LUCIEN SZPIRO

Sur les solutions d'un système d'équations polynomiales sur une variété abélienne

Séminaire N. Bourbaki, 1989-1990, exp. n° 729, p. 429-446.
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1989-1990__32__429_0>

Séminaire BOURBAKI juin 1990
42ème année, 1989-90, n° 729

SUR LES SOLUTIONS D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS POLYNOMIALES SUR UNE VARIÉTÉ ABÉLIENNE

[d'après **G. Faltings et P. Vojta**]

par **Lucien SZPIRO**

Dans un manuscrit récent, G. Faltings démontre un résultat bien plus général que la "conjecture de Mordell" (Théorème 1 ci-dessous). Nous analysons ce travail en nous organisant comme suit :

1. **Points rationnels** des variétés algébriques
2. **L'index** d'une section d'un fibré en droites en un point
   - 2.1. Le théorème du produit
   - 2.2. Section dérivées
3. **Fibrés amples**
   - 3.1. Un morphisme fini
   - 3.2. Le fibré $L(-\varepsilon, s_1 \cdots s_m)$
   - 3.3. Degré d'Arakelov de $L(-\varepsilon, s_1 \cdots s_m)$
4. **Une approximation** trop grande
   - 4.1. Points d'un réseau non dans un sous-réseau
   - 4.2. Sections d'index très petit
   - 4.3. Degré d'Arakelov et index
5. **Autres résultats**

En 1) nous indiquons le théorème principal et les raisons qui rendent "naturelles" ses hypothèses. En 2) nous introduisons la notion technique d'index qui sous-tend tout ce travail. En 3) les ressources de la géométrie algébrique (notamment le théorème de Nakaï-Moishezon-Kleiman) sont mises à profit pour trouver "l'invariant numérique" qui contrôle la situation. En 4) un peu d'arithmétique due à Minkowski permet de finir la démonstration.

Les manuscrits de G. Faltings ne m'ont jamais semblé aisés. Sans l'aide de M. Flexor et E. Ullmo, je n'aurais sans doute pas réussi à saisir celui-ci. Je tiens à les en remercier chaleureusement.

1. POINTS RATIONNELS DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES

Soit C une courbe algébrique définie sur un corps de nombres K. La nature du cardinal de l'ensemble $C(K)$ de ses points rationnels sur K ne dépend que d'un invariant topologique de C : son genre. La situation est la suivante :

i) genre 0 : Aucun ou une infinité de points dans $C(K)$;

ii) genre 1 : $C(K)$ est vide ou est un $\mathbf{Z}$-module de type fini (théorème de Mordell sur $\mathbf{Q}$ généralisé par Weil aux variétés abéliennes et aux corps de nombres quelconques) ;

iii) genre au moins 2 : $C(K)$ est fini (conjecturé par Mordell, ce résultat a été prouvé par Faltings [F1], *cf.* aussi les exposés 616 et 619 de ce Séminaire).

Il est raisonnable de se poser la question de la finitude de l'ensemble $X(K)$ des points rationnels d'une variété algébrique X de dimension quelconque sur un corps de nombres K. On ne veut pas que X contienne de droite projective ou de variété abélienne. Par exemple, une variété abélienne ne contient aucune droite projective. G. Faltings, en comprenant la géométrie algébrique d'une nouvelle démonstration de iii) annoncée par P. Vojta, a obtenu le résultat suivant :

THÉORÈME 1.— *Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K. Soit X une sous-variété algébrique fermée de A, ne contenant sur la clôture algébrique $\bar{K}$ de K aucun translaté d'une sous-variété abélienne de dimension non nulle de A. Alors, l'ensemble des points rationnels de X sur K est fini.*

Exemple 1.— Une courbe projective, lisse, connexe sur K de genre $g \geq 2$ se plonge (morphisme d'Abel) dans sa jacobienne qui est une variété abélienne de dimension g.

Exemple 2.— Si A est une variété abélienne simple — *i.e.* ne contenant aucune sous-variété abélienne — alors, toute sous-variété algébrique propre de A satisfait aux hypothèses du théorème.

Exemple 3.— Si C est une courbe hyperelliptique de genre au moins quatre, ou plus généralement si C n'est pas un revêtement double d'une courbe elliptique, l'image de $C \times C$ dans la jacobienne J de C (qui à (x, y) fait correspondre la classe de $x + y - D$ où D est un diviseur de degré deux choisi à l'avance) satisfait aux hypothèses du théorème.

Avant d'exposer la partie technique de la démonstration, rappelons la méthode pratiquement toujours utilisée dans les théorèmes de finitude :

On associe à un plongement projectif adéquat $X \hookrightarrow \mathbf{P}_K^N$ une *hauteur*. C'est une fonction sur $X(\bar{K})$ telle que l'ensemble des points sur $X(\bar{K})$, de hauteur bornée et défini sur un corps de degré borné, est un ensemble fini (théorème de Northcott). On sait, en géométrie algébrique, associer biunivoquement à un plongement projectif un faisceau inversible "très ample". Quand on munit ce faisceau inversible d'un modèle entier sur $\mathcal{O}_K$, anneau des entiers de K, et de métriques pour tout plongement de K dans $\mathbf{C}$, Arakelov [A] nous a appris à construire une hauteur de la façon suivante :

Soit $X \xrightarrow{f} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ un modèle entier de la variété projective $X \hookrightarrow \mathbf{P}_K^N$ et soit L_K un fibré inversible sur X muni de métriques hermitiennes $\| \, \|_\sigma$ pour chaque plongement $\sigma : K \to \mathbf{C}$. Soit $P \in X_K(K)$ un point rationnel, et soit $\mathbf{s}_P : \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \to X$ la section de f correspondant à P. Si t est un élément non nul de $\mathbf{s}_P^* L$, on pose le degré d'Arakelov de L en P égal à :

$$\log (\# \, \mathbf{s}_P^* L / t\mathcal{O}_K) - \sum_\sigma \log \|t(P)\|_\sigma$$

(ce nombre est indépendant de t).

Un travail du chapitre 3 sera de mettre en évidence une certaine catégorie de fibrés en droites, dont une puissance fournit une immersion fermée dans un espace projectif. Munis de métriques à courbures plates sur A, ils permettent de calculer, au chapitre 4, des degrés d'Arakelov "trop petits".

2. L'INDEX D'UNE SECTION D'UN FIBRÉ EN DROITE EN UN POINT

Dans ce chapitre, nous apprenons à "dériver" les sections d'un fibré en droites qui s'annulent sur une sous-variété, pour obtenir une autre section du même fibré restreint à la sous-variété. L'idée est simple : soit X une variété algébrique, Y une sous-variété algébrique de X, L un fibré inversible sur X, s une section L et D un opérateur différentiel d'ordre un sur X (*i.e.* $D(fg) = gDf + fDg \quad f,g \in \mathcal{O}_X$). Si on identifie sur un ouvert s à une fonction sur X, on veut que $Ds_{|Y}$ ait un sens si s s'annule sur Y. Pour cela, il suffit de remarquer que si u, f sont des fonctions sur un ouvert et que $f_{|Y} = 0$, $(D(uf))_{|Y} = u(Df)_{|Y}$ et donc Ds est une section de $L_{|Y}$ (recollement par les mêmes cocycles !). De même si s s'annule à l'ordre m sur Y, et si $D = D_1 \cdots D_m$ est un opérateur différentiel, produit d'opérateurs de degré un, alors $Ds_{|Y}$ a un sens et est une section de $L_{|Y}$.

DÉFINITION 2.0.— *Soit $P = \mathbf{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_m}$ un produit d'espaces projectifs sur un corps K de caractéristique zéro, soit $L = \mathcal{O}(d_1, \cdots, d_m)$, $d_i > 0$, le fibré inversible sur P, dont les sections sont les polynômes de multidegré indiqué. Soit s une section globale de L. Alors pour un point $x \in P$ l'indice $i(x,s)$ de s en x est le plus grand nombre rationnel σ tel que :*

Si $D = D_1 \cdots D_m$ est un opérateur différentiel sur P tel que chaque D_i soit un opérateur différentiel sur $\mathbf{P}^{n_i}$ de degré j_i, avec

$$\frac{j_1}{d_1} + \frac{j_2}{d_2} + \cdots + \frac{j_m}{d_m} < \sigma$$

alors, $D(s)$ s'annule en x.

La "formule de Taylor" nous montre que l'index d'une section non nulle est fini. Il mesure, de façon pondérée, l'ordre du zéro de s en x.

2.1. Le théorème du produit

Notons Z_σ le fermé de P où l'index de s est au moins égal à σ. Le théorème qui suit, découverte de G. Faltings, donne de l'éclat à la notion que nous venons d'introduire.

THÉORÈME 2.1.— *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe r, tel que, si $d_i/d_{i+1} \geq r$ pour tout i, et si Z est une composante irréductible de $Z_{\sigma+\varepsilon}$ ainsi que de Z_σ, alors on a :*

i) *$Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m$ est un produit de sous-variétés Z_i de $\mathbf{P}^{n_i}$;*

ii) *le degré de chaque Z_i est borné en fonction de ε.*

Soit $Z \subset \mathbf{P}^{n_i} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_m} = P$ et soit Z_i la projection de Z sur le facteur $\mathbf{P}^{n_i}$. Notons δ_i la dimension de Z_i. Si Z est un fermé irréductible réduit de P et si $\sum \delta_i = \dim Z$, il est clair que $Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m$. Appliquons cette remarque simplette à notre situation et posons $L_i = pr_i^* \mathcal{O}(1)$ ($= \mathcal{O}(a_1, \cdots a_m)$ avec $a_j = \delta_{j,i}$) et essayons de voir quelles sont les intersections

$$\left(Z \cdot L_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot L_m^{e_m}\right)$$

où L_i^a est l'intersection a-fois de L_i avec lui-même. Le fermé Z_σ étant défini par des équations de multidegré $(d_1, \cdots, d_m)$ si Z est une composante de Z_σ de multiplicité ρ, on voit facilement que $(Z \cdot L_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot L_m^{e_m}) \leq \frac{1}{\rho} L^{\operatorname{codim} Z} \cdot (L_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot L_m^{e_m})$, où $L = L_1^{\otimes d_1} \otimes L_2^{\otimes d_2} \otimes \cdots \otimes L_m^{\otimes d_m}$. Le seul terme non nul à droite de l'inégalité est obtenu à partir de

$$\left(L_1^{\otimes d_1}\right)^{n_1 - e_1} \cdot \left(L_2^{\otimes d_2}\right)^{n_2 - e_2} \cdots \left(L_m^{\otimes d_m}\right)^{n_m - e_m} \cdot L_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot L_m^{e_m}.$$

On a donc :

$$(Z \cdot L_1^{e_1} \cdot \cdots \cdot L_m^{e_m}) \leq O\left(\frac{1}{\rho} \prod_i d_i^{n_i - e_i}\right).$$

Si on montre (*cf.* plus bas) :

$$(*) \qquad \rho = \text{multiplicité de } Z \text{ dans } Z_\sigma \geq O\left(\prod_i d_i^{n_i - \delta_i}\right).$$

on aura :

$$(Z \cdot L_1^{e_1} \cdot \dots \cdot L_m^{e_m}) \leq O\left(\prod d_i^{\delta_i - e_i}\right).$$

D'autre part, il est clair que $(Z \cdot L_1^{e_1} \cdot \dots \cdot L_m^{e_m})$ est nul si $e_i > \delta_i$, donc les $\eta_{m-j} = \delta_m + \delta_{m-1} + \cdots + \delta_{m-j} - (e_m + e_{m-1} + \cdots + e_{m-j})$ sont positifs et on a :

$$(Z \cdot L_1^{e_1} \cdot \dots \cdot L_m^{e_m}) \leq O(r^{-\eta}),$$

où $\eta = \sum \eta_j \geq 0$. Si comme dans l'hypothèse du théorème $d_i/d_{i-1} \leq 1/r$ où r est assez grand, la seule possibilité pour que $(Z \cdot L_1^{e_1} \cdot \dots \cdot L_m^{e_m})$ soit non nul (c'est toujours un entier positif ou nul) est que $\eta = 0$ *i.e.* $\delta_i = e_i$; comme $\sum e_i = \dim Z$, on a le résultat cherché. Il reste à prouver l'inégalité (*) quand Z est aussi une composante de $Z_{\sigma+\varepsilon}$. Soient $(X_{i,j} = 0)$, $j = 1, \cdots, n_i - \delta_i$ des équations locales de Z_i dans $\mathbf{P}^{n_i}$ en un point assez général. Une équation de la forme $g = \prod_{i,j} X_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \cdot f$ (f équation non nulle au point) avec $\sum_i \frac{1}{d_i}(\sum_j \alpha_{i,j}) < \varepsilon$ est telle qu'il existe un opérateur $D = D_1 \cdots D_m$, D_i opérateurs différentiels sur $\mathbf{P}^{n_i}$ tels que $\sum_i \frac{\deg D_i}{d_i} \leq \varepsilon$, avec $D(g)$, n'appartient pas à l'idéal $(X_{i,j} = 0)$. On voit qu'une équation de Z_σ doit s'écrire $\prod_{i,j} X_{i,j}^{\alpha_{i,j}} \cdot f$ avec $\sum \frac{1}{d_i} \sum \alpha_{i,j} \geq \varepsilon$. Une puissance a d'un $X_{i,j}$ introduisant a de plus à la multiplicité, on voit que la multiplicité ρ de Z dans Z_σ, quand Z est une composante de Z_σ et $Z_{\sigma+\varepsilon}$, est au moins égale au nombre d'entiers $\alpha_{i,j}$ tels que $\sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^{n_i-\delta_i} \alpha_{ij} < \varepsilon$. Ceci prouve l'inégalité (*). La partie ii) se montre en faisant un peu plus attention aux résultats des calculs.

2.2. Sections dérivées

Si on envoie une variété X_i dans $\mathbf{P}^{\dim X_i} = P_i$ avec un morphisme fini bien choisi et si G_i est une équation (de degré calculable) qui annule $\Omega^1_{X_i|P_i}$ définissant un fermé Z_i dans X_i, $X_i - Z_i \to \mathbf{P}^{\dim X_i}$ est alors quasi-fini étale. Prenons une sous-variété fermée $Y \subset X_1 \times \cdots \times X_m \to P_1 \times \cdots \times P_m$ telle que $pr_i(Y)$ soit non contenue dans Z_i pour tout i. Fixant des entiers $d_1 \cdots d_m$, on définit l'index $i(Y, f)$ d'une section f de $O(d_1, \cdots, d_m)$ sur Y à partir d'opérateurs différentiels $D = D_1 \cdots D_m$ sur P en multipliant D_i par $G_i^{\deg D_i}$ pour qu'il ait un sens sur X_i. $D(f)$ devient alors une section de

$$O(d_1, \cdots, d_m) \otimes \bigotimes_i O(\deg G_i \cdot \deg D_i).$$

L'indice de f en Y sera bien sûr celui de f en l'image de Y dans P, multiplié par le degré de Y sur son image.

3. FIBRÉS AMPLES

On met en évidence dans ce chapitre un ensemble de fibrés en droites qui permettront au chapitre 4 de calculer des hauteurs. Le choix d'une bonne hauteur sera essentiel à l'argument. Ceci rappelle que l'introduction de la "hauteur modulaire" dans [F1] a été une des grandes nouveautés utilisées. C'est P. Vojta qui dans [V] a introduit des fibrés amples "astucieux" pour la situation.

3.1. Un morphisme fini

Le lemme suivant, très utile dans la suite, a sans doute été influencé par les lemmes 10 et 11 de [H].

Lemme 3.1.— *Soit A une variété abélienne sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit X une sous-variété irréductible de A ne contenant aucun translaté d'une sous-variété abélienne de A. Alors pour m entier assez grand, le morphisme $\alpha_m : X^m \to A^{m-1}$ défini par $\alpha_m(x_1, \cdots, x_m) = (2x_1 - x_2, 2x_2 - x_3, \cdots, 2x_{m-1} - x_m)$ est fini.*

La projection $X^{m+1} \to X^m$ sur les premiers facteurs induit une immersion fermée d'une fibre de α_{m-1} dans une fibre de α_m. Soit d la limite inférieure des maxima de dimensions des fibres des α_m quand m croît. On veut montrer que $d = 0$. Fixons un fibré ample symétrique L sur A pour calculer les degrés. Le nombre et le maximum des degrés des composantes irréductibles de dimension d des fibres de α_m pour $m \geq m_0$ décroissent aussi, donc deviennent constants. Remarquons que si Z est une composante irréductible d'une fibre, $2^n Z$ aussi, donc son degré est borné indépendamment de n. Soit G le groupe algébrique des g dans A tels que

$g + Z = Z$. On a

$$\text{degré}\,(Z \to 2^n Z) \cdot \text{degré}\,(2^n Z) = \deg([2n]^* L)_{|Z} = \deg(L^{\otimes 4^n})^d_{|Z} = 4^{nd} \deg(Z)$$

($[2^n]^* L = L^{\otimes 4^n}$ car L est symétrique). Le degré de $Z \to 2^n Z$ se calcule au point générique de Z et est donc égal au cardinal de $\operatorname{Ker}([2^n] : G \to G)$. On voit ainsi que $4^{nd} \deg Z / \sharp \operatorname{Ker}([2^n] : G \to G)$ est borné et donc que $\operatorname{Ker}[2^n] : G \to G$ est de l'ordre de 4^{nd}. Ceci implique deux choses :

i) G est de dimension d ;

ii) la composante connexe de G est une variété abélienne.

Si $z \in Z$, $z + G = Z$ car Z est irréductible, de dimension d, et que par définition $z + G \subset Z$. Donc G est connexe et Z est le translaté d'une variété abélienne, donc $d = 0$, CQFD.

COROLLAIRE 3.1.— *Si m est assez grand et si X satisfait aux hypothèses du lemme* 3.1, *alors le faisceau inversible*

$$\bigotimes_{i=1}^{m-1} \left(2^{m-i} x_i - 2^{m-i-1} x_{i+1}\right)^* (L)$$

est ample sur X^m quand L est ample sur A.

On a pris bien entendu $\left(2^{m-i} x_i - 2^{m-i-1} x_{i+1}\right) : A^m \longrightarrow A$ qui envoie $(x_1 \cdots x_m)$ sur $2^{m-i} x_i - 2^{m-i-1} x_{i+1}$. On en déduit que

$$\otimes\,(2^{m-i} x_i - 2^{m-i-1} x_{i+1})^* L = \alpha_m^* \otimes [2^{m-i-1}]^* pr_i^*(L).$$

3.2. Le fibré $L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)$

Nous sommes maintenant prêts à définir le fibré inversible important de ce travail et à montrer, en utilisant les chapitres 1 et 2 qu'il est ample sous certaines hypothèses.

DÉFINITION.— *Soit L un fibré inversible sur A et soient $\varepsilon, s_1, \cdots, s_m$ des nombres rationnels positifs, le* **Q** *fibré en droite, $L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)$ sur A^m est défini par :*

$$L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m) = \bigotimes_i pr_i^* \left(L^{\otimes \varepsilon s_i^2}\right) \otimes \bigotimes_i (s_i x_i - s_{i+1} x_{i+1})^* (L)$$

Comme plus haut, $(s_i x_i - s_{i+1}x_{i+1})^*(L)$ dénote l'objet suivant : Soit a un entier tel que as_i soit entier pour tout i. alors l'application $(x_i \cdots x_m) \to as_i x_i - as_{i+1}x_{i+1}$ de A^m dans A est bien définie, et l'image réciproque L par ce morphisme est la puissance tensorielle a^2-ième de $(s_i x_i - s_{i+1}x_{i+1})^*(L)$.

Dans ce rapport, nous considérerons toujours le cas où L est ample et symétrique sur A. Notons $P_{i,j} = (x_i + x_j)^* L \otimes pr_i^* L^{\otimes -1} \otimes pr_j^* L^{\otimes -1}$ le fibré de Poincaré d'indice i, j et $L_i = pr_i^* L$, $L(-\varepsilon, s) = L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)$. On voit que $L(-\varepsilon, s)$ est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des L_i et des $P_{i,j}$. En fait

$$L(-\varepsilon, s) = \bigotimes_i L_i^{\otimes s_i^2(1-\varepsilon)} \otimes \bigotimes_i P_{i,i+1}^{\otimes - s_i s_{i+1}}.$$

THÉORÈME 3.2.— *Choisissons un entier m comme dans le lemme 3.1 ; alors il existe ε_0 réel positif tel qu'il existe un réel r, tel que : $L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)$ est ample dès que $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $s_i/s_{i+1} \geq r$.*

Remarquons que $L(0, 2^{m-1}, 2^{m-2}, \cdots, 2^0)$ est le faisceau inversible considéré au corollaire 3.1 ; on sait donc déjà que celui-ci est ample sur X^m.

Lemme 3.2.1.— Soit $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ une variété produit dans A^m ; alors comme fonction des s_i, $(L(-\varepsilon, s)^{\dim Y} \cdot Y)$ est proportionnel à $\prod s_i^{2\dim Y_i}$.

COROLLAIRE 3.2.1.— *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ et si Y est une variété produit dans X^m, alors $L(-\varepsilon, s)^{\dim Y} \cdot Y$ est strictement positif.*

Ceci résulte du corollaire 3.1. Pour ε petit et $s_i = 2^{m-i}$, le résultat est donc aussi établi par le lemme 3.2.1, il est donc vrai pour les mêmes ε et $s_1 \cdots s_m$ positifs quelconques.

On montre maintenant par récurrence que, pour tout N entier, et pour un produit $Y = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ dans X^m avec $\deg Y_i \leq N$, il existe r_0 (dépendant de ε et N) tel que $L(-\varepsilon, s)$ soit ample sur Y si $s_i/s_{i+1} \geq r_0$. On fait une récurrence sur la dimension de Y (Y étant toujours un produit). Par le théorème de Kleiman ([K]), $L(-\varepsilon, s)$ est dans la fermeture du cône ample si, restreint à toute courbe irréductible C dans Y, il est de degré positif ou nul. En diminuant un peu ε, il sera ample. Pour montrer la positivité du degré de $L(-\varepsilon, s)$ sur C, nous allons **A)** d'abord trouver une section de $L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}$ sur Y ; **B)** ensuite, montrer que si l'index du point générique de C est assez grand, par le théorème 2.1 C sera contenu dans un produit plus petit; **C)** enfin, si l'index au point générique de C est petit et si $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon_0$, ε_0' bien choisi, alors $L(-\varepsilon', s)$ a une section sur C.

A) Si d est assez grand $\chi(Y, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}$ est positif (corollaire 3.2.1). Il nous suffira donc, pour avoir $H^0(Y, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d} \neq 0$, de vérifier que pour $d \gg 0$ $H^i(Y, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}) = 0$ $i \geq 2$. Or, si H est une section hyperplane, et si d est assez grand,

$$H^i(H, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}(H)_{|H}) = 0 \qquad \text{pour } i \geq 1.$$

La suite exacte longue de cohomologie donne que

$$H^i(Y, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}) \longrightarrow H^i(Y, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}(H))$$

est un isomorhisme pour $i \geq 2$. L'ennui, c'est que le d choisi dépend de H. Un travail un peu plus fin permet quand même de conclure dans le même esprit :

$$H^i(Y, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}) \longrightarrow H^i(Y, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d}(NH))$$

est un isomorphisme $i \geq 2$, $N \gg 0$. Donc chacun de ces groupes est nul.

B) On choisit une courbe C dans Y et on définit l'index $i(C)$ de la section trouvée dans **A)** en un point générique de C comme dans 2.2 quand C n'est pas contenu dans le lieu de ramification $Z_1 \times \cdots \times Z_m$ de morphismes raisonnablement choisis $Y_i \to \mathbf{P}^{\dim Y_i}$. (Si C était contenu dans $Z_1 \times \cdots \times Z_m$, l'hypothèse de récurrence s'appliquerait.) Choisissons σ assez petit et supposons $i(C) \geq \sigma$. Dans $\mathbf{P}^{n_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{n_m} = P$
$n_i = \dim Y_i$ les $(Z_{\sigma i/\dim P})$ $i = 1, 2, \cdots \dim P$ ont des composantes de dimension strictement comprise entre 0 et $\dim P$ ($Z_{\sigma i/\dim P}$ contient le point générique de l'image de C et aucun ne peut être P en entier car la section est non nulle). Par le théorème du produit un des $Z_{\sigma i/\dim P}$ est un produit quand $s_i/s_{i+1} \geq r$ et r assez grand. La courbe C elle-même est donc contenue dans un fermé produit plus petit et l'hypothèse de récurrence s'applique.

C) $i(D) < \sigma$. La théorie de 2.2 montre qu'on a ainsi une constante λ telle que $L(\lambda \deg(C \to D)\sigma - \varepsilon, s)_{|C}$ a une section non nulle (dérivée de celle de $L(-\varepsilon, s)$ sur Y). Choisissant σ assez petit pour que $\lambda \deg(C \to D)\sigma + \varepsilon$ soit plus petit que ε_0, alors, pour s assez grand, le degré cherché est non nul.

Le théorème d'amplitude est donc démontré. Il reste à voir le profit qu'on peut tirer de la forme explicite de $L(-\varepsilon, s)$ pour calculer son degré d'Arakelov en un point de X^m.

3.3. Le degré d'Arakelov de $L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)$

Si on a pris soin de prendre L symétrique cubiste et très ample, on sait que le degré d'Arakelov de $L_{|E}$ où E est la section du modèle de Néron de A sur $\mathcal{O}_K$ correspondant à un point rationnel P de A sur K, on a :

il existe une constante C telle que

$$\left| \frac{1}{K : \mathbf{Q}} \deg L_{|E} - \langle P \cdot P \rangle \right| < C$$

où $\langle P \cdot P \rangle$ est le carré scalaire pour l'accouplement de Néron-Tate qui est bilinéaire pour l'addition dans A. De même

$$\left| \frac{1}{K : \mathbf{Q}} \deg P_{1,2|E_1 \times E_2} - 2\langle P_1 \cdot P_2 \rangle \right| < \text{constante}$$

si $P_{1,2}$ est le fibré de Poincaré (*cf.* par exemple [M.B.])

Comme $L(-\varepsilon, s) = \otimes_i L_i^{s_i^2}(1-\varepsilon) \otimes \otimes_i P_{i,i+1}^{\otimes - s_i s_{i+1}}$ si $(x_1, \cdots, x_m) \in X^m$ et si $\left| \|x_i\|^2 - \frac{1}{s_i^2} \right| < \alpha$, α très petit, et si $\langle x_i \cdot x_{i+1} \rangle \geq (1 - \varepsilon/2)\, \|x_i\|\, \|x_{i+1}\|$, on a

$$\frac{1}{K : \mathbf{Q}} \deg L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d}_{|E_1 \times \cdots \times E_m} \leq$$
$$\sum s_i^2 (1-\varepsilon)(\|X_i\|^2 + C)d - s_i s_{i+1}(2\langle X_i \cdot X_{i+1} \rangle - C)d$$

et donc il existe une constante C' telle que

$$\deg L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d}_{|E_1 \times \cdots \times E_m} \leq -d\,\varepsilon/2\,m + C'(\Sigma\, d s_i^2).$$

4. UNE APPROXIMATION TROP GRANDE

Dans cette partie, nous faisons enfin intervenir l'arithmétique de la situation. Nous commençons par un lemme sur les points d'un réseau n'appartenant pas à un sous-réseau et de "norme contrôlée". Nous utiliserons ce lemme pour trouver une section d'un des fibrés amples de la partie 3 qui soit d'indice petit en un point.

4.1. Un lemme de Siegel revisité

Soit V un espace vectoriel réel de dimension v et M un réseau dans V. On suppose V muni d'une norme notée $\| \ \|$. Si on note B la boule unité de V et λ_i le plus petit λ tel qu'il existe dans M un ensemble de i vecteurs linéairement indépendants de norme au plus λ, Minkowski [Mi] a montré qu'on a :

$$\operatorname{vol}(V/M)\, 2^v/v! \leq \lambda_1 \cdots \lambda_v \operatorname{vol}(B) \leq 2^v \operatorname{vol}(V/M).$$

On s'intéresse maintenant à borner "les λ_i" du noyau d'une application linéaire. De manière naturelle, l'énoncé précédent de Minkowski implique

Lemme 4.1.— *Soit* $0 \longrightarrow U \longrightarrow V \xrightarrow{\alpha} W$ *une suite exacte d'espaces vectoriels sur* $\mathbf{R}$ *de dimensions respectives* u, v, w. *Soient* M *un réseau de* V *et* N *un réseau de* W. *Supposons que* $\alpha(M)$ *soit contenu dans* N. *Soient, de plus, données des normes sur* V *et* W *et soit* C *un réel supérieur ou égal à deux, tel que :*

a) α *est de norme au plus* C ;

b) M *est engendré par des vecteurs de normes au plus* C ;

c) *tout élément non nul de* M *ou* N *a une norme au moins égale à* C^{-1}.

Alors, munissant U *de la norme induite par celle de* V, *on a :*

$$\lambda_{i+1}(U \cap M, U) \leq (C^{3v} \cdot v!)^{1/v-i}.$$

4.2. Sections de $L(\sigma-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)$ d'indice moins grand que σ en un point

Soit K un corps de nombres, $\mathcal{O}_K$ son anneau d'entiers, $\bar{K}$ une clôture algébrique de K. Soit A un schéma *projectif* sur $\mathcal{O}_K$ dont la fibre est une variété abélienne A_K. Soit X_K une sous-variété irréductible, fermée de A_K telle que $X_{\bar{K}}$ ne contienne aucun translaté d'une sous-variété abélienne de $A_{\bar{K}}$. Soit $X \hookrightarrow A$ un modèle de X_K sur $\mathcal{O}_K$. Choisissons m comme dans le lemme 3.1, L un fibré très ample sur A symétrique sur A_K et un modèle normal B de A_K^m, dominant A^m tel que les fibrés de Poincaré $P_{i,j,K}$ s'étendent en des fibrés en droites $P_{i,j}$ sur B. On appellera Y la fermeture de X^m dans B. Le théorème technique suivant permet de trouver des sections d'indice au plus σ, "holomorphes" sur Y, pour les fibrés amples considérés en 3.2. On veut de plus connaître la "grandeur" d'une telle section. Pour ceci, on munit l'espace des sections holomorphes $\mathbf{C} \otimes H^0(X_K, L(-\varepsilon, s_1 \cdots s_m))$ de la norme sup déduite des métriques à courbure invariante par translation qu'on peut naturellement mettre sur les L_i et les P_{ij} (*cf.* par exemple l'exposé de L. Moret-Bailly [M-B]).

THÉORÈME 4.2.— *Avec les notations ci-dessus introduites, soit $(x_1, \cdots, x_m)$ un point lisse de X_K^m et soient $0 < \sigma < \varepsilon < \varepsilon_0$ des réels et soient s_i/s_{i+1} des quotients assez grands comme dans le théorème 3.2. Alors, pour d suffisamment grand, on peut trouver un élément de $H^0(Y, L(\sigma-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d})$ d'indice strictement plus petit que σ dont la norme aux places à l'infini est bornée par $\exp(C\sum_i d s_i^2)$ (où C est une constante ne dépendant que de σ et ε).*

Pour montrer ce théorème, établissons d'abord une situation comparable à celle du lemme 4.1. La suite exacte sera celle déduite d'un "complexe de Koszul" :

$$0 \longrightarrow \Gamma(X_K^m, L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d}) \longrightarrow \Gamma(X_K^m, \bigotimes_i L_i^{\otimes 4ds_i^2})^n$$
$$\longrightarrow \Gamma(X_K^m, \bigotimes_i L_i^{\otimes 12ds_i^2})^{n(n-1)/2}.$$

Pour "voir" la première application, notons qu'en partant des sections de L (très ample), on met en évidence des injections de $L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)$ dans

$\otimes_i L_i^{\otimes 4ds_i^2}$ sans zéro commun.

Quitte à envoyer encore $L(-\varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d}$ dans $\otimes L_i^{\otimes 4ds_i^2}$, les trois premiers termes du "complexe de Koszul"

$$0 \longrightarrow L(-\varepsilon, \mathbf{s})^{\otimes d} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_k}^n \otimes \bigotimes_i L_i^{\otimes 4ds_i^2} \longrightarrow (\overset{2}{\Lambda}\, \mathcal{O}_{X_k}^n) \otimes \bigotimes_i L_i^{\otimes 8ds_i^2} \otimes L(-\varepsilon, s)^{\otimes -d}$$

donnent la suite exacte annoncée.

On a envie de prendre les sections sur Y des "mêmes" faisceaux comme réseaux formant une suite exacte (pour pouvoir appliquer le lemme de Siegel). En fait, on montre qu'il existe une constante C ne dépendant que de ε telle que :

a) *la suite* $O \to \Gamma(Y, L(-\varepsilon, \mathbf{s})^{\otimes d}) \to \Gamma(Y, \otimes L_i^{\otimes 4ds_i^2}) \to \Gamma(Y, \otimes L_i^{\otimes 12ds_i^2})$ *est un complexe à cohomologie de torsion annulé par* $\exp(C\, \Sigma\, d\, s_i^2)$.

On démontre ensuite l'existence d'une constante C ne dépendant que de σ et ε telle que :

b) *l'injection* $\Gamma(Y, L(-\varepsilon, \mathbf{s})^{\otimes d}) \to \Gamma(Y, \otimes_i L_i^{\otimes 4ds_i^2})^n$ *est de norme bornée par* $\exp(C\, \Sigma\, d\, s_i^2)$.

(chacun de ces deux réseaux est muni de normes sup).

Des généralités sur les métriques sur les fibrés en droites et les normes sup sur leurs sections permettent alors d'établir :

c) *Il existe une constante C ne dépendant que de σ et ε telle que les normes des éléments de* $\Gamma(Y, \otimes_i L_i^{\otimes 4ds_i^2})$ *et de* $\Gamma(Y, \otimes_i L_i^{\otimes 12ds_i^2})$ *sont bornés inférieurement par* $\exp(C\, \Sigma\, d\, s_i^2)$.

L'anneau multigradué $\oplus_{\mathbf{n}} \Gamma(Y, \otimes_i L_i^{\otimes n_i})$ étant de type fini sur l'anneau des polynômes multigradué $\oplus_{\mathbf{n}} \Gamma((\mathbf{P}^n)^m, \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n_i))$, on a :

d) *Il existe une constante C telle que* $\Gamma(Y, \otimes_i L_i^{\otimes 4ds_i^2})$ *est engendré par des éléments de norme au plus* $\exp(C\, \Sigma\, d\, s_i^2)$.

Notons que la dimension de $\Gamma(X_K^m, L(-\varepsilon, s)^{\otimes d})$ est un $O(\prod_i (ds_i^2)^{\dim X_K})$. Pour montrer le théorème 4.2, on veut calculer l'ordre de grandeur de la codimension de l'espace des sections de $L(\sigma - \varepsilon, \mathbf{s})$ ayant un index supérieur ou égal à σ en $(x_1, \cdots, x_m)$, dans $\Gamma(X_K^m, L(-\varepsilon, \mathbf{s})$. Comme le faisceau $L(-\varepsilon, \mathbf{s})$ est ample pour $\varepsilon < \varepsilon_0$ et s_i/s_{i+1} assez grand (théorème 3.2), on voit que cette codimension est bornée inférieurement par un multiple positif de $\prod_i (ds_i^2)^{\dim X_K}$. (Compter le nombre de conditions imposées par "index $\geq \sigma$".) Le lemme 4.1 montre qu'asymptotiquement, il existe dans $\Gamma(Y, L(-\varepsilon, \mathbf{s})^{\otimes d})$ un sous-espace de dimension un de plus que l'espace cité plus haut engendré par des éléments de norme au plus $\exp(C \Sigma\, d\, s_i^2)$. On en déduit le théorème 4.2.

4.3. Degré d'Arakelov et index

Nous montrons enfin dans ce paragraphe le théorème 1. Nous prenons un entier m comme dans 3.1 et, pour tout $i = 1, \cdots m$, choisissons une projection

$$X_K \xrightarrow{\pi_i} \mathbf{P}^{\dim X} = P_i.$$

Pour chaque i, il existe une hypersurface Z_i d'équation G_i dans P_i, telle que G_i annule Ω^1_{X/P_i}. De cette façon, si D est un opérateur différentiel sur P_i, $G_i\, D$ est un opérateur différentiel sur X. En raisonnant par récurrence sur dim X, on peut supposer qu'on a une infinité de points de $X_K(K)$ non dans $\pi_i^{-1}(Z_i)$ pour tout i. Par le théorème de Mordell-Weil, $A_K(K) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ est un espace vectoriel de dimension finie. Cet espace vectoriel est muni d'un accouplement "de Néron-Tate" qui est non dégénéré noté $\langle\, ,\, \rangle$. On sait que la hauteur d'un point définie à partir d'un fibré très ample symétrique L sur A ne diffère de son "carré scalaire pour Néron-Tate" que par une constante (*cf.* par exemple [Ma]). Si on a une infinité de points rationnels sur K dans l'intersection des $X_K - \pi^{-1}(Z_i)$, on peut, choisissant s et ε comme dans le théorème 3.2, trouver dans cette intersection m points $x_1, \cdots, x_m$ de hauteurs $h_1, \cdots, h_m$ tels que :

i) h_1 est très grand ;

ii) $h_{i+1}/h_i > s^2$;

iii) $\langle x_i \cdot x_{i+1} \rangle \geq (1 - \varepsilon/2)\, \|x_i\|\, \|x_{i+1}\|$.

En choisissant des rationnels s_i très proches de $h_i^{-1/2}$, on voit que $L(\sigma - \varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d}$ a un degré d'Arakelov sur la section de Y correspondant au point $x_1, \cdots, x_m$ borné supérieurement par

$$(*) \qquad d((\sigma - \varepsilon/2)m + (\text{constante}) \cdot (\Sigma\, d\, s_i^2)$$

(même calcul qu'en 3.3.). D'autre part, par définition du degré d'Arakelov, la section du faisceau métrisé $L(\sigma - \varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d}$ trouvée au théorème 4.2 donne si elle est non nulle en $\mathbf{x}$, une borne inférieure : $-(\text{constante}) \cdot (\Sigma\, d\, s_i^2)$. Prenant au départ $\sigma = \varepsilon/4$, par exemple, on en déduit que la section due au théorème 4.2 est nulle en $\mathbf{x}$. C'est cet argument appliqué aux "dérivées" de la section qui permettra de montrer que son index est trop petit. Quitte à prendre ses précautions en chassant les dénominateurs, on voit que si $D = D_1 \cdots D_m$, D_i opérateur différentiel sur P_i tel que $\sum \frac{\deg D_i}{4ds_i^2} \leq i(x, f)$ (f section de $L(\sigma - \varepsilon, \mathbf{s})^{\otimes d}$ trouvée en 4.2)

$$\prod N(G_i)^{\deg D_i} \cdot \prod \frac{D_i}{\left(\prod_j \alpha_{i,j}!\right)}(f)$$

est "entier" en $(x_1, \cdots, x_m)$ par la formule de Taylor (où $D_i = \prod \frac{\partial^{\alpha_{i,j}}}{\partial X_j^{\alpha_{i,j}}}$ sur P_i).

On obtient ainsi une section de

$$L(\sigma - \varepsilon, s_1, \cdots, s_m)^{\otimes d} \otimes \bigotimes_i L_i^{\deg D_i \, \deg G_i}.$$

Nous établissons plus bas une borne supérieure pour la norme de cette section en chaque place à l'infini. Mais notons déjà que la section ainsi obtenue, si on choisit bien D, ne s'annule pas en $x_1 \cdots x_m$, et que le degré d'Arakelov de ce faisceau restreint à la section correspondant à $(x_1 \cdots x_m)$ est borné supérieurement par $d(C_1\sigma - \varepsilon/2)m + C_2 \cdot (\Sigma\, d\, s_i^2)$ (C_1 et C_2 constantes). Donc si on arrive à montrer que la norme aux places à l'infini de cette section est au plus $C_3(\Sigma\, d\, s_i^2)$, C_3 ne dépendant (comme C_2) que de σ et ε, et si on a pris soin de choisir $C_1\sigma \leq \varepsilon/4$, on aura une contradiction et le théorème 1 sera prouvé.

Il nous reste donc à majorer les "dérivées" d'une section de $L(\sigma - \varepsilon, \mathbf{s})$. La formule de Cauchy permet de borner $\frac{1}{a!}\frac{\partial^a}{\partial X^a}(f)$ par $\frac{1}{r^a}$ sup $|f|$ sur le disque de rayon r. Prenant autour du point X_i une boule de rayon $|G_i(x_i)| = r_i$ ou plus, on voit qu'on a une borne de la forme $\|f\|\, C^{ds_1^2 + \cdots ds_m^2}$ $\prod_i r_i^{-\deg D_i}$, C constante, pour $D_1 \cdots D_m(f)$. Remarquons qu'on a deg $D_i \leq 4\sigma\, ds_i^2$. On obtient ainsi la borne $C_3(\Sigma\, d\, s_i^2)$ pour $\|D_1 \cdots D_m(f)\|$.

5. AUTRES RÉSULTATS

S. Lang a, de manière bien naturelle, demandé si l'hypothèse X fermée dans A variété abélienne était nécessaire (en supposant que X ne rencontre pas de translaté de sous-variété abélienne). À ma connaissance, on ne sait pas la réponse à cette question. G. Faltings a cependant, en poussant les méthodes exposées ici, réussi à montrer la conjecture de S. Lang suivante : Soit A une variété abélienne, H un diviseur ample sur A. Alors, $A - H$ ne contient qu'un nombre fini de points entiers.

Les résultats exposés ici ne sont pas effectifs, *i.e.* on n'a pas de borne explicite pour la hauteur des points considérés. On consultera avec profit un séminaire à paraître incessamment dans la revue Astérisque sur le sujet de l'effectivité.

On vient de me communiquer un manuscrit de E. Bombieri reprenant, en dimension un au moins, les arguments de P. Vojta dans un vocabulaire et une technique plus proches des œuvres de Siegel.

BIBLIOGRAPHIE

[A] S.J. ARAKELOV - *Intersection theory on arithmetic surfaces*, Math USSR Izvestia, vol. 8 (1974), n° 6, 1167-1180.

[F1] G. FALTINGS - *Endlichkeitssätze für Abelsche Varietäten über Zahlkörpern*, Inv. Math. Vol. 73, Fasc. 3 (1983), 349-366.

[F2] G. FALTINGS - *Diophantine approximation on Abelian varieties*, prépublication, 1989-1990.

[H] M. HINDRY - *Autour d'une conjecture de Lang*, Inv. Math. Vol. 94 (1988), 575-603.

[K] S.L. KLEIMAN - *Towards a numerical theory of ampleness*, Annals of Maths 84 (1966), 293-344.

[Ma] Y.I. MANIN - *Mordell-Weil theorem*, appendix II dans D. Mumford "Abelian varieties", Oxford University Press, 1970.

[Mi] H. MINKOWSKI - *Geometrie der Zahlen*, New York, Chelsea, 1953.

[M-B] L. MORET-BAILLY - *Métriques permises*, dans "Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell", Astérisque 127 (1985).

[V] P. VOJTA - *An extension of the Thue-Siegel-Dyson-Gel'fand theorem*, prépublication, 1989.

Lucien SZPIRO

CNRS URA 213
Institut Henri Poincaré
11 rue Pierre et Marie Curie
F-75005 PARIS