour définir des opérateurs "unilatéraux" qui opèrent dans l'espace des fonctions à croissance tempérée (par rapport au poids FBI, ce qui correspond aux distributions) qui décroissent exponentiellement pour  $\text{Re } x_{n-1} < \tilde{a}$ . Ici on

travaille dans un domaine complexe avec  $\operatorname{Re} x_{n-1} \in ]a, b[$  et on suppose  $a < \tilde{a} < b$ . Il montre ensuite, en faisant appel à la théorie de la deuxième microlocalisation (voir [S1], [Le3] et les travaux de Kashiwara-Kawai et Laurent qui y sont cités) que l'on a bien un calcul symbolique qui marche modulo  $\mathcal{O}(e^{-\lambda/C})$ . Ceci n'est pas évident car les symboles peuvent être singuliers à distance  $\sim \lambda^{-2/3}$  de l'axe réel ce qui laisse penser que les erreurs vont plutôt être  $\mathcal{O}(e^{-\lambda^{1/3}C})$ , c.à.d. qu'on ait seulement un calcul modulo Gevrey 3. Ces opérateurs propagent en général les singularités analytiques dans la direction  $\operatorname{Re} x_{n-1}$  croissante et ce ne sont donc pas du tout des opérateurs pseudodifférentiels analytiques classiques. Utilisant le fait qu'on peut déformer des contours d'intégration jusqu'à  $\operatorname{Im} \xi_{n-1} \sim \lambda^{2/3}$ , on voit que si  $u$  est à décroissance exponentielle aussi pour  $\operatorname{Re} x_{n-1} > \tilde{b}$  (avec  $a < \tilde{a} < \tilde{b} < b$ ) alors l'image de  $u$  par un opérateur unilatéral est  $\mathcal{O}(e^{-\lambda^{1/3} \cdot \text{const.}})$  sur tout compact dans  $\operatorname{Re} x_{n-1} > \tilde{b}$ .

L'opérateur  $K^{(0)}$  est elliptique près du réel et peut donc être inversé modulo  $\mathcal{O}(e^{-\lambda/C})$  en tant qu'opérateur sur les fonctions exponentiellement petites à gauche. En utilisant aussi que  $K^{(0)}$  est de type principal un peu plus loin dans le complexe (racine simple  $\approx \lambda^{-2/3} e^{2\pi i/3} \omega \rho^{-1}$ ) on arrive à préciser les propriétés de propagation de  $K^{(0)-1}$  et de  $K^{(1)}K^{(0)-1}$ . Au lieu de montrer simplement que ces opérateurs produisent des fonctions  $\mathcal{O}(e^{-\lambda^{1/3} \cdot \text{const.}})$  à droite (par rapport à  $\operatorname{Re} x_n$ ) de la région où la donnée n'est pas exponentiellement petite, Lebeau arrive à préciser le taux de décroissance et même à donner un développement asymptotique. Cette précision qui n'est pas indispensable pour prouver le Théorème 2.5, devient fondamentale dans la démonstration du Théorème 4.2.

La fonction  $v = \mathcal{J} \circ I \circ K^{(0)-1} u$  est une solution sortante du problème de Dirichlet inhomogène :  $\square v \in \text{analytique}$ ,  $v|_{\mathbb{R} \times \partial\Omega} = u$  et on a  $(\partial_{x_n} v)|_{x_n=0} = K^{(1)}K^{(0)-1} u$ . L'opérateur  $K^{(1)}K^{(0)-1}$  est donc "l'opérateur de Neumann sortant". Il est classique que si on contrôle bien cet opérateur, alors on obtient des théorèmes de propagation par un argument de dualité. Ainsi on obtient bien le Théorème 2.5 près de  $G_+$ .

### 3. Distribution des pôles pour des obstacles $C^\infty$

Comme déjà observé dans le livre [LP1], la distribution des pôles de scattering proche de l'axe réel dépend de la géométrie de l'obstacle  $\mathcal{O}$ .

**DÉFINITION 3.1.**  $\mathcal{O}$  est captant (“trapping”) s’il existe un rayon  $C^\infty$  maximal dans  $\Sigma_b$  dont la projection dans  $\bar{\Omega}$  est contenue dans l’enveloppe convexe de  $\mathcal{O}$ .

Si  $\mathcal{O}$  est non captant et  $\mathcal{O} \subset B(0, R)$ , alors il existe  $T_R > 0$  tel que pour tout rayon  $C^\infty$  maximal  $\gamma : \mathbf{R} \rightarrow \Sigma_b \cap \{|\xi| = \frac{1}{2}\}$ , l’ensemble des  $t$  tel que  $\Pi_x \gamma(t) \in B(0, R)$  est vide ou bien un intervalle de longueur  $\leq T_R$ . On a les implications :  $\mathcal{O}$  est convexe  $\Rightarrow \mathcal{O}$  est étoilé  $\Rightarrow \mathcal{O}$  est captant. Dans le cas d’un obstacle convexe, Lax et Phillips [LP2] ont montré qu’il existe  $a > 0$  t.q. la région  $\{\lambda \in \mathbf{C} ; \text{Im } \lambda \leq a \log |\lambda|\}$  ne contienne qu’un nombre fini de pôles de scattering. D’après leur Théorème 2.2, c), il s’agit de montrer qu’il existe  $T > 0$  tel que l’image de  $Z(T)$  soit contenu dans le domaine de  $B$ . Pour les obstacles non captants, il résulte de (4.4) dans la section suivante et du Théorème 2.3 qu’on a bien cette propriété (et que  $Z(t)$  est compact pour  $T > 0$  assez grand), donc en dessous d’une courbe logarithmique on n’a qu’un nombre fini de pôles de scattering.

Le cas d’un obstacle captif le plus simple est sans doute celui où  $\mathcal{O}$  est une réunion de deux obstacles  $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$  disjoints et strictement convexes. Soient  $x_j \in \partial \mathcal{O}_j$ ,  $j = 1, 2$  les deux points qui réalisent la distance entre les obstacles et posons  $d = |x_1 - x_2| = \text{dist}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ . A quelques identifications triviales près, le seul rayon  $C^\infty$  maximal qui reste au-dessus de l’enveloppe convexe de  $\mathcal{O}$  pour toujours est celui qui fait un aller retour éternel entre  $x_1$  et  $x_2$ . En suivant un rayon optique partant d’un point de  $\partial \mathcal{O}_1$  proche de  $x_1$  dans une direction proche de la normale jusqu’à son retour à  $\partial \mathcal{O}_1$  après une réflexion dans  $\partial \mathcal{O}_2$ , on obtient une application de Poincaré :  $T^*(\partial \mathcal{O}_1) \cap \text{Vois}((x_1, 0)) \rightarrow T^*(\partial \mathcal{O}_1) \cap \text{Vois}((x_1, 0))$ , et comme l’ont remarqué Bardos-Guillot-Ralston [BGR], le point fixe  $(x_1, 0)$  est du type hyperbolique

et plus précisément les valeurs propres de la différentielle de l'application de Poincaré sont de la forme

$$\frac{1}{\nu_{n-1}} \leq \frac{1}{\nu_{n-2}} \leq \dots \leq \frac{1}{\nu_1} < 1 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \nu_{n-1} .$$

Guidés par des considérations heuristiques, Bardos-Guillot-Ralston ont introduit des pseudo-pôles de la forme :

$$\lambda_{j,\alpha} = \frac{1}{d} \pi j + \frac{i}{2} \left( \frac{\mu_1 + \dots + \mu_{n-1}}{2} + \sum_1^{n-1} \alpha_j \mu_j \right) ,$$

avec  $j \in \mathbf{Z}$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{N}^{n-1}$ ,  $\mu_j = \log \nu_j$ . Pour chaque  $\alpha$  on obtient une rangée parallèle à l'axe réel. On définit la multiplicité d'un pseudo-pôle  $\lambda_{j,\alpha}$  comme le nombre  $m(\alpha)$  de différents  $\beta \in \mathbf{N}^{n-1}$  avec  $\lambda_{j,\beta} = \lambda_{j,\alpha}$ . La première rangée des  $\lambda_{j,0}$  est la plus proche de l'axe réel et  $m(0) = 1$ .

Ikawa [I1] a démontré que dans une bande  $\text{Im } \lambda \leq \frac{\mu_1 + \dots + \mu_{n-1}}{4} + c$  pour un  $c > 0$ , les pôles avec  $|\lambda|$  assez grand sont contenu dans la réunion des disques  $D(\lambda_{j,0}, C |\lambda_{j,0}|^{-1/2})$  si  $C > 0$  est assez grand, et que chaque disque contient un tel pôle si  $|j|$  est assez grand. Ensuite dans [I2] il a précisé le résultat montrant qu'il y a exactement un pôle dans chaque disque pour  $|j|$  grand, qui admet un développement asymptotique. Suite à [I1] mais indépendamment de [I2], C. Gérard a obtenu une justification complète de toutes les rangées. Son résultat coïncide avec celui d'Ikawa [I2] pour la première rangée :

**THÉORÈME 3.1 ([Ge]).** *On fixe un  $C > 0$  avec  $C \neq \text{Im } \lambda_{0,\alpha}$ ,  $\alpha \in \mathbf{N}^{n-1}$ . Alors les pôles dans la bande  $0 < \text{Im } \lambda < C$  avec  $|\lambda|$  grand peuvent être décrits de la manière suivante : pour chaque  $\lambda_{j,\alpha}$  dans la bande il y a  $m(\alpha)$  pôles  $z_{j,\alpha}^1, z_{j,\alpha}^2, \dots, z_{j,\alpha}^{m(\alpha)}$  comptés avec leur multiplicité, avec les développements asymptotiques :*

$$z_{j,\alpha}^p \sim \lambda_{j,\alpha} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{j,\alpha}^{p,\nu} \left( \lambda_{j,\alpha}^{1/N(p,\alpha)} \right)^{-\nu} , \quad j \rightarrow \infty .$$

Ici  $N(p,\alpha)$  est un entier qui vaut 1 pour la première rangée.

La démonstration d'Ikawa est basée sur une étude asymptotique des solutions du problème mixte quand  $t \rightarrow \infty$ . Celle de C. Gérard utilise le point de vue plus direct exprimé dans le Théorème 1.2 et qui est lié à d'autres théories, voir par exemple Aguilar-Combes [AC], Balslev-Combes [BaC], Vainberg [V1,2], Helffer-Martinez [HeMa].

Dans le cas de deux obstacles convexes, convenablement aplatis près de  $x_1$  et  $x_2$ , Ikawa [I3] a montré à l'aide de la formule de trace de Bardos-Guillot-Ralston-Melrose qu'il y a une suite de pôles  $\lambda_j$  avec  $\text{Im } \lambda_j \rightarrow 0$ . Il a aussi abordé l'étude du cas où  $\mathcal{O}$  est une réunion finie d'obstacles strictement convexes disjoints  $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_N$ . Sous l'hypothèse : (l'enveloppe convexe de  $\mathcal{O}_j \cup \mathcal{O}_k \cap \mathcal{O}_\ell = \emptyset$  pour tous  $j, k, \ell$  avec  $\ell \neq j, k$ , les rayons  $C^\infty$  forment un système dynamique hyperbolique et dans ce cas Ikawa a trouvé (en imposant parfois d'autres hypothèses) une bande parallèle à l'axe réel qui ne contient qu'un nombre fini de pôles et une bande plus large qui en contient une infinité. Voir [I4,5] et sans doute des travaux à venir.

Pour finir cette section, mentionnons le travail de T. Beale [Be] concernant les pôles engendrés par un obstacle connexe avec une cavité reliée à l'extérieur par un mince tunnel. Quand le tunnel se rétrécit (en fonction d'un paramètre) des pôles convergent vers les valeurs propres du problème de Dirichlet associé à la cavité limite (disconnectée de l'extérieur). Ces résultats ont récemment été améliorés par P. Hislop et A. Martinez [HMa].

#### 4. Distribution des pôles pour des obstacles analytiques captants

Dans cette section on se propose de résumer les résultats de Bardos-Lebeau-Rauch [BLeRa]. On supposera désormais que  $\partial\Omega$  soit analytique.

**THÉORÈME 4.1** ([BLeRa]). *Si  $\mathcal{O} = \mathbf{R}^n \setminus \Omega$  est non captant, alors il existe une constante  $C > 0$  telle qu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles dans  $\left\{ \lambda \in \mathbf{C} ; \text{Im } \lambda \leq \frac{1}{C} |\lambda|^{1/3} \right\}$ .*

Ce résultat est une conséquence assez directe du Théorème 2.5, et il a aussi été démontré par Popov [Po]. Avec des hypothèses en plus, on peut montrer que pour  $C > 0$  assez grand il y a une infinité de pôles avec  $\text{Im } \lambda \leq C |\lambda|^{1/3}$  : Supposons que  $\mathcal{O}$  soit strictement convexe et qu'il existe dans  $\partial\mathcal{O}$  une géodésique fermée  $\gamma$ , de longueur  $T > 0$  vérifiant :

$$(4.1) \quad \text{Il existe un voisinage } V \text{ de } T \text{ tel que si } \tilde{\gamma} \text{ est une géodésique fermée de longueur } \tilde{T} \in V, \text{ alors } \tilde{\gamma} = \gamma.$$

$$(4.2) \quad \gamma \text{ est non-dégénérée au sens que l'application de Poincaré linéarisée associée à } \gamma \text{ (agissant dans un espace de dimension } 2(n-2)) \text{ n'a pas de valeur propre égale à } 1.$$

Remarquons que les géodésiques de  $\partial\mathcal{O}$  correspondent aux rayons analytiques qui glissent le long du bord. Il est montré dans [BLeRa] que les hypothèses (4.1), (4.2) sont génériquement satisfaites.

Comme souvent dans les problèmes de diffraction, la fonction d'Airy  $Ai(x)$ , définie comme la transformation de Fourier inverse de  $e^{i\xi^3/3}$ , joue un rôle important. Les zéros de  $Ai(x)$  se trouvent dans  $]-\infty, 0[$ , et on note  $-\omega$  celui qui se trouve le plus près de 0. Soit  $\rho(s) > 0$  la courbure de  $\gamma$  au point  $\gamma(s)$  et posons :

$$C_\gamma = \omega \cos\left(\frac{\Pi}{6}\right) \left(2^{1/3}T\right)^{-1} \int_0^T \rho(s)^{2/3} ds.$$

Alors on a :

**THÉORÈME 4.2 ([BLeRa]).** *Sous les hypothèses (4.1), (4.2), pour tout  $\varepsilon > 0$ , il y a une infinité de pôles dans  $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} ; \text{Im } \lambda \leq (C_\gamma + \varepsilon) |\lambda|^{1/3} \right\}$ .*

L'ingrédient principal dans la démonstration de ce résultat est l'étude de la distribution  $\text{tr } Z(t) = \sum e^{i\lambda_j t}$ ,  $t > 0$ . Nous avons le :

**THÉORÈME 4.3 ([BLeRa]).** *On suppose  $\mathcal{O}$  strictement convexe. Alors*

- (i)  $\text{tr } Z(t)$  appartient à  $G^3(]0, +\infty[)$
- (ii) Si  $L$  est l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées dans  $\partial\Omega$ , alors  $\text{tr } Z(t)$  est analytique dans  $]0, +\infty[ \setminus L$ .
- (iii) Sous les hypothèses du Théorème 4.2, on a pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\limsup_{\ell \rightarrow \infty} \left| \sup_{|t-T| < \varepsilon} \partial_t^\ell \text{tr } Z(t) / ((3\ell)!) \right|^{1/3\ell} \geq (C_\gamma T)^{-1} .$$

Ici (i), (ii) sont des conséquences assez directes des Théorèmes 2.4, 2.5. C'est le point (iii) qui est le plus important pour la démonstration du Théorème 4.2.

Décrivons maintenant assez brièvement les démonstrations. Le Théorème 4.1 est une conséquence assez directe du Théorème 2.5 : On commence par remarquer que si  $R > \rho$  (où  $\mathcal{O} \subset B(0, \rho)$ ) et  $u \in \mathcal{H}(\Omega)$  est à support dans  $B(0, R)$ , alors si  $t_1 > 0$  est assez grand pour que tout rayon  $C^\infty$  partant d'au dessus d'un point de  $\bar{\Omega} \cap \overline{B(0, R)}$  avec vitesse 1 dans l'espace des  $x$ , ait quitté  $\bar{\Omega} \cap \overline{B(0, R)}$  au temps  $t \geq t_1$ , alors  $u(t, x)$  est de classe Gevrey 3 sur  $[t_1, +\infty[ \times (\bar{\Omega} \cap \overline{B(0, R)})$ . Par un argument d'analyse fonctionnelle, on arrive à l'inégalité

$$(4.3) \quad |\partial_t^\ell u| + |\partial_t^\ell \nabla u| \leq AC^\ell(3\ell)! \|u(0)\|_{\mathcal{H}(\Omega)} ,$$

pour  $t \in [t_1, t_2]$ , ( $t_2 > t_1$ ),  $x \in \Omega \cap \overline{B(0, R)}$ ,  $\ell = 0, 1, 2, \dots$ , où les constantes  $A, C$  sont indépendantes de  $u$ .

On utilise ensuite une formule de [LP1], valable pour  $t \geq 4\rho$  :

$$(4.4) \quad Z(t) = P_+ \left( U(2\rho) - U_0(2\rho) \right) Q_{5\rho} U(t - 4\rho) Q_{3\rho} \left( U(2\rho) - U_0(2\rho) \right) P_- ,$$

où  $Q_r f(x) = \chi \left( \frac{|x|}{r} \right) f(x)$ ,  $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$ ,  $\chi = 1$  sur  $]-\infty, 1]$ ,  $\chi = 0$  sur  $[2, +\infty[$ . On en déduit :

$$B^\ell Z(t) = P_+ \left( U(2\rho) - U_0(2\rho) \right) Q_{5\rho} \partial_t^\ell U(t - 4\rho) Q_{3\rho} \left( U(2\rho) - U_0(2\rho) \right) P_- .$$

Appliquant (4.3) avec  $R = 10\rho$  et avec  $t = t_0$  assez grand, on obtient avec des nouvelles constantes  $A, C$  :

$$\|B^\ell Z(t_0)\| \leq AC^\ell (3\ell)! .$$

Si  $\mu \in \sigma(B)$ , alors

$$\mu^\ell e^{\mu t_0} \in \sigma(B^\ell Z(t_0)) ,$$

et donc

$$(4.5) \quad |\mu|^\ell e^{t_0 \operatorname{Re} \mu} \leq AC^\ell (3\ell)! .$$

Choisissant  $\ell$  convenablement, en fonction de  $\mu$  (pour  $|\mu|$  grand), on obtient  $\operatorname{Re} \mu \leq -\frac{1}{\operatorname{Const.}} |\mu|^{1/3}$ , ce qui donne le Théorème 4.1. La démonstration de Popov est différente mais son ingrédient essentiel est toujours le Théorème 2.5 de Lebeau.

Voyons ensuite comment déduire le Théorème 4.2 du Théorème 4.3. Soit  $C > 0$  et supposons que  $\sigma(B) \cap \left\{ \mu \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \mu \geq -C |\mu|^{1/3} \right\}$  soit fini. En utilisant (1.12), on trouve

$$(4.6) \quad \operatorname{tr} Z(t) = \sum_{\operatorname{Re} \mu_j < -C |\mu_j|^{1/3}} e^{-t \mu_j} + f(t) , \quad t > 0 ,$$

où  $f$  est une fonction entière. Utilisant ensuite (1.11), on trouve

$$(4.7) \quad \partial_t^\ell (\operatorname{tr} Z(t) - f(t)) \leq \operatorname{Const.} e^{ct} (Ct)^{-3\ell-2n-3} (3\ell + 3n + 2)!$$

et en comparant avec (iii) du Théorème 4.3 pour  $t$  dans un voisinage de  $T$ , on obtient bien  $C \leq C_\gamma$ .

Il reste à discuter la démonstration du Théorème 4.3, qui est considérablement plus difficile. Si  $E(t) = \int E(t, x, y) v(y) dy$  désigne la solution du problème mixte :  $\square u = 0$  dans  $\mathbf{R} \times \Omega$ ,  $u|_{\mathbf{R} \times \Omega} = 0$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\partial_t u(0) = v$ , alors on voit que  $U(t) = \begin{pmatrix} \partial_t E & E \\ E \Delta & \partial_t E \end{pmatrix}$  et donc d'après (1.12) :

$$\operatorname{tr} Z(t) = 2 \operatorname{tr} \partial_t E = 2 \partial_t \int_{\Omega} E(t, x, x) dx$$

(au sens des distributions).

On peut ensuite réduire cette relation au bord :

$$(4.8) \quad \text{tr } Z(t) = -2 \partial_t \int_{\partial\Omega} B(t, x, x) dx ,$$

avec

$$(4.9) \quad B(t, x, y) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\partial\Omega} h_0^+(t-s, z-x) k^+(s, z, y) dz ds ,$$

où  $k^+(t, x, y) = \partial_{n_x} K^+(t, x, y)$ ,  $K^+(t, x, y) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R} \times \partial\Omega \times \partial\Omega)$  étant le noyau de l'opérateur  $K^+$  qui donne la solution  $u = K^+v$  de  $\square u = 0$  dans  $\mathbf{R} \times \Omega$ ,  $u|_{\mathbf{R} \times \partial\Omega} = v$ ,  $u = 0$  pour  $t \ll 0$ ,  $v \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times \partial\Omega)$ . De plus  $h_0$  est la solution élémentaire de  $\square^2$  dans  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$  à support dans  $t \geq 0$ . Notons que  $k^+(t, x, y)$  est le noyau de l'opérateur de Neumann qui intervient dans la preuve du Théorème 2.5.

Il s'agit alors d'analyser les noyaux  $h_0^+(t, x, y)$  et  $k^+(t, x, y)$  sur  $\mathbf{R} \times \partial\Omega \times \partial\Omega$ . Le premier noyau à une représentation intégrale explicite qu'on arrive avec un peu de travail à réécrire comme une intégrale oscillante sur le bord. La difficulté principale se cache dans l'étude de  $k^+$ . On peut d'abord localiser les fronts d'ondes Gevrey 3 (et analytiques) en utilisant le Théorème 2.5 (et 2.4). Pour mieux connaître ensuite  $k_+$  près du front d'onde analytique on utilise des solutions oscillantes entrantes construites par Lebeau dans [Le1]. On peut ensuite faire des intégrations par parties et obtenir le comportement asymptotique de certaines intégrales FBI de  $k_+$ . Ainsi on arrive finalement à montrer que dans la région  $t > 0$ ,  $|x - y| < t$  :  $WF_a(B) \subset \Lambda$ ,  $B \in I_{\Lambda, \psi}^3$  où

$\Lambda = \Lambda_+ \cup \Lambda_-$ ,  $\Lambda_\pm = \left\{ (t, \tau; x, \xi; y, -\eta); \pm\tau = |\xi|, (x, \xi) = \exp t H_p(y, \eta) \right\}$ ,  $p = |\xi|$  (considérée comme symbole sur  $T^*\partial\Omega \setminus 0$ ). On définit  $\psi$  comme l'intégrale de  $e^{\pm i\pi/6} (|\tau| \rho^2/2)^{1/3} \omega$  le long du flot de  $H_p$  avec la condition initiale :  $\psi = 0$  sur la diagonale.

Il faut aussi expliquer ce qu'est la classe  $I_{\Lambda, \psi}^3$ . De manière générale, soit  $\Lambda$  une variété Lagrangienne analytique, réelle, conique et soit  $\psi$  une fonction sur  $\Lambda$  qui est positivement homogène de degré  $\frac{1}{3}$  avec  $\text{Re } \psi \geq 0$ . On dit alors que la distribution  $f$  appartient à  $I_{\Lambda, \psi}$  au point  $(y_0, \eta_0)$  si avec  $T_x$  comme au début de la Section 2 on ait dans un voisinage de  $x_0$  :

$$T_x f(x, \lambda) = e^{i\lambda g(x) - \lambda^{1/3} \widehat{\psi}(x)} \widehat{b}(x, \lambda) + r(x, \lambda) ,$$

où :  $g$  est donné par :  $\mathcal{H}_T(\Omega) = \left\{ \left( x, \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right) \right\}$ ,  $g(x_0) = \varphi(x_0, y_0)$ ,  $\widehat{\psi}(x) = (\psi \circ \mathcal{H}_T^{-1}) \left( x, \frac{\partial g}{\partial x}(x) \right) + \text{constante imaginaire convenable}$ ,  $b$  a un développement asymptotique de la forme :

$$\left| b(x, \lambda) - \sum_{k=0}^N b_k(x) \lambda^{m - \frac{n}{2} - \frac{k}{3}} \right| \leq AB^k (k!) \lambda^{m - \frac{n}{2} - \frac{N+1}{3}},$$

$b_k$  holomorphe, et  $r$  vérifie  $|r(x, \lambda)| \leq e^{\lambda \Phi(x) - C_0 \lambda^{1/3}}$  avec  $C_0 > \text{Re } \widehat{\psi}(x_0)$ .

Utilisant enfin les hypothèses (4.1), (4.2), on arrive à analyser l'intégrale dans (4.8) et montrer (iii) du Théorème 4.3.

## Bibliographie

[AC] J. AGUILAR, J.M. COMBES, *A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger Hamiltonians*, Comm. Math. Phys. 22 (1971), 269-279.

[BaC] E. BALSLEV, J.M. COMBES, *Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilation analytic interactions*, Comm. Math. Phys. 22 (1971), 280-294.

[BGR] C. BARDOS, J.C. GUILLOT, J. RALSTON, *La relation de Poisson pour l'équation des ondes dans un ouvert non borné. Application à la théorie de la diffusion*, Comm. P.D.E., 7 (1982), 905-958.

[Be] J.T. BEALE, *Scattering frequencies of resonators*, C.P.A.M. 26 (1973), 549-563.

[Bo] J-M. BONY, *Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique*, Sémin. Goulaouic-Schwartz, (1976-77), Exposé n° 3.

[BLeRa] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH, *Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities*, Inv. Math. 90(1) (1987), 77-114.

- [FM] F.G. FRIEDLANDER, R.B. MELROSE, *The wave front set of the solution of a simple initial boundary value problem with glancing rays II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 81 (1977), 97-120.
- [Ge] C. GÉRARD, *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull. de la S.M.F., 116(1) (1988), Mémoire n° 31.
- [HeMa] B. HELFFER, A. MARTINEZ, *Comparaison entre les diverses notions de résonances*, Helv. Phys. Acta 60 (1987), 992-1003.
- [HMa] P. HISLOP, A. MARTINEZ, *Scattering resonances of a Helmholtz resonator*, Prépublication d'orsay 89-40, (1989).
- [Hö] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators 1-4*, Grundlehren, Vol. 256, 257, 274, 275, (1983-85).
- [I1] M. IKAWA, *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ., 23(1) (1983), 127-194, et 23(4) (1983), 795-802, *On the distribution of the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, Hokkaido Math. J., 12 (1983), 343-359.
- [I2] M. IKAWA, *On the poles of the scattering matrix for two convex obstacles*, Journées E.D.P., St Jean de Monts (1985), Exposé n° 5, Distribué par OFFILIB.
- [I3] M. IKAWA, *Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis*, Osaka J. Math. 22(4) (1985), 657-689.
- [I4] M. IKAWA, *Decay of solutions of the wave equations in the exterior of several convex bodies*, Ann. Inst. Fourier 38(2) (1988), 113-146.
- [I5] M. IKAWA, *On the existence of the poles of the scattering matrix for several convex bodies*, Proc. Japan Acad., 44 A(4) (1988), 91-93.
- [Iv] V. IVRĪI, *Wave fronts for solutions of boundary value problems for a class of symmetric hyperbolic systems*, Sibirsk Mat. Z. 21(4) (1980), 62-71 et

Sib. J. Math. 21 (1980), 527-534.

[In] A. INTISSAR, *A polynomial bound on the number of the scattering poles for a potential in even dimensions*, Comm. P.D.E. 11 (1986), 367-396.

[K] K. KATAOKA, *Microlocal theory of boundary value problems I, II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27 (1980), 355-399, 28 (1981), 31-56.

[Las] B. LASCAR, R. LASCAR, *Propagation des singularités Gevrey pour la diffraction*, Prépublication (1989).

[LasS] B. LASCAR, J. SJÖSTRAND, *Equation de Schrödinger et propagation des singularités ...*, Astérisque n° 95, (1982), 167-207.

[La1] P. LAUBIN, *Etude 2-microlocale de la diffraction*, Dissertation, Université de Liège, Fac. des Sciences (1987), p. 165-202 dans *Advances in microlocal analysis*, Ed. H.G. Garnir, Nato ASI Series C, Vol. 168, Reidel (1986).

[La2] P. LAUBIN, *Asymptotic solutions of hyperbolic boundary value problems with diffraction*, p. 165-202 dans *Advances in microlocal analysis*, Ed. H.G. Garnir, Nato ASI Series C, Vol. 168, Reidel (1986).

[LP1] P. LAX, R. PHILLIPS, *Scattering theory*, Pure and Appl. Math., Academic Press (1967).

[LP2] P. LAX, R. PHILLIPS, *A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix*, Arch. Rat. Mech. and Anal., 40 (1971), 268-280.

[Le1] G. LEBEAU, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. P.D.E., 9(15) (1984), 1437-1494.

[Le2] G. LEBEAU, *Propagation des singularités pour le problème de Dirichlet*, p. 203-224 dans *Advances in microlocal analysis*, Ed. H.G. Garnir, Nato ASI Series C, Vol. 168, Reidel (1986).

[Le3] G. LEBEAU, *Deuxième microlocalisation sur des sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier, 35(2) (1985), 145-216.

[M1] R. MELROSE, *Polynomial bound on the number of scattering poles*, J. Funct. Anal. 53 (1983), 287-303, amélioration dans : Journées E.D.P., St Jean de Monts (1984), exposé n° 3, (Ecole Polytechnique).

[MS] R. MELROSE, J. SJÖSTRAND, *Singularities of boundary value problems, I,II*, C.P.A.M. 31 (1978), 595-617, C.P.A.M. 35 (1982), 129-168.

[MoRSt] C. MORAWETZ, J. RALSTON, W. STRAUSS, *Decay of solutions of the wave equation outside nontrapping obstacles*, C.P.A.M., 30 (1977), 447-508.

[Po] G. POPOV, *Some estimates of Green's functions in the shadow*, Osaka J. Math. 24(1) (1987), 1-12.

[RaS] J. RAUCH, J. SJÖSTRAND, *Propagation of analytic singularities along diffracted rays*, Indiana Univ. Math. J. 30(3) (1981), 389-401.

[S1] J. SJÖSTRAND, *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque 95, (1982).

[S2] J. SJÖSTRAND, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems*, Comm. P.D.E. 5(1), (1980), 41-94.

[S3] J. SJÖSTRAND, *Propagation of analytic singularities for second order Dirichlet problems, II, III*, Comm. P.D.E., 5(2), (1980), 187-207, 6(5), (1981), 499-567.

[S4] J. SJÖSTRAND, *Analytic singularities of solutions of boundary value problems*, p. 235-269 dans *Singularities in boundary value problems*, Ed. H.G. Garnir, Nato ASI Series C, Vol. 65, Reidel (1981).

[V1] B.R. VAINBERG, *On the analytic properties of the resolvent for a certain class of operator-pencils*, Mat. Sb 77(119), (1968), n° 2, Math. USSR. Sb. 6 (1968), n° 2.

[V2] B.R. VAINBERG, *On exterior elliptic problems ...*, Mat. Sb. 92(134), (1973), n° 2, Math. USSR. Sb. 21 (1973), n° 2.

[Z] M. ZWORSKI, *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles*, Duke Math. J. 59(2), (1981), 311-325.

**Johannes Sjöstrand**

Université de Paris-Sud

Département de Mathématiques

91405 Orsay Cedex, France